



Propuesta de diseño de un modelo local de análisis y conocimientos didácticos que permita abordar la noción de radián en el movimiento circular como un elemento clave para desarrollar pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo.

Joan Sebastián Marín Muñoz

Universidad del Valle
Sede Cali - Valle del Cauca

Escuela de educación en ciencias, tecnologías y culturas

Facultad de educación y pedagogía

Santiago de Cali-Colombia

2024



Propuesta de diseño de un modelo local de análisis y conocimientos didácticos que permita abordar la noción de radián en el movimiento circular como un elemento clave para desarrollar pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo.

Joan Sebastián Marín Muñoz
Código: 201526933

Informe final trabajo de grado para optar al título de licenciado en básica con énfasis en matemáticas

Director
PhD. D Evelio bedoya moreno

Codirector
Lic. Brayan Andrés Stuart Vernaza

Universidad del Valle

Facultad de educación y pedagogía
2024

Tabla de contenido

Resumen.....	9
Abstract.....	10
Introducción	11
1. Capítulo 1.....	12
1.1 Formulación del Problema de Investigación.....	12
1.2 Sistematización de la problemática de investigación.....	18
1.2.1 Pregunta Problema:	18
1.2.2. Preguntas auxiliares	19
1.3. Justificación de la investigación	20
1.4 Objetivos.....	24
1.4.1 General:.....	24
1.4.2. Específicos:	24
1.5 Antecedentes.....	¡Error! Marcador no definido.
Capítulo II	29
2. Marco teórico	29
2.1. Marco Contextual.....	29
2.1.1 Dimensión Curricular.....	29
2.1.1.1 Estándares Básicos de Competencia (EBC).....	29
2.1.1.2 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).....	33
2.1.1.3 Lineamientos Curriculares (LC)	36
Figura 2. <i>Relación de los conocimientos básicos, procesos generales y contextos.</i>	38
2.1.1.4 Acerca de la formación de profesores de matemáticas	40
2.2 Marco conceptual.....	42
2.2.1 Dimensión Didáctica.....	43
2.2.1.1 Modelo local de análisis didáctico.	43
2.2.1.1.1 Esquema de construcción del modelo local de análisis didáctico.....	45

2.2.1.1.2 Análisis Curricular.....	48
2.2.1.1.3 Análisis Cognitivo.....	49
2.2.1.1.3 Análisis Contenido.....	50
2.2.1.1.4 Análisis didáctico de instrucción:	52
2.2.1.2 Modelo Van Hiele.....	52
Fase De Información.....	58
Fase de Orientación Dirigida.	58
Fase de Explicitación.	58
Fase De Orientación Libre.	59
Fase De Integración.	59
2.2.1.3 Unidad didáctica	61
2.2.2 Contenido Matemático.....	63
2.2.2.1 Radián	63
2.2.2.1.2 Estructura conceptual del radián	63
Definición 1 (ángulo).....	67
Definición 2 (Medida angular):.....	68
Definición 3 (Sistema sexagesimal):.....	68
Definición 4 (Principio del supremo):	69
Definición 6 (números reales de acuerdo con Dedekind):	70
Definición 8 (Circunferencia unitaria o goniométrica):.....	71
Definición 9 (Arco):.....	71
Definición 10 (Perímetro de un círculo):	72
Definición 11 (Proporción del número π):	73
Definición 12 (Radián):	73
Definición 13 (Geoplano Circular):	74
Capítulo III.....	74
3. Marco Metodológico.....	74

3.1 Modelo local de análisis didáctico:	75
3.2 Sistematización de experiencias docentes.....	77
3.2.1 Descripción de Contextos, Participantes y Estrategias de Recolección de Información	81
3.2.1.1 Caracterización General: contextos, participantes y recolección de los datos	81
3.2.1.2 Modelo Pedagógico:	83
3.2.1.3 Contexto del Aula	83
3.3 Recolección de la información.....	84
Capitulo IV:	87
4.1 Presentación de resultados y análisis:	88
4.2 Análisis didáctico curricular: Contextualización del currículo en torno a lo planteado por el MEN y el PEI institucional:.....	92
4.3 Análisis de contenido:	93
4.3.1 Estructura conceptual y relación de las medidas angulares	94
4.5. Análisis didáctico cognitivo.....	105
4.4.1 Concepto de dificultad en matemáticas.....	106
4.4.2 Concepto de Obstáculo:	107
4.4.3 Concepto de Error:	108
4.5. Análisis instruccional o de instrucción:	113
4.5.1 Concepto de materiales	113
4.5.2 Funcionalidad y categorización	114
4.6 Unidad didáctica para la enseñanza del radián mediante la integración del movimiento circular uniforme como un agente movilizador de pensamiento geométrico.....	117
4.7. Resultados obtenidos y análisis de la estructura de las actividades planteadas desde la guía y orientación de la teoría de los Van Hiele	136
4.7.1 Estructura de la construcción de las actividades de la unidad siguiendo nivel 1 de van hiele. 137	
Figura 20. Estructura del Modelo Van Hiele aplicado al nivel 1 de visualización en la Unidad.....	137
4.7.2 Estructura de la construcción de las actividades de la unidad siguiendo nivel 2 de van hiele. 138	
Figura 21. Estructura del Modelo Van Hiele aplicado al nivel 2 de Análisis en la Unidad.....	138

4.8 Resultados obtenidos y análisis sobre la aplicación (prueba piloto) de la propuesta de unidad didáctica (UD).....	139
4.9 Resultados obtenidos y análisis en relación con la propuesta de modelo local de análisis didáctico	144
4.9.1 Análisis curricular:.....	145
4.9.2 Análisis del contenido.....	146
4.9.4 Análisis de instrucción.....	149
Capítulo V: Conclusiones	153
5.1 Consideraciones finales acerca de la investigación en didáctica de las matemáticas como una herramienta formativa para profesores	153
5.2 Consideraciones sobre la información obtenida a partir de la pregunta central de investigación...	155
5.4 Resultados y consideraciones obtenidas a partir de los objetivos de la investigación:	156
5.5 Resultados y consideraciones obtenidas a partir de los objetivos específicos	158
5.6 Resultados y consideraciones finales.....	160
Referencias Bibliográficas	162
Anexos	169

Índice de Figuras

Figura 1. Organización curricular para la enseñanza de medidas angulares y el radián.	33
Figura 2. Relación de los conocimientos básicos, procesos generales y contextos.	38
Figura 3: El carácter teórico y práctico del análisis didáctico (AD)	44
Figura 4: Estructura esquemática y sistémica de la organización y contenidos del conocimiento didáctico y el modelo local de análisis didáctico de los contenidos matemáticos escolares.....	46
Figura 5. Construcción del ángulo $\angle AOB$	67
Figura 6: Modelación del concepto del grado Sexagesimal.....	68
Figura 7: Construcción gráfica de la circunferencia unitaria	71
Figura 8: Construcción geométrica de la noción de arco	72
Figura 9: Modelación figural de la noción de perímetro.....	72
Figura 10. Representación geométrica de la proporción del Diámetro en la circunferencia	73
Figura 11. Mapa conceptual de la relación de la estructura de las representaciones del radián.....	95
Figura 12. Representación de una circunferencia unitaria.	96
Figura 13. Representación de la rotación del radio a partir del ángulo central de la circunferencia...	97
Figura 14: Representación de las propiedades de un arco con respecto al ángulo.....	99
Figura 15. Propiedad # 2 de una longitud de arco mayor a $2\pi r$	99
Figura 16. Propiedad 1 construcción de la función enrolladora	101
Figura 17. Propiedad 2 construcción de la función enrolladora	101
Figura 18: Propiedad 3 construcción de la función enrolladora	102
Figura 19. Definición del radián como el dominio de una función de naturaleza real.	103
Figura 20. Estructura del Modelo Van Hiele aplicado al nivel 1 de visualización en la Unidad.....	137
Figura 21. Estructura del Modelo Van Hiele aplicado al nivel 2 de Análisis en la Unidad.....	138

Índice de tablas

Tabla 1 .. Construcción de la unidad de medición del ángulo a partir de su concepción y representación.	63
Tabla 2. Esquema conceptual de las representaciones trabajadas para construir el concepto de radián.	64
Tabla 3. Esquema MPD (Metas, procesos y desempeños)	93
Tabla 4. Esquema concebido de dificultades, obstáculos y errores a destacar en la concepción del radián.	112

Índice de anexos

Anexo # 1. Análisis de la unidad a partir de la aportación de un grupo focal	169
Anexo # 2. Descripción general de la prueba piloto aplicada	182
Anexo # 2.1 Transcripción:	185
Anexo 3. Transversalidad de los estándares competencias trabajadas desde el currículo del MEN para la conceptualización del radián	195
Anexo # 4. Evidencias de la aplicación de la prueba piloto	196
Anexo 5. Consentimientos firmados para la grabación de la prueba piloto	199

Resumen

Este trabajo de grado presenta una propuesta de transformación didáctica y curricular enfocada en el diseño de una unidad didáctica que toma al radián como eje articulador en contenidos como la trigonometría, las funciones periódicas y el movimiento circular, con la finalidad de abordar algunas problemáticas persistentes en la comprensión de la medida angular por parte de estudiantes de grado décimo. La propuesta se materializa mediante la elaboración de un modelo local de análisis y saberes didácticos que integra aspectos teóricos, prácticos y fenomenológicos, fundamentado en los principios del pensamiento geométrico descritos por la teoría de Van Hiele, con el objetivo de potenciar habilidades geométricas y métricas en el contexto escolar. Lo anterior se concreta mediante la aplicación de una metodología cualitativa de investigación – acción, que pretende ofrecer herramientas conceptuales y metodológicas para afrontar los retos del diseño e implementación de propuestas innovadoras en educación matemática.

Palabras claves: Innovación curricular, unidad didáctica, pensamiento geométrico, modelo local de análisis didáctico, radian, funciones periódicas, teoría de los Van Hiele, profesor en formación, movimiento circular, eje articulador.

Abstract

This undergraduate thesis presents a proposal for didactic and curricular transformation, centered on the design of a teaching unit that positions the radian as a key conceptual link among topics such as trigonometry, periodic functions, and circular motion. Its purpose is to address persistent challenges in students' understanding of angular measurement at the tenth-grade level. The proposal is developed through the construction of a local model of didactic knowledge and analysis that integrates theoretical, practical, and phenomenological dimensions, grounded in the principles of geometric thinking as outlined in the Van Hiele theory. The work is structured within a qualitative action research methodology, aimed at providing conceptual and methodological tools to support the design and implementation of innovative strategies in mathematics education.

Keywords: Curricular innovation, teaching unit, geometric thinking, local model of didactic analysis, radian, periodic functions, Van Hiele theory, pre-service teacher, circular motion, conceptual link.

Introducción

El trabajo a continuación presentado, se enmarca en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas (Ddm) del programa de licenciatura en básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle. La presente investigación pretende concretar por medio de la integración en el diseño de una unidad didáctica, enfocada en el uso del radián, una propuesta de modelo local de análisis didáctico, utilizando algunos elementos de la teoría de razonamiento geométrico de los Van Hiele, para fortalecer el trabajo y desarrollo de competencias desde el componente geométrico y métrico, de estudiantes de grado décimo de escolaridad.

Para reconocer elementos, habilidades y conocimientos clave de tipo didáctico y curricular que emplea un profesor frente a innovaciones curriculares y metodológicas. Se pretende aplicar un modelo cualitativo de investigación acción, por medio del cual puedan ser identificadas y fortalecidas, desde las dimensiones didáctica, curricular, matemática y fenomenológica de sus componentes, las competencias desarrolladas mediante el análisis de un objeto matemático crucial en la construcción de funciones trigonométricas de naturaleza real, como lo es la medida angular en radianes.

1. Capítulo 1

1.1 Formulación del Problema de Investigación.

Por medio del estudio de la función trigonométrica se ha logrado desarrollar dentro de las ciencias, herramientas cruciales que permiten al ser humano comprender el comportamiento de su entorno y las leyes que rigen los distintos fenómenos que ocurren a su alrededor. Sin embargo, a pesar del uso de las funciones trigonométricas como una herramienta de modelación para el estudio de fenómenos tales como el movimiento circular uniforme, el desplazamiento de una onda (mecánica o electromagnética) y otros acontecimientos inmersos en variados contextos, la concepción de su fenomenología didáctica, como una herramienta de trabajo en el aula es todavía objeto de reflexión constante, iniciando por el análisis de sus unidades de medición angular, empezando por el radián.

Por medio de las funciones trigonométricas se puede comprender mejor el comportamiento de la naturaleza que nos rodea. (Cabrera Matas, M. I. F., 2022). De acuerdo con Montiel (2005), el hombre busco incesantemente la recurrencia periódica de los fenómenos naturales, motivado por la necesidad de tener intervalos de tiempo adecuados para determinar las épocas adecuadas para el ejercicio de actividades sociales vitales como la agricultura, la pesca, la navegación y el comercio, todo esto investigado desde los registros de la observación en el cambio de posición de las estrellas y planetas.

Luego, mediante la aceptación y el estudio del infinito como un agente crucial al momento de caracterizar y concebir objetos en la matemática, todo esto inspirado por el concepto de cambio y variación constante, la trigonometría adquiere también un estatus importante como una función

trascendente de naturaleza analítica, donde sus argumentos de naturaleza geométrica ahora son producto de la naturaleza de un movimiento en constante cambio y con un tratamiento de las ecuaciones algebraicas. (Montiel, 2005.p.84).

El rápido desarrollo en las formas de concebir la naturaleza de la trigonometría pasando de ser una herramienta geométrica, a ser parte de una función trascendente, ha despertado dentro del campo de la educación matemática la preocupación por analizar los fenómenos de enseñanza de la función trigonométrica. El análisis e investigaciones surgidos a raíz de esta problemática para la enseñanza de la matemática escolar, se ha venido abordando por medio de la realización de investigaciones enfocadas en analizar los fenómenos y problemáticas existentes al momento de trabajar la trigonometría del círculo y la del triángulo.

Investigaciones como las de Weber (2005), Moore (2010), Moore et al. (2012), Meneses (2013), Ekici & Alagoz (2021), e incluso la investigación de Alyami (2024); dejan entrever que la preocupación por analizar las relaciones y acontecimientos que ocurren dentro de los fenómenos de aprendizaje y enseñanza de las funciones trigonométricas en contextos escolares, lejos de lograr ser agotada sigue generando una preocupación plausible dentro del campo de la educación matemática. Los profesionales del campo de la EM (Educación Matemática) y de la DdM (Didáctica de las Matemáticas) continúan trabajando para desarrollar herramientas de análisis que permitan abordar y atender las problemáticas y fenomenologías resultantes del trabajo con los objetos propios de la función trigonométrica, como un asunto relevante dentro del campo de la enseñanza de las matemáticas.

Un caso crucial de análisis al momento de abordar el campo de la trigonometría ocurre al momento de transformar la razón trigonométrica en una función trigonométrica, por medio de la variación del argumento y la eliminación del paso de la equivalencia de la operación con la razón entre los lados del triángulo rectángulo, esta se convierte en una función de números reales en su dominio a números reales en su codominio. De acuerdo con lo planteado por Fernández et al. (2019), sino se logra interiorizar tal articulación entonces se vuelve irrelevante el tratamiento del objeto trigonométrico como razón o como función. Sin embargo, en el paso de la razón a la función, se logra identificar un asunto de suma importancia, el cual afecta directamente toda la fenomenología que surge de dicha relación, pues además de Fernández, Montiel (2013) expone que:

Maldonado (2005) identificó en la relación (de equivalencia) del radián y el real, el punto neural para construir y entender la noción funcional de las relaciones trigonométricas y concluye que, al no hacerse explícita en el discurso matemático escolar, al estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función.
(p. 21) (Citado en Fernández et al., 2019, p.64)

La función trigonométrica encuentra en el radián un elemento articulador y fundamental para el paso de la razón surgida por la relación geométrica de los segmentos del triángulo rectángulo, hacia la expresión algebraica, cuyo argumento de variación posee un sistema de medición uniforme y congruente entre los valores pertenecientes a su dominio y codominio. Es el radián un número real, y la comprensión de su naturaleza es crucial para que los estudiantes puedan construir e interiorizar la noción de función trigonométrica.

Al momento de analizar, la articulación de los conocimientos de la matemática escolar aplicada en la escuela secundaria, con los conocimientos necesarios y aplicados en el nivel superior de educación, se siguen presentando dificultades conceptuales asociadas a la manipulación y uso de las funciones trigonométricas en contextos de aplicación de las matemáticas dentro de la disciplina científica y otras ciencias como la ingeniería, astronomía, etc. Se logran identificar dificultades al momento de manipular el argumento de la función, entendiendo que dicho argumento es la medida angular en radianes.

En investigaciones recientes como las realizadas por Cruz & Montiel (2022), se señala explícita la necesidad de desarrollar herramientas alternativas de enseñanza sobre los conceptos de función trigonométrica que consideren dichos problemas estructurales entre los elementos de la función, como es el caso del radián. Por su parte Alyami (2024) trabaja los sistemas de representación y estructuras conceptuales que el radián es capaz de evocar y modelar dentro de la función trigonométrica, haciendo uso del concepto de precepto de Vinner & Tall (2000). En el trabajo realizado por Ekici & Alagoz (2021), es resaltada la existencia de dificultades conceptuales en los estudiantes al momento de realizar mediciones de ángulos en radianes, y utilizar sus propiedades dentro del análisis de fenómenos físicos como el movimiento circular.

Añadido a lo anterior, Moore et al. (2012) exponen que, durante la realización de sus investigaciones, se identificaron algunas de las dificultades sobre las cuales se han producido la mayoría de las problemáticas que surgen en el tratamiento de las funciones trigonométricas. Los profesores suelen sentirse mucho más cómodos al trabajar con las medidas angulares en grados

sexagesimales, pero dichas medidas no son las adecuadas para trabajar la función trigonométrica de variable real, al pertenecer a otro sistema numérico, dicha dificultad se traslada al manejo y significación que dan los estudiantes al argumento de la función trigonométrica, que en su aplicación al cálculo moviliza obstáculos epistémicos en casos como el del $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Señala Moore (2012), que de acuerdo con los resultados obtenidos por Fi (2003, 2006) “se encontró evidencia sobre la utilización de procedimientos por parte de profesores en secundaria, que no eran significativos al momento de aplicar conversiones entre medidas angulares en radianes y grados” (p.16), este problema lleva a la incapacidad al momento de describir un significado de la medida en radianes más allá de estos procedimientos de conversión. Se cita textualmente:

Varios estudios (Akkoc, 2008; Fi, 2003, 2006; Tall & Vinner, 1981; Topcu, et al., 2006) han informado que los profesores no ven π como un número real cuando se discute en un contexto de trigonometría. Más bien, se observó a estos profesores graficar π radianes como igual a 180 (como un número, no grados), y otros profesores describieron π como la unidad de medida en radianes (por ejemplo, un radián es tantos múltiplos de π). (2012, p.17).

Es importante considerar la existencia de fenómenos muy relevantes al momento de abordar el radián como una unidad de medida, y es que el profesor en ejercicio debe contar con un repertorio de herramientas suficientes y competentes, que le permitan detectar fenómenos relacionados con la importancia del razonamiento sobre la magnitud y la medida, no solo para la trigonometría, sino también para las conversiones de unidades y la medición (Moore, 2012,

p.19). El profesor tiene el deber de identificar que el radián para ser trabajado como unidad de medida, pasa por un tratamiento específico, a través de la coordinación y articulación de la representación de sus elementos compositivos provenientes de campos distintos de la matemática (geometría, aritmética, métrica).

De acuerdo con Reed (2006) la idea de cancelar unidades puede esconder ideas muy relevantes para entender la relación entre las magnitudes y por tanto el docente debe interiorizar la naturaleza de los componentes esenciales del radián con el fin de apoyar la interiorización del concepto.

Para identificar y analizar propiedades importantes del tratamiento del radián, como un agente movilizador de conocimiento y fenómenos importantes de la didáctica en el contexto de la matemática escolar, se propone, teniendo en cuenta lo expuesto por Rico (2013), y lo expuesto por Bedoya (2022), el diseño de un modelo local de análisis didáctico. Esta propuesta de análisis didáctico sobre el radián se concreta en la construcción de una unidad didáctica, que permita al profesor en formación fomentar una reflexión constante sobre la puesta en marcha de aquellas habilidades cruciales como un profesional investigador del campo de la Didáctica de las matemáticas (Ddm).

Los elementos recolectados en el diseño, serán propuestos a uso como herramientas de investigación, pues siguiendo las ideas planteadas por Stuart (2023), el profesor al examinar críticamente sus propias prácticas y buscar constantemente formas de mejorarlas, se convierte en un agente activo en la construcción de propuestas de cambios y mejoras en el contexto del

desarrollo del campo científico de la educación matemática, desde el análisis de los elementos de la didáctica de las matemáticas (*Ddm*).

Considerando la naturaleza de los objetos con los que se trabaja en la construcción de la noción de radián, se asume pertinente, aplicar como guía para el diseño de la propuesta de unidad didáctica, la integración del modelo de razonamiento geométrico construido por Dina y Pierre Van Hiele (*modelo Van Hiele*). Por medio de la integración de este modelo como un referente pertinente para la fase instructiva y el análisis de los fenómenos del movimiento circular, se propone diseñar una serie de actividades que, mediadas por el uso de un geoplano circular, buscan reflexionar desde la aplicación y comparación de un componente descriptivo, denominado en el modelo como de razonamiento, y un componente instructivo, señalado en el modelo como fases de aprendizaje, sobre los elementos relevantes para alcanzar el nivel II de razonamiento planteado por los Van Hiele, el cual se denomina de “análisis”.

1.2 Sistematización de la problemática de investigación

De acuerdo con la propuesta investigativa, teórica y metodológica desarrollada través de la construcción de un modelo local de análisis didáctico, que permita el diseño de una unidad didáctica aplicando el modelo de Van Hiele para el trabajo con el radián, se formulan las siguientes preguntas de investigación:

1.2.1 Pregunta Problema:

De acuerdo con las propuestas de un modelo local de análisis y conocimientos didácticos basado en el estudio didáctico del radián se propone resolver la pregunta: ¿Qué

elementos conceptuales y procedimentales se pueden identificar e integrar en la concepción de un modelo local de conocimientos y análisis didácticos centrados en el concepto de radián, articulando fenómenos del movimiento circular, para el diseño de una unidad didáctica que fomente el desarrollo del pensamiento geométrico como estrategia para la formación de profesores de matemática?

1.2.2. Preguntas auxiliares

¿Qué elementos didácticos y fenomenológicos se pueden identificar en la enseñanza y comprensión de los contenidos escolares relacionados con las nociones de radián, función periódica y movimiento circular en los estudiantes de grado décimo, mediante el diseño de un modelo local de conocimientos y análisis didácticos?

¿Cómo se pueden integrar aquellos elementos propuestos en el modelo local de conocimientos y análisis didácticos centrados en el concepto de radián, función periódica y movimiento circular, para el diseño de una unidad didáctica integrando el modelo de Van Hiele con el fin de permitir el desarrollo del pensamiento geométrico para abordar las dificultades en la concepción de una medida angular perteneciente a los números reales?

¿Qué competencias y estrategias específicas debe desarrollar un profesor de matemáticas en formación inicial al integrar la teoría de Van Hiele, el modelo local de análisis y conocimientos didácticos, y las nociones de radián, funciones periódicas y movimiento circular, para fortalecer sus bases a nivel profesional en este nivel educativo?

1.3. Justificación de la investigación

Para un profesor de matemáticas en formación y ejercicio, la construcción de herramientas eficaces, enfocadas en enriquecer las interacciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, dentro de un contexto de aula particular, es parte fundamental del quehacer como un profesional del campo de la educación matemática.

Tomando en consideración las ideas de Rico (2005) y de Bedoya (2017) es importante fomentar la reflexión sobre la importancia que tiene en la formación docente la inclusión de herramientas y referentes teóricos que permitan la elaboración de análisis didácticos locales, al momento de abordar un fenómeno particular de enseñanza en matemáticas, movilizado mediante el tratamiento de un objeto matemático. Para conseguirlo, el docente debe asumir un papel activo como investigador en Didáctica de la educación (*Ddm*), contribuyendo a la producción de conocimiento y promoviendo con esto dinámicas de innovación en la disciplina.

El rol del docente no debería limitarse a una traducción pasiva o manipulación de elementos predefinidos en el aula, sino a un ejercicio crítico y analítico que fomente el desarrollo y la retroalimentación constante de la disciplina. De acuerdo con Bedoya (2002) la construcción de un currículo en educación matemática escolar debe convertirse en una herramienta que promueva el crecimiento y la especialización de la formación del docente, enriqueciendo y ampliando los recursos disponibles para planificar la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

Siguiendo las ideas propuestas por Camacho (2017), es fundamental que la capacidad de planificación docente sea considerada como una competencia importante dentro de los planes de

formación de profesores, puesto que, si esta no es debidamente desarrollada, podría traer consecuencias significativas en la calidad de la enseñanza. Se debe fomentar la idea de planificación docente como una competencia que integre investigación, pues retomando estas ideas de Rico et al. “la planificación docente es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que ésta menos desarrollada en los planes de formación de profesores” (2008, p. 58).

La interacción en el aula no es un proceso estrictamente situacional, en el que se cuenta con una especie de modelo completamente replicable donde los fenómenos siguen un comportamiento preestablecido, antes, por el contrario, es muy común encontrar diversidad y pluralidad en la manera en la que un mismo elemento puede ser detonante de otros diversos elementos incluso de naturalezas distintas, dependiendo del contexto o el entorno específico donde se esté desarrollando una actividad de aprendizaje de las matemáticas escolares. Siguiendo las ideas expuestas por Berger & Luckman 2006 toda realidad es representada, es decir, “sé la apropiación un individuo o grupo, el cual la reconstruye en un sistema cognitivo, y la integra en su sistema de valores dependiendo de su historia y del contexto social e ideológico que lo rodea” (Citado en Martínez S., 2012, pp.38), por lo mismo cada situación particular de aula pasa por un fenómeno particular que lo caracteriza.

Dentro de los elementos a integrar en la propuesta, siguiendo las ideas descritas por Camacho (2017) el cual retoma a Rico (2011), se toma en consideración que la construcción de las herramientas con las que un docente debe contar para enfrentarse al análisis de fenómenos didácticos del aula debe pasar por una integración bien planeada y lograda por medio de la

aplicación de un análisis didáctico. Para el caso particular de este trabajo se considera importante desarrollar dichas habilidades mediante el diseño de un modelo local de análisis didáctico, siguiendo el modelo desarrollado por el profesor Bedoya (2022).

Por medio del diseño de dicho modelo local de análisis didáctico se busca abordar al radián como un agente movilizador de competencias en diseño y análisis didáctico curricular, esto porque de acuerdo con lo expuesto por Maldonado (2005) en Fernández et al. (2019) con respecto al radián:

Se identificó en la relación (de equivalencia) del radián y el real, el punto neural para construir y entender la noción funcional de las relaciones trigonométricas y concluye que, al no hacerse explícita en el discurso matemático escolar, al estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función. (p.64).

El radián posee una fenomenología didáctica particular la cual se convierte en un agente articulador según Martínez S. (2012), de manera que debido a que “su función es la de proporcionar una articulación entre la Trigonometría, que utiliza el grado como unidad de medida angular y al ángulo como argumento funcional de las razones y de las FF. TT” (p.38).

Un diseño de un modelo local de análisis didáctico basado en el trabajo de un contenido matemático como el radián, brinda la posibilidad de aplicar competencias de análisis didáctico propias de un profesional del campo de la educación matemática, pues se integran fenómenos didácticos relacionados al desarrollo de competencias del razonamiento geométrico y métrico, al momento de movilizar los componentes elementales de un radián los cuales son: circunferencia

ANÁLISIS DIDÁCTICO, MEDIDA ANGULAR, FUNCIONES PERIÓDICAS Y VAN HIELE

unitaria, ángulo inscrito, medida de un arco, proporción entre la medida de un arco inscrito en una circunferencia y la medida del perímetro de ese círculo unitario, conceptos de conversión de unidades, entre otros. Además, que dicho análisis puede ser localizado, mediante la construcción de un contexto particular como el movimiento circular, propio de las ciencias naturales como la física.

La integración del modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, será una clave importante de la construcción del modelo local de análisis didáctico en la construcción del componente de análisis instruccional, pues se pretende que se movilicen conocimientos clave en la consecución de desempeños y habilidades de razonamiento de un nivel II, denominado “Análisis” en la escala de Van Hiele. Es importante aclarar que este nivel es pretendido al tener como principal característica que los objetos trabajados en el campo de la geometría hasta este punto deberán ser reconocidos y analizados por el estudiante de forma empírica a través de la manipulación con dichas figuras.

1.4 Objetivos

1.4.1 General:

Caracterizar elementos conceptuales y procedimentales claves dentro del diseño de un modelo local de análisis y conocimientos didácticos, que se concrete en una unidad didáctica basada en el trabajo con el radián, por medio del movimiento circular uniforme, como una estrategia de formación inicial para profesores de matemática escolar en grado 10 de escolaridad.

1.4.2. Específicos:

- Determinar aquellos elementos conceptuales y procedimentales básicos para el diseño de un modelo local de conocimientos y análisis didácticos, enfocado en el radián, como una herramienta pertinente para la integración de conocimientos del campo de la DdM.
- Proponer el diseño de una unidad didáctica basada en la concepción del radián dentro de un fenómeno como el movimiento circular, integrando elementos del modelo de Van Hiele, con el fin de trabajar el desarrollo del pensamiento geométrico, espacial y métrico.
- Fomentar el desarrollo de competencias y habilidades didácticas en profesores de matemáticas aplicando una metodología de sistematización de experiencias docentes, con el fin de mejorar la formación profesional y la proyección de investigadores en didáctica de las matemáticas.

1.5 Antecedentes

En este apartado serán presentadas algunas de las investigaciones que se han realizado en el marco de la educación matemática en relación con la importancia del trabajo del radián como un elemento crucial en el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes tanto de instituciones educativas de nivel medio y profesores de matemáticas en formación.

Las investigaciones realizadas por Weber (2005), señalan que la trigonometría es un curso importante en el plan de estudios de la escuela secundaria. Comprender las funciones trigonométricas se convierte en un requisito fundamental para abordar conceptos en física newtoniana, arquitectura, topografía y diversas áreas de la ingeniería. El estudio de la trigonometría se convierte en uno de los primeros temas de la matemática que permite entrelazar el razonamiento algebraico, geométrico y gráfico, al ser un precursor significativo para la comprensión del cálculo y el precálculo. (Weber,2005, p.91).

La investigación de Weber sugiere poner la mirada en una de las principales limitantes en la comprensión de los estudiantes sobre las relaciones de los elementos de la trigonometría, esta se refiere al papel que desempeñan las figuras geométricas en la modelación y construcción de los sistemas de representación. Relacionar claramente las funciones trigonométricas con modelos geométricos apropiados es importante para comprender estas funciones, y es por esto por lo que se debe articular el concepto de *procepto* (Gray y Tall ,1994). La manera en la que Weber realiza sus investigaciones es aplicando un experimento de enseñanza entre dos grupos de estudiantes, aquellos que fueron sometidos a modelos de enseñanza tradicional de la trigonometría y otros sobre quienes se aplicó un modelo basado en *el paradigma de procepto* de Gray y Tall (1994).

Alyami (2024) propone una investigación enfocada en analizar como diferentes representaciones del radián, tanto cuantitativas como no cuantitativas, influyen en las concepciones conceptuales (CIS) de los futuros maestros de matemáticas. Es destacado por este autor que al momento de analizar las maneras en las que las distintas representaciones impactan en el manejo y concepción de la naturaleza del radián, la importancia de integrar representaciones visuales cuantitativas en la enseñanza permite la construcción de herramientas mucho más versátiles y potentes para la comprensión conceptual de las propiedades del radián.

También es importante referenciar las investigaciones planteadas por Moore, LaForest y Kim (2012) , quienes retoman la línea de la investigación propuesta por Weber sobre el papel de las propiedades geométricas y métricas inmersas en el tratamiento de la función trigonométrica, asegurando “Given that teachers have shallow understandings of trigonometry, it should come as no surprise that students construct disconnected understandings of trigonometric functions and topics foundational to trigonometry” (2012, p.16). Esto quiere decir que, si los maestros no poseen bases sólidas en la interiorización de los conceptos fundamentales movilizados en el aprendizaje de la trigonometría, “no debería sorprender que los estudiantes construyan comprensiones desconectadas de las funciones trigonométricas y los temas fundamentales de la trigonometría” (2012, p.16).

Moore, LaForest y Kim (2012) discuten sobre la aplicación de un experimento de enseñanza que involucró a dos profesores en formación de segundo año (ciclo universitario) y que buscaba caracterizar y producir cambios en sus nociones sobre el círculo unitario. El

experimento de enseñanza fue creado por ellos y lo que buscaron fue implementar tareas diseñadas para promover el pensamiento sobre el radio de un círculo como una unidad de medida.

Otro importante referente para la realización de la propuesta presente de investigación, es el estudio, presentado por Meneses (2010), quien, retomando las investigaciones realizadas por Navarro (2004), Maldonado (2005), Rotaecche (2008) y Montiel (2005, 2011), centra su atención en la evidencia recolectada sobre las rupturas conceptuales en los estudiantes y profesores con respecto a la transición de grados a radianes y viceversa en el argumento "x" de una función trigonométrica. Se construye un recorrido histórico y didáctico sobre las dificultades que tanto estudiantes como profesores enfrentan al momento de comprender la definición del concepto de ángulo según el contexto, las relaciones entre las diferentes formas de medir un ángulo y la precisión en el uso de cada tipo de medida angular (grado, radián o real).

Por último, desde el trabajo de Stuart (2023) llamado **Elementos de la teoría de los van hiele en el diseño de una unidad didáctica que integra transformaciones geométricas y objetos fractales para el desarrollo de pensamiento geométrico en grado once de educación media**, se presentan algunos ejemplos importantes al momento de identificar elementos conceptuales y procedimentales básicos en el diseño de un modelo local de análisis didáctico aplicado al concepto de los objetos fractales. Este modelo se materializa en una propuesta de unidad didáctica basada en la teoría cognitiva e instruccional de los Van Hiele, con el uso de objetos fractales y GeoGebra para desarrollar competencias de pensamiento geométrico en estudiantes de grado once.

El trabajo de Stuart (2023), toma como principal referente el trabajo del profesor E. Bedoya (2022), el cual tiene por objetivo, brindar las bases fundamentales desde las cuales construir un modelo de análisis didáctico para la formación de profesores de matemáticas, considerando perspectivas integradoras, sistémicas y complejas, y promoviendo la reflexión sobre los conocimientos didácticos de la disciplina para afrontar los desafíos educativos.

Capítulo II

2. Marco teórico

En este apartado serán presentados aquellos referentes teóricos, que desde las dimensiones curricular, didáctica y matemática serán los puntos de partida desde los cuales serán planificadas, elaboradas y desarrolladas las propuestas estructuradas en el presente trabajo de grado.

2.1. Marco Contextual

Es importante señalar a continuación que la investigación realizada por medio de la propuesta de diseño del modelo local de análisis didáctico se concreta en la construcción a priori de una unidad didáctica y que, por tanto, es menester situar esta propuesta desde su articulación con el componente curricular sugerido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en sus documentos oficiales. Es mediante las propuestas curriculares y didácticas que el ministerio de educación nacional establece un punto de partida para fomentar una identidad cultural y social en sus habitantes.

2.1.1 Dimensión Curricular

2.1.1.1 Estándares Básicos de Competencia (EBC)

De acuerdo con lo establecido por el MEN, los Estándares Básicos de Competencias en Colombia son un conjunto de orientaciones diseñadas con el fin de que se pueda alcanzar un aumento sobre la calidad de la educación en el país. Estos estándares establecen lo que se espera que los estudiantes sepan y sean capaces de hacer en diferentes áreas del conocimiento a lo largo de su formación básica y media.

Es importante esclarecer el significado que tiene para el MEN (2006) el concepto “Estándar”, el cual define como:

(...) un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad; expresa una situación deseada en cuanto a lo que se espera que todos los estudiantes aprendan en cada una de las áreas a lo largo de su paso por la Educación Básica y Media, especificando por grupos de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9, y 10 a 11) el nivel de calidad que se aspira alcanzar” (Citado en Stuart, 2023, pp. 30)

Los Estándares Básicos de Competencias (2006), hacen referencia a un documento institucional que tiene por objetivo alcanzar la adquisición de un nivel mínimo de competencias en los estudiantes para su adecuado desenvolvimiento en la sociedad y en su vida futura. Desde el componente matemático se establecen aquellos criterios y contenidos matemáticos que se deben desarrollar en los diferentes ciclos escolares para el desarrollo de aquellas habilidades lógicas y sociales por medio de las cuales se interpreta el mundo utilizando un lenguaje matemático. (Stuart, 2023b)

Han sido pensados como una especie de guía por medio de la cual se pretende orientar a los docentes en la planificación y evaluación del aprendizaje, en este caso de matemáticas, para garantizar desde su inclusión en los currículos escolares, que todos los estudiantes, independientemente de su contexto, tengan acceso a una educación matemática de calidad. Los

estándares en matemáticas se organizan en diferentes ejes, como el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y estadístico; además se proponen cinco procesos o también llamados “pensamientos” que hacen referencia a las capacidades que permiten a los estudiantes desarrollar competencias matemáticas. Esto incluye el pensamiento lógico y el matemático, subdividido en numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, que son esenciales para abordar problemas y aplicar conocimientos en contextos variados

Como es mencionado con anterioridad, uno de los ejes desde donde es reconstruido el sistema cognitivo de elementos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar es el pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Este componente es entendido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales (MEN, 1998. p.56)

De acuerdo con Stuart (2023b) el pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos es fundamental en la comprensión y el manejo de objetos y formas en el entorno “(...) toma como apoyo la percepción sensorial, la atención, la memoria, la imaginación y la visualización, permitiendo así representar, analizar, modelar y resolver problemas geométricos de manera efectiva” (p.30). Este componente matemático contiene tres aspectos importantes de identificar: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos (Stuart, 2023b.p.31).

El concepto de radián es construido no solo desde la relación de los elementos geométricos, sus operaciones, transformaciones y nexos, sino que además es necesario el desarrollo de los elementos del pensamiento métrico y de los sistemas métricos o de medidas. Este último se caracteriza porque de acuerdo con el MEN (2006) la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones. (p.63)

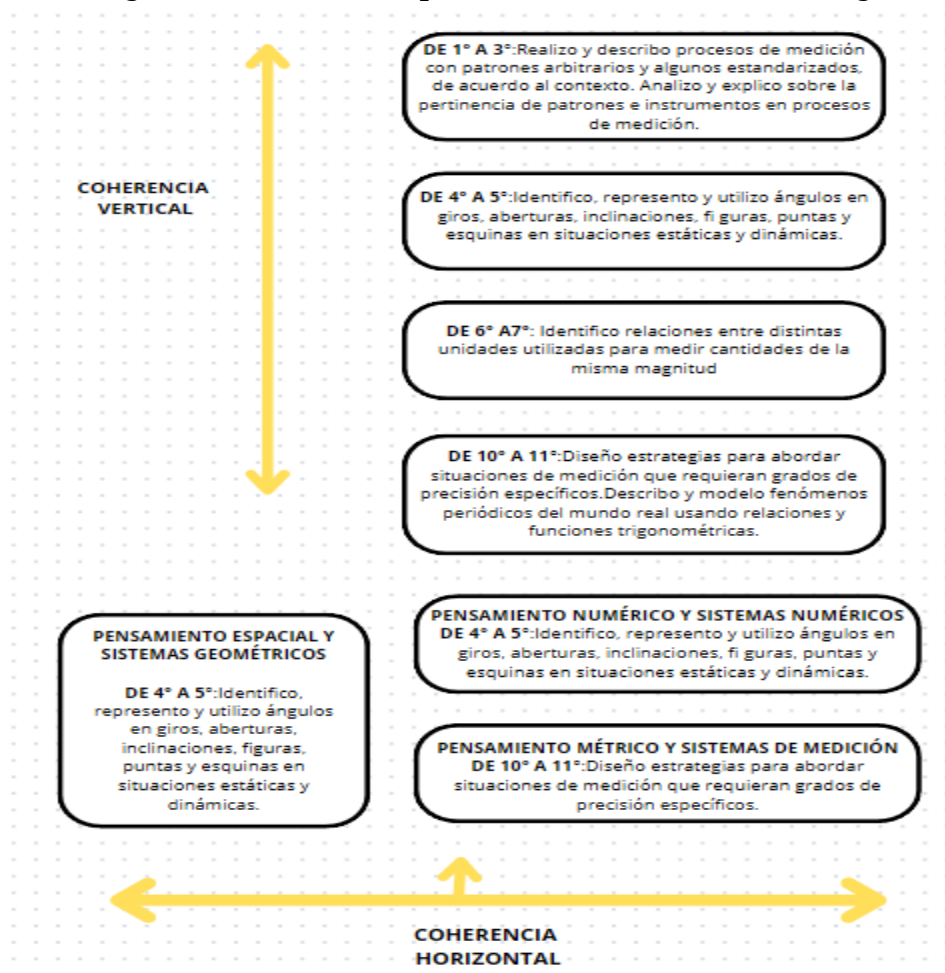
Así la coordinación de registros permite que el radián trabaje sobre la capacidad que desde el pensamiento espacial se puede desarrollar, de acuerdo con Stuart (2023b) *para operar* mentalmente sobre modelos internos del espacio en interacción con los movimientos corporales y los desplazamientos de los objetos y con los distintos registros de representación y sus sistemas notacionales o simbólicos (p.31). Y esto a su vez se enlaza con la propiedad que, desde el pensamiento métrico, de acuerdo con el MEN (2006) se puede desarrollar para “la estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto” (p.63)

Siguiendo las directrices consignadas en los EBC, para el desarrollo de la propuesta del presente trabajo de grado, el nivel de escolaridad de las herramientas movilizadas por medio del trabajo con el radián se sitúa en grado décimo, nivel que se ubica en la categoría de educación media, y que por tanto ha tenido un trabajo estructurado de manera anterior, siguiendo una orientación que busca el desarrollo de elementos matemáticos clave, trabajados de manera paulatina, durante los diferentes ciclos de la educación básica.

Es necesario establecer una coherencia tanto vertical como horizontal, especificando los aspectos relacionados con la enseñanza de los contenidos matemáticos que se desea fomentar.

Figura 1.

Organización curricular para la enseñanza de medidas angulares y el radián.



Nota. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. Bogotá, Colombia. Elaboración propia.

2.1.1.2 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) construidos por el gobierno nacional de

Colombia, son un conjunto de aprendizajes esenciales que los estudiantes deben adquirir en cada grado y área educativa. Estos aprendizajes integran conocimientos, destrezas, habilidades y actitudes básicas, con una contextualización cultural e histórica del entorno, de manera que son unidades básicas de referencia desde donde los individuos pueden edificar un desarrollo futuro (MEN, 2016).

Los DBA han sido contruidos articulándose estructuralmente en coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias, proporcionando una base para construir rutas de enseñanza que faciliten el aprendizaje progresivo. De acuerdo con el MEN (2016) no constituyen una propuesta curricular por sí solos, deben articularse con los enfoques y metodologías del entorno educativo. Además, los DBA ofrecen flexibilidad, permitiendo que los docentes los adapten según las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes a lo largo del año. Estos aprendizajes, no solo implican la adquisición de conocimientos teóricos, sino que también involucran el desarrollo de habilidades prácticas y la adopción de actitudes y criterios que son importantes en el entorno. (2023b, p.33).

La estructura desde la cual es organizada la propuesta de este documento es una partición en tres componentes cruciales: enunciado, evidencias de aprendizaje y ejemplificación. Serán tomadas las definiciones dadas por el MEN (2016) las cuales indican que:

Enunciado: referencia el aprendizaje estructurante para el área de conocimiento específica.

Evidencias: expresan indicios claves que permiten al profesor dar cuenta del aprendizaje que se concreta en el enunciado.

Ejemplo: es el complemento contextualizado de las evidencias de aprendizaje.

Son descritas en el documento algunas características resaltantes desde las cuales se justifica la adopción de este como una instrucción institucional, de manera que:

- Los DBA responden a un documento comprensible para todos los miembros inmersos en el ámbito educativo.
- La organización y estructura que se propone en los DBA no implica que su desarrollo se realice de manera lineal, es decir, que se la facilita al profesor su utilidad en el proceso de orquestación didáctica.
- El profesor podrá, según los aprendizajes desarrollar experiencias que aporten a su formación profesional.
- Las evidencias de aprendizaje permiten al profesor visualizar como es el progreso de aprendizaje de los alumnos.
- Los enunciados y la ejemplificación ilustran aquello que los alumnos deben estar en capacidad de hacer al alcanzar los aprendizajes enunciados, contextualizándolos de acuerdo con sus necesidades.

Entendiendo así el contexto institucional desde el cual se considera pertinente incluir a los DBA como parte del contexto curricular y didáctico desde donde la propuesta del presente trabajo de grado se nutre para el reconocimiento de procesos y procedimientos desde los que el profesor se enfrenta a situaciones de innovación curricular y didáctica (2023b, p.34), se tomará como referente al DBA 13 del Volumen 1, el cual indica que se reconoce al radián como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico.

2.1.1.3 Lineamientos Curriculares (LC)

Los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) constituyen junto con los Estándares Básicos de Aprendizaje y los Derechos Básicos de Aprendizaje, aquel conjunto de orientaciones fundamentales que guían el proceso educativo en el país. Estos lineamientos establecen principios, objetivos y estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de la multidisciplinariedad de conocimientos en el aula, privilegiando aquellos aspectos que favorecen el proceso de orquestación y estructuración curricular.

Abarcan diversas áreas de la educación básica y media, fomentando el desarrollo de competencias y habilidades críticas, así como la inclusión, la diversidad y el respeto por la identidad cultural. Además, subrayan la importancia de contextualizar el currículo, adaptándolo a las realidades y necesidades específicas de cada región, así por medio de la propuesta de estos lineamientos se pretende mejorar la calidad educativa y contribuir al desarrollo integral de los estudiantes colombianos.

Desde el MEN (1998), se priorizan aquellos aspectos incluidos como propósitos que subyacen en los lineamientos curriculares, y que pretenden:

- **Atender los criterios curriculares nacionales e institucionales** relacionados con la función de las diversas disciplinas y sus enfoques pedagógicos para la enseñanza y el aprendizaje en el aula.
- Priorizar **el fortalecimiento de la fundamentación pedagógica** de las diferentes

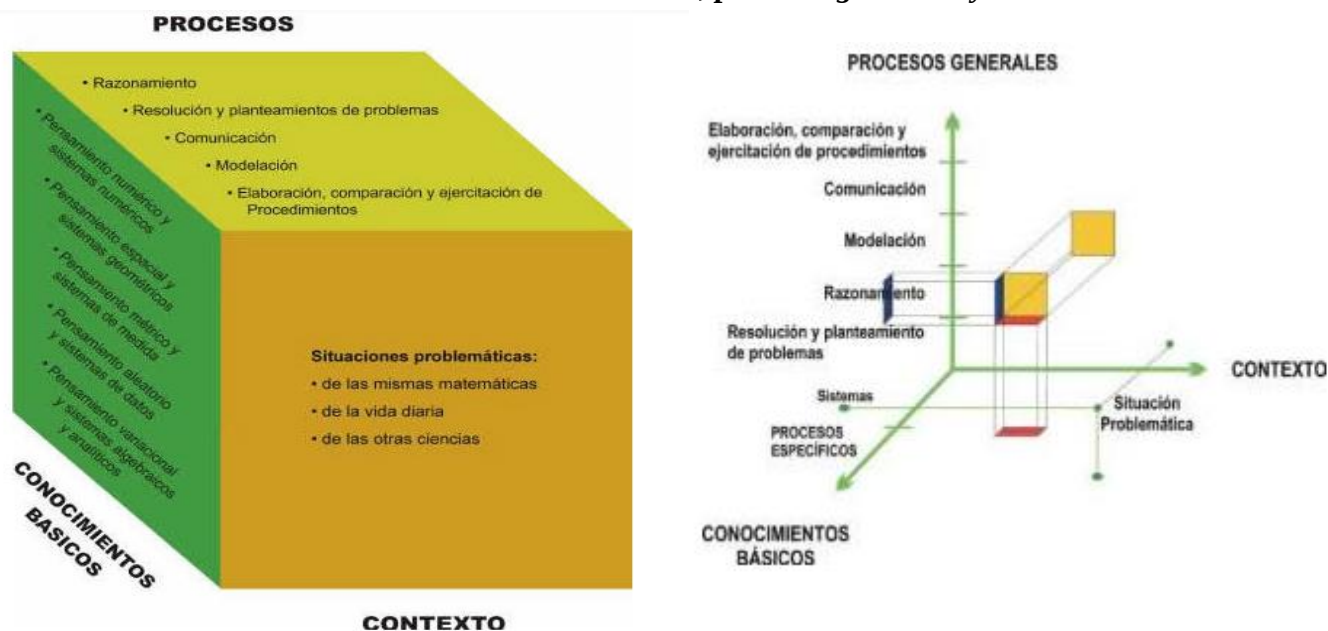
disciplinas y promover la articulación de proyectos interdisciplinarios como parte del proceso transversal de enseñanza y aprendizaje.

Los lineamientos curriculares establecidos para el abordaje de la matemática en el campo de la enseñanza de las matemáticas como parte de las áreas de conocimiento estructurantes del currículo educativo, considera tres grandes aspectos para “organizar el currículo en un todo armonioso” (MEN, 1998.p.19).

- **Conocimientos básicos:** Se refieren a la relación y articulación de los procesos específicos con los sistemas matemáticos, que pretenden aprehender estos conocimientos, mediante el desarrollo de la capacidad para integrar y aplicar los diferentes contenidos matemáticos en diversas situaciones cotidianas, lo que fomenta el desarrollo del pensamiento crítico y la competencia en el uso de las matemáticas en la vida diaria.
- **Procesos generales:** Se alude a los procesos que están en términos del aprendizaje de las matemáticas en el aula, los cuales son: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. (MEN ,1998. p.18).
- **El contexto:** Se refiere al conjunto de condiciones socioculturales, económicas, creencias, intereses e interacciones que rodean a los estudiantes y que influyen en su proceso de aprendizaje. Este contexto incluye tanto los factores locales como internacionales que dan sentido a las matemáticas que se enseñan, lo que implica

que la enseñanza debe adaptarse a la realidad de los estudiantes. El docente desempeña un papel fundamental en la intervención y enriquecimiento de este entorno, generando situaciones problemáticas relevantes y significativas que conecten las matemáticas con la vida cotidiana del estudiante, desencadenando procesos de aprendizaje efectivos.

Figura 2.
Relación de los conocimientos básicos, procesos generales y contextos.



Nota. Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia.

Es importante resaltar que los procesos generales que son propuestos como parte de la actividad matemática tienen un carácter curricular y se caracterizan en sus componentes de la siguiente manera:

Comunicación: Se refiere a la capacidad que desarrolla el alumno para expresar, interpretar y comprender ideas matemáticas de forma oral, escrita y gráfica. En este componente

se involucra el uso de símbolos matemáticos, el lenguaje cotidiano y técnico, y la interacción social para desarrollar el pensamiento matemático y compartir el conocimiento.

Modelación: Se identifica en tanto se produzca una construcción y utilización de modelos matemáticos para interpretar y resolver problemas del mundo real. Desde este componente se potencia la capacidad de abstraer situaciones reales, representarlas mediante el lenguaje matemático (ecuaciones, gráficos, diagramas), y validar los modelos para entender o predecir fenómenos.

Razonamiento: Se refiere a la capacidad de hacer inferencias, generalizaciones y justificaciones lógicas basadas en premisas y evidencias. En este componente se incluye el razonamiento inductivo y deductivo, formulación de conjeturas, comprobación de hipótesis y la capacidad de argumentar de manera coherente.

Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: El enfoque desde este componente de proceso es la identificación y formulación de problemas que requieren de herramientas matemáticas para ser resueltos. Se involucra la creación de preguntas o problemas relevantes, contextualizados, que motiven la curiosidad y el interés de los estudiantes; se pretende impulsar la creatividad y la aplicación práctica de las matemáticas.

Resolución de problemas: Este proceso estimula la capacidad para aplicar estrategias matemáticas en la solución de problemas planteados, tanto dentro como fuera del contexto matemático. Implica la selección y uso de herramientas matemáticas, la planificación de

estrategias, la exploración de diversas soluciones y la evaluación crítica de los resultados obtenidos.

2.1.1.4 Acerca de la formación de profesores de matemáticas

La formación de docentes en matemáticas es una estrategia clave para la innovación pedagógica y curricular en el campo de la educación matemática. Se pretende que, por medio de una formación integral con altos estándares de exigencia, se puedan desarrollar competencias profesionales en los educadores, que promuevan un enfoque pedagógico transformador que impacte de manera significativa en el aprendizaje de los estudiantes y en el enriquecimiento de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del campo de la didáctica de las matemáticas.

Desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN), se han establecido una serie de lineamientos normativos con el fin de regular y dirigir la formación docente en las Instituciones de Educación Superior (IES), destacando entre ellos:

- **Decreto 0709 de 1996:** El cual establece orientaciones y criterios normativos para la planificación y desarrollo de los programas académicos, con el objetivo de mejorar la formación personal y profesional de los educadores.
- **Decreto 3076 de 1997:** Por medio del cual se definen las normativas para la creación y desarrollo de programas de pregrado y posgrado en las IES, y los títulos que se otorgan a los futuros educadores en diversas disciplinas.
- **Resolución 1036 de 2004:** Se caracterizan los programas de formación docente en términos de su estándar de calidad formativa, tanto a nivel de pregrado como de

especialización en educación.

- **Resolución 5443 de 2010:** Se establecen directrices generales para la caracterización de los programas de pregrado y especialización en educación, con el propósito de garantizar su calidad formativa. A diferencia de otras normativas más específicas en esta se aborda de manera más amplia los programas de formación, haciendo énfasis en aspectos relacionados con la práctica pedagógica de los educadores.

- **Decreto 923 del 2024:** Por medio de esta reciente normativa se pretende establecer directrices para generar una mejoría en la formación de docentes del país, enfocándose en garantizar una educación de alta calidad. Este decreto implementa el Marco Nacional de Cualificaciones, que sirve como guía para diseñar programas educativos, tanto en educación formal como en formación para el trabajo, alineándolos con las necesidades actuales del mercado laboral. Además, fomenta la modernización del sistema educativo y refuerza la capacitación continua de los docentes mediante el uso de buenas prácticas pedagógicas

El anterior marco normativo se alinea con la Ley General de Educación de 1994, que en su artículo 109 establece la formación de educadores con competencias de alta calidad científica, ética, pedagógica y didáctica. Se prioriza el fortalecimiento de la investigación y la capacitación docente, lo que garantiza que los maestros sean capaces de generar ambientes de aprendizaje significativos y promover la construcción de nuevos conocimientos en el aula.

Ahora bien desde la perspectiva del campo de la educación matemática, el desarrollo de

competencias profesionales específicas para la enseñanza de las matemáticas es crucial, y el grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) plantea una visión integral sobre cómo debe concebirse la formación de docentes en matemáticas, señalando que un profesor de matemáticas debe ser capaz de diseñar, desarrollar y evaluar entornos de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes. Además, debe ser reflexivo y autónomo en su práctica, lo que implica la capacidad de actualizarse continuamente en las tendencias educativas y tecnológicas para aplicar estrategias innovadoras en su enseñanza.

La formación docente en matemáticas también debe enfocarse en la investigación educativa y la práctica reflexiva, de esta manera se pretende que los futuros maestros deban estar capacitados para diseñar y ejecutar investigaciones en el campo de la enseñanza de las matemáticas, lo que no solo les permitirá mantenerse actualizados, sino también contribuir al avance de la disciplina y mejorar sus propias prácticas pedagógicas mediante la retroalimentación y el análisis crítico de su desempeño. Es la formación de docentes en matemáticas una estrategia fundamental para impulsar la innovación curricular y pedagógica, preparando a los educadores para enfrentar los desafíos de la enseñanza contemporánea y transformar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes.

2.2 Marco conceptual

Serán presentados a continuación aquellos referentes teóricos desde los cuales se concretan los elementos que sustentan esta propuesta de trabajo de grado. Serán organizados desde sus componentes de orden curricular y didáctico por medio de la propuesta de modelo local de análisis didáctico, además del modelo utilizado como referente para el componente de

orden instruccional y descriptivo de los Van Hiele.

2.2.1 Dimensión Didáctica

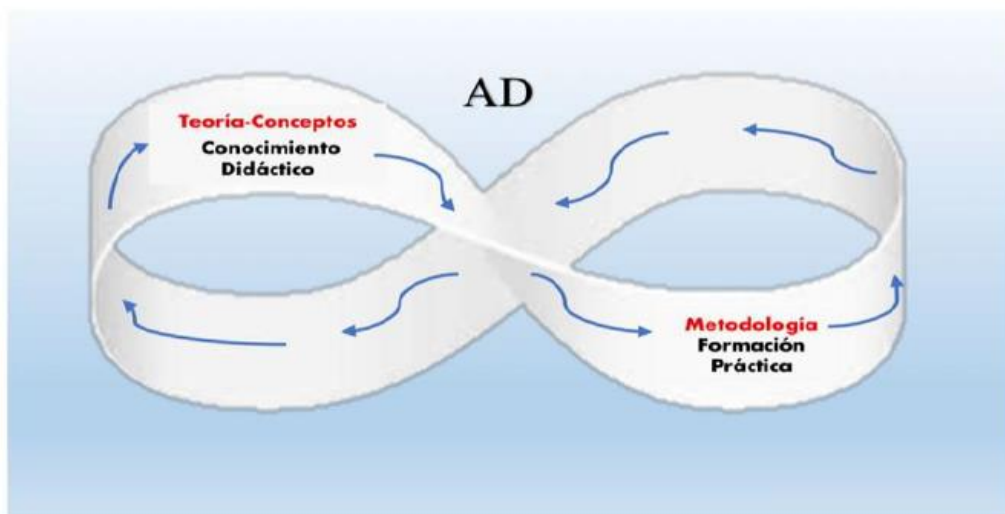
2.2.1.1 Modelo local de análisis didáctico.

El análisis didáctico es la herramienta mediante la cual se movilizan aquellas habilidades, competencias y aptitudes del profesional de la enseñanza de las matemáticas. De acuerdo con Bedoya (2022) “el análisis didáctico (AD) es un constructo multidisciplinar que describe la manera 'ideal' de realizar actividades de diseño curricular a nivel local” (p.15). Se caracteriza por integrar competencias profesionales en conocimientos disciplinares, curriculares, epistemológicos, cognitivos e instruccionales, siendo una herramienta clave en la formación profesional de los profesores de matemáticas.

El análisis didáctico (AD) se convierte en un recurso de carácter teórico y práctico que permite a los docentes retroalimentar su propia práctica mediante una investigación, que adquiere un carácter local desde la relación producida con el contenido y el contexto sobre el cual se produce la fenomenología observada (2013, pp.406). Expone Bedoya (2002), que el AD se refiere al proceso mediante el cual el profesor de matemáticas, apoyado en conocimientos didácticos, diseña, implementa y evalúa las diversas actividades de planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza de las matemáticas (Citado en Stuart,2023b,pp. 406). Un modelo local de análisis didáctico se refiere a la adaptación de estas actividades a un contexto específico y a un contenido particular, lo que permite no solo su uso en la enseñanza, sino también su aplicación como herramienta metodológica en investigaciones educativas, reflejando el nivel de competencia y formación profesional del docente.

A través de la aplicación de un modelo local de análisis didáctico, se busca construir un rastreo específico de toda aquella fenomenología concebida dentro de la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático que se ha adaptado o se pretende articular dentro del aula, es decir, siguiendo a Méndez (2008) se aborda un objeto matemático que al tener una adaptación a las matemáticas escolares moviliza un conocimiento “matemático escolar”. Esto quiere decir que el modelo local de análisis didáctico en la formación profesional del profesor de matemáticas tiene un doble carácter: teórico y práctico (Stuart, 2023. p.42). Su carácter teórico viene de su fundamentación a partir de conocimientos didácticos para diseñar, implementar y evaluar la enseñanza, y su carácter práctico de la adaptación a los contextos y contenidos específicos, que permiten su aplicación directa en la enseñanza y en la investigación educativa.

Figura 3: El carácter teórico y práctico del análisis didáctico (AD)



Fuente: Bedoya, E. (2017). Formación de profesores de educación básica y media en matemáticas y su didáctica: conocimiento didáctico del contenido, análisis didáctico y unidades didácticas. Universidad del Valle, Colombia.

Su aplicación es un recurso crucial en la formación docente al necesitar de la movilización de unas competencias, que se sitúan dentro de los conocimientos didácticos de la

práctica profesional del docente, es decir, aquellas que demuestran el dominio y manejo de las herramientas propias del campo científico aplicadas al análisis didáctico. Estas habilidades plantean que el profesor:

(a) "Tiene un conocimiento disciplinar de referencia (el conocimiento didáctico o de la disciplina Didáctica de las Matemáticas)."

(b) "Tiene una utilidad práctica (diseño, puesta en práctica y evaluación del currículo y de las actividades, propuestas y unidades didácticas)."

(c) "Su puesta en juego se enmarca en una estructura analítica, la del análisis didáctico (AD), que es la expresión local o micro del diseño curricular global y es el medio gracias al cual es posible pasar de diseños centrados en una secuenciación de contenidos a diseños parciales que tienen en cuenta distintas dimensiones." (2023, p. 19)

2.2.1.1.1 Esquema de construcción del modelo local de análisis didáctico.

De acuerdo con Rico L. (1997), el conocimiento didáctico (CD) sobre un contenido específico "constituye la principal fuente de información y el instrumento que permite al profesor de matemáticas desarrollar las distintas actividades profesionales de planificación curricular y diseño de unidades didácticas que le competen" (p.19).

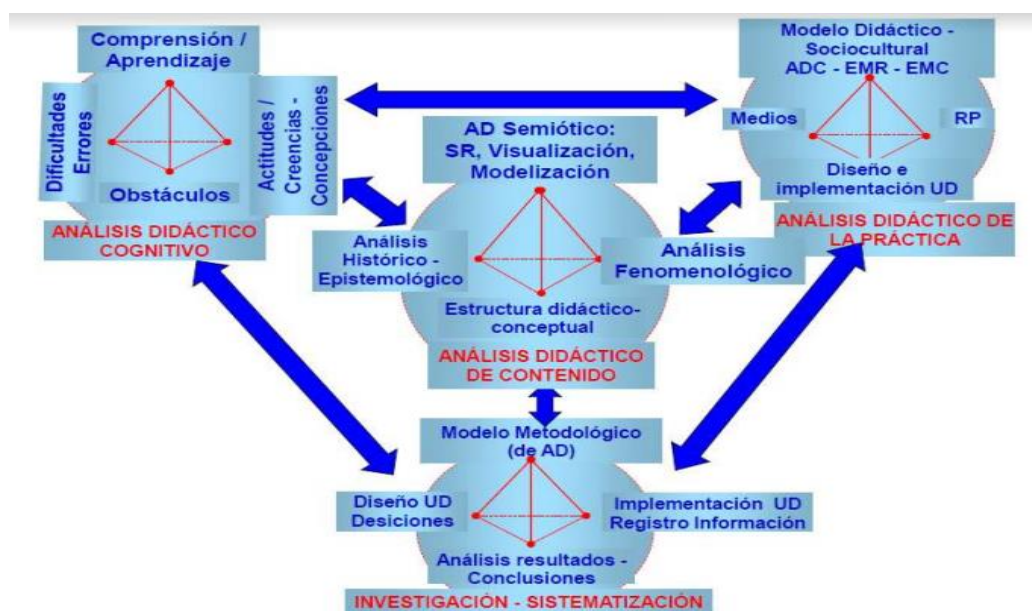
Es importante rescatar que a partir de este conocimiento se movilizan y entrelazan una serie de consideraciones específicas, reflexiones profundas, análisis detallados y prácticas asociadas, que se constituyen en una serie de ejes fundamentales. Expone Escandón (2017), que, desde la óptica de Rico, se pueden señalar estos ejes con unas características definidas y particulares.

Primero, una comprensión sólida del concepto de currículo, considerandos sus dimensiones y niveles de reflexión, para que este conocimiento se complemente con una base teórica robusta sobre los principios de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y los criterios de evaluación. Para conseguirlo, es crucial considerar detalladamente los contenidos del currículo y su estructura conceptual, además de agregar una perspectiva cognitiva con la cual analizar las maneras en las que son presentados estos contenidos tanto fuera como dentro del aula.

De la misma forma, es relevante agregar un análisis semiótico de los contenidos y sus implicaciones didácticas, junto con un análisis fenomenológico que examine cómo se experimentan y comprenden en la práctica. A esto se suma el análisis epistemológico e histórico para entender la evolución de los conceptos matemáticos. Finalmente, se debe evaluar los contextos en los que se presentan estos conceptos y sus significados, además de reflexionar sobre los materiales, recursos y tecnologías disponibles para su enseñanza.

Se pretende que desde el análisis didáctico (AD) propuesto por Rico (2013) y Bedoya (2022), se puedan estructurar diferentes dimensiones en el diseño y organización del currículo, con las cuales concebir y diseñar las propuestas y actividades de aprendizaje para el aula. (Stuart, 2023, p.40). Además, la retroalimentación de estas acciones por medio de la aplicación de un método de sistematización de las experiencias de los profesores de matemáticas, considerando las actividades asociadas a investigación y profundización en los contenidos matemáticos escolares, se pueda contribuir a la profesionalización de la actividad práctica del profesor.

Figura 4: Estructura esquemática y sistémica de la organización y contenidos del conocimiento didáctico y el modelo local de análisis didáctico de los contenidos matemáticos escolares.



Nota. Bedoya (2022). Didáctica de las matemáticas- conocimiento y análisis didáctico: Formación de profesores, innovación curricular e investigación en educación matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.

Tomando como referencia las consideraciones planteadas por Rico (2013) y Bedoya, (2022) se proponen a continuación una serie de categorías de análisis por medio de las cuales presentar la fundamentación de una propuesta de modelo local de análisis didáctico (AD). Dichas categorías consideran aplicar: un análisis del componente curricular, que incluye el contexto curricular nacional y contexto curricular local de la institución educativa seleccionada. Un análisis didáctico cognitivo, que presenta las dificultades y obstáculos en el tratamiento del concepto en el aula, tomando como referencia lo expuesto por Weber (2005), Moore (2010) y Moore, LaForest y Kim (2014), Montiel (2005), Hilario Meneses (2010) y Martínez Sierra (2011). También será anexada la categoría de análisis del contenido, donde será trabajada la fenomenología y construcción del objeto matemático, como objeto adaptado al contexto escolar (matemática escolar), desde su presentación en algunos libros de texto y su relación con los

fenómenos propios de otras ciencias como la física. Además, serán añadidas las categorías de análisis instruccional y el análisis didáctico de actuación, que juntos permiten la recolección de los datos mediante la aplicación de una metodología de sistematización de experiencia docente para el análisis y reflexión de los resultados, con el fin de obtener reflexiones cruciales sobre el diseño de esta adaptación curricular.

2.2.1.1.2 Análisis Curricular.

De acuerdo con lo expuesto en los estándares del ministerio de educación nacional (MEN, 1998) en los lineamientos curriculares, se habla de la necesidad de desarrollar en los ciudadanos del país, la capacidad de movilizar estructuras de pensamiento que incluyan la adquisición de una serie de competencias para el establecimiento de una sociedad, donde las personas tengan la garantía de contar con una habilidades primordiales con las cuales puedan en la realización de las distintas actividades cotidianas, y su posición dentro del esquema social, contribuir utilizando correctas formas de razonamiento, comunicación, modelación, resolución de problemas y ejercitación de procedimientos.

El currículo nacional colombiano se ha construido en relación con tres niveles: el nacional por medio del Ministerio de Educación Nacional (MEN), el PEI propio de las características particulares de cada institución educativa, pues este último hace alusión al proyecto educativo institucional, con plena autonomía de ser adaptado al entorno y contexto particular de la comunidad donde está ubicada la institución educativa. Por último, el plan de clase, que obedece al último escalón de la cadena, pues se trabaja ya no solo desde una comunidad específica, sino que se selecciona una muestra parcial de dicha comunidad clasificada desde los grados de escolaridad o ciclos, en el caso de la educación acelerada. Además, el

gobierno nacional ha desarrollado tres documentos directrices desde donde se pretende ampliar la cobertura y dar una guía para estandarizar los contenidos en matemáticas con el fin de permitir la equidad en el desarrollo de los conocimientos, estos documentos son los lineamientos generales de cada área del conocimiento (1998), los estándares básicos de competencias (2002) y también en su segunda versión (2006), por último en el 2016 fueron desarrollados los derechos básicos de aprendizaje, que fueron actualizados en su versión II en el año 2017.

La inclusión de esta categoría de análisis se considera crucial en el diseño del modelo local de análisis didáctico, ya que permite identificar los elementos estructurales y contextuales que dirigen las propuestas planteadas por el ministerio de educación nacional para el desarrollo de los contenidos de las matemáticas escolares, con el objetivo de desarrollar las competencias, habilidades y requerimientos sociales que de acuerdo a la visión política, gubernamental y comunitaria, contextualizan el entorno de aprendizaje y enseñanza de los estudiantes. De acuerdo con Bedoya (2022) en el currículo “hay una mediación social que delimita los fines, medios, control, conocimientos y habilidades básicas para cada nivel” (p.6).

Lo anterior expone la necesidad de que el profesor considere el desarrollo de aquellas competencias matemáticas, adaptadas a las necesidades específicas de cada institución educativa y tener en cuenta las condiciones culturales, sociales y económicas para ofrecer una enseñanza de las matemáticas que esté conectada con los entornos cotidianos de los estudiantes de manera integral y contextualizada, considerando aspectos curriculares, institucionales y sociales.

2.2.1.1.3 Análisis Cognitivo.

El análisis didáctico cognitivo, el cual contiene todas aquellas perspectivas asociadas con el fenómeno del aprendizaje de los elementos en matemáticas, se desarrolla poniendo en juego y en una relación directa y superpuesta todas aquellas actitudes, creencias y concepciones que impactan en la manera de comprender un tipo particular de objetos matemáticos. Considerando lo dicho por Escandón (2017), en esta fase del análisis didáctico se recopila toda la información descriptiva, que permita identificar la instauración de las dificultades, obstáculos y errores Rico (2000) y Socas (2007) de los estudiantes al momento de abordar las actividades y procedimientos relacionados a la fenomenología movilizada por el contenido matemático analizado.

Desde el análisis cognitivo se plantea como una meta u objetivo, realizar un seguimiento particular sobre el desarrollo cognitivo de los estudiantes al momento de trabajar la estructura matemática para realizar actividades que abarcan su enseñanza y aprendizaje. En este apartado se consideran primordiales “los fines formativos, que se preocupan por el desarrollo intelectual de los estudiantes” (Lupiañez, 2009, p.28).

Pero, además dichos objetos suelen estar condicionados por una serie de errores de tipo conceptual, que derivan en muchas dificultades de índole didáctica, epistemológica del contenido, histórica y emocional, de cuya solución depende la superación de los obstáculos presentes a la hora de poner de manifiestas las habilidades que se buscan concretar. Pero definir las situaciones anteriormente mencionadas pasa por la necesidad de identificar primeramente la fenomenología y estructura asociada al contenido.

2.2.1.1.3 Análisis Contenido

Desde esta componente se busca poner el análisis sobre la fenomenología propia del

objeto y objetos matemáticos por medio de los cuales el profesor realiza “la descripción y construye la caracterización histórico-epistemológica, fenomenológica, semiótica y estructural del contenido matemático, y se dirige a dar respuesta a la pregunta ¿qué enseñar?”

(Stuart, 2023b, p.22). El objetivo es construir canales de enseñanza y aprendizaje que faciliten la construcción de un conocimiento permeado desde las distintas normas sociales producidas y reproducidas en situación escolar (Sierra, 2011).

Las matemáticas escolares movilizan una serie de fenómenos sociales particulares que enlazan y articulan los constructos históricos, epistemológicos, cognitivos y didácticos, con el fin de facilitar por medio del ejercicio y aprendizaje de los objetos matemáticos introducidos en el aula, que los estudiantes desarrollen una serie de competencias y habilidades que permitan la constitución de un ser humano integral, capaz e identificado dentro de un contexto específico identitario, en donde sus concepciones contribuyan a la construcción de un tipo de sociedad específico previamente establecido por las convenciones territoriales, culturales y políticas del lugar donde convive en sociedad.

Mediante este análisis se desarrolla el rastro de manera apropiada de la puesta en juego de todas aquellas cosas que se relacionan dentro de los objetos componentes del contenido identificando su historia desarrollada, su origen como herramienta, pero además su concepción epistemológica en tanto que se relaciona con un contexto social particular, además de que si este es constituido como un conocimiento susceptible de ser transmitido dentro de la cultura, es porque su aceptación pasa por su importante capacidad de brindar distintas posibilidades como potencialidad presente, futura y pasada para la constitución de una sociedad humana. Además de

todo lo anterior cada uno de los conceptos mencionados es reflejado mediante el sistema de símbolos propios que enriquecen los distintos sistemas de representación sobre los cuales el objeto adquiere su carácter manipulativo.

Tomando como referencia a Rico & Lupiáñez (2008) mediante el análisis de contenido, ellos expresan que:

Se capacita a los futuros profesores para que, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncien y organicen las capacidades que ellos esperan que desarrollen los escolares de secundaria sobre ese tema matemático. (p.37).

2.2.1.1.4 Análisis didáctico de instrucción:

El (ADI) de acuerdo con lo expuesto por Stuart (2023b) consiste en el desarrollo de las tareas en materia de diseño, selección y secuenciación. Mediante la fase de análisis de este componente, siguiendo las ideas de Rico 2013, se pueden acoplar los elementos que se deben de considerar para la adecuada y correcta planificación de la unidad didáctica (UD). (citado en Preciado, 2016, p.92). Las propuestas aquí realizadas deben reflejar en la labor del docente una correcta gestión de sus recursos tanto teóricos, como pedagógicos y didácticos con el fin de identificar, definir y recopilar aquellos elementos necesarios para el diseño, elaboración y aplicación de las actividades matemáticas en el aula (Stuart, 2023).

2.2.1.2 Modelo Van Hiele

El modelo Van Hiele desarrollado por el matrimonio de Dina y Pierre Van Hiele, utiliza de acuerdo con lo descrito por Jaime (1993), en el documento **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano**, dos fases fundamentales puesto que se combinan como dos componentes descriptivo y metodológico, o también denominado este último como instructivo

De acuerdo con Vargas & Araya (2013) encontrar una manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento al momento de trabajar elementos geométricos, pues proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar desde un nivel propuesto a otro (p.81).

Estos niveles se organizan de manera secuencial y son recursivos entre sí, facilitan evaluar el progreso de los estudiantes, además de que por medio de su componente instruccional el profesor investigador puede guiar el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante. Deben ser planteadas unas actividades secuenciales que permitan el desarrollo de los aprendizajes siguiendo los niveles de razonamiento del estudiante, esto porque ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno: el individuo debe pasar y dominar un nivel para subir al siguiente. (Vargas & Araya, 2013).

Se podría a grandes rasgos definir que de acuerdo con Stuart (2023, p.48), algunas de las propiedades resaltantes de este modelo podrían ser:

- Secuencialidad: Es decir, se define un camino o progreso estructurado, a manera que se

necesita un avance lineal para transcurrir entre cada nivel, de lo contrario se podrán generar rompimientos en los esquemas mentales por el desarrollo rupturas en el desarrollo del razonamiento geométrico.

- Progresivo: Para avanzar de un nivel de razonamiento a otro, es necesario alcanzar las competencias definidas en el nivel anterior.
- Intrínseco-Extrínseco: Las competencias y conocimientos alcanzados en determinado nivel de razonamiento, orientaran el desarrollo del siguiente nivel.
- Lingüística: Cada nivel de razonamiento se caracteriza por su unicidad en el lenguaje geométrico empleado y la significación en los diferentes niveles.
- Emparejamiento: Para abordar determinado nivel de razonamiento, es necesario reconocer el nivel inicial de los alumnos, donde se considera fundamental incorporar las fases de aprendizaje para ese nivel

La naturaleza dual de este modelo permite la aplicación de un marco teórico desde el cual se organizan unos esquemas mentales llamados razonamientos, por medio de los cuales el profesor tendría una herramienta con la cual identificar el nivel de comprensión de sus estudiantes, en el proceso de aprendizaje de la geometría. El razonamiento geométrico de los estudiantes se distribuye en una serie de niveles. Para dominar el nivel en que se encuentra y así poder pasar al nivel inmediato superior, el estudiante debe cumplir ciertos procesos de logro y

aprendizaje (Vargas & Araya, 2013.p.81).

Los niveles de razonamiento son estructurados en 5 niveles o etapas, ordenados de forma secuencial, siendo que además dentro de cada nivel se añaden una serie de fases con las que se pretenden, de acuerdo con Vargas & Araya (2013) medir los niveles de control de las competencias con los que se verificará la capacidad de construcción de los conceptos y esquemas geométricos.

Estas fases inmersas dentro de cada nivel de razonamiento serán denominadas fases de instrucción, en esta etapa prescriptiva “se ha de aclarar que las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase cinco debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (Jaime, 1993).

Desde la perspectiva del modelo de Van Hiele, una propuesta de desarrollo geométrico debe construir una relación de sus elementos, de manera que conserven una secuencialidad. Debe tener un propósito bien dirigido, definido y concreto por parte del instructor, con el cual escalar recursiva, ordenada y estructuralmente en un proceso de razonamiento que lleve al estudiante a interiorizar de forma rigurosa unas competencias específicas de las ciencias de la geometría, desarrolladas por medio de un conocimiento particular de objetos, propiedades y representaciones geométricas.

Se presentan a continuación la definición de cada uno de los niveles de razonamiento presentados por Vargas y Araya (2013), quienes se inspiran de Fouz y De Donosti (2005), Jaime (1993), Jaime y Gutiérrez (1994) y Beltranetti, Esquivel y Ferrari (2005).

1. Visualización: Relación de los objetos (como entidades estrictamente plausibles) con esquemas del entorno inmediatamente reconocibles. No existe una separación de la representación y el objeto y por tanto no es palpable la construcción de un aprendizaje particular sobre el objeto, se condiciona la construcción del objeto a la existencia de este en la realidad de cada estudiante. Es sumamente importante el trabajo con elementos manipulativos. La adaptación del lenguaje aquí, a manera personal podría resultar un tanto particular, ya que la aparición de vestigios sobre formalidades, no deberían considerarse como la construcción de un nivel avanzado, dada la secuencialidad del modelo.

2. Análisis: Aquí aparecen las primeras manifestaciones de abstracción, pero en un nivel muy elemental, se asume que desde esta perspectiva el estudiante debe identificar la aparición de las propiedades elementales de los objetos, sin embargo, todavía es necesario recurrir a ciertos niveles de manipulación con los elementos. La utilización del lenguaje se encuentra todavía desprovisto de una formalización propia del lenguaje matemático.

3. Deducción informal: Aparecen relaciones entre las propiedades identificables, pero ya no solo desde un elemento, sino que incluso se pueden relacionar propiedades de varios subelementos de un mismo objeto de estudio. La clave en este punto del desarrollo de los elementos del razonamiento radica en que todavía no se logran identificar de manera directa la aparición de un lenguaje específico matemático, a pesar de que desde este punto ya se debe poder realizar seguimiento a la realización de demostraciones hechas por otros, e inclusive se deben poder replicar de manera casi exacta. En este momento se deben sustituir los esquemas de representación manipulativos y por lo tanto se puede pasar a un sistema abstracto y desligado en

estricto sentido de la construcción de un objeto cotidiano o real.

4. Deducción formal: Es aquí donde el estudiante está en capacidad no solo de seguir esquemas de deducción o demostraciones realizadas con anterioridad, sino que debe estar en capacidad de construir sus propias demostraciones dentro de los esquemas contruidos en el propio dominio escogido de desarrollo. El estudiante cuida con cautela el rigor del lenguaje formal utilizado y logra manipular sistemas de representación útiles dentro de la geometría que trabaja. La principal diferencia con el último nivel nace de la propiedad clausurativa del campo, es decir, de que, dentro del dominio a pesar de construir esquemas propios de rigor, todavía no se prueba la capacidad de extrapolar estos esquemas conceptuales contruidos en campos diferentes de la geometría.

5. Rigor: Desde aquí se debe generalizar en diversos campos y sistemas incluso, adaptando el lenguaje de formalidad en cada sistema de representación. Aquí lo importante será reflejar el dominio del sistema contruido dentro de un dominio particular y la capacidad de generar una trazabilidad con otros sistemas de representación.

Para lograr la verificación de la obtención de cada nivel de razonamiento se plantea una serie de niveles prescriptivos, que permitan construir un esquema de seguimiento secuencial y verificable que garantice la construcción y desarrollo en el alumno de cada etapa del razonamiento. Es importante recordar que la etapa del razonamiento no depende de la edad o estadio del desarrollo, si no que depende del nivel de aprehensión que se tienen sobre las competencias desarrolladas para la obtención del aprendizaje de cada objeto y elemento

geométrico. Estas fases son descritas de acuerdo con las investigaciones en Vargas y Araya (2013).

Fase De Información.

Sobre este momento del desarrollo de cada nivel de razonamiento se establece un punto de partida sobre el cual se debe garantizar: El presupuesto cognitivo desde el cual se trabaja con los estudiantes el desarrollo de cada fase es aquí donde se garantiza la aptitud para desarrollar la competencia posterior, pues hay que recordar la capacidad de secuencialidad y recursividad del modelo. Se debe evaluar el campo de estudio sobre el cual se sitúa el contexto del trabajo, analizar el presupuesto intelectual e informativo sobre el cual se trabaja el desarrollo de la estructura del objeto, los materiales sobre los cuales se trabaja y además el tipo de problemas que se buscan abordar en cada nivel.

Fase de Orientación Dirigida.

Es aquel momento del trabajo donde la intervención y rol del docente se vuelven fundamentales para el desarrollo de su rol de guía u orquestador dentro de la intencionalidad del trabajo planteado. Aquí se considera fundamental el planeamiento realizado, pues se verifica la pertinencia del fenómeno didáctico a analizar, se busca situar concretamente las competencias a desarrollar de forma explícita por cada docente.

Fase de Explicitación.

Desde aquí se empieza a construir una fase de retroalimentación evidenciada en la capacidad de los actores de intercambiar ideas sobre los temas desarrollados en las actividades orientadas, se justifican y evalúan las conclusiones planteadas en la fase de exploración y

desarrollo. Es supremamente importante evaluar desde aquí la construcción de la experiencia previa pues desde aquí se debe lograr construir experiencias desde las anécdotas previas.

Fase De Orientación Libre.

Desde aquí se logran diferenciar aquellos momentos desde los cuales la memorización, la repetición y la mecanización no son la única herramienta desarrollada y por lo tanto si se ha logrado ir culminando el objetivo a alcanzar en la etapa para seguir en el próximo nivel de razonamiento el estudiante debe resolver el problema de forma autónoma, complejizando la actividad al cambiar de entorno, adaptando lo conseguido en un contexto a otro similar, pero de estructura diferente. Tener en cuenta que no significa pasar al siguiente nivel, sino verificar el nivel de apropiación de la estructura, sin necesidad de una réplica desprovista de razonamiento.

Fase De Integración.

Se debe lograr integrar el conocimiento obtenido en los pasos anteriores, pero buscando generalizar e integrar los conocimientos en diversos contextos, apelando a la recursividad, es decir, aplicando lo aprehendido y aprendido en el desarrollo del nivel de razonamiento ubicado. No se deben añadir elementos, aquí todo debe ser parte del presupuesto construido acorde al nivel.

Como propósito se plantea la articulación de conceptos disciplinares específicos del campo de la educación matemática, así como también la integración de otros conceptos extra disciplinares que favorezcan la variedad de representaciones para un mayor rango de maniobrabilidad en la manipulación de los recursos. Retomando la idea planteada por Stuart (2023) se define a la idea de material como todos los aparatos o medios de comunicación que

pueden ayudar a describir, entender y desarrollar conceptos matemáticos en el aula. (Valenzuela, 2012, p.23).

Es importante destacar la importancia de incorporar el modelo de Van Hiele en el desarrollo de actividades didácticas enfocadas en el concepto de radián. Este modelo facilita la planificación de actividades que permitan a los estudiantes avanzar en su comprensión del radián como un objeto matemático, progresando desde una experiencia inicial con los elementos geométricos que permiten su concepción hasta la identificación de su relación como un valor adimensional de naturaleza en los números reales. En particular, se espera que las competencias que se desarrollan desde la matemática escolar converjan y se fortalezcan por medio de la movilización de elementos tales como la razón, las propiedades de la circunferencia y la definición de unidad de medida.,

Se espera, además, fortalecer las bases teóricas y prácticas de las habilidades matemáticas por medio de la manipulación y análisis de conceptos relacionados con el radián, que requieren un mayor nivel de abstracción. Este enfoque permitirá a los estudiantes comprender no solo la medida angular en términos de radianes, sino también las relaciones geométricas y matemáticas que subyacen en su uso y aplicación.

La teoría de Van Hiele, con sus niveles cognitivos, proporciona una herramienta útil para reflexionar sobre cómo los estudiantes aprenden el concepto de radián. En este caso, se propone avanzar hasta el nivel II (Análisis) del modelo, lo que implica que los estudiantes no solo reconocerán el radián como una medida de ángulos, sino que también identificarán las relaciones

y propiedades asociadas con el mismo en contextos geométricos. Este proceso puede dar un contexto al docente desde donde reflexionar su rol en la enseñanza de este concepto, permitiendo movilizar conocimientos matemáticos y didácticos de manera más efectiva en el aula. Además, el modelo Van Hiele ofrece una guía estructurada para que el docente, a través de las fases de aprendizaje, alcance la fase V (Integración), consolidando así la comprensión de los estudiantes y promoviendo una innovación curricular y didáctica en la enseñanza del radián.

2.2.1.3 Unidad didáctica

Una unidad didáctica de acuerdo con lo expuesto por Segovia y Rico (2001) en Bedoya (2022) es definida como “una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia y Rico, 2001, p. 87). En esta convergen todos aquellos elementos teóricos, prácticos, aquellas habilidades y destrezas propias del quehacer del docente profesional en matemáticas, que requieren del uso de su formación académica, incluso en sus diferentes facetas, de manera que se pueda permitir flexibilizar el rango de alcance del objetivo y utilizar el conocimiento adquirido como un elemento aportante de reflexión para la continua mejoría de las actividades planteadas, utilizando las evidencias para sistematizar las experiencias, con el fin de alcanzar los objetivos particulares de investigación señalados con anticipación.

Para el caso del presente proyecto, la construcción de una unidad didáctica por medio de la aplicación de un modelo local de análisis didáctico, pretende que los estudiantes de grado decimo de secundaria ejerciten sus destrezas y habilidades asociadas con el desarrollo del

pensamiento geométrico – espacial y métrico, para que por medio de la construcción de concepto de radián, que moviliza los conceptos de circunferencia, razón, rotación y conjuntos numéricos y sistemas numéricos, identifiquen la importancia de dicha unidad de medida como agente articulador entre el concepto de razón trigonométrica y función trigonométrica, además de identificar las propiedades asociadas a la representación variacional de dicha función.

Siguiendo la propuesta de Bedoya, E. (2022) por medio de esta UD se pretende identificar si aquellas competencias y estructuras movilizadas por medio de la construcción del significado del radián permiten entender la naturaleza de las unidades angulares utilizadas en la construcción de funciones trigonométricas, cruciales al momento de trabajar con la matemática ciencias puras y derivadas. La estructura de unidad de didáctica que orienta el desarrollo de este trabajo de grado fue orientada a partir de la propuesta de Stuart (2023b) bajo las ideas del modelo local de análisis didáctico de Bedoya (2022), estará compuesta de la siguiente manera:

- Título
- Presentación y descripción general
- Análisis curricular (concreciones curriculares, modelo didáctico pedagógico).
- Objetivos (generales y específicos).
- Recursos (humanos, bibliográficos, tecnológicos, etc.)
- Análisis didáctico de contenido.
- Análisis cognitivo (competencias, errores y dificultades).
- Análisis de instrucción: Orientaciones didácticas (basadas en el modelo didáctico pedagógico).
- Secuencia de actividades (Actividades de introducción, motivación y diagnóstico;

actividades de desarrollo; actividades de evaluación y actividades de apoyo y ampliación).

- Reflexión autocrítica y evaluación de la unidad.
- Referencias bibliográficas.

2.2.2 Contenido Matemático

2.2.2.1 Radián

Serán expuestos a continuación aquellos términos, conceptos, teoremas, definiciones y propiedades sobre los objetos componentes del objeto matemático a analizar, el radián. Se toman como referente las investigaciones de Meneses (2010) quien toma como referencia los trabajos de Akkoc (2008), Fi (2003), pero será centrada la mirada en las relaciones fenomenológicas descritas por H. Alyami (2024), quien define la relación conceptual entre la naturaleza medible y cualitativa de la medición de un ángulo. Así, por medio de un análisis de lo expuesto por estos autores y agregando reinterpretaciones propias sobre la fenomenología que envuelve al concepto de radián como una medida angular en un sistema numérico real, se presenta a continuación el esquema desde el cual el radián es presentado al momento de definirse:

2.2.2.1.2 Estructura conceptual del radián

Tabla 1
Construcción de la unidad de medición del ángulo a partir de su concepción y representación.

De acuerdo con su concepción	Descripción
------------------------------	-------------

Visión Cualitativa del ángulo	Cuando el ángulo es conceptualizado como un objeto geométrico, se pone énfasis en su concepción desde la relación de las representaciones geométricas. Aplicando el razonamiento computacional de Smith & Thompson (2008), se podría construir una imagen de ángulo como una propiedad de la rotación la simetría o la proporción entre partes de un sistema geométrico
Visión Cuantitativa del ángulo	Desde esta perspectiva el ángulo es conceptualizado con un atributo medible, es decir no es concebido solamente como un elemento fundamental que da forma y estructura a las configuraciones geométricas, sino como una medida que utiliza un proceso de cuantificación (proporcionalidad, partición o iteración)
De acuerdo con su representación	
Representación Cuantitativa	Cuando se construye la representación cuantitativa del ángulo se toma en consideración aquellos procesos que reflejan una cuantificación por medio del establecimiento de una unidad de medida o con un patrón de comparación. Por lo anterior se toma en cuenta al ángulo como un proceso derivado de la proporcionalidad, partición y/o de la iteración.
Representación No Cuantitativa	Son aquellos procesos donde la construcción de la representación del ángulo no permite establecer un patrón de cuantificación, es decir, asignan una representación icónica, que no necesariamente esta sujeta a una construcción cuantitativa de una unidad.

Nota. Alyami, H (2024). Radian π : Concept images evoked by quantitative

representations of radian angle measure. Mathematical thinking and learning

Tabla 2.

Esquema conceptual de las representaciones trabajadas para construir el concepto de radián.

De acuerdo con la representación del	Herramientas	Relación con la representación
--------------------------------------	--------------	--------------------------------

radián		
Representación No Cuantitativa	Sistemas de conversión en grados	El ángulo es construido a partir de su construcción tradicional como una abertura de un segmento inicial, y se asume en grados dado que se utiliza el sistema tradicional sexagesimal. El radián se piensa como una conversión.
	Arco y su longitud	Refiriéndose al ángulo medido como el arco subtendido por la línea original y su rotación. Esta medida se toma después de ser construido y es desconocida, pues no se considera la magnitud del radio, por lo tanto, su construcción ha sido geométrica y no proporcional, haciendo pensar al radián como un arco sin relación con el radio.
Representación Cuantitativa	Radián como π	Se toma a la medida del radián a partir de pensar que π es una unidad de medida y no un número real, por lo que se piensa al radián como una unidad de medida con π como base. Esta construcción es cuantitativa porque aparece el concepto de magnitud
	Longitud de arco y radio (Número real)	Se construye al radián en su significante como una relación entre la cantidad de veces que cabe el radio en el arco subtendido por el ángulo central resultado de la rotación del segmento radio inicial. El radián se convierte en una proporción
	Trigonometría del triángulo rectángulo	La representación del radián podría estar pensada de manera que al construir la rotación de un segmento el triángulo formado se piense como un triángulo rectángulo isósceles.

Nota. Alyami, H (2024). Radian π : Concept images evoked by quantitative representations of radian angle measure. Mathematical thinking and learning

Así pues, de acuerdo con las representaciones conceptuales propuestas por Alyami (2024), los sistemas de representación por medio de los cuales se construyen los preceptos (Tall & Vinner, 1981) del concepto de radián, se subdividen en tres categorías las cuales son la representación cualitativa, la representación cuantitativa y la representación cuantitativa basada en la equivalencia. A partir de la primera representación, se incluyen todos aquellos sistemas cognitivos que permiten concebir al radián como una figura geométrica directamente relacionada con el arco proporcional subtendido por el ángulo central, y su construcción por medio de la relación e interacción de los objetos extraídos de aquellos elementos característicos de la circunferencia.

Luego se encuentra la representación cuantitativa, la cual permite asociar a aquellos elementos geométricos que son compositivos del radián, unidades de medida que pueden dar pistas sobre la relación proporcional clave entre la longitud de arco que subtiende el ángulo central y la longitud del radio de la circunferencia contenida en dicho arco, sin embargo, todavía no se han asociados concretamente los elementos para definir esta proporción y por tanto, se puede llegar a pensar en este nivel al radián como una propiedad del círculo más pero desprovista de su naturaleza como una magnitud proporcional, por otro lado se podría pensar como una medición de un segmento de la circunferencia medida en π radianes. Lo anterior deriva en situaciones donde se concibe al número π más como una variable que como una constante de proporcionalidad.

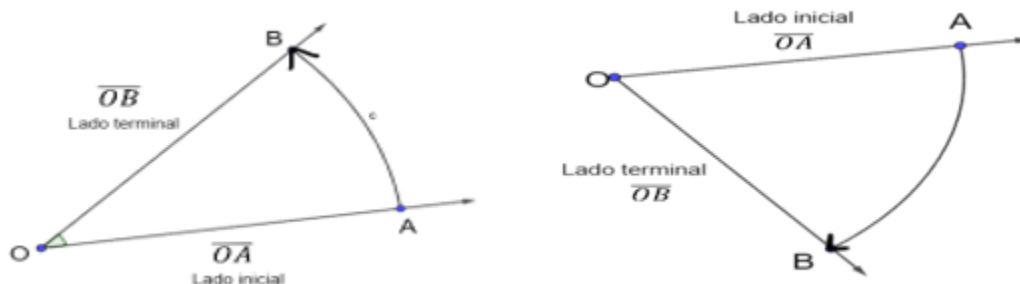
El último nivel, que se encuentra en la tercera fila a la izquierda, permite referenciar que aunque el siguiente paso se encuentra todavía en la categoría de las representaciones

cuantitativas, es importante profundizar en una relación entre los elementos cuantificables del círculo, pero entendiendo de forma explícita la construcción del radián como una magnitud cuya medida nace de la equivalencia proporcional entre la magnitud del radio de cualquier circunferencia y la magnitud del arco acotado por un ángulo central, denominado unidad, el cual permite que el cociente entre las dos longitudes sea igual a uno, permitiendo obtener una magnitud angular versátil, además de clave para construir ángulos de naturaleza real, es decir, que pertenezcan al conjunto de los números $\mathbb{R}$ (Reales).

Definición 1 (ángulo): De acuerdo con Pachuca H. & Zubieta B. (2020), se retoma la idea de ángulo como la rotación dirigida o direccionada de una semirrecta sobre un punto de origen denominado vértice del ángulo. Así pues:

Sea el punto O y el punto A dos pares de puntos a partir de los cuales se construye la semirrecta $\overrightarrow{OA}$. Constrúyase la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ iniciando desde O, de manera que $\overrightarrow{OB}$ sea el resultado de aplicar una rotación a $\overrightarrow{OA}$ utilizando como centro de rotación al punto O y como vector de dirección a c. Así pues $\overrightarrow{OA}$ será determinado como el lado inicial del ángulo y $\overrightarrow{OB}$ como el lado terminal.

Figura 5.
Construcción del ángulo $\angle AOB$.



Nota: Construcción propia, realizado en GeoGebra.

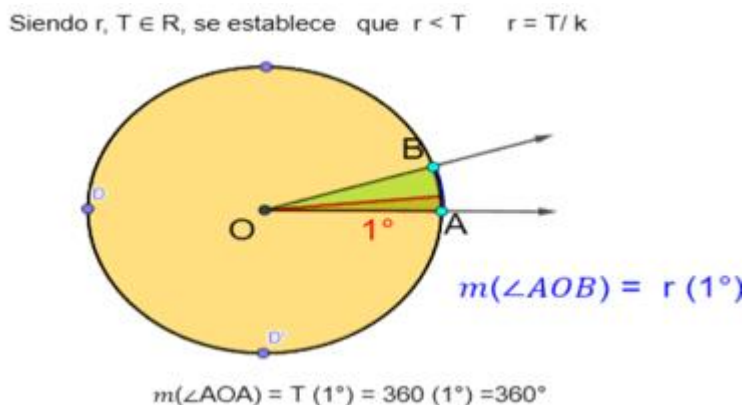
Definición 2 (Medida angular):

“Dada una semirrecta OA , y un número r , existe una única semirrecta OB no contenida en la semirrecta anterior, tal que $(\angle AOB) = r$, siendo r un número en base sexagesimal o perteneciente a los reales denominado unidad. De acuerdo con la definición hallada en el libro **Precálculo quinta edición de Stewart, Redlin & Watson (2007)**, “un ángulo de medida 1 se forma al rotar el lado inicial de una revolución completa... medida de este ángulo en radianes (abreviado rad) es la longitud del arco que subtiende el ángulo” (p.468), las magnitudes establecidas son el sistema sexagesimal y el sistema cíclico, utilizando los radianes.

Definición 3 (Sistema sexagesimal):

Los grados sexagesimales son aquellos que provienen de la partición en 360 partes del círculo, es decir, son aquella unidad que mide la cantidad de rotación aplicada a un segmento aplicando una proporción de $\frac{1}{360}$, tomando como base al número 60 subdividiendo al círculo en partes de 1° , que a su vez se dividen en 60 partes de 1 minuto $1'$, y que a su vez se dividen en 60 partes de 1 segundo $1''$.

Figura 6:
Modelación del concepto del grado Sexagesimal.



Nota: Construcción propia, realizado en GeoGebra.

Definición 4 (Principio del supremo):

Sea X un conjunto de manera que $X = \{x \mid x \geq x \Rightarrow x \in X\}$, ahora defínase al conjunto C_x como el conjunto donde $C_x = \{q \geq c \Rightarrow c \in C_x\}$. Por último, definamos al conjunto $S = \bigcup_{x \in X} C_x$

Es decir, S será el conjunto de las uniones de todos los subconjuntos de X . Por último $S \neq \emptyset$ dado que $C_x \neq \emptyset$, además si $S \neq \mathbb{Q}$ entonces $q + 1 \notin C_x$. Si $\exists p \wedge (m < p)$ entonces $p \in C_x \Rightarrow m \in C_x \Rightarrow p \in S$.

Por la definición anterior $q = \sup X$, es decir que q es el superior del conjunto de x

Teorema:

Sea $X = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ siendo } q \neq 0\}$ es decir por definición $X \subseteq \mathbb{Q}$, X es el conjunto o un subconjunto de los números racionales.

Axioma: Sea $X \subseteq \mathbb{Q}$

Si $\exists (p, q) \geq (a, b) \forall (a, b) \in X$, (p, q) es cota superior de X .

Si $\exists (p, q) \leq (a, b) \forall (a, b) \in X$, (p, q) es cota inferior de X .

Se dice que $X \subseteq \mathbb{Q}$ es acotado, si es acota superior e inferiormente

Definición 5 (Cortadura de Dedekind):

Sea S un conjunto tal que $S \subseteq \mathbb{Q}$ es cortadura de Dedekind, entonces S es una cortadura si:

- 1) $S \neq \emptyset, S \neq \mathbb{Q}$
- 2) S no tiene máximo

3) Si $q \in S$ y $p < q$ entonces $p \in S$

Nota: Se podría ejemplificar un conjunto cortadura como: Sea $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$, este conjunto no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, entonces podría decirse que sea un conjunto

→

$B = \{r \in \mathbb{Q} : r < q^2 \text{ siendo } q^2 < 2\}$ entonces A es cortadura de B .

Definición 6 (números reales de acuerdo con Dedekind):

Sean A y S cortaduras (Def.5), se definen las operaciones $< +, \cdot >$ cómo:

- $A + S = \{p + q : p \in A, q \in S\}$
- $-S = \{q \in \mathbb{Q} : -q \text{ es cota superior no supremo de } A\}$
- $AS = \{v \in \mathbb{Q} : v < 0 \text{ o } v = pq, \text{ donde } p, q \geq 0 \text{ y } p \in A, q \in S\}$

Dado que A y S cumplen con las propiedades y definición de un cuerpo entonces se define a

$$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup T\}$$

- Siendo $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ siendo } q \neq 0\}$

Con $T = \{\bigcup_{x \in X} A : A \text{ es el conjunto de todas las cortaduras no acotadas en } \mathbb{Q}\}$

Definición 7 (circunferencia):

“Sea O un punto tal que $O = (h, k)$, y sea $r \in \mathbb{R}$. Se define a la circunferencia como

$$C = \{P = (\theta, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \theta, \beta \in \mathbb{R} \quad (\theta - h)^2 + (\beta - k)^2 = r^2\}$$

Al desarrollar $(\theta - h)^2 + (\beta - k)^2 = r^2$ la ecuación canónica de la circunferencia se define como: $\theta^2 + \beta^2 + n\theta + k\beta + t = 0$. Además $\theta = \{\theta_j, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{j+n}, \theta_{j+(n+1)}\}$ y

$\beta = \{ \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n, \beta_{n+1} \}$. Por lo anterior además de $\theta \wedge \beta \in \mathbb{R}$, $\theta \wedge \beta \subset \mathbb{R}$

Definición 8 (Circunferencia unitaria o goniométrica):

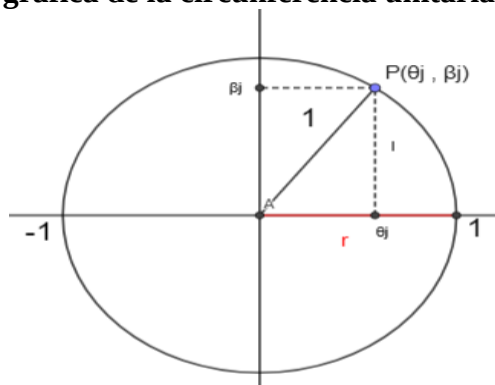
Sea $C = \{ P = (\theta, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \theta \wedge \beta \in \mathbb{R} \text{ } (\theta - h)^2 + (\beta - k)^2 = r^2 \wedge r \in \mathbb{R} \}$ con centro en $O = (h, k)$. Si $h = 0$, $k = 0$, y $r = 1$, se define a la circunferencia unitaria como

$$C_u = \{ P_k = (\theta_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2 : / (\theta_j \wedge \beta_j \in \mathbb{R}) \wedge (\theta^2 + \beta^2 = 1) \}, \text{ tal que } \theta_j, \beta_j \in R_n$$

siendo $R_n = \{ \forall j \in \mathbb{R} : -1 \leq j \leq 1 \wedge R_n \subset \mathbb{R} \}$.

Figura 7:

Construcción gráfica de la circunferencia unitaria

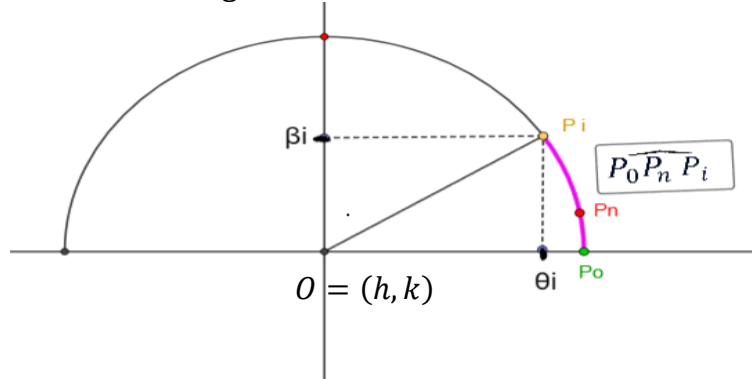


Nota. Construcción propia, realizado en GeoGebra.

Definición 9 (Arco):

Sea $P \in C$ siendo C una circunferencia (def. 4). Tómesese ahora los puntos $P_o, P_n, P_i \in P$, siendo $P = \{P_o, P_n, P_i, \dots, P_k : P_k = ([\theta - \theta_k]; [\beta - \beta_k] \wedge [\theta \wedge \beta \in \mathbb{R}])$. Se define al arco $s = \widehat{P_o P_n P_i}$, como una porción del círculo C , tal que $m(s) = m(\widehat{P_o P_n P_i}) = \alpha(r)$, siendo $\alpha = m(\angle P_o O P_j)$, $\forall (P_o, O, P_j) \in C$ y siendo $r = m(\overline{OP})$.

Figura 8: Construcción geométrica de la noción de arco



Nota. Construcción propia, realizado en GeoGebra.

Definición 10 (Perímetro de un círculo):

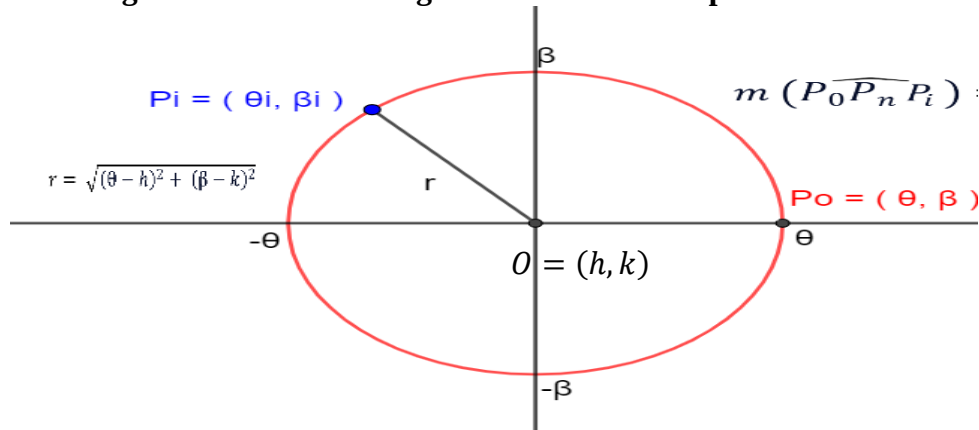
Sea C una circunferencia (def.4), sea s un arco (def.5) tal que $s = \widehat{(P_0 P_n P_l)}$. Se define entonces al perímetro del círculo como

$$P(C) = \{ \hat{s} \subseteq C : \forall P = (\theta, \beta) \in C, P \in \hat{s} \wedge m(\hat{s}) = \text{tr}, t, r \in \mathbb{R} \}$$

Si $s = (\widehat{P_0 P_i P_0})$ entonces $m(s) = m(\widehat{P_o P_i P_o})$ siendo $P_0 = (\theta, \beta)$, $P_i = (\theta_i, \beta_i)$

con r siendo el radio del círculo $m(r) = \sqrt{(\theta - h)^2 + (\beta - k)^2}$.

Figura 9: Modelación figural de la noción de perímetro



Nota. Construcción propia, realizado en GeoGebra

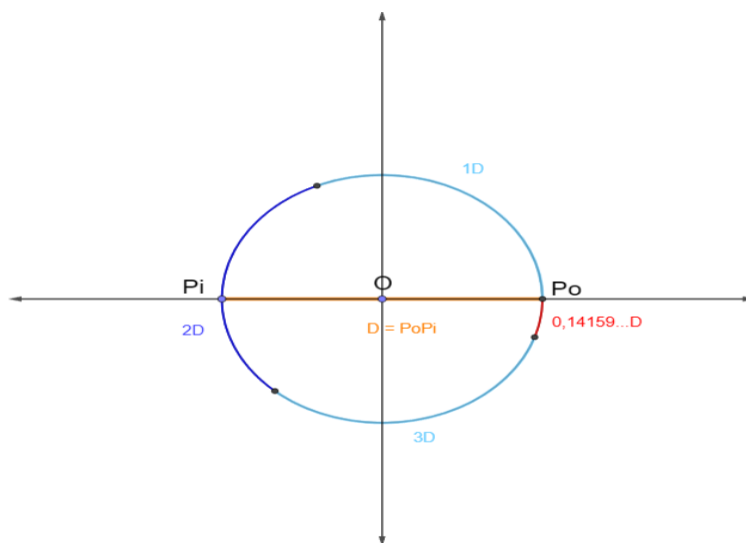
Definición 11 (Proporción del número π):

Sea C una circunferencia (def.4), sea r el radio del círculo, se traza una cuerda $D = 2r$ siendo

$D = \overline{P_0 P_i}$, pero $\overline{P_0 P_i} = \overline{P_i O} + \overline{O P_i}$, si $m(\widehat{P_0 P_i P_0})$ es el perímetro del círculo (def.6), se puede establecer una relación tal que $m(\widehat{P_0 P_i P_0}) = nD$ y $m(\widehat{P_0 P_i P_0}) = n2r$. Sin embargo, $n = kD$ donde $n = 3,14159 \dots$ siendo $n = \pi$. Por lo anterior $m(\widehat{P_0 P_i P_0}) = 2\pi r$ siendo $m(\widehat{P_0 P_i P_0})$ el perímetro del círculo (por def. 6).

Figura 10.

Representación geométrica de la proporción del Diámetro en la circunferencia



Nota. Construcción propia, realizado en GeoGebra.

Definición 12 (Radián):

Siendo $C = \{ P = (\theta, \beta) \in \mathbb{R}^2 / (\theta \wedge \beta \in \mathbb{R}) \wedge [(\theta - h)^2 + (\beta - k)^2 = r^2] : r \in \mathbb{R} \}$

Sea s un arco tal que $m(s) = m(\widehat{P_0 P_j P_k}) = \alpha r$, si $r = 1$, entonces $m(\widehat{P_0 P_j P_k}) = \alpha_1(1)$.

Se ha establecido que el perímetro del círculo es $m(\widehat{P_0P_iP_0}) = tr = 2\pi r$, pero como $r = 1$ $m(\widehat{P_0P_iP_0}) = 2\pi$, siendo $m(\widehat{P_0P_jP_k}) < m(\widehat{P_0P_iP_0})$ y, por tanto

$m(\widehat{P_0P_iP_0}) = k [m(\widehat{P_0P_jP_k})]$, es decir $k [2\pi r] = m(\widehat{P_0P_jP_k})$, para el caso de la circunferencia unitaria reemplazamos la medida del arco y el radio y nos quedaría que:

$$k = \frac{m(\widehat{P_0P_jP_k})}{2\pi} = \frac{\alpha r}{2\pi}$$

Por lo anterior, definimos al radián como $\alpha = \{\forall \alpha_j \in \mathbb{R} : \alpha_j = \frac{\alpha}{2\pi}\}$.

Definición 13 (Geoplano Circular):

De acuerdo con Velazco (2018), una correcta definición para el concepto de geoplano se aplica en Potoy et al, (2007), al considerar que esta herramienta “es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de los conceptos geométricos; el carácter manipulativo” (p.25). El geoplano es un recurso instrumental manipulativo del tipo concreto, el cual consta de una tabla donde se ubican clavos a distancias equitativas desde el centro hasta sus extremos (Velazco,2018, p.69).

Capítulo III

3. Marco Metodológico

En este capítulo se detallan aspectos metodológicos y prácticos de carácter transversal en el marco del desarrollo de la propuesta de trabajo de grado, con el objetivo de concretar una propuesta de innovación curricular y didáctica. Para este trabajo, se considera fundamental emplear un diseño metodológico que se enmarca en una propuesta de modelo local de análisis

didáctico y la sistematización de experiencias docentes, una estrategia metodológica de investigación-acción basada en la investigación cualitativa en educación matemática.

Para el desarrollo del presente trabajo se ha optado por adoptar un enfoque de investigación de carácter cualitativo, que pueda mediante un sistema de investigación - acción aplicar un método de sistematización docente, con el fin de conformar un marco metodológico de investigación que brinde una alternativa para concebir las prácticas tradicionales de investigación e innovación curricular. El enfoque desde la reflexión crítica, la evaluación y la observación de la experiencia docente, se plantean con el objetivo de construir herramientas de mejora y abordaje de las prácticas de aula del docente en formación de matemáticas.

Se tiene como objetivo que mediante el análisis de un objeto enriquecedor y movilizador de reflexiones de tipo didáctico, cognitivo y práctico como lo es el radián como medida angular importante en el argumento de una función trigonométrica de variable real, se puedan caracterizar algunos elementos de comprensión, interpretación y aprendizaje para que por medio de la construcción de la presente unidad, se logren mejorías en la formulación de prácticas de docentes de matemáticas.

3.1 Modelo local de análisis didáctico:

Es el modelo local de análisis didáctico utilizado e interpretado en la propuesta de este trabajo de grado, como una herramienta crucial en la proposición de estrategias de formación para docentes de matemáticas. Como consecuencia se pretende facilitar la implementación de propuestas de innovación didáctica y curricular, pensadas como parte crucial de interpretar esta herramienta como un modelo que contribuye a mejorar la actividad investigativa y práctica para

la enseñanza de las matemáticas. El concepto de radián es propuesto como un objeto matemático clave para movilizar competencias relacionadas con el trabajo del pensamiento espacial, geométrico, métrico y los sistemas de medición, lo que lo convierte en un foco de reflexión didáctica y pedagógica sobre aquellos elementos que el docente debe considerar para su adecuada inclusión en las matemáticas escolares como eje articulador para el desarrollo de la comprensión de las funciones trigonométricas como funciones de variable continua.

La concepción del diseño de modelo local de análisis didáctico implementado en este trabajo de grado se basa en la selección y análisis del contenido matemático del radián, interiorizado por medio de una investigación estructurada en diferentes dimensiones que se consideran pertinentes para el análisis didáctico de la fenomenología asociada a este objeto matemático.

En primer lugar, desde una *dimensión curricular*, se seleccionará el contenido matemático del radián en función del grado de escolaridad en el que se trabajará, integrándolo con los objetivos del ciclo escolar y relacionándolo con otros temas, como las transformaciones geométricas y las funciones trigonométricas. En segundo lugar, desde una *dimensión didáctica*, se analizará la estructura conceptual del radián, sus diferentes representaciones (geométricas, numéricas, simbólicas) y los fenómenos que se pueden modelar con él, destacando su importancia en la medición angular y su relación con las funciones seno y coseno. Finalmente, desde una *dimensión cognitiva*, se identificarán las dificultades, obstáculos o errores que los estudiantes suelen enfrentar al comprender el radián, tales como su naturaleza continua y su relación con el círculo unitario, lo que permitirá adaptar las estrategias pedagógicas.

A través de esta sistematización y el análisis didáctico, se buscará implementar recursos didácticos manipulativos y digitales que faciliten la visualización y comprensión del radián como una unidad de medida fundamental en las funciones trigonométricas de dominio real y continuo. En particular, se enfatizará en actividades que promuevan el pensamiento geométrico y espacial, tales como la representación del radián en el círculo unitario, como una razón entre longitudes y su conexión con las funciones trigonométricas.

3.2 Sistematización de experiencias docentes

En el desarrollo de este trabajo de grado, se considera pertinente la aplicación de una metodología de investigación basada en la sistematización de experiencias docentes, entendiéndola como una estrategia y a su vez una herramienta metodológica de investigación cualitativa que se nutre de diversas estrategias de indagación, incluyendo la investigación-acción.

La estrategia de investigación acción incluye componentes teóricos y prácticos, de los que cabe destacar aquellos que favorecen la investigación como método de formación en didáctica de las matemáticas, por medio de la cual se genera un contenido que retroalimenta la práctica pedagógica y la reflexión en el campo; facilitando la generación de conocimientos a partir de la revisión y/o análisis del proceso de orquestación didáctica del profesor de matemáticas, comprendiendo la composición de este fenómeno de orquestación desde sus fases de planificación, elaboración y aplicación.

La sistematización de experiencias docentes se organiza en cuatro momentos (fases)

clave, siguiendo la propuesta de Bedoya (2013):

- En la fase número uno, se realizará la preparación y planificación metodológica del proceso de sistematización, estableciendo un marco de referencia para la investigación.
- En la segunda fase, será llevada a cabo la recuperación y reconstrucción de la experiencia, lo que implica documentar y fundamentar conceptualmente el trabajo realizado.
- Para la tercera fase, será enfocado el ejercicio en el análisis e interpretación de la información, permitiendo movilizar y desarrollar conocimientos esenciales sobre la práctica docente.
- En su cuarta y última fase, se procede a la potencialización y socialización de los resultados, comunicando los hallazgos de la sistematización, incluyendo propuestas de mejora y la fundamentación conceptual y procedimental.

Se pretende mediante este enfoque caracterizar algunos elementos de reflexión desde aquella fenomenología propia de la práctica en el aula a partir de la enseñanza del radián, pero movilizadas por una visualización más amplia de la fenomenología de la didáctica de las matemáticas que genere inquietud por una transformación e innovación curricular en la enseñanza de las matemáticas, como una estrategia de formación para profesores de matemáticas.

Será aplicado el modelo de sistematización de experiencias docentes, desde la aplicación de la propuesta de Bedoya (2013), demarcando cuatro fases a ejecutar las cuales se describen a continuación:

Fase de planificación: Se plantea realizar un análisis preliminar centrado en el radián como contenido matemático escolar, lo cual es fundamental para delimitar la problemática de investigación dentro del marco conceptual previamente establecido, un modelo local de análisis didáctico que integre elementos del modelo de los Van Hiele. Asimismo, son definidos los intereses de la investigación identificando los aspectos de tipo conceptual, metodológico y procedimental que dirigen el proceso de sistematización. Seguido a lo anterior se elabora un marco conceptual en base a la atención de las necesidades e intereses que movilizan a este trabajo de grado, considerando las tres dimensiones fundamentales del mismo, la curricular, desde el contexto social de la idiosincrasia donde es concebido el trabajo, la matemática, desde la fenomenología movilizada por el objeto en su concepción epistémica y la didáctica, como aquella que aterriza el conocimiento matemático en el aula y lo analiza desde la fenomenología de su relación con la enseñanza y aprendizaje en la misma.

Fase de Acción: Para esta etapa con la información recolectada será ejecutada la fase de planeación, creación y aplicación de la prueba piloto de la unidad didáctica, tomando el radián como objeto matemático central. Durante esta etapa, se profundiza en los aspectos teóricos y prácticos que facilitan tanto la planificación como la construcción de la unidad didáctica, realizando una aplicación teórica y práctica del modelo local de análisis didáctico, con el fin de que las actividades planteadas sean concebidas a la luz del análisis de diversos factores tales como los contextos (curricular, institucional y de aula), el contenido matemático (enfocado en el radián), los actores involucrados (profesor y alumnos) y los recursos didácticos (manipulativos y tecnológicos) que sustentan el diseño de la unidad. Será incluido como un componente

importante para el diseño y concepción de la estructura de la unidad el modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de los Van Hiele, desde la articulación de algunos de sus componentes como base para la construcción de las actividades.

Fase de Observación: En esta fase, el objetivo es realizar una valoración generalizada de la experiencia docente durante la aplicación de la unidad didáctica, con el fin de recolectar información importante que permita la reflexión y análisis de resultados a posteriori. Por medio de la aplicación de las actividades de la unidad en un aula del colegio seleccionado en grado décimo de escolaridad, además de un diálogo planificado entre pares, a través de un grupo focal de docentes, se planea enriquecer y observar aquellos resultados obtenidos a la vista de la teoría aplicada desde el marco metodológico. Los docentes seleccionados para el ejercicio dialógico tendrán la función de aportar desde su experiencia en el aula con la enseñanza del radián y su relación y formación con los fenómenos asociados a la enseñanza del radián, una retroalimentación de los planteamientos realizados en la investigación de la tesis presente.

Fase de Reflexión: En esta última etapa, se pretende generar una reflexión puntual entorno a los resultados obtenidos con el fin de dar cumplimiento al objetivo central de la investigación, el cual consiste en caracterizar elementos conceptuales (de tipo teórico) y procedimentales (de naturaleza práctica) básicos para diseñar un modelo local de análisis y conocimientos didácticos, que se concrete en una unidad didáctica sobre el radián y el movimiento circular uniforme, como estrategia de formación inicial para profesores de matemática escolar. Por medio de la formulación de estas conclusiones, serán planteadas algunas consideraciones y reflexiones relacionadas a la movilización de competencias profesionales para

el ejercicio del profesor de matemáticas, destacando además algunas posibles mejoras a considerar en la concepción del diseño de la unidad con el fin de trabajar el radián como un objeto matemático importante para generar reflexión didáctica en el aula.

3.2.1 Descripción de Contextos, Participantes y Estrategias de Recolección de Información

La descripción general de los elementos articulados para el desarrollo de la sistematización de experiencias docentes, será expuesta por medio de los diferentes componentes a considerar, estos son el contexto sociocultural y curricular (macro y micro) desde donde se han movilizado todos los elementos del fenómeno ambiental de la propuesta de análisis, considerando que aunque la unidad no ha sido aplicada directamente en una institución educativa, si fue construida en torno a la propuesta educativa institucional de una institución educativa de la ciudad, con el fin de movilizar un medio cotidiano y realista que sirva como referente curricular y contextual. A continuación, se describen algunos elementos de dicha institución educativa:

3.2.1.1 Caracterización General: contextos, participantes y recolección de los datos

El centro educativo Industrial Luis Madina es una institución de la ciudad de Cali, ubicada en la Cra. 94 # 4C-04 del barrio Meléndez, comuna 18. Como tal, hace parte del pie de monte de la cordillera occidental, entre las cuencas de los ríos Meléndez y Cañaveralejo, esta fue fundada en 1969 por el padre y servidor misionero Luis Madina quien contaba con una especialización en psicología infantil y contaba con una gran experiencia en tratos con jóvenes vulnerados.

Esta institución posee un enfoque humano con fundamentación en valores cristianos, sentido social y la preparación para afrontar el mundo universitario o laboral, apoyándose en la metodología pedagógica similar a las instituciones de educación superior. Las áreas de trabajo convergen en este objetivo, por ello desde cada una se nota el aporte en la construcción de los elementos, espacios y herramientas para lograr la integralidad en la formación que ofrece la institución como estrategia educativa.

Misión

Será reconocida en la ciudad de Cali como una institución Arquidiocesana con proyección universitaria, experta en procesos educativos en torno a la formación de líderes y gestores de paz desde el sentir de la iglesia.

Visión

Será reconocida en la ciudad de Cali como una institución Arquidiocesana con proyección universitaria, experta en procesos educativos en torno a la formación de líderes y gestores de paz desde el sentir de la iglesia.

Institucionalidad y Comunidad:

Lograr reconocimiento en la comunidad como una institución formadora de personas integrales con visión humanista apoyada en el evangelio. Generar aportes a la comunidad por medio de las actividades sociales, profesionales y pastorales desarrolladas por la población estudiantil.

Académico: Fortalecer el modelo educativo, en pro del posicionamiento y reconocimiento por el desempeño pedagógico y sus resultados académicos. Generar

metodologías y didácticas de encuentro que faciliten la formación integral en la comunidad educativa.

3.2.1.2 Modelo Pedagógico:

La institución cuenta con una modalidad de bachillerato técnico, ofreciendo como modalidad de articulación a la educación superior la modalidad técnica en electricidad, mecánica automotriz, industrial, sistemas y gestión empresarial.

Enfocado desde el modelo de las pedagogías activas, se pretende aplicar desde los referentes teóricos del modelo de María Montessori, el modelo Waldorf y el modelo Reggio Emilia, un conjunto de técnicas y metodologías, cuyo principal objetivo es convertir al niño en el protagonista de su propio aprendizaje, por medio de la aplicación de técnicas para realizar clases innovadoras basadas en la experiencia y en situaciones reales se pretende desarrollar en ellos habilidades y actitudes significativas. La metodología de diseño es basada en la unidad de aprendizaje como estructura guía y la fase práctica de su modelo toma como referente el aprendizaje invertido, descrito en su PEI como un enfoque pedagógico en el que la Instrucción directa se realiza fuera del aula y el tiempo presencial se utiliza para desarrollar actividades de aprendizaje significativo y personalizado.

3.2.1.3 Contexto del Aula:

Las aulas de la institución educativa tienen una capacidad para albergar a entre 35 y 40 estudiantes, con una disposición tradicional de tablero al frente de tipo acrílico y sillas individuales alineadas. Sin embargo, cuenta con tres talleres de tipo industrial, donde existe

equipamiento para la realización de ejercicios de soldadura, troquel, ensamblaje y construcción y diseño de equipos de mediana y baja complejidad industrial. Además, cuenta con un edificio de sistemas con 8 salas de cómputo equipadas con entre 20 y 25 computadores cada una.

3.3 Recolección de la información.

Estructurado mediante la aplicación de una metodología de sistematización de experiencias docentes, el proceso de recopilación de los datos necesarios para la realización de este trabajo de grado fue realizado a partir de los siguientes puntos:

Fase de planificación

Se realiza un proceso de compilación de información mediante una exhaustiva revisión documental, enfocándose en adquirir e indagar los datos relevantes que permitan identificar los aspectos curriculares relacionados con el trabajo del objeto matemático del radián propuesto en el contexto micro y macro del currículo del país. También se realiza una recopilación de la información sobre investigaciones y trabajos previos de los aspectos didácticos y matemáticos relevantes inmersos en la fenomenología educativa y aplicada del radián. Se considera una revisión documental y de recursos distribuida de la siguiente manera:

1. Revisión de los documentos institucionales establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) desde el aspecto curricular general o macro; el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la institución tomada como referencia para la construcción de la propuesta, junto con el plan de área de la institución. Se anexa además un documento de planeación de la clase como un referente para evaluar los contenidos propuestos en torno al trabajo con el radián en la

institución.

2. Revisión de documentos e información referente sobre la concepción, definición y aplicación del modelo local de análisis didáctico como una estrategia de formación de profesores. Se anexa además la revisión documental sobre la concepción, definición y aplicación del modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de los Van Hiele.
3. Compilación y revisión de información relevante sobre la enseñanza del radián propuesta en libros de texto de las matemáticas en diferentes grados de escolaridad y en otros campos de aplicación como la física e ingeniería.

Fase de acción:

En este punto es importante generar la movilización de aquellos elementos necesarios para la construcción de la unidad didáctica basada en el trabajo con el objeto matemático del radián, por tal motivo, es desarrollado un trabajo de campo en la institución educativa seleccionada, con el fin de obtener una contextualización del proyecto educativo, desde donde la construcción de la unidad adquiere un enfoque particular para ser aterrizado en una necesidad dentro de un entorno. Será realizada una revisión de los planes de estudio y documentos institucionales, observando cómo es desarrollada la propuesta de trabajo del radián en el currículo del aula, por medio de esta observación se establece un marco teórico que guiará el desarrollo del contenido.

Con la información obtenida, revisada y depurada, se procederá a construir la propuesta de unidad didáctica integrando los elementos curriculares propuestos desde los documentos encontrados, estos documentos brindados por la institución educativa serán incluidos en la sesión de anexos y utilizados como referentes para la construcción de algunos elementos tales como propósitos, objetivos y referentes curriculares.

Fase de observación: En esta fase de observación serán aplicadas las actividades propuestas en la unidad (teniendo en consideración el tiempo disponible que permita la institución educativa), dentro de un aula de grado décimo del colegio, para observar aquellos elementos a considerar importantes para la planeación de las actividades. Luego por medio de un grupo focal de docentes, incluyendo a uno que pertenece a la institución educativa referente, se realizará una retroalimentación de las experiencias vividas en el aula y de las experiencias percibidas por los docentes al desarrollar la actividad por medio de los recursos con los que cuentan. A partir de las experiencias aportadas por los docentes, estos tendrán la oportunidad de incluir diversas perspectivas, considerando su visión y estilo de enseñanza. Las interacciones se registran mediante notas o grabaciones de forma individual o generalizada (dependiendo del tiempo disponible de los participantes), garantizando la captura de aquellas reflexiones que surjan como un método de retroalimentación sobre las prácticas pedagógicas propuestas en la unidad.

Fase de reflexión:

Como parte final del trabajo, será propuesta una reflexión final sobre la fenomenología

identificada desde la perspectiva didáctica dentro de la enseñanza y el aprendizaje del radián y el concepto de medida angular. Lo anterior será realizado a partir de la caracterización de los elementos encontrados para el diseño del modelo local de análisis didáctico, siendo además importante revisar la incidencia y alcances de la integración de algunos elementos del modelo de los Van Hiele, como una estrategia de guía para la elaboración del diseño de la unidad didáctica propuesta. Las categorías de modelo local y la integración del modelo de los Van Hiele son relevantes en tanto que están alineadas con los objetivos de la investigación.

De la misma forma, serán presentadas algunas conclusiones y generalidades que emergen de la retroalimentación por parte de los pares al realizar una prueba piloto con la unidad didáctica siguiendo el marco propuesto en el trabajo. Estas conclusiones responden a los objetivos específicos de la investigación y se enfocan en los resultados obtenidos durante la implementación. Se pretende que, durante las sesiones de diálogo, la observación de las prácticas pedagógicas permita a los docentes reflexionar sobre los métodos aplicados por ellos y sus colegas al momento de enseñar y aprender sobre los objetos de radián y medida angular. Mediante la puesta en marcha de este proceso de retroalimentación se pretende la promoción de una cultura de colaboración, que permita la generación de ideas innovadoras, que fortalezcan las habilidades de investigación al transformar las prácticas de aula en un proceso de aprendizaje colectivo y constante.

Capítulo IV:

En este capítulo serán presentados aquellos resultados obtenidos de la propuesta de diseño de un modelo local de análisis didáctico, con el objetivo de aplicar un método de investigación práctico y teórico, que permita obtener componentes importantes de reflexión en el

aprendizaje y enseñanza del radián en el grado décimo de escolaridad; siendo un objeto matemático que moviliza elementos fenomenológicos del campo de la didáctica de las matemáticas. Para lo anterior, se articula como un resultado del trabajo, la propuesta de una unidad didáctica, que aplique las consideraciones derivadas del modelo local diseñado, pero, además, incluya como una guía metodológica para su construcción, elementos del modelo de desarrollo de pensamiento geométrico planteado por los Van Hiele.

4.1 Presentación de resultados y análisis:

La construcción de la propuesta de unidad didáctica ha sido concebida con el objetivo de movilizar aquellas competencias que permitan alcanzar el nivel II de razonamiento del modelo de los Van Hiele, el cual se denomina como de “ANÁLISIS”, y describe como un logro obtenido en su alcance que el estudiante en este nivel podrá, identificar la aparición de las propiedades elementales, para este caso del radián, por medio de la manipulación de sus elementos compositivos. La utilización del lenguaje en este nivel se encuentra todavía desprovista de una formalización propia del lenguaje matemático, por lo que la descripción de los elementos, aunque posean una mayor profundidad en la descripción de las relaciones de sus elementos, todavía no se piensan desde un rigor matemático estricto, de hecho, se pretende la identificación de los elementos geométricos de las propiedades del círculo, inmersas en la naturaleza métrica del radián.

Cada una de las actividades será aplicada siguiendo el modelo instruccional planteado por Van Hiele, estructurándose de la siguiente manera:

Fase de información:

Se propone en esta fase facilitar la retroalimentación y la recolección de información para

que a partir de lo trabajado se logre identificar las bases y conocimientos desde donde se construyen las actividades pensando en la secuencialidad. La actividad # 1:” El estudio del cielo en el desarrollo de la cultura humana”, pretende por medio de la presentación de una pequeña historia sobre los métodos de medición utilizados en la antigüedad para fenómenos periódicos, contextualizar la necesidad de investigar las propiedades de un movimiento circular y de esa manera lograr en la actividad # 3: “Comprendiendo las medidas de un giro”, retroalimentar mediante los conocimientos expuestos en el texto sobre la historia del radián y las ideas que los estudiantes presenten, los presupuestos teóricos con los que cuentan los estudiantes para avanzar en el reconocimiento de la importancia de los fenómenos periódicos circular y la necesidad del radián en la medición de ángulos en base distinta a la sexagesimal, para analizar el comportamiento de estos fenómenos.

Fase de orientación dirigida

En esta fase entra en juego la orquestación didáctica de los materiales y elementos por medio de los cuales el profesor, busca la obtención de herramientas para lograr el avance en el desarrollo de las habilidades que se pretenden alcanzar. Esta fase podría ser transversal a todas las actividades, dado que, en muchos momentos de las mismas, es necesario contar con una instrucción o guía por parte del profesor que permita la realización de las tareas propuestas. Sin embargo, pensando en las generalidades se considera que propone la actividad # 2: “Construcción de razón de círculo y medida angular” y la actividad # 4: “Movimiento de una llanta”, son quienes mejor representan las actividades estructuradas como método de orientación asistida, pues buscan que los estudiantes puedan relacionar la magnitud del arco subtendido por el ángulo, con la cantidad de desplazamiento lineal realizado por una rueda. Se pretende mostrar

indicios sobre la proporción directa que surge entre la longitud horizontal del camino y la porción de perímetro demarcada por el giro. Se empieza construyendo la relación entre la medida del perímetro y el número π , demarcando en este la constante proporcional de veces que cabe el radio siempre en el perímetro del círculo, para luego introducir la idea de medida angular en radianes. En la actividad # 3, se introduce la relación que existe entre la altura alcanzada por el punto inicial del objeto que realiza el movimiento, respecto al punto de equilibrio del movimiento con el fin de introducir de manera indirecta el concepto de función periódica y la importancia que esta tiene al analizar el comportamiento de la partícula para su utilización en la actividad # 6.

Fase de explicitación:

En esta fase se busca que los estudiantes logren relacionar las propiedades trabajadas en los puntos anteriores en sus producciones escritas y orales, de manera que se puedan encontrar elementos descriptivos de sus formas de ir apropiando las herramientas trabajadas en la fase de orientación didáctica sobre el concepto de radián y su relación con los movimientos periódicos. En este punto en particular se pide a los estudiantes también el socializar sus resultados para que pueda existir una retroalimentación con sus pares que contribuya al fortalecimiento de su propio lenguaje, sin desconocer su nivel de razonamiento que para este caso sería el primero que obedece al de la visualización. Para lograrlo se ubican en la actividad #1, actividad # 3, actividad # 4 y actividad # 5, unos espacios con preguntas, donde se espera que los estudiantes puedan responder haciendo uso de las herramientas desarrolladas en cada actividad y favorecer la discusión entre pares al momento de comparar sus resultados con los compañeros que los acompañan. El desarrollo de la actividad en estos puntos permitirá que el profesor facilite el

trabajo en grupo.

Fase de orientación libre:

Para las actividades desarrolladas en esta fase se plantean problemas de tipo aplicativo, donde por medio de la concepción de la solución, se puedan encontrar las relaciones explícitas que den paso a la integración de la unidad de medida del radián como una unidad necesaria y fundamental para analizar propiedades de los movimientos periódicos como el movimiento circular, dando un preámbulo a la construcción de la función trigonométrica de variables real. Podría decirse que en la mayoría de las actividades existe un momento, previo al final, donde se permite a los estudiantes aplicar las herramientas brindadas en cada actividad construida, así pues, en la actividad # 1, en las preguntas 4 y 5 se da la oportunidad a los estudiantes para proponer una solución al problema enunciado. En la actividad # 2, después de la explicación del profesor por medio de las instrucciones allí consignadas, se da un espacio para que los estudiantes puedan llenar las tablas anexas con los resultados obtenidos de su experimentación y aplicación de las actividades. De la misma forma sucede en las actividades # 3 y # 4, donde es de crucial importancia el análisis de las instrucciones y la puesta en marcha de la experimentación para la obtención de las respuestas.

Fase de integración:

Se entiende que para este último paso los estudiantes deben integrar el conocimiento obtenido en los pasos anteriores, pero buscando generalizar e integrar los conocimientos en diversos contextos, apelando a la recursividad, es decir, aplicando lo aprehendido y aprendido en el desarrollo del nivel de razonamiento ubicado. Para permitir la aplicación de este último

momento crucial en el modelo, se propone en la actividad #5 Y # 6, una serie de actividades situadas en el contexto de un juego de feria mecánico del movimiento de una llanta, llamado la “rueda de la fortuna”, aquí se disponen una serie de problemas los cuales se pretenden solucionar con la utilización de los elementos previamente trabajados.

Como se plantea desde el inicio se propone que mediante la aplicación de las anteriores actividades los estudiantes logren alcanzar el nivel II de razonamiento, por lo que para lograrlo deberán ejercitar el nivel I de razonamiento denominado visualización, siendo que las actividades 1 y 3 se han pensado en tanto que mediante el encuentro con la historia de los fenómenos periódicos y el radián, y el reconocimiento de sus partes los estudiantes puedan ver sus propiedades y relacionarlas para el alcance del nivel de “análisis” de donde no solo deberán reconocer la existencia del fenómeno sino las propiedades que de este desprenden.

4.2 Análisis didáctico curricular: Contextualización del currículo en torno a lo planteado por el MEN y el PEI institucional:

El currículo nacional de Colombia ha construido su marco teórico alrededor de las competencias matemáticas y no de los contenidos (Campo & Lasso, 2014), por lo anterior es necesario identificar la manera en la que el currículo propuesto por el MEN (2006) sugiere debe ser abordado el trabajo a realizar con los conceptos de función trigonométrica y la razón trigonométrica, ya que se debe señalar que, aunque la función está señalada de manera explícita, la razón se propone con un trabajo elaborado de forma implícita; esto porque se construye señalando aquellos aspectos de comparación, representación y uso de medidas en los triángulos y circunferencias. Es necesario abordar la relación entre los lados de un triángulo, los ángulos, la longitud de arco, la semejanza de triángulos (Campo & Lasso, 2014). Así pues, se realiza una

reconstrucción por medio de un esquema MPD (Metas, procesos y desempeños) de la articulación curricular construida en la propuesta de unidad didáctica:

Tabla 3.
Esquema MPD (Metas, procesos y desempeños)

Contenido Matemático	Presupuestos Teóricos - Conocimiento Previos y Medios	Procesos Generales	Estándar	Derecho Básico de Aprendizaje (DBA)	Evidencias y logros del aprendizaje	Tiempo
Geometría Plana: • Polígonos Transformaciones: • Rotaciones y traslaciones Sistemas de Medición: • Unidades de medida • Equivalencias Sistemas numéricos • Números reales	Ángulos Circunferencias Longitud de arco Números reales Unidades de medida Perímetro de la circunferencia Razón y proporciones Medios: Rotación Traslación Sistemas de equivalencias Razones Trigonometría Circunferencia Unitaria (Círculo Goniométrico) Funciones trigonométricas	Modelación, Razonamiento, Comunicación, Resolución y planteamiento de problemas	• Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. • Describo y modelos fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. • Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes	*Reconoce al radián como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico * Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.	• Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones. • Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.	El tiempo límite planteado para la realización de esta unidad didáctica está basada en la intensidad horaria semanal de la docente que dicta la asignatura en la institución educativa seleccionada como referente. El tiene cinco (5) horas de clase de 45 minutos reloj cada una, brindando un total de 3 horas con 45 minutos reloj y un tiempo de una semana

Nota. Estándares Básicos de competencias (MEN, 2006), DBA (MEN, 2017). Elaboración propia

4.3 Análisis de contenido:

Al constituir el modelo local de análisis didáctico para el trabajo del radián contemplado para este trabajo de grado, en esta sección del análisis de contenido se pondrá un especial énfasis en la observación detallada del contenido matemático escolar a desarrollar, y para ello serán planteadas tres subcategorías de análisis las cuales serán: estructura conceptual y relación de contenido, contenido histórico y epistemológico, además del estudio de su fenomenología y contexto.

4.3.1 Estructura conceptual y relación de las medidas angulares

Al momento de concebir una estructura conceptual del radián, se hace necesario el reconocimiento de aquellos elementos que permiten articular la fenomenología principal que es movilizadora por medio de las representaciones que se construyen como imágenes conceptuales (Alyami, 2024), representaciones visuales y simbólicas que se necesitan para entender al radián en su espectro. De acuerdo con la información recopilada sobre aquellas representaciones cuantitativas y cualitativas del radián, se toma a consideración que existen unos núcleos centrales desde los cuales la representación geométrica, algebraica y métrica del objeto matemático a trabajar se construyen, estos núcleos son: la circunferencia, la circunferencia unitaria, rotación en el plano, definición de arco, definición de la magnitud de unidad de radio, y función enrolladora.

Siguiendo las ideas de Alyami (2024), al momento de construir un esquema proceptual (Tall & Vinner, 1981) del concepto de radián, se lograron hallar tres categorías principales que constituyen los esquemas de representación y por ende de concepción de la imagen de radián de estudiantes en formación para profesores de matemáticas. Esos esquemas están ordenados en tres categorías generales: una concepción cualitativa del radián, una concepción cuantitativa estrictamente y por último otra concepción cuantitativa del radián, pero basada en la equivalencia. Al realizar un análisis de estos esquemas de representación desde la visión de Alyami (2024) se logra visualizar al radián como una entidad geométrica fundamentalmente conectada con el arco y su proporcionalidad en el ángulo central, movilizándose herramientas geométricas y de medición importantes para el desarrollo de competencias cruciales en la escolaridad.

La representación cuantitativa, por su parte, introduce la asociación del radián con

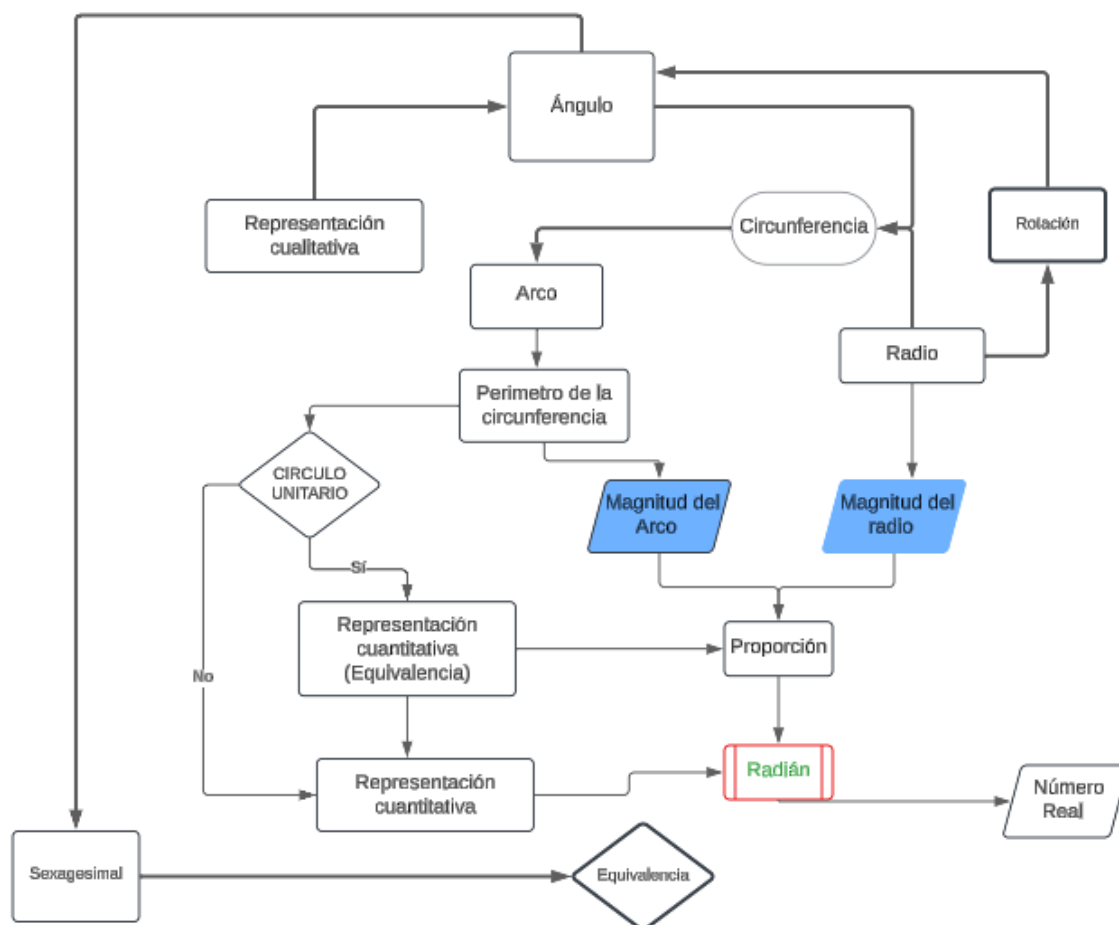
unidades de medida, destacando la relación proporcional entre la longitud del arco y el radio de la circunferencia. Sin embargo, en este nivel, la noción de radián puede carecer de precisión al concebirse como una propiedad del círculo más que como una magnitud proporcional, generando confusión respecto al papel del número π como constante.

Finalmente, la representación cuantitativa basada en la equivalencia enfatiza la construcción del radián como una magnitud derivada de la relación proporcional entre el radio y el arco subtendido por un ángulo central. Este enfoque permite definir el radián como una unidad angular clave y versátil, fundamental para describir ángulos en el conjunto de los números reales y comprender su naturaleza proporcional de manera explícita.

De acuerdo con las definiciones presentadas con anterioridad, se pretende por medio de este trabajo de grado definir una estructura conceptual, que permita concretar por medio de la construcción del radián como unidad angular una manera de generar reflexión y trabajo sobre el pensamiento geométrico y pensamiento métrico. Primero se mostrará el esquema de relación entre los conceptos propuesto por Alyami y después la definición y articulación entre los conceptos primordiales para la presentación del radián, identificando las complejidades que existen en estos y a la vez la necesidad de ir articulando cada uno de los elementos al momento de trabajar con el concepto del radián en el aula.

Figura 11.

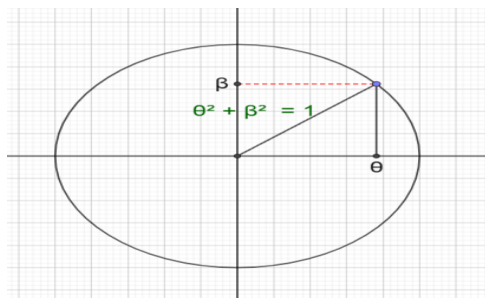
Mapa conceptual de la relación de la estructura de las representaciones del radián



Nota. Basado en Alyami, H (2024). Radian π : Concept images evoked by quantitative representations of radian angle measure. Mathematical thinking and learning. Elaboración propia

Circunferencia Unitaria: Una circunferencia es definida como aquel espacio geométrico donde $C = \{ (\theta, \beta) \in \mathbb{R} : (\theta - h)^2 + (\beta - k)^2 = r^2 \}$ siendo O su punto centro y $O = (h, k)$. Una circunferencia unitaria es definida como aquella circunferencia donde siendo $h=0$, $k=0$, y $r=1$, entonces $C_u = \{ (\theta, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \theta^2 + \beta^2 = 1 \}$ con $\theta = \{ \theta_j, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{j+n}, \theta_{j+(n+1)}, \dots \}$ y $\beta = \{ \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{j+n}, \beta_{j+(n+1)}, \dots \}$.

Figura 12.
Representación de una circunferencia unitaria.



Nota: Construcción propia hecha en Geogebra

Rotación: Dado un punto O del plano y un ángulo $\alpha = m(\angle \theta O \beta_k)$, se llama giro de centro $O = (h, k)$ y amplitud α , a aquella transformación geométrica denotada como $G(O, \alpha)$, la cual relaciona a cada punto $P(\theta, \beta)$ del plano otro punto $RC, (P) = (\theta_k, \beta_k)$ de forma que se verifique lo siguiente:

1. $\theta_k = (\theta - h) \cos(\alpha) - (\beta - k) \sin(\alpha) + h$
2. $\beta_k = (\theta - h) \sin(\alpha) + (\beta - k) \cos(\alpha) + k$

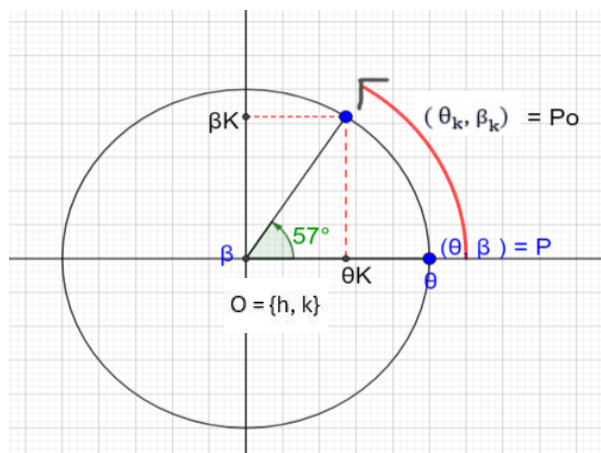
Nota: La naturaleza de la medida de la magnitud angular no es definida, dado que se pretende en este nivel construir el concepto de ángulo desde su sentido geométrico y todavía no cuantitativo.

Esta transformación geométrica contiene una representación en forma de matriz (matricial) en $\mathbb{R}^2$, esta se denota como:

$$\begin{pmatrix} \theta_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta - h \\ \beta - k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Figura 13.

Representación de la rotación del radio a partir del ángulo central de la circunferencia



Nota.

Construcción propia hecha en Geogebra

Longitud de arco:

Sea C una circunferencia definida como $C = \{ (\theta, \beta) \in \mathbb{R} : (\theta - h)^2 + (\beta - k)^2 = r^2 \}$ (def.4), se construye el arco $\hat{s} = \widehat{P_0 P_n P_i}$, como una porción del círculo C , tal que

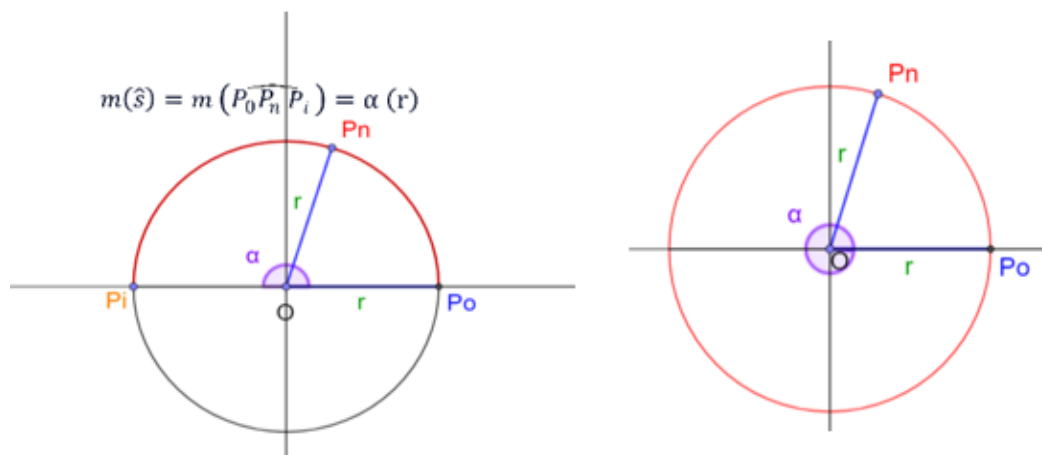
$m(\hat{s}) = m(\widehat{P_0 P_n P_i})$ y $m(\widehat{P_0 P_n P_i}) = \alpha(r)$ entonces $m(\hat{s}) = \alpha(r)$, siendo $\alpha = m(\angle P_0 O P_i)$, $\forall (P_0, O, P_i) \in C$ y siendo $r = m(\overline{OP})$. Se establece además que si $\hat{s} \subseteq C$ y $\forall P \in C$ entonces $P \in \hat{s}$, por la definición 6 y la definición 7 entonces $m(\hat{s}) = 2\pi r$. Pero como se dijo anteriormente

$m(\hat{s}) = \alpha(r)$ entonces por trasposición $\alpha(r) = 2\pi r$, siendo que en ambos casos r es el mismo, se puede deducir que, para una longitud de arco igual al perímetro, $m(\angle \alpha) = 2\pi$, es decir α se puede ver como un número real, pero todavía no se ha construido la noción de radián. Con lo anterior se deduce que:

1. Sea r el radio de la circunferencia C , si el arco $\hat{a} \subseteq C \wedge (\exists P_x \in C \nexists \hat{a})$ entonces $m(\hat{a}) < m(\hat{s})$, y además cómo (por def.6) $m(\hat{a}) = \alpha_1 r$ y $m(\hat{s}) = 2\pi r$ entonces por trasposición $\alpha_1 < 2\pi$ y por tanto $\alpha_1 < \alpha$.
2. Si se construye un arco $\hat{b}$ tal que $m(\hat{b}) > 2\pi r$ entonces $\hat{b} \nsubseteq C$, puesto que (def. 9 y 10) el

perímetro de C , $P(C) = 2\pi r$. El arco $\widehat{b}$ tendrá un radio g donde $g > r$ y por lo anterior $2\pi g > 2\pi r$ estando $P(C) \subset m(\widehat{b})$. Además $m(\widehat{b}) = 2\pi(r + k)$ siendo $k = g - r$

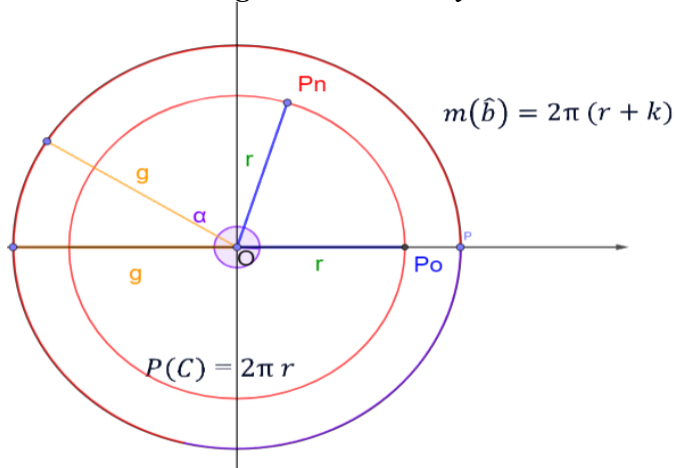
Figura 14: Representación de las propiedades de un arco con respecto al ángulo



Nota. Construcción propia elaborada en GeoGebra.

Figura 15.

Propiedad # 2 de una longitud de arco mayor a $2\pi r$



Nota. Construcción propia elaborada en GeoGebra

Unidad de medición angular: A partir de la construcción de la magnitud del arco se puede definir una unidad nueva de medición angular, la cual toma como concepción la proporción invariante de la relación entre la medida del radio y la longitud del arco, resultado de

la rotación del radio a partir de un ángulo central que subtiende un arco y un ángulo proporcionales.

Por lo anterior sea $\hat{s} = \widehat{P_0 P_n P_i}$ (def. arco) entonces $m(\hat{s}) = \alpha(r)$ siendo $r \in \mathbb{R}$, r el radio de la circunferencia tal que $\hat{s} \subset C$ (Sea C una circunferencia) y siendo $\alpha = m(\angle P_0 O P_i)$.

Así pues, si $m(\hat{s}) = r$, es decir la magnitud del arco $\hat{s}$ es igual a la magnitud del radio de C entonces:

1. Cómo $r = \alpha(r)$ entonces $\alpha = \frac{r}{r}$ de donde $\alpha = 1$, se establece al ángulo α como la unidad de medida angular en este sistema.
2. Dado que α se puede expresar de la forma $\frac{p}{q}$ siendo $p, q \in \mathbb{Z}$ (Enteros) con $q \neq 0$, entonces $\alpha \in \mathbb{Q}$ (def. 9) y a su vez $\alpha \in \mathbb{R}$ (def. 11)
3. Pero además sea el arco $\hat{a} = \widehat{P_0 P_i P_j}$ donde $\hat{a} \subset C$, entonces $m(\hat{a}) = \gamma(r)$, siendo r el radio de la circunferencia y $\gamma = m(\angle P_0 O P_j)$. Si $\gamma = m(\hat{a})/r$ siendo $m(\hat{a}) > r$ entonces $\gamma = k\alpha = k(1)$, por lo que $\gamma \in \mathbb{R}$
4. Así pues, sea $\kappa = \{\forall \gamma, \gamma = \angle P_0 O P_j : m(\gamma) \in \mathbb{R}\}$, κ es el conjunto de las unidades de medida angular de naturaleza real (radianes) que cumplen lo siguiente:
 $\kappa = \{\forall \gamma, \gamma = m(\angle P_0 O P_j) : \gamma = k\alpha \wedge \alpha = \frac{m(\hat{s})}{r} \text{ donde } m(\hat{s}) = r \text{ y por tanto } \alpha = 1, k\alpha \in \mathbb{R}\}$

Función enrolladora o de dar vueltas:

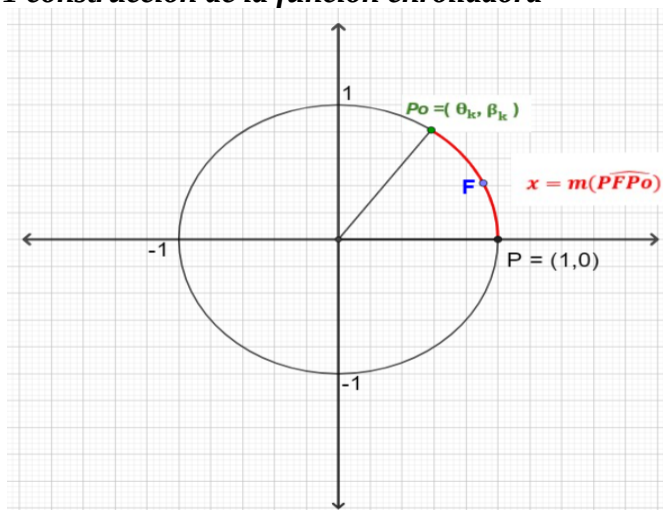
Se define a la función $F(e): \mathbb{R} \rightarrow C$ como la función que transforma números reales en puntos (P) del círculo C_u , de manera que:

1. Sea C_u una circunferencia unitaria y P un punto tal que $P \in C_u$ siendo $P = (1, 0)$, además sea P_0 un punto tal que $P_0 \in C_u$ y $P_0 = RC, (P) = (\theta_k, \beta_k)$. Entonces $\exists x$

$\in \mathbb{R}$ tal que $x = m(\widehat{PFP_o})$ y por tanto $F(x) = \beta_k$

Figura 16.

Propiedad 1 construcción de la función enrolladora



Nota. Construcción propia elaborada en GeoGebra.

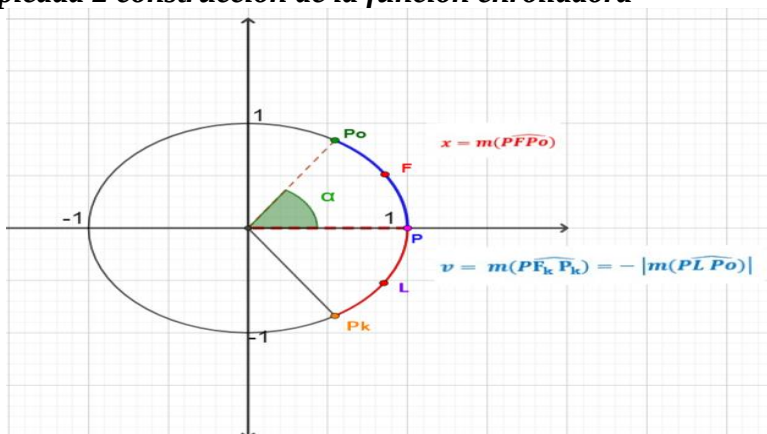
2. $\forall x, \exists v \in \mathbb{R}$ tal que $v < 0$ y $v = m(\widehat{PLP_k})$, pero $m(\widehat{PLP_k}) = -|m(\widehat{PFP_o})|$, lo que

quiere decir que $v = -|m(\widehat{PFP_o})|$ entonces $v = -x$. Por lo anterior entonces

$$F(v) = -\beta_k$$

Figura 17.

Propiedad 2 construcción de la función enrolladora



Nota. Construcción propia elaborada en GeoGebra.

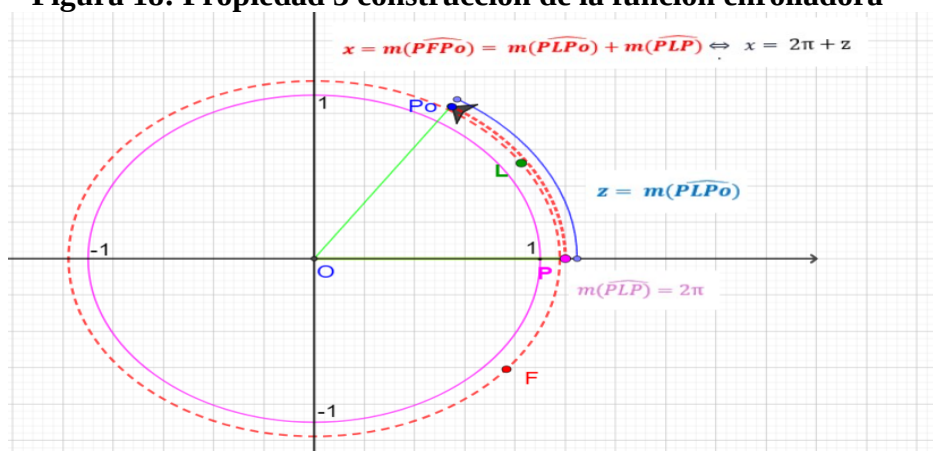
3. Sea $P, F, P_o \in C_u$ $x = m(\widehat{PFP_o})$, $x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\pi$, siendo $F(x) = \beta_n$. Entonces $\exists L \in C_u$

tal que $L = (\theta_n, \beta_n)$, y $m(\widehat{PLPo}) = z$, donde $z \in \mathbb{R}$. Además, por definición de arco,

existe un arco S de medida $m(\widehat{PLP}) = 2\pi$ y por lo anterior

$$x = m(\widehat{PFPo}) = m(\widehat{PLPo}) + m(\widehat{PLP}), \text{ siendo } x = 2\pi + z$$

Figura 18: Propiedad 3 construcción de la función enrolladora



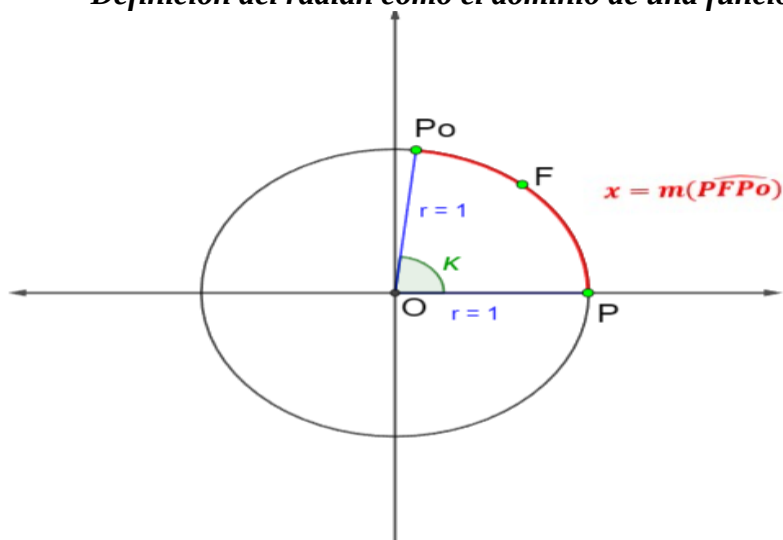
Nota. Construcción propia elaborada en GeoGebra.

4. Sea $v = -|m(\widehat{PFPo})|$, $v \in \mathbb{R} \wedge v < -2\pi$, siendo $F(v) = \beta_j$. Entonces $\exists P_2$ tal que $P_2 = (\theta_j, \beta_j)$, y $m(\widehat{PFP_2}) = s$, donde $s \in \mathbb{R}$. Además $\exists P_3$ tal que $P_3 = (\theta_{j+n}, \beta_{j+n})$, y $m(\widehat{PFP_3}) = t$, y $-|m(\widehat{PFPo})| = -|m(\widehat{PFP_2})| + (-|m(\widehat{PFP_3})|)$, así $v = s + t$
5. Cómo $x = m(\widehat{PFPo})$ siendo $P, F, Po \in C_u$, se entiende que de acuerdo con la definición de arco (def. 5) $m(\widehat{PFPo}) = \kappa(r)$, es decir si $\kappa = m(\angle PO P_o)$ y $r = 1$
 $x = m(\widehat{PFPo}) = \kappa(1)$, lo que quiere decir que $x = \kappa$.
6. Así pues, todas las propiedades de $F(e): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se cumplen con $x = \kappa$ siendo κ el conjunto de los radianes y:

$$\kappa = \{ \forall \gamma, \gamma = m(\angle P_0 O P_j) : \gamma = k\alpha \wedge \alpha = \frac{m(\hat{s})}{r} \text{ donde } m(\hat{s}) = r \text{ y por tanto } \alpha = 1, k\alpha \in \mathbb{R} \}$$

Figura 19.

Definición del radián como el dominio de una función de naturaleza real.



Nota. Construcción propia elaborada en GeoGebra.

Contenido histórico y epistemológico

De acuerdo con las investigaciones realizadas por Meneses (2010) y Akkoc (2008) se considera que la aparición del radián surge con las investigaciones realizadas por el matemático y físico inglés Roger Cotes en 1774, quién a partir de la exploración de conceptos como la espiral logarítmica y la relación entre el arco de un círculo y su radio establece los primeros elementos que servirán para la fundamentación del radián, término que se formaliza y populariza a partir de 1873, cuando el término aparece impreso en exámenes del Queen's College en Belfast.

Siguiendo además con los resultados expuestos por Montiel (2005), Maldonado (2009) y Weber (2008) se expone que el radián surge de la necesidad de analizar aquellos fenómenos físicos que requieren del análisis de movimientos o elementos periódicos, en donde la razón de

cambio se daba en una magnitud dependiente de la medida angular, por lo que el cambio del ángulo afecta directamente la construcción de las magnitudes físicas relacionadas, pero además requiere de manipular las magnitudes con sistemas de medida equivalentes, es decir, cantidades que cumplan con la propiedad clausurativa, pero además tengan un sentido dimensional. El uso de arcos y radianes surge a partir de los problemas que trae consigo la matemática de la variación y el cambio (Fernández et al, 2019. Pp. 64).

Siguiendo las ideas expuestas por Montiel (2005), señaladas por Fernández (2019), se justifica la elección del radián como una unidad de medida de mejor margen de maniobrabilidad, dado que su unidad de referencia utiliza una magnitud mucho más grande, lo que permite expresar ángulos de mayor cantidad con menos operaciones y a su vez permite representar ángulos de menor magnitud con unidades más pequeñas. La simplificación de muchas fórmulas es un beneficio explícito del uso de los radianes como unidad de medida angular puesto que muchas operaciones como las fórmulas del área para sectores circulares de medida angular donde en cambio de hacer uso de operaciones más extensas como $(\pi r^2 \alpha)/360$, siendo α una medida angular en grados sexagesimales; se pueden utilizar operaciones directas y con mejor uso en tanto su equivalencia de operaciones como $\frac{\pi r^2 \alpha}{360}$, siendo que en el segundo caso, el uso del 360 no conlleva a dificultades del tipo ontológico, puesto que $360^\circ \neq 360$, siendo el primero un número que mide secciones de un círculo en sistema sexagesimal y el segundo un número racional y por tanto real.

Pero además de lo anterior un campo desde donde el radián adquiere y toma una relevancia crucial para la construcción de todo el cuerpo teórico y estructural de la disciplina es

el campo de las ciencias, y de las ciencias aplicadas como la física y la ingeniería. Pues de acuerdo con Montiel (2005, p.94) aquellos campos científicos donde la matemática del cálculo y la variación juegan un papel crucial encuentra dificultades importantes al momento de construir cuerpos teóricos coherentes, puesto que, siendo la velocidad, la aceleración y el cambio de posición (desplazamiento) razones de cambio al definirse como límite podrían enfrentar complicaciones si al momento de aplicarlas suceden fenómenos como el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Las anteriores operaciones carecen totalmente de sentido en tanto que, si x o h no pertenecen a un sistema numérico de naturaleza real, las equivalencias construidas carecerían de sentido, produciendo una incoherencia matemática y lógica en su construcción.

Se toman además algunas consideraciones expuestas por Meneses (2010) sobre la aplicación y uso del radián como parte fundamental del uso de identidades matemáticas como:

$$\frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\text{sen } x \quad \frac{d^2}{dx^2} \text{sen } x = -\text{sen } x$$

4.4 Análisis didáctico cognitivo

Para la construcción del componente de análisis didáctico cognitivo del modelo local de análisis didáctico construido en el presente trabajo de grado, se opta por enfocar la mirada en las dificultades, errores y obstáculos que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de radián como una medida angular de naturaleza real. Por lo anterior, se empieza por definir la perspectiva desde la cual se define a las palabras dificultad, obstáculo y error.

4.4.1 Concepto de dificultad en matemáticas

Para Socas, M. (1997) la concepción de dificultad en el aprendizaje de las matemáticas moviliza nociones que abarcan diversas situaciones conectadas entre sí; acciones como la planeación y estructura curricular hasta las particularidades inherentes de la disciplina matemática, es decir, aquellas situaciones de origen ontológico y epistémico son categorías susceptibles para la concepción de una dificultad, pensado como aquel obstáculo repitente que concibe una barrera o impedimento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

Los tipos de dificultades se pueden destacar en subcategorías ligadas al esquema de la triada planteado por Brousseau para el que hacer propio de la didáctica de las matemáticas. De aquí que el primer tipo de clasificación este asociado a la complejidad de los objetos matemáticos (saber), es decir se plantea una categoría sobre dificultades de origen epistémico. En el segundo caso están aquellas dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, que se evidencian en la necesidad de concebir los objetos entendiendo su naturaleza propia para organizarlos en esquemas de pensamiento lógico, es decir, la adaptación y construcción de los procesos del pensamiento matemático en el contexto de la enseñanza.

En tercer lugar, están aquellas dificultades asociadas a los procesos de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, estas se manifiestan directamente relacionadas al carácter institucional, social y humano del contexto educativo, es decir las dificultades de origen didáctico y del sistema educativo. En cuarto lugar, se tienen las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes, aquellas dificultades que surgen ya no solo

en la situación interna del ejercicio del aula, sino también aquellas situaciones que provienen desde un origen ontológico, en el sentido de las relaciones entre esos conocimientos que permiten al estudiante construir esquemas de asociación de conocimientos en matemáticas. Por último, se tienen aquellas dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

4.4.2 Concepto de Obstáculo:

Para el caso de los obstáculos, en Rico y Socas (1997) se establece una directa conexión con los conceptos de dificultades mediante las denominadas “redes complejas”, definiendo al obstáculo como la manifestación práctica de la dificultad dentro del campo relacionado (en este caso el de la educación matemática). Se establece como aquellos conocimientos que, al ser enfrentados con otros, se oponen a manera de barrera para lograr avanzar, explorar, ampliar o construir un objeto, conocimiento, procedimiento complementario o nuevo. Tienen una naturaleza resistente (Socas, p.137) proporcional al nivel de manipulación previa de un objeto matemático cuyo dominio de validez es familiar para el aprendiz, pero inválido por su ausencia de generalidad y extensión en nuevos campos de construcción para dichos objetos. Así pues serán clasificados algunos tipos de obstáculos que se consideran pertinentes identificar para el caso del tratamiento del radián y su fenomenología.

1. Obstáculo Didáctico: El primero de los tipos de dificultades que será presentado es aquel relacionado a lo didáctico. Siguiendo a Brousseau (1986), citado en Artigue (1995), un obstáculo didáctico es definido como aquella dificultad derivada de la manera en la que se presenta el conocimiento matemático a través de los agentes

- compositivos del sistema educativo, es decir, profesores, libros de textos, programas de estudios, o inclusive la misma institución encargada de concebir el proceso educativo. (Tomado de Díaz C. et all, 2010, p.36)
2. Obstáculo Epistemológico: Con respecto al Obstáculo Epistemológico De acuerdo con Brousseau (1986) citado en Artigue, M. (1995), entonces un **OE**, debe ser concebido como aquel sistema de conocimientos y estructuras conceptuales desde donde uno de los elementos anteriores a la concepción del tema a trabajar, en este caso el del radián, produce una contraposición con la construcción del nuevo sistema de creencias y conocimientos del concepto matemático que se pretende abordar. (Tomado de Díaz C. et all, 2010, p.36)
3. Obstáculos ontogénico o psicogénico (cognitivo): Se hace referencia a aquellos obstáculos que pueden relacionarse con las características y estructuras propias del desarrollo del niño. De acuerdo con Socas (1997, pp.136) un OC, será pensado como aquello que determine una estructura resistente y predeterminada para la absorción del conocimiento matemático como por ejemplo la reorganización de las estructuras para abordar los conceptos como: la linealidad, la jerarquización de los conceptos, operaciones y hasta los mismos objetos.

4.4.3 Concepto de Error:

Se acuerda de manera convencional la concepción del error como aquella evidencia palpable de parte del alumno de la construcción de un esquema cognitivo inadecuado y no una falta de conocimiento (Socas, 2007). Se ha de asumir que el error será un recurso de aplicación y dominio colectivo que no debe enfocarse estrictamente en la eliminación unilateral del mismo

por parte del profesor o de las figuras representativas de la institucionalidad educativa, sino como un recurso altamente valioso capaz de brindar a los actores, relaciones dentro de la enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, de construcción y reflexión mutua. “Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación” (Rico,1997). Se pueden distinguir en tres etapas distintas: errores del álgebra, errores de procedimiento, errores de tipo afectivo y emocional

Dificultades, obstáculos y errores asociados al trabajo con el radián

En el momento de concebir el trabajo con las unidades de medida angular en el aula se han podido evidenciar de acuerdo con los trabajos de Alyami (2024), Meneses (2010) y Maldonado (2011), Akkoc (2008), Weber (2005), que existen una serie de fenomenologías muy particulares que ocasionan dificultades recurrentes (obstáculos) internos dentro de la construcción didáctica del radián como una herramienta crucial al momento de definir a las funciones trigonométricas de naturaleza real.

Exponen Díaz et al (2009) que respecto a las dificultades internas que presenta el radián, la transición de grados a radianes (T: G-R) se establece como una barrera diciente e importante en el aprendizaje de las funciones trigonométricas, identificando este paso como un “obstáculo didáctico” (OD). Este obstáculo (OD) nace por la falta de explicación directa, clara y completa sobre la necesidad de la que surge esta transición y cómo se relaciona con las propiedades de las funciones trigonométricas en un contexto de funciones analíticas.

El estudio del radián como un instrumento pedagógico muestra la existencia de múltiples dificultades, obstáculos y errores que pueden surgir en las acciones y esquemas de los estudiantes cuando no se articula adecuadamente las representaciones de naturaleza cuantitativa y cualitativa, a partir de la cual se construyen los sistemas de concreción figurativa utilizados para definir y evaluar las características del radián. Aquellos elementos que representan una dificultad importante a considerar al momento de trabajar el concepto del radián son aquellos concebidos de la siguiente manera:

- La concepción de medida angular, que desde un inicio se presenta en el aula por medio del sistema sexagesimal, el cual además combina números en base 10 para representar elementos cuyo cuerpo está construido en una base sexagesimal. Esta podría ser considerada una dificultad asociada al carácter de los objetos matemáticos, que a su vez arrastra obstáculos de tipo didáctico, puesto que sucede por la decisión conveniente de presentar la medida en grados como la única, enfocándose en su utilidad al momento de construir conceptos como el de la medida del tiempo, pero descuidando su articulación futura en otro tipo de elementos.
- El radián no puede solo quedar reducido a una unidad de equivalencia con la medida en grados, es decir, no debe solo concebirse como una unidad de transición, pues si se desconoce su construcción y origen mediante la relación entre el arco y el radio en una circunferencia, su naturaleza como número real será desconocida e intrascendente lo que provocará dificultades de diversas

naturalezas, empezando por aquellas asociadas a los procesos de enseñanza, que derivan en obstáculos didácticos. Esta situación deriva en dificultades en el desarrollo cognitivo del estudiante puesto que sin la consideración de la naturaleza del radián quedarán vacíos conceptuales que derivarán en errores reflejados en la manipulación de elementos dentro de las funciones trigonométricas, es decir, es importante revisar la manera en que es presentado y construido el cuerpo del objeto en el estudiante.

- La relación de la unidad del radián construida por medio de la proporción del perímetro del círculo con el número π , es otra de las circunstancias que esconden diversas fuentes de dificultades y obstáculos en la manipulación del radián. La naturaleza del número pi (π) debiera estar presente desde el principio y permitir al estudiante analizar la necesidad de utilizar a este número como una constante, pues si la definición misma de pi no está clara, este adquiere el carácter de variable o de unidad de medida, desconociendo su naturaleza como número, lo que no permite realizar operaciones entre números reales. Esta dificultad obedece a una dificultad asociada a la complejidad de los elementos de las matemáticas, pero también a las dificultades dentro de los procesos de enseñanza; a través de esta situación se producen obstáculos de tipo principalmente didácticos, que pueden estar ocasionados por la manera en la que los procesos de pensamiento han sido construido por el profesor en los estudiantes, o también en la manera en la que las estructuras mentales del estudiante absorben y codifican la información que ha sido presentada por el mismo profesor.

- Toda la anterior fenomenología de carácter cognitivo, confluye además en uno de los obstáculos más importantes de señalar con respecto a la concepción del radián como medida angular adecuada y correcta para la función trigonométrica y esto es la dificultad asociada a las actitudes emocionales y afectivas hacia las matemáticas, en este caso al uso del radián, pues es resaltado por las investigaciones antes presentadas que el uso persistente en la primera etapa escolar de los grados como medida angular, producen un obstáculo intrínseco al pensar incluso al ángulo como un número en grados, desconociendo su representación y naturaleza geométrica como parte de su sistema de significantes y símbolos.

Tabla 4.
Esquema concebido de dificultades, obstáculos y errores a destacar en la concepción del radián.

Dificultad	Obstáculo	Error	Objeto Matemático	Representación
Dificultad asociada al carácter de los objetos matemáticos	OD (Obstáculo Didáctico)	Origen en el obstáculo	Medida Angular	Cuantitativa: Siempre presentada en un inicio en grados sexagesimales
Asociada a los procesos de enseñanza Asociados al desarrollo cognitivo del estudiante	OD	Ausencia de sentido	Proporción radio y longitud	Cuantitativa y Cualitativa: Construcción geométrica y proporción.
Asociados a los objetos matemáticos Asociados a los procesos de enseñanza	OE (Origen epistemológico) OD	Ausencia de sentido Origen en el obstáculo	Relación del número π (π)	Cuantitativa: Pensar a π como un número o como una unidad de medida
Asociados a los objetos matemáticos Asociados a los procesos de enseñanza	OC (Origen cognitivo) OD OE	Ausencia de sentido Origen en el obstáculo	Función trigonométrica de variable real	Cuantitativa y cualitativa: Manipular los valores de entrada a través de números reales y representarlos

Asociados a las actitudes afectivas y emocionales		Actitudes afectivas y emocionales		en el plano
---	--	-----------------------------------	--	-------------

Nota. Basada en Socas (1997) de construcción propia.

4.5 Análisis instruccional o de instrucción:

Desde la visión de este trabajo de grado, se hace importante presentar las concepciones desde donde se conciben aquellos “materiales y recursos” con el fin de analizar su utilidad dentro del proceso de planificación, elaboración y desarrollo de la unidad didáctica construida. Por tal motivo serán presentados los conceptos de materiales, funcionalidad y categorización de los materiales (recursos manipulativos, software de geometría dinámica) y por último algunos elementos reflexivos sobre el uso de material manipulativos como el geoplano circular y applets como GeoGebra.

4.5.1 Concepto de materiales

Expone Valenzuela (2012) que, de acuerdo con la presentación de Alsina, Burgués et al (1998) se piensan o conciben a los materiales como aquellos aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y desarrollar conceptos matemáticos en el aula (2012, p.23). Desde esta perspectiva para Valenzuela (2012) la noción de material se define como todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico estructurado, que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones (Tomado de Stuart, 2023, p.88).

Entendiendo los materiales como todos aquellos objetos mediadores que son cruciales

para la planificación, elaboración y aplicación de la unidad didáctica, se han considerado los siguientes materiales como componentes importantes para la realización de las actividades propuestas, estos son: un geoplano circular, lápiz, regla, hojas de block, transportador, hilo o cuerda, compás, cartulinas, computador, internet, applet GeoGebra, cuaderno, marcadores, tablero, proyector de video.

4.5.2 Funcionalidad y categorización

Siguiendo la propuesta de Valenzuela (2012) además de lo expuesto por Stuart (2023), se prioriza como una necesidad la categorización de los materiales a trabajar para entender como estos, por medio de la función desempeñada adoptan un papel fundamental en la concepción de la unidad con el fin de proponer el diseño de una unidad didáctica basada en la concepción del radián dentro de un fenómeno como el movimiento circular, integrando elementos del modelo de Van Hiele, con el fin de trabajar el desarrollo del pensamiento geométrico, espacial y métrico.

De acuerdo con Valenzuela (2012) la clasificación de estos materiales manipulativos se puede hacer de diversas formas y atendiendo a diversos criterios:

1. Según su funcionalidad, es decir, de acuerdo con el objetivo y la tarea que pueda desarrollar mediante una estructuración predeterminada, o mediante una acción de forma libre.
2. Por medio de su versatilidad, es decir, la capacidad que tiene de aplicarse en un mayor rango de usos, lo que permite la atención de distintos objetos y conceptos matemáticos por medio de su uso.
3. Distinguiendo entre la naturaleza de sus funciones, es decir, si el material es tangible o físico, y si es virtual o no manipulativo (Gonzales, 2010, Citado en Valenzuela, 2012, pp.24)
4. Siguiendo las propuestas de Corbalán (1994), Valenzuela propone una categoría que

clasifica a los materiales, también en la temporalidad en la que su potencial uso puede brindar una función específica, es decir:

- a) Pre-instruccional: se utiliza para dar apertura a la clase.
- b) Co-instruccional: se utiliza para abordar el concepto matemático en el desarrollo de la clase.
- c) Post-instruccional: se utiliza para dar cierre a la clase, con el propósito de recuperar elementos relacionados al concepto que se ha venido desarrollando.

(Tomado de Stuart, 2023, pp.87)

Además de estas clasificaciones, Valenzuela propone otras tres categorías que para el caso de lo que se pretende abordar no será necesario presentarlas. Será entonces importante clasificar los materiales desde estas cuatro categorías entendiendo que dentro de las actividades planificadas en la unidad se hace uso de la articulación tanto de material manipulativo de naturaleza tangible, como de recursos virtuales como applets o programas online.

El uso de material manipulativo de carácter tangible obedece a que, por medio de este tipo de elementos, siguiendo las ideas propuestas por Castro et al (1997) “los modelos como esquemas o materiales estructurados, tales como materiales manipulativos, permiten la formación de conceptos y el desarrollo de procedimientos matemáticos” (Tomado de Valenzuela, 2012, p. 26). De acuerdo con Chamorro (2003)

el uso de material didáctico en la enseñanza y aprendizaje de la geometría proporciona otra perspectiva sobre la enseñanza de la geometría al considerar que existe una heterogeneidad dentro de la sociedad y específicamente dentro de un

mismo grupo curso, por lo tanto, el uso de una única estrategia no considera las diferencias que existen entre ellos, y por tanto es necesario recurrir a otros medios como el uso de materiales. (Tomado de Valenzuela, 2012, p.26)

La unidad didáctica propuesta como un medio de concreción del modelo local de análisis didáctico en base al trabajo con el radián en grado decimo de escolaridad para el trabajo de las funciones trigonométricas, pretende mediante el análisis de fenómenos de movimiento periódico circular, evocar la imagen del radián y sus propiedades. Por lo anterior, el uso de un material que permite dinamizar, visualizar y articular distintas representaciones es fundamental al momento de facilitar la manera de absorber la estructura conceptual del radián planteada en el análisis de contenido matemático.

El uso del geoplano circular tiene una disposición de puntos que permite la construcción de varias circunferencias concéntricas, lo que permite la visualización de las propiedades invariantes de la circunferencia y a su vez dar paso a la construcción mediante la manipulación de los elementos como cuerdas, transportador, compás, se da espacio a la construcción de esquemas representativos que evoquen paso a paso la noción de proporcionalidad entre radio y círculo.

Además, el uso de herramientas como GeoGebra y el simulador de movimiento de la luna permiten potenciar el trabajo del pensamiento geométrico, pues de acuerdo con Gutiérrez (2016), esta herramienta (Geogebra) ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. (Tomado de Stuart, 2023. p.88). El uso de estos applets en el diseño y aplicación de las actividades de la

unidad, cumplen una función importante en los momentos de institucionalización de la información, pues gracias a su naturaleza versátil, pues permite el uso de distintas representaciones y objetos geométricos, permitirá al estudiante una manipulación de los esquemas presentados de forma mucho más independiente y retroactiva.

4.6 Unidad didáctica para la enseñanza del radián mediante la integración del movimiento circular uniforme como un agente movilizador de pensamiento

geométrico

Unidad N°: 1

Grado De Escolaridad: 10°

Asignatura: Trigonometría

TEMA: Unidades de medida angular – El radián

Objeto Principal: El radián, como una medida angular cuyo sistema de numeración pertenece al conjunto de los reales y se representa mediante una longitud de arco proporcional a la medida del radio.

Tiempo de Aplicación: Cuatro (4) sesiones de dos (2) horas de clase (Siendo cada hora de clase de 45 minutos aproximadamente).

Objetos Matemáticos Asociados:

- Rectas secantes
- Traslaciones en R^2
- Circunferencias
- Sistemas de medición
- Longitud de arco
- Números Reales
- Rotaciones en R^2
- Razón
- Ángulos y sistema de medición sexagesimal - Proporción

Contexto

El desarrollo de esta unidad ha sido planteado mediante la articulación de la física como un contexto de **carácter científico y práctico**, pues se considera a la circunferencia como el espacio geométrico descrito por el movimiento de una partícula en movimiento circular,

realizando un análisis de fenómenos de movimiento como el de los astros y el de una llanta de un automóvil.

Estándares Básicos De Competencias:

- E.1: Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.
- E.2: Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes
- E.3: Describo y modelos fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.

Derechos Básicos de Aprendizaje:

- Reconoce al radián como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico

Evidencias De Aprendizaje:

- Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones.

Objetivos de Aprendizaje:

- Identificar en las necesidades cotidianas del ser humano a través de la historia, el uso y aplicación de las propiedades del círculo como un método de modelar fenómenos periódicos.
- Identificar en el concepto de longitud de arco, una herramienta para

construir un sistema de medida angular perteneciente al conjunto de los números reales.

- Aplicar un sistema de medición angular perteneciente a los números reales, en el planteamiento y solución de problemas que involucren mediciones con unidades equivalentes y dimensionales.

Indicadores de Desempeño:

- Identifica en el comportamiento periódico de la naturaleza, la necesidad de modelar y analizar las propiedades de la circunferencia y la rotación.
- Identifica en las propiedades geométricas de una circunferencia la existencia de un sistema de medida proporcional cuya unidad base es el radio y pertenece al conjunto de los números reales.
- Utiliza el sistema de medición angular de naturaleza real (Radio) para predecir la cantidad de desplazamiento lineal, por medio de la relación directa y dimensional entre la medida del radio y la cantidad de rotación del cuerpo (ángulo en radianes).
- Predice el cambio de posición de un cuerpo que rota en el plano, de acuerdo con el desplazamiento angular medido en radianes.
- Modela por medio de la predicción del cambio de posición de un cuerpo que, rota en el plano, funciones de tipo sinusoidal y cosenoidal de naturaleza real, identificando algunas propiedades matemáticas.

Actividad # 1: El Estudio del Cielo en el Desarrollo de la Cultura Humana

Propósito: Identificar en las necesidades cotidianas del ser humano a través de la historia, el uso y aplicación de las propiedades del círculo como un método de modelar fenómenos periódicos.

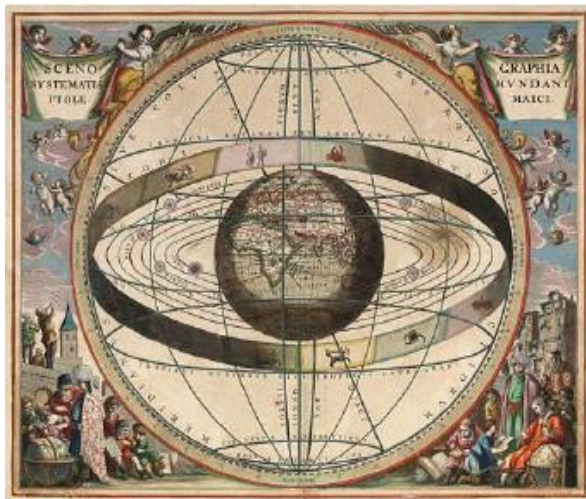
Indicador: Identifica en el comportamiento periódico de la naturaleza, la necesidad de modelar y analizar las propiedades de la circunferencia y la rotación

Instrucción:

Observa y presta atención al video, y compara la información con el texto añadido para responder las preguntas anexas en la ficha:

https://www.youtube.com/watch?v=GQ_Po8FSMr8&ab_channel=CuriosaMente

El tema central de Almagesto es la explicación del sistema ptolomaico. Según dicho sistema, la Tierra se encuentra situada en el centro del Universo y el sol, la luna y los planetas giran en torno a ella arrastrados por una gran esfera llamada "primum movile", mientras que la Tierra es esférica y estacionaria.



Almagesto

<https://maticasycosmos.wordpress.com/2013/12/01/el-almagesto-el-modelo-ptolemaico/>

Las estrellas están situadas en posiciones fijas sobre la superficie de dicha esfera. También, y según la teoría de Ptolomeo, el Sol, la Luna y los planetas están dotados además de movimientos propios adicionales que se suman al del primun movile.

Ptolomeo afirma que los planetas describen órbitas circulares llamadas epiciclos alrededor de puntos centrales que a su vez orbitan de forma excéntrica alrededor de la Tierra. Por tanto, la totalidad de los cuerpos celestes describen órbitas perfectamente circulares, aunque las trayectorias aparentes se justifican por las excentricidades. Además, en esta obra ofreció las medidas del Sol y la Luna y un catálogo que contenía 1.028 estrellas

1. ¿Cuál entiendes que es la relación entre la circunferencia y el comportamiento de las fechas y calendarios que tenemos actualmente?

2. ¿De qué manera se lograba en la antigüedad conocer el momento en que se debía cosechar, sembrar o realizar ciertas actividades respecto al clima?

3. De acuerdo con las propiedades que reconoces de la circunferencia identifica

¿Cómo podríamos mediante la predicción del ángulo de rotación de la circunferencia predecir la fecha del año, el clima o las estaciones? Se añade el siguiente video como una herramienta extra para reforzar la información: https://youtu.be/jP5YqY-pSiA?si=Fw_eILVNBzVZn5ll

4. Entra al siguiente link y acciona el movimiento de los planetas siguiendo las instrucciones consignadas en la aplicación. Ahora responde ¿Qué relación existe entre el movimiento de la luna y sus periodos en cada lugar del planeta? Recuerda utilizar los territorios como continentes, islas y espacios geográficos como referencias).

<https://tutiempo.net/astronomia/sol-tierra-luna-3d.html#UTC20240304T1302>

Actividad # 2: Construcción de Razón de Círculo y Medida Angular

Propósito: Identificar en el concepto de longitud de arco, una herramienta para construir un sistema de medida angular perteneciente al conjunto de los números reales.

- **Indicador:** Identifica en las propiedades geométricas de una circunferencia la existencia de un sistema de medida proporcional cuya unidad base es el radio y pertenece al conjunto de los números reales.

Instrucción:

Utilizando el geoplano circular, construye estirando las ligas o amarrando una lana, tres (3) circunferencias de distinto tamaño, añadiéndoles dos líneas en forma de cruz que estén en toda la mitad de cada círculo. Cuando ya los tengas toma una lana o un pedazo de cuerda y completa la tabla anexa, realizando lo pedido en cada pregunta propuesta:



Geoplano circular

<https://aprendiendomatematicas.com/el-geoplano/>

A. Si recortamos para cada círculo pedacitos de lana que midan lo mismo que su radio y con estas construimos arcos alrededor de la circunferencia, para remarcar el borde del círculo ¿Cuántos arcos necesitaríamos con la misma medida del radio para bordear completamente cada uno de los círculos contruidos? ¿Podríamos numerar la cantidad de cuerdas cortadas para cada círculo? ¿Cuánto sería ese valor?

B. Utilizando un transportador marca en cada círculo los ángulos notables

ANÁLISIS DIDÁCTICO, MEDIDA ANGULAR, FUNCIONES PERIÓDICAS Y VAN HIELE

medidos en grados ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ y 360°) y compara con los arcos
construidos en el punto A para responder la siguiente pregunta ¿Cuántos radios caben en
cada arco delimitado por los ángulos marcados en cada circunferencia?



RADIO DEL CÍRCULO	NÚMERO DE CUERDAS QUE COMPLETAN EL PERÍMETRO	MEDIDA DEL PEDAZO FALTANTE PARA COMPLETAR EL PERÍMETRO	Número de radios por ángulo						
			30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

Actividad # 3: Comprendiendo las Medidas de un Giro

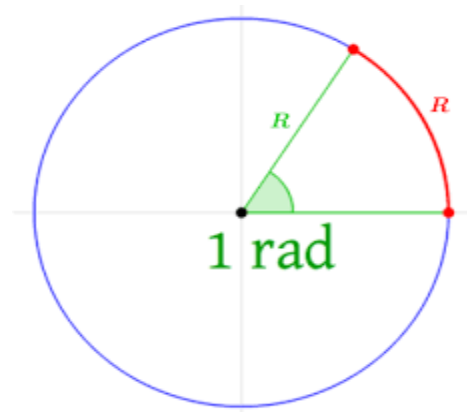
Propósito: Identificar en el concepto de longitud de arco, una herramienta para construir
un sistema de medida angular perteneciente al conjunto de los números reales.

- **Indicador:** Utiliza el sistema de medición angular de naturaleza real
(Radio) para predecir la cantidad de desplazamiento lineal, por medio de la relación
directa y dimensional entre la medida del radio y la cantidad de rotación del cuerpo
(ángulo en radianes).

Instrucción:

Realizamos la lectura añadida a continuación sobre la historia del radián y la necesidad de su utilización, luego con la información anexa y la visualización del video responde las preguntas anexas:

El término radián apareció por primera vez en una publicación en junio de 1873 en unas preguntas de examen propuestas por James Thomson, el uso del término ya en el año 1871, mientras que en 1869 Thomas Muir había vacilado el uso del rad.



Radian

<https://www.gaussianos.com/que-es-un-radian/>

En 1874 Thomas Muir adoptó el término de radian después de decidirlo con James Thomson. Un radian es una unidad de medida de para un ángulo, representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio. Sus lados cortan un arco igual en longitud al radio en la circunferencia del círculo, ya que la longitud de este arco es igual a un radio del círculo, se dice que la medida de este ángulo es medida en radiánes. Su símbolo es rad.

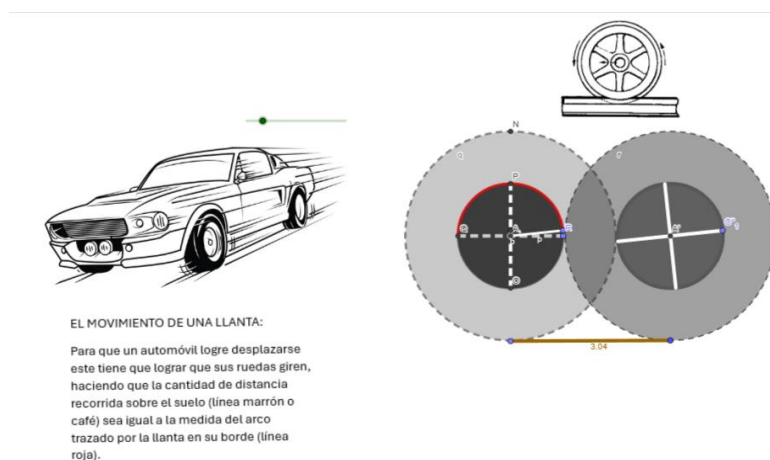
En tiempos más recientes la medida en radianes se ha adoptado universalmente como la unidad natural de medida angular. Un radián es una unidad más conveniente que el grado, la razón de su uso es que simplifica muchas fórmulas. Por ejemplo, un arco circular de ángulo (donde está en radianes) subtiende un arco de longitud dada; El uso de radianes libera de estas fórmulas del “incomodo factor no deseado”.

1. Observa el siguiente video y responde:

https://www.youtube.com/watch?v=4RUzE1f2Tyk&ab_channel=Mateando

- ¿Qué entiendes por el concepto de radián?

2. Entra en el siguiente link e interactúa con el objeto moviendo el botón verde para desplazar la llanta y responde: <https://www.geogebra.org/m/efzywfv>



- ¿Qué relación podrías encontrar entre la distancia recorrida por la llanta y el arco de color rojo que se traza sobre el borde de la llanta?

- De acuerdo con la definición de radián señalada en el video ¿Cuál es la relación entre el ángulo sexagesimal y el ángulo en radianes? ¿Cómo afecta dicha relación al movimiento de la llanta?

- ¿Qué consideras que sucede con la traslación de la llanta al momento de pasar de 360° , 720° y 1080° ? ¿Cuántas vueltas da la llanta si mueves el botón verde hasta el final de la línea?

Actividad # 4: El Radián Dentro del Movimiento Circular

Propósito: Identificar en el concepto de longitud de arco, una herramienta para construir un sistema de medida angular perteneciente al conjunto de los números reales.

- **Indicador:** Identifica en las propiedades geométricas de una circunferencia la existencia de un sistema de medida proporcional cuya unidad base es el radio y pertenece al conjunto de los números reales.

Utilizando el círculo anexo encuentra con la regla de la medida de su radio y dibuja dentro de este cada uno de los ángulos señalados en la tabla. Con esta información responde:

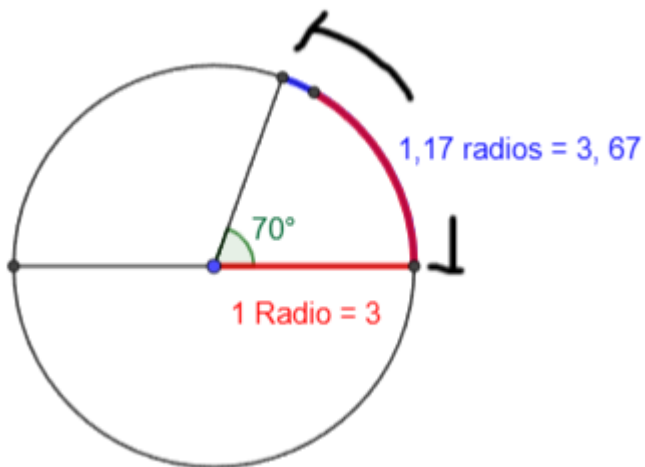
- ✓ ¿Cuántos arcos del tamaño del radio toma cada ángulo? (Ubica dicha información en la segunda fila
- ✓ Con la información de la segunda fila aplica la primera fórmula anexa a continuación para encontrar el resultado del número por el que hay que dividir pi para hallar la medida en radianes. Se anexa la fórmula:

$$\frac{\pi}{\text{Cantidad de radios tomados}} = \pi \div \frac{\text{Cantidad de radios tomados}}$$

- ✓ Ubica el número obtenido en la columna 3 con la proporción en radianes en la fila 4 haciendo la siguiente fórmula

$$\frac{\pi}{\text{proporción de } \pi}$$

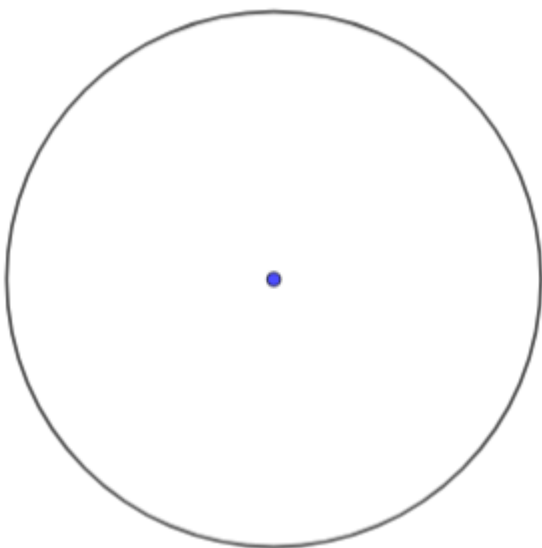
Ejemplo:



$$\frac{\pi}{1.17} = 2,68$$

ÁNGULO EN GRADOS	CANTIDAD DE RADIOS TOMADOS	PROPORCIÓN N DE π	MEDIDA EN RADIANTES
70°	1,17 rad	2,68	$\frac{\pi}{2,68} = \frac{67\pi}{25}$

Círculo Anexo:



ÁNGULOS EN GRADOS	CANTIDAD DE RADIOS TOMADOS	PROPORCIÓN DE π	MEDIDA EN RADIANTES
30°			
45°			
60°			
90°			
120°			
180°			
270°			
290°			
360°			

Actividad # 5: Movimiento de una Llanta

Propósito: Aplicar un sistema de medición angular perteneciente a los números reales, en el planteamiento y solución de problemas que involucren mediciones con unidades equivalentes y dimensionales.

- **Indicador:** Predice el cambio de posición de un cuerpo que rota en el plano, de acuerdo con el desplazamiento angular medido en radianes.

Instrucción:

Toma círculo por círculo y midiendo la magnitud del radio de cada uno con una regla, dibuja sobre el cuaderno 4 caminos rectos cuyas distancias sean 1 vez el radio del círculo, 1,5 veces el radio del círculo, 4 veces el radio del círculo y 6 veces el radio del círculo, establecemos de acuerdo con la indicación una respuesta para cada situación:

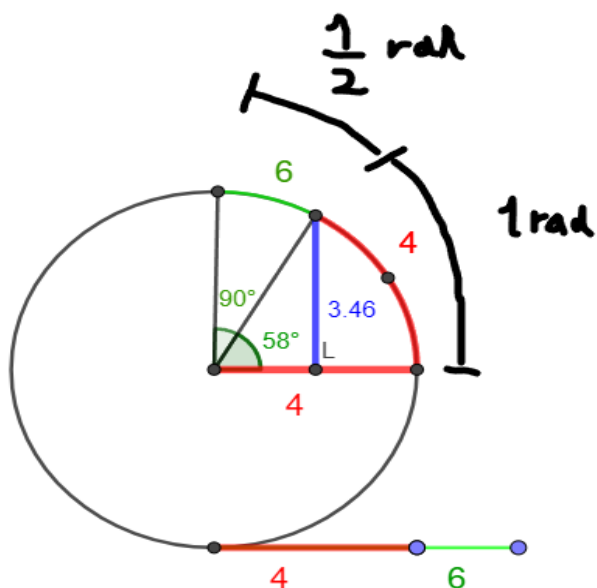
CIRCUNFERENCIAS	CIRCUNFERENCIA1				CIRCUNFERENCIA2				CIRCUNFERENCIA2			
CAMINO EN RADIOS	1 VEZ	1,5 VECES	4 VECES	6 VECES	1 VEZ	1,5 VECES	4 VECES	6 VECES	1 VEZ	1,5 VECES	4 VECES	6 VECES
ÁNGULO RECORRIDO EN GRADOS												
ÁNGULO RECORRIDO EN RADIOS												
ALTURA DE LA RUEDA												

D. Completa la tabla teniendo en cuenta responder la siguiente información:

- ¿Cuánto mide cada camino de acuerdo con el radio medido? (Ubica la longitud

debajo de cada cuadro en la segunda fila)

- ¿Cuál es el ángulo recorrido por la circunferencia para trasladarse siguiendo cada camino? (Ubica la medida en grados en radianes en la segunda fila)
- ¿Cuál es la longitud de arco de la circunferencia recorrido para trasladarse siguiendo cada camino? (Ubica la medida en radianes en la tercera fila)
- ¿Qué altura alcanza la llanta respecto al punto de inicio? (Ubica el resultado en la tercera fila siguiendo el ejemplo anexo a continuación)



CIRCUNFERENCIAS	CIRCUNFERENCIA1			
	1 VEZ	1,5 VECES	4 VECES	6 VECES
CAMINO EN RADIOS	4	6		
ÁNGULO RECORRIDO EN GRADOS	58°	90°		
ÁNGULO RECORRIDO EN RADIOS	1 Rad	1,5 Rad		
ALTURA DE LA RUEDA	3,46	4		

B. Construye una gráfica en el plano cartesiano, donde utilizando los valores de la medida del ángulo recorrido por la circunferencia en el eje x, puedas ubicar también la altura a la que se encuentra el diámetro horizontal de la rueda al realizar el giro con cada cantidad de ángulo en el eje y. Este ejercicio debe hacerse con cada circunferencia utilizando distintos planos cartesianos.

Actividad # 6: movimiento de una rueda.

Propósito: Aplicar un sistema de medición angular perteneciente a los números reales, en el planteamiento y solución de problemas que involucren mediciones con unidades equivalentes y dimensionales.

- **Indicador:** Predice el cambio de posición de un cuerpo que rota en el plano, de acuerdo con el desplazamiento angular medido en radianes.

Instrucciones:

Por medio de la construcción anterior plantea un método para solucionar los siguientes problemas y aplícalos para encontrar la solución:

- A. ¿Qué tanto desplazamiento podría alcanzar una rueda con radio de 5 cm al realizar un giro de $\pi/2$?
- B. ¿Qué tanto desplazamiento podría alcanzar una rueda con radio de 18 cm al realizar un giro de $5\pi/2$ vuelta?
- C. ¿Cuánto debería medir el radio de una rueda si lo que se desea es que por medio de 3000 vueltas dicha rueda alcance una distancia total de 1200 metros?
- D. ¿Cuántos giros tendrá que realizar una rueda de 20 cm de diámetro para que por medio de giros alcance una distancia de 800 metros? ¿Cuál será el ángulo total de giro de dicha rueda expresado en radianes?
- E. Completa la siguiente tabla:

ANÁLISIS DIDÁCTICO, MEDIDA ANGULAR, FUNCIONES PERIÓDICAS Y VAN HIELE

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA	DESPLAZAMIENTO	ANGULO RECORRIDO	NÚMERO DE VUELTAS REALIZADO
	8000 metros	$20/3 \pi \text{ rad}$	
60 cm	270 metros		
	4600 metros		10000 vueltas
35 cm	2,7 km		

F. Añade a la tabla anterior la altura a la cual se debe encontrar el radio desde su posición de equilibrio horizontal para recorrer cada uno de los ángulos marcados en la tabla.

Actividad #7: La Rueda de la Fortuna

Propósito: Identificar propiedades básicas de las funciones trigonométricas de naturaleza (dominio y rango) perteneciente a los números reales, mediante la modelación de problemas relacionados al desplazamiento de un cuerpo que describe una trayectoria circular.

- **Indicador:** Modela por medio de la predicción del cambio de posición de un cuerpo que, rota en el plano, funciones de tipo sinusoidal y cosenoidal de naturaleza real, identificando algunas propiedades matemáticas.

Instrucción:

Materiales:

- **Computador con acceso a internet**
- **Mouse o táctil**
- **Cronometro**

- **Cuaderno**
- **Lápiz y papel**

1. Entra en el link <https://www.geogebra.org/m/w9vhme4r> y observa las características de la rueda de la fortuna que allí aparece, luego señala a continuación sus componentes, siguiendo las instrucciones:

1. Mueve el botón verde y observa las magnitudes que allí aparecen, luego llena la siguiente información:

- Radio de la llanta:
- Tiempo que tarda en dar una vuelta completa:
- Distancia a la que se encuentran los vagones:

2. Utilizando la información anterior responde las preguntas anexas:

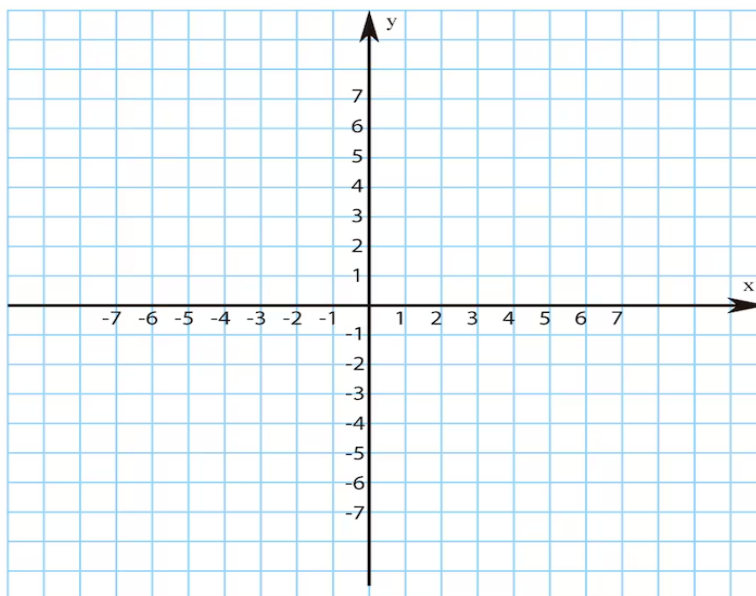
A. ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar un vagón si se desplaza desde el punto más bajo hasta el más alto del recorrido?

B. ¿Cuánto subió el vagón 1 si se desplaza hasta la posición del vagón 2?
¿Cuánta velocidad en m/s alcanza el vagón si realiza ese movimiento? (Recuerda tomar el tiempo con un cronometro)

C. ¿Cuánta distancia vertical se traslada el vagón 3 si rota desde su posición hasta la posición del vagón 6? ¿Cuánta velocidad alcanzó?

D. Si un vagón gira desde el origen en un ángulo de 750° en sentido antihorario ¿A cuánta velocidad se trasladaría este vagón? ¿Qué velocidad alcanzarían los demás vagones?

3. Utilizando el plano cartesiano anexo, dibuja el cambio de altura (en el eje y) del vagón 1 y 3 al dar dos vueltas completas, a partir del cambio de ángulo (en el eje x) y describe tu propia conclusión.



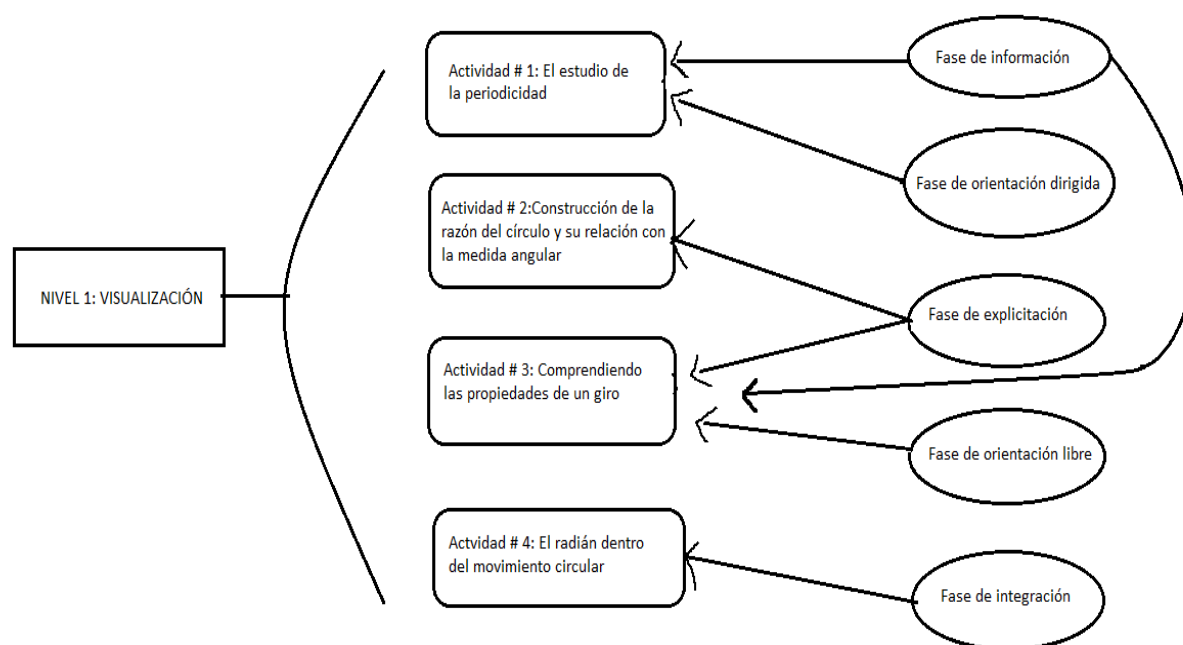
4.7 Resultados obtenidos y análisis de la estructura de las actividades planteadas desde la guía y orientación de la teoría de los Van Hiele

Para la planificación y desarrollo de las actividades que estructuran la unidad didáctica se tomó en consideración la aplicación del modelo de Van Hiele, identificando las ventajas que mediante el seguimiento de sus fases se obtienen desde su carácter como un modelo instruccional y procedimental. A través de la secuenciación de los niveles de razonamiento, se pudo trazar un camino para la persecución de un objetivo en los estudiantes, el alcanzar el nivel II de razonamiento, por medio de este nivel se pretende que los estudiantes no solo puedan identificar al radián como una etiqueta o un nombre, sino que puedan profundizar relacionando sus propiedades por medio de la realización de las actividades. Así pues a continuación, se muestra un cuadro comparativo por medio del cual se organiza la estructura de las actividades planteadas

y su relación con el modelo aplicado:

4.7.1 Estructura de la construcción de las actividades de la unidad siguiendo nivel 1 de van hiele

Figura 20. Estructura del Modelo Van Hiele aplicado al nivel 1 de visualización en la Unidad



Nota. Modelo Van Hiele, Elaboración Propia

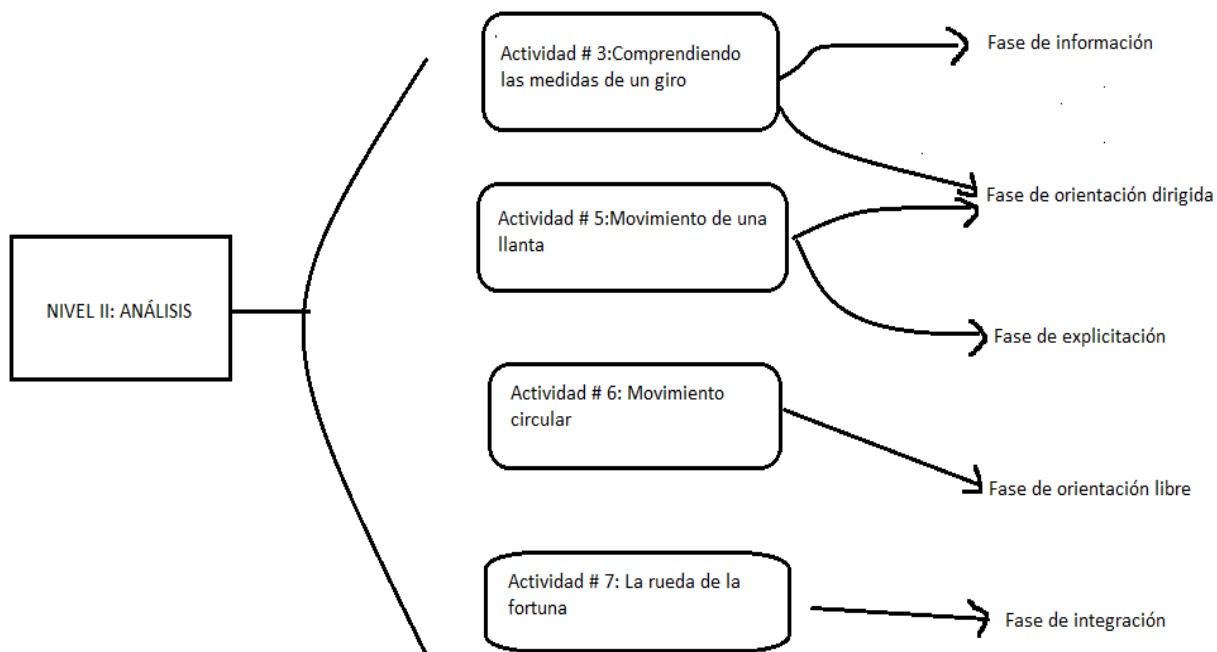
De acuerdo a lo descrito por el modelo de Van Hiele, el nivel 1 o nivel de visualización es el nivel preliminar o el nivel introductorio donde los esquemas geométricos son identificados en tanto que a partir del acercamiento con los objetos geométricos y matemáticos se espera que en este nivel el estudiante pueda recrear una idea del objeto aunque ligado estrictamente a la existencia de unos esquemas de representación particulares y visibles dentro de la realidad o el entorno del alumno, hay que recalcar la necesidad de plantear el trabajo con elementos manipulativos, para favorecer los esquemas de representación.

Las actividades construidas desde esta estructura de razonamiento han sido planteadas

con el fin de favorecer desde este punto la identificación mediante relación del concepto del radián primero como una proporción naciente de las propiedades de la circunferencia y su relación con el movimiento. Es importante aclarar, de que dentro de las fases de carácter instructivo planteadas por Van Hiele, se hace una recomendación para la construcción de la intención de cada parte de las actividades, sin embargo, no es estrictamente necesario que una sola fase como la de información, se encuentre en solo una actividad, pues desde la adaptación de la actividad para el objetivo del trabajo, se considera pertinente la retroalimentación al momento de adaptar el contexto sobre el cual se desarrolla cada una de las actividades de la secuencia.

4.7.2 Estructura de la construcción de las actividades de la unidad siguiendo nivel 2 de van hiele.

Figura 21. Estructura del Modelo Van Hiele aplicado al nivel 2 de Análisis en la Unidad



Nota. Modelo Van Hiele. Elaboración Propia

Al momento de construir las actividades # 5, # 6 y # 7, se tomó en consideración la

consecución del nivel II de razonamiento de Van Hiele, el cual corresponde al nivel de análisis y que tiene la intención de producir en el estudiante la capacidad de identificar las propiedades elementales de los objetos, todavía sometido a la manipulación y relación directa con algunos elementos tangibles o representativos, pero profundizando no solo en la concepción nominal, sino que el estudiante logró alcanzar la relación de estructuras internas. En este caso se convierte en un propósito crucial el que los estudiantes logren relacionar la concepción cuantitativa del radián y su articulación entre la longitud de arco con el radio mediante la proporcionalidad. La actividad # 3, servirá como una actividad introductoria en esta secuencia para identificar la absorción de los elementos necesarios para el trabajo posterior con las propiedades del radián y su relación con el movimiento.

4.8 Resultados obtenidos y análisis sobre la aplicación (prueba piloto) de la propuesta de unidad didáctica (UD)

Al momento de construir las actividades de la unidad se tomó en consideración la replicabilidad que podrían llegar a tener las tareas incluidas en un entorno de clase real, identificando que lo propuesto por el currículo institucional, el currículo nacional y los informes brindados por la institución educativa mediante los planes de clase para el grado 10 de escolaridad, correspondiera con la realidad vivida en la institución. Después de pedido el espacio en la institución educativa, se consideró pertinente que dado el espacio reducido de 4 horas clase (3 horas reloj) repartidos en 2 sesiones, se pudiera realizar la aplicación de aquellas actividades que centrarán su mirada sobre todo en la movilización de los esquemas de pensamiento geométrico basados en la construcción de los esquemas de representación propuestos por

Alyami (2024), puesto que se considera importante desde el análisis de contenido propuesto, movilizar estos elementos a manera de construir una articulación orquestada entre los componentes considerados fundamentales para el trabajo con el radián.

Las actividades seleccionadas fueron la actividad # 2, la actividad # 5 y la actividad # 6. De las actividades # 2 y # 5 se logró tomar registro audiovisual, mientras que de la # 6 se logró tomar registro fotográfico de lo realizado por los estudiantes, al quedar esta última como una actividad para la realización del docente titular en su espacio de clase extra.

Se identificaron episodios y momentos importantes de resaltar dentro de la aplicación de las actividades en el aula, puesto que las respuestas de muchos estudiantes brindaron oportunidades clave para resaltar la importancia de considerar tareas de construcción, demostración y articulación de las representaciones del radián para entender su relación con las unidades de medida y su “adimensionalidad cómo número real”.

- El propósito planteado para la actividad # 2 de la unidad tiene como objetivo “identificar en el concepto de longitud de arco, una herramienta para construir un sistema de medida angular perteneciente al conjunto de los números reales”. Por lo anterior es importante entender como estos elementos se relacionan directamente con las propiedades de la circunferencia y su articulación para construir medidas angulares. En las líneas de la 1 a la 11 de la transcripción (anexo # 2), en la conversación empieza a surgir información preliminar sobre el dominio y manejo que tienen los estudiantes y el profesor sobre los elementos

característicos de una circunferencia, permitiendo verificar la importancia de plantear una actividad donde los estudiantes se vean obligados a más que solo memorizar los nombres de los elementos, sino que estos tengan que identificarlos por medio de su relación y uso en la identificación de propiedades generales de la circunferencia.

- Desde la línea 41 hasta la línea 56 de la transcripción (anexo # 2) se puede observar la aparición de un concepto clave para la concepción del radián desde su representación cuantitativa, esto es la idea de proporción entre la medida del arco y el radio. El concepto de proporción y de relación entre elementos es una habilidad que necesita de un refuerzo extra y es clave al momento de concebir proporciones, E2 responde a la pregunta del profesor en la línea 46 y en la línea 55, con mucha duda y confusión ante la necesidad de relacionar proporcionalmente la medida de la unidad y la medida de la parte. El trabajo con herramientas y competencias del pensamiento métrico y de las propiedades de los sistemas de medición, se vuelve crucial para alcanzar el objetivo de identificar el papel que desempeña la longitud de arco y el radio al momento de concebir al radián como una medida angular.
- La movilización de elementos clave para el desarrollo del pensamiento geométrico está ligado, en el caso de la unidad, con la necesidad de desarrollar también competencias importantes del pensamiento métrico. Pensando en el nivel de razonamiento I de Van Hiele, el concepto de medida angular aparece como una

construcción ligada a la partición del círculo en segmentos medidos en un sistema sexagesimal, pero a la vez se intuye la relación entre el arco subtendido por el ángulo central y medida del radio, pues en la línea 89 del anexo # 2 a la pregunta realizada por el profesor de ¿cuántos radios cogió? ¿Cuántas de estas cuerdas cogió el ángulo de 30? El estudiante E2 responde que “cero coma algo”, es decir, menos de 1, esto porque tanto E2 como E1 son capaces de identificar que, al rodear el círculo con cuerdas del tamaño del radio, estas se convierten en patrones de medida, al menos cuando el profesor ha logrado acompañar. A pesar de que la medida en centímetros de dicha cuerda es muy diferente de “cero coma algo”, ellos relacionan la cantidad para hablar de la proporción de la longitud de arco y radio, es decir, la cantidad de veces que cabe el radio en el arco subtendido.

- Las tareas y ejercicios propuestos en cada actividad, principalmente en las actividades que pudieron ser analizadas desde la aplicación, muestran que el rol del docente posee una naturaleza activa facilitando la retroalimentación de los objetivos y elementos planteados para el desarrollo de pensamiento geométrico y métrico mediante el trabajo en el análisis de las propiedades del radián siguiendo el modelo Van Hiele en su nivel II de razonamiento.
- Cada una de las actividades fueron minuciosamente planificadas con el propósito de dar cumplimiento al objetivo general de investigación, al integrar el modelo de Van Hiele para analizar por medio de la unidad didáctica, los elementos didácticos de análisis al trabajar el radián como una estrategia de desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de grado 10. Una particularidad surge al

momento de identificar la estructura de las actividades, pues al aplicar las fases de instrucción planteadas por el modelo de Van Hiele para alcanzar el nivel II de razonamiento, es importante señalar que no se convirtieron en una camisa de fuerza que entorpeciera el planteamiento de las labores y tareas articuladas en cada actividad. Esto porque no se consideró conveniente seguir con severidad dichas estructuras como un orden irrefutable, sino que por el contrario se tomó en cuenta la estructura para que la información contenida conservará un sentido y secuencialidad, pero no tuviera que condicionar cada ejercicio.

Un caso destacable es el de la actividad # 1 y la actividad # 3, puesto que en su diseño dichas actividades siguen una secuencialidad al ser planteadas como parte de la fase de información y fase de explicitación del nivel I de razonamiento, pero su estructura también comporta momentos donde es importante la orientación dirigida por el profesor, lo que deja ver que las fases han sido una guía en la estructuración de las actividades pero no un condicionante al momento de plantear las actividades.

- Las representaciones visuales de la estructura del radián planteadas por Alyami (2024) reaparecen aunque no con un nivel muy profundo de formalidad en la realización de las actividades, y es que aunque no fue definido el radián en la aplicación de la prueba piloto, si se logra evidenciar que la representación del radián como proporción entre longitud de arco y círculo está presente al menos en las ideas expuestas por E1 y E2, además de que sigue habiendo una relación de una representación cualitativa del ángulo, pues cómo se puede ver en la

transcripción del anexo # 2 en la línea 107, el estudiante E3 relaciona el concepto de radio con el concepto de π , de una manera superficial, aparentemente nominal, dando a entender que no hay una comprensión verdaderamente significativa del uso de la unidad y sus propiedades. Para E3 el número π , se relaciona con el radián, pero no evoca un concepto de proporción, ni moviliza una representación cuantitativa, pues en 1 unidad de radián no hay π radianes, y para la estudiante la pregunta hecha por el profesor “Si yo hago un camino que mida una vez el radio ¿Cuánto va a medir ese camino?” moviliza conceptos de unidades utilizando al radián, pero sin entender de fondo la necesidad de utilizar el número π para cuantificar las unidades de medida.

4.9 Resultados obtenidos y análisis en relación con la propuesta de modelo local de análisis didáctico

La construcción de un modelo local de análisis didáctico se convierte en una estrategia esencial y en una herramienta especialmente útil desde una perspectiva teórica, es decir, como un marco teórico y conceptual desde el cual concebir la investigación y aplicación de análisis didáctico en el campo de la educación matemática; pero también es un referente práctico en tanto que permite utilizar y refinar estrategias que pueden y necesitan ser evaluadas en el campo para una mejoría constante.

En el caso del presente trabajo de grado, el modelo pudo ser utilizado como una herramienta para la construcción de propuestas innovadoras en aspectos curriculares, y de reflexión desde la teoría didáctica de las matemáticas, al tomar en consideración la fenomenología didáctica y epistémica del radián como un conocimiento movilizador de

habilidades y competencias relevantes para el desarrollo de pensamiento geométrico y métrico en el aula en grado décimo.

La investigación pedagógica y didáctica desarrollada en torno a las unidades de medición angular como el radián son de vital importancia para el análisis de funciones trascendentes como la trigonometría y por medio de la construcción del modelo local de análisis didáctico se logró abordar una parte importante de la fenomenología asociada, mediante la identificación de cuatro (4) aspectos cruciales:

- Análisis Curricular
- Análisis del Contenido
- Análisis Cognitivo
- Análisis de instrucción

4.9.1 Análisis curricular:

Desde la revisión con especial detenimiento, de la estructura curricular propuesta por el MEN (2006) en los estándares básicos de competencias, los DBA (2017), en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), además de las fichas de trabajo propuestas por la institución educativa, se logra concluir que el trabajo con el radián es una herramienta muy potente y atractiva para el desarrollo de competencias directamente relacionadas al pensamiento geométrico, métrico y espacial. Existe una transversalidad institucional absolutamente necesaria planteada desde el currículo, que permite la articulación de competencias tan importantes como medir, predecir, modelar y resolver problemas que pueden y deberían ser abordadas al momento de definir al radián como una unidad de medida. En el anexo # 3 se muestran las competencias

movilizadas y aplicadas en el trabajo observado por los estudiantes y por el grupo focal en la aplicación o análisis de las actividades de la unidad didáctica.

4.9.2 Análisis del contenido

Un resultado crucial al momento de analizar la articulación de la información teórica y conceptual utilizada para el análisis del contenido, con el planteamiento de las actividades de la unidad didáctica, radica en el reconocimiento de elementos que no eran tradicionalmente considerados ni por los profesores en ejercicio, ni mucho menos por los estudiantes al momento de trabajar con el radián. El análisis fenomenológico, histórico y epistemológico sirve como una guía para entender la importancia de escoger este objeto matemático como una herramienta clave de trabajo para el desarrollo de habilidades y competencias dentro del aula.

En el anexo # 1 (análisis de la unidad a partir de la aportación de un grupo focal) se destaca dentro de las aportaciones realizadas por el grupo focal de profesores en ejercicio y formación escogido, que el trabajo propuesto con el radián “ es muy valioso, porque se suele simplemente pasar por alto esa unidad de medida y se suele conceptualizar a partir de la conversión de grados a radianes, pero nunca se conceptualiza en el aula de clases ni en el ministerio de educación en los estándares de los derechos básicos del radián”. Desde esta aportación se logra entrever que la utilización del radián por parte de los profesores sigue conservando estigmas que impiden el análisis profundo de estas herramientas como métodos importantes de desarrollo y análisis didáctico.

Es importante además destacar que:

- La conceptualización del radián permite la reflexión sobre objetos o conceptos matemáticos que, aunque planteados dentro de los currículos escolares, son siempre importantes para la construcción y ejercitación de habilidades cada vez más complejas como lo es el caso del círculo, el ángulo y las unidades de medida.
- De acuerdo con los esquemas conceptuales y de representación planteados por Alyami para la construcción del concepto del radián, es necesario entender con detenimiento la definición de circunferencia, las similitudes y diferencias entre una circunferencia cualquiera y una circunferencia unitaria, además de entender que, así como el ángulo, la conceptualización del radián depende de las maneras en las que se comprenden las propiedades de sus elementos compositivos. En el caso particular del radián es de suma importancia la identificación de las propiedades del perímetro del círculo y su relación proporcional con sus propiedades de los objetos contruidos a partir del círculo como el diámetro, el radio, las cuerdas, los ángulos centrales, etc.
- La concepción de la naturaleza del radián es fundamental y juega un papel importante al momento de definir en la posteridad las propiedades que brinda el radián como argumento de una función trigonométrica de dominio y rango pertenecientes al conjunto de los números reales. El uso del número π , es una de las consecuencias directamente desprendidas de un tratamiento inadecuado de la concepción del radián, pues no entender la naturaleza del número irracional y su papel como parte de la proporcionalidad invariante que se mantiene en cualquier círculo puede llevar a concebir errores importantes de modelación en problemas de tipo práctico, en contextos como la ingeniería, la aviación o en casos de tipo cotidiano.

Análisis Cognitivo

El componente de análisis cognitivo permitió prever desde el uso de la bibliografía y documentación algunos casos que habían sido considerados por investigaciones anteriores y que solían ser muy comunes al momento de trabajar con la unidad del radián como una medida angular adecuada del argumento de una función trigonométrica. La aparición de errores, dificultades y obstáculos fue instantánea sobre todo en la aplicación de la unidad por parte de los estudiantes quienes demostraron que existen dificultades con los esquemas de representación de la unidad de medición. Así pues, se puede destacar que:

- Además de las dificultades para asociar las unidades de medición sexagesimal con la relación proporcional entre arco y radio. Se encontraron además graves dificultades con la realización de mediciones de ángulos utilizando herramientas como el transportador o el compás. Esto se puede reflejar en las líneas 197 y 205 de la transcripción hecha a algunos episodios de la aplicación en el anexo # 2. En estos episodios el estudiante E3 demuestra que no entiende muy bien como ubicar el transportador, incluso al momento de realizar la aplicación se puede ver en el anexo # 4 (punto 3) que la estudiante no logra medir con efectividad e incluso carece de sentido de orientación pues no sabe ubicar el punto central a partir del cual contar para realizar la medición.
- La movilización de competencias y habilidades para el desarrollo del pensamiento geométrico es crucial al momento de entender la relación conceptual entre los elementos del radián, de acuerdo con las estructuras expuestas por Alyami en la tabla 2, aparece una de las consideraciones planteadas en el análisis cognitivo construido y es la de representar al radián como una magnitud de π sin entender el trasfondo de la utilización y

naturaleza del número, los errores reflejados por el estudiante E3 en la línea 107 del anexo # 2 demuestran una dificultad evidente en la utilización de π como un número que permite establecer una proporción entre la cantidad de veces que cabe el radio, la unidad, en el arco de círculo acotado por el ángulo central construido por la rotación del círculo.

- Se concluye que la disposición planteada por el análisis previo sirvió como una referencia crucial al momento de enfrentarse a situaciones que reflejaron con un nivel de similitud importante, aquellas dificultades, errores y obstáculos presentes al momento de trabajar el radián. El conocer este tipo de dificultades permitió hallar caminos efectivos al momento de lograr avances significativos en la comprensión de las representaciones adecuadas del radián. En el anexo # 4 (punto 5) se muestra que los estudiantes E1 y E2, quienes después pudieron realizar la misma actividad que E3 tuvieron un mejor entendimiento del patrón de medida basado en el radio, incluso desde la actividad pasada mostraron que al identificar la medida en radios, en la línea 90 y 93, de la transcripción anexo # 2, E1 había logrado identificar que el número cero punto algo, no estaba haciendo referencia a los centímetros que medía el arco subtendido por el ángulo de 30° , sino que hacía referencia a la proporción de veces que cabía en ese espacio el radio de ese círculo. Esto refleja una estructura representativa de carácter cuantitativo, de acuerdo con Alyemi (2024).

4.9.4 Análisis de instrucción

El último componente sugerido para la construcción del modelo local de análisis didáctico fue el del análisis de instrucción o análisis didáctico de instrucción. Es importante aclarar que la propuesta de integrar este componente radica en la necesidad de considerar la

pertinencia y uso de las herramientas propias para la realización y planteamiento de las actividades de la unidad didáctica construida.

Sin embargo, desde la intención central del modelo, el uso y aplicación de herramientas, aunque muy importante para la contextualización y localización del análisis didáctico, no es considerado como un elemento trascendental, puesto que la unidad se construyó como una herramienta de aplicación del modelo y por lo tanto está sujeta a cambios importantes, que se consideren pertinentes de aplicar, en tanto que la retroalimentación de la ficha lo refleje. Por lo anterior se mostrarán a continuación algunas consideraciones realizadas por los profesores en el anexo # 1 que hacen parte del grupo focal por medio del cual fue retroalimentada la ficha después de sugeridas las actividades a trabajar:

- Ante la aplicación y análisis de la actividad # 1, el sujeto PF1, a partir de la idea # 1, en el párrafo dijo que:

“Hay ciertas actividades que a mi parecer se deben de mejorar por ejemplo el primer, la primera historia que pones en la primera situación esa primera historia no conecta con las actividades que propones eso se puede evidenciar en que digamos la historia está chévere interesante pero no, no lo conectas”

Lo anterior refleja una oportunidad valiosa de mejoría por medio de la cual la unidad necesita replantear el uso del análisis fenomenológico del contenido, para que dentro de las historias y contextos que aportan a la unidad, se logre encontrar una que pueda enlazar mejor la secuenciación de actividades, no a manera de lista sino a manera de un hilo común que permita un todo ordenado. Este material es concebido como un elemento pre-instruccional (Valenzuela,

2012) y por tanto, es necesario considerar sus cualidades como un elemento que debe tener mayor impacto y asociabilidad en los presupuestos teóricos y de conocimientos prácticos del estudiante.

- Otro aspecto importante para considerar es el uso de la rotación y los elementos como el geoplano circular al momento de plantear la actividad. Es importante identificar que, aunque la actividad tiene planteado el uso de esta herramienta (el geoplano circular), no fue necesario en todos los casos la utilidad de este, por lo que es necesario evaluar su uso como una herramienta importante dentro del desarrollo de la actividad. Con respecto al uso de las herramientas virtuales en el anexo # 1, idea # 5, párrafo 2, el sujeto PF2 dice:

“La integración profunda de tecnologías, se puede integrar las TICS, se puede plantear un acomodo para visualizar más cosas”

Así mismo PF1, en la idea # 3, párrafo 1, comenta:

“creo que es importante en las actividades proponer más contextos si veo que utilizas por ejemplo las ruedas como contexto y demás queda como en lo último si me entiendes tú lo podrías proponer en la mitad y al final digamos conceptualizar lo que vienes planteando”

Como se puede observar, un elemento clave a reconsiderar es el uso de herramientas pertinentes y adecuadas para el desarrollo de las actividades. El uso de las tecnologías o material concreto es asertivo en tanto que su función contenga una necesidad operatoria y movilice un esquema conceptual apropiado. El geoplano circular, puede ser una buena

herramienta en tanto que brinde la posibilidad de movilizar aquellas estructuras conceptuales y esquemas de representación de los que se vale el radián para ser utilizado como una herramienta crucial del desarrollo de habilidades y competencias para potenciar el pensamiento geométrico.

Así pues, un aspecto a reconsiderar es la pertinencia del uso de objetos o material tangible, puesto que, a pesar de ser interesante y potenciador, puede quedarse en el caso del desarrollo de la unidad como algo estrictamente anecdótico y de poca relevancia. El contexto es quizá el campo que más pueda aportar a la intencionalidad e importancia del material articulado, por lo que es importante reconocer casos como el del movimiento circular y aprovechar la versatilidad de las herramientas en favor de la utilización y potencialización de todo el material incluido en la unidad.

Por otra parte, es claro que la unidad es una herramienta enriquecedora dentro del quehacer profesional de los docentes, y que permite movilizar discusiones importantes con respecto a la pertinencia de una innovación curricular en torno al radián como un agente movilizador y potenciador. Esto porque la idea de trabajar sobre sus representaciones requiere de una investigación profunda, incluso sobre la pertinencia de los elementos clave al momento de dirigir una orquestación didáctica en torno al desarrollo de actividades con el objeto.

Capítulo V: Conclusiones

El siguiente apartado tiene como objetivo presentar aquellas consideraciones y apreciaciones obtenidas por medio de la realización de una investigación inscrita dentro del campo de la didáctica de las matemáticas (Ddm) con respecto al trabajo realizado con el radián.

Los aportes realizados en este apartado tienen como objetivo mostrar aquellas consideraciones obtenidas al evaluar bajo la visión y dirección del marco teórico propuesto de un modelo local de análisis didáctico y una metodología de investigación basada en la sistematización de experiencias docentes el alcance obtenido de la preguntas central de investigación y los objetivos general y específico planteados como directrices de la investigación. También se presentarán algunas apreciaciones en torno a las experiencias y aprendizajes significativos recopilados por medio de la realización de esta investigación.

5.1 Consideraciones finales acerca de la investigación en didáctica de las matemáticas como una herramienta formativa para profesores

La propuesta de investigación desarrollada por medio del presente trabajo de grado, tiene como uno de sus objetivos específicos aportar en la mejoría de la formación profesional de los profesores de matemáticas, mediante el fomento de la investigación en didáctica de las matemáticas. El rol del profesor por convención tradicional social se ha ceñido a la aplicación del trabajo de campo, es decir, se enclaustra al profesor en un rol primordialmente práctico, que no favorece la innovación curricular y científica del campo de la educación matemática, al alejar a los docentes de la construcción y teorización del conocimiento, quien es en últimas el que rige y establece los parámetros desde los cuales se aplica el trabajo de campo.

El trabajo realizado por medio de esta investigación sobre el radián es una propuesta innovadora, y apropiada dentro del contexto actual del campo de la educación matemática, puesto que como es observado en los antecedentes, el marco teórico y en las aplicaciones piloto y discusiones sobre las actividades de la unidad. Los profesores de décimo grado de escolaridad que han trabajado o trabajan con las unidades de medida angular, poseen creencias y estigmas sobre el uso convencional del radián como una unidad de equivalencia, sin reflexionar sobre las implicaciones verdaderas que tiene la conceptualización de las unidades de medida y los sistemas matemáticos y numéricos que se movilizan detrás. El radián es un elemento que moviliza muchísimas competencias y habilidades cruciales del pensamiento geométrico y métrico al momento de ser incluido en el aula; la utilización de estructuras de medición y de representaciones cualitativas por medio de la articulación de los componentes de una circunferencia, reflejan la necesidad del profesor de replantearse las concepciones y creencias que tiene sobre los elementos geométricos aquí inmiscuidos y la manera en la que interiorizados por los estudiantes.

El radián es un componente curricular crucial, pues no solo es importante al momento de trabajar la matemática escolar, sino que, en el desarrollo de conocimientos en otras áreas científicas como la física, toma una especial relevancia, como por ejemplo en el análisis del comportamiento de movimientos periódicos como el movimiento circular y su posterior articulación con el análisis de fenómenos ondulatorios.

5.2 Consideraciones sobre la información obtenida a partir de la pregunta central de investigación

La pregunta central de investigación planteada fue: ¿Qué elementos conceptuales y procedimentales se pueden identificar e integrar en la concepción de un modelo local de conocimientos y análisis didácticos centrados en el concepto de radián, articulando fenómenos del movimiento circular, para el diseño de una unidad didáctica que fomente el desarrollo del pensamiento geométrico como estrategia para la formación de profesores de matemática?

El trabajo de investigación realizado facilitó la identificación por medio de la planificación, elaboración y retroalimentación de la unidad didáctica construida, de elementos conceptuales y procedimentales relevantes para la actividad práctica y de investigación del docente, puesto que además de la fenomenología propia del contenido matemático en relación con su concepción dentro de las ciencias matemáticas, también permitió la recopilación de información relevante a nivel didáctico que sirvió como punto de partida para el diseño y construcción del modelo y la unidad didáctica. Los elementos conceptuales y teóricos se constituyeron en prácticos al momento de utilizarlos para desarrollar las actividades de la unidad.

En el caso de los elementos conceptuales y teóricos recolectados, se obtuvo una información relevante por medio de la investigación desarrollada en este trabajo de grado, un claro ejemplo es la identificación de elementos cruciales para la conceptualización del radián, su representación cualitativa y su representación como un elemento cuantitativo. En el primer caso es necesaria la utilización de la geometría plana, por medio de la utilización de componentes geométricos como la circunferencia y sus partes, el radio, el diámetro, los ángulos

centrales, los arcos, el perímetro de un círculo. También integra operaciones isométricas que requieren de elementos cruciales para el desarrollo del pensamiento geométrico como las rotaciones y las traslaciones iteradas.

Es también crucial la inclusión de los esquemas de representación cualitativa, mediante la articulación de la construcción geométrica y la definición de los sistemas de medida derivados, nace la proporción que dota de identidad al radián, al ser producto de la proporción entre la cantidad de veces que cabe la medida del radio dentro de la magnitud del arco trazado por la rotación del radio a partir de ángulos centrales de la circunferencia. Lo anterior refleja dos momentos cruciales del trabajo con el radián que requieren de la estructuración de una fenomenología, la forma de visualizar el ángulo como objeto geométrico y como medida, además de los esquemas de representación utilizados que dotan de sentido a la unidad.

5.4 Resultados y consideraciones obtenidas a partir de los objetivos de la investigación:

Como objetivo general fue planteado en este trabajo de grado el “caracterizar elementos conceptuales y procedimentales claves dentro del diseño de un modelo local de análisis y conocimientos didácticos, que se concrete en una unidad didáctica basada en el trabajo con el radián, por medio del movimiento circular uniforme, como una estrategia de formación inicial para profesores de matemática escolar en grado 10 de escolaridad”. El objetivo planteado se podría denominar como exitosamente alcanzado, ya que dentro de la realización de la investigación presentada en este trabajo de grado se lograron caracterizar elementos fundamentales para la construcción del modelo local de análisis didáctico.

Empezando por el análisis de contenido, este fue construido en base de las investigaciones de Alyami, Akkoc, Meneses, Montiel, entre otros, abordando aquella fenomenología y estructura conceptual inmersa dentro de la naturaleza matemática del radián, destacando la importancia de considerar sus diferentes tipos de representaciones y como la concepción del radián desde estas representaciones impactan en la manera mediante la cual se deben planificar, diseñar y construir las actividades por parte del profesor en el aula.

El esquema del análisis instruccional del MLAD, permite al docente identificar dentro de la realización de su investigación, la pertinencia de diseñar, utilizar o plantear el uso de ciertas herramientas y modelos de trabajo. En el caso de la propuesta de unidad didáctica, se utilizó material manipulativo de tipo tangible y de carácter virtual, herramientas clásicas como transportador, regla y geoplano circular; en el caso del material virtual se utilizó la applet de GeoGebra y un simulador de la nasa como herramientas de trabajo. La orquestación didáctica en este caso en particular contempla múltiples factores y se convierte en un punto central de reflexión y análisis al momento de caracterizar elementos conceptuales, teóricos y prácticos para la construcción del MLAD.

El modelo de Van Hiele es también un recurso importante para caracterizar elementos conceptuales, teóricos y prácticos dentro del MLAD planteado, esto porque Van Hiele desde su fase instructiva, permitió la estructuración de momentos clave dentro de cada actividad de la unidad, y a partir de sus niveles de razonamiento, en conjunto con las investigaciones realizadas en torno a las dificultades, errores y obstáculos hallados en el trabajo con la unidad de medida del radián, permitieron la predicción y abordaje de los esquemas cognitivos de los que el radián

se alimenta para construir el análisis cognitivo del modelo.

Como es deducible por el esquema anterior, si el docente desea proponer una innovación curricular que posea una base teórica sólida y justifique su aplicación como una oportunidad de mejorar su práctica profesional, es necesario hacer uso de la investigación. La construcción de un modelo local de análisis didáctico (MLAD) exige el desarrollo de habilidades cruciales para el docente investigador, en el caso particular de la propuesta realizada en este trabajo de grado, la investigación fue la que permitió la construcción adecuada y consciente de las actividades incluidas en la unidad, logrando una integración entre la teoría y la práctica para incluir un contenido matemático escolar en el aula.

5.5 Resultados y consideraciones obtenidas a partir de los objetivos específicos

Los objetivos específicos planteados a alcanzar en este trabajo de grado fueron los siguientes:

1. Determinar aquellos elementos conceptuales y procedimentales básicos para el diseño de un modelo local de conocimientos y análisis didáctico, enfocado en el radián, como una herramienta pertinente para la integración de conocimientos del campo de la DdM.
2. Proponer el diseño de una unidad didáctica basada en la concepción del radián dentro de un fenómeno como el movimiento circular, integrando elementos del modelo de Van Hiele, con el fin de trabajar el desarrollo del pensamiento geométrico, espacial y métrico.

3. Fomentar el desarrollo de competencias y habilidades didácticas en profesores de matemáticas aplicando una metodología de sistematización de experiencias docentes, con el fin de mejorar la formación profesional y la proyección de investigadores en didáctica de las matemáticas.

Con respecto a los resultados alcanzados a partir del primer objetivo específico, este se puede considerar como logrado, en tanto que para el diseño del modelo local de análisis didáctico es fundamental poder contar con los elementos que fundamenten teórica y conceptualmente la estructura sugerida de análisis. Constructos teóricos como los conceptos de representación del radián, las dificultades, obstáculos y errores movilizados dentro del trabajo con las unidades de medida del arco, del radio, además de la proporción existente entre los dos; la utilización del modelo de Van Hiele y sus niveles como una herramienta de análisis cognitivo e instruccional desde sus niveles de razonamiento y fases instruccionales, permitieron la construcción de las tablas 1,2,3 y 4. Además de la figura 18, quienes son de elaboración propia del investigador constructor de esta tesis.

El objetivo específico # 2, fue alcanzado de manera satisfactoria, pues la unidad didáctica no solo fue realizada, sino que puede ser analizada y retroalimentada tanto por una aplicación de una prueba piloto en el aula, como por una revisión de un grupo focal de profesores en ejercicio y formación (la caracterización se encuentra en el anexo # 1). Una conclusión importante del diseño propuesto en la unidad didáctica, es que las actividades no deberían considerarse terminadas, antes, por el contrario, es crucial aplicar una retroalimentación constante y una

mejora continua para la evolución de este trabajo investigativo.

Con respecto al objetivo específico # 3, se destaca que tanto por parte del investigador director de este trabajo, como por parte de los profesores que aportaron en las entrevistas del anexo # 1, este trabajo fue una fuente importante de reflexión sobre las habilidades, competencias y herramientas con la que cuenta un profesor para abordar un objeto matemático específico en el aula como es el caso del radián. La sugerencia del trabajo en el aula con un objeto matemático debe estar fundamentado en un análisis profundo de su metodología y en la posibilidad de una innovación curricular constante, que se adapte al contexto local desde donde el docente investigador pretende aplicar dicha innovación.

5.6 Resultados y consideraciones finales

La realización de este trabajo de investigación, ha sido una oportunidad excelente de comprender la necesidad que debe adoptar un docente en formación y en ejercicio por innovar, crear y construir a partir de la investigación, actividades para el abordaje de objetos matemáticos, como el radián. Este a pesar de estar incluido dentro del currículo institucional proporcionado por el MEN, suele esconder oportunidades valiosas y enriquecedoras para analizar situaciones de aprendizaje dentro del campo de la educación matemática. Un trabajo profundo y detallado del origen y fenomenología alrededor de la inclusión del radián como un objeto que moviliza competencias geométricas en el aula, puede convertirse en un punto de partida para el trabajo de competencias en matemáticas sobre modelación (actividad # 6 y # 7), resolución de problemas (actividad # 7), comunicación (actividad #1, # 2 y # 3 de la unidad) y razonamiento (actividad # 4 y # 5). Al final una propuesta de innovación curricular en base al radián refleja cómo se siguen

teniendo oportunidades clave para la reflexión de los métodos y esquemas utilizados en el campo de la educación matemática en el aula para desarrollar competencias y habilidades en matemáticas.

Referencias Bibliográficas

- Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept image of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857- 878.
- Bedoya E, (2013) La unidad y el análisis didácticos como instrumentos metodológicos de investigación en didáctica de la matemática y formación de profesores: el caso de la derivada.
- Bedoya E, (2017) Formación de profesores de educación básica y media en matemáticas y su didáctica: El conocimiento didáctico de contenido y el Análisis Didáctico. y Unidades Didácticas.
- Bedoya (2022) Didáctica de las matemáticas – Conocimiento y análisis didáctico.
- Berger. P. L y Luckman, T. (2006) La construcción social de la realidad. Buenos Aires, Argentina: Amorrurto
- Beltrametti, M., Esquivel, M., & Ferrarri, E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de Profesorado en Matemática. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas*, 4-7.
- Buendía, G., & Montiel, G. (2009). Acercamiento socio epistemológico a la historia de las funciones trigonométricas.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.
- Cabrera Matas, M. I. F. (2022). TRIGONOMETRÍA.

- Camacho Ríos, J. (2017). Propuesta de un modelo local de análisis didáctico para fortalecer los conocimientos de un profesor de grado quinto sobre la fracción en su sentido de razón. Universidad del Valle.
- Campo, C. D., & Lasso, L. A. (2014). Una secuencia didáctica en el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas: el caso de la función seno.
- Cruz-Márquez, G., & Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición indirecta de distancias y el trabajo geométrico en la construcción de las nociones trigonométricas. *Acta Scientiae*, 24(4), 81-108.
- Díaz Cárdenas, M., Salgado Beltrán, G., & Díaz Salgado, V. (2010). *La transición: Grados $\rightarrow$ Radianes $\rightarrow$ Reales. Un obstáculo didáctico*. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Ekici, C. & Alagoz, C. (2021). Inquiry-based Orbital Modelling to Build Coherence in Trigonometry.
- Escandón Vallejo, J. (2017). Modelo local de análisis didáctico para la enseñanza de las traslaciones en el plano cartesiano. Universidad del Valle.
- Fernández, A., Gordano, C., Goyetche, A., Molfino, V., Perdomo, M., Rey, M., & Suárez, S. (2019) ¿Grados O Radianes? Aportes Para El Discurso Matemático Escolar. *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa*, 55.
- Fouz, F., & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Un paseo por la geometría*, 16, 67-81.
- Fi, C. (2003). Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy. Unpublished Ph.D. Dissertation. University of Iowa: USA.

- Fi, C. (2006). Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Cofunctions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz & A. Mendez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Merida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–141.
- Hardy, G. H. (1928). *A course of pure mathematics*. Cambridge University Press.
- i Pastells, Á. A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: para niños y niñas de 6 a 12 años (Vol. 2)*. Narcea Ediciones.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral)*. Universidad de Valencia, España.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. In *Proceedings of the 18th PME Conference (Vol. 3, pp. 41-48)*.
- Lupiañez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Lupiañez Gómez, J. L., & Rico Romero, L. (2008). *Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares*.

- Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.
- Maldonado, E., & Miranda, J. L. (2009). Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría.
- Martínez Sierra, G. (2011). Representaciones sociales que poseen estudiantes de nivel medio superior acerca del aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. *Perfiles educativos*, 33(132), 88-107.
- Martínez Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(1), 35-62.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998) Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998) Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2016) Derechos Básicos de Aprendizaje y Evaluación. Bogotá, Colombia.
- Méndez, C. (2008). Sobre la construcción escolar de las funciones trigonométricas: La transición grados $\rightarrow$ radianes $\rightarrow$ reales en el NMS. Tesis de maestría. Facultad de Matemáticas - Universidad Autónoma de Guerrero. México
- Méndez, C. L., Martínez, G., & Maldonado, E. S. (2007). Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: La transición grados-radianes-reales.
- Meneses, H. (2013). La transición grados-radianes-reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistemático (Doctoral dissertation).

- Miller, S. (2001). Understanding transformations of periodic functions through art. *Mathematics Teacher*, 94(8), 632–635.
- Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México
- Montiel Espinosa, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio Socioepistemológico. Ediciones Díaz de Santos.
- Moore, K. C., LaForest, K., & Kim, H. J. (2012). The unit circle and unit conversions. In *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 16-31). Portland State University, Portland.
- National Council of Teachers of Mathematics. [NCTM] (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Navarro, C. (2004). Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites especiales $\lim_{x \rightarrow 0} \sin xx$ y $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos xx$. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México
- Pachuca Herrera, Y., & Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación matemática*, 32(1), 38-66.
- Preciado, M. (2016) Análisis didáctico y sistematización de una propuesta didáctica entorno a las nociones matemáticas de regularidad y patrón en un aula heterogénea de grado quinto. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.

- Potoy, Y., Poveda, S., Alarcon, R., Gomez, P., Vilches, Y., & Aleman, J. (2007). Material didáctico para la enseñanza–aprendizaje de conceptos de matemáticos (el tangram y el geoplano). Monografía de conclusión de la carrera de Matemática. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Nicaragua.
- Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1 (1), 22-39.
- Rotaeché, R. (2013). La Construcción del Concepto de Ángulo en Estudiantes de Secundaria (Doctoral dissertation).
- Rico, L. (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Editorial Síntesis, S.A
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (2013). Análisis Didáctico en Educación Matemática.
- Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Marin, A., Puig, L., Sierra, M., & Socas, M. (1997). La educación matemática en la secundaria. Editorial Ice/Horsori.
- Segovia, I.; Rico, L. (2001). Unidades didácticas y organizadores. En Castro, E. (Ed.) Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Socas, M. (1997). *Cap V: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Universidad de la Laguna, España.
- Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. Notices of the AMS, 47, 641–649.
- Searl, J. (1998). Practical activities. Mathematics in School, 27(2), 30–31.
- Skemp, R. R. (1987). The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Stuart Vernaza, B. (2023). Elaboración de un modelo local de análisis didáctico que integre elementos de la teoría de los Van Hiele, transformaciones geométricas y objetos fractales en el diseño de una unidad didáctica que promueva el desarrollo de pensamiento geométrico en grado once. Universidad del Valle.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática XI*, pp. 19-52.
- Solano, S., & Bedoya, E. (2013). La unidad y el análisis didácticos como instrumentos metodológicos de investigación en didáctica de la matemática y formación de profesores: el caso de la derivada.
- Tall, D. O., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2)
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, J2(2), 151-169.
- Valenzuela, M. (2012). Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Universidad de Granada, España.
- Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Velazco, D. J. M. (2018). Geoplano circular trigonométrico: Un recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría. *Divulgaciones Matemáticas*, 19(2), 65-81.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.

Anexos

Anexo # 1. Análisis de la unidad a partir de la aportación de un grupo focal

El desarrollo y proposición de la unidad didáctica hace parte de la aplicación de la metodología de investigación basada en la sistematización de experiencias docentes. De acuerdo con la metodología escogida, la cual se retroalimenta del modelo local de análisis didáctico como una estrategia también metodológica de investigación es caracterizar mediante este enfoque algunos elementos de reflexión desde aquella fenomenología propia de la práctica en el aula a partir de la enseñanza del radián, pero movilizadas por una visualización más amplia de la fenomenología de la didáctica de las matemáticas que genere inquietud por una transformación e innovación curricular en la enseñanza de las matemática.

Por lo anterior y teniendo en mente el objetivo específico # 2, el cual tiene como propósito “Proponer el diseño de una unidad didáctica basada en la concepción del radián dentro de un fenómeno como el movimiento circular, integrando elementos del modelo de Van Hiele, con el fin de trabajar el desarrollo del pensamiento geométrico, espacial y métrico” se considera pertinente la retroalimentación de la ficha por parte de un grupo focal de PF (Profesor formador o en formación) quienes al revisar aplicar y analizar sus actividades generan reflexión sobre los contenidos y elementos conceptuales y procedimentales allí contenidos, además de tener la oportunidad de dimensionar las posibilidades que brinda el desarrollo de la unidad dentro de su formación.

Así pues, se planteó un cuestionario donde se podría caracterizar el perfil de los docentes

integrantes del grupo focal (anexo # 3) y la realización de unas preguntas desde la aplicación de una entrevista semiestructurada. Desde un principio se consideró pertinente la aplicación de un encuentro entre pares donde los 3 participantes voluntarios pudieran opinar y hacer sus intervenciones desde el modelo de debate, direccionado por las preguntas de la entrevista; sin embargo, por motivos de agenda y ocupación se optó por permitir que los participantes enviaran los audios de forma individual respondiendo el cuestionario de caracterización y las respuestas a las preguntas anexas:

PREGUNTA	INTENCIONALIDAD
¿Cuáles son esos elementos propuestos en las actividades que destacas como principales o más destacados al momento de trabajar el concepto de radián en la realización de las actividades?	Recopilar información sobre las concepciones y creencias particulares de cada PF sobre el trabajo de radián en el aula, con el fin de contrastar las opiniones particulares de los docentes al momento de construir actividades en torno a la medición del radián
¿Qué herramientas importantes de naturaleza lúdica, didáctica y/o pedagógica puedes destacar como presentes o ausentes en la propuesta de unidad didáctica analizada?	Analizar el uso y aplicación de herramientas y modelos de trabajo, que suelen utilizar los PF al momento de diseñar o pensar el trabajo con mediante fichas, talleres o actividades.
Si pudieras utilizar esta unidad didáctica cómo un recurso dentro de las clases ¿Cuáles son esos elementos primordiales sobre los cuales podrías centrar una mirada	Observar el impacto que brinda la aplicación y análisis de la unidad desde la perspectiva del PF, como una herramienta que permiten la movilización de

reflexiva para retroalimentar tu quehacer cómo profesor de matemáticas en el grado 10?	competencias profesionales del docente formador o en formación. Además de plantear de manera tácita la necesidad de la investigación al momento de abordar conceptos para la enseñanza de la geometría en grado decimo de escolaridad.
¿Consideras esta propuesta de unidad didáctica como una herramienta eficaz de reflexión para movilizar competencias profesionales en profesores de matemáticas en formación o en ejercicio?	Se tiene el deseo de escuchar aquellas consideraciones y concepciones que tienen los profesores sobre el rol del docente como un agente de innovación en el aula. Además de observar desde la perspectiva particular de cada uno su postura frente a sus funciones cómo profesionales de la matemática.
¿Qué elementos consideras importantes de reconsiderar al momento de adaptar o rediseñar esta unidad para su aplicación en el futuro dentro del aula?	Mediante esta pregunta se da espacio a las aportaciones y retroalimentaciones que cada PF desde su experiencia o concepción quisieran realizar. Además, se da espacio a escuchar la opinión y percepción que tienen los docentes sobre la aplicación de modelos como el de Van Hiele para plantear las actividades.

Así después de planteadas las preguntas se recolecto la información obtenida mediante audios de grabación enviados por los PF, y se optó por presentar los datos en forma de párrafos recopilando la información atendiendo a cada una de las ideas expuestas:

Caracterización de PF1 (Profesor formador – formación 1)

Mauricio Ortega Ramírez

Lic. en Matemáticas y Física

Magister en Educación y Enseñanzas de las ciencias

Descripción del perfil:

Docente del área de matemáticas y física, con experiencia en el rubro por más de 5 años, quien se desempeña como profesor titular del colegio Filadelfia de la ciudad de Cali, además de haber trabajado como profesor asistente en la Universidad del Valle en el área de enseñanza de las ciencias naturales y enseñanza de la física.

Idea # 1:

Hay ciertas actividades que a mi parecer se deben de mejorar por ejemplo el primer la primera historia que pones en la primera situación esa primera historia no conecta con las actividades que propones eso se puede evidenciar en que digamos la historia está chévere interesante pero no, no lo conectas. no me parece que estén conectadas en vez de esa historia podrías proponer que algo que te relacione por ejemplo como los mayas u otra comunidad entendía lo del calendario que lo trabajas allí, pero y no lo digamos que no lo explica en la historia como tal creo que en esa primera situación eso se puede mejorar se puede mejorar

Idea # 2:

Con respecto a algunos vídeos logré evidenciar están interesantes y suenan bien y me parecen chéveres también hay ciertos vídeos que por ejemplo son muy muy largos entonces en

ese sentido teniendo en cuenta que las clases a veces no son tan largas como uno lo espera a veces te dicen 50 minutos y en realidad no son 50 minutos sino 40 entonces los vídeos no deberían ser tan largos y esto es como una percepción mía y eso con respecto a los vídeos

Idea # 3:

Creo que es importante en las actividades proponer más contextos si veo que utilizas por ejemplo las ruedas como contexto y demás queda como en lo último si me entiendes tú lo podrías proponer en la mitad y al final digamos conceptualizar lo que vienes planteando

Idea # 4

Listo otro aspecto por ejemplo lo de las estaciones lo del giro de los planetas y demás creo que los aboradas, pero se podría mejorar trata de enfocarlo o tratar de enfocarlo un poco más hacia lo que tú planteas por ejemplo la circunferencia el número pi el radian si eso lo podrías hacer y

Idea # 5:

Digamos que qué puedo destacar o sea yo destacó tres aspectos primero como aboradas el concepto creo que lo aborda desde la parte histórica obviamente no profundiza sobre eso pero si hay una conceptualización histórica del concepto de radian y tratas de poner varios contextos en matemáticos más que todo y geométricos que permiten evidenciar las relaciones de la circunferencia con el radian eso es muy muy valioso es muy valioso este trabajo en ese sentido porque se suele simplemente pasar por alto esa unidad de medida que es el radian y simplemente se ve como la conversión de grados a radianes pero nunca se conceptualiza en el aula de clases ni

en el ministerio de educación en los estándares de los derechos básicos del radian entonces es muy interesante tu aporte en ese sentido

Idea # 6

Dentro de mi clase creo que serviría en el sentido de lo matemático si no tanto en lo físico creo que en lo físico queda corto en lo geométrico en lo matemático creo que profundiza bastante bien y creo que ahí es donde debes de poner el foco me parece que tienes muy buenas ideas como te dije conceptualizas muy bien esas ideas y con respecto a lo del radian lo profundizas lo entiendes y lo plasmas y como te dije al principio creo que hacen falta algunas actividades más de reflexión en el estudiante proponer actividades como por ejemplo algo de indagación puede ser que indaguen que investiguen sobre qué es el radian y después reflexionar sobre lo que investigaron listo me de sentido pues ellos van a investigar algo de google que tú sabes que no es completo tal como tú lo estás proponiendo si me entiendes y eso puede ser ayudar a la retroalimentación como tal.

Idea # 7

Con respecto a las competencias de los docentes creo que es importante reconocer de que nosotros como docentes en la licenciatura como tal nuestro programa nuestra formación nunca se conceptualiza ni se indaga profundidad desde el punto que lo estás haciendo en el concepto radian en ese sentido creo que es importante que se reflexione sobre los componentes históricos los componentes didácticos de ciertas unidades de medida que a veces no tenemos idea de cómo funcionan en ese sentido creo que un trabajo bastante potente.

Idea # 8

Como última recomendación creo que sería importante la matematización que tú puedas generar por medio de una actividad que los estudiantes realicen algún proyecto en el cual relación eso por ejemplo que puedan hacer una rueda para hacer un carro con movimiento que identifiquen digamos la medida de una rueda utilizando todos los conocimientos que se hayan aplicado eso creo que sería bastante interesante que pudieran hacer por ejemplo el vídeo que tú colocaste de dos ruedas y que van rodando y digamos tienen que caer en el mismo punto sí eso de pronto hacerlo que ellos puedan identificar esa unidad con aspectos de la vida cotidiana

Caracterización de PF2:

PF2 (Profesor formador – formación 2)

Jackeline Valencia Giraldo

Lic. en Matemáticas

Magister en enseñanza de las Matemáticas

Descripción del perfil:

Docente con 11 años de experiencia en colegio, he manejado todos los grados (jardín a 11) orientando el área de matemáticas. Desde hace 5 años trabajo en la universidad UNIAJC orientando áreas como matemática fundamental, cálculo I, cálculo II, álgebra lineal, laboratorio de matemática I y II.

Idea # 1:

¿Bueno, la pregunta un dice, cuáles son los elementos propuestos en las actividades que

destacas como principales o más destacados al momento de trabajar el concepto de radian?

Y yo considero que cuando se trata de enseñar y trabajar el concepto de radian es importante incorporar algunos elementos claves dentro de las actividades. Estos elementos nos pueden ayudar a que los estudiantes pues comprendan no solamente la definición formal del radial, sino también cómo se relaciona con el círculo y las funciones trigonométricas.

Algunos de esos elementos que se destacan además cuando se va a trabajar el concepto de radian es el círculo unitario. Es importante trabajar muy bien el círculo unitario para que ellos puedan comprender como la ubicación de todo, cómo es que influye esto dentro del radian.

La conversión entre ángulos y radianes es importantísima, la visualización de funciones trigonométricas, la conversión de cómo los ángulos en radianes se relacionan con longitudes de arco y de coordenadas. La clave está en que los estudiantes puedan evidenciar bien el concepto a través de actividades que sean visuales, que sean más de tocar más interactivas y de una aplicación más práctica.

Idea # 2

La pregunta número dos hace mención a las herramientas importantes de naturaleza lúdica, didáctica o pedagógica para destacar algunos presentes ausentes dentro de la unidad didáctica.

Bueno, las herramientas lúdicas, didácticas y pedagógicas que se presentan en la unidad didáctica sobre los radianes son fundamentales sí o sí para que el concepto sea comprendido de

forma profunda y significativa. Dentro de esas herramientas debería ser muy aprovechado y el tema de las simulaciones dinámicas, los juegos interactivos, el aprendizaje colaborativo y las actividades basadas en proyectos.

Esto va a permitir no solamente que el aprendizaje sea más atractivo para ellos, sino que sea también eficaz, que logre el objetivo principal, que es que ellos puedan comprender y aprender ese concepto del Radian y también fomenta una mayor comprensión conceptual y aplicación de la práctica en los radianes en diferentes áreas, no solamente en las matemáticas, sino también en la física y donde ellos consideren que se debe aplicar.

Idea # 3

La pregunta tres dice que, si pudieras utilizar esta unidad didáctica como recurso dentro de las clases, cuáles son los elementos primordiales?

Bueno, si yo utilizara la unidad didáctica sobre radianes en mi clase, me enfocaría en la conexión práctica del concepto, en la visualización gráfica y en el aprendizaje con la decorativa. Es importante, pues, reflexionar en estos tres aspectos para que el estudiante pueda tener un buen aprendizaje y además reflexionaría sobre mi práctica docente para así asegurarme de que mis estudiantes no.

Así asegurarme de que mis estudiantes no sólo compren a los radianes desde la perspectiva matemática, sino también que desarrollen habilidades más amplias con la capacidad de aplicar conocimientos en contextos reales, como trabajar también en equipo y sobre su propio

proceso de aprendizaje. Que ellos se autoevaluaran así haría que la enseñanza de los radianes fuera más efectiva, dinámica y relevante.

Idea # 4

La pregunta número cuatro dice que si considero que esta propuesta de unidad didáctica como herramienta es eficaz la reflexión para movilizar competencias profesionales y profesores de matemática.

Yo considero que esta unidad sobre radianes es una excelente herramienta para movilizar las competencias profesionales y los profes de matemáticas, tanto en formación como los que ya estamos ejerciendo. No solamente permite trabajar el contenido matemático de manera efectiva, sino que también ofrece oportunidades de reflexión sobre la práctica pedagógica, el uso de tecnologías y la evaluación continua.

Hay que hacer una reflexión y esa reflexión es fundamental para el desarrollo profesional, ya que permite a los docentes cuestionar y mejorar sus estrategias, manteniendo una mentalidad de aprendizaje continuo y creando un ambiente en el aula que favorezca una comprensión profunda y significativa de sus conceptos.

Idea # 5

La última pregunta dice, ¿qué elementos consideran importantes de reconsiderar al momento de adaptar o rediseñar la unidad para su aplicación en un futuro?

Bueno, como lo esencial a tener en cuenta para reconsiderar algunos aspectos es la diversificación de enfoques de enseñanza, tener en cuenta todo el resto de enfoque de enseñanza para poder adaptar esa unidad. También revisar y acomodar la unidad de acuerdo a las necesidades del grupo, dependiendo de su grado, su edad, si son todos hombres, mujeres, bueno, tiene variedad.

La integración profunda de tecnología, se puede integrar las TICs, ahí podemos hacer una como para visualizar más cosas. La conexión con el mundo real, sí o sí, hacer aplicaciones de la cotidianidad y hacer como una estrategia de evaluación que permita revisar si el aprendizaje realmente se dio o no se dio a los estudiantes. Estas modificaciones pueden hacer que la unidad sea más efectiva, más inclusiva y pues más atractiva para ellos y para nosotros como docentes, garantizando así que los estudiantes puedan comprender bien el concepto de radian.

Aportes relevantes obtenidos

Después de recolectada la información brindada por cada uno de los docentes se proponen formular dos cuadros comparativos que permitan la recolección y aportes de las ideas aplicadas por parte del grupo focal con el objetivo de retroalimentar las propuesta de trabajo de grado realizada. Por lo anterior serán presentados a continuación los cuadros comparativos estructurando las respuestas de cada PF (Profesor Formador – Formación)

Cuadro comparativo de los aportes realizados por PF1 analizados desde : la aplicación del modelo local, Modelo de Van Hiele y las herramientas de formación docente

Aspectos resaltados	Aportaciones al Modelo Local de Análisis Didáctico	Aportes a considerar sobre desde la aplicación del Modelo de Van Hiele	Aportes de la Unidad Didáctica a la Formación de Profesores en Matemáticas
Claridad en la conexión temática	Considerar dentro del componente fenomenológico del análisis del contenido, otros contextos históricos que podrían ser relevantes al momento de proponer contextos de recreación histórica, por ejemplo el del calendario maya, el cual es cíclico y circular (Idea #1).	El retomar un contexto transversal permitirá construir una coherencia temática que permita identificar con mayor precisión el desarrollo de los niveles de razonamiento en los estudiantes según Van Hiele.	Reconsiderar en el diseño de las actividades de la unidad didáctica, la manera en la que se utiliza la información al momento de articular las tareas dentro de un mismo contexto histórico que sea significativo.
Uso de recursos audiovisuales	Tener en cuenta dentro de la implementación de los recursos, la duración del material audiovisual para ajustarse a la realidad (localidad) del modelo institucional. Este es un aporte directo al análisis instruccional, principalmente desde la perspectiva de los recursos usados. (Idea #2).	La reducción en la duración de los vídeos podría contribuir a una mejora en la absorción de la información por parte de los estudiantes, potenciando su uso dentro la fase de información o demás fases del modelo de Van Hiele. Este ajuste garantiza que los estudiantes puedan concentrarse en los elementos esenciales, favoreciendo la comprensión inicial necesaria para avanzar gradualmente en los niveles de razonamiento geométrico que plantea el modelo.	Fomentar el desarrollo de mecanismos más sofisticados de selección, permite al docente mejorar sus competencias al momento de orquestar y articular herramientas pedagógicas y recursos de distinto tipo.
Propuesta de contextos	Integrar desde los componentes curriculares y fenomenológicos del contenido, una indagación mayor sobre los contextos de aplicación del contenido, con el fin de articularlos en el diseño de actividades para brindar una mayor variedad de recursos de conceptualización del aprendizaje (Idea #3 e Idea #4).	Enriquecer los contextos desde donde se estructuran las actividades, permitirá un mejor desarrollo de las actividades brindando la posibilidad de aplicar una fase instruccional que garantice el alcance de los niveles de razonamiento escogidos para el progreso de los estudiantes de lo concreto a lo abstracto.	Promueve la creatividad la necesidad de investigación en los profesores formadores o en formación al momento de proponer propuestas de innovación curricular
Enfoque histórico-conceptual	La unidad permite por medio de la conceptualización histórica del radian, fomentar la reflexión y contextualización en las actividades propuestas (Idea #5 e Idea #6).	La conceptualización histórica es una propuesta muy importante de integrar y aprovechar desde la aplicación del modelo de Van Hiele, porque enriquece el uso de herramientas útiles al momento de construir las actividades y favorecer la transición de los niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele al fomentar la autonomía del estudiante en su proceso de aprendizaje	Promueve el desarrollo de habilidades pedagógicas en los docentes, como el diseño de actividades centradas en la investigación y reflexión crítica.
Matematización aplicada	Aplicar un análisis didáctico sobre herramientas de innovación curricular que considere integrar por medio de proyectos prácticos como la construcción de ruedas, permite conectar conceptos matemáticos con aplicaciones de la vida cotidiana (Idea #7 e Idea #8).	Las actividades prácticas como parte de las fases de orientación libre e integración pueden ser interesantes oportunidades que faciliten el avance entre los niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele.	Motivar a los futuros docentes a diseñar proyectos que integren la matematización con actividades prácticas y reales, enriqueciendo la enseñanza matemática en el aula.

Nota. Elaboración propia

Cuadro comparativo de los aportes realizados por PF2 analizados desde : la aplicación del modelo local, Modelo de Van Hiele y las herramientas de formación docente

Aspectos Resaltados	Aportaciones al Modelo Local de Análisis Didáctico	Aportes desde la Aplicación del Modelo de Van Hiele	Aportes a la Formación de Profesores en Matemáticas
Elementos clave para trabajar radian	Incorporar actividades con círculo unitario, conversión entre ángulos y radianes, y tareas interactivas para una comprensión visual y práctica del concepto.	Favorece niveles iniciales al conectar conceptos geométricos y trigonométricos a través de actividades visuales y prácticas.	Ayuda a diseñar actividades que integren teoría y práctica, logrando un aprendizaje significativo y contextualizado del concepto de radian.
Herramientas lúdicas y pedagógicas	Utilizar simulaciones, juegos interactivos y proyectos colaborativos para hacer más atractivo y eficaz el aprendizaje del radian.	Potencia niveles avanzados al incluir actividades dinámicas que promueven exploración y comprensión conceptual profunda.	Fomenta el uso de metodologías activas y tecnologías que enriquecen la enseñanza y mejoran la adaptación de recursos educativos.
Conexión práctica del concepto	Diseñar actividades aplicadas a contextos reales y fomentar la reflexión docente para garantizar una comprensión teórica y práctica del radian.	Integra visualización y contextualización práctica en las fases de exploración, facilitando la transición entre niveles del modelo de Van Hiele.	Estimula la reflexión sobre estrategias pedagógicas y el aprendizaje autónomo y colaborativo de los estudiantes.
Movilización de competencias docentes	Promover reflexión pedagógica continua, uso de tecnologías y evaluación efectiva para fortalecer la enseñanza y comprensión del radian.	Potencia el uso del modelo para analizar la progresión del razonamiento geométrico y mejorar su implementación en el aula.	Fortalece la capacidad crítica de los docentes para evaluar y mejorar estrategias, fomentando aprendizajes significativos en matemáticas.
Adaptación de la unidad didáctica	Diversificar enfoques, integrar TICs y conectar con la cotidianidad para hacer la unidad inclusiva y adaptada a las necesidades del grupo.	Mejora la adaptación de las fases del modelo de Van Hiele a las características de los estudiantes, facilitando su progreso en el razonamiento geométrico.	Impulsa flexibilidad y creatividad en los docentes al rediseñar recursos didácticos, fomentando aprendizajes inclusivos y prácticos en diversos contextos.

Anexo # 2.Descripción general de la prueba piloto aplicada

Aplicación de una prueba piloto sobre actividades de la unidad diseñada

Mediante el diseño de una unidad didáctica basada en la conceptualización y trabajo con el radián como objeto matemático, se pretende recolectar toda la información posible que permita la evaluación y retroalimentación de la puesta en marcha del modelo local de análisis didáctico estructurado en la propuesta de grado. Las actividades de la unidad han sido planeadas mediante la articulación de un cuerpo teórico de investigación construido mediante el modelo local de análisis didáctico en 4 categorías principales: análisis curricular, análisis de contenido, análisis contenido y análisis instruccional.

La aplicación de la prueba piloto se realizó en una institución educativa de la ciudad de Cali llamada “Centro Educativo Industrial Luis Madina” del sector del sur, en un barrio llamado Meléndez de la comuna 18. La aplicación de la prueba fue realizada en dos partes:

Aplicación 1: Fue realizada el 23 de Noviembre a las 10:30 de la mañana con dos estudiantes de grado décimo que se encontraba en fase de recuperaciones y nivelaciones. La docente a cargo de la asignatura la profesora Jackeline Valencia, facilitó la realización y aplicación de la actividad por parte del tesista. Lastimosamente por cuestiones de tiempo solo pudo ser aplicada la actividad # 2, la cual se consideró importante por ser una de las actividades que moviliza las estructuras geométricas que utiliza el radián para ser representado de forma cualitativa.

Aplicación 2

Fue realizada el 27 de Noviembre a las 11:30 de la mañana con una estudiante de grado

décimo que se encontraba en fase de recuperaciones y nivelaciones. La docente a cargo de la asignatura la profesora Jackeline Valencia, facilitó la realización y aplicación de la actividad por parte del tesista. Lastimosamente por cuestiones de tiempo solo pudo ser aplicada la actividad # 5, la cual se consideró importante por ser una de las actividades que moviliza las estructuras métricas y geométricas que utiliza el radián para ser representado de forma cuantitativa. Lo anterior está basado en la tabla 1 y 2 de la sección del análisis de contenido.

ACTIVIDADES REALIZADAS	TIEMPO DISPUESTO	FUNCIONES Y ENCARGADOS
1. Planificación: Se realizó una visita a la institución educativa escogida, consultando con los docentes sobre ¿Qué tipos de planeaciones tenían? ¿Cómo era el trabajo dispuesto con los estudiantes? Estos anexaron una unidad didáctica como parte de la prueba para la planeación y manejo de las actividades	2 semanas (19 de Noviembre al 1 de Diciembre del 2023)	Joan Sebastián Marín Munoz - Tesista
2. Diseño de la unidad Después de consultado el material, construido el modelo local de análisis didáctico por parte del tesista bajo la supervisión del docente director de tesis, se paso a la fase de diseño y producción de la unidad didáctica	4 meses (Del 1 de Mayo del 2024 al 30 de Septiembre del 2024)	Joan Sebastián Marín Munoz – Tesista Evelio Bedoya – Director de tesis Brayan Stuart Vernaza – Co director
3. Aplicación de la prueba piloto: La aplicación de la prueba piloto fue realizada justo después de la fase de diseño	Aplicación 1 Fecha: 23 de Noviembre del 2024	Joan Sebastián Marín Muñoz - Tesista

de la unidad, después de la fase de retroalimentación y evaluación de la unidad por parte del grupo focal escogido. Lastimosamente la realización de la prueba tuvo que realizarse en épocas de fin de año escolar por lo que solo hubo disponibilidad de estudiantes que se encontraban recuperando	Aplicación 2: 27 de Noviembre del 2024	
--	--	--

De los videos filmados, se decidió por escoger 2 episodios claves de cada vídeo los cuales serán señalados a continuación. Se decidió realizarlo de esta manera considerando que aquellos segmentos que fueran transcritos pudieran brindar información y oportunidad de análisis sobre aquellos momentos que se consideran relevantes para captar oportunidades de registro sobre momentos significativos de la matematización realizada por los estudiantes. Se considera importante revisar las estructuras propuestas por Alyami (2024) sobre la conceptualización y representación del radián por medio del concepto de precepto de Vinner & Talla (1981), documentación que se consideró relevante para observar el comportamiento de los estudiantes con respecto a los esquemas de representación del radián.

EPISODIO 1 Relación entre la longitud de arco y el radio	EPISODIO 2 Rotación del círculo y proporción cuantitativa entre arco y radio
00:00-11:01 Línea 1 a 101	12:00-26:32 Línea 102 a 206
El profesor presenta a los estudiantes el material de la actividad # 2 de la unidad, considerando importante el observar la manera en la que se relaciona la medida del arco subtendido por el ángulo central y la medida del radio de cada círculo. El profesor entrega círculos de diferente tamaño a cada <u>estudiantes</u> y estos empiezan a llenar la tabla anexa con la información pedida, necesitando de aplicar mediciones y manejo de herramientas como transportador, regla y lápiz.	En esta se realiza la actividad # 5, y es aquí cuando el profesor empieza a <u>constrastar</u> los conocimientos que adquirió la estudiante sobre los sistemas de medición angular y su relación con un sistema de equivalencias. La estudiante aplica dichos conocimientos para modelar un problema de rotación <u>pendanso</u> el círculo como una llanta y relacionando la cantidad de desplazamiento de acuerdo a la magnitud del arco trazada, y el ángulo como proporción entre la medida del arco y la medida del radio.

Anexo # 2.1 Transcripción:

Episodio 1: Relación entre la longitud de arco y el radio

Minuto 00:00 – 7:40

- 1. P:** Y les voy a pasar unos cordones de guía, que les van ayudar a identificar más o menos cuánto mide el radio
- 2. P:** (Se acerca a E1 y le pasa un cordón de un tamaño y luego se acerca a E2 y le pasa otro cordón de tamaño diferente) Mira esta cuerda si cabe en el radio (Le pasa a E1)
- 3. P:** Mira esta cuerda si cabe en el radio (Le pasa a E2) ¿Cuál sería el radio del círculo ahí?
- 4. E2:** Este (señala la línea vertical del medio)
- 5. P:** Entonces por ejemplo usted lo pone desde la mitad (El profesor ubica la cuerda en uno de los diámetros sobre la circunferencia de E2)
- 6. P:** Esa cuerquita ¿Cabe ahí?
- 7. E2:** Pues... (Mira al profesor con duda), si (a cómoda la cuerda) pero, este no...
- 8. P:** ¿Sobra un pedazo?
- 9. E2:** Si.
- 10. P:** Si le sobra un pedazo cortémosela (Se acerca por las tijeras)
- 11. P:** Aunque miremos si esa liniecita está igual en todos los lados, porque si esta diferente aquí (Señala uno de los diámetros para analizar si todos son congruentes)
- 12. P:** Bueno entonces miren lo que les voy a pasar a continuación, (El profesor explica la actividad número 2)
- 13. E2:** ¿Profe ponemos los cordones juntos? (La estudiante entiende que el ejercicio será repasar los segmentos perpendiculares que están dentro del círculo)
- 14. P:** Ah muy bien, No (se dirige hacia la estudiante para señalarle cómo ubicar los cordones)
La idea entonces sería que tú ahora con esos cordoncitos
- 15. P:** Puede ser arrancando desde aquí (Señala un vértice de intersección de uno de los diámetros del círculo)
- 16. P:** O puede ser arrancando desde cualquier ladito (Señala la intersección paralela desde el otro lado)

- 17. P:** Me digas ¿cuántos de estos cordones caben alrededor?
- 18. P:** Cómo que trates de llenar todo el bordecito del círculo con eso
- 19.E2:** (Asienta y toma los cordones) Ok
- 20. P:** Ustedes me van diciendo entonces, cuando ya lo tengan allí llenan esta tablita (Les muestra la tabla)
- 21. E2:** (Organiza las cuerdas y recubre todo el borde)
- 22. P:** ¿Cuántos te cupieron?
- 23. E2:** Seis y un borde..
- 24. P:** Seis y pedacit.. ¿Sí? (Mira el número de cuerdas)
- 25.E2:** Ummm.. (Señala el borde e indica el conteo de manera insegura)
- 26. P:** Un dos tres cuatro cinco y...(cuenta con los dedos) un poquito menos de seis.
- 27. E2:** Ujum... (Mira con inseguridad)
- 28. P:** Pero por qué será que nos queda menos que 6? (Mira extrañado) A ver!
- 29. P:** Acá si el radio mide igual (muestra por comparación el pedazo de cuerda)
- 30. P:** Y acá
- 31. E2:** Mide menos...
- 32. P:** Y acá también mide menos ¿De dónde saldrá ese extra que tiene? (Dice algo más que no se alcanza a percibir)
- 33. P:** A bueno pero entonces te dio más o menos cinco y algo...
- 34. P:** Si le fueras a colocar un número ¿Cuánto le pondrías? A ese numerito
- 35. E2:** No sé
- 36. P:** O sea tú dirías (señala las cuerdas utilizadas por la estudiante) organízalas otra vez.
- 37. E2:** Uno, dos, tres (Cuenta y va ubicando las cuerdas alrededor del círculo)
- 38. P:** Te da, uno, dos, tres, cuatro cinco y un pedazo de...
- 39. P:** Y no un sexto no, un poquito menos, ósea 5 punto algo (El profe cuenta mirando al alumno E2)
- 40. E2:** (Mira al profesor con inseguridad tomándose la cara)
- 41 P:** Coloca aquí cuanto mide el círculo, listo (Señala en la tabla)
- 42. P:** Y acá pones cuantas cuerdas te dio (señala la segunda fila de la tabla construida en la unidad)
- 43. E2:** El radio es 4,5

44. **P:** El radio sería este, ¿4,5? Entonces pones aquí 4,5 centímetros
45. **P:** Y acá pones cuantas cuerdas necesitaste
46. **E2:** Ujum, pongo 5 ¿y? (Mira al profesor para preguntarle)
47. **P:** Pones 5 exactas ¿y?, entonces esa sexta ¿cómo la pondríamos? porque no es una sexta sería un poquito menos.
48. **P:** Sería un dos tres cuatro cinco y entonces comparando ese pedazo que sobra que es más o menos ¿cuánto?
49. **P:** (Toma la cuerda y la ubica alrededor del perímetro de la circunferencia) Coloquemosla acá, este acá, Y cuando vas a colocar esa sexta, te quedaría como por aquí.
50. **P:** Si quieres hazle una rayita, hazle una rayita a esa cuerda con el lapicero
51. **E2:** (Hace la raya sobre la cuerda cómo el profesor lo indica)
52. **P:** Y entonces mídela con la regla, a ver cuánto te da esa rayita. Para establecer una proporcionalidad allí
53. **E2:** (Mide la rayita y dice con timidez y duda) Ehh tres?
54. **P:** Si te da 3 centímetros y la cuerda completa mide 4,5, uno podría decir que sería 5 cuerdas y ..Ummm (Piensa)
55. **E2:** ¿Tres? (Dice en voz muy baja)
55. **P:** Serían como los 2 tercios, ósea 5,66 cuerdas
56. **E2:** Cinco (Escribe)¿66?
57. **P:** Cuerdas
58. **E2:** Cuerdas perdón.
59. **P:** Si
60. **P:** Aquí viene, ah bueno la medida del pedazo faltante, bueno en este caso faltante no es, sino resultante, el pedazo que quedó allí.
61. **P:** Sería pues de 3 centímetros
62. **P:** Muy bien

Subsección 2: Relación entre el ángulo sexagesimal y las cantidades de radio

Minuto 8:21 – 11:01

En este episodio el profesor explica a los estudiantes presentes, la rejilla del cuadro donde se relacionan los ángulos en medida sexagesimal con la porción de los radios que toma del perímetro y a partir de este punto se logran identificar algunas deficiencias en la forma en la que

los estudiantes miden ángulos y sobre todo asignan medidas de forma nominal y aleatoria. El profesor empieza mostrando cómo en los círculos que se construyeron con anterioridad con los otros estudiantes, ahí unas líneas guías para identificar ángulos trascendentes (30,34,60,90,180,270 y 360) y luego con E2, principalmente, trata de empezar a buscar la relación

63. P: Estas liniecitas (señala los diámetros perpendiculares de la circunferencia) podría uno pensarlas que son cómo ángulos.

64. P: Porque, si uno pensará que esto es cómo un transportador, entonces, por ejemplo (empieza a señalar desde las marcas que se encuentran más juntas una de la otra las cuáles pueden pensarse cómo los ángulos del 30 al 90) este sería un ángulo, este sería otro y este sería otro.

65. P: ¿Cuál sería este por ejemplo? (Señala un ángulo de 90 grados inscrito en los segmentos perpendiculares) por ejemplo la L de acá

66. E2: ¿De todo?

67. P: Este de aquí, esta L

68. P: Por ejemplo, si este fuera un transportador (repinta la circunferencia con un lapicero la intersección de los diámetros perpendiculares) y yo quisiera aquí medir el ángulo.

69. P: ¿Cuál sería este por ejemplo? Este de aquí ¿Cuánto sería? (Repinta con un lapicero)

70. E2: De Ehhh...

71. P: Cuando a uno le ponen un ángulo que forma una L ¿Cuánto vale?

72. E2: 80? Ciento sesen ehh.. (Dice indeciso)

73. P: 180 sería todo este (Señala la semicircunferencia de la mitad del círculo)

74. P: Ah bueno, lo puedes sacar aquí de la deducción, si 180 es todo este (Vuelve y señala la figura anterior)

75. P: Noventa cuánto sería? (Se refiere a noventa grados)

76. E2: ¿Cómo?

77. P: ¿Si 180 es toda esta mitad, entonces cuál sería este?

78. E2: ¿La mitad de 180?

79. P: ¿y cuál es la mitad de 180?

80. E2: Ehh ummm

81. P: Noventa grados, ríe

82. P: Este sería de 90, y entonces si este es de 90 ¿este de cuánto sería? ¿este?

83. P: Piensa, si este es de 90 y esto de aquí son menores pues más o menos ¿Cuánto sería el valor allí?

84. E2: 190 (Afirma)

85. P: (Profesor explica la necesidad de utilizar transportador, pero los estudiantes no cuentan con uno por lo que el profesor accede a prestar uno, que está un poco dañado por lo que les habla de algunas consideraciones).

86. P: El profesor empieza a socializar con los estudiantes luego del uso del transportador, la manera en la que pueden empezar a llenar la sección que pide relacionar los radios que bordean el perímetro del círculo y el ángulo central dibujado. Por lo anterior se retoma el siguiente el episodio desde la siguiente sección:

87. P: Fíjense que ustedes allí llenaron el perímetro del círculo con radios.

88. P: Ahora la pregunta, a mí me dicen vea ¿número de radios por ángulo? Entonces este ángulo de 30, por ejemplo el ángulo de 30 que es esta liniecita ¿cuántos radios cogió?

89. P: Ósea ¿Cuántas de estas cuerdas cogió el ángulo de 30? ¿Qué piensan ustedes?

90. E1: Ehh, cero coma algo

91. P: Si cierto, menos de uno, entonces cero coma algo

92. P: ¿Cuántos radios de estos cogió el ángulo de 45 grados?

93. E1: También menos de 1, (repite)

94. P: Menos de 1 pero casi 1

95. E1: Ehh, sii

96. P: ¿Y el de 60?

97. E1: Un poquito más de uno

98. P: Ahh muy bien, eso es lo que necesito que llenen esta tabla.

99. P: ¿Cuál sería el de 90 entonces?, por ejemplo, este (Señala en la circunferencia) sería el de 90, ¿no?

100. P: (Mira a E2) Para poderlo llenar tendrías que volver a rellenar el bordecito de cuerdas

101. P: El de 180 sería este, el de 270 y el de 360. Y ya con esto terminamos.

EPISODIO 2: Rotación del círculo y proporción cuantitativa entre arco y radio

Minuto 12:00 – 16:23

En esta actividad se realiza una especie de resumen de lo trabajado con anterioridad en la

actividad # 1 y # 2 de la unidad, actividades las cuales son propuestas a manera de propuesta para el trabajo con el radián recopilando la información encontrada por medio de la aplicación del modelo local de análisis didáctico. La transcripción del episodio será realizada poniendo énfasis en aquellos momentos donde se pueden evidenciar interacciones significativas, que permitan obtener información relevante sobre la potencialidad de las herramientas desarrolladas y el alcance de los objetivos propuestos con respecto a la integración de las propiedades geométricas y los fenómenos del movimiento circular.

102. P: Mire ¿cuánto mide el radio de este círculo? ¿Cuánto le esta diciendo aquí que mide el radio de este círculo?

103. E3: 3 centímetros.

104. P: (Repite a manera de afirmación y compara el pedazo de lana) 3 centímetros. ¿Y cuánto le está diciendo aquí que mide el radio de este círculo?

105. E3: Cuatro punto cinco centímetros (le dice al profesor observando los datos registrados en la tabla anterior)

106. P: Muy bien. Si yo hago un camino que mida una vez el radio ¿Cuánto va a medir ese camino?

107. E3: ¿Una vez el radio? (Pregunta en tono desconcertado). El pi ¿No?

108. P: Buena pregunta. Otra vez (Señala la información que se tiene en la tabla)

109. P: ¿Cuánto mide el radio?

110. E3: tres, ehh...

111. P: Tres centímetros.

112. E3: Aja, tres centímetros

113. P: Si yo hago una raya, o un camino que mida una vez el radio ¿cuánto va a medir?

114. E3: Tres centímetros (Afirma con más seguridad)

115. P: Ahhh, excelente (asienta con satisfacción)

116. P: ¿Y aquí? (Señala en la tabla la información del segundo círculo que mide 4,5 de radio)

117.E3: Uy profe tengo que estudiar eso.. (Lo dice riéndose)

118. P: ¿Cuánto va a medir?

120. E3: Cuatro punto cinco centímetros (Se sigue riendo de manera nerviosa y mira la información anterior)

121. P: Exactamente. Entonces aquí por ejemplo tres (Señala la primera fila) y aquí por ejemplo

4,5 (señala la segunda fila)

122. P: Ahora sí haces un camino que no mida una vez el radio sino uno punto cinco veces el radio

123. E3: Que mida ¿uno punto cinco?, la mitad ¿no?

124. P: O sea una vez el radio más la mitad.

125. P: Entonces si una vez es tres, la mitad ¿seria?

126. E3: Uno punto cinco (Lo dice a la vez que el profesor, casi como siguiendo)

127. P: ¿Y tres más uno punto cinco?

128. E3: Cuatro punto cinco.

129. P: Es decir, un camino que mida 1,5 veces el radio, es decir, 4,5 (Señala la primera fila para ir ordenando la información.

130. E3: ¿Lo pongo o qué?

131. P: Entonces usted tiene que dibujar, si quiere en la hoja que le pasó o si quiere en el piso, como quiera

132. P: Unos caminos que midan esto (Señala los ítems de la tabla) uno, uno punto cinco, cuatro y seis veces.

133. P: Cuando dibuje los caminitos con la regla que le voy a prestar (hace un sonido con el silbido), usted va a rotar este circulito (muestra uno de los círculos que tiene recortados)

134. P: A partir de un punto cualquiera, que usted quiera, por ejemplo, este (señala una línea que hace parte de uno de los diámetros del círculo)

135. P: Va a rotar el circulito (Hace un silbido mostrando la rotación del círculo de forma perpendicular al papel, recorriendo el camino que había dibujado con la regla) y ahí donde termina hace una rayita

136. P: Supongamos pues que usted hizo una línea y lo va a rotar, usted lo rota así

137. E3: (Está experimentando con el círculo simulando lo mostrado por el profesor)

138. P: Y ahí donde termina marca.

139. P: Y usted me va a decir ¿Cuál es el ángulo que hizo en grados? entonces 60 grados, 80 grados, 70 grados.

140. E3: (Susurra) no voy a alcanzar

140. P: Y luego en radios (señala la tabla donde habían llenado la información anterior) en radios, ¿listo?

141. P: Cada vez que usted ponga ese circulito a rodar en ese camino (silba), usted por favor

marca en el circulito con un lapicero ese camino.

142. P: La marquita le hace la marquita (señala en el círculo el ejemplo hecho con anterioridad)

143. E3: ¿Profe no se quiere hacer al lado mío para yo hacerlo paso por paso?

Subcapítulo 2: Aportes de la estudiante E3 al llenar la tabla

Minuto : 18:25 – 24:15

Después de realizada la explicación por parte del docente, tomaremos registro de los aportes que brinde la estudiante sobre las dudas o inquietudes que demuestre la estudiante en su interacción con el docente para analizar las evidencias del desarrollo del pensamiento matemático con respecto a la actividad.

144. E3: Así ¿no? ¿Más? (La estudiante dibuja líneas paralelas sobre el papel, se anexan fotos)

145. P: Pero ojo, que el camino. Ya hiciste la liniecitas, ahora tienes que marcar el camino de esta medida (Señala la información de la tabla)

146. P: Dice que una vez tres, que el camino mide una vez el radio. Entonces como el radio de este pequeño es tres debo hacer una línea de tres.

147. E3: ¿Tres centímetros?

148. P: Tres centímetros, mide tres centímetros y lo repintas (Lo dice en tono de afirmación señalando la regla)

149. E3: ¿Desde el cero hasta el tres? (Lo dice señalando la ubicación de la regla)

150. P: Desde el cero hasta el tres, porque si lo haces desde el 1 mediría dos centímetros.

152. E3: Listo. Y le pongo tres centímetros, aja.

153. P: Ahora esta, entonces haz una línea ahora que mida 4,5.

154. E3: Ujum

155. P: Ahora una línea que mida 4 veces tres, ósea tres por cuatro

156. E3: Doce

157. P: Doce centímetros, y lo mides con la regla y así sucesivamente.

158. E3: En la otra...

159. P: En la otra rayita.

Es realiza una intervención poco relevante para la información que se desea obtener

160. E3: Ahora seis veces tres, ósea 18.

161. P: Yo te voy a ayudar con un giro y tú haces los demás.

SUB-CAPÍTULO 3: Registro de los giros y llenado de la tabla de la actividad # 4

162. P: Listo, entonces vamos a coger el circulito y vamos a girar con él.

163. E3: ¿El de 3 centímetros?

164. P: Si, entonces mira lo que vamos a hacer (muestra el círculo)

165. P: Desde aquí desde una marca (muestra la línea de uno de los diámetros de la circunferencia) puede ser esta ¿listo?

166. P: Puede ser aquí o puede ser aquí (muestra las marcas realizadas o marcadas por los diámetros de la circunferencia) donde tu quiera, peor que tengas como una referencia.

167. E3: Ujum.

168. P: En este caso a mí me parece lo más conveniente lo voy a voltear (se gira) es mejor de este lado porque allí ya están marcados los ángulos entonces no voy a necesitar el transportador allí.

169. P: Entonces yo voy a arrancar acá, aquí inicio el camino y voy a dar una rotación (silba)

170. P: Y fíjate (el profesor lo realiza con este acento) que el radio se cumple, despuesito de este ángulo de 45 osea por aquí.

171. P: Es decir, que para hacer una vuelta o una rotación de una vez el radio necesito un ángulo de más de 45.

172. P: Entonces aquí donde yo lo voy a hacer usted hace la marquita, exactamente allí donde termina.

173. E3: ¿Aquí?

174. P: No mira ahí donde está la marquita, márkuelo sobre el círculo allí donde termino, sobre el circulito. Es decir, allí arriba

175. E3: ¿Aquí? (Hace una línea sobre el papel y no sobre el círculo)

176. P: No sobre el circulito.

177. E3: (Realiza el dibujo sobre la circunferencia)

178. P: Eso, entonces ya tenemos esa marquita (muestra el círculo con las marcas realizadas)

179. P: ¿Que vamos a hacer a continuación? Nos toca medir este ángulo con el transportador (Toma un transportador un poco roto que tenían a la mano)

180. P: Nos va a indicar que aquí y acá, ¿cómo sabemos que este es de 180?

181. P: Yo lo pongo acá, lo acómodo un poco para que me encaje.

182. P: Y empiezo 10, 20, 30, 40, 50 y un poquitico más

183. E3: ¿Cómo 62?

184. P: No, más de 50 pero menos de 60, (vuelve y rectifica contando el profesor la medida en base al transportador)

185. P: 10, 20, 30, 40, 50 y un poquitico más de 55, porque 55 esta acá. Coloquémosle 58.

186. E3: Ujum

187. P: Entonces ¿qué debo colocar acá en la tabla?

188. P: El ángulo recorrido en grados que fue de 58grados aproximadamente. Pero en radios ¿cuánto fue? Pues una vez

189. P: ¿Cuántos radios recorrió esto para poder llegar? Un radio, ¿listo?

190 E3: ¿Y la altura de la rueda?

El profesor procede a explicarle a la estudiante la medición de la altura de la posición de la rueda como la distancia desde la marca del giro, de forma perpendicular hasta el diámetro de la rueda. La estudiante responde de manera asertiva por lo que saltaremos un poco hasta el minuto **12,37**

191. E3: Profe, entonces digamos, espere un momentico (la estudiante reclama que el profesor se está moviendo en dirección a la mesa o escritorio)

192. E3: Empiezo desde aquí ¿no?, el camino ¿desde aquí? (Señala en el círculo en la parte donde el profe le había indicado antes y ubica el circulo sobre el papel en el pupitre)

193. P: Eso, empiézalo desde allí porque este es un punto de referencia. Entonces si siempre lo pones desde acá va a ser mucho más fácil poder contar ¿no?

194. P: Bueno aquí sería más fácil medirlo hacia el contrario, porque es más fácil hacerlo rotar así.

195. E3: Entonces si por ejemplo estoy aquí (toma el círculo y lo ubica sobre el papel)

196. P: Allí estas en 70

197. E3: Aquí estoy en 70. Y tengo que llegar hasta cómo por aquí (toma el transportador y empieza a hacer un pequeño arco) sería 75 ¿por ahí?

198. P: Sería...espérate un momentico

199. P: Volvámoslo a hacer el camino, que aquí hay un detallito

200. P: entonces tú arrancas aquí (toma el círculo vuelve y lo ubica y luego mide con el transportador), das el giro (silba)

201. P: Y llegas cómo acá, ¿cierto?, y ahí te marca (vuelve y traza la línea)

202. P: Entonces según esto, ojo a la manera en la que lo cuentas (ubica el transportador y empieza a explicar a la estudiante como realizar la medición de manera adecuada)

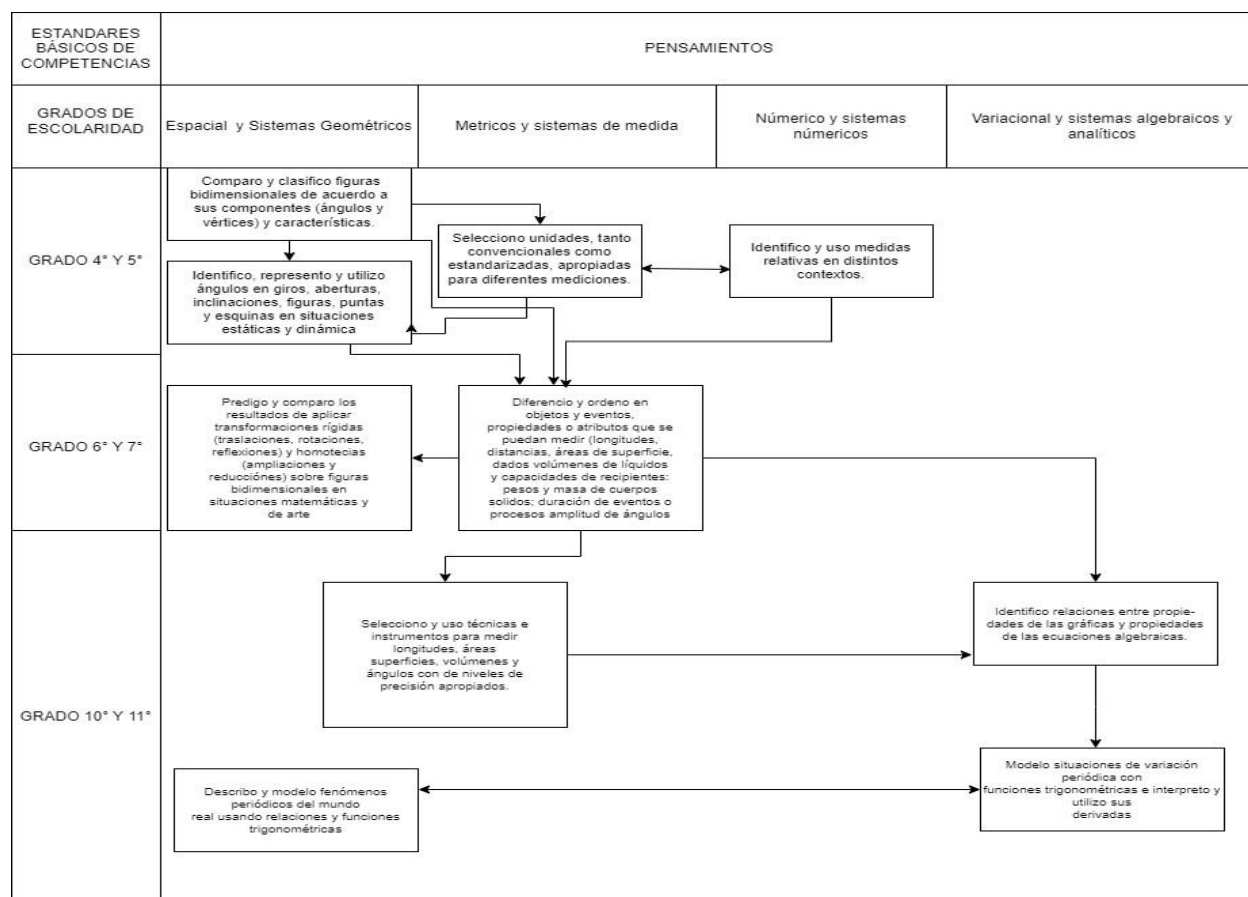
203. P: Tienes que poner esto aquí donde dice 180, aquí en toda la mitacita así (muestra la guía del transportador)

204. P: Y esta liniecita que esta por allá, que se ve así a lo lejos se alinea. Entonces empieza a rotar 10, 20...

205. P: ¿Desde dónde? ¿desde aquí o desde acá? (señala la guía indicada por el docente pero también una guía perpendicular que no está sobre el papel.

206. P: Desde acá ósea, 10 (Le repite la guía) 20, 30, 40, 50, 70, 80, ahh 80 grados te da.

Anexo 3. Transversalidad de los estándares competencias trabajadas desde el currículo del MEN para la conceptualización del radián



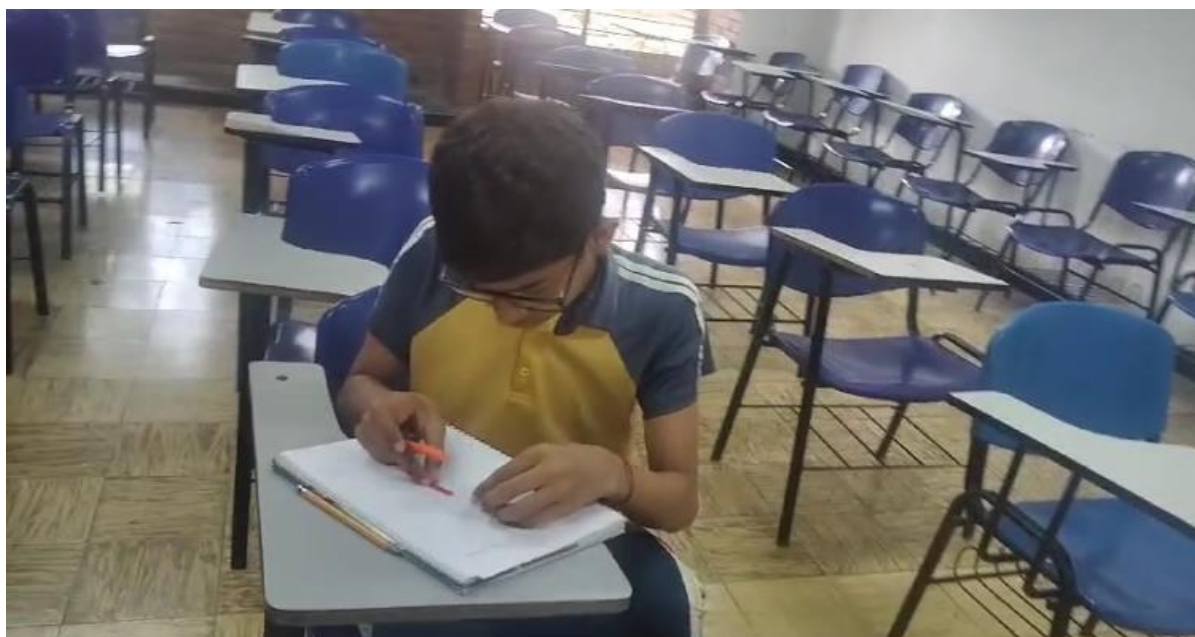
MEN (Ministerio de educación nacional) Estándares básicos de competencias. Elaboración propia

Anexo # 4. Evidencias de la aplicación de la prueba piloto

1. Aplicación de la actividad # 2



2. Realización de la actividad # 2 por parte de E2



3. Ubicación del transportador



4. Tabla de la actividad # 2 realizada por E3 en casa

Tamaño	Radio del Círculo	Número de Cuerdas que Completan el Perímetro	Medida del Radio de Círculo Subyacente
Grande	Radio de 10cm	6 Pedacitos	Radio Subyacente 5cm
Mediano	Radio de 6cm	6 Pedacitos	Radio Subyacente 3cm
Pequeño	Radio de 4cm	6 Pedacitos	No se necesita
Conclusiones			

Círculo pequeño Ángulo de 30° $\frac{2.5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0.62$ Ángulo de 45° $\frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0.5$ Ángulo de 60° $\frac{1.5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0.375$ Ángulo de 90° $\frac{1 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0.25$ Ángulo de 180° $\frac{5.5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 1.375$ Ángulo de 270° $\frac{5.5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 1.375$ Círculo Mediano Ángulo de 30° $\frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0.5$	Ángulo de 45° $\frac{1.5 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0.25$ Ángulo de 60° $\frac{1.5 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0.25$ Ángulo de 90° $\frac{1 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0.166$ Ángulo de 180° $\frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 1.33$ Ángulo de 270° $\frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 1.33$ Círculo Grande Ángulo de 30° $\frac{5.5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.55$ Ángulo de 45° $\frac{2.5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.25$
--	---

5. Tabla realizada por E1 Y E2

Radio del círculo	Número de cuerdas del polígono	Medida del pedazo faltante	Número de radios por ángulo						
			30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
4,5 cm	5,66 cuerdas	3 cm	0,44	0,7	1,2	1,5	3,1	3,8	5,66
3 cm	6 cuerdas	0 cm	0,48	0,7	1,4	1,5	3,5	4,2	6

Anexo 5. Consentimientos firmados para la grabación de la prueba piloto



FORMATO DE AUTORIZACIÓN DE TRATAMIENTO DE DATOS PERSONALES

Dando cumplimiento a lo dispuesto en la ley 1581 de 2012, “Por el cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales” y de conformidad con lo señalado en el Decreto 1377 de 2013, con la firma de este documento manifiesto que he sido informado de lo siguiente:

1. Joan Sebastián Marín Muñoz identificado con cédula 1144098879 actuará como responsable del tratamiento de datos personales de los cuales soy titular y que, conjunta o separadamente podrá recolectar, usar y tratar mis datos personales conforme a la política de tratamiento de datos personales.
2. Que me ha sido informada la(s) finalidad (es) de la recolección de los datos personales, la cual consiste en actividades realizadas con el fin de complementar el trabajo de grado de Joan Sebastián Marín Muñoz, el cual realiza en torno a la conceptualización del objeto radián, como una estrategia formativa en el desarrollo del pensamiento geométrico mediante la aplicación de una construcción de un modelo local de análisis didáctico que integra la teoría de los Van Hiele, como método instruccional para el diseño y construcción de las actividades
3. Es de carácter facultativo o voluntario responder preguntas que versen sobre datos sensibles o sobre menores de edad.
4. Mis derechos como titular de los datos son previstos en la constitución y la ley, especialmente el derecho a conocer, actualizar, rectificar y suprimir mi información personal, así como el derecho a revocar el consentimiento otorgado para el tratamiento de datos personales.
5. Mediante el correo joan.marin@correounivalle.edu.co podré radicar cualquier tipo de requerimiento relacionado con el tratamiento de mis datos personales.
6. Joan Sebastián Marín Muñoz garantizará la confidencialidad, libertad, seguridad, veracidad, transparencia, acceso y circulación restringida de mis datos y se reservará el derecho de modificar su política de tratamiento de datos personales en cualquier momento.
7. Teniendo en cuenta lo anterior, autorizo de manera voluntaria, previa, explícita, informada e inequívoca a Joan Sebastián Marín Muñoz para tratar mis datos personales, fotografías y videos de acuerdo con su política de tratamiento de datos personales para los fines relacionados con su objeto.
8. La información obtenida para el tratamiento de mis datos personales la he suministrado de forma voluntaria y es verídica. Se firma en la ciudad de _____, a los ____ días del mes de _____ del año ____.

Firma _____

Nombre _____

Identificación _____

Contacto _____