



Estrategia para fortalecer el razonamiento espacial mediante el uso de materiales manipulativos y GeoGebra

Holmes Alexis Sabogal Marín

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas y Física
Santiago de Cali
2023



Estrategia para fortalecer el razonamiento espacial mediante el uso de materiales manipulativos y GeoGebra

Holmes Alexis Sabogal Marín

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director

Dr. Diego Garzón Castro

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

Santiago de Cali

2023

Resumen

En este trabajo de grado se caracteriza una progresión de aprendizaje como estrategia para transformar poliedros regulares convexos a polígonos esto mediante la integración de doblado de papel y GeoGebra 3D. Se utilizaron como referentes el constructo de progresión de aprendizaje tal como lo plantea Battista 2011, entendida una progresión de aprendizaje como las formas de razonamiento de los estudiantes sobre un tema, independientemente del plan de estudios; enfocada en comprender y reaccionar a las estructuras cognitivas actuales de los estudiantes. En este apartado se analizó la forma de razonar de 2 estudiantes de noveno grado en cuanto a la comprensión de propiedades, características y teorema de Euler cuando se transforman poliedros regulares convexos a polígonos, de acuerdo a los niveles de razonamiento que propone el modelo geométrico de Van Hiele.

Para la recolección de la información se realizaron 4 sesiones de clase en el liceo sagrado corazón de Jesús de 2 horas cada una, con el diseño y adaptación de una progresión de aprendizaje, guías escritas, matriz de análisis y observaciones, estas herramientas junto con una metodología de investigación cualitativa permitieron la recolección de todo lo necesario para analizar los aspectos asociados con el fortalecimiento del razonamiento espacial.

Dicha investigación se desarrolló en 4 etapas: diseño y adaptación de una progresión de aprendizaje, implementación de la progresión de aprendizaje a dos estudiantes del grado noveno, descripción de la progresión de aprendizaje realizada por los dos estudiantes y por último, el análisis de la progresión de aprendizaje.

Las estudiantes del grado noveno mostraron un avance en el fortalecimiento del razonamiento espacial a medida que realizaban dichas situaciones, pero con algunas dificultades en situaciones de nivel superior. Por lo que, la instrucción futura debe de ayudar a comprender con exactitud las propiedades de los poliedros y comprender el teorema de Euler para algunos poliedros irregulares.

Palabras claves: Progresión de aprendizaje, razonamiento espacial, doblado de papel, GeoGebra 3D, poliedros y polígonos.

Abstract

This degree work sought to enhance the use of paper folding and GeoGebra 3D as a resource to strengthen spatial reasoning. The way of reasoning of 2 ninth grade students was analyzed in terms of the understanding of properties, characteristics and Euler's theorem when transforming convex regular polyhedra to polygons, according to the levels of reasoning proposed by Van Hiele's geometric model.

For the collection of the information, 4 class sessions were held at the Sacred Heart of Jesus High School for 2 hours each, with a learning progression design, written guides and observations, these tools together with a qualitative research methodology allowed the collection of everything necessary to analyze the aspects associated with the strengthening of spatial reasoning.

This research was developed in 4 stages: design and adaptation of a learning progression, implementation of the learning progression to two ninth grade students, description of the learning progression carried out by the two students and finally, the analysis of the learning progression.

The ninth-grade students showed progress in strengthening spatial reasoning as they performed such situations, but with some difficulties in higher level situations. Therefore, future instruction should help them to accurately understand the properties of polyhedra and to understand Euler's theorem for some irregular polyhedra.

Key words: Learning progression, spatial reasoning, paper folding, GeoGebra 3D, polyhedra and polygons.

Tabla de Contenido

Resumen	3
Abstract.....	4
Índice de Figuras	8
Índice de Tablas.....	11
Índice de Anexos	12
1. Contextualización del Problema	13
1.1. Planteamiento del problema.....	16
1.2. Objetivos.....	16
1.2.1 Objetivo General.....	17
1.2.2 Objetivos específicos.....	17
2. Antecedentes	18
3. Justificación.....	22
4. Marco Teórico	25
4.1 Referentes Matemáticos	25
4.1.1 Conceptos matemáticos de los poliedros.....	25
4.1.2 Poliedros Regulares Convexos o Sólidos Platónicos.....	27
4.1.3 Teorema de Euler	28
4.1.4 Geometría origámica	30
4.2 Referentes didácticos y referentes curriculares	32
4.2.1 Progresión de aprendizaje (LP)	32
4.2.2 Tipos de niveles y jerarquías	33

4.2.3	La vista CBA de aprendizaje e instrucción	34
4.2.4	Evaluación y enseñanza apoyada en los CBA: niveles, progresiones, trayectorias y perfiles.....	35
4.3	Referentes Cognitivos.....	36
4.3.1	Razonamiento espacial	37
4.3.2	Niveles de Razonamiento de Van Hiele.....	38
4.3.3	Fases de aprendizaje del modelo de razonamiento de Van Hiele.....	39
4.3.4	Enfoque Instrumental.....	41
5.	Metodología	43
5.1	Estudio de casos y participantes.....	43
5.2	Instrumentos y Recolección de Información.....	44
5.2.1.1	Observación directa.....	44
5.2.1.2	Guías Escritas.....	45
5.2.1.3	Entrevista semiestructurada.....	45
5.2.1.4	Matriz para el análisis.....	45
5.3	Experimento de enseñanza.....	46
5.3.1	Preparación del experimento	48
5.3.1.1	Niveles de sofisticación para el diseño de la progresión de aprendizaje.....	48
5.3.1.2	Caracterización de los niveles de sofisticación	52
5.3.2	Experimentación y análisis preliminar	52
5.3.3	Análisis y resultados	56
5.3.3.1	Análisis del nivel de razonamiento de Sofía	57
5.3.3.1.1	Nivel de razonamiento I	57
5.3.3.1.2	Nivel de razonamiento II	61

	5.3.3.1.3 Nivel de razonamiento III	66
	5.3.3.2 Análisis del nivel de razonamiento Laura.....	68
	5.3.3.2.1 Nivel de razonamiento I	69
	5.3.3.2.2 Nivel de razonamiento II.....	74
	5.3.3.2.3 Nivel de razonamiento III	80
6.	Conclusiones.....	84
7.	Referencias	87
8.	Anexos	91

Índice de Figuras

Figura 1 Poliedro convexo y poliedro no convexo	26
Figura 2 Ángulo diedro.....	26
Figura 3 Angulo poliedro	27
Figura 4 Los cinco sólidos platónicos.....	28
Figura 5 Instrumentalización-instrumentación	42
Figura 6 Progresión de aprendizaje de Sofia	53
Figura 7 Progresión de aprendizaje realizada por Laura	54
Figura 8 Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento I Sofia.....	57
Figura 9 Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento I Sofia.....	58
Figura 10 Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento I Sofia.....	58
Figura 11 Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento I Sofia.....	59
Figura 12 Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento I Sofia.....	60
Figura 13 Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento II Sofia.....	61
Figura 14 Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento II Sofia.....	61
Figura 15 Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento II Sofia.....	63
Figura 16 Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento II Sofia	64
Figura 17 Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento II Sofia.....	65
Figura 18 Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento III Sofia.....	66
Figura 19 Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento III Sofia.....	67
Figura 20 Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento III Sofia.....	68
Figura 21 Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento I Laura.....	69

Figura 22 Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento I Laura.....	70
Figura 23 Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento I Laura.....	71
Figura 24 Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento I Laura.....	72
Figura 25 Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento I Laura.....	73
Figura 26 Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento II Laura.....	74
Figura 27 Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento II Laura.....	75
Figura 28 Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento II Laura.....	76
Figura 29 Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento II Laura.....	77
Figura 30 Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento II Laura.....	79
Figura 31 Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento III Laura.....	80
Figura 32 Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento III Laura.....	81
Figura 33 Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento III Laura.....	82
Figura 34 El prisma hexagonal.....	91
Figura 35 Macro proposición del cuadrado en GeoGebra	92
Figura 36 pirámide regular GeoGebra 3D	93
Figura 37 Propiedades del doblado de papel	94
Figura 38 El Cubo o Hexaedro	95
Figura 39 Tetraedro en GeoGebra 3D	96
Figura 40 Tetraedro en Origami	96
Figura 41 Poliedros regulares e irregulares.....	97
Figura 42 Poliedro en GeoGebra	98
Figura 43 Hexamino y construcción del Dodecaedro	99
Figura 44 Hexamino de un poliedro en origami	100
Figura 45 Hexaedro y desarrollo plano en GeoGebra 3D.....	100

Figura 46 Algunos poliedros en origami y GeoGebra 3D	101
Figura 47 Hexaminos poliedros regulares convexos	102
Figura 48 Hexaminos poliedros irregulares	103
Figura 49 Poliedros regulares convexos	104
Figura 50 Poliedros irregulares cóncavos	105
Figura 51 Algunos poliedros regulares convexos	105
Figura 52 Los sólidos platónicos	106
Figura 53 Poliedros en GeoGebra 3D	107

Índice de Tablas

Tabla 1	Vértices, Aristas y Caras de algunos Poliedros	29
Tabla 2	poliedros formados a partir de la formula de Euler	30
Tabla 3	Preparación del experimento de enseñanza	47
Tabla 4	Niveles de sofisticación	49
Tabla 5	Poliedros regulares	101
Tabla 6	Diferencia y similitudes de los poliedros	103
Tabla 7	El teorema de Euler.....	107
Tabla 8	Teorema de Euler con algunos poliedros irregulares.....	107

Índice de Anexos

Anexo A Progresión de aprendizaje	91
Anexo B Matriz de análisis	109

1. Contextualización del Problema

La enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel; en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos; las clases de geometría generalmente son dictadas de manera tradicional, razón por la cual, surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla. En este sentido, el educador tiene la obligación de buscar e implementar herramientas que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. (Goncalves, 2006). para ello en este proyecto se tendrá en cuenta los materiales manipulativos y los recursos tecnológicos, con el fin de crear un conjunto de estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Las representaciones juegan un papel importante dentro de la geometría espacial, puesto que incentiva al estudiante a explorar, construir, manipular, reflexionar, transformar, etc. Por otro lado, una mala percepción puede generar dificultades en los alumnos y como resultado transmitir conceptos erróneos. Según Gutiérrez (1998):

El problema está presente siempre que tenemos que representar estructuras u objetos geométricos tridimensionales mediante figuras planas, cosa inevitable mientras la enseñanza se siga basando, casi exclusivamente, en libros de texto, pizarra y libretas de los estudiantes. Por lo tanto, la elección de un buen modelo de representación plana de sólidos es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial. (p.194)

El estudio de los sólidos, en este caso los poliedros regulares convexos permiten al alumno una perspectiva amplia en el campo de lo tridimensional y en lo que alude a

representaciones en el espacio, por ende, se puede dibujar un dodecaedro sobre el plano (papel, tablero), pero es necesario que el alumno esboce ciertas habilidades que le permitan interpretar la representación y el objeto tridimensional. Entre estas habilidades está el razonamiento espacial, según Battista (2007), quien manifiesta que el razonamiento espacial, es la capacidad de; ver, examinar y reflexionar objetos, direccionando al sujeto a identificar y dimensionar imágenes, relaciones y transformaciones espaciales, enfocado al pensamiento geométrico. Según los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006):

La apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico requiere el estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos sólidos, es decir, caras, bordes y vértices, en donde se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones. (p.62)

Dado que la geometría se enseña de una forma estática, una de las propuestas que establece el Ministerio de Educación (2006), tiene que ver con trabajar la geometría desde una perspectiva activa, como alternativa para restablecer el estudio del pensamiento geométrico como herramienta de exploración y representación del espacio. En particular, se requiere el uso de herramientas que permitan incorporar actividades exploratorias y manipulativas de los objetos en distintas dimensiones, surgiendo así, la necesidad de recrear nuevas estrategias y metodologías para la enseñanza de ella, creando nuevos ambientes de aprendizaje, que permitan dominar el pensamiento espacial, dando paso al desarrollo de habilidades cognitivas que fortalezcan el razonamiento espacial.

En este sentido, la cuestión es incorporar actividades mediante entornos de aprendizaje basados en el uso de materiales manipulativos y aplicaciones en geometría dinámica 3-

dimensional para la construcción del razonamiento espacial en los estudiantes. Por ende, se ha venido observando la dificultad que tienen los estudiantes al momento de representar objetos tridimensionales mediante figuras planas, por ello se plantea una progresión de aprendizaje como estrategia para el desarrollo del razonamiento espacial en los estudiantes de grado noveno, mediante la transformación de poliedros regulares convexos a polígonos.

Según el Consejo Nacional de Investigación (2007, como se cita en Battista, 2011) "Las progresiones del aprendizaje son descripciones de las formas sucesivamente más sofisticadas de pensar sobre un tema que pueden seguirse entre sí a medida que los niños aprenden e investigan un tema". (p.214). Si bien, en la progresión de aprendizaje se incorporan recursos como; el doblado de papel y GeoGebra 3D, creando un constructo de artefactos potenciales para el desarrollo de los objetivos propuestos en esta investigación, puesto que el doblado de papel puede convertirse en una herramienta eficaz para la enseñanza de la geometría.

El uso de las herramientas tecnológicas ha dado un giro significativo en el proceso de aprendizaje, en este caso de la geometría, ya que van enfocadas a la visualización, exploración y construcción de figuras geométricas fortaleciendo de forma intuitiva y motivadora a los estudiantes. En particular, el AGD GeoGebra 3D es un programa que permite el estudio de propiedades geométricas en el espacio tridimensional y en el plano si así lo requiere, permitiendo al estudiante explorar, construir y transformar las figuras geométricas en diferentes dimensiones.

Además, GeoGebra 3D es un Ambiente de Geometría Dinámica con herramientas como el arrastre, esta permite visualizar las figuras geométricas desde diferentes ángulos proporcionando el razonamiento espacial de los estudiantes y a partir de este construir estrategias para interpretar propiedades de figuras espaciales. De acuerdo con los estándares básicos de competencias en matemáticas, el uso de GeoGebra 3D o de cualquier software que permita el estudio de comportamientos y propiedades geométricas, da paso a los estudiantes en

todo nivel de escolaridad puedan tener la posibilidad de construir, conjeturar y verificar los resultados de las transformaciones de figuras en los distintos planos. (MEN, 2006).

Para la adaptación de la progresión de aprendizaje se abordará la temática de transformación de poliedros convexos a polígonos en un entorno dinámico, con doblado de papel y GeoGebra 3D. En resumen, las investigaciones de Diezmann y Lowrie (2009), Tzkaki e Ikononou (2009), Reinhold, Beutler y Merschmeyer (2014), en el campo de las capacidades espaciales exponen la existencia de un bajo desarrollo de las habilidades relacionadas con la orientación espacial, las relaciones espaciales y transformaciones, así como la comprensión de dimensiones y localidades. Sin embargo, las experiencias y configuraciones espaciales probablemente respaldaron el progreso de estas habilidades.

1.1. Planteamiento del problema

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, este proyecto se interesa por los entornos de enseñanza que ayuden a prevenir o evitar dichas dificultades para el desarrollo del razonamiento espacial. por lo tanto, se planteó la siguiente pregunta problema:

¿Qué caracteriza una progresión de aprendizaje como estrategia para transformar poliedros regulares convexos a polígonos, mediante la integración del doblado de papel y GeoGebra 3D para fortalecer el razonamiento espacial?

1.2. Objetivos

1.2.1 Objetivo General

- Caracterizar una progresión de aprendizaje en la que se transforman poliedros regulares convexos a polígonos, cuando se utilizan como recursos el doblado de papel y GeoGebra 3D para fortalecer el razonamiento espacial.

1.2.2 Objetivos específicos

- Fundamentar la adaptación del diseño de una progresión de aprendizaje en la que se transforman poliedros regulares convexos a polígonos, para fortalecer el razonamiento espacial de estudiantes de noveno grado.
- Implementar la progresión de aprendizaje en la clase con estudiantes de noveno grado.
- Analizar aspectos asociados con los niveles de razonamiento de Van Hiele.

2. Antecedentes

Ante la problemática propuesta en este trabajo de grado, se tomarán como antecedentes para su realización algunos trabajos de grado, posgrado y artículos que han abordado las temáticas del espacio con recursos manipulativos o virtuales, con la finalidad de enriquecer y aportar una base en la construcción de este proyecto de investigación.

Hernández, y Bastidas (2014), abordan la manera en que el uso complementario de materiales manipulativos, AGD y Cabri 3D, pueden ayudar a comprender las propiedades del cubo, para dar respuesta a lo anterior diseñaron una secuencia de situaciones didácticas como lo propone Brousseau (2007), se desarrollaron por medio de la metodología que plantea Artigue (1995) denominada *micro ingeniería didáctica*.

El propósito de la secuencia didáctica fue amplificar el conocimiento, en el cual los estudiantes generaron hipótesis, uno de los problemas que retomaron fue la relación entre la medida del área y perímetro de los hexaminos, en donde se llega a la conclusión que el perímetro de una figura es diferente pero su área permaneció siendo igual, de esta manera el estudiante empleó la regla como instrumento de medida para adquirir nuevos conocimientos o amplificarlos.

En los resultados de la investigación al momento de utilizar cada artefacto como los palillos y la plastilina los estudiantes construyen el sólido teniendo en cuenta las dimensiones del material sin poder modificar la medida, de igual manera con los hexaminos los estudiantes formaron los cubos teniendo en cuenta ciertas reglas para su construcción; mientras que Cabri 3D brindó una gran variedad de opciones para la construcción, como la modificación de las

construcciones, verificar y cambiar medidas, comprobar los cálculos hechos con el material manipulativo.

El uso de la plastilina, palillos y el papel, permitió la construcción de diferentes cubos, de esta manera se identificaron las reglas para formar un cubo dependiendo del plano y el hexamino, y al emplear Cabri 3D, se pudo constatar que los estudiantes descubrieron que para construir el cubo deben tener en cuenta los conceptos, como la forma de generar una recta dentro del plano en la cual está viviendo el sólido. Lo que le permitió realizar otras construcciones con conceptos matemáticos más abstractos.

Al momento de pasar del plano al espacio, los estudiantes aprendieron el concepto de hexamino, trabajaron y construyeron el cubo a partir de 35 hexaminós hechos en cartulina, los estudiantes realizaron conjeturas acerca de las reglas que debe cumplir los hexaminos, para formar un cubo, además sirvieron de referencia en el momento de emplear Cabri 3D, con esto llegaron a la conclusión que el uso complementario entre materiales manipulativos y el AGD Cabri 3D existe de manera espontánea.

Por otra parte, Campos y Joaquín (2013), reconocen las propiedades de los poliedros regulares con Cabri 3D, e identifican la importancia de su empleabilidad en estudiantes de básica primaria. Para ello, diseñaron y ejecutaron una secuencia didáctica para la enseñanza y reconocimiento de las propiedades de los poliedros regulares en Cabri 3D, con el fin servir a futuro como un recurso pedagógico al docente en el momento de abordar una clase de geometría.

En esta investigación se formuló la pregunta ¿Cuál es el papel de la mediación instrumental en el aprendizaje de las propiedades de los poliedros en un AGD como Cabri 3D?, que efectivamente tuvo un debido contexto y respuesta. A partir de este análisis, se determinó que la mediación instrumental otorgó herramientas necesarias para el aprendizaje de las

propiedades de los poliedros, puesto que por medio del AGD Cabri 3D, los estudiantes lograron mediar entre el saber y el artefacto, el cual brindó elementos visuales muy importantes para el reconocimiento de propiedades, es así como se puede afirmar que con la ayuda de la mediación instrumental el estudiante construyó un aprendizaje de manera agradable y lúdica, puesto que el AGD Cabri 3D ofrece elementos visuales altamente llamativos para los estudiantes, y de esta manera, se facilita la mejora en los niveles de desarrollo para el aprendizaje y apropiación de conceptos sobre formas geométricas.

Por otro lado, en esta investigación se evidenció la dificultad de los estudiantes al realizar un paso del espacio tridimensional o bidimensional, es decir, mientras en la pantalla reconocían cada figura, sus propiedades, al igual que sus vértices, caras y aristas, en un ámbito 3D, al hacer la representación (dibujo) en la hoja de trabajo los estudiantes manifiestan no poder hacer dicha figura como se veía en el monitor, algunos estudiantes calcaron las figuras de la pantalla.

De manera similar, Arcila, Bonilla, y Cardona (2013), en su trabajo de investigación partieron de una pregunta ¿Qué papel juegan las transformaciones de isometría en el plano en la solución de problemas de construcción geométrica en el espacio mediado por Cabri 3D? La investigación además tuvo como objetivo general contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la geometría en el espacio, mediante la elaboración de una propuesta alternativa para la enseñanza; partiendo de los conocimientos geométricos del alumno en el plano.

En las construcciones en Cabri 3D se observó que los alumnos partían de objetos geométricos básicos como puntos, segmentos, rectas y planos; sin considerar la posibilidad de utilizar otros artefactos, como los tridimensionales, que les permiten simplificar las construcciones en el espacio.

En la puesta en escena de la secuencia didáctica, se observó que las transformaciones de isometría solo aparecen al final de la secuencia como una estrategia para simplificar sus

procedimientos de construcción, aunque en algunas soluciones el uso de las transformaciones es muy reducido, pudieron apreciar una ligera intención de los alumnos por disminuir los pasos de su algoritmo de construcción.

3. Justificación

La presente investigación se enfocará en la caracterización de una progresión de aprendizaje en la que se transforman poliedros regulares convexos a polígonos, cuando se utilizan recursos como el doblado de papel y GeoGebra 3D para fortalecer el razonamiento espacial, esto se realizara con dos estudiantes del grado 9°, del colegio Liceo Sagrado Corazón De Jesús, debido a las necesidades que se han observado en el transcurso del tiempo, el cual requiere una implementación de materiales de apoyo para fortalecer dicho razonamiento espacial en la enseñanza de la geometría, así estos recursos en el aula forman un colectivo de elementos para el desarrollo de los conceptos del estudiante.

En la actualidad la geometría se enseña de una forma demasiado teórica dentro del aula, presentando dificultades en el proceso de aprendizaje y alejándose de la realidad, cuando esta nos ayuda a entender aspectos del contexto y matematización del espacio. Por ello, los docentes han tenido la necesidad de buscar nuevas alternativas para implementar recursos en donde los estudiantes encuentren la posibilidad de fortalecer el desarrollo del razonamiento espacial, estas estrategias se pueden incorporar mediante materiales manipulativos y programas dinámicos, así como indagar en diferentes alternativas para que los estudiantes se apropien de los conceptos geométricos involucrados en dichas actividades.

Teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, el MEN (2006), plantea que el uso de los recursos didácticos como materiales manipulativos y los AGD, son fundamentales desde el punto de vista de la apropiación conceptual, elemento imprescindible para garantizar el desarrollo del estudiante en el área de matemáticas. En relación con Hernández y Bastidas, (2014) quienes manifiestan que, estos recursos permiten diferentes representaciones y una variedad de opciones para la adquisición de los conceptos geométricos

propuestos en cada actividad, proporcionando a los estudiantes procesos de razonamiento geométrico.

Según Alcaide (2016), si los estudiantes parten de una figura básica, usan materiales manipulativos y es orientado de manera adecuada a la transición del AGD descubre, explora y combina las diferentes formas geométricas creadas por él mismo, esto facilita el dominio de su estructura y conceptos. Por lo anterior, el uso de los recursos (GeoGebra 3D y el doblado de papel) en el aula, es lo que se pretende implementar para abordar las distintas dificultades que tiene los estudiantes, así se utilizaran los recursos adecuados con el fin, de obtener actividades dinámicas y un grato aprendizaje, para el fortalecimiento del razonamiento espacial, en este caso con los estudiantes del grado noveno.

Si bien, El AGD o artefacto GeoGebra 3D es un programa diseñado para trabajar en el espacio tridimensional, una de las características principales es la opción de arrastre que permite la manipulación de las figuras construidas o ya implementadas por el mismo, también la visualización desde diferentes perspectivas, ya que se puede manipular el punto de vista, desde cualquier parte del espacio y modificar la construcción de las figuras mediante el arrastre determinando si la construcción es válida o se deforma, es de resaltar que, si se deforma no cumple con las propiedades de la figura.

Por otro lado, el doblado de papel o origami puede convertirse en una herramienta útil para el docente, ya que es una herramienta didáctica que permite a los estudiantes acercarse de manera intuitiva a muchos conceptos geométricos implícitos en las actividades, comprendiendo con mayor facilidad. De acuerdo con Monsalve y Jaramillo (2003), la relación del origami con la matemática, es encontrar el desarrollo de los procesos cognitivos del estudiante para adquirir los conceptos, planteamiento y resolución de problemas enfocado en el razonamiento espacial.

Para incorporar estos recursos en conjunto con los objetivos propuestos en este trabajo, se diseñará una progresión de aprendizaje que permite la implementación de una secuencia de tareas, con el fin de proporcionar un entorno dinámico de aprendizaje, el cual la propicia un acercamiento a las propiedades y relaciones cuando se transforman poliedros regulares convexos a polígonos.

4. Marco Teórico

En este apartado se dan a conocer los referentes teóricos para el desarrollo de la investigación, construyendo a partir de las necesidades expuestas en el planteamiento del problema, para direccionar la investigación se tuvieron en cuenta cuatro aspectos, las cuales son: Referentes matemáticos, haciendo referencia a las propiedades, definiciones de los poliedros regulares convexos o sólidos Platónicos, teorema de Euler y la geometría origámica. La segunda son los referentes didácticos, planteando la adaptación de una progresión de aprendizaje propuesta por Battista (2011), y los referentes curriculares. La tercera los referentes cognitivos, enfocado en la fundamentación del desarrollo de razonamiento espacial y el modelo geométrico propuesto por Van Hiele. Por último, el cuarto referente, es el enfoque instrumental, para ellos se toma como referente la génesis instrumental de Flórez y Camargo (2019).

4.1 Referentes Matemáticos

En esta referente abarca los elementos matemáticos que dan cuenta de la transformación de los polígonos convexos a polígonos. En consecuencia, se tendrán en cuenta algunos elementos de la geometría y sus definiciones.

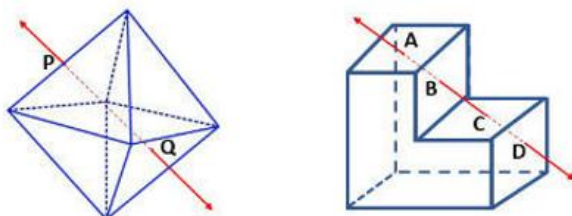
4.1.1 Conceptos matemáticos de los poliedros

Definición 1: La superficie de un poliedro también es llamada superficie poliédrica, y está conformada por un número finito de polígonos. Además, los polígonos que forman un poliedro (o delimitan un poliedro) se denominan caras del poliedro, los lados y vértices de las caras de un poliedro se denominan respectivamente bordes y vértices del poliedro. (Ruiz, 2003).

Definición 2: Un poliedro convexo no contiene abolladuras o hendiduras. Una de las formas de identificar si es un poliedro convexo, es trazar una recta no paralela a ninguna de sus caras, de tal manera que corte dos o más puntos. (Rodríguez, 2005).

Figura 1

Poliedro convexo y poliedro no convexo

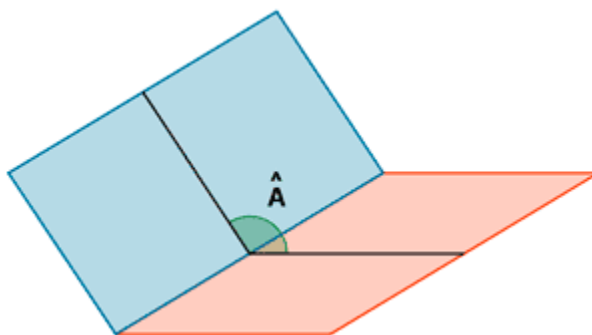


Nota. La figura muestra dos poliedros, uno convexo y otro cóncavo. Fuente de elaboración propia.

Definición 3: Dos semiplanos no coplanarios con la misma frontera forman un ángulo diedro. Los semiplanos se llaman caras del ángulo y la frontera común a las dos caras se llama arista.

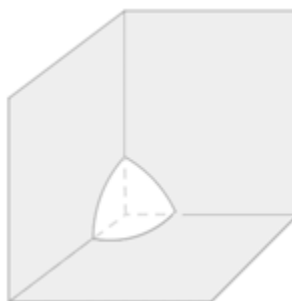
Figura 2

Ángulo diedro



Nota. La figura muestra ángulo diedro. Fuente de elaboración propia.

Definición 4: Un ángulo poliedro es la porción de espacio limitada por tres o más semiplanos que concurren en un punto llamado vértice.

Figura 3*Angulo poliedro*

Nota. La figura muestra Angulo poliedro. Fuente de elaboración propia.

Los ángulos poliedros se clasifican según el número de caras que concurran en el vértice, para el ángulo triedro concurren tres caras, para el ángulo tetraedro concurren cuatro caras, para el ángulo pentaedro concurren cinco caras y así sucesivamente.

4.1.2 Poliedros Regulares Convexos o Sólidos Platónicos

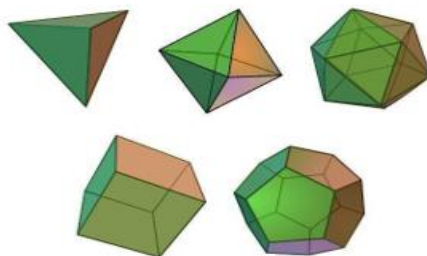
Son poliedros que tienen sus caras limitadas por polígonos regulares congruentes y donde todos sus ángulos poliedros son congruentes, un ejemplo de esta clase de poliedros es, los sólidos Platónicos, estos serán los únicos que se trabajarán para el desarrollo de la propuesta de investigación. En su interpretación sobre los Elementos de Euclides, el autor Romo (2005), logra identificar 18 proposiciones refiriéndose al estudio de poliedros regulares, a través de las cuales explica cómo se inscriben los poliedros regulares en una esfera. Adicionalmente, expone que solo se pueden construir cinco poliedros regulares los cuales son; el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, por lo tanto, se destaca que:

- Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.
- Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.

- Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.
- Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

Figura 4

Los cinco sólidos platónicos



Nota. La siguiente figura muestra los cinco sólidos platónicos. Fuente: (Arca, 2007).

Teorema 1: Se entiende que la suma de los ángulos de la cara que rodean cualquier vértice V (esquinas) de un poliedro convexo tiene que ser menor que 360° . De acuerdo con Alexandrov (2003), quien indica que:

La restricción de ángulo es cuando pegamos el perímetro de cualquier polígono P y así mismo formar un poliedro Q , nunca podemos pegar más de 360 grados alrededor de cualquier punto, ya que de lo contrario el poliedro Q resultante no sería convexo. (p.16)

4.1.3 Teorema de Euler

Teorema 2: En todo poliedro convexo, el número de vértices (V) más el número de caras (C) menos el número de aristas (A) es igual a 2.

$$V + C - A = 2$$

Tabla 1

Vértices, Aristas y Caras de algunos Poliedros

Poliedros	Vértices	Aristas	caras	V + C
Prisma triangular	6	9	5	11
Cubo	8	12	6	14
Prisma pentagonal	10	15	7	17
Tetraedro	4	6	4	8
Pirámide de base cuadrada	5	8	5	10
Pirámide pentagonal	6	10	6	12
Octaedro	6	12	8	14
Dodecaedro	20	30	12	32
Icosaedro	12	30	20	32

Nota. Datos tomados de Doug french, 2004, p.137

A continuación, la fórmula de Euler nos garantiza la existencia de los 5 solidos platónicos:

Sea Q un poliedro regular con V vértices, C caras y A aristas, cada cara tiene n lados y cada vértice de orden m^1 .

- $V + C - A = 2$, se cumple para poliedros convexos.
- $2A = mV$, pues de cada vértice salen m aristas, todos los vértices son del mismo orden y además cada arista pertenece a dos caras y por tanto se cuenta dos veces.
- $2A = nC$ dado que cada cara tiene n aristas y cada arista pertenece a dos caras, por tanto, se cuenta dos veces.

$$n.C = m.V$$

$$A = \frac{n.C}{2}, V = \frac{n.C}{m}$$

Reemplazando en la fórmula de Euler obtenemos:

$$C + \frac{n.C}{m} = \frac{n.C}{2} + 2$$

$$\frac{c.m + n.c}{m} = \frac{n.c + 4}{2}$$

$$2(m.C) + 2(n.C) = m(n.C) + 4.m$$

$$2(m.C) + 2(n.C) - m(n.C) = 4.m$$

$$C(2(m+n) - mn) = 4.m$$

$$C = \frac{4m}{2(m+n) - mn}$$

Como el mínimo número de lados de un polígono es 3 y el mínimo de aristas que concurren es 3 entonces le damos valores a m y n :

Tabla 2

poliedros formados a partir de la formula de Euler

CASOS	Valor n	Valor m	Valor C	poliedro
Caso 1	3	3	4	Tetraedro regular
Caso 2	3	4	8	Octaedro regular
Caso 3	3	5	20	Icosaedro regular
Caso 4	3	6	24/0	Imposible
Caso 5	4	3	6	Hexaedro regular o cubo
Caso 6	4	4	16/0	Imposible
Caso 7	5	3	12	Dodecaedro regular
Caso 8	5	4	-8	Imposible

Nota. Datos tomados a partir de la formula de Euler. Fuente de elaboracion propia.

4.1.4 Geometría origámica

El origami, es un arte que consiste en doblar el papel para crear diferentes figuras, no se permite cortar ni usar pegamento en el papel. En sus primeros años de práctica en Japón, se le

conocía como Kami (papel, Dios), debido al significado cercano que poseía el papel y los espíritus de los dioses, posteriormente se le designó Orikata (ejercicio de doblado), hasta que se adoptó por los vocablos Ori (doblar) y Kami formando la palabra con la que es conocido mundialmente. (Reyes, 2006).

Por esto, al hablar del doblado de papel como recurso para la enseñanza de la geometría y construcción del pensamiento espacial en los estudiantes, se tiene en cuenta la parte formal del doblado de papel, tal como son; los axiomas de gran importancia para el desarrollo de las actividades en el aula. Una de las propiedades de la geometría del doblado de papel es que una recta se puede representar mediante un pliegue o se puede tomar como un borde del papel. Por otro lado, no se puede representar un punto a no ser que se creen dos pliegues o dobleces en los cuales se intercepten dichos pliegues. (Ramírez y López, 2010).

En este sentido, se muestran los siete axiomas de la geometría origámica que identifica Valencia (2012, como se cita en Lang, 2003), en donde se demuestra que los siete axiomas garantizan un conjunto de propiedades y operaciones que definen la combinación entre puntos y dobleces.

1. Dados dos puntos p_1 y p_2 , se puede realizar un doblez que los conecte.
2. Dados dos puntos p_1 y p_2 , se puede doblar p_1 sobre p_2 .
3. Dados dos dobleces l_1 y l_2 , se puede doblar l_1 sobre l_2 .
4. Dado un punto p_1 y un doblez l_1 se puede hacer un doblez perpendicular a l_1 que pase por p_1 .
5. Dados dos puntos p_1 y p_2 y un doblez l se puede hacer un doblez que haga corresponder a p_1 con un punto de l y que pase por p_2 .
6. Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos dobleces l_1 y l_2 podemos hacer un doblez que haga corresponder a p_1 con un punto de l_1 y a p_2 con un punto de l_2 .

7. Dado un punto p y dos dobles l_1 y l_2 podemos hacer un doblez que coloca a p sobre l_1 y es perpendicular a l_2 .

De acuerdo con esto para realizar una construcción con doblado de papel, es necesario utilizar los axiomas anteriores, ya que son la base sólida para la implementación de este recurso en el aula.

4.2 Referentes didácticos y referentes curriculares

En la dimensión didáctica se abordarán los aspectos teóricos para el diseño de la progresión de aprendizaje, propuesta por Battista (2011), después se tomarán como referentes curriculares los estándares básicos de competencia y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA en adelante) para el grado noveno, encaminado a nuestro objetivo, que es fortalecer el razonamiento espacial mediante las transformaciones de poliedros regulares convexos a polígonos.

4.2.1 Progresión de aprendizaje (LP)

En la actualidad la enseñanza de la geometría presenta una serie de dificultades, a partir de esto se busca incorporar distintas herramientas para enfrentarlas, lo que se pretende es abordar el uso de recursos digitales, doblado de papel y Lp, con el fin de evitar las dificultades en el aprendizaje de la geometría. Según Gutiérrez (1998), el problema está siempre presente, cuando se representan estructuras u objetos geométricos tridimensionales mediante figuras planas. En ese orden de ideas, Battista (2011), entiende que “Una progresión de aprendizaje general describe las diversas formas de razonamiento de los estudiantes sobre un tema, independientemente del plan de estudios; Se enfoca en comprender y reaccionar a las estructuras cognitivas actuales de los estudiantes.”. (p.214).

Una diferencia crítica entre la definición de progresiones de aprendizaje y las trayectorias de aprendizaje es; las progresiones no incluyen descripciones de instrucción, por el contrario, las trayectorias si, ya que se derivan de su uso previsto y el consiguiente desarrollo. Si uno está diseñando y probando un plan de estudios, es más probable que desarrolle una trayectoria de aprendizaje, basada en la secuencia fija de tareas de aprendizaje. O, por el contrario, si está centrado en un sistema de evaluación formativa que se aplica a muchos planes de estudio, es más probable que desarrolle una progresión de aprendizaje basada en muchas tareas de evaluación, no en aquellas en secuencia fija. (Orts et al., 2018).

Desde el punto de vista del desarrollo curricular y la planificación de la enseñanza, las progresiones de aprendizaje tratan de determinar la ruta de ascenso más eficaz, (aquella para la cual la mayoría de los estudiantes tienen más probabilidades de éxito). Pero para satisfacer las necesidades de aprendizaje de los estudiantes de manera individual, debemos de precisar el estudio de forma focalizada y determinada en cada uno, en consecuencia, para ayudar a ascender de un momento a otro a un estudiante, es fundamental elegir las tareas que le brindan un soporte eficaz. Desde esta óptica, las progresiones de aprendizaje facilitan la medición de las competencias y capacidades cognitivas de los estudiantes. (Matus, 2011)

4.2.2 Tipos de niveles y jerarquías

Clements y Battista (1992), describieron la diferencia entre el uso que hacen los investigadores de los términos etapa y nivel de la siguiente manera. Una etapa, es un período de tiempo sustantivo en el que ocurre un tipo particular de cognición en una variedad de dominios (como en las etapas piagetianas del desarrollo cognitivo). En contraste, un nivel es un período de tiempo en el cual ocurre un tipo distinto de cognición para un dominio específico. Battista (2011) define que el nivel de sofisticación en el razonamiento de los estudiantes, es como un tipo

de cognición cualitativamente distinto que ocurre dentro de una jerarquía de niveles de cognición para un dominio específico.

Al considerar las jerarquías de niveles en las progresiones de aprendizaje es importante distinguir dos tipos de niveles. Los cuales consisten en; débil, es un criterio clasificado de manera superficial dentro del nivel jerárquico, por su poca fundamentación y estructura en la progresión. Y el fuerte, refiere a un conjunto superior dentro de la estructura jerárquica, que se encuentra basado y fundamentado por la investigación, es decir, que su método es más eficaz en el momento de implementar en las progresiones.

El autor Battista (2011), argumenta que, los estudiantes se ubican en los niveles de van Hiele, de acuerdo a las estructuras cognitivas y su procesamiento. Así mismo, los hace capaz de pensar sobre un tema de manera específica, es decir que, los estudiantes que se encuentran en el nivel inferior “nivel 1” dentro de la escala jerárquica de van Hiele, solo les permite pensar en formas geométricas, limitándolo en términos visuales de la vida cotidiana; y en cuanto al “nivel 2”, permite pensar en las propiedades de las figuras geométricas.

4.2.3 La vista CBA de aprendizaje e instrucción

Las siglas CBA refiere a (*Cognition Based Assessment*), la cual se enfoca en; evaluación basada en la cognición del estudiante. Según Battista (2011), el aprendizaje es un proceso de instrucción donde su base, parte de la estructuración y construcción de nuevos conocimientos, dándole sentido a diversas situaciones. Para el tema matemático, el desarrollo de las conceptualizaciones y el razonamiento en el o los estudiantes se cataloga como "niveles de sofisticación" cuando hablamos de niveles, es importante resaltar que son el centro del marco conceptual de CBA (Battista y Clements, 1992); (Cobb et al., 1991).

Uno de los modelos del CBA, explica y describe de manera detallada las pautas de lo que se debe y no hacer, las conceptualizaciones y el razonamiento de los estudiantes, por otro lado, cuando el estudiante no logra comprender la descripción detallada, se presentan obstáculos que obstruyen el proceso de aprendizaje, tanto para superar o pasar a otro nivel.

Cuando el estudiante logra pasar de un nivel a otro, es considerado como saltos de manera ascendente (aumentos observables), en un modelo de niveles, donde se evidencian el razonamiento de los estudiantes sobre dicho tema. Es decir que, un estudiante puede tener las capacidades para lograr un salto en la conceptualización y el razonamiento, ejemplo; de nivel N a nivel N+1, apropiándose de los conocimientos significativos en un contexto particular, mientras se trabaja un conjunto de situaciones evaluativas.

4.2.4 Evaluación y enseñanza apoyada en los CBA: niveles, progresiones, trayectorias y perfiles

Battista (2011), indica que, para implementar la instrucción matemática se debe previamente construir un concepto matemático, promoviendo la competencia en los estudiantes. En cuanto a los maestros, quienes deben de comprender la investigación basada en los conocimientos, luego determinar y orientar el desarrollo del razonamiento en estudiantes. Por ello, la instrucción se basa en 5 componentes críticos:

1. Descripciones de las ideas matemáticas básicas y procesos de razonamiento que forman la base para que los estudiantes construyan sentido y comprendan las matemáticas de la escuela primaria.

2. Para cada idea central, se presentan descripciones basadas en investigaciones de niveles de sofisticación en el desarrollo de la comprensión y razonamiento de los estudiantes sobre la idea.

3. Para cada idea central, conjuntos coherentes de tareas de evaluación que permiten a los maestros investigar sobre el pensamiento matemático de sus alumnos y ubicar las posiciones de los alumnos en el terreno cognitivo para aprender esa idea.

4. Para cada tarea de evaluación, se presenta una descripción de cómo podría ser cada nivel de razonamiento para la tarea.

5. Para cada idea central, se presentan descripciones de actividades educativas específicamente dirigidas a los estudiantes en varios niveles para ayudarlos a pasar al siguiente nivel.

De acuerdo a los cinco criterios mencionados anteriormente, son fundamentales para realizar un buen sistema evaluativo, enfocado en la comprensión y el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes. Como referente curricular se toman los DBA (Derechos Básicos del Aprendizaje y EBC (Estándares Básicos de Competencia) para el área de Matemáticas, planteados por el Ministerio de Educación Nacional (2006), de la competencia que tiene que alcanzar los estudiantes en el grado noveno, asociadas con el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos:

EBC: Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

DBA: Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.

4.3 Referentes Cognitivos

A continuación, se exponen una serie de investigaciones, desarrollos y mejoras acerca del razonamiento y sus componentes espaciales, seguidamente se abordan los niveles de Van Hiele, los cuales resultan de gran utilidad para comprender la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes, permitiendo a la organización de una secuencia de situaciones en la progresión de aprendizaje, proporcionado a su vez la construcción gradual de la adquisición del nivel superior. Por último, la mediación y la Génesis instrumental, la cual, expone las características de implementación para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula.

4.3.1 Razonamiento espacial

Entender la palabra razonamiento en geometría es algo complejo, dar una definición sobre ¿qué es razonar?, puede llegar a presentar una serie de dificultades, pues interviene diferentes enfoques que pueden ser complicados de entender. Por lo que, en este apartado se aborda el razonamiento espacial.

Según Sack, Vazquez y Morál (2010), “el razonamiento espacial es un componente vital del pensamiento matemático y resolución de problemas exitosos en los alumnos”. (p.113). En el campo del razonamiento espacial, la capacidad se reconoce por su vínculo con el aprendizaje matemático, involucrando el área visual como las imágenes y estrategias para la mediación geométrica.

Una investigación más específica de Panorkou y Pratt (2011), indaga sobre como las personas exploran y razonan acerca de las dimensiones, el cual hallaron los siguientes resultados; dimensión de la acción, un estado que involucra el sentido de orientación. Dimensión material, se basa en la visión y/o tacto de la persona. Y, por último, se encuentra la dimensión abstracta y dimensión como prototipo o jerarquía, que se relaciona con las demás dimensiones

adquiriendo el proceso de aprendizaje, según la intervención de cada dimensión. Para hablar de mejoras en el razonamiento espacial se tiene en cuenta las siguientes investigaciones:

Para Ferrara y Mammana (2014), el desafío visual basado en la geometría espacial fue el uso de diagramas planos, usando el software de geometría dinámica cabri 3D, para cuadriláteros y tetraedros, enfocándose en los bordes y caras. Como resultados de esta investigación, se observó la importancia de la búsqueda en las propiedades, invariantes y cambios entre estas figuras, así mismo pudieron visualizar el espacio.

Owens (2005), investigo de como los profesores en formación implementan recursos en el aula, tales como; juegos, software y elementos didácticos, cuyo fin es desarrollar capacidades espaciales. Las tareas que combinan figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales, mediante herramientas tecnológicas fortalecen el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes.

4.3.2 Niveles de Razonamiento de Van Hiele

Para desarrollar este trabajo, se añade el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), es una de las propuestas que mejor se acomoda en términos de contexto geométrico en la escuela, los Van Hiele formulan un modelo de razonamiento, en el cual plantean una secuencia de niveles que va desde el reconocimiento de figuras en los primeros años, hasta la parte formal o demostrativa, aunque esta última es difícil de conseguir en la escuela.

A continuación, se presenta una breve síntesis de cada nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele según Fuys, Geddes y Tischler (1988) y Jaimes y Gutiérrez (1990). Citado por Aravena et al. (2016). El modelo de Van Hiele considera 5 niveles y fases de aprendizaje, pero en este trabajo se abordan 3, de acuerdo con el nivel de estudio de los estudiantes.

Nivel 1 (reconocimiento)

Los estudiantes distinguen las figuras geométricas, las describen de acuerdo a su forma y las observan como objetos de la vida cotidiana, pero no son capaces de diferenciar características y propiedades.

Nivel 2 (análisis)

En este nivel reconoce, deducen y demuestran propiedades de las figuras geométricas empíricamente. No relacionan las propiedades de unos objetos geométricos con otros.

Nivel 3 (clasificación)

Los estudiantes describen las figuras geométricas de manera formal, entienden las definiciones, reconocen las propiedades y las clasifican en familias de figuras independientemente de la complejidad de sus propiedades.

Nivel 4 (deducción formal)

Los estudiantes realizan y comprenden demostraciones deductivas formales, entiende la estructura la axiomática y acepta definiciones equivalentes al mismo concepto.

4.3.3 Fases de aprendizaje del modelo de razonamiento de Van Hiele

Las fases de aprendizaje que describe Van Hiele, son precisamente una serie de etapas estructuradas de las actividades que deben seguir los profesores para ayudar a un estudiante a subir de nivel de razonamiento. Las fases que propone Van Hiele son las siguiente:

Fase 1. Información.

El profesor da la información necesaria al estudiante sobre el área, situaciones y materiales que se van a utilizar antes de empezar a desarrollar el tema. Es importante conocer los conocimientos previos del estudiante y el nivel de razonamiento, puesto que, deberá aprender a manejar los materiales y adquirir los conocimientos matemáticos para comenzar con el trabajo.

Fase 2. Orientación dirigida.

En esta fase, el docente debe de dirigir las actividades hacia el objetivo principal y los conceptos deben de ser progresivos. Por otro lado, los alumnos exploran por medio de los materiales que se le asignaron, descubriendo, comprendiendo y aprendiendo las propiedades geométricas que están estudiando.

Fase 3. Explicitación.

En esta fase los estudiantes intercambian experiencias y realizan comparaciones que han observado durante la exploración del objeto matemático. Durante el dialogo es importante es la opinión desde diferentes perspectivas yaqué hará que cada uno tenga que analizar sus respuestas, organizarlas y dar claridad.

Fase 4. Orientación libre.

El docente plantea actividades para que el alumno fundamente los conocimientos alcanzados hasta el momento, da algunas instrucciones de la situación para que utilice el nivel de razonamiento adquirido y a través de su conocimiento encuentre la solución.

Fase 5. Integración.

En esta fase, el docente no aporta conceptos nuevos, al contrario, compara y combina los conocimientos que ya conoce para que el estudiante utilice su capacidad cognitiva. Es decir, desarrolla conjeturas, razona y soluciona situaciones problema.

4.3.4 Enfoque Instrumental

Samper et al. (como se citó en Flórez y Camargo, 2019) indican que la incorporación de las tecnologías en el aula no garantiza un aprendizaje ameno, para ello, se pretende diseñar y guiar tareas con el objetivo de apropiarse de estas, para generar ambientes de construcción, exploración y razonamiento que proporcionen la construcción de conocimiento en los estudiantes.

“La génesis instrumental es un constructo analítico adecuado para examinar el aprendizaje mediado por ambientes tecnológicos”. (Leung y López, 2006; Trouche et al., 2014) Por lo tanto, el aprendizaje de la geometría en un entorno que involucra el plegado de papel y GeoGebra 3D se describe mediante la génesis instrumental, donde el sujeto interactúa con los artefactos, se apropia y los incorpora para resolver situaciones problema.

Según Rabardel (2011), la Genesis instrumental se caracteriza por el proceso de configuración del instrumento. El sujeto con el artefacto adquiere experiencias, resuelve tareas y practica el uso de este, convirtiéndolo en un instrumento que media el aprendizaje para la generación de conocimiento matemático. Los artefactos permiten desarrollar habilidades para visualizar, representar y construir figuras mentales, por ello, se dice que el sujeto a construido un instrumento a partir de un artefacto.

Según Rabardel (2011) convertir un artefacto en instrumento requiere de dos procesos interrelacionados, producto de una relación entre el individuo y el artefacto: instrumentalización e instrumentación. En la figura 5 representamos la relación entre los procesos mencionados.

Figura 5*Instrumentalización-instrumentación*

Nota. La figura muestra la relación entre la Instrumentalización-instrumentación. Fuente: Trouche, (2004)

Al respecto Verillon y Rabardel (como se citó en Trouche, 2014), indican que la instrumentalización es un proceso enfocado en el artefacto donde el individuo explora, extrae, apropia y usa las propiedades a conveniencia. Por otro lado, la instrumentación es el proceso de desarrollo y adaptación de esquemas de utilización donde el individuo incorpora el artefacto en la resolución de problemas.

5. Metodología

En este capítulo se presenta la metodología de la investigación, en la que la aproximación metodológica es la investigación basada en el diseño. Por lo que se recurre a un experimento de enseñanza y a un estudio de casos múltiple, donde se lleva a cabo la adaptación y aplicación de la progresión de aprendizaje, utilizando recursos como GeoGebra 3D y doblado de papel.

5.1 Estudio de casos y participantes

Una metodología de la investigación basada en el diseño permite un amplio abanico de diseños de investigación y técnicas. Fernandez (2006) plantea que, al combinar distintos instrumentos, técnicas de recogida y análisis de datos procedentes de diferentes metodologías, mejora la comprensión de los fenómenos que se someten al estudio. Así que, se abordó el estudio de casos como una investigación empírica que estudia los fenómenos contemporáneos dentro de un contexto real. Para ello, esta investigación sigue el diseño de los multicascos de tipo descriptivo, en un contexto escolar con estudiantes de grado noveno para fortalecer el razonamiento espacial cuando se transforman poliedros regulares convexos a polígonos.

En consecuencia, se realizó un análisis exhaustivo y detallado de dos casos que comparten algunas características en común. El estudio de casos descriptivo está orientado a fortalecer el razonamiento espacial a estudiantes de grado noveno y los objetivos son los propuestos en la investigación.

Las similitudes y diferencias de los casos van a permitir analizar la incidencia de determinadas variables en el fenómeno de estudio, por tanto, el interés no se centra solo en el

estudio de los casos en sí, ni en el fortalecimiento del razonamiento espacial, si no también en caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele y aquellos factores que pueden ayudar a mejorar el desarrollo del razonamiento espacial en los estudiantes del grado noveno.

La Corporación Psicopedagógica Del Valle - Liceo Sagrado Corazón De Jesús, es una entidad educativa privada sin ánimo de lucro, presentando su servicio a la población caleña, en especial a la de condición de vulnerabilidad. El Liceo está ubicado en la comuna 21 distrito de Aguablanca en el barrio Talanga, se caracteriza principalmente por la enseñanza basada en los valores humanos y se involucra a los diferentes estamentos educativos: educandos, docentes directivos, administrativos, padres de familia y comunidad local que apoyan, con el fin de propiciar la formación de ciudadanos conscientes de su papel determinante para la consolidación, de una sociedad democrática, participativa, pluralista y justa.

Esta investigación se realizó en el grado noveno, el cual está compuesto por 12 estudiantes en la modalidad de presencialidad y 23 en virtualidad, se postularon dos estudiantes para la ejecución, cabe resaltar que estos estudiantes tienen excelentes notas en el área de matemáticas lo que facilitó el desarrollo.

5.2 Instrumentos y Recolección de Información

Para cumplir con los objetivos de la investigación fue necesario implementar herramientas que dieran evidencia del estado cognitivo de los estudiantes ante problemáticas del razonamiento espacial. por último, con los instrumentos propuestos se triangularon los datos en una matriz de análisis para obtener resultados detallados al aplicar la progresión.

5.2.1.1 Observación directa

Esta técnica consiste en observar atentamente un fenómeno, tomar información y registrarla para su posterior análisis. La información que se obtiene es de primera mano, el instrumento a utilizar es el registro de la observación. (Crotte, 2011).

5.2.1.2 Guías Escritas

Las guías escritas, se recopilaron a través de documentos para dar cuenta de las construcciones y argumentaciones de los estudiantes. De igual forma, se adaptó una progresión de aprendizaje que permitió fortalecer el razonamiento espacial de los estudiantes por medio de la transformación de poliedros convexos a polígonos, utilizando recurso como el origami y GeoGebra 3D.

5.2.1.3 Entrevista semiestructurada

Las entrevistas semiestructuradas en un enfoque cualitativo, son viables para crear situaciones de conversación donde faciliten las percepciones y perspectivas por parte de los participantes de la investigación. (Flick, 2012, p. 89). Por ende, se realizó una entrevista semiestructurada a 2 estudiantes del grado noveno, en la que se dirigen preguntas abiertas para argumentar a fondo la solución a las situaciones propuestas en la progresión de aprendizaje y determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes.

5.2.1.4 Matriz para el análisis

La matriz para el análisis de los datos es aplicada mediante el diseño de los niveles de razonamiento, por lo que, se buscó tabular los principales criterios en correspondencia a las respuestas generadas por las participantes, el vaciado de la información se ejecutó mediante la revisión de las respuestas aportadas en el proceso de investigación por las participantes, permitiendo el contraste entre ambas desde el estudio de las distintas situaciones y la valoración

cualitativa de los conocimientos evidenciados por las estudiantes. La aplicación de la matriz de datos, parte de su practicidad en la recolección y análisis de información desde el tamizaje obtenido, lo que permite la corrección de los datos mientras se alimenta la base de información, conjunto sistematiza los criterios de evaluación. (Persman, 2014)

5.3 Experimento de enseñanza

Dentro de los aspectos metodológicos del experimento de enseñanza, se destaca la metodología cualitativa, apreciada por el análisis minucioso al objeto en estudio, en este caso, el análisis a los niveles de razonamiento de los estudiantes no es definitivo, sino que, por el contrario, tendrá modificaciones de ascenso o retroceso. No obstante, se realizará un análisis a cada participante de la investigación, donde el estudiante se encarará de construir el aprendizaje guiado por el investigador-docente.

Para Steffe y Thompson (como se cita en Molina et al., 2011) “un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores” (p.76). En este caso, el propósito del experimento es evidenciar los niveles de razonamiento de los estudiantes a partir de una secuencia de situaciones, en la que es importante la participación e instrucciones del investigador-docente. Por ende, para la recolección de información se tiene en cuenta las entrevistas, observaciones, actividades escritas, preguntas abiertas y socializaciones, mediante estas quedara evidenciado el nivel de razonamiento en que se encuentran, a medida que se transforman poliedros regulares convexos a polígonos.

Finalmente, los experimentos de enseñanza se distinguen en tres fases: preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y ejecución del análisis retrospectivo de los datos.

Tabla 3*Preparación del experimento de enseñanza*

FASES	ACCIONES
PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO	- Definir el problema y los objetivos de la investigación. - Identificar los objetivos instruccionales. - Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y el currículo. - Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. - Delinear una progresión de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.
EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR	- Realizar una recogida de datos exhaustiva mediante guías escritas, toma de notas por un observador. - El investigador-Docente, tomara notas de la intervención que complementen y ayuden a comprender los datos recogidos. - Analizar los datos recogidos en las intervenciones. - Contrastar los resultados obtenidos con los objetivos previamente elaborados. - Organizar los datos recogidos. - Analizar los datos recogidos de manera conjunta (Matriz de análisis)
ANÁLISIS RETROSPECTIVO	- Dar respuestas a los objetivos de estudio. - Elaborar un modelo que describa el fortalecimiento del razonamiento espacial de

los estudiantes, de las situaciones
realizadas, de los cambios de aprendizaje a
lo largo del experimento de enseñanza.

Nota: Datos adaptados de la preparación del experimento de enseñanza. Fuente: Molina et al., (2011, p.76).

5.3.1 Preparación del experimento

En la preparación del experimento de enseñanza, el investigador debe de especificar los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, otro aspecto, son los conocimientos previos e identificar el nivel de razonamiento, para esto, se realizó un taller con el fin de delimitar los aspectos a tratar en el diseño de la progresión de aprendizaje. Otro de los puntos para tener en cuenta, solo los lineamientos curriculares y los DBA (derechos básicos de aprendizaje) construyendo un conjunto de relaciones para tal diseño.

Siguiendo el curso de la investigación, que tiene como objetivo adaptar el diseño de una progresión de aprendizaje, se abordara la primera fase del experimento de enseñanza, posteriormente, se realiza una prueba piloto para determinar si la progresión fue un éxito.

5.3.1.1 Niveles de sofisticación para el diseño de la progresión de aprendizaje

Las progresiones de aprendizaje, para un tema en específico empiezan con el razonamiento que poseen los estudiantes y finaliza con los conceptos adquiridos por la instrucción, también, indica un análisis cognitivo del estudiante a medida que avanza en el nivel de razonamiento. En la tabla 4 se describe los niveles de sofisticación de CBA para el fortalecimiento del razonamiento espacial cuando se transforman poliedros regulares convexo a polígonos, teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de Van Hiele.

A continuación, Battista (2011), menciona que un nivel de sofisticación en el razonamiento de los estudiantes son las estrategias, pensamientos y resolución de situaciones problema dentro de una jerarquía de niveles. En esta investigación al hablar de niveles jerárquicos, se alude a los niveles de Van Hiele. Desde esta misma perspectiva, estos son una jerarquía de niveles “*fuertes*” ya que es un constructo ordenado secuencialmente. Es decir, los estudiantes están en el nivel 1 de Van Hiele cuando su desarrollo cognitivo les permite pensar en aspectos físicos de la figura y están en el nivel 2 cuando reconoce que las figuras están dotadas de propiedades matemáticas. Además, cuando los estudiantes pasan de una situación familiar a una situación poco familiar, su nivel de pensamiento puede disminuir temporalmente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se construyen los niveles de sofisticación para tres niveles de razonamiento de Van Hiele con sus respectivos subniveles. Mediante estos, se analiza el desarrollo cognitivo de dos estudiantes del grado noveno cuando realizan una secuencia de situaciones determinadas. Cabe resaltar que para la construcción de los niveles sofisticación se tuvieron en cuenta los objetivos de las actividades, estándares, DBA y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Tabla 4

Niveles de sofisticación

NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
NO: El estudiante compara nociones de la geometría con objetos cotidianos de forma imprecisa.	MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas.
N1: El estudiante identifica correctamente nociones de la geometría, tales como: puntos, rectas, segmentos, rectas paralelas, rectas perpendiculares, etc...	M.1: El estudiante reconoce las nociones y relaciones de la geometría, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular y plano, etc.... al interior de un sólido.
	M.1.1: El estudiante establece relaciones entre una línea recta y un dobléz en papel.

N1.1: El estudiante compara correctamente elementos de una figura en origami y en GeoGebra 3D.	M.1.2: El estudiante reconoce las propiedades del doblado de papel.
N2: El estudiante identifica aspectos de un sólido mediante la comparación de figuras geométricas.	M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.
N2.1: El estudiante clasifica los sólidos platónicos de acuerdo con sus características.	M.1.4: El estudiante identifica propiedades de las figuras planas.
N3: el estudiante relaciona algunas características de un sólido platónico con objetos de la cotidianidad.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
	M2: El estudiante reconoce los 5 sólidos platónicos, como una estructura conformada de polígonos regulares.
	M.2.1: El estudiante establece relaciones entre las estructuras de un sólido construido en GeoGebra 3D y otro en origami (dobrado de papel).
	M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.
	M.2.3: El estudiante reconoce que las caras de un sólido platónico están conformadas por polígonos regulares.
	M.3: El estudiante reconoce que en el vértice de un poliedro concurren el mismo número de caras y de aristas.
	M.3.1 El estudiante comprende que la suma de los ángulos en el vértice de un sólido no puede exceder los 360° .
	M.3.2: El estudiante halla la relación de Euler, la cual se cumple en los cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, icosaedro, dodecaedro y octaedro.

Nota: La figura muestra los niveles de sofisticación para la adaptación de la progresión de aprendizaje.
Fuente: Battista (2011).

Es importante señalar que los niveles de sofisticación surgen a partir de la CBA, pues estos son una expresión de los procesos cognitivos que los estudiantes desarrollan conforme se van apropiando de conocimientos matemáticos y capacidades de análisis y razonamiento a partir de ellos; y, precisamente, es la cognición basada en el conocimiento quien pone a prueba mediante una evaluación, dichos niveles o capacidades de razonamiento en los estudiantes. Esto es, cada una de las categorías explicadas en la Tabla 4. Battista, (2011).

Uno de los elementos de análisis más importantes sobre los niveles de razonamiento, desde el punto de vista de la docencia, es efectivamente la importancia que tienen estos niveles para efectos de intervenir al estudiante. Pues, como propone Battista (2011), mediante la observación de estos niveles de cognición o razonamiento, es posible diseñar estrategias para monitorear a los estudiantes, así como para guiarlos en el proceso de interiorización de razonamiento espacial y matemático. En ese sentido, Battista (2011), expone una serie de nociones que son importantes para el análisis de los niveles de razonamiento de los estudiantes y los procesos de sofisticación de estos de dicho proceso por parte del cuerpo docente.

Por lo tanto, Battista (2011), identifica que, a medida que se lleve un monitoreo sobre la progresión de estos niveles de razonamiento y sofisticación, se puede dar cuenta de que los estudiantes sí están entendiendo los elementos básicos de matemáticas y geometría, así como permite saber si los estudiantes son capaces de construir una idea general de las situaciones planteadas. Del mismo modo, este monitoreo facilita intervenir propiamente al estudiante de acuerdo con sus resultados, añadiendo opciones para el apropiamiento de pensamiento matemático y razonamiento espacial, tanto como mejorando su posición cognitiva respecto a los niveles enunciados en la tabla 4.

Finalmente, la retroalimentación de este proceso constante de interacción docente-estudiante, permite que estos últimos puedan ir escalando de nivel, de tal modo que se pueden categorizar en el nivel más alto de razonamiento espacial, que, para el caso de este proyecto, sería el nivel M.3.2.

5.3.1.2 Caracterización de los niveles de sofisticación

A partir del análisis de los niveles de sofisticación, se puede tener respuesta a interrogantes como cuál es el nivel de cognición del estudiante para efectos de razonamiento espacial (para el caso de esta investigación), qué puede y qué no puede hacer el estudiante de acuerdo con el nivel de sofisticación que tiene, esto es, qué ejercicios matemáticos y geométricos podrá realizar en la práctica en correspondencia con sus competencias en la materia, de las cuales se tiene cuenta en el análisis de los niveles de sofisticación.

De esta manera, los saltos en los niveles de sofisticación representan reestructuraciones cognitivas y a su vez una mejora en la CBA, es decir, de donde se extraen los elementos para determinar si el estudiante pertenece a uno u otro nivel de sofisticación. Así mismo, es importante dejar claridad sobre el hecho de que no necesariamente todos los estudiantes transitan, de manera secuencial y progresiva, por cada uno de los niveles de sofisticación, en un orden consecutivo, sino que; podrá haber estudiantes que se salten uno u otro nivel de sofisticación. No obstante, la estancia en estudiante en un nivel de sofisticación sí es vinculante, como se ha indicado previamente, respecto a su capacidad de razonamiento espacial, de manera correspondiente con el nivel. Battista, (2011).

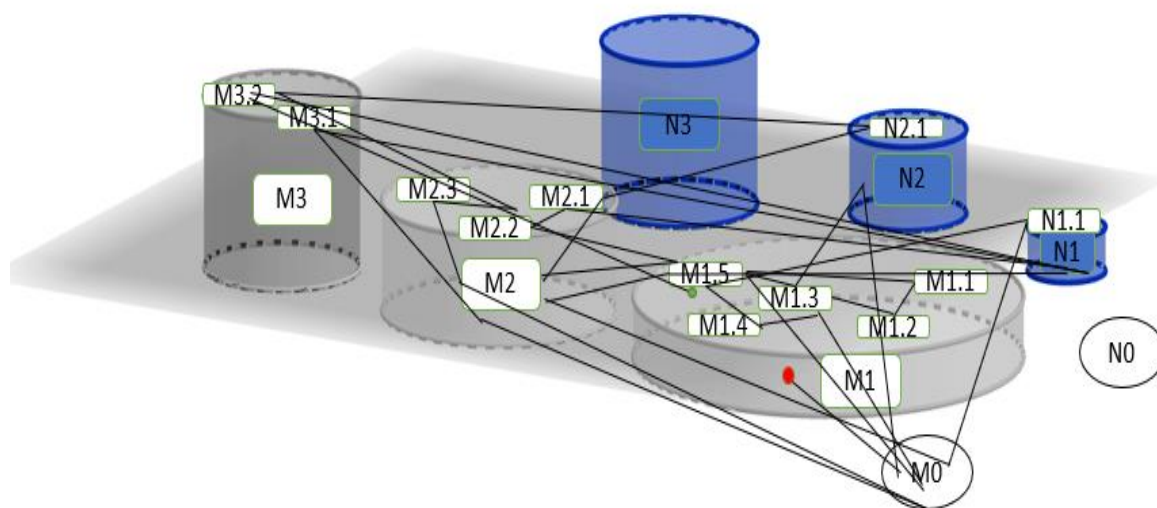
5.3.2 Experimentación y análisis preliminar

La figura 6 muestra la progresión de aprendizaje de Sofía para los 3 niveles de razonamiento de Van Hiele (inicio con el punto rojo, termina con el punto verde). Se puede

evidenciar que la estudiante atraviesa por una trayectoria de aprendizaje compleja para llegar a los niveles de razonamiento, pues antes de alcanzar los niveles o la medición de razonamiento, la estudiante pasa por diversas fases que reflejan una comprensión e incluso en algunas situaciones, un retraso en los niveles de razonamiento. En ese sentido, el análisis de la progresión de aprendizaje es fundamental para la intervención del docente con el estudiante en lo que respecta a la apropiación de herramientas que le permitan optimizar su razonamiento matemático y espacial geométrico.

Figura 6

Progresión de aprendizaje de Sofía



Nota. La figura muestra la progresión de aprendizaje realizada por Sofía. Fuente de elaboración propia.

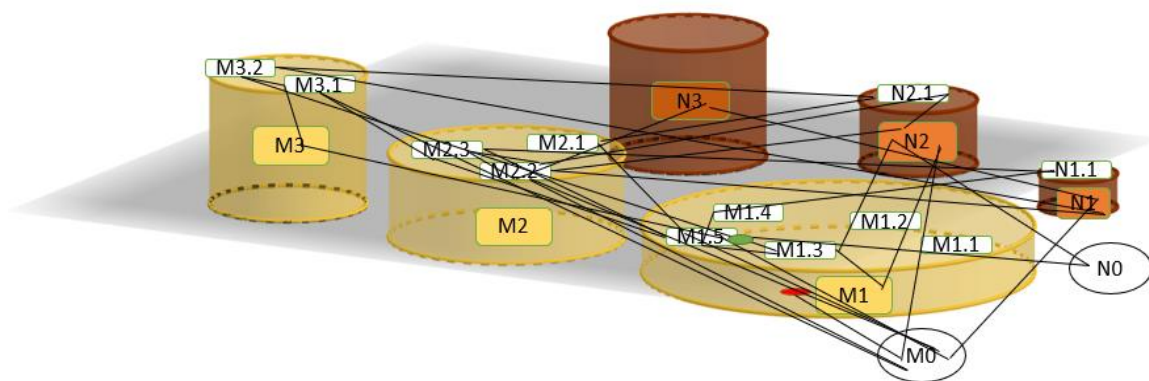
Así mismo, en la figura 7 se muestra la progresión de aprendizaje realizada por la estudiante Laura para 3 niveles de razonamiento de Van Hiele (inicio con el punto rojo, termina con el punto verde). En la progresión de aprendizaje de Laura se puede observar cierta similitud con respecto a la de Sofía, pues en ambos casos, las progresiones no se van dando de manera secuencial y escalonada, sino que, están sometidas a constantes movimientos de ida y vuelta,

lo que permite evidenciar la existencia de un proceso activo de aprendizaje. Vizcaino, Cadalso y Manzano, (2015).

Si bien ambas ejemplificaciones de la progresión de aprendizaje de las estudiantes cuentan con multiplicidad de movimientos de ida y vuelta, es fácilmente perceptible que la estudiante Laura se vinculó relativamente más con los niveles de no medición, es decir, su progresión de aprendizaje presentó mayor dificultad que la de Sofía. No obstante, pese a que trayectoria de ambas progresiones fue dietista, ambas estudiantes acaban en el nivel de razonamiento M1, en el subnivel M1.5, lo que a grandes rasgos sugiere el mismo resultado final respecto a la comprensión o aplicación de uno o varias tareas que impliquen razonamiento espacial.

Figura 7

Progresión de aprendizaje realizada por Laura



Nota: La figura muestra la progresión de aprendizaje realizada por Laura. Fuente de elaboración propia.

Estas progresiones de aprendizaje son extremadamente complejas dado que contienen movimientos de ida y vuelta entre los niveles, incluso en las figuras 6 y 7 no se presentan las progresiones de aprendizaje con suficiente detalle, por lo que, necesitamos una descripción narrativa de las situaciones que se están solucionando y el nivel de razonamiento en cada una.

Para ello, se abordará la situación 2 del nivel de razonamiento II (ver figura 42 y 43) para ambos estudiantes en el literal 3.

Situación 2. construcción de un poliedro en GeoGebra 3D

3. Suma los ángulos que concurren en un vértice de la figura 42 y Realiza el mismo procedimiento en la figura 43. ¿Qué relación encuentras al respecto?

Sofia respondió que la relación entre estos dos poliedros es que al sumar los ángulos de las figuras 42 y 43 le da el mismo resultado. Lo que indica, que se equivocó al dar respuesta y está en el nivel de razonamiento MO. puesto que, no identifica las propiedades de las figuras tales como el vértice y el número de ángulos concurren en este. Por consiguiente, el entrevistador-docente intento superar esta dificultad con la siguiente conversación:

P: Utiliza la herramienta ángulos, halla el valor en el vértice de la figura 42 y luego, realiza el mismo procedimiento en la figura 43. ¿obtuviste el mismo resultado?

S: No, en la figura 42 me dio 324° y en la figura 43 fue de 348° .

P: Ahora menciona una característica en la suma de los ángulos que concurren en el vértice de un poliedro.

S: la suma de los ángulos que están en el vértice de un poliedro no puede ser mayor a 360° yaqué no sería un poliedro.

Es importante destacar que, después de las instrucciones el nivel de razonamiento de Sofia avanza a M.3.1, donde comprende que la suma de los ángulos que concurren en un vértice de un poliedro no excede los 360° .

Por otro lado, Laura daba la siguiente respuesta, la suma es de $108^\circ \times 3 = 324^\circ$ en la figura 42 y el resultado de la figura 43 es de 348° , la relación es que la suma de sus ángulos es mayor que 300° . Por lo que, respondió correctamente a la situación y el nivel de razonamiento fue M.3.1.

para complementar esta respuesta el investigador-docente realizó la siguiente pregunta:

P: Menciona una característica en la suma de los ángulos que concurren en el vértice de un poliedro.

L: De acuerdo a la cantidad de ángulos y la suma de estos en el vértice, la figura puede ser un poliedro o no, yaqué la suma no puede exceder los 360° .

Para construir un perfil de razonamiento de Sofia y Laura, utilizando los niveles de sofisticación de CBA se debe de tener en cuenta que, el nivel de razonamiento de Laura en esta situación es más avanzado que el de Sofia. Yaqué a Sofia le cuesta comprender las regularidades y propiedades de los poliedros. Además, debemos de proporcionar tareas a Sofia que resalten la importancia de las propiedades y regularidades de los poliedros. Por ejemplo, necesita resolver problemas de cuantas caras, vértices y aristas tiene el poliedro, cuántos ángulos concurren el vértice, etc. Estas tareas, nos permite caracterizar y diagnosticar adecuadamente el razonamiento de Sofia de la manera más útil para diseñar la instrucción que mejor se adapte a sus necesidades de aprendizaje.

5.3.3 Análisis y resultados

Para el análisis y la triangulación de la información se tuvieron en cuenta los instrumentos descritos en la investigación, por ende, los elementos antes mencionados permitieron reconocer el nivel de razonamiento de los estudiantes de forma precisa y eficiente. Es importante aclarar que durante la ejecución de la progresión de aprendizaje los estudiantes tuvieron algunos materiales para hacer las construcciones, doblado de papel, trazos, cortes, tijeras, GeoGebra 3D y algunas acciones que le permitieron la comprensión de las preguntas y, por tanto, dar respuestas concretas.

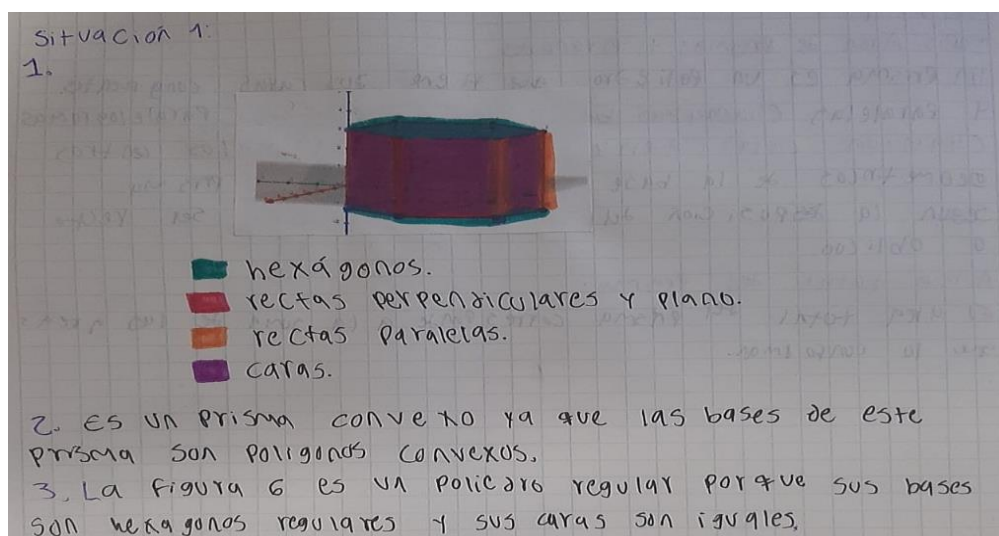
5.3.3.1 Análisis del nivel de razonamiento de Sofía

La estudiante Sofía, actualmente se encuentra cursando el noveno grado en el liceo sagrado corazón de Jesús, fue una de las voluntarias para participar en la investigación, y con un nivel de desempeño académico alto. Esta estudiante se caracteriza por tener sentido de personalidad, participación, creatividad, dedicación y exigencia para adquirir conocimientos amplios en temas de su interés.

5.3.3.1.1 Nivel de razonamiento I

Figura 8

Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento I Sofia



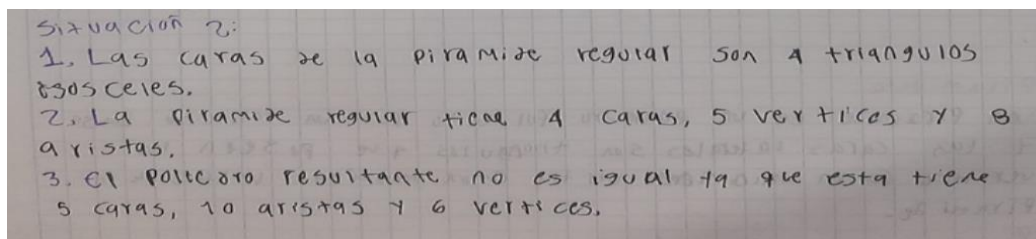
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 1. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación realizada por Sofía, en donde se evidencia las respuestas a los interrogantes, es importante destacar que en la situación 1 Sofía utilizó el razonamiento M.1 en el literal 1), en el literal 2) el pensamiento de Sofía retrocedió a MO cuando intento dar solución al problema, ¿el prisma hexagonal construido en GeoGebra 3D es cóncavo o convexo?, por lo que, su respuesta fue incorrecta y no identifica las regularidades de una figura geométrica. Por

último, en el literal 3) utilizo el razonamiento N.2 (no medición del razonamiento) ya que primero identifica propiedades de las figuras planas y a partir de estas, interpreta propiedades en figuras tridimensionales.

Figura 9

Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento I Sofia

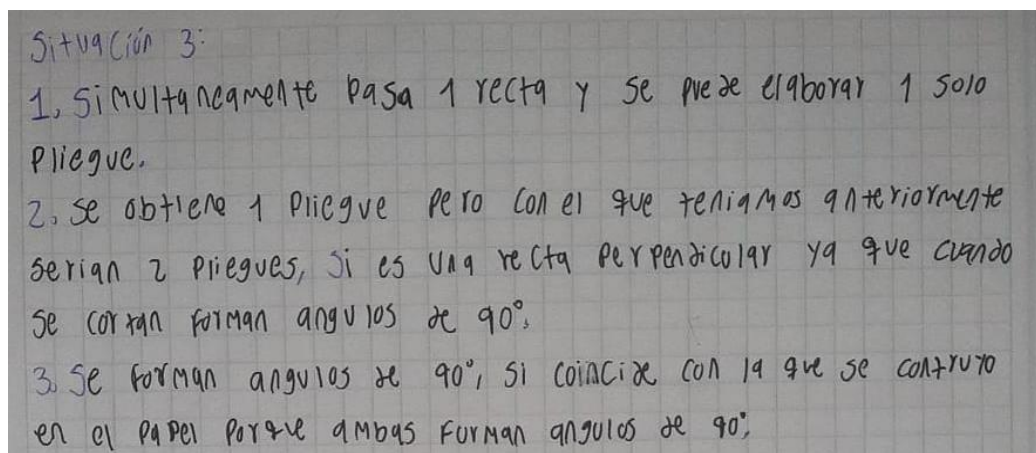


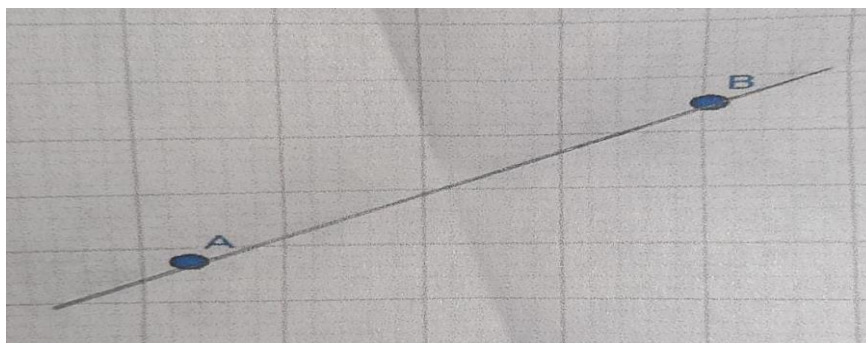
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 2. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación desarrollada por Sofía, es relevante destacar que el nivel de razonamiento fue M.1.3 y M.1.5 ya que identifica figuras planas y reconoce propiedades de los sólidos, siguiendo la instrucción planteada en la guía escrita en el literal 3) la estudiante resolvió la situación correctamente, concluyendo que adoptó un esquema particular a partir de las intervenciones anteriores para dar solución a este literal.

Figura 10

Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento I Sofia





Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 3. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

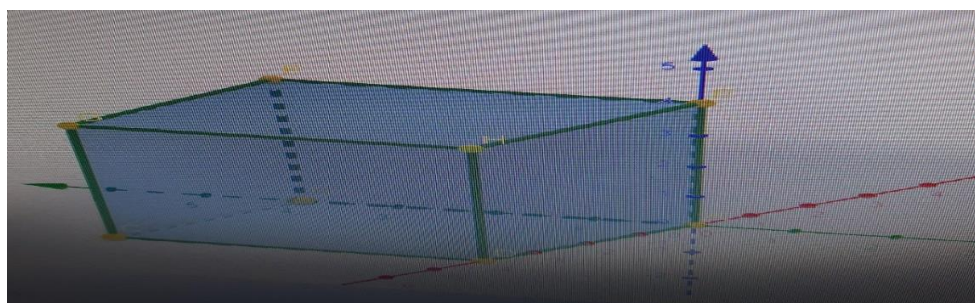
De acuerdo con las respuestas de Sofía, se evidencia que el nivel de razonamiento expuesto en la situación 3 fue M.1.1 y M.1.2 ya que relaciona correctamente una línea recta con un doblado en papel e identifica las propiedades del doblado de papel y las relaciona en programas de geometría dinámica (GeoGebra 3D). Siguiendo con la instrucción en el literal 3) Sofía retrocedió al nivel de razonamiento M.1 en el que relaciono correctamente nociones de la geometría como puntos, rectas, rectas perpendiculares, etc.

Figura 11

Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento I Sofía

Situación 4:

1. El poliedro construido es un cubo.
2. Sus caras son cuadrados iguales, las caras forman ángulos de 90° .
3. El ángulo que forma el vértice H es un ángulo de 90° .



Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 4. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

De acuerdo con la progresión de aprendizaje y las respuestas dadas por Sofía a la situación 4, el nivel de razonamiento está ubicado en M.1.3 y M.1.5 ya que identifica figuras planas y las propiedades de estas, también reconoce los elementos básicos de un sólido: caras, vértices y aristas. Por otro lado, se puede evidenciar que la estudiante tiene dificultad en reconocer el número de ángulos concurren en el vértice H ya que solo menciona uno, por lo que su razonamiento retrocede a MO.

Figura 12

Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento I Sofia

Situación 5:
 Figura 11:
 Tiene 4 caras, 4 vértices y seis aristas.
 Figura 12:
 Tiene 4 caras, 4 vértices y seis aristas.
 - Si tienen el mismo número de caras, vértices y aristas.
 2. Sus caras son triángulos equiláteros, forman ángulos de 60°
 $60 + 60 + 60 = 180$
 3. Es convexo ya que sus caras son polígonos regulares.
 4. La figura 11 es un poliedro regular ya que está conformado por triángulos equiláteros

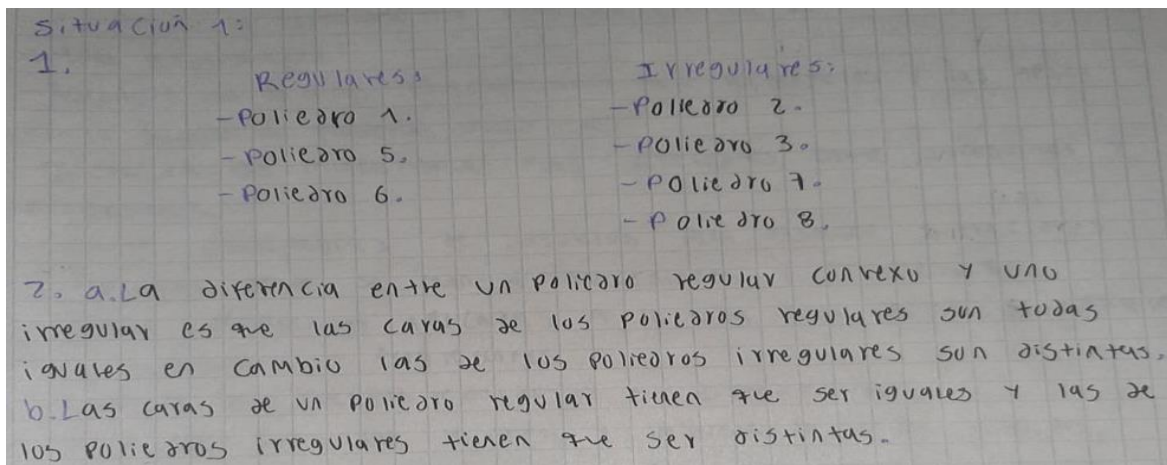
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 5. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación realizada por Sofía, el nivel de razonamiento que se encuentra es M.1.3, M.1.4 y M.1.5 dado que reconoce elementos básicos de los sólidos tales como caras, vértices, aristas e identifica algunos elementos del tetraedro como uno de los sólidos platónicos. Por otro lado, se evidencia en el literal 3) que la estudiante avanza en el nivel de razonamiento puesto que, responde correctamente a la pregunta ¿el tetraedro construido en origami es cóncavo o convexo? ¿Por qué? Y se encuentra en el nivel N.1.1 (no medición del razonamiento), caso contrario cuando se presentó la situación 1 en el literal 2) su respuesta fue errónea y no identificaba las regularidades de un sólido por lo que su nivel de razonamiento estaba en MO.

5.3.3.1.2 Nivel de razonamiento II

Figura 13

Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento II Sofia

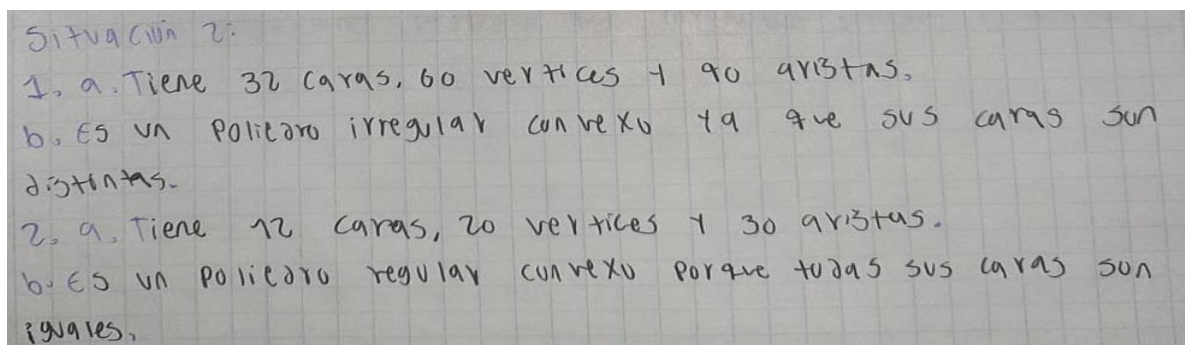


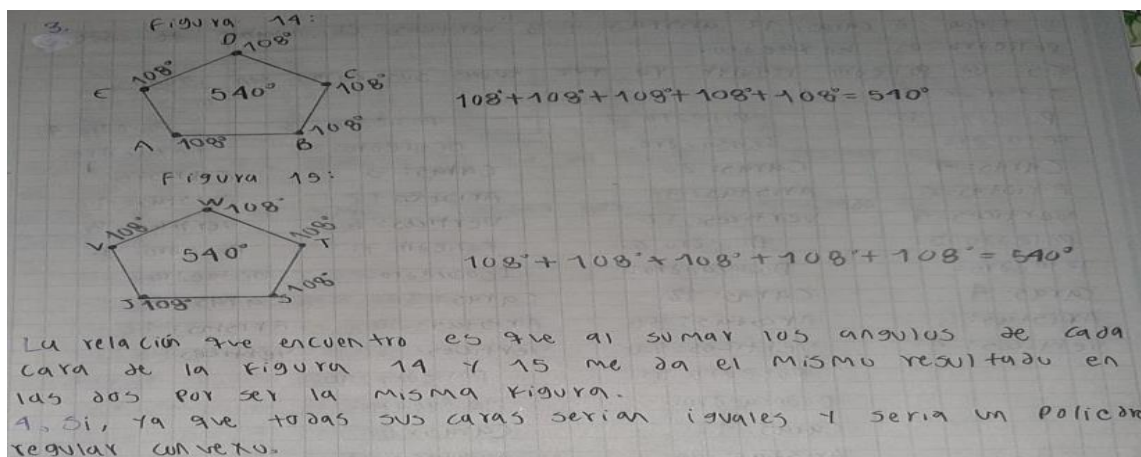
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 1 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

De acuerdo con la situación realizada por Sofia, el nivel de razonamiento que se encuentra es M.2.3 ya que reconoce un poliedro regular convexo como una estructura conformada por polígonos regulares e iguales y un poliedro irregular como una estructura de polígonos de distintas formas geométricas.

Figura 14

Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento II Sofia





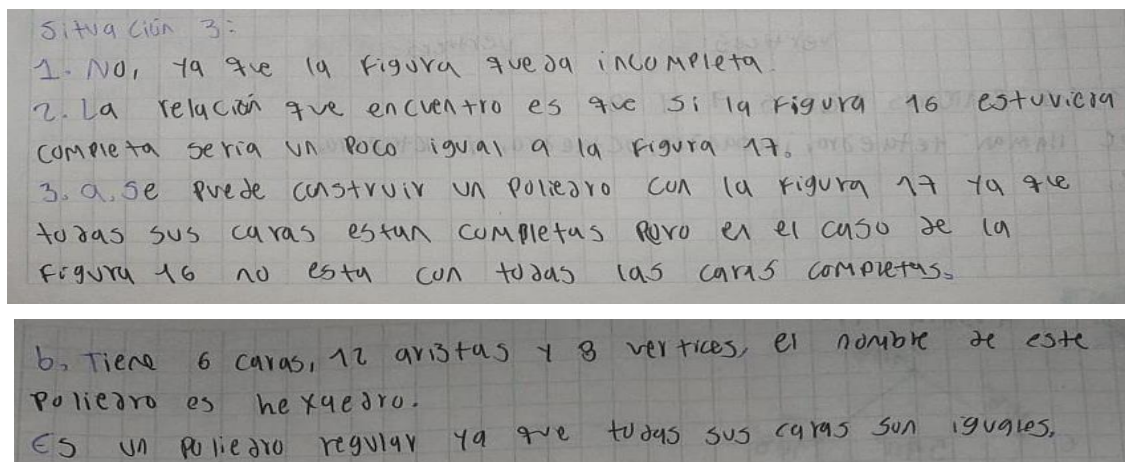
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 2 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación realizada por Sofía, el nivel de razonamiento que se encuentra en el literal 1) y 2) es M.1.5, ya que la estudiante reconoce los elementos de un sólido platónico como: caras, vértices y aristas, utilizando GeoGebra 3D para facilitar el proceso. Por otro lado, se evidencia que la estudiante utiliza el mismo esquema en los dos literales puesto que reconoce las figuras geométricas que conforman una cara y las compara para concluir si es un poliedro regular convexo o irregular.

En el literal 3) el nivel de razonamiento de Sofía retrocedió a MO, dado que, la estudiante suma los ángulos internos de una cara del poliedro mas no identifica el vértice, esta dificultad es debido a que aún no reconoce los elementos de un sólido platónico correctamente. Por otro lado, en el literal 4) Sofía sigue con la dificultad presentada con anterioridad y no hace comparaciones entre los poliedros, para dar cuenta que no se puede construir un poliedro con hexágonos ya que excede los 360° en el vértice.

Figura 15

Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento II Sofia



Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 3 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación realizada por Sofía, el nivel de razonamiento que se encuentra es M.2.1 y M.2.2 en el literal 1) y 2) respectivamente, dado que establece relaciones entre las estructuras de un poliedro y reconoce diagramas para desarrollar un poliedro, haciendo comparaciones entre un poliedro en GeoGebra 3D y origami. En el literal 3) el nivel de razonamiento de Sofía fue M.1.5 y M.2 puesto que, reconoce los elementos de un cubo o hexaedro en GeoGebra 3D como una estructura conformada por polígonos regulares.

Figura 16

Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento II Sofia

Situación 4:

Poliedro 1: Tetraedro
Caras=4
Aristas=6
Vértices=4

Poliedro 2: Icosaedro
Caras=20
Aristas=30
Vértices=12

Poliedro 3: Dodecaedro
Caras=12
Aristas=30
Vértices=20

Poliedro 4: Octaedro
Caras=8
Aristas=12
Vértices=6

Poliedro 5: Tetraedro
Caras=4
Aristas=6
Vértices=4

Poliedro 6: Dodecaedro
Caras=12
Aristas=30
Vértices=20

Poliedro 7: Icosaedro
Caras=20
Aristas=30
Vértices=12

Poliedro 8: Octaedro
Caras=8
Aristas=12
Vértices=6

Poliedro 9: Hexaedro
Caras=6
Aristas=12
Vértices=8

Poliedro 10: Hexaedro
Caras=6
Aristas=12
Vértices=8

1. Los poliedros 1, 2, 3, 5, 7 y 8.
Se llaman tetraedro, icosaedro, octaedro, y octaedro.

2.

Nombre del poliedro	Caras (C) del poliedro	Vértices (V) del poliedro	Aristas (A) del poliedro	C+V	C+V-A
Octaedro	8	6	12	14	2
Dodecaedro	12	20	30	32	2
Icosaedro	20	12	30	32	2
Hexaedro	6	8	12	14	2
Tetraedro	4	4	6	8	2

a. La relación que encuentro es que al sumar y restar el resultado de todos es 2.

b. No ya que al sumar y restar nos da un resultado distinto a 2.

Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 4 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación 4 realizada por Sofía, el nivel de razonamiento que se encuentra es M.2.1, N.2.1 (no medición) ya que establece relaciones entre las estructuras de un poliedro construido en GeoGebra 3D y otro en origami e identifica características de un poliedro. Por otro lado, en el literal 2) la estudiante está en un nivel de razonamiento avanzado M.3.2 puesto que encuentra la relación del teorema de Euler al decir que la suma de las caras y vértices menos las aristas de un poliedro regular convexo dan como resultado dos.

Figura 17

Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento II Sofia

Situación 5:

- Hexamino 1: Icosaedro.
- Hexamino 2: dodecaedro.
- Hexamino 3: Hexaedro.
- Hexamino 4: Tetraedro.
- Hexamino 5: octaedro.
- Hexamino 6: Prisma hexagonal.
- Hexamino 7: Pentaedro.
- Hexamino 8: Prisma triangular.
- Hexamino 9: Heptaedro.
- Hexamino 10: Piramide.

Figuras	Diferencias	similitudes
Figura 19	Son diferentes ya que todos tienen figuras geométricas distintas que lo conforman.	Las similitudes es que todos son poliedros regulares.
Figura 20	Las diferencias es que la forma de cada uno es distinto y tiene distintos números de caras.	Las similitudes es que todos son poliedros irregulares.

3. El hexamino 2 ya que tiene 12 caras, es un poliedro regular ya que sus caras son iguales.

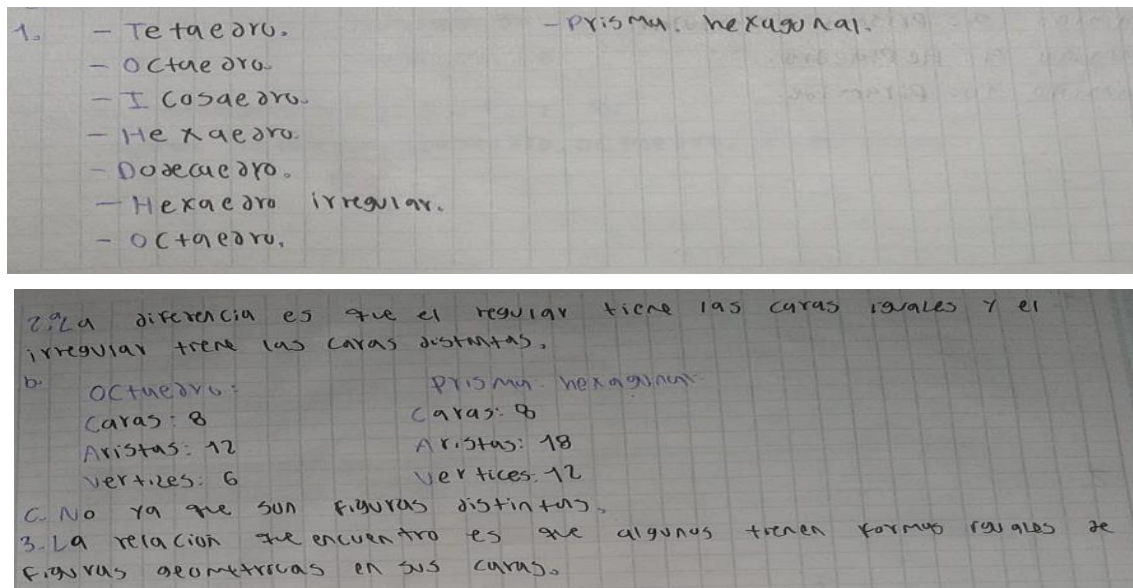
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 5 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación 5 realizada por Sofía, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.2.2, ya que identifica correctamente los diagramas que conforman un poliedro regular e irregular. En el literal 2) Sofía está en el nivel N2 y N2.1 (no medición) ya que identifica las características de un poliedro regular e irregular. Siguiendo con el literal 3) el nivel de razonamiento fue M2.2 y M.2.3 ya que identifica correctamente el diagrama de un dodecaedro y posteriormente reconoce que las caras del dodecaedro están conformadas por polígonos regulares. Por último, en el literal 4) el nivel de razonamiento fue M2.2 puesto que reconoce el diagrama de un poliedro irregular, estableciendo relaciones entre las caras para determinar su irregularidad.

5.3.3.1.3 Nivel de razonamiento III

Figura 18

Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento III Sofia

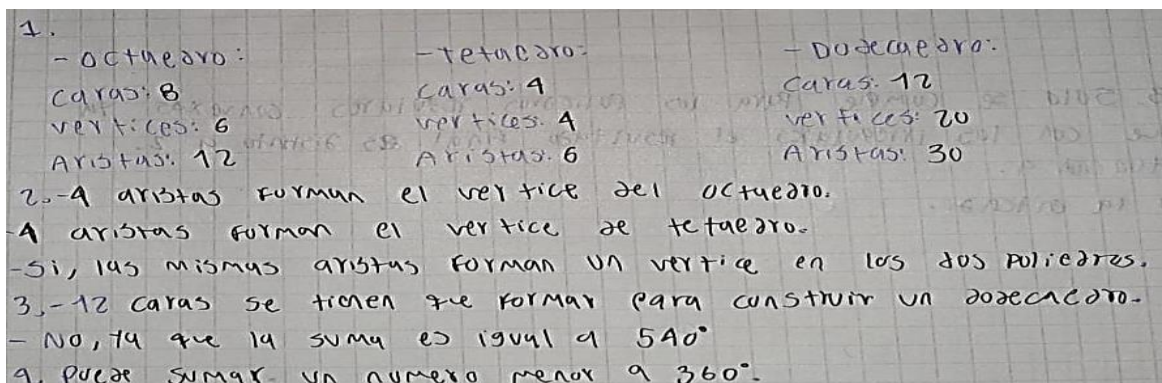


Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 1 en el nivel de razonamiento III. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación 1 realizada por Sofía, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.2, ya que reconoce los 5 sólidos platónicos como una estructura conformada por polígonos iguales. En el literal 2) y 3) el nivel de razonamiento de Sofía fue M3 dado que identifica correctamente las caras y aristas que concurren en el vértice de un poliedro regular e irregular y compara las características de ambos.

Figura 19

Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento III Sofia



Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 2 en el nivel de razonamiento III. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofia.

Según la situación 2 realizada por Sofia, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.2, ya que reconoce algunos sólidos platónicos como una estructura conformada por polígonos iguales. En el literal 2) y 3) el razonamiento de Sofia sigue teniendo la misma dificultad que en la situación 1 ya que no identifica correctamente las caras y aristas que concurren en el vértice de un poliedro regular convexo y, por ende, su respuesta no es acertada al sumar los ángulos que concurren en el vértice del dodecaedro. Por último, en el literal 4) el nivel de razonamiento fue M3.1 ya que comprende que la suma de los ángulos en el vértice de un poliedro regular convexo no puede exceder los 360° , pero en el anterior literal no identificó el dodecaedro como un poliedro regular convexo y cometió el error al decir que “la suma de los ángulos que concurren en el vértice del dodecaedro es 540° ” en el vértice del dodecaedro. por lo que, el nivel de razonamiento de Sofia retrocedió a NO.

Figura 20

Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento III Sofia

Nombre de los poliedros	Numero de caras	Numero de vértices	C + V	Numero de aristas	(C + V) - A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Dodecaedro	12	20	32	30	2
3. Hexaedro	6	8	14	12	2
4. Octaedro	8	6	14	12	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nombre de los poliedros	Numero de caras	Numero de vértices	C + V	Numero de aristas	(C + V) - A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Cilindro	3	0	3	2	1
3. Cono	2	1	3	0	3
4. Hexaedro	6	8	14	12	2
5. Dodecaedro	12	20	32	30	2
6. Piramide	5	5	10	8	2

3. Solo se cumple para los poliedros regulares convexos ya que con los irregulares el resultado final es distinto a 2.

Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 3 en el nivel de razonamiento III. Fuente: elaboración propia de la estudiante Sofía.

Según la situación 3 realizada por Sofía, el nivel de razonamiento fue M3.2 al relacionar la fórmula de Euler para poliedros regulares convexos (los cinco sólidos platónicos), por otro lado, se evidencia la dificultad que tuvo al relacionar la fórmula de Euler con algunos poliedros irregulares y su nivel de razonamiento retrocedió a M.1.5 al no identificar correctamente las caras, vértices y aristas de un poliedro irregular. Finalmente, la conclusión de Sofía es incorrecta ya que la fórmula de Euler se cumple en algunos poliedros irregulares.

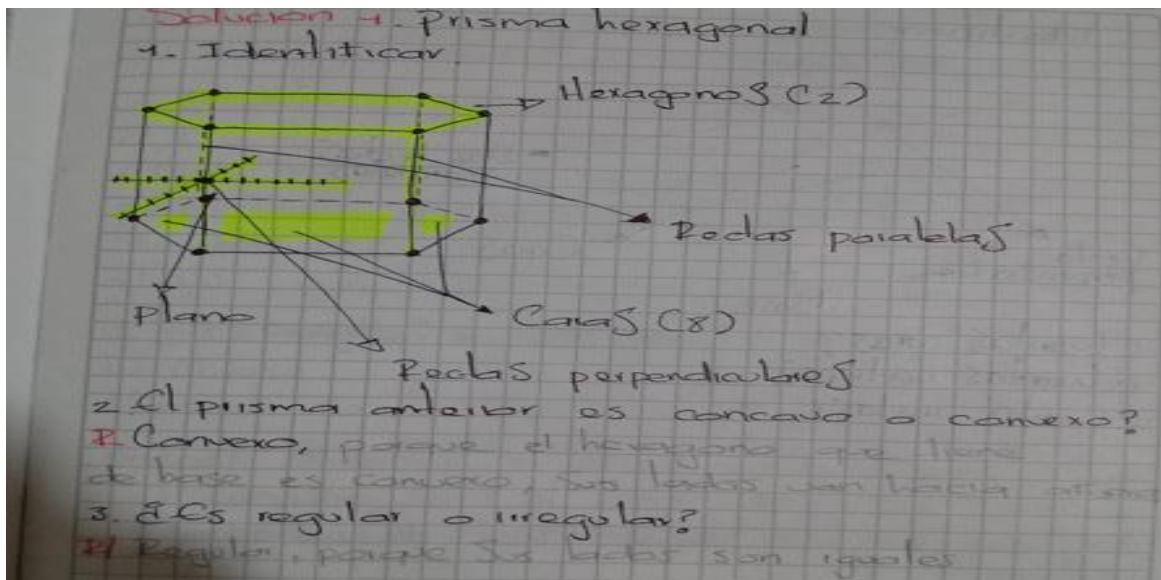
5.3.3.2 Análisis del nivel de razonamiento Laura

La estudiante Laura, actualmente se encuentra cursando el grado noveno en el liceo sagrado corazón de Jesús fue una de las voluntarias para participar en la investigación, esta estudiante se caracteriza por tener sentido de personalidad, participación, creatividad, dedicación y exigencia para adquirir conocimientos amplios en temas afines a la matemática y geometría.

5.3.3.2.1 Nivel de razonamiento I

Figura 21

Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento I Laura

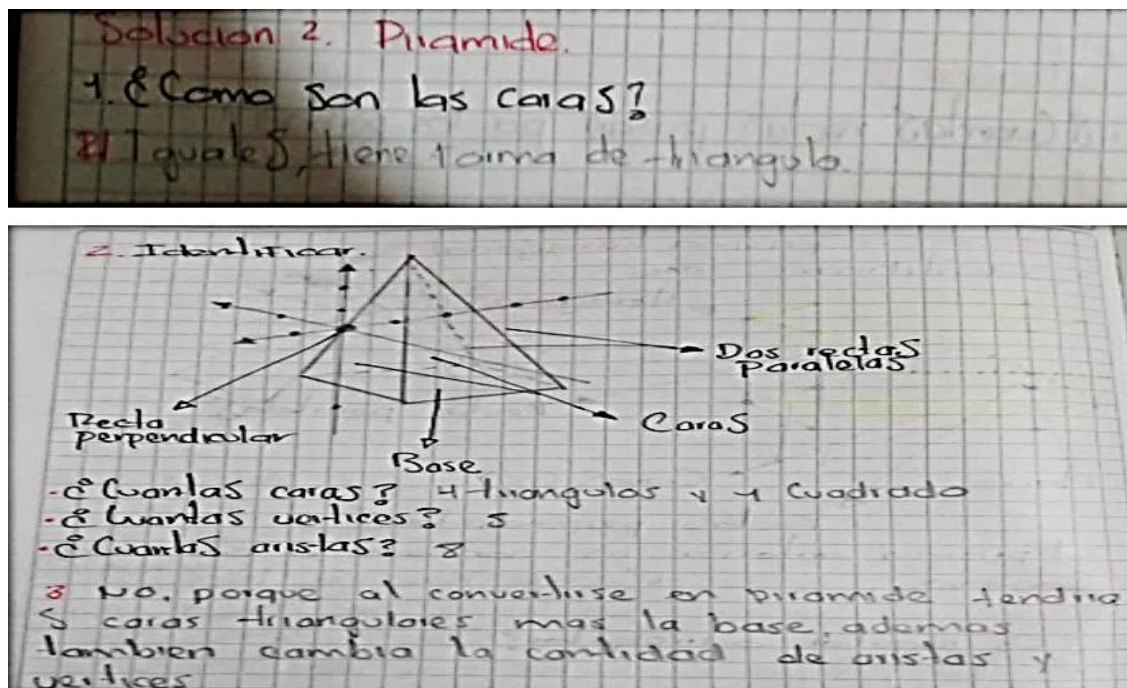


Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 1 en el nivel de razonamiento I. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación desarrollada por Laura, se evidencian las respuestas a cada uno de los interrogantes. Es importante destacar que en la situación 1 Laura utilizó el nivel de razonamiento M.1 en el literal 1), en el literal 2) el nivel de razonamiento retrocedió a M.0 cuando intento dar solución al problema, ¿el prisma hexagonal construido en GeoGebra 3D es cóncavo o convexo?, por lo que, su respuesta fue incorrecta al describir que es una figura convexa ya que todos sus lados son iguales. Por último, en el literal 3) utilizar el razonamiento N.2 (no medición del razonamiento) ya que identifica características y aspecto de un sólido, pero no describe correctamente el por qué es un sólido regular.

Figura 22

Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento I Laura

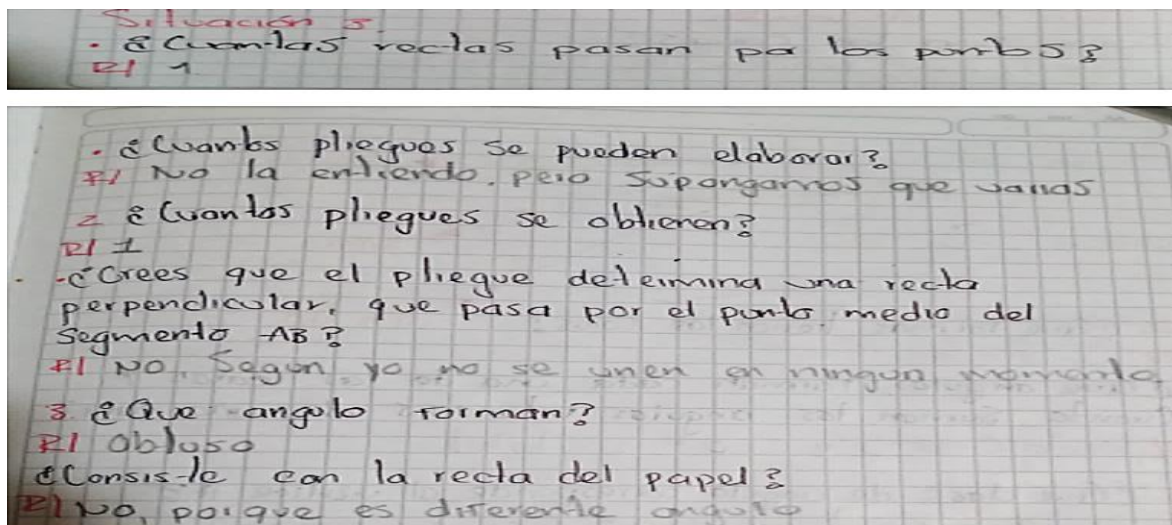


Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 2 en el nivel de razonamiento I. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según las respuestas dadas por Laura en la situación 2, se evidencia que el nivel de razonamiento en los literales 1) y 2) fue M.1 y M.1.3 respectivamente, ya que identifica elementos de la geometría y reconoce propiedades de los sólidos, por otro lado, en el literal 3) el nivel de razonamiento fue N.2 (no medición del razonamiento) pues identifica aspectos y características de un sólido a partir de las situaciones planteadas con anterioridad.

Figura 23

Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento I Laura

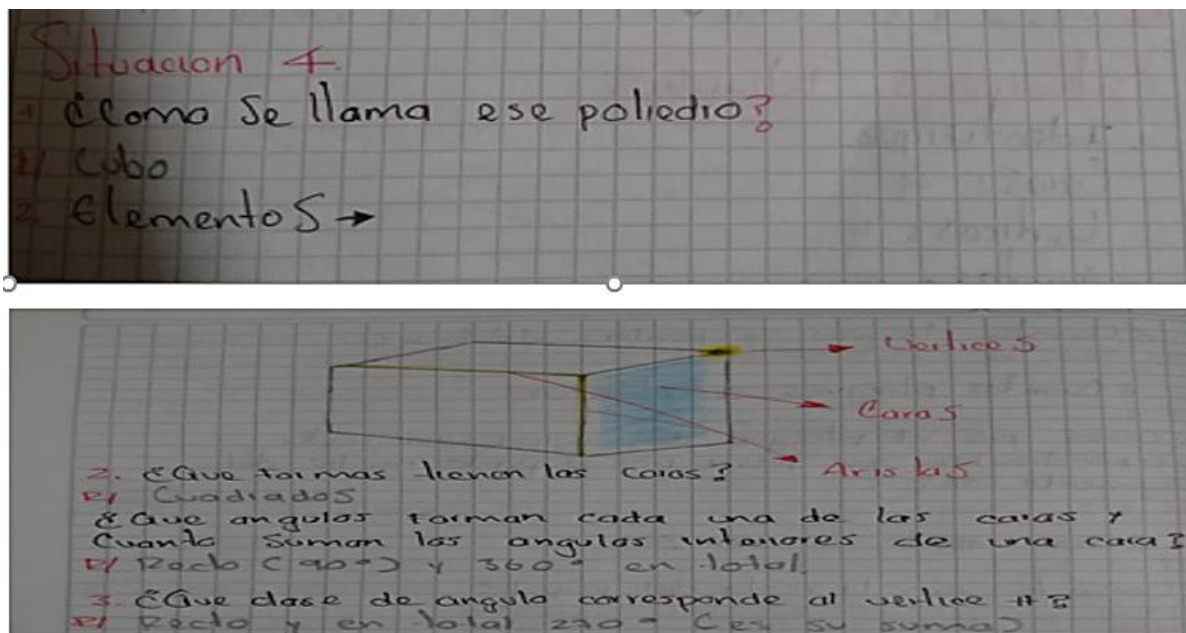


Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 3 en el nivel de razonamiento I. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

De acuerdo con las respuestas de Laura, se evidencia que el nivel de razonamiento expuesto en la situación 3 fue N.O ya que la estudiante compara nociones de la geometría básica de forma imprecisa. También se observó que la estudiante tenía dificultades para aplicar las propiedades del doblado de papel y relacionarlas con nociones de la geometría, tales como relacionar un pliegue con una recta y observar correctamente los ángulos que forman dos pliegues de papel.

Figura 24

Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento I Laura

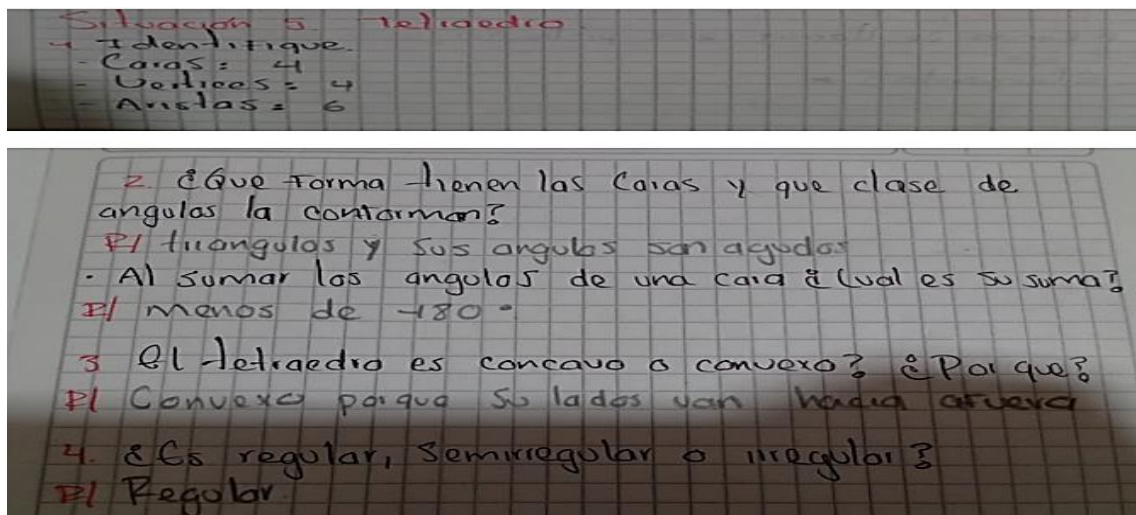


Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 4 en el nivel de razonamiento I. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Partiendo de las respuestas dadas por Laura en la situación 4, el nivel de razonamiento fue M.1.5 en el literal 1) ya que reconoce los elementos de un sólido platónico utilizando recurso como el papel y GeoGebra 3D. En el literal 2) y 3) el nivel de razonamiento fue M.1.3 y M.1.5 respectivamente, puesto que identifica y caracteriza figuras planas correctamente, también se puede evidenciar que el estudiante reconoce correctamente cuántos ángulos concurren en el vértice de un cubo o hexaedro.

Figura 25

Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento I Laura



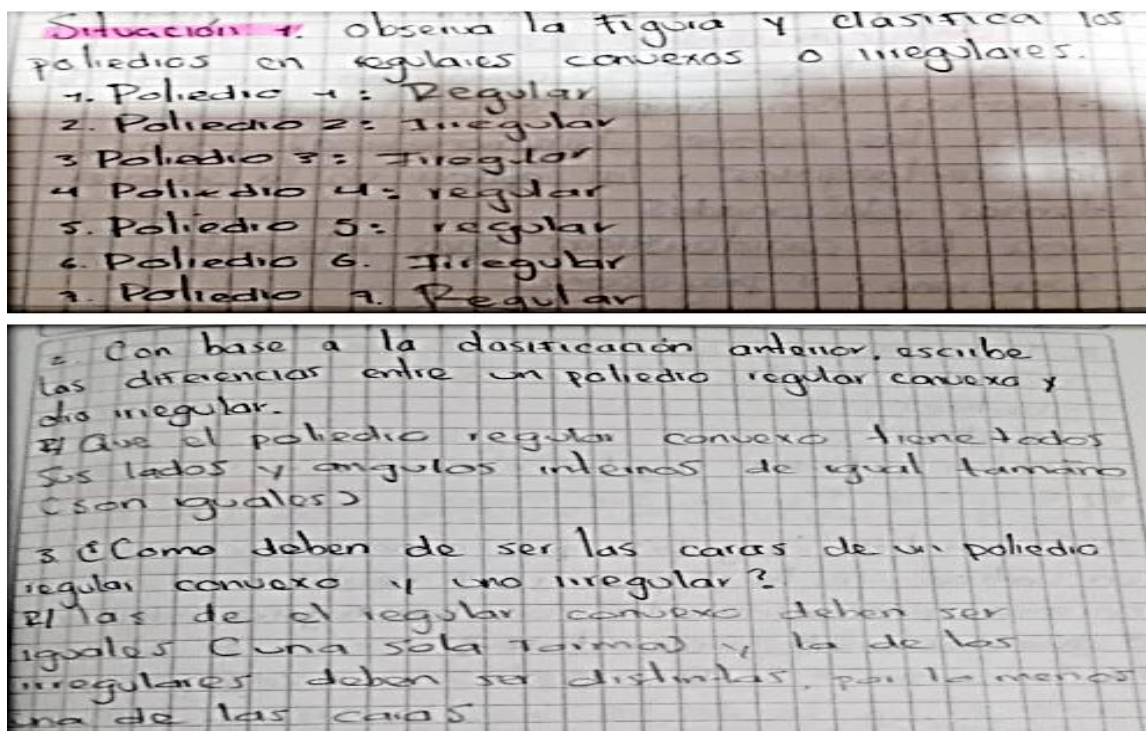
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 5 en el nivel de razonamiento I. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación realizada por Laura, el nivel de razonamiento que se encuentra M.1.4 y M.1.5 dado que reconoce elementos básicos de los sólidos tales como caras, vértices, aristas e identifica las propiedades de una figura plana. Por otro lado, se evidencia en el literal 3) la estudiante responde correctamente a la pregunta ¿el tetraedro construido en origami es cóncavo o convexo? ¿Por qué? Y se encuentra en el nivel N.1.1 (no medición del razonamiento), pero no justifica correctamente porque el sólido construido es convexo. Por lo que su nivel de razonamiento sigue con la dificultad presentada en la situación 1 en el literal 2) cuando su respuesta fue errónea y no identificaba las regularidades de un sólido (MO).

5.3.3.2.2 Nivel de razonamiento II

Figura 26

Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento II Laura

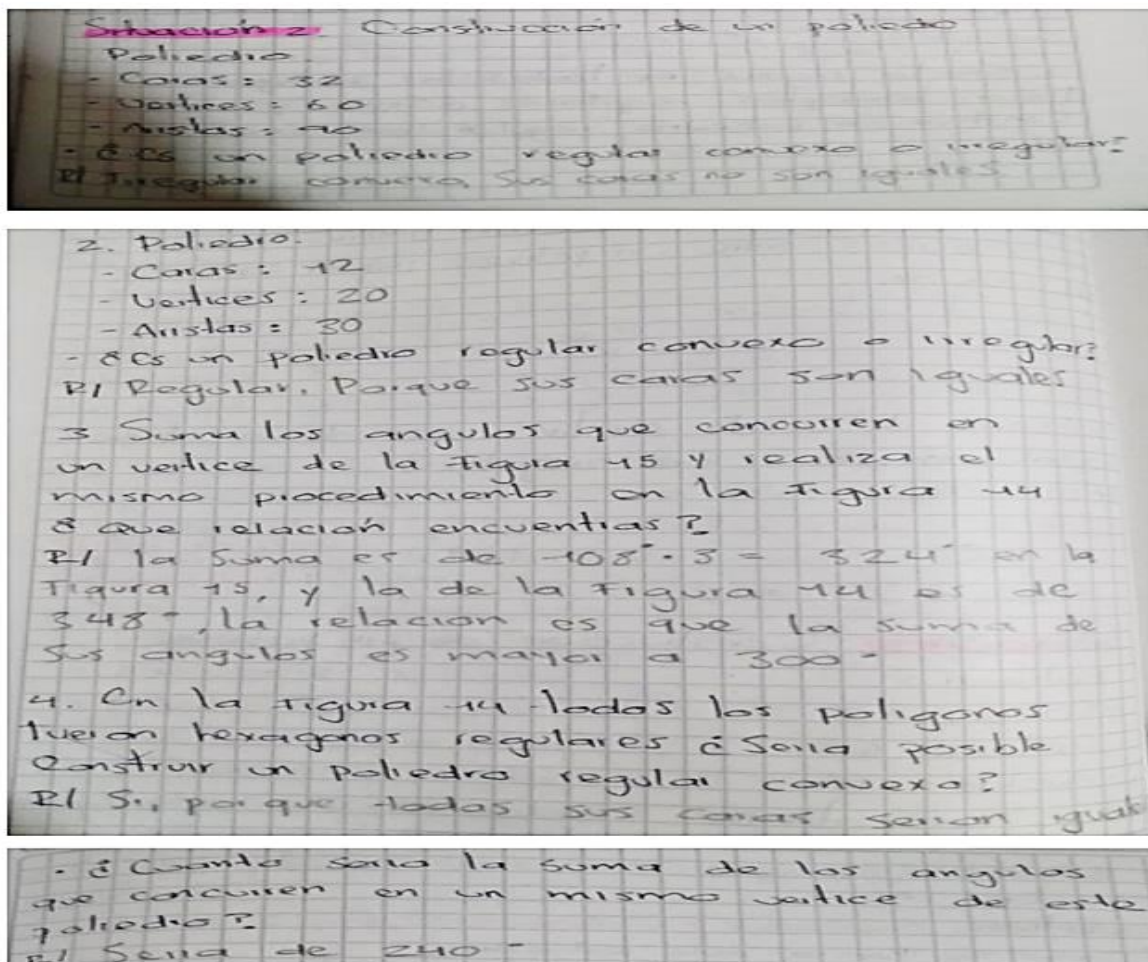


Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 1 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación 1 realizada por Laura, el nivel de razonamiento fue M2.3, ya que reconoce la regularidad de los poliedros como una estructura conformada por polígonos iguales o distintos si el poliedro es irregular.

Figura 27

Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento II Laura



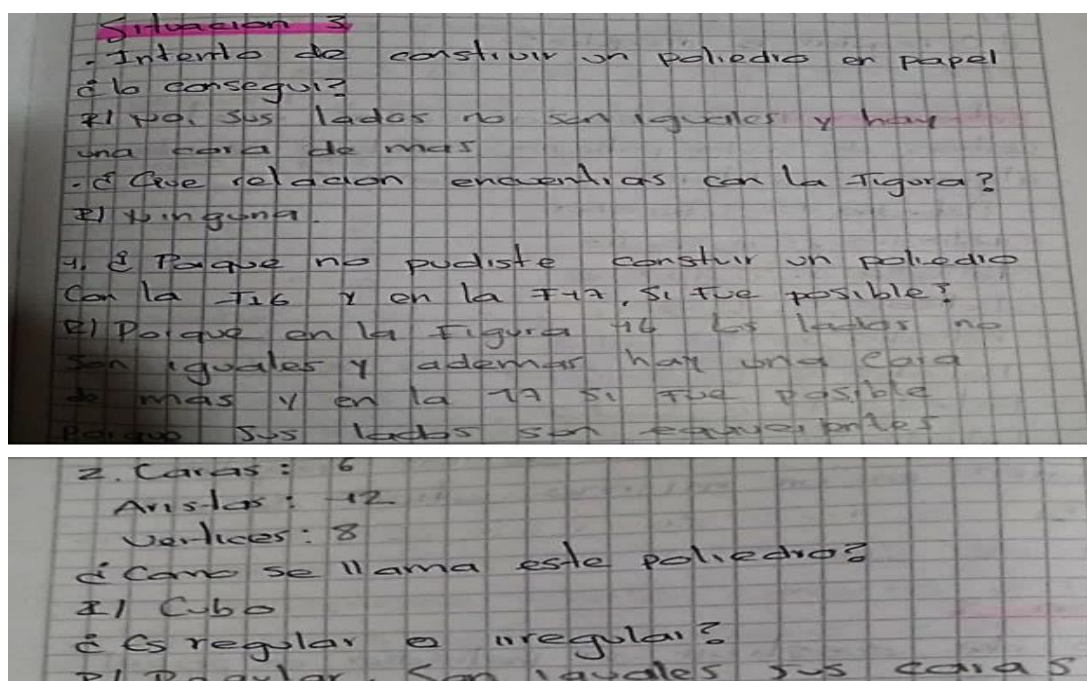
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 2 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación realizada por Laura, el nivel de razonamiento que se encuentra en el literal 1) y 2) es M.1.5 y M.2.3, ya que la estudiante reconoce los elementos de un sólido platónico como: caras, vértices y aristas, utilizando GeoGebra 3D para facilitar el proceso, además reconoce regularidades de los poliedros. Por otro lado, se observa que la estudiante utiliza el mismo esquema planteado en la anterior situación para dar respuestas a estos literales, visualiza las caras de las figuras geométricas y a partir de ellas determina si el poliedro es regular o irregular.

En el literal 3) el nivel de razonamiento fue de M.3.1, dado que, la estudiante suma los ángulos internos que concurren en un vértice correctamente pero no concluye adecuadamente que los poliedros no pueden exceder los 360° . Por ende, en el literal 4) el nivel de razonamiento de Laura retrocede a MO ya que la suma de los ángulos que concurren en un vértice va a exceder los 360° y no podrá construir un poliedro con estas características.

Figura 28

Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento II Laura.



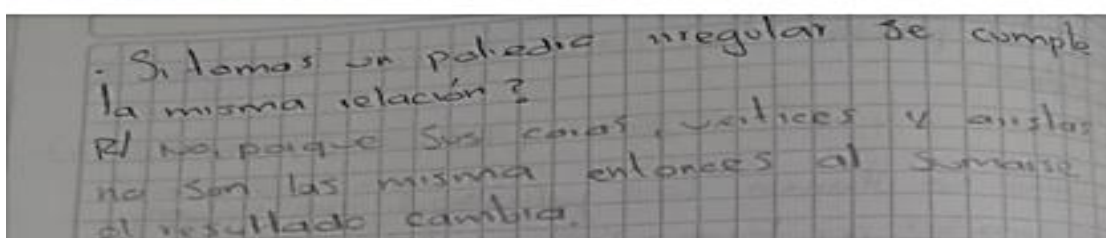
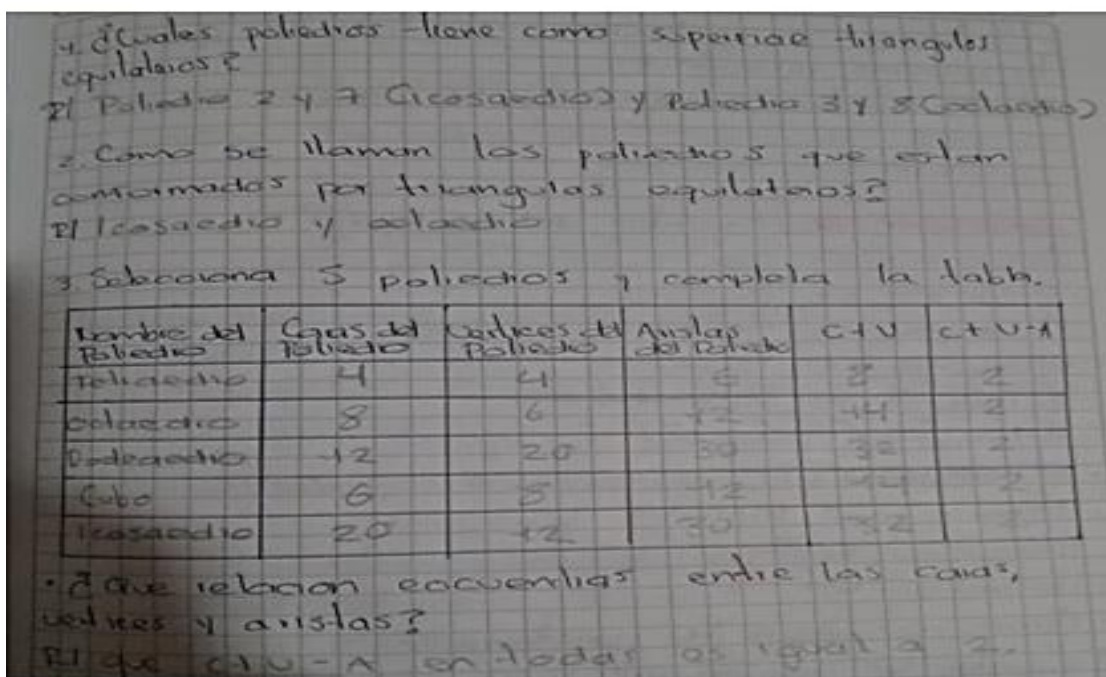
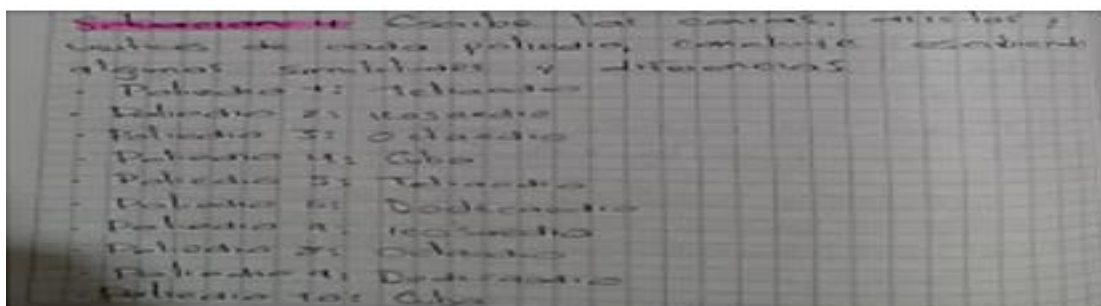
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 3 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación realizada por Laura, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.2.2 y en el literal 2) el nivel de razonamiento retrocedió a MO ya que no relaciona correctamente los diagramas que forman un poliedro construido en origami y otro en GeoGebra 3D. En el literal 3) el nivel de razonamiento de Sofía fue M.1.5 y M.2.1 puesto que, reconoce los elementos de un

cubo o hexaedro en GeoGebra 3D como una estructura conformada por polígonos regulares y establece relaciones entre poliedros construidos en origami y GeoGebra 3D.

Figura 29

Desarrollo situación 4, nivel de razonamiento II Laura



Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 4 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación 4 realizada por Laura, el nivel de razonamiento fue N.2.1 (no medición) ya que establece relaciones entre las estructuras de un poliedro construido en GeoGebra 3D y otro en origami e identifica características de un poliedro. Por otro lado, en el literal 2) la estudiante está en un nivel de razonamiento avanzado M.3.2 puesto que encuentra la relación del teorema de Euler al decir que la suma de las caras y vértices menos las aristas de un poliedro regular convexo dan como resultado dos. Por otro lado, el nivel de razonamiento avanzado M.3.2 no es consistente y retrocede a M.1.5, ya que al tratar de dar respuesta al teorema de Euler para un poliedro irregular Laura comete el error al justificar que no se cumple porque las caras, vértices y aristas no son iguales.

Figura 30

Desarrollo situación 5, nivel de razonamiento II Laura

Situación 5 Nombre del poliedro:

- Hexamino 1: Tetraedro
- Hexamino 2: Dodecaedro
- Hexamino 3: No es un poliedro
- Hexamino 4: Tetraedro
- Hexamino 5: Octaedro
- Hexamino 6: Pirámide Hexagonal
- Hexamino 7: Pirámide Cuadrada Recta
- Hexamino 8: Pirámide Triangular
- Hexamino 9: Pirámide Hexagonal
- Hexamino 10: Pirámide Triangular Recta

- Hexaminos para la construcción -

2. Escribe las diferencias y similitudes en la tabla.

Figuras	Diferencias	Similitudes
Tg 19	- la cantidad de caras - Regulares e irregulares	- la mayoría de las caras son triángulos - Demuestran centros y ejes de simetría
Tg 20	- la base de cada una - los polígonos de las caras son distintos	- Muchos triángulos - Muchos rectángulos - irregulares

2.1 ¿Qué hexamino permite construir el dodecaedro?

2.1 el Hexamino 2, ya que tiene exactamente 12 caras iguales

2.2 ¿Qué clase de poliedro es? Dodecaedro regular

• ¿Qué Hexamino permite construir una pirámide recta?

2.1 Hexamino 7, es recta

• ¿Qué clase de poliedro es? Irregular

Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 5 en el nivel de razonamiento II. Fuente: elaboración propia de la estudiante Laura.

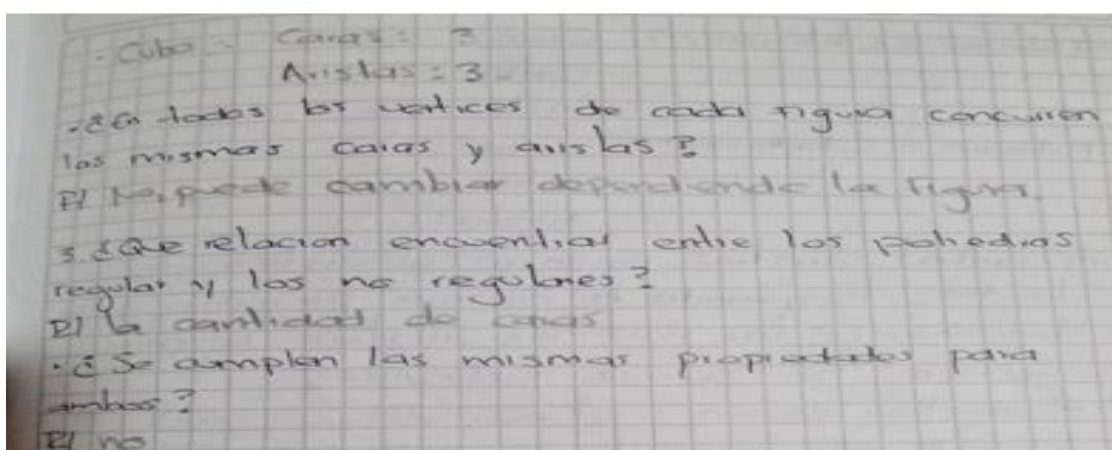
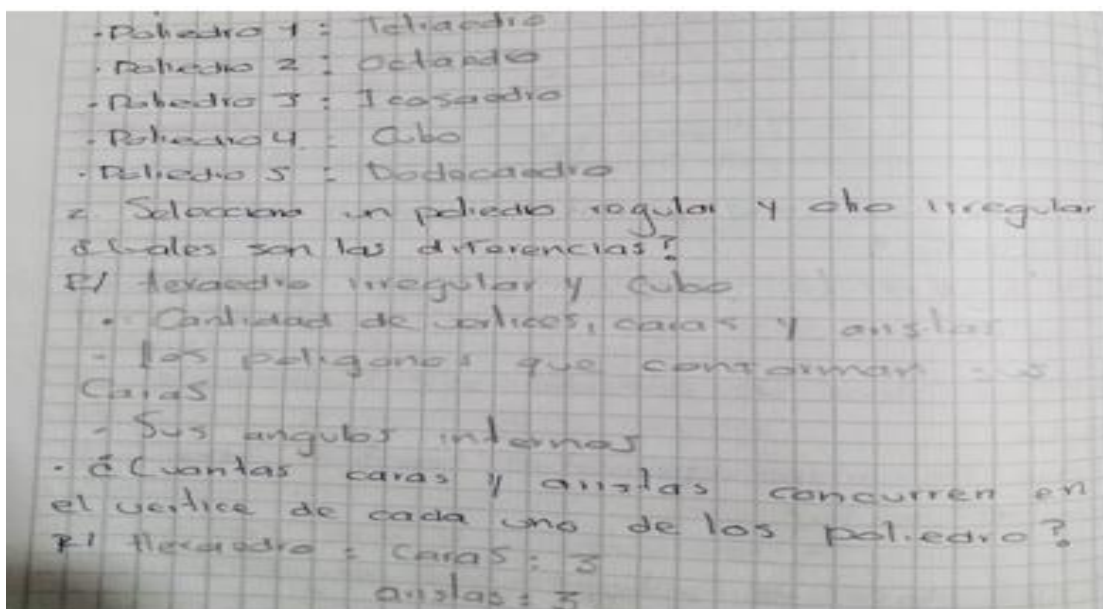
Según la situación 5 realizada por Laura, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.2.2, ya que identifica correctamente los diagramas que conforman un poliedro regular e irregular. En el literal 2) Sofía está en el nivel N2 y N2.1 (no medición) ya que hace comparaciones entre diagramas de un poliedro regular e irregular. Siguiendo con el literal 3) el nivel de razonamiento fue M2.2 y M.2.3 ya que reconoce correctamente el diagrama de un dodecaedro y sus características para determinar que está conformado por polígonos regulares. Por último, en el

literal 4) el nivel de razonamiento fue M2.2 puesto que reconoce el diagrama de un poliedro irregular e identifica su irregularidad.

5.3.3.2.3 Nivel de razonamiento III

Figura 31

Desarrollo situación 1, nivel de razonamiento III Laura



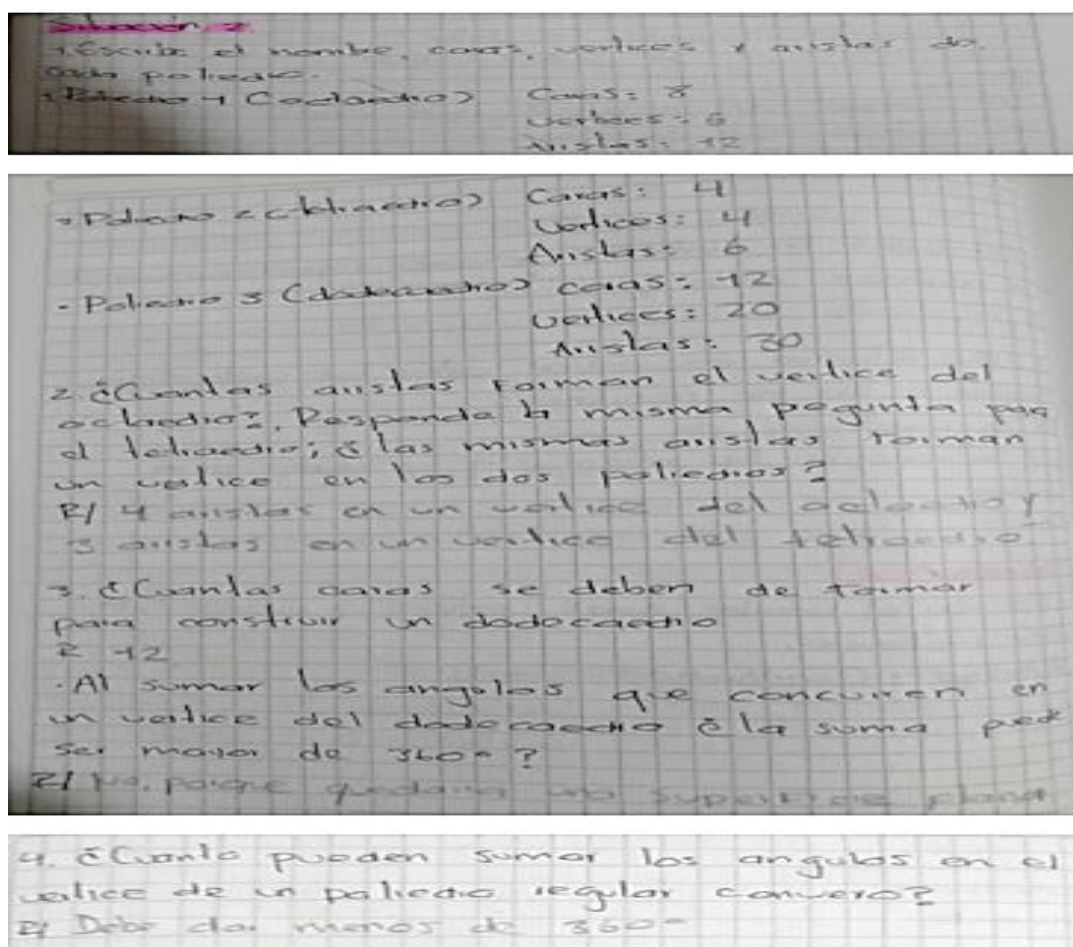
Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 1 en el nivel de razonamiento III. Fuente: Elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación 1 realizada por Laura, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.2, ya que reconoce los 5 sólidos platónicos como una estructura conformada por polígonos

regulares. En el literal 2) el nivel de razonamiento fue N3 (no medición) ya que relaciona las características de un poliedro regular e irregular, luego el nivel de razonamiento retrocedió a N1 (no medición) puesto que no reconoce que en el vértice de un poliedro concurren el mismo número de caras y aristas. En el literal 3) el nivel de razonamiento de Laura retrocede a MO al responder ¿qué relación hay entre un poliedro regular e irregular? “la cantidad de caras”. A lo que esta respuesta es incorrecta dado que no identifica las características y propiedades de los poliedros.

Figura 32

Desarrollo situación 2, nivel de razonamiento III Laura.



Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 2 en el nivel de razonamiento III. Fuente: Elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación 2 realizada por Laura, el nivel de razonamiento en el literal 1) fue M.1.5, ya que reconoce elementos de un sólido platónico como: caras, vértices y aristas. En el literal 2) el nivel de razonamiento fue M3 dado que reconoce que en el vértice de un poliedro concurren el mismo número de caras y aristas. Siguiendo, con el literal 3) y 4) el nivel de razonamiento de Laura fue M3.1 ya que comprende que la suma de los ángulos en el vértice de un poliedro regular convexo no puede exceder los 360° .

Figura 33

Desarrollo situación 3, nivel de razonamiento III Laura.

Situación 3: A - Teorema de Euler
- Completa la tabla.

Nombre de Poliedros	Número de caras	Número de vértices	C+V	Número de aristas	(C+V)-A
Tetraedro	4	4	8	6	2
Octaedro	12	20	32	30	2
Cubo	6	8	14	12	2
Octaedro	8	6	14	12	2
Icosaedro	20	12	32	30	2

2. Ahora observa los siguientes poliedros y Completa la tabla.

Nombre de Poliedros	Número de caras	Número de V	C+V	Número de aristas	C+V-A
Tetraedro	4	4	8	6	2
Cilindro	3	0	3	2	1
Cono	2	1	3	1	2
Cubo	6	8	14	12	2

Figura X	6	8	14	12	2
Octaedro	12	20	32	30	2
Prisma	5	5	10	8	2

3. En el Teorema de Euler, la suma del número de caras con el número de vértices, menos el número de aristas es siempre igual a 2?, ¿Este Teorema se cumple para todos los poliedros o solo poliedros regulares convexos?

El Si, porque son convexos, así sea caras iguales

Nota. La siguiente figura muestra el desarrollo de la situación 3 en el nivel de razonamiento III. Fuente: Elaboración propia de la estudiante Laura.

Según la situación 3 realizada por Laura, el nivel de razonamiento fue M3.2 al comprender la fórmula de Euler para poliedros regulares convexos (los cinco sólidos platónicos), por otro lado, se evidencia la dificultad que tuvo al relacionar la fórmula de Euler con algunos poliedros irregulares y su nivel de razonamiento retrocedió a M.1.5 al no identificar correctamente las caras, vértices y aristas del cilindro.

6. Conclusiones

El perfil del razonamiento de Sofía en términos de la progresión de aprendizaje de CBA para fortalecer el razonamiento espacial cuando se transforman poliedros a polígonos es: (a) todavía se basa en gran medida en el razonamiento M.1; (b) ha comenzado a fortalecer el razonamiento M.2 al empezar a comparar las caras de un poliedro y determinar las propiedades de cada uno, pero (c) aún no comprende las regularidades de algunos poliedros MO. Por lo tanto, la instrucción futura debe ayudar a Sofía (a) a conectar su iteración de M1 con M2 para comprender con exactitud las propiedades de los poliedros regulares e irregulares, (b) comprender por qué un poliedro es cóncavo y convexo (M0) y (c) generalizar un esquema correcto entre las caras, vértices y aristas para determinar características y propiedades de los poliedros regulares e irregulares.

Por otro lado, la estudiante Laura, al igual que Sofía, alcanzó los tres niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele en esta investigación pero con algunas dificultades en los subniveles, por lo que el perfil del razonamiento en términos de la progresión de aprendizaje de CBA para fortalecer el razonamiento espacial cuando se transforman poliedros a polígonos es: a) se basa en gran medida al nivel M2 al identificar, comparar y reconocer aspectos de un poliedro (diagramas, características y propiedades), b) en algunas situaciones alcanza el tercer nivel (M3) de razonamiento al generalizar un esquema correcto entre las situaciones a resolver, el cual, era identificar las caras del poliedro y luego compararlas para identificar las características del poliedro. C) a un no comprende con exactitud el teorema de Euler para poliedros irregulares M1.5. En tanto, la instrucción futura debe de ayudar a: a) Laura a plantear

un esquema que le ayude a determinar con exactitud las propiedades de un poliedro irregular, b) comprender por qué el teorema de Euler se cumple para algunos poliedros irregulares.

Finalmente, se concluye que la progresión de los estudiantes respecto a los niveles de sofisticación que alcanzan dentro de los respectivos niveles de razonamiento, se da en la medida en que desde el aporte de los docentes, se evalúen los conocimientos previos y adquiridos por los estudiantes dentro del análisis de las progresiones de aprendizaje, por tanto la comprensión de que un estudiante esté en un nivel u otro, facilita los procesos posteriores en lo que tiene que ver con la retroalimentación docente, así como las correcciones correspondientes cuando hubiere lugar. Esto es, que en el análisis de los niveles de sofisticación de los estudiantes, se encuentran las claves para facilitar la apropiación de razonamiento espacial, pues una vez el docente identifique las principales falencias de los estudiantes y las clasifique dentro de los niveles de razonamiento y de acuerdo con cada uno de los niveles de sofisticación correspondientes, éste tendrá las herramientas e insumos necesarios para comprender las dificultades de los estudiantes y así, posteriormente, tratarlas.

No obstante, pese a que ambas estudiantes evaluadas terminaron el ejercicio el nivel de razonamiento similares, es oportuno destacar que, de acuerdo con el análisis arrojado por las progresiones de aprendizaje, la estudiante Laura transitó de manera más frecuente sobre los niveles de sofisticación que no implican una medición de razonamiento, es decir, sobre la no medida del razonamiento. De manera diferente, la estudiante Sofía logró transitar más frecuentemente sobre los niveles de sofisticación que sí implican una medición, es decir, las medidas del razonamiento. Sin embargo, se resalta que ambas estudiantes presentaron diversas dificultades para la comprensión de los conceptos mínimos requeridos para situarse en las medidas del razonamiento, por lo que se concluye que, si bien el ejercicio fue exitoso en la medida en que ambas estudiantes tuvieron un progreso evidente, se requiere de mayor énfasis

en el fomento del razonamiento espacial de las estudiantes en función de lograr mejoras más perceptibles y cuyo ritmo de progresión sea más fluido.

7. Referencias

- Alcaide, J. (2016), *Enseñanza de la geometría utilizando las TICS y materiales manipulativos como recurso didáctico en 4º grado de primaria*, universidad internacional de la Rioja, Girona).
- Alonso, A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo de Van Hiele, con los estudiantes de 6 grado del colegio San José de la comunidad marista.
- Arca, S. L. (2007). Sólidos Platónicos. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, (12), 171-174.
- Alexandrov, A. D, (2003). Convex polyhedra. Springer-Verlang, Berlin. Monographs in Mathemat
- Battista, T. (2011) "Conceptualizations and Issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication,"The Mathematics Enthusiast: Vol. 8 : No. 3 , Article 5
- Cerón, C. H., & Gutiérrez, L. V. (2013). La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos.
- Cuadrado, V. A., & Mauriz, B. P. (2016). Concepciones y modelos del profesorado de primaria en formación acerca de la tuberculosis. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34(1), 33-52.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. Journal for research in mathematics education, 22(1), 3-29.
- Crotte, I. R. R. (2011). Elementos para el diseño de técnicas de investigación: una propuesta de definiciones y procedimientos en la investigación científica. Tiempo de educar, 12(24), 277-297.

- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Handbook of research on mathematics teaching and learning, 420, 464.
- Díaz, A., Rodríguez, Á. G., & Pastor, A. J. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34(1), 107-128.
- Duarte, S., Márquez, M., & Valbuena, B. (2020). El rol del docente en la argumentación matemática de estudiantes para la resolución de problemas. Revista Espacios, 41(09), 9-21.
- Estrada Alarcón, M. A. (2018). Áreas de polígonos regulares e irregulares de figuras planas (Master's thesis, Universidad Nacional de Educación).
- Ferrara, F., y Mammana, M. F. (2014). Seeing in Space Is Difficult: An Approach to 3D Geometry through a DGE. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Flórez, G. J. (2011). De los poliedros a los polígonos usando herramientas tecnológicas para potenciar el avance entre niveles de razonamiento geométrico. Facultad de Ciencias.
- Florez, S., y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. Educación Matemática, vol. 31, núm. 1, pág. 7-37
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 3, i-196.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. PNA, 9(2), 53-83.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial, Revista EMA, Vol. 3, n° 3, P. 193-220.
- Guerra Zamora, P., & Sebastián Balmaceda, C. (2015). Creencias epistemológicas en profesores que postulan al Programa de Acreditación de Excelencia Pedagógica: análisis

- descriptivos y comparativos entre profesores que se desempeñan en los diferentes niveles de enseñanza. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 41(2), 107-125.
- Hernández, B., & Bastidas, R. (2014). Uso complementario de materiales manipulativos y del ambiente de Geometría Dinámica Cabri 3D en la comprensión de las propiedades geométricas del cubo (Doctoral dissertation, Universidad de Nariño).
- ICS. Translation of the 1950 Russian edition by N. S Dairbekov.. P. 7-16
- Leung, A., y Lopez Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. In *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 346-353). Paris 7: Hanoi Institute of Technology and Didirem Université.
- Londoño, J., Paola Andrea. (2005). *Actividades con doblado y recorte de papel como alternativa para generar aprendizaje en geometría*. (Trabajo de grado), Universidad del Valle, Cali.
- Martin, G.E. (1998). Paperfolding. In: *Geometric Constructions. Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0629-3_10.
- Matus, L. (2011). Progresiones de aprendizaje en el área del enlace químico. Análisis de coherencia entre capacidades de los estudiantes y las representaciones usadas en los libros de texto. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 147-155.
- Mialich, F. R. (2013). Poliedros y Teorema de Euler.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia: Panamericana Formas e Impresos.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88

- Owens, K., y Outhred, L. (2006). La complejidad del aprendizaje de la geometría y la medición. En Manual de investigación sobre la psicología de la educación matemática (pp. 83-115). Rémol.
- Prieto Ruz, T., Blanco López, Á., & Brero Peinado, V. (2002). La progresión en el aprendizaje de dominios específicos: una propuesta para la investigación. Enseñanza de las Ciencias, 20(1), 003-14.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains (p. 239). Armand colin.
- Reyes, C. A. (2006). El origami como herramienta didáctica para desarrollar pensamiento geométrico en los niños de transición a segundo grado.
- Romo Santos, M. (2005). El nacimiento de la geometría: los Elementos de Euclides. Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, (71), 65-72.
- Sack, J., Vazquez, I., & Moral, R. (2010). Elementary children's 3-D visualization development: Representing top-views. Proceedings of PME 34, 4, 113-120.
- Santa,, C., y Gualdróny , É. (2018). Colectivo de profesores-con-doblado-de-papel en tareas de geometría escolar. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32, 1092-1112.
- Santa Ramírez, Z. M., y López, C. M. J. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (31), 338-362.
- Trouche, E., Sander, E., y Mercier, H. (2014). Los argumentos, más que la confianza, explican el buen desempeño de los grupos de razonamiento. Revista de Psicología Experimental: General, 143(5), 1958.
- Usiskin, Z. (1982). Niveles y logros de Van Hiele en geometría de la escuela secundaria.

Valencia Montenegro, A. (2012). *Prácticas Discursivas y Recursos Pedagógicos en Clases de Geometría en la Educación Básica: El Caso del Origami. (Maestría en Educación), Universidad del Valle, Cali.*

Vargas, G., Gamboa, R. (2013). *El modelo de van hiele y la enseñanza de la geometría*, revista uniciencia, Vol.27, P. 74-94, universidad nacional heredia, Costa Rica.

8. Anexos

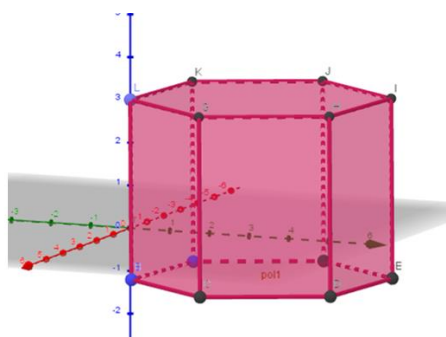
Anexo A Progresión de aprendizaje

Asignatura: Geometría	Curso: Noveno
Nombre:	Tiempo total: 130 minutos
Nivel de razonamiento I	Situación 1-5

Situación 1. En la figura 34 se presenta un prisma hexagonal:

Figura 34

El prisma hexagonal



Nota. La figura muestra un prisma hexagonal en GeoGebra 3D. Fuente: Elaboración propia.

1. Identifica dos hexágonos, un plano, dos rectas perpendiculares, dos rectas paralelas y las caras del prisma hexagonal. (utiliza colores).

2. ¿El prisma hexagonal construido en GeoGebra 3D es cóncavo o convexo?

_____ ¿Por qué? _____

3. ¿La figura 34 es un poliedro regular, semirregular o irregular? _____ justifica tu respuesta.

Situación 2. construye una pirámide regular utilizando GeoGebra.

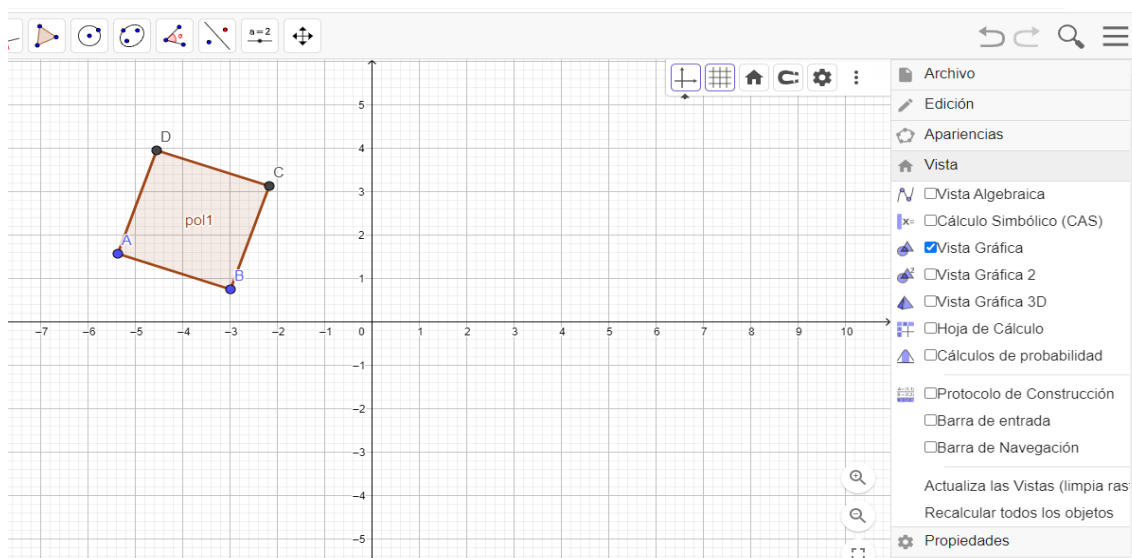
Sugerencias:

a. Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/classic/cv6e5wkx>

b. En el enlace anterior encontraras la figura 35, busca la opción “vista grafica 3D”

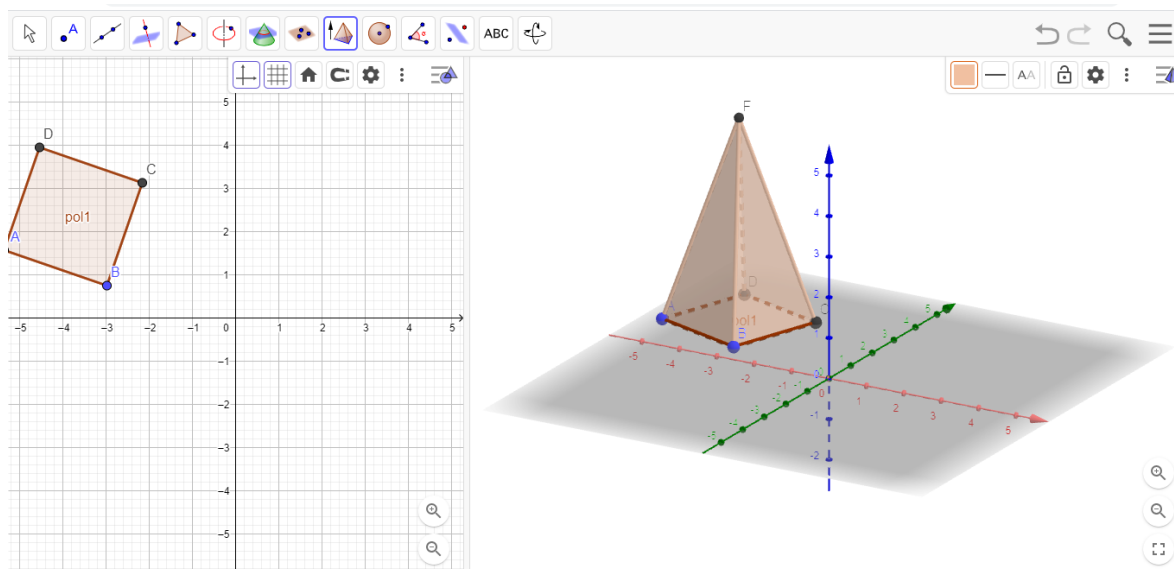
Figura 35

Macro proposición del cuadrado en GeoGebra



Nota. La figura muestra una macro proposición de un cuadrado en GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

c. en la vista grafica 3D, busca la opción “Extrude a pirámide” y selecciona el cuadrado e ingresa el numero 5 como la altura de la pirámide regular. (como se observa en la figura 36)

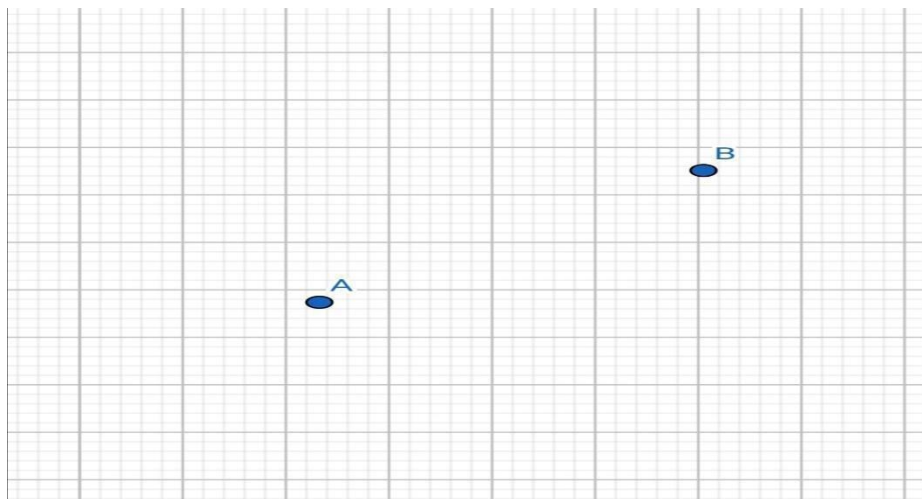
Figura 36*pirámide regular GeoGebra 3D*

Nota. La figura muestra la Construcción pirámide regular GeoGebra 3D. Fuente: Elaboración propia.

d. Busca la opción “Desarrollo” y explora en vista 2D y 3D, para animar el desarrollo ubique el cursor del mouse en el deslizador de la vista grafica 2D, al hacer click derecho se desplegará una ventana donde activara la animación. con base a esta construcción responde las siguientes preguntas.

1. ¿cómo son las caras de la pirámide regular? _____ ¿Qué forma tienen?
2. Identifica dos rectas paralelas, dos rectas perpendiculares, las caras y la base de la pirámide regular. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene la pirámide regular?
3. En la figura 35, si formas un pentágono y repite el procedimiento aplicado en la figura 36. ¿el poliedro resultante tendría el mismo número de caras, aristas y vértices de la pirámide regular? Justifica tu respuesta.

Situación 3. Considere el punto A y el punto B de la figura 37:

Figura 37*Propiedades del doblado de papel*

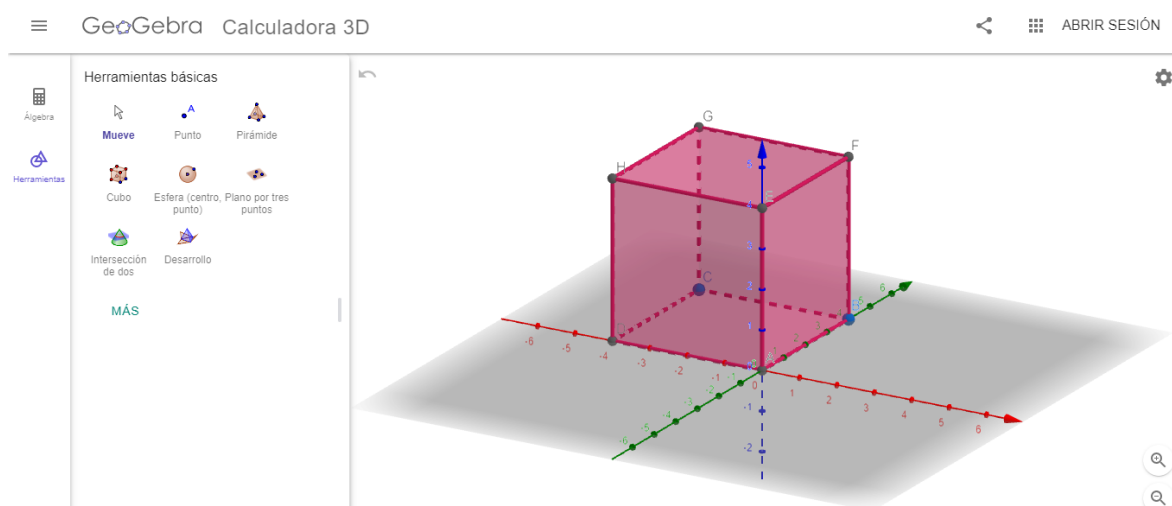
Nota. La figura muestra dos puntos A y B graficados en GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

1. ¿Cuántas rectas pasan simultáneamente por los puntos A y B de la figura 37? Ahora toma un trozo de papel y dibuja las marcas que designan los puntos A y B, ¿Cuántos pliegues se pueden elaborar que contenga a la vez los puntos A y B?
2. Doble el papel de tal manera que coincidan los puntos A y B. ¿Cuántos pliegues se obtiene al hacer coincidir los puntos A y B?, si haces coincidir los dos puntos doblando la hoja y se crea un pliegue, ¿crees que el pliegue determina una recta perpendicular, que pasa por el punto medio del segmento AB? Justifica.
3. En GeoGebra traza el segmento AB y luego la recta perpendicular al segmento AB. ¿Qué ángulo forman estas rectas? _____, ¿coincide con la recta construida en el papel? Justifica tu respuesta.

Situación 4. El cubo o hexaedro.

Figura 38

El Cubo o Hexaedro



Nota. La figura muestra la Construcción del Cubo o Hexaedro. Fuente: Elaboración propia.
<https://www.geogebra.org/3d/jfgkquxm>.

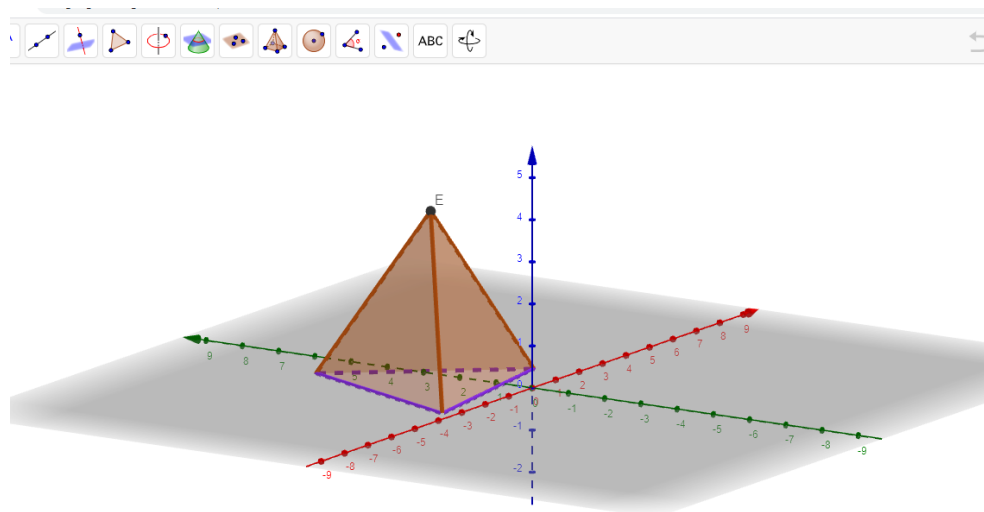
1. Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/3d/jfgkquxm>, ¿Cómo se le llama al poliedro construido en el anterior enlace? destaca elementos del poliedro como: caras (azul), vértices (amarillo) y aristas (verdes), para ello utiliza relleno y los comandos de GeoGebra 3D. (clic derecho y en propiedades están las opciones de relleno y color)

2. En la figura 38, ¿Qué formas tienen las caras? _____ ¿Qué ángulos forman cada una de las caras y cuánto suman los ángulos interiores de una cara? (sugerencia: use primero la opción herramientas y posteriormente desarrollo del poliedro)

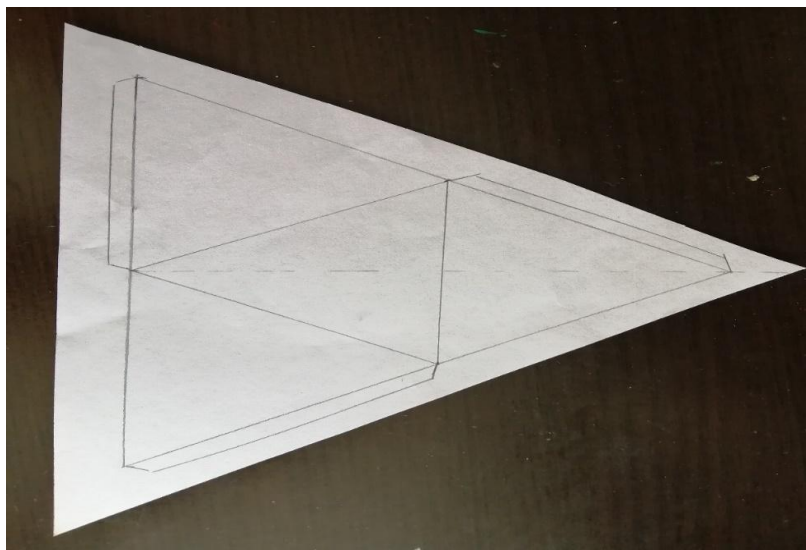
3. En la figura 38 observe el punto H, ¿qué clase de ángulo corresponde al vértice H? _____ cuando sumas los ángulos que determinan el vértice H, ¿Cuál es su suma? _____

Situación 5. Tetraedro en GeoGebra 3D y origami.

Considera la figura 39 en GeoGebra 3D y la figura 40 en origami, resuelva las siguientes preguntas acerca de algunas propiedades de estas:

Figura 39*Tetraedro en GeoGebra 3D*

Nota. La figura muestra la Construcción del tetraedro en GeoGebra 3D. Fuente: Elaboración propia
<https://www.geogebra.org/classic/s5trkkqe>.

Figura 40*Tetraedro en Origami*

Nota. La figura muestra la Construcción del tetraedro en origami. Fuente: Elaboración propia.

1. Indique cuantas caras, vértices y aristas tiene la figura 39. Realiza el mismo procedimiento para la figura 40, ¿tienen el mismo número de caras, vértices y aristas?

2. observe las dos figuras, ¿Qué forma tienen las caras y que clase de ángulos la conforman?

_____ al sumar los ángulos de una cara, ¿Cuánto es su suma? _____.

3. ¿el tetraedro construido en origami es cóncavo o convexo? _____ ¿Por qué?

4. ¿la figura 39 es un poliedro regular, semirregular o irregular? _____ justifica tu respuesta.

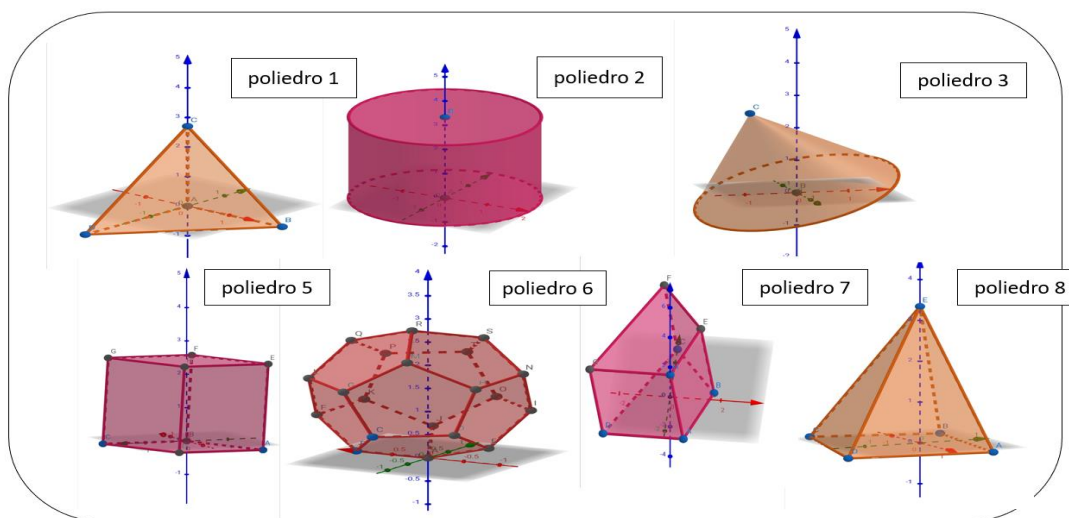
Asignatura: Geometría	Curso: Noveno
Nombre:	Tiempo: 150 minutos
Nivel de razonamiento II	situación 1-5

Situación 1:

1. Observa la figura 41 y clasifica los poliedros en regulares convexos, semirregulares o irregulares.

Figura 41

Poliedros regulares e irregulares.



Nota. La figura muestra la Construcción de alguno poliedros regulares e irregulares. Fuente: Elaboración propia.

2. con base a la clasificación anterior, escribe las diferencias entre un poliedro regular y otro irregular.

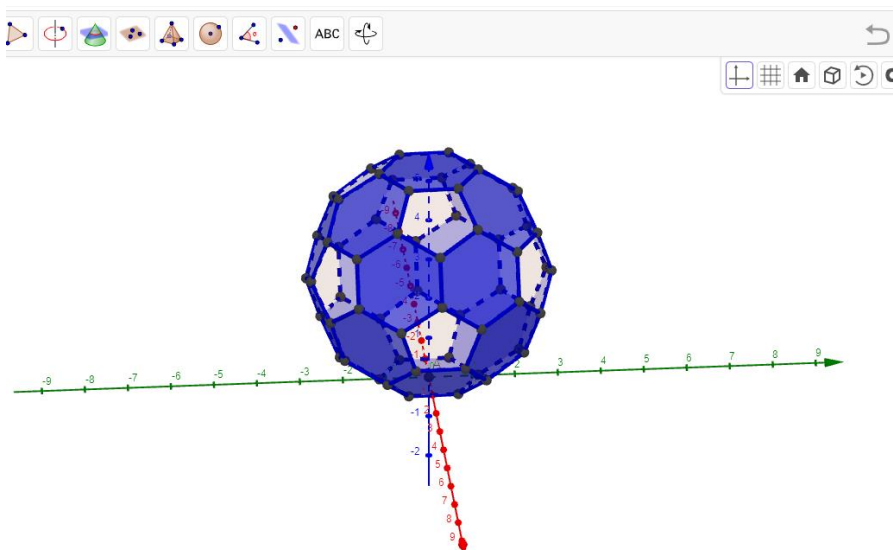
_____¿Cómo deben de ser las caras de un poliedro regular y uno irregular?

Situación 2. construcción de un poliedro en GeoGebra 3D

1. Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/classic/sqjrqqpq>, donde observarás la figura 42 y escribe cuantas caras, vértices y aristas tiene el poliedro? _____, ¿es un poliedro regular convexo o irregular convexo? _____ ¿justifica?

Figura 42

Poliedro en GeoGebra

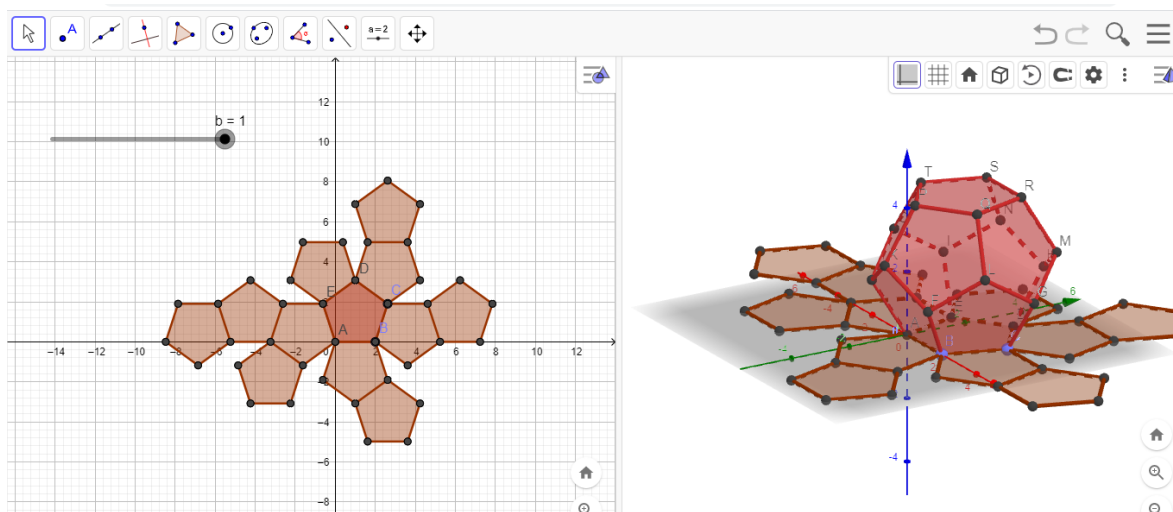


Nota. La figura muestra la Construcción de un poliedro. Fuente: Elaboración propia <https://www.geogebra.org/classic/sqjrqqpq>

2. ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/classic/zj3td26f>, donde encontraras la figura 43, explora la figura moviendo el deslizador "b". ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene la figura? _____, ¿es un poliedro regular convexo o irregular convexo? _____ ¿justifica? _____.

Figura 43

Hexamino y construcción del Dodecaedro



Nota. La figura muestra la construcción del Dodecaedro. Fuente: Elaboración propia.
<https://www.geogebra.org/classic/zj3td26f>

3. Suma los ángulos que concurren en un vértice de la figura 42 y Realiza el mismo procedimiento en la figura 43. ¿Qué relación encuentras al respecto?

4. si en la figura 42 todos los polígonos fueran hexágonos regulares, ¿sería posible construir un poliedro regular convexo? Justifica tu respuesta. _____,

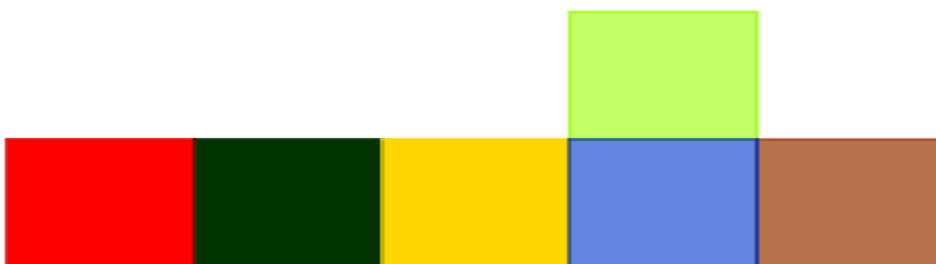
¿Cuánto sería la suma de los ángulos que concurren en un mismo vértice de este poliedro? _____.

situación 3. hexaminos de un poliedro

1. Recorta la figura 44, mediante dobleces intenta construir un poliedro. ¿lo conseguiste? Justifica tu respuesta.

Figura 44

Hexamino de un poliedro en origami

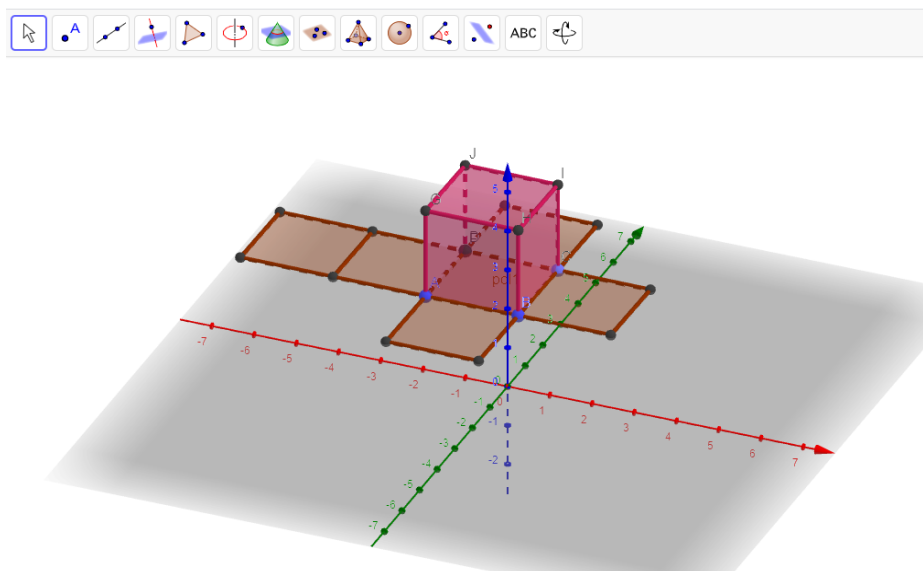


Nota. La figura muestra el hexamino de un poliedro en origami. Fuente: Elaboración propia.

2. Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/classic/nepx2gna> ¿Qué relación encuentras entre la figura 44 y esta?

Figura 45

Hexaedro y desarrollo plano en GeoGebra 3D



Nota. La figura muestra la Construcción de un Hexaedro y su desarrollo plano en GeoGebra 3D. Fuente: Elaboración propia <https://www.geogebra.org/classic/nepx2gna>

3. ¿Por qué no pudiste construir un poliedro con la figura 44 y en la figura 45 si fue posible?

Justifica tu respuesta.

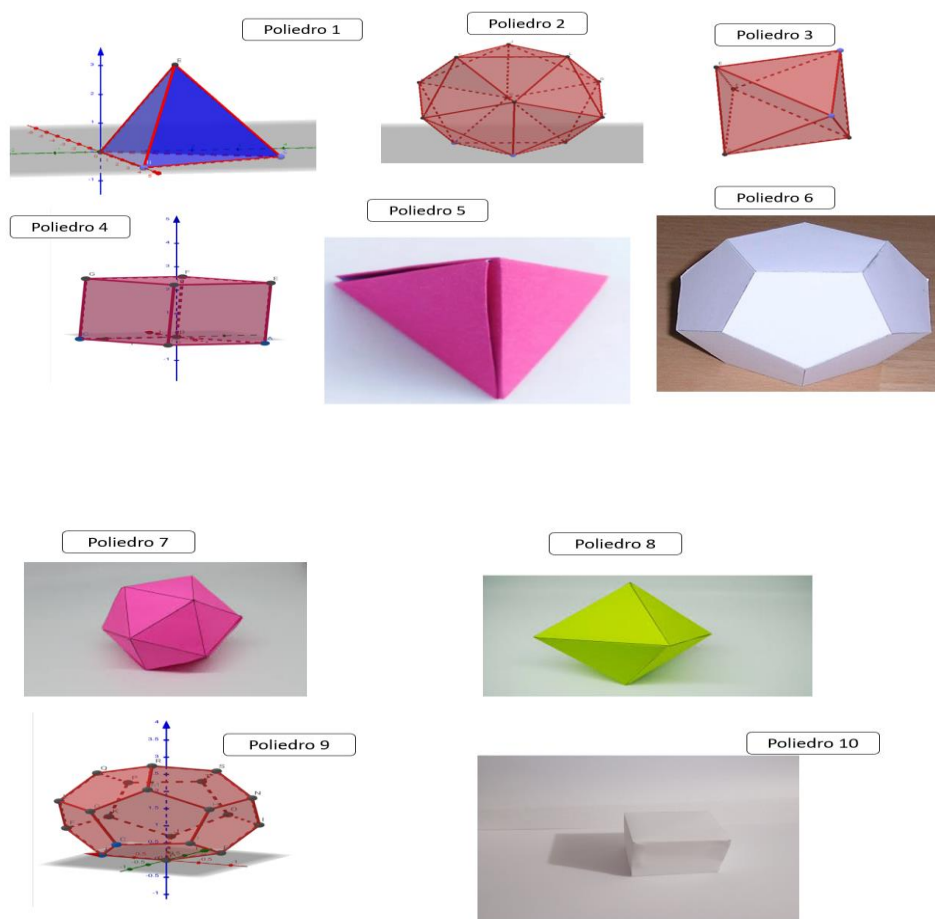
4. Indica cuantas caras, aristas y vértices tiene la figura 45, ¿Cómo se llama este poliedro?

_____, ¿es un poliedro regular o irregular?

situación 4. Observa la construcción algunos poliedros y responde.

Figura 46

Algunos poliedros en origami y GeoGebra 3D



Nota. La figura muestra la Construcción de algunos poliedros en origami y GeoGebra 3D. Fuente: Elaboración propia.

1. En la figura 46, ¿Cuáles poliedros tiene como superficie triángulos equiláteros?
 _____ ¿Cómo se llaman los poliedros que están conformados por triángulos equiláteros? _____.

2. Selecciona 5 poliedros de la figura 46 y completa la tabla 5:

Tabla 5

Poliedros regulares

Nombre del poliedro	Caras (C) del poliedro	Vértices (V) del poliedro	Aristas (A) del poliedro	$C + V$	$C + V - A$
---------------------	------------------------	---------------------------	--------------------------	---------	-------------

Nota. La tabla contiene aspectos relacionados con las propiedades de los poliedros regulares. Fuente: Elaboración propia.

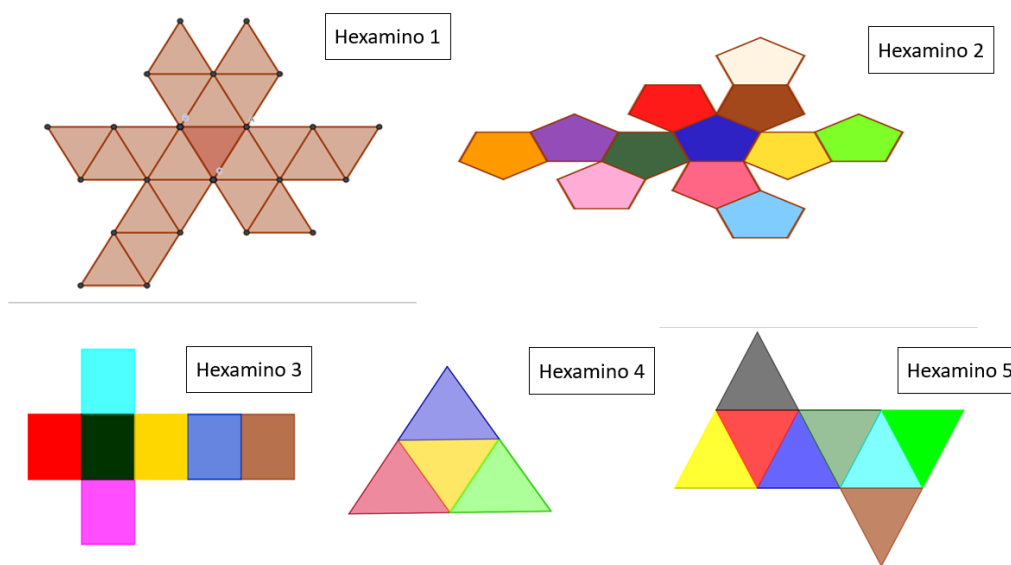
- ¿Qué relación encuentras entre las caras, vértices y aristas?
- ¿si tomas un poliedro irregular se cumple la misma relación? Justifica tu respuesta.

Situación 5:

- Observa las figuras 47 y 48, identifica y escribe el nombre del poliedro que conforma cada hexamino.

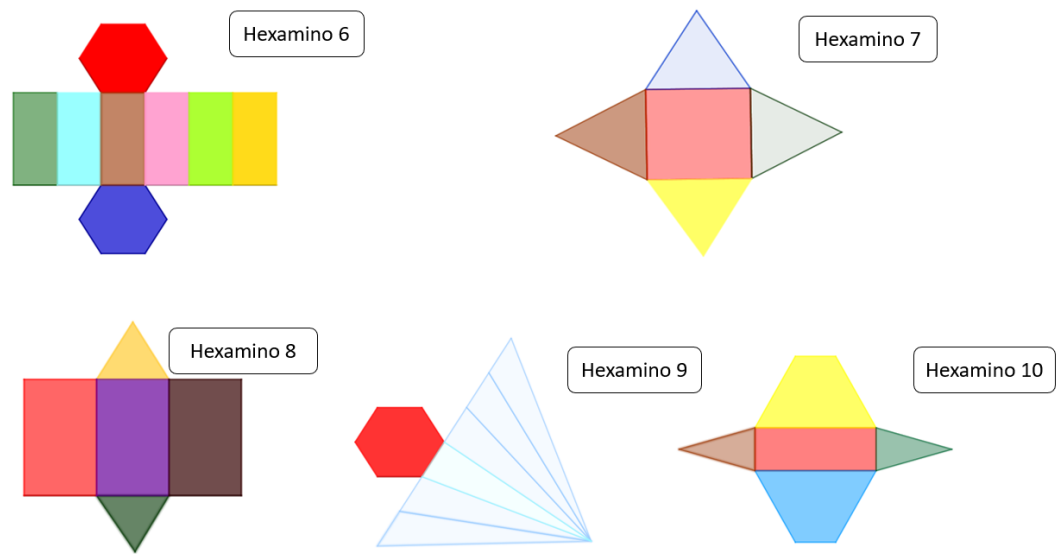
Figura 47

Hexaminos poliedros regulares convexos



Nota. La figura muestra los hexaminos para poliedros regulares convexos. Fuente: Elaboración propia.

Figura 48
Hexaminos poliedros irregulares



Nota. La figura muestra los hexaminos para poliedros irregulares. Fuente: Elaboración propia.

2. La figura 47 y 48 corresponden al desarrollo de poliedros regulares e irregulares, escribe las diferencias y similitudes en la tabla 6.

Tabla 6
Diferencia y similitudes de los poliedros

Figuras	Diferencias	similitudes
Figura 47		
Figura 48		

Nota. La tabla contiene las diferencias y similitudes entre los poliedros regulares e irregulares. Fuente: Elaboración propia.

3. ¿Qué hexaminó permitió construir el dodecaedro? Justica porque escogiste este.

¿Qué clase de poliedro es?_____.

4. ¿Qué hexaminó permitió construir una pirámide recta? justifica tu respuesta.

¿Qué clase de poliedro es? _____.

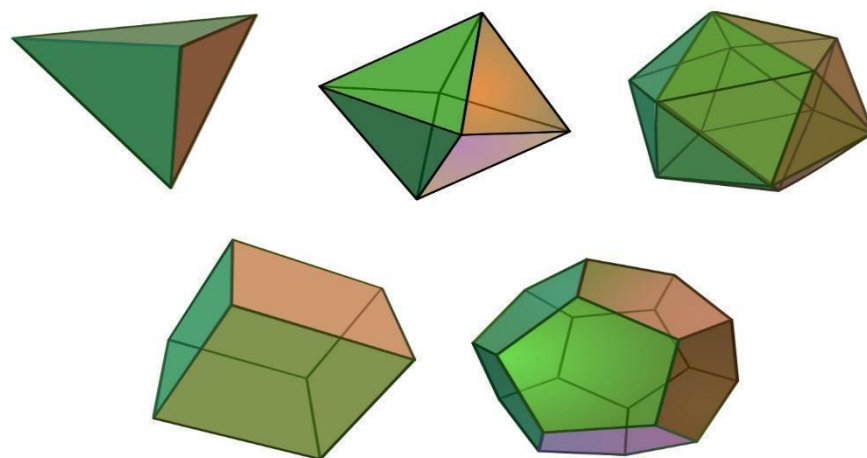
Asignatura: Geometría	Curso: Noveno
Nombre:	Tiempo: 110 minutos
Nivel de razonamiento III	Situación 1-3

Situación 1. Comparación de poliedros regulares e irregulares.

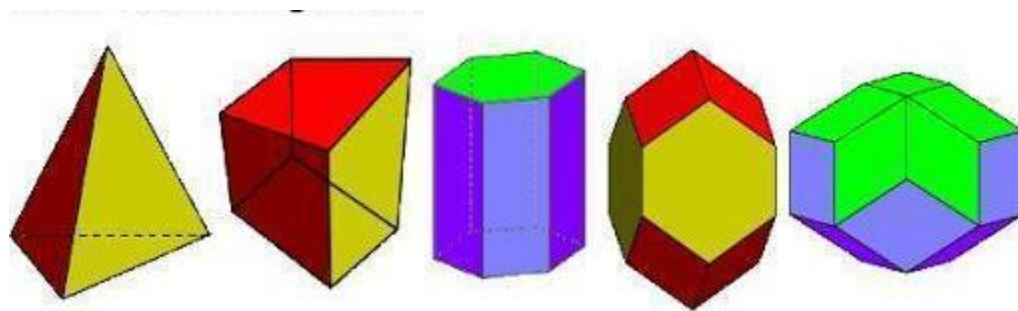
1. Observa la figura 49 y escribe el nombre de cada uno de los poliedros.

Figura 49

Poliedros regulares convexos



Nota. La figura muestra los poliedros regulares convexos. Fuente: Elaboración propia.

Figura 50*Poliedros irregulares cóncavos*

Nota. La figura muestra los poliedros irregulares cóncavos. Fuente: Elaboración propia.

2. De la figura 49 y 50, selecciona un poliedro regular y otro irregular. ¿Cuáles son las diferencias?

_____.

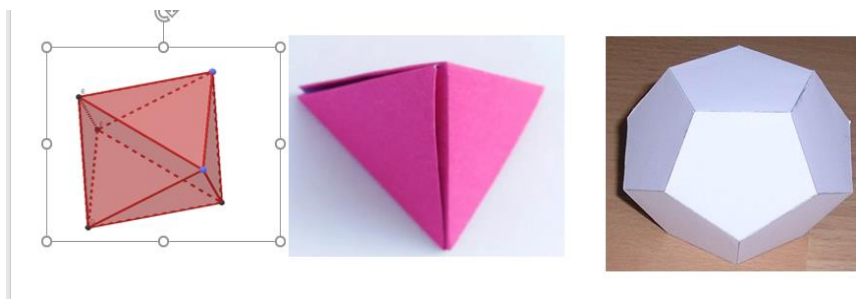
¿Cuántas caras y aristas concurren en el vértice de cada uno de los poliedros?

_____ ¿en todos los vértices de cada figura concurren las mismas caras y aristas? _____.

3. ¿Qué relación encuentras entre los poliedros regulares y los no regulares? ¿Se cumplen las mismas propiedades para ambos?

Situación 2. Propiedades de algunos poliedros

Observa la figura 51 y responde a las siguientes preguntas:

Figura 51*Algunos poliedros regulares convexos*

Nota. La figura muestra algunos poliedros regulares cóncavos. Fuente: Elaboración propia.

1. Escribe el nombre y las caras, vértices y aristas de cada poliedro de la figura 51.

2. ¿Cuántas aristas forman el vértice del octaedro? _____. Responde la misma pregunta para el tetraedro, ¿las mismas aristas forman un vértice en los dos poliedros?

3. ¿Cuántas caras se deben de formar para construir un dodecaedro? _____. Al sumar los ángulos que concurren en un vértice del dodecaedro, ¿la suma puede ser mayor de 360° ? Justifica tu respuesta. _____.

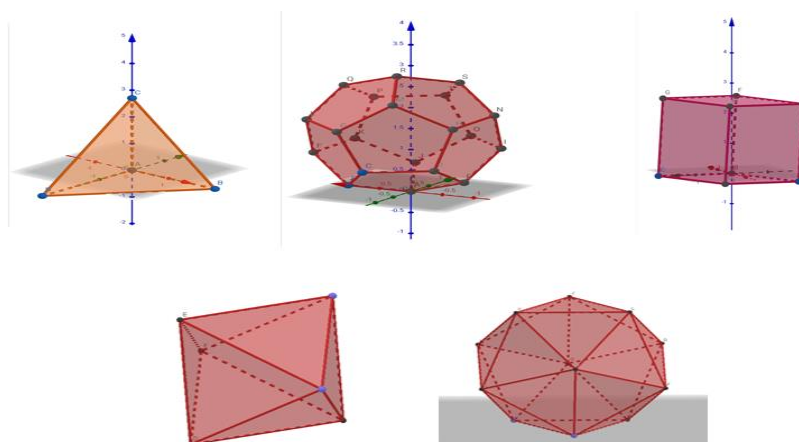
4. ¿Cuánto pueden sumar los ángulos en el vértice de un poliedro regular convexo?

Situación 3: El teorema de Euler

1. Observa la figura 52 y completa la tabla 7:

Figura 52

Los sólidos platónicos



Nota. La figura muestra los sólidos platónicos. Fuente: Elaboración propia.

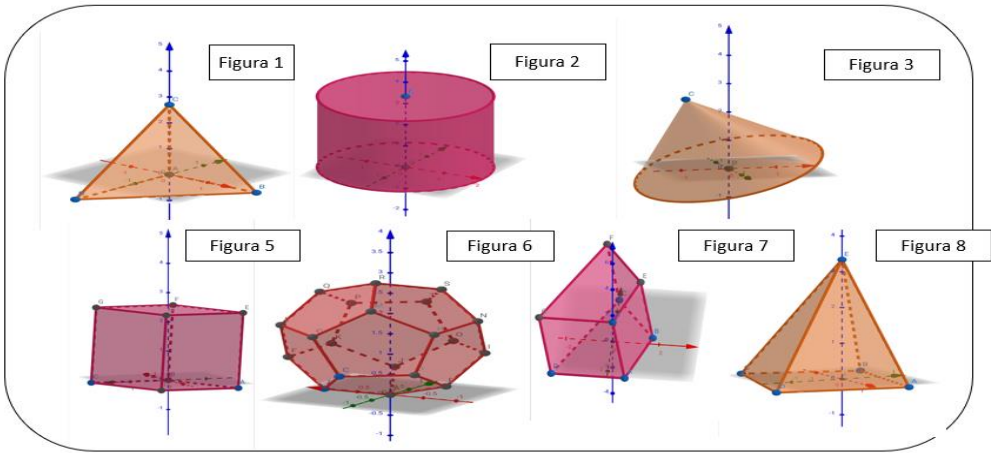
Tabla 7
El teorema de Euler

Nombre de los poliedros	Numero de caras	Numero de vértices	C + V	Numero de aristas	(C + V) - A
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

Nota. La tabla contiene aspectos relacionados con el teorema de Euler. Elaboración propia.

2. Ahora observa los siguientes poliedros de la figura 53 e intenta llenar la tabla 8:

Figura 53
Poliedros en GeoGebra 3D



Nota. La figura muestra algunos poliedros. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8
Teorema de Euler con algunos poliedros irregulares

Nombre de los poliedros	Numero de caras	Numero de vértices	C + V	Numero de aristas	(C + V) - A
1.					

-
- 2.
 - 3.
 - 4.
 - 5.
 - 6.
 - 7.
 - 8.
-

Nota. La tabla contiene aspectos relacionados con el teorema de Euler para algunos poliedros. Fuente: Elaboración propia.

2. En el teorema de Euler, la suma del número de caras con el número de vértices, menos el número de aristas siempre es igual a 2, ¿esta fórmula se cumple para todos los poliedros o solo poliedros regulares convexos? Justifica tu respuesta. (sugerencia visualiza los datos de la tabla 7)

ones en el aspecto físico de las figuras. Perciben las figuras como objetos individuales. No son capaces de generalizar	2. ¿El hexagonal construido en GeoGebra 3D es cóncavo o convexo? ¿Por qué?	prisma en 3D es o ¿Por	2. Es un prisma convexo ya que las bases de este prisma son poliedros convexos.	P: Define cuando un prisma es cóncavo y cuando es convexo. S: Un prisma es convexo cuando los polígonos de la base son convexos y es cóncavo cuando uno de sus ángulos interiores mide más de 180°	MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas	2. El prisma hexagonal es convexo, porque el hexágono que tiene de base es convexo, sus lados van hacia afuera.	P: Define cuando un prisma es cóncavo y cuando es convexo. L: El prisma es convexo Cuando prolongo una de sus caras y no corta la figura en ningún lado y es cóncavo cuando no es convexo.	M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.
características de una figura a otras.	3. ¿La figura 32 es un poliedro regular, semirregular o irregular? justifica tu respuesta.	3. la figura es un poliedro regular porque sus bases son hexágonos regulares y sus caras son iguales	3. la figura es un poliedro regular porque sus bases son hexágonos regulares y son iguales y es semirregular si las caras son polígonos regulares diferentes	P: ¿Cuándo se puede considerar un poliedro regular, semirregular e irregular? S: Es regular cuando las caras son polígonos regulares y son iguales y es semirregular si las caras son polígonos regulares diferentes	N2: El estudiante no identifica aspectos de un sólido mediante la comparación de figuras geométricas.	3. El prisma hexagonal es regular porque sus lados son iguales.	P: ¿Cuándo se puede considerar un poliedro regular, semirregular e irregular? L: Es regular cuando las caras tienen polígonos regulares, y es irregular cuando tiene lados diferentes.	N2: El estudiante no identifica aspectos de un sólido mediante la comparación de figuras geométricas.

II	La pirámide regular	SOFÍA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
Nivel de razonamiento 1	1. ¿Cómo son las caras de la pirámide regular? ¿Qué forma tienen?	1. Las caras de la pirámide son 4 triángulos isósceles.	P: ¿Cuándo una pirámide es regular convexa? S: Cuando todas sus caras tienen la misma forma.		M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.	1. Las caras de la pirámide son 4 triángulos y 1 cuadrado.	P: ¿Cuándo una pirámide es irregular? L: Son irregulares si las caras no tienen la misma forma.		M.1: El estudiante reconoce las nociones y relaciones de la geometría, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular y plano, etc.... al interior de un sólido.
	2. Identifica dos rectas paralelas, dos rectas perpendiculares, las caras y la base de la pirámide regular. ¿Cuántas	2. La pirámide regular tiene 4 caras, 5 vértices	P: ¿Cómo podría distinguir un poliedro convexo? S: Yo creo que esos poliedros se distinguen porque tienen caras iguales. O sea, como		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos	2. La pirámide regular tiene 5 caras, 5 vértices	P: ¿Cómo podría distinguir un poliedro convexo? L: Porque todos los poliedros convexos tienen las caras planas e iguales.		M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como

Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, centrandose en sus descripciones en el aspecto físico de las

figuras. Perciben las figuras como objetos individuales. No son capaces de generalizar características de una figura a otras.	caras, vértices y aristas tiene la pirámide regular?	y 8 aristas.	caras cuadradas o triangulares.	platónico y 8 aristas. cara, vértices y aristas.		triángulos, cuadriláteros y pentágonos.
	3. En la figura 34, si formas un pentágono y repites el procedimiento aplicado en la figura 33. ¿el poliedro resultante tendría el mismo número de caras, aristas y vértices de la pirámide regular? Justifica tu respuesta.	3. El poliedro regular no es igual ya que esta tiene 5 caras, 10 aristas y 6 vértices.	P: ¿Cuántos lados tiene un pentágono? S: El pentágono tiene 5 lados P: ¿El pentágono cuenta como una para en la construcción de la pirámide? S: Si, la pirámide está conformada por una cara pentagonal y 5 caras triangulares.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.	3. No. Porque al convertirse en pirámide tendría 5 caras triangulares más la base, además cambia la cantidad de vértices y aristas.	P: ¿Cuántos lados tiene un pentágono? L: Tendría 5 lados iguales. P: ¿El pentágono cuenta como una para en la construcción de la pirámide? L: Si, la pirámide tendría 6 caras una en forma de pentágono y las otras 5 tienen forma de triángulos. N2: El estudiante identifica aspectos de un sólido mediante la comparación de figuras geométricas.

III Considere el punto A y el punto B de la figura 35		SOFÍA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
Nivel de razonamiento 1	Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, centrand o sus descripciones en el aspecto físico de las figuras. Perciben las figuras	1. ¿Cuántas rectas pasan simultáneamente por los puntos A y B de la figura 35?	1. Simultáneamente pasa una recta y solo se puede hacer un pliegue.	P: ¿Al juntar los dos puntos A y B pudiste evidenciar más de un pliegue? S: No, solo se marcó un pliegue en la hoja.	M.1.1: El estudiante establece relaciones entre una línea recta y un doblez en papel.	1. Una sola recta.	P: ¿Al juntar los dos puntos A y B pudiste evidenciar más de un pliegue? L: No, solamente uno.	NO: el estudiante compara nociones de la geometría con objetos cotidianos de forma imprecisa.	
		2. Ahora toma un trozo de papel y dibuja las marcas que designan los puntos A y B, ¿Cuántos pliegues se pueden elaborar que contenga a la vez los puntos A y B?	2. Se obtiene un pliegue, pero con el que teníamos anteriormente serían dos pliegues	P: ¿si trazas una línea recta de A hasta B y luego marcas el pliegue anterior, esas rectas son? S: Son rectas perpendiculares ya que forman ángulos de 90°.		2. No la entiendo, pero supongo que varias.	P: ¿si trazas una línea recta de A hasta B y luego marcas el pliegue anterior, esas rectas son? L: Se cruzan las rectas en el punto medio de A y B, formando ángulos de 90°, ósea son perpendiculares.		
		2. Doble el papel de tal manera que coincidan los puntos A y B. ¿Cuántos pliegues se obtiene al hacer coincidir los puntos A y B?, si haces coincidir los dos puntos doblando la hoja y se crea un pliegue, ¿crees que el pliegue	2. Se obtiene un pliegue, pero con el que teníamos anteriormente serían dos pliegues	P: ¿Qué es una recta perpendicular para tí? S: Son dos rectas que se cruzan en un punto en forma de cruz y forman ángulos de 90°.	M.1.2: El estudiante reconoce las propiedades del doblado de papel.	2. No, según yo no se unen en ningún momento o.	P: Traza una línea recta con el lapicero que una los puntos A y B. L: ya! P: Dobla el papel para que coincida el punto A con el B y traza con el lapicero el doblez de la hoja. L: listo!	NO: el estudiante compara nociones de la geometría con objetos cotidianos de forma	

como objetos individua les. No son capaces de generaliz ar caracterí sticas de una figura a otras.	determina una recta perpendicular, que pasa por el punto medio del segmento AB? Justifica.	, si es una recta perpendicular ya que cuando se cortan formando ángulos de 90°			P: ¿Qué puedes notar de estas dos rectas? L: las rectas se cruzan en el punto medio de AB y forman ángulos de 90°	imprecis a.
	3. En GeoGebra traza el segmento AB y luego la recta perpendicular al segmento AB. ¿Qué ángulo forman estas rectas? ¿coincide con la recta construida en el papel? Justifica tu respuesta.	3. Se forman ángulos de 90° , si coincide con la que se construyó en el papel porque ambas forman ángulos de 90° .	P: Traza dos puntos A y B en GeoGebra y une los puntos con varias rectas. ¿es posible? S: No, pues por dos puntos pasa una única recta.	M.1: El estudiante reconoce las nociones y relacione s de la geometría, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular y plano, etc.... al interior de un sólido.	3. Forman ángulos obtusos . No coincide n, porque los ángulos son diferentes. P: ¿Qué es un ángulo obtuso? L: Son ángulos que miden menos de 90° P: Utiliza la herramienta ángulo de GeoGebra para medir los ángulos que forman las rectas. ¿Cuánto miden? L: Miden 90° . P: ¿Qué son las rectas perpendiculares? L: Las dos rectas tienen que formar ángulos de 90° .	¿son perpendiculares? L: si son perpendiculares.
						NO: el estudiante e compara nociones de la geometría con objetos cotidianos de forma imprecis a.

	IV El cubo o hexaedro.	SOFÍA	CUESTIO NAMIENT O	ARGUME NTACIÓN	NO MEDIDA DEL RAZON AMIENT O	MEDIDA DEL RAZON AMIENT O	LAURA	CUESTIO NAMIENT O	ARGUME NTACIÓN	NO MEDIDA DEL RAZON AMIENT O	MEDIDA DEL RAZON AMIENT O
Nivel de razonam iento 1 Los estudiant es perciben las figuras geométri cas en su totalidad, centrand o sus descripci ones en el aspecto físico de las figuras. Perciben las figuras como objetos individua les. No son capaces	1. Ingresar al siguiente enlace https://www.geogebra.org/3d/jfgkquxm , ¿Cómo se llama al poliedro construido en el anterior enlace? destaca elementos del poliedro como: caras (azul), vértices (amarillo) y aristas (verdes), para ello utiliza relleno y los comandos de GeoGebra 3D. (clic derecho y en propiedades están las opciones de relleno y color)	1. El poliedro es un cubo. En la figura 9 identifica a correctamente las caras, vértices y aristas del cubo.	P: Describa las caras, vértices y aristas de un cubo. S: Las caras del cubo son cuadrados que rodean el contorno de la figura, los vértices son las esquinas del cubo y están conformados por tres aristas y las aristas conforman la unión de una cara con la otra.		M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.	1. se llama el cubo En la figura 22 identifica correctamente las caras, vértices y aristas del cubo.	P: Describa las caras, vértices y aristas de un cubo. L: Las caras del cubo son cuadrados y forman una superficie cerrada, los vértices son las esquinas que se forman cuando se juntan las líneas que forman el cubo, y las aristas son las que unen las caras para formar el cubo.		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.		
	2. En la figura 36, ¿Qué formas tienen las caras? ¿Qué ángulos forman cada una de las caras y cuánto suman los ángulos interiores de una cara? (sugerencia: use primero la opción herramientas y	2. Las caras del poliedro son cuadrados iguales y las caras forman ángulos de 90°.	P: ¿Cuántos ángulos tiene una cara del cubo? S: Tiene 4 caras. P: Suma los 4 ángulos de la cara. ¿Cuánto es su suma? S: $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.	2. Las caras son cuadradas, forman ángulos de 90° y la suma de los ángulos interiores	P: En una pirámide regular, ¿Qué forma tiene las caras y cuánto miden sus ángulos interiores? L: Forma de triángulos isósceles y miden 60°. P: Suma los ángulos interiores de una cara de la pirámide regular. ¿cuánto miden?		M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como triángulos, cuadriláteros y		

de generalizar características de una figura a otras.	posteriormente desarrollo del poliedro)				s es 360°.	L: La suma sería 180°		pentágonos.
	3.En la figura 36 observe el punto H, ¿qué clase de ángulo corresponde al vértice H? cuando sumas los ángulos que determinan el vértice H, ¿Cuál es su suma?	3.El ángulo que se forma en el vértice H es de 90°.	P: ¿Cuántos ángulos concurren en el vértice H? S: Un ángulo de 90° P: ¿un vértice está conformado por cuantas aristas? S: Por tres aristas P: Observa el punto H, ¿Cuántos ángulos puedes notar? S: Tres ángulos P: Al realizar la suma de los tres ángulos que concurren el vértice H. ¿Cuánto suman? S: 270°	MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas	3. Recto y en total son 270° su suma.	P: ¿es posible que concurren más de tres ángulos en un vértice? L: Si, por ejemplo, en el icosaedro se forman 4 ángulos en un vértice.		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
V	SOFIA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO

Nivel de razonamiento 1 Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, centrand o sus descripciones en el aspecto físico de las figuras. Perciben las figuras como objetos individuales. No son capaces de generalizar características de	1. Indique cuántas caras, vértices y aristas tiene la figura 37. Realiza el mismo procedimiento para la figura 38, ¿tienen el mismo número de caras, vértices y aristas?	1. La figura 37 tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. La figura 38 tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Tiene las mismas caras, vértices y aristas.	P: ¿podría formar un poliedro con la figura 38? S: Si, sería un poliedro convexo llamado tetraedro. P: ¿Qué clase de figuras se pueden identificar en este poliedro? S: Triángulos equiláteros. P: ¿Qué es un triángulo equilátero? S: Los triángulos equiláteros tienen todos los lados iguales.	M.1.3: El estudiante identifica figuras planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.	1. Caras 4 Vértices 4 Aristas 6 P: ¿Qué clase de figuras se pueden identificar en este poliedro? L: Triángulos equiláteros P: ¿Qué es un triángulo equilátero? L: Creo que son los que todos los lados miden lo mismo P: ¿Cuánto es la suma los ángulos interiores de un triángulo? L: Miden 180°	M.1.4: El estudiante identifica propiedades de las figuras planas.
	2. Observe las dos figuras, ¿Qué forma tienen las caras y que clase de ángulos la conforman?, al sumar los ángulos de una cara, ¿Cuánto es su suma?	2. Sus caras son triángulos equiláteros, forman ángulos de 60°.	P: Mencione las características de los triángulos encontrados. S: Los lados del triángulo tienen las mismas medidas y sus ángulos interiores cada uno mide 60°	M.1.4: El estudiante identifica propiedades de las figuras planas.	2. Las caras son triángulos, sus ángulos son agudos y su suma es menos de 180°. 3. Convexo porque sus lados van P: Mencione las características de los triángulos encontrados. L: Tienen ángulos agudos y los dos lados iguales. P: ¿Qué es un polígono regular? L: Están conformados por lados iguales y ángulos iguales.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
3 ¿El tetraedro construido en origami es cóncavo o convexo? ¿Por qué?	3. Es convexo ya que sus caras son polígono	P: ¿Qué es un polígono regular? S: Son los que tienen sus lados de igual medida y sus ángulos interiores.	N1.1: El estudiante compara correctamente elemento	3. Convexo porque sus lados van	P: ¿Qué es un polígono regular? L: Están conformados por lados iguales y ángulos iguales.	N1.1: El estudiante compara correctamente elemento

una figura a otras.	s regulares.	s de una figura en origami y en GeoGebra 3D.	hacia afuera.	s de una figura en origami y en GeoGebra 3D.
4. ¿La figura 37 es un poliedro regular, semirregular o irregular? justifica tu respuesta.	4. La figura 37 es un poliedro regular ya que está conformada por triángulos equiláteros.	P: ¿Cómo identifico un poliedro regular o irregular? S: Se pueden identificar mirando las caras de la figura, mirando si son iguales o no.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.	4. Es regular. P: ¿Qué es un poliedro regular convexo? L: Un poliedro regular convexo es el que tiene todas las caras de igual forma, por ejemplo, triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.. MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas.

NIVELES DE RAZONAMIENTO	SITUACIONES		SOFÍA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
	I	Observar y clasificar								
Nivel de	1. Observa la figura 41 y clasifica los poliedros en regulares, convexos, semirregulares o irregulares.	1. Regulares: Poliedro 1 Poliedro 5	P: ¿Cómo identificas cuando un poliedro es regular o irregular? S: Un poliedro regular es cuando al prolongar las caras no cortan al poliedro en varios				1. Poliedro 1: Regular Poliedro 2: Irregular	P: ¿Cómo identificas cuando un poliedro es regular o irregular? L: Un poliedro es regular cuando todas sus caras son iguales y es irregular cuando las		M.2.3: El estudiante reconoce que las caras de un sólido platónico están

razonamiento 2		Poliedro 6 Irregular	puntos y es irregular si sus caras son diferentes.	Poliedro 3: Irregular	caras tienen formas distintas.	conformadas por polígonos regulares.
Los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden deducir y demostrar nuevas propiedades empíricamente. Las clasificaciones que hacen de familias de figuras	2. Con base a la clasificación anterior, escribe las diferencias entre un poliedro regular y otro irregular. ¿Cómo deben de ser las caras de un poliedro regular y uno irregular?	Poliedro 2 Poliedro 3 Poliedro 7 Poliedro 8	P: ¿el poliedro 3 tiene todas las caras iguales y como son las aristas? S: No, pues tiene una cara circular y no tiene aristas. P: ¿el poliedro 3 es regular o irregular? S: Es irregular puesto que sus caras son diferentes.	Poliedro 5: Regular Poliedro 6: Regular Poliedro 7: Irregular Poliedro 8: Regular	P: ¿el poliedro 5 tiene todas las caras iguales? L: Si, tiene todas las caras en forma de cuadros. P: ¿el poliedro 5 es regular o irregular? L: Es regular ya que todas sus caras son iguales.	
		2. La diferencia entre un poliedro regular y uno irregular es que las caras de los poliedros regulares son todas iguales, en cambio		M.2.3: El estudiante reconoce que las caras de un sólido platónico están conformadas por polígonos regulares.	2. Que el poliedro regular convexo tiene todos sus lados y ángulos internos de igual tamaño (son iguales) Las caras del poliedro regular	

pueden ser de tipo inclusivo o si solo intervienen propiedades con estructura lógica simple o de tipo exclusivo en caso contrario.

la de los poliedros irregulares son distintas.

convexo deben de ser iguales (una sola forma) y la de los irregulares deben de ser distintas, por lo menos una de las caras.

	II Construcción de un poliedro en GeoGebra 3D	SOFÍA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
Nivel de razonamiento 2	1. ¿Ingresa al siguiente enlace https://www.geogebra.org/classic/sqjrqqpq y escribe cuantas caras, vértices y aristas tiene el poliedro?, ¿es un poliedro regular convexo o	1. Tiene 32 caras, 60 vértices y 90 aristas. Es un poliedro irregular	P: ¿Cómo identificas las caras del poliedro? S: Las caras del poliedro son los hexágonos y pentágonos que la encierran. P: ¿Qué es un vértice? S: Son las esquinas de		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y	1. El poliedro tiene 32 caras, 60 vértices y 90 aristas. El	P: ¿Cómo identificas las caras del poliedro? L: Las caras son las figuras geométricas que encierran el poliedro. P: ¿Qué es un vértice? L: El vértice son los puntos situados en las		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.

estudian tes reconoc en que las figuras geométr icas están dotadas de propied ades matemá ticas. Pueden deducir y demostr ar nuevas propied ades empíric amente. Las clasifica ciones que hacen de familias de figuras pueden ser de tipo inclusiv	irregular convexo? ¿por qué?	convexo ya que sus caras son distintas.	la figura, donde se forman los puntos. P: Define con tus palabras qué es una arista. S: Es una línea recta que une las caras del poliedro.	aristas.	poliedro es irregular convexo , sus caras no son iguales.	esquinas del poliedro. P: Define con tus palabras qué es una arista. L: Cuando se unen dos caras y se forma una línea, se le llama a esta una arista.
	2. Ingresa al siguiente enlace https://www.geogebra.org/classic/zj3td26f y mueve el deslizador "b". ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene la figura?, ¿es un poliedro regular convexo o irregular convexo? ¿por qué?	2. Tiene 12 caras, 20 vértices y 30 aristas. Es un poliedro regular convexo porque todas sus caras son iguales.	P: ¿De acuerdo a su conocimiento, de el ejemplo de otra figura que sea regular convexo y describa por qué considera que cumple? S: un cubo, porque tienen todas sus caras iguales.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.	2. El poliedro tiene 12 caras, 20 vértices y 30 aristas. El poliedro es regular, porque sus caras son iguales.	P: ¿De acuerdo a su conocimiento, de el ejemplo de otra figura que sea regular convexo y describa por qué considera que cumple? L: Puede ser una pirámide conformada por triángulos equiláteros.
	3. Suma los ángulos que concurren en un vértice de la figura 42 y realiza el mismo procedimiento en la figura 43. ¿Qué	3. La relación es que al sumar los ángulos de cada	P: Utiliza la herramienta ángulos y halla el valor en el vértice de la figura 42 y luego realiza el mismo procedimiento en la figura 43.	MO: El estudiante no identifica regularida des de las figuras	3. La suma es de 108° $\times 3 = 324^\circ$ en la figura 42 y la	P: Menciona una característica en la suma de los ángulos en el vértice de un poliedro. L: De acuerdo a la cantidad de la suma de los vértices, la figura
						M.2.3: El estudiante reconoce que las caras de un sólido platónico están conformadas por polígonos regulares.
						M.3.1 El estudiante comprende que la suma de los ángulos en el vértice de un sólido no

o si solo entrevistas propiedades con estructura lógica simple o de tipo exclusivo o en caso contrario.	relación encuentras al respecto?	cara de la figura 42 y 43 me da el mismo resultado o	¿obtuviste el mismo resultado? S: No, en la figura 42 me dio 324° y en la figura 43 fue de 348° P: Ahora menciona una característica en la suma de los ángulos en el vértice de un poliedro. S: La suma de los ángulos que están en el vértice no puede ser mayor a 360° ya que no sería un poliedro.	geométricas.	de la figura 43 es de 348°. La relación es que la suma de sus ángulos es mayor que 300°.	puede ser un poliedro, porque no puede dar más de 360° puede exceder los 360°.
4. Si en la figura 42 todos los polígonos fueran hexágonos regulares, ¿sería posible construir un poliedro regular convexo? Justifica tu respuesta. ¿Cuánto sería la suma de los ángulos que concurren en un mismo vértice de este poliedro?	4. Si, ya que todas sus caras eran iguales y sería un poliedro regular convexo .	P: Realiza un hexágono en GeoGebra y halla las medidas a sus ángulos interiores. ¿Cuánto mide cada uno? S: 120° P: Ahora imagina que tienes tres caras hexagonales y en el vértice concurren estas. ¿Cuánto sería la suma de los ángulos? S: 360°, ah!, no se podría formar un poliedro ya que no cumple la característica de estos.	MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas.	4. sí, ya que todas sus caras serían iguales y la suma de los ángulos que concurrirían en un vértice es de 240°	P: Realiza un hexágono en GeoGebra y halla las medidas a sus ángulos interiores. ¿Cuánto mide cada uno? L: 120° mide cada ángulo P: Ahora imagina que tienes tres caras hexagonales y en el vértice concurren estas. ¿Cuánto sería la suma de los ángulos? L: 120° * 3 = 360°, no puedo construir un poliedro con esta característica.	MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas.

III Hexaminos de un poliedro	SOFIA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONA MIENTO	MEDIDA DEL RAZONA MIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDI DA DEL RAZO NAMIE NTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
1. Recorta la figura 44, mediante dobleces intenta construir un poliedro. ¿lo conseguiste? Justifica tu respuesta.	1. No, ya que la figura queda incompleta.	P: ¿Cuál crees que es el mayor reto al construir un poliedro a partir del origami cuando sus piezas están incompletas? S: Al principio intenté formar la figura, pero fue muy difícil darme cuenta que estaba incompleto, traté por todos los medios darle una forma, pero no pude, luego cuando recordé las figuras que he visto hasta ahora, fue cuando entendí que estaba incompleta.		M.2.1: El estudiante establece relaciones entre las estructuras de un sólido construido en GeoGebra 3D y otro en origami (doblado de papel).	1. No, sus lados no son iguales y hay una cara de más.	P: ¿Cuál crees que es el mayor reto al construir un poliedro a partir del origami cuando sus piezas están incompletas? L: Cuando uno ve todos los lados se da cuenta que algo ocurre, así que el mayor reto fue identificar si hacían falta lados o si sobraban.		M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.
2. Ingresa al siguiente enlace https://www.geogebra.org/classic/nepx2gna ¿Qué relación encuentras entre la figura 44 y esta?	2. La relación que encuentro es que la figura 44 estuviera completa			M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.	2. Ninguna.			MO: El estudiante no identifica regularidades de las figuras geométricas.

	a sería un poco igual a la figura 45.					
3. ¿Por qué no pudiste construir un poliedro con la figura 44 y en la figura 45 si fue posible? Justifica tu respuesta.	3.Se puede construir un poliedro con la figura 45 ya que todas sus caras están completas, pero en el caso de la figura 44 no están todas completas.	P: ¿Como identificas si el hexamino o plantilla puede conformar un poliedro?? S: Realizo los dobleces necesarios y si la figura se encierra sería un poliedro.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.	3. Porque en la figura 44 las caras no son iguales y además hay una de más y en la figura 45 si fue posible porque sus lados son equivalentes.	P: ¿Como identificas si el hexamino o plantilla puede conformar un poliedro?? L: Doblando la figura y si no me sobran caras entonces, puedo formar un poliedro.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
4. Indica cuántas caras, aristas y vértices tiene la figura 45, ¿Cómo se llama este poliedro? ¿Es un poliedro regular o irregular?	4. Tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices, el nombre de este poliedro		M2: El estudiante reconoce los 5 sólidos platónicos, como una estructura conforma	4. Caras: 6 Vértices: 8 Aristas: 12 El poliedro se llama		M.2.1: El estudiante establece relaciones entre las estructuras de un sólido construido en GeoGebra 3D y otro en

		es el hexaedro.			da de polígonos regulares.	el cubo y es regular, son iguales sus caras.			origami (doblado de papel).	
		Es un poliedro regular ya que todas sus caras son iguales.								
	IV Observa la construcción algunos poliedros y responde.	SOFIA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	
Nivel de razonamiento 2: Los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están	1. En la figura 46, ¿Cuáles poliedros tiene como superficie triángulos equiláteros? ¿Cómo se llaman los poliedros que están conformados por triángulos equiláteros?	1. Los poliedros 1, 2, 3, 5, 7 y 8. Se llaman tetraedro, icosaedro, octaedro.	P: Menciona una característica de los tetraedro, icosaedro y octaedro. S: Los tres están conformados por triángulos equiláteros y cambia el número de caras, vértices y aristas.	N2.1: El estudiante clasifica los sólidos platónicos de acuerdo a sus características	M.2.1: El estudiante establece relaciones entre las estructuras de un sólido construido en GeoGebra 3D y otro en origami (doblado de papel).	1. los poliedros 2 y 7 icosaedro. Los poliedros 3 y 8 octaedro.	P: Menciona una característica de los tetraedro, icosaedro y octaedro. L: Una característica puede ser que todos son poliedros regulares convexos y sus caras son triángulos equiláteros.	N2.1: El estudiante clasifica los sólidos platónicos de acuerdo a sus características	M.3.2: El estudiante halla la relación de Euler para la cual se cumple en los cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro y octaedro.	

dotadas de propiedades matemáticas. Pueden deducir y demostrar nuevas propiedades empíricamente. Las clasificaciones que hacen de familias de figuras pueden ser de tipo inclusivo si solo intervienen propiedades con estructura lógica simple o	2. Selecciona 5 poliedros de la figura 46 y completa la tabla 5. a. ¿Qué relación encuentras entre las caras, vértices y aristas? b. ¿Si tomas un poliedro irregular se cumple la misma relación? Justifica tu respuesta.	2. a. la relación que encuentras es que al sumar y restar el resultado me da 2. b. No, ya que al sumar y restar el resultado nos da un número diferente a 2.	P: Piensa en el cono, ¿Qué clase de figura poliedro es? S: El cono es un poliedro irregular ya que está conformado por figuras diferentes. P: Al hacer la relación $C + V - A$, ¿cuánto sería el resultado? S: 2 caras 1 aristas 1 vértice Sería igual a 2. P: ¿Que puedes concluir? S: La relación $C + V - A$ se cumple también para algunos poliedros irregulares, como en el caso del cono.	M.3.2: El estudiante halla la relación de Euler para la cual se cumple en los cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro y octaedro.	2. a. Que $C + V - A$ en todas es igual a 2. b. No, porque sus caras, vértices y aristas no son las mismas entonces al sumarse el resultado o cambia.	P: Piensa en el cono, ¿Qué clase de figura poliedro es? L: El cono es irregular porque las caras no son iguales. P: Al hacer la relación $C + V - A$, ¿cuánto sería el resultado? L: 2 caras 1 aristas 1 vértices El resultado da 1. P: ¿Que puedes concluir? L: Se puede decir que la relación también da en algunos poliedros irregulares.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
---	---	--	--	---	---	---	---

de tipo
exclusiv
o en
caso
contrari
o.

	V	SOFIA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONA MIENTO	MEDIDA DEL RAZONA MIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDI DA DEL RAZO NAMIE NTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
Nivel de razona miento 2:									
Los estudia ntes reconoc en que las figuras geométr icas están dotadas de propied ades matemá ticas. Pueden deducir y demostr ar nuevas propied	1. Observa las figuras 47 y 48, identifica y escribe el nombre del poliedro que conforma cada hexamino.	1. hexamin o 1: Icosaedr o. hexamin o 2: Dodeca edro. hexamin o 3: Hexaedr o. hexamin o 4: Tetraedr o. hexamin o 5: Octaedr o. hexamin o 6: prisma	P: ¿Qué es un hexamino? S: Es una plantilla en el plano que al doblarla puede conformar un poliedro. P: ¿Como identificas que el hexamino 1 pertenece al icosaedro? S: Primero sabía que el icosaedro está conformado por triángulos equiláteros, luego conté las caras y coincidían.		M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrolla r sólidos platónicos .	1. hexamin o 1: Icosaedr o. hexamin o 2: Dodeca edro. hexamin o 3: No es un poliedro. hexamin o 4: Tetraedr o. hexamin o 5: Octaedr o. hexamin o 6: prisma	P: ¿Qué es un hexamino? L: Una figura plana que al doblar sus partes forma un poliedro. P: ¿Como identificas que el hexamino 2 pertenece al dodecaedro? L: Identificando el número de caras y la forma (pentágonos)		M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.

ades empíricamente. Las clasificaciones que hacen de familias de figuras pueden ser de tipo inclusivo si solo intervienen propiedades con estructura lógica simple o de tipo exclusivo en caso contrario.	hexagonal. hexagonal o 7: pentaedro hexagonal o 8: prisma triangular. hexagonal o 9: Heptaedro. hexagonal o 10: Pirámide .	hexagonal. hexagonal o 7: pentaedro hexagonal o 8: prisma triangular. hexagonal o 9: Pirámide hexagonal. hexagonal o 10: Pirámide triangular-recta.
2. Las figura 47 y 48 corresponden al desarrollo de poliedros regulares e irregulares, escribe las diferencias y similitudes en la tabla 6.	2. En la figura 47 Son diferentes ya que todos tienen figuras geométricas distintas que los conforman.	P: ¿Cuál es la principal similitud y diferencia entre los poliedros regulares y los irregulares? S: Yo creería que la principal similitud es que están conformados por polígonos y la principal diferencia que uno tiene todas las caras iguales y el otro no.
	N2: El estudiante identifica aspectos de un sólido mediante la comparación de figuras geométricas. N2.1: El	2. Figura 47 Diferencias la cantidad de caras regulares e irregulares. Similitud
	P: ¿cuál es la principal similitud y diferencia entre los poliedros regulares y los irregulares? L: Pues diferencia, creo que son los lados, porque los lados de los regulares son iguales y los lados de los irregulares son diferentes. L: lo parecido entre ellos	N2: El estudiante identifica aspectos de un sólido mediante la comparación de figuras

Las similitudes es que todas las figuras son poliedros regulares. Figura 48 La diferencia es que la forma de cada una es distinta y tienen distintos números de caras. Las similitudes es que todos son poliedros irregulares.	estudiante clasifica los sólidos platónicos de acuerdo a sus características.	es La mayoría de sus caras son triángulos. Demasiados vértices y aristas. Figura 48 Diferencias La base de cada uno. Los polígonos de las caras son distintos. Similitudes Muchos triángulos y rectángulos. Figuras irregulares	es que son poliedros geométricas. N2.1: El estudiante clasifica los sólidos platónicos de acuerdo a sus características
--	---	---	---

es.

3. ¿Qué hexamino permitió construir el dodecaedro? Justifica porque escogiste este. ¿Qué clase de poliedro es?

3. El hexamino 2 ya que tiene 12 caras y es un poliedro regular ya que tiene las caras iguales.

P: Explica ¿que caracteriza a un dodecaedro?

S: El dodecaedro es una figura que tiene 12 caras y tienen forma de pentágono.

M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.

M.2.3: El estudiante reconoce que las caras de un sólido platónico están conformadas por polígonos regulares.

3. El hexamino 2, ya que tiene exactamente 12 caras iguales. El poliedro se llama el dodecaedro regular.

P: Explica ¿que caracteriza a un dodecaedro?
L: Que tiene 12 caras iguales y es un poliedro regular convexo.

M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.

M.2.3: El estudiante reconoce que las caras de un sólido platónico están conformadas por polígonos regulares.

4. ¿Qué hexamino permitió construir una pirámide recta? justifica tu respuesta. ¿Qué clase de poliedro es?

4. El hexamino 7 ya que sus caras son 1 cuadrado y 4 triángulos, por lo tanto, es un poliedro irregular

P: ¿Con el hexamino puedes visualizar fácil el poliedro?

S: Si, uno puede ver todas las partes y decir qué figura es.

M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.

4. El hexamino 7 es la pirámide recta y es un poliedro irregular.

P: ¿Con el hexamino puedes visualizar fácil el poliedro?

L: Si, porque permite saber cuál es la figura exactamente y es más fácil ver las características de esta.

M.2.2: El estudiante identifica diagramas para desarrollar sólidos platónicos.

ya que
una de
sus
caras es
distinta.

NIVELES DE RAZONAMIENTO	SITUACIONES	SOFÍA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
	I Comparación de poliedros regulares e irregulares.								
Nivel de razonamiento 3 Los estudiantes empiezan a desarrollar la capacidad de razonamiento deductivo abstracto, pudiendo realizar	1. Observa la figura 49 y escribe el nombre de cada uno de los poliedros.	1.	P: ¿En qué se diferencia un poliedro tetraedro a uno icosaedro?		M2: El estudiante reconoce los 5 sólidos platónicos, como una estructura conformada de polígonos regulares.	1. Poliedro 1: Tetraedro	P: ¿En qué se diferencia un poliedro tetraedro a uno icosaedro?		M2: El estudiante reconoce los 5 sólidos platónicos, como una estructura conformada de polígonos regulares.
		Tetraedro	S: El tetraedro tiene cuatro caras, y el icosaedro tiene 20 por eso se diferencian.			Poliedro 2: Octaedro	L: El icosaedro tiene más triángulos equiláteros que el tetraedro, por otro lado, uno tiene forma de diamante y el otro de pirámide.		
		Octaedro				Poliedro 3: Icosaedro			
		Icosaedro				Poliedro 4: Cubo			
		Hexaedro				Poliedro 5: Dodecaedro.			
		Dodecaedro							
		Hexaedro irregular							
		Octaedro							
		Prisma hexagonal							

demostraciones informales.

Pueden clasificar familias de figuras

independientemente de la complejidad de sus propiedades y comprender los requisitos de una definición correcta.

2. De la figura 49 y 50, selecciona un poliedro regular y otro irregular. ¿Cuáles son las diferencias? ¿Cuántas caras y aristas concurren en el vértice de cada uno de los poliedros? ¿en todos los vértices de cada figura concurren las mismas caras y aristas?

2. La diferencia es que el poliedro regular tiene las caras iguales y el irregular tiene las caras distintas.

Octaedro
8 caras,
12 aristas
y 6
vértices.
Prisma
hexagonal
8 caras,
18 aristas
y 12
vértices.
No
concurren
en el
mismo
número
de caras
y aristas
ya que

P: Si un poliedro tiene 6 caras, cuatro de ellas son iguales y 2 tienen formas diferentes, estamos hablando de un poliedro irregular

S: Si, porque tiene caras distintas

M.3: El estudiante reconoce que en el vértice de un poliedro concurren el mismo número de caras y de aristas.

2. Tetraedro irregular y cubo.

Diferencias
Cantidad de caras, vértices y aristas.

Los polígonos que conforman sus caras.

Sus ángulos internos.

En el tetraedro concurren 3 caras y 3 aristas.

No, pueden cambiar el número de caras y aristas

P: Si un poliedro tiene 6 caras, cuatro de ellas son iguales y 2 tienen formas diferentes, estamos hablando de un poliedro irregular

L: Si porque las caras que conforman el poliedro son distintas por lo que, es irregular.

N3: el estudiante relaciona algunas características de un sólido platónico con objetos de la cotidianidad.

Los estudiantes empiezan a desarrollar la capacidad de razonamiento deductivo abstracto, pudiendo realizar demostraciones informales. Pueden clasificar familias de figuras independiente mente de la complejidad de sus propiedades y comprender los requisitos de una definición correcta	1. Escribe el nombre y las caras, vértices y aristas de cada poliedro de la figura 51.	1. Octaedro: 8 caras, 6 vértices y 12 aristas. Tetraedro : 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Dodecaedro: 12 caras, 20 vértices y 30 aristas.	P: ¿Cómo se puede caracterizar estos poliedros? S: Se caracterizan por ser poliedros regulares convexos yaqué las caras de cada uno son iguales.	M2: El estudiante reconoce los 5 sólidos platónicos, como una estructura conformada de polígonos regulares .	1. Octaedro: 8 caras, 6 vértices y 12 aristas. Tetraedro: 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Dodecaedro: 12 caras, 20 vértices y 30 aristas.	P: ¿Cómo se puede caracterizar estos poliedros? S: Son poliedros regulares convexos y cada uno está conformado por caras de igual forma.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
	2. ¿Cuántas aristas forman el vértice del octaedro? Responde la misma pregunta para el tetraedro, ¿las mismas aristas forman un vértice en los dos poliedros?	2. 4 aristas forman el vértice del octaedro. 4 aristas forman el vértice del tetraedro. Si, las mismas aristas forman un vértice en los dos poliedros.	P: Observa el tetraedro en la esquina, ¿Cuántas caras forman la punta? S: 3 caras P: Ahora si cuenta los vértices que forman la esquina. S: Ahh!, el vértice está formado por tres aristas y tres caras.	NO: el estudiante compara nociones de la geometría con objetos cotidianos de forma imprecisa	2. 4 aristas en el vértice del octaedro y 3 aristas en un vértice del tetraedro.	P: En todos los poliedros concurre el mismo número de caras y aristas en el vértice. L: No, depende del poliedro que sea. Por ejemplo, en el tetraedro concurren 3 y en el icosaedro 5.	M.3: El estudiante reconoce que en el vértice de un poliedro concurren el mismo número de caras y de aristas.
	3. ¿Cuántas caras se deben de formar para construir un	3. 12 caras se tienen que	P: Une tres caras en forma de pentágonos y forma un vértice, ¿Cuánto sumarian los	M.3.1 El estudiante comprende	3. 12 caras se tienen que formar	P: Une tres caras en forma de octágonos y forma un vértice, ¿Cuánto sumarian los	M.3.1 El estudiante comprende que la suma

	dodecaedro? Al sumar los ángulos que concurren en un vértice del dodecaedro, ¿la suma puede ser mayor de 360°? Justifica tu respuesta. ¿Cuánto pueden sumar los ángulos en el vértice de un poliedro regular convexo?	formar para construir un dodecaedro. No, ya que la suma es igual a 540°. No, ya que la suma debe de ser menor a 360°.	tres ángulos que forman el vértice? S: 324°, creo que me equivoque y sume los ángulos interiores del pentágono ya que no es posible construir un poliedro que sume mas de 360° en el vértice.		de que la suma de los ángulos en el vértice de un sólido no puede exceder los 360°.	para construir un dodecaedro. Al sumar los ángulos que concurren en el vértice del dodecaedro la suma no puede ser mayor a 360° ya que quedaría una superficie plana. La suma de los ángulos en el vértice de un poliedro debe de ser menor que 360°.	tres ángulos que forman el vértice y es posible construir un poliedro? L: La suma seria 405° y no sería posible construir un poliedro porque excede los 360°.		de los ángulos en el vértice de un sólido no puede exceder los 360°		
Nivel de razonamiento 3	III El teorema de Euler	SOFÍA	CUESTIONAMIENTO	ARGUMENTACIÓN	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	LAURA	CUESTIONAMIENTO	ARGUMENTACIÓN	NO MEDIDA DEL RAZONAMIENTO	MEDIDA DEL RAZONAMIENTO
Los estudiantes	1. Observa la figura 52 y	1. En la figura 20				M.3.2: El estudiant	1. En la figura 33				M.3.2: El estudiante

empiezan a desarrollar la capacidad de razonamiento deductivo abstracto, pudiendo realizar demostraciones informales. Pueden clasificar familias de figuras independiente mente de la complejidad de sus propiedades y comprender los requisitos de una definición correcta	completa la tabla 7:	se encuentran a la tabla resuelta correctamente.		e halla la relación de Euler para la cual se cumple en los cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro y octaedro.	se encuentra la tabla resuelta correctamente.		halla la relación de Euler para la cual se cumple en los cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, icosaedro, dodecaedro y octaedro.
	2. Ahora observa los siguientes poliedros de la figura 28 e intenta llenar la tabla 8.	2. En la figura 20 se encuentra a la tabla resuelta correctamente.		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.	2. En la figura 33 se encuentra la tabla resuelta correctamente.		M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara, vértices y aristas.
	3. En el teorema de Euler, la suma del número de caras con el número de vértices, menos el número de aristas siempre es igual a 2, ¿esta fórmula se cumple para todos los poliedros	3. Solo se cumple para los poliedros regulares convexos ya que con los irregulares el	P: Vimos que en el cono si fue posible el teorema de Euler, ¿Qué puedes concluir? S: El cono es un poliedro irregular por lo que el teorema de Euler también se puede cumplir.	M.1.5: El estudiante reconoce elementos de los sólidos platónicos como: cara,	3. Si porque son convexos, óseas caras iguales.	P: ¿El teorema de Euler se cumple en poliedros irregulares? L: De acuerdo con los datos de la tabla, puedo decir que también se cumple en algunos poliedros irregulares como el cono, pirámide, etc..	NO: el estudiante compara nociones de la geometría con objetos cotidianos de forma imprecisa

o solo poliedros
regulares
convexos?
Justifica tu
respuesta.
(sugerencia
visualiza los datos
de la tabla 8)

resultado
final es
distinto a
2.

vértices y
aristas.