

Aspectos históricos relativos al concepto de continuo

Andrés de la Torre Gómez

Resumen

En este artículo se analizan las relaciones entre el concepto de continuo matemático y la imagen intuitiva de lo continuo. Nuestras sensaciones y percepciones, en efecto, nos llevan a afirmar con naturalidad que el movimiento, el tiempo y el espacio físicos son continuos, en el sentido de que están compuestos de partes unidas entre sí, sin ningún tipo de lapsos que separen a unas de otras. Aristóteles estudió exhaustivamente la estructura de este continuo de nuestras intuiciones.

Se presentan en el artículo las concepciones pitagórica, aristotélica y euclidiana del continuo junto con la problemática planteada por las paradojas de Zenón, así como la superación de estas dificultades a la luz de la teoría cantoriana de las clases infinitas. Se resaltan asimismo los impedimentos que tuvieron que ser superados en el desarrollo histórico de las ideas antes de que se llegara a la versión moderna del concepto de continuo, dada por Dedekind.

El escrutinio histórico arroja luces sobre las dificultades que se presentan en la mente del aprendiz y que se oponen al cabal entendimiento del continuo, sugiriendo algunas hipótesis acerca de los obstáculos epistemológicos relativos a este concepto. Entre ellos se destacan la lucha de lo discreto contra lo continuo, la confluencia de lo infinito con lo indivisible y los impedimentos alrededor del infinito actual. La presentación formal de dichas hipótesis puede verse en [4].

Palabras y frases claves: Continuo aritmético, continuidad de la recta, concepto aristotélico de continuo, infinito actual, infinito potencial, paradoja de Zenón.

1. Introducción

Fue en la segunda mitad del siglo XIX cuando se alcanzó la caracterización del sistema de los números reales como campo ordenado completo arquimédiano. Esto se logró gracias a las investigaciones de Cantor, Dedekind y Weierstrass relativas a la fundamentación del número real. La influencia creciente de este paradigma y su posterior imperio en la matemática robustecieron la creencia de que el sistema numérico así caracterizado era suficiente para la representación analítica de todos los tipos de fenómenos continuos, hasta el punto de que llegó a ser habitual referirse a dicho sistema como el continuo aritmético.

La propiedad de continuidad de que goza el sistema consta de dos partes, a saber: (1) Dados dos números reales cualesquiera α y γ , existe un real

β entre α y γ . (2) Si el sistema de los números reales se parte en dos clases, B_1 y B_2 , de modo que cada número de la clase B_1 es menor que cada uno de los de la clase B_2 , entonces existe un número real α y solo uno por el cual esta separación es producida.

La continuidad de la recta consiste en las dos condiciones siguientes: (1) Entre dos puntos cualesquiera de la recta existe un tercer punto de la recta. (2) Si todos los puntos de la recta pueden separarse en dos clases tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y solo uno que efectúa este corte de la recta en dos porciones.

Existen sistemas geométricos que no satisfacen la continuidad. En el caso de la recta es necesario postular la continuidad mediante el axioma de Cantor - Dedekind, con el cual se establece la equivalencia entre el continuo aritmético y el continuo lineal geométrico: Se asume que a cada número real le corresponde un punto de la recta y solo uno y que no hay otros puntos de la recta. Las propiedades del continuo geométrico pueden ser descritas, en consecuencia, por medio del continuo aritmético.

2. Los griegos

El pensamiento matemático griego, tal como se manifiesta desde los tiempos de Tales de Mileto (ca. 600 a.C.) y de Pitágoras (ca. 540 a.C.), asumió con claridad y con vigor un doble programa intelectual: primero, fundamentar la matemática como un sistema lógico deductivo; segundo, matematizar los fenómenos de la naturaleza, sobre el supuesto de que ella está dotada de una estructura racional.

El primero de los programas alcanza su punto culminante con los *Elementos de Geometría*, de Euclides, que es una recopilación de gran parte del conocimiento matemático de su época (siglo IV a. C.). En ella se toma como punto de partida una lista de 10 proposiciones iniciales, que se asumen como axiomas y postulados, complementada con las definiciones que es necesario introducir al comienzo de cada libro. Sobre esta base se enuncian y demuestran sucesivamente los teoremas y se construyen los distintos problemas, empleando para ello exclusivamente el razonamiento deductivo.

El segundo programa, por su parte, no consiste en una mera recopilación de datos de la sensibilidad. Ciertamente, es necesario observar la naturaleza y apelar a la experiencia para recopilar los datos. Pero esto es apenas el comienzo de la investigación natural. Una vez recogidos los datos, es necesario ordenarlos mediante el entendimiento y, de manera específica, a través del razonamiento matemático. Los datos sensibles deben ser mod-

elizados matemáticamente; en la base de los fenómenos observados hay que colocar los conceptos matemáticos, particularmente la idea abstracta de número.

En el desarrollo del segundo programa, los griegos de la escuela pitagórica llevaron a cabo diversos experimentos con el sonido y descubrieron que, si una cuerda emite al ser pulsada una cierta nota de la escala, entonces las cuerdas de longitudes iguales a $1/2$, $2/3$ y $3/4$ de la original emitirán la octava, la quinta y la cuarta, respectivamente, al ser pulsadas con idéntica tensión. Así, la progresión $1 : 2 : 3 : 4$ permitía expresar las consonancias básicas del sistema melódico de los antiguos griegos.

Este descubrimiento reforzó en los pitagóricos la convicción de que el cosmos estaba organizado de acuerdo con ciertas relaciones entre los números - que, para ellos, eran exclusivamente los enteros $2, 3, 4, \dots$. Concebían cada número como un agregado de unidades e identificaban la unidad aritmética con el punto geométrico, el cual estaba dotado de magnitud o grosor y ocupaba una posición en el espacio físico. Alineando los puntos, obtenían las figuras geométricas.

De esta manera, concluyeron que los números eran los constituyentes últimos de las figuras geométricas. Estas, a su vez, eran para los pitagóricos los elementos últimos de que se componían las cosas materiales y la naturaleza misma. Confundieron así el mundo real, el de los fenómenos y las sensaciones, con el mundo ideal de los conceptos de la matemática.

En la concepción pitagórica, la línea se componía de un número entero de unidades. Muy pronto, sin embargo, descubrieron que no importa cuán pequeña sea escogida una unidad para medir el lado de un cuadrado, la diagonal no puede expresarse como un agregado de las mismas unidades que componen el lado. Este descubrimiento puso en entredicho la identificación establecida por los pitagóricos entre el reino de lo discreto, que es el número, y el reino de la magnitud continua, que es la geometría.

El proyecto de unificar estos dos reinos, sin embargo, ha persistido a lo largo de la historia de las matemáticas, incluso entre los griegos post-pitagóricos. Entre esos intentos, fue especialmente significativa la teoría del atomismo matemático, creada posiblemente por Demócrito de Abdera (ca. 410 a.C.) como una secuela de su doctrina materialista del atomismo físico. Según esta concepción todas las cosas se componían de partículas indivisibles, cuya pequeñez las hacía imperceptibles por los sentidos y que exhibían múltiples formas y tamaños.

El atomismo matemático pretendió explicar la magnitud continua en términos de lo discreto. Para ello, planteó la existencia de una mónada o unidad tal que el lado del cuadrado y la diagonal estuvieran constituí-

dos por cantidades indefinidas de tales mónadas. Con esta doctrina se inició la especulación acerca de las magnitudes infinitesimales o infinitamente pequeñas, fijas e indivisibles, que solo pudieron ser desterradas de la matemática en el siglo XIX cuando se encontraron los conceptos rigurosos de derivada e integral.

3. Los argumentos de Zenón

Zenón de Elea (ca. 450 a. C.) pertenecía a la escuela monista de Parménides (ca. 475 a. C), que negaba la existencia del movimiento y el cambio. Zenón se propuso, en defensa de la posición monista, atacar la concepción pluralista preconizada por el pitagorismo. Lo hizo mediante cuatro argumentos en contra de la pluralidad, enderezados específicamente a mostrar las debilidades de la definición pitagórica de punto como “unidad que tiene una posición” y de la concepción del cuerpo como un agregado de unidades o mónadas, concepción que los pitagóricos aplicaban por igual al cuerpo material y a la figura geométrica.

Interesa a nuestro propósito el esquema argumentativo mediante el cual Zenón refutaba por *reductio ad absurdum* el supuesto de que existe un ente múltiple o plural. Si existiera, cada una de las mónadas de que se compone debería tener una magnitud - pues, en caso contrario, la suma de mónadas sin magnitud no podría dar como resultado una pluralidad con magnitud. Establecido ya que la mónada tiene magnitud, se sigue que puede ser dividida *ad infinitum* y, en consecuencia, es infinitamente pequeña. Pero se sigue también que la mónada tiene infinitas partes y, por tanto, una magnitud infinita, es decir, es infinitamente grande.

Así, las mónadas son infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Además, el número de mónadas distintas de que se compone el ente debería ser finito e infinito: lo primero - arguye Zenón - porque en la pluralidad hay tantas mónadas cuantas son, ni una más ni una menos, es decir, un número finito de ellas; lo segundo porque las mónadas que componen la pluralidad deben estar separadas y, en consecuencia, entre dos de ellas debe haber una tercera y similarmente entre está y cada una de las dos precedentes, y así *ad infinitum*.

De esta manera resulta insostenible la idea de la pluralidad, pues lleva consigo una doble contradicción. Ella conduce, en efecto, a afirmar la existencia de algo que es infinitamente grande e infinitamente pequeño y la de un número que es finito e infinito.

Con el fin de completar su obra de demolición, Zenón presentó otros cuatro argumentos para demostrar que el movimiento es imposible. En la paradoja de la dicotomía y en la de Aquiles, tomaba como punto de par-

tida de la argumentación el supuesto de que la magnitud es infinitamente divisible; en la paradoja de la flecha y en la del estadio, el supuesto inicial era, por el contrario, el de que la magnitud está compuesta de elementos indivisibles, tomados en número infinito.

Escogemos las paradojas de Aquiles y la flecha como representativas del estilo argumentativo de Zenón. Pueden enunciarse de la manera siguiente: *Aquiles y la tortuga*: Supongamos que la tortuga - el animal lento por antonomasia- se coloca a una distancia dada delante de Aquiles -el más veloz de los héroes griegos, llamado por Homero “el de los pies ligeros”- y que ambos empiezan a correr al mismo tiempo.

Cuando Aquiles llegue al punto de partida de la tortuga, ésta habrá cubierto una cierta distancia; cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga se habrá situado un poco más adelante, y así *ad infinitum* aunque la distancia vaya siendo sucesivamente menor. Para alcanzar a la tortuga, Aquiles debe cubrir sucesivamente una colección infinita de distancias no-nulas, lo cual es imposible en un tiempo finito.

Aristóteles en la *Física* [239 b 14] presenta la paradoja de Aquiles en la siguiente forma:

El corredor más lento nunca podrá ser alcanzado por el más veloz, pues el perseguidor tendría que llegar primero al punto desde donde partió el perseguido, de tal manera que el corredor más lento mantendrá siempre la delantera. ([1], p. 309).

La Flecha: Si el tiempo se compone de instantes atómicos indivisibles, entonces la flecha en movimiento está siempre en reposo, porque en cada instante la flecha se encuentra en una posición fija. Como esto es verdad para cada instante se sigue que la flecha no se mueve nunca.

En palabras de Aristóteles [*Física*, 239b 5], la paradoja de la flecha reza así:

Si siempre todo lo que está en algún lugar igual a sí mismo está en reposo, y si lo que se desplaza está siempre en un “ahora”, entonces la flecha que vuela está inmóvil. [1], p. 308).

4. La magnitud espacial y la geometría

La concepción griega del espacio se basaba en las experiencias sensoriales más elementales, en las cuales el papel central lo jugaba la noción de distancia entre dos cuerpos materiales. Los sentidos del tacto y la vista nos permiten percibir que el tamaño y la forma de un cuerpo material rígido permanecen invariables cuando este pasa de ocupar un cierto espacio a ocupar otro espacio. Esto nos permite obtener resultados consistentes

cuando comparamos los tamaños de los cuerpos mediante la medición numérica.

La noción de distancia entre dos cuerpos que no están en contacto surge cuando ponemos un tercer cuerpo, convenientemente escogido, en contacto con ambos y lo medimos. Percibimos así la distancia como una magnitud espacial, susceptible de ser ordenada mediante una relación “menor que” y también de ser fraccionada.

El asunto fundamental de la ciencia de la geometría era, para los griegos, el espacio físico, percibido inicialmente por los sentidos y sometido después a un proceso de idealización. Así, la percepción idealizada de las partículas reales muy pequeñas fue lo que los llevó al concepto de punto; el de línea pudo tener su origen, quizá, en una idealización de los hilos muy delgados. De manera similar, la distancia entre cuerpos materiales puede ser idealizada en el concepto de longitud. Las relaciones encontradas experimentalmente entre las medidas de las distancias son idealizadas, a su vez, en el constructo teórico de la geometría.

El continuo espacial encuentra, por esta vía, su modelo matemático natural en el continuo lineal geométrico euclidiano, en el cual el segmento tiene una longitud pero está constituido de puntos que no tienen ninguna. Nuestra intuición de que la distancia entre dos cuerpos materiales es fraccionable se correlaciona en el modelo matemático con el hecho de que el segmento siempre puede ser bisectado mediante una construcción con regla no marcada y compás.

5. El continuo temporal

Los problemas de la modelización matemática del tiempo son mayores que para el espacio. En primer lugar, no podemos detectar el tiempo por ninguno de nuestros sentidos: no lo podemos ver, ni podemos oírlo, ni olerlo, ni percibirlo por el gusto o por el tacto. Por otro lado, el tiempo no puede ser captado ni desde el pasado ni desde el futuro, sino sólo desde el presente, pero este se desvanece tan pronto como llega a nuestra conciencia. Marco Aurelio - el emperador estoico - lo dice bellamente:

El tiempo es como un río, formado por los hechos, que adquiere violenta corriente. Apenas se advierte uno, cuando otro ocupa su lugar, para dejar enseguida paso al que le sigue. ([6], p. 43).

El concepto de tiempo está basado en una experiencia común a todos los seres humanos, cual es la de poder tomar las percepciones de la vida de cada observador individual y ordenarlas mediante la relación de “antes” y “después”. Obtenemos así lo que Whittaker denomina “serie temporal del

tiempo privado del observador”, que percibimos de manera oscura como un continuo temporal. ([10], p. 40)

A partir de los pitagóricos se acostumbra poner en correspondencia este continuo temporal, tan vagamente percibido, con el continuo aritmético, de manera similar a lo que se hace con el continuo espacial. La diferencia profunda entre los dos procesos proviene de la carga sensorial e intuitiva que tiene el continuo espacial y que no se presenta con la misma intensidad en el continuo temporal.

En esta modelización del continuo temporal como continuo aritmético, el elemento de la serie temporal que ponemos en correspondencia con un número particular lo denominamos instante. Sin embargo, la observación psicológica del paso del tiempo en la experiencia individual permite afirmar que la noción de instante no admite un correlato preciso en el mundo de los datos sensoriales. Ninguna de nuestras sensaciones es propiamente instantánea, puesto que las alteraciones fisiológicas se extinguen gradualmente, como ocurre por ejemplo en el caso de un relámpago: lo vemos durante un período temporal mayor que el ocupado por el fenómeno físico mismo. Los elementos primarios de la percepción se extienden en la serie temporal y forman una especie de segmentos temporales que guardan una semejanza mayor con los segmentos infinitesimales de la geometría no arquimediana que con el punto del continuo geométrico habitual. ([10], p. 41)

La experiencia del cinematógrafo, por otro lado, es producida por una colección finita de imágenes pasadas a una velocidad tan alta que no podemos percibir las discontinuidades entre ellas. La reflexión acerca de estas experiencias nos lleva a plantear la cuestión de si el continuo aritmético tiene una estructura semejante a la del continuo intuitivo estudiado por Aristóteles.

6. El continuo aristotélico

Aristóteles expuso en la Física la noción de continuo, a la cual consideraba como una característica esencial de todo movimiento, del tiempo y de las magnitudes. De acuerdo con esta doctrina, la continuidad es una especie de contigüidad en la que los extremos de las cosas contiguas constituyen una misma y única cosa y se mantienen unidos. A su vez, la contigüidad resulta de la conjunción del contacto y la sucesión. El contacto queda definido por el hecho de que los extremos están juntos. En cuanto a la consecutividad, se dice de dos cosas que están en sucesión si entre ellas no existe ningún intermedio del mismo género (como en la noción moderna de sucesor inmediato). Finalmente, cuando una cosa cambia o se mueve

de manera continua se llama intermedio al término que precede al término extremo. (Libro V, 3)

Es notable la circularidad en la presentación de estas cinco nociones (las de continuo, contiguo, en contacto, en sucesión e intermedio), así como el hecho de que el recurso último al que apela Aristóteles es la noción central de su teoría física, a saber, la de movimiento. Su teoría de la continuidad está dominada por la imagen del movimiento.

De las nociones anteriores se desprende que todo continuo es divisible en partes que son siempre divisibles y, en consecuencia, el infinito (potencial) es la primera manifestación de lo continuo. Aristóteles lo enunció de la siguiente manera [200b 19]:

... lo primero que se manifiesta en lo continuo es el infinito. Por esto sucede a menudo que quienes definen lo continuo utilizan la noción de infinito, ya que entienden por continuo lo que es divisible hasta el infinito. ([1], p. 108)

Otra consecuencia de las definiciones aristotélicas es que las mónadas indivisibles no pueden estar ni en contacto ni en sucesión. Dado que la consecutividad es condición necesaria para el contacto y este, a su vez, lo es para la continuidad, se sigue que las mónadas no pueden ser continuas unas con otras. En consecuencia, el continuo no puede estar compuesto de mónadas indivisibles. Aristóteles lo enunció de la siguiente guisa [231a 20]:

Si la continuidad, el contacto y la sucesión son tales como los hemos definido antes - es decir, se decimos que son continuas aquellas cosas cuyos extremos son uno, en contacto cuando sus extremos están juntos, y en sucesión cuando no hay ninguna cosa del mismo género entre ellas - entonces es imposible que algo continuo esté hecho de indivisibles, como, por ejemplo, que una línea esté hecha de puntos, si damos por supuesto que la línea es un continuo y el punto un indivisible. ([1], p. 268)

En la teoría aristotélica las partes constitutivas del continuo no pueden ser las mónadas, sino que deben ser segmentos de continuo, en contacto y en sucesión, y por lo tanto contiguos, y con los extremos confundidos en una sola y misma mónada.

Por ejemplo, un segmento rectilíneo es un continuo, en el cual las partes y los puntos existen únicamente “en potencia”, salvo los extremos del segmento, que existen “en acto”. Podemos actualizar la existencia de, digamos, n puntos distintos entre los extremos designándolos distintamente y, de la misma manera, alcanzan la existencia actual $(n + 1)$ partes distintas y consecutivas del segmento original. La representación de este continuo consistiría en una colección bien eslabonada de segmentos virtualmente

separados por sus puntos extremos.

Esta visión del continuo - en la cual las mónadas sólo tienen existencia potencial - le permitía a Aristóteles eludir el problema de concebir que todo punto de una línea, aunque tenga sucesores, no tiene sin embargo un sucesor inmediato. La dificultad surge cuando se considera que los sucesores tienen existencia actual, pero si la existencia de los puntos es puramente potencial la dificultad desaparece.

El concepto aristotélico de continuo es el fundamento apropiado para el sistema de los puntos racionales de la recta. La teoría euclidiana de las proporciones, expuesta inicialmente por Eudoxio (ca. 370 a.C.), afirma la existencia en la recta de los puntos correspondientes a las razones numéricas, aunque únicamente les atribuye existencia potencial.

Esta teoría no afirma - al menos no lo hace de manera explícita - la existencia en la recta de puntos irracionales. Euclides da, en cambio, un procedimiento algorítmico para decidir cuándo dos segmentos son incommensurables, consistente en la prosecución indefinida de un proceso de división sobre cada uno de los dos segmentos que se comparan. Dicho procedimiento aparece en la Proposición X, 2 de los *Elementos*, que podemos enunciar de la siguiente manera (siguiendo la versión inglesa de Th. Heath):

Si, cuando la menor de dos magnitudes es repetidamente sustraída de la mayor, el resto nunca mide a la magnitud que le precede, las magnitudes dadas serán incommensurables.

La condición para la commensurabilidad es que el proceso termine en un número finito de pasos. En cambio, las dos magnitudes son incommensurables cuando el proceso continúa indefinidamente.

La diferencia entre el continuo aritmético y el aristotélico - euclidiano radica en dos puntos centrales:

1. El continuo aritmético contiene elementos diferentes a los que aparecen en el análisis aristotélico. Los elementos del continuo aritmético son los números reales y los puntos de la recta, en cambio los del continuo aristotélico son los puntos racionales de la recta.
2. Los elementos del continuo aritmético gozan de una existencia actual, en cambio los del continuo aristotélico sólo existen potencialmente.

7. El infinito potencial y el infinito actual

El golpe que la explicación moderna de las paradojas de Zenón le da a la intuición se siente con más fuerza, sin embargo, cuando toca con nuestras más inveteradas creencias acerca de los conjuntos infinitos. De acuerdo con estas intuiciones, el infinito se nos presenta como la posibilidad de

continuar realizando un proceso finito tantas veces como queramos, como por ejemplo, el de bisecar sucesivamente el segmento con regla no marcada y compás o el de sumar la unidad para obtener la sucesión de los números $2, 3, 4, \dots$

El concepto que acabamos de describir es el de infinito potencial, denominado “potencial” en oposición al infinito actual, que corresponde a la totalidad de los elementos de un conjunto infinito cuando son considerados como simultáneamente existentes, al menos en la mente. Aristóteles dedica los capítulos 7 y 8 del Libro III de la Física a la refutación de la existencia de un infinito actual. Su punto de vista es que el matemático no opera con el infinito actual en ninguna de sus proposiciones. Por ejemplo, la proposición IX, 20 de los Elementos de Euclides reza así: “Hay más números primos que cualquier conjunto de números primos”. Lo único que es lícito inferir de aquí es que no existe un número primo máximo, es decir, que los números primos son potencialmente infinitos porque siempre es posible superar cualquier primo que se haya alcanzado en la numeración.

El rechazo sistemático al infinito actual por parte de matemáticos y filósofos se prolongó hasta bien entrado el siglo XIX. Todavía en 1912, H. Poincaré afirmaba lo siguiente:

No hay infinito actual y, cuando hablamos de una colección infinita, nos referimos a una colección a la cual se pueden agregar incesantemente nuevos elementos, semejante a una lista de suscripción que nunca fuera cerrada a la espera de nuevos suscriptores. ([8], p. 77)

La desconfianza con respecto al infinito actual se debe, posiblemente, a que su admisión origina un sinnúmero de dificultades y paradojas. Galileo, por ejemplo, observó en sus Diálogos de 1638 que si se admitiera que los números naturales son actualmente infinitos - y no solo potencialmente infinitos -, se seguiría que existen tantos cuadrados perfectos como números naturales, dado que para cada número natural hay un cuadrado perfecto y cada cuadrado perfecto tiene una raíz cuadrada positiva. Esto lo molestaba de manera particular pues “*todos los números - incluyendo los cuadrados y los no cuadrados - son más que los cuadrados solos*”. ([5], p. 58)

A los ojos de Galileo, la última proposición asume las características de un hecho incontrastable. Tiene su fundamento en la convicción intuitiva de que una colección dada contiene más elementos que cualquiera de sus partes, creencia que el mismo Euclides había incorporado en una de las proposiciones iniciales de su geometría. En efecto, el axioma 5 de los Elementos reza así: “*El todo es mayor que la parte*”, por lo que nos

referiremos a él como el principio “parte-todo”.

Tuvo Galileo, en todo caso, el mérito insigne de haber buscado el origen de estas dificultades en “*el modo que tenemos nosotros de discurrir con nuestro entendimiento finito acerca de los infinitos, asignándoles aquellos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas*”. ([5], p. 57].

Hoy se reconoce a B. Bolzano como uno de los primeros en aceptar la existencia de conjuntos actualmente infinitos. En su libro *Las Paradojas del Infinito*, publicado en 1851, observa Bolzano que un conjunto infinito puede siempre ser puesto en correspondencia uno-a-uno con un subconjunto propio y que esta propiedad distingue a los conjuntos infinitos de los finitos. De aquí, sin embargo, no concluye que un conjunto infinito y un subconjunto propio puedan tener la misma cantidad de elementos, pues Bolzano cree firmemente en el axioma “parte-todo”.

Bolzano también muestra que cualesquiera dos intervalos compactos en la recta real siempre pueden ponerse en correspondencia uno-a-uno, pero esto no implica que los dos intervalos tengan la misma cantidad de puntos. Para él, tiene más puntos el intervalo de mayor longitud. Como ilustración, tómese su afirmación de que un segmento de longitud 12 tiene más puntos que un segmento de longitud 5, aunque mediante la asignación $5y = 12x$ se establece una correspondencia uno-a-uno entre los dos conjuntos. Para explicar esta paradoja, Bolzano considera los puntos 3 y 4 en el segmento menor y sus imágenes $36/5$ y $48/5$ en el segmento mayor. Los puntos 3 y 4 - arguye Bolzano - tienen la misma relación geométrica que sus imágenes, pero sus relaciones aritméticas son diferentes. De aquí concluye que los puntos 3 y 4 juegan en el intervalo menor un papel matemático diferente al que juegan sus imágenes puntuales en el intervalo mayor.

8. La teoría cantoriana del infinito actual

La teoría moderna del infinito actual se debe al genio de G. Cantor, quien toma en consideración tanto el aspecto cardinal como el ordinal de la numeración.

Los números naturales pueden emplearse en su aspecto cardinal, cuando se desea registrar el número de elementos de un conjunto finito; también, en su aspecto ordinal, para ponerle una etiqueta numérica a cada elemento de un conjunto ordenado finito. En la vida cotidiana tienden a confundirse estos dos aspectos del número natural, por ejemplo, si se nos pide hallar el número de elementos de un conjunto finito pequeño, trataremos de contar, es decir, ordenar y etiquetar los elementos. La experiencia vivida con conjuntos pequeños nos muestra que el número de

elementos es independiente de su ordenación. En los conjuntos grandes, el número de elementos sólo puede determinarse mediante el cálculo, dada la imposibilidad de contarlos. Sin embargo, sea pequeño o grande el conjunto en cuestión, seguimos confiando intuitivamente en que la ordenación no altera la cardinalidad. Esta propiedad, que es válida para los conjuntos finitos, deja de serlo cuando se trata de conjuntos infinitos.

La forma final de su teoría la publicó Cantor en dos artículos, uno de 1895, el otro de 1897, con el título de *Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Números Transfinitos*.

Su punto de partida en el artículo de 1895 es el aspecto cardinal. Considera Cantor que dos conjuntos tienen el mismo número cardinal si es posible encontrar una correspondencia uno-a-uno entre ellos. De esta manera, avanza más allá de Bolzano - en el caso concreto del ejemplo de los segmentos de longitudes 12 y 5, Cantor concluiría que ellos tienen el mismo número de elementos, en vista de la biyección $5y = 12x$.

En cuanto al aspecto ordinal, Cantor considera que dos conjuntos ordenados tienen el mismo número ordinal si es posible encontrar entre ellos una correspondencia uno-a-uno que preserve la relación de orden entre elementos correspondientes.

Así es como Cantor introduce los números transfinitos, cardinales y ordinales. Se trata de dos conceptos claramente distintos, como quedó establecido por el mismo Cantor cuando mostró la existencia de conjuntos infinitos ordenados cuyos números ordinales son distintos pero tienen el mismo número cardinal. Más aún: el número de tales conjuntos es infinito.

La teoría del infinito desarrollada por Cantor condujo a algunos resultados inesperados y sorprendentes. Considérense, como ejemplos, los siguientes: (i) Hay tantos números impares como números naturales. (ii) Existen tantos números pares como números racionales. (iii) El número de puntos que hay en un segmento es mayor que el de números naturales. (iv) Hay el mismo número de puntos en un segmento que en la recta completa.

El mismo Cantor se sorprendió con algunos de sus hallazgos. Es ilustrativo su intento de demostrar la imposibilidad de establecer una correspondencia uno-a-uno entre una superficie y una línea. Después de tres años de investigaciones, encontró una correspondencia biunívoca entre un cuadrado y el lado del mismo, en contra de la opinión general de los matemáticos y aún de sus propias intuiciones iniciales sobre el tema. Este descubrimiento provocó una de sus frases más citadas, que aparece en una carta a Dedekind: “¡Lo veo, pero no lo creo!” ([2], p. 242).

9. El axioma “parte-todo”.

Es el axioma “parte-todo”, tan tenazmente sostenido por nuestras intuiciones, el que recibe los desafíos más fuertes por parte de la teoría cantoriana. Dicho principio es enteramente válido cuando se trata de conjuntos finitos: en efecto, si un conjunto tiene un número finito de elementos, entonces tiene más elementos que cualquiera de sus partes propias. Pero, el principio en cuestión deja de ser válido cuando se refiere a aquellas clases que tienen un número infinito de términos, según quedó mostrado en los ejemplos anteriores.

Con respecto al papel que este axioma ha jugado en la matemática, B. Russell escribió lo siguiente en 1902:

... es, sin duda, un axioma muy agradable para el sentido común. Pero no existe evidencia de ese axioma, excepto lo supuesto en él mismo y su admisión conduce a contradicciones perfectamente precisas. Este axioma no sólo es inútil, sino positivamente destructivo en la Matemática, y en contra de su exclusión no se puede argumentar nada, salvo el prejuicio. Uno de los méritos fundamentales de las demostraciones es que infunden un cierto escepticismo respecto a la cosa demostrada. Tan pronto se encontró que podía demostrarse la imposibilidad de la similitud de todo y parte para todo todo finito, se hizo plausible suponer que para todos los infinitos, donde no podía probarse esa imposibilidad, no existía realmente. ([9], p. 409)

Una vez superado el axioma “parte-todo” la paradoja de Aquiles y la tortuga puede ser explicada satisfactoriamente, pues se relaciona de inmediato con la correspondencia biunívoca de dos clases infinitas. Cada uno de los corredores se halla en cada instante en algún punto de su recorrido y, por lo tanto, existe una correspondencia biunívoca entre las posiciones de Aquiles y las de la tortuga. Se deduce entonces que, en cualquier instante dado - particularmente, en el instante en que Aquiles alcanza a la tortuga - esta ha visitado exactamente tantos lugares como aquel, aun cuando el recorrido de la tortuga sea ya una parte propia del de Aquiles.

Esto puede verse con mayor claridad si se expone el argumento lógico-formal de Zenón, como lo hace Russell, ([9], p. 407) de la manera siguiente:

1. Para cada posición de la tortuga existe una y sólo una de Aquiles; para cada posición de Aquiles existe una y sólo una de la tortuga.
2. Por lo tanto, la serie de posiciones ocupadas por Aquiles tiene el mismo número de términos que la serie de posiciones ocupadas por la tortuga.
3. Una parte tiene menos términos que un todo en el que se halla contenida y con el cual no es coextensiva.

4. En consecuencia, la serie de posiciones ocupadas por la tortuga no es parte propia de la serie de posiciones ocupadas por Aquiles.

10. La paradoja de aquiles y la tortuga a la luz del cálculo infinitesimal

En sus argumentos contra la concepción de las mónadas indefinidamente pequeñas expresaba Zenón la arraigada creencia de que, si aquellas tienen alguna longitud, entonces al tomar un número infinito de ellas resulta una línea de longitud infinita. Si, por otro lado, las mónadas no tienen longitud, entonces un número infinito de ellas tampoco la tendrá. El concepto de convergencia de una serie infinita, elaborado por la matemática posterior, desafía ese tipo de intuiciones del sentido común.

El paso al límite, en efecto, permite calcular la distancia total que tendría que recorrer cada uno de los corredores hasta el momento en que Aquiles alcanzara a la tortuga. P. Pérez Carreras lo hace así en su texto de *Cálculo Infinitesimal*:

Si Aquiles ocupa la posición A y la tortuga la posición A₁, supongamos que Aquiles lleva la velocidad [uniforme] v y la tortuga una velocidad v' con v' < v. Si d es la distancia que separa Aquiles de la tortuga [es decir, la longitud del segmento AA₁], sea k un real tal que v' = kv con 0 < k < 1. Aquiles tarda d/v unidades de tiempo en llegar a A₁. Al cabo de este tiempo, la tortuga se encuentra en A₂, en donde la longitud de A₁A₂ es kd. Cuando Aquiles llega a A₂, la tortuga se encuentra en A₃ y la longitud de A₂A₃ es k²d y así sucesivamente. La tortuga ha recorrido la distancia

$$kd + kd_2 + \dots + knd = d[k + k_2 + \dots + kn]$$

cuando se encuentra en A_{n+1}, es decir, ha recorrido

$$\frac{kd[1 - k_n]}{[1 - k]}$$

unidades de distancia.

Como la sucesión [kⁿ] tiende a 0, el razonamiento de Zenón es válido, en tanto que la tortuga no rebase el punto B dado por

$$OB = OA_1 + \frac{kd}{1 - k}$$



Lo que Zenón no tuvo en cuenta es que la acumulación indefinida de cantidades (espacios o tiempos) puede dar como consecuencia una cantidad finita (es decir, un número). ([7], p. 290)

11. La explicación moderna de la paradoja de la flecha

La teoría cantoriana de las clases infinitas, por otro lado, también permite responder satisfactoriamente a la paradoja de la flecha. En efecto, si modelizamos el espacio y el tiempo mediante el continuo aritmético, la conclusión del argumento de Zenón puede expresarse en el sentido de que la flecha en vuelo está en reposo en cada instante. Russell deriva de aquí, en primer lugar, una teoría estática del movimiento y, en segundo lugar, la negación de la existencia de los infinitesimales actuales.

Para formular la teoría estática del movimiento de una manera lógica se reemplaza el tiempo por una serie unidimensional t y el espacio por otra serie unidimensional s . (En general, el espacio podría remplazarse por una serie n -dimensional). El movimiento consiste en el hecho de que, por la ocupación de una posición en un instante, se establece una correspondencia entre posiciones e instantes y el movimiento es continuo si esta correspondencia define una función continua. Cuando, a través de un período temporal cualquiera, por corto que sea, se hallan correlacionados términos diferentes de t con términos diferentes de s , existe movimiento. Hay reposo cuando durante el mismo período, por corto que sea, todos los términos de t se hallan correlacionados con el mismo término de s . El reposo instantáneo está dado por cualquier término para el cual el coeficiente diferencial del movimiento existe y es igual a cero. Podemos afirmar, en consecuencia, que si el movimiento de un cuerpo está dado por la función $s = f(t)$ entonces el móvil se encuentra en reposo instantáneo en aquellos instantes t en los cuales $f'(t) = 0$. Cuando la función $f(t)$ es una constante, es lícito afirmar que el móvil se encuentra en reposo instantáneo en cada instante.

En cuanto al segundo aspecto considerado por Russell, este autor reduce la conclusión de Zenón en el argumento de la flecha a la afirmación de que todo valor posible de una variable es una constante y , por tanto, si se toman dos valores cualesquiera de la variable, su diferencia es siempre finita. De aquí se sigue que no existen diferencias infinitesimales.

Sea, por ejemplo, una variable continua x que puede tomar todos los valores entre 0 y 1. De acuerdo con la teoría estática de la variable, se pueden hacer las afirmaciones siguientes: (i) Todos los valores que puede tomar la variable son números definidos, como $1/3$ ó $\sqrt{2}/2$. (ii) Todos esos valores son constantes. (iii) Si tomamos dos valores cualesquiera de

la variable x , veremos que su diferencia es finita, aun cuando esa diferencia la podamos tomar menor que cualquier valor dado. En este caso, el límite inferior de las diferencias posibles es cero, pero todas las diferencias son finitas. Se concluye que en el caso de la variable x no existen diferencias infinitesimales.

12. La aritmetización del análisis

Hemos visto que una respuesta satisfactoria a las paradojas de Zenón sólo pudo lograrse después de que la matemática aclaró los procesos envueltos en la continuidad, el paso al límite y los agregados infinitos de puntos. El desarrollo moderno de estas nociones exigió, a su vez, la fundamentación del número real sobre bases puramente aritméticas. Para ello, fue necesario considerar primordialmente el aspecto ordinal de los números, independizándolos de la magnitud geométrica. De este modo, la característica esencial de un número ya no es la magnitud - como lo era para los griegos - sino el lugar que ese número ocupa en el agregado ordenado de los reales.

Esta conquista fue lograda en la segunda mitad del siglo XIX por el gran triunvirato: Weierstrass, Dedekind y Cantor. Nociones como la de continuidad quedaron liberadas así de toda apelación a los datos de los sentidos, dejando de ser válidas las imágenes con que se la describía antes, como la de la curva suave que se traza sin levantar el lápiz del papel. De igual manera, la derivada y la integral se liberaron de las percepciones sensoriales con que eran tratadas, tales como la rata de cambio o el área de una superficie.

La corriente central del pensamiento matemático griego no logró establecer esta separación entre el mundo de los sentidos y la intuición, por un lado, y el mundo de la razón y la lógica, por otro. El efecto producido en Grecia por las paradojas de Zenón no fue el de obligarlos a precisar los términos del debate sino que, por el contrario, los llenó de pánico con respecto al infinito, al que desterraron de su matemática. Como resultado de esta actitud, Eudoxio creó el método de exhaustión que le permitía demostrar la igualdad de dos magnitudes, por ejemplo, la de dos áreas o la de dos volúmenes, sin emplear en el razonamiento el paso al límite.

La concepción del infinito de Arquímedes - tal como ella puede derivarse del análisis del Método relativo a los problemas mecánicos - se aproxima notablemente a las de la modernidad. En la aplicación de su método, en efecto, Arquímedes - quien murió en el año 212 a.C. - secciona una figura plana, por ejemplo, un triángulo, por rectas paralelas y afirma, enseguida, que la figura está formada por todas las paralelas.

Mucho se ha especulado - desde que se conoció el texto de Arquímedes en la primera década del siglo XX - acerca del significado de esta descomposición de la figura plana en líneas. Dos opciones, sin embargo, son claras respecto de las líneas, a saber:

- i. Las líneas no tienen anchura, es decir, constituyen elementos indivisibles de la figura plana. En este caso, la afirmación de Arquímedes se opondría a la concepción aristotélica del continuo, según la cual éste no se compone de indivisibles. De ser así, Arquímedes estaría muy cerca de la aceptación plena de la existencia del infinito actual - existencia que solo se impuso en la matemática después de Cantor, al finalizar el XIX.
- ii. Las líneas tienen anchura, es decir, son elementos divisibles de la figura plana. De esta manera, la figura quedaría seccionada en un conjunto de pequeñas fajas. En este caso, Arquímedes estaría muy cerca de la noción moderna de la integral, según la cual el área de la figura plana se obtiene como la suma de las áreas de todas las fajas, tomadas éstas con anchuras cada vez más pequeñas. Por este camino, la concepción de Arquímedes constituiría un antecedente del Cálculo Integral, desarrollado por Newton y por Leibniz en el siglo XVII.

Nota: En otro lugar hemos analizado en detalle la concepción moderna del continuo, tal como fue formulada por Dedekind, y su relación con la propiedad arquimediana. ([3]. Cap. 4).

Este artículo se basa en los resultados del proyecto de investigación “*Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de continuo*”, presentado por el autor en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, como parte de las actividades del grupo de investigación “Educación Matemática e Historia (U de A – Eafit)”, Colciencias 2000.

Referencias

- [1] Aristoteles. *Física*, Gredos, Madrid, 1998.
- [2] Dauben, J. W. *El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana, en Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910, una introducción histórica* (ed. I. Grattan - Guinness), Alianza Editorial, Madrid, 1980.
- [3] de la Torre Gómez, Andrés. *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*, Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 1997.
- [4] de la Torre Gómez, Andrés. *Los conflictos cognitivos en la construcción del concepto de continuo*, Matemáticas Enseñanza Universitaria (ERM), Vol. IX, No (1,2), 51-70, 2001.

- [5] Galileo Galilei. *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, Losada, Buenos Aires, 1945.
- [6] Marco Aurelio. *Meditaciones*, Gredos, Madrid, 1997.
- [7] Perez Carreras, P. *Notas de clase: Cálculo Infinitesimal*, Servicio de Publicación de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 1989.
- [8] Poincarè, H. *Últimos pensamientos*, Espasa Calpe, Buenos Aires, 1946.
- [9] Russell, B. *Los Principios de la Matemática*, Espasa Calpe, Madrid, 1967.
- [10] Whittaker, E. *From Euclid to Eddington, a study of conceptions of the external world*, Dover, New York, 1958.

Dirección del autor: Andrés de la Torre Gómez , Profesor titular de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, adatorre@matematicas.udea.edu.co