

**DESARROLLO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE NÚMERO IRRACIONAL:
EL CASO DE LOS LOGARITMOS**

José Julián Cortes Muñoz

Maestría en Educación Énfasis Educación Matemática

**Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Santiago de Cali
2016**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACION Y PEDAGOGIA (I.E.P)**

**DESARROLLO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE NÚMERO IRRACIONAL:
EL CASO DE LOS LOGARITMOS.**

JOSÉ JULIÁN CORTES MUÑOZ

**Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Educación Énfasis Educación Matemática**

**SANTIAGO DE CALI
Octubre de 2016**

A Mónica, Sofía y Samuel.

Agradecimientos

Agradezco de corazón a los docentes de la Maestría en Educación del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, por sus valiosos aportes y enseñanzas, y en especial a Luis Recalde por toda la paciencia que tuvo.

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo analizar los aportes de técnicas, procesos de generalización y/o interpolación que desarrollaron matemáticos como Napier, Mercator, Euler, Newton, entre otros y que fueron delineando la necesidad de establecer de manera formal el cuerpo de los números reales. Este trabajo se centrará en los procesos operativos que llevaron a Napier y Euler a trabajar en los logaritmos. Por tratarse de un proceso operativo que da lugar a cantidades no racionales, se considera que los logaritmos constituyen uno de los aspectos movilizadores en el proceso de formalización de los reales (**R**).

Esto se hará revisando aspectos del desarrollo histórico de los logaritmos, distinguiendo entre la exploración algorítmica, la geométrica y la analítica hasta abordar la parte formal del concepto.

Se busca utilizar el análisis histórico para la identificación de algunos obstáculos epistemológicos que pueden ser tenidos en cuenta en el proceso de aprendizaje

Palabras clave: logaritmo, función logarítmica, didáctica, educación.

Tabla de contenido

Introducción.....	7
1. Obstáculos epistemológicos en la conceptualización de los logaritmos.	9
2. Antecedentes históricos de los logaritmos	13
3. Construcción de los logaritmos por Napier	22
4. Desarrollos posteriores: Euler	30
5. Conclusiones	40
Bibliografía.....	45

Introducción

Esta propuesta de trabajo de grado, se inscribe en una línea de investigaciones con trasfondo histórico- epistemológico y aborda una de las nociones base de la matemática: los números reales (**R**). Nos centraremos en la construcción histórica del concepto de número irracional, en especial se tratará de establecer como el caso que involucra a los logaritmos y como estos incidieron en el establecimiento de los números reales.

El conjunto de los números reales, el cual constituye el continuo aritmético, tal como se encuentra incorporado en los libros de análisis, ha experimentado un largo proceso de conformación, desde los principios primigenios de los pitagóricos hasta las matemáticas modernas, pasando por la aparición de las magnitudes inconmensurables, el estudio de la teoría de números y la teoría de la medida.

La conformación de los números reales es uno de los problemas históricos complejos, teniendo en cuenta que en la base fundamental del cálculo se encuentran los conceptos de número, límite y función. Éstos, a su vez, están ligados al concepto de continuidad, cuya fundamentación aritmética se da a partir de la construcción de los irracionales tomando como base los racionales, tal como lo hicieron Cantor y Dedekind en el siglo XIX en su perspectiva de tener una formalización de los números reales.

Se observa que este problema histórico se repite en la escolaridad cuando se estudia la función logarítmica es decir, cuando aparecen cantidades que no corresponden a racionales. Aquí se vislumbra que nuestro telón de fondo teórico es precisamente el continuo aritmético, es decir los reales (**R**), vamos a mirar los procesos de desarrollo histórico en particular en los procesos operativos con cantidades que no eran racionales y cómo éstas exigieron una formalización de un corpus que se llaman los números reales (**R**). Se revisarán estos conceptos desde los griegos hasta el siglo XIX, centrándonos en como los logaritmos como elementos catalizadores de este proceso.

Nos proponemos estudiar y analizar desde el punto de vista histórico, los aportes de técnicas, procesos de generalización y/o interpolación que desarrollaron matemáticos como Napier, Mercator, Euler, Newton, entre otros, que fueron delineando la necesidad de establecer de manera formal el cuerpo de los números reales. Cabe enfatizar que en este trabajo nos centraremos fundamentalmente en los procesos operativos que llevaron a Napier y Mercator a trabajar en los logaritmos, pues, como se dijo anteriormente, fueron principalmente las cantidades no racionales las que movilizaron la formalización de los reales (**R**).

Esta propuesta es de orden histórico epistemológico, pues constituyen un punto donde se combinan diversas cuestiones que permitirán a la educación matemática fijar algunos temas sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

Este trabajo se ha dividido en 5 capítulos. En el primer capítulo se abordan los obstáculos epistemológicos que se pueden identificar en el desarrollo histórico de la noción de logaritmo. En el segundo capítulo se habla de los orígenes de los logaritmos y cuáles fueron las ideas motivadoras detrás de ellos, como también quienes fueron los que aportaron a este concepto y de qué forma. El capítulo tres aborda los desarrollos hechos por Napier, su concepción geométrica y de progresiones aritméticas y geométricas y la forma en que construye las tablas. El cuarto capítulo se estudia desarrollos posteriores al de Napier, es decir, como el concepto de logaritmo fue evolucionando hasta llegar a la función logarítmica, los desarrollos en series de potencias y el área de la hipérbola. En el quinto capítulo se dan las conclusiones de como los logaritmos sirven como un elemento catalizador en la conformación de los números irracionales y como los obstáculos epistemológicos que aparecen en su enseñanza están permeadas por la presentación axiomática que se da de estos.

1. Obstáculos epistemológicos en la conceptualización de los logaritmos.

Históricamente los logaritmos constituyeron un auxiliar de incomparable importancia debido a que facilitan la resolución de cálculos muy complejos, lo que permitió el avance de muchas ramas del saber como la astronomía, la navegación, riquezas acumuladas en lo que se requiere a interés compuesto. Si bien es cierto la noción de logaritmo es fundamental en el cálculo, las ecuaciones diferenciales y el álgebra lineal, es decir, en ramas abstractas de las matemáticas, es también muy importante en la modelación de situaciones del mundo circundante, lo que le abre muchas posibilidades de aplicación. Los logaritmos contribuyeron en el desarrollo de la astronomía, la geodesia, en la navegación marítima y en la ingeniería. También son necesarios en la economía, la banca, y especialmente en la estadística. En la modelación del crecimiento poblacional, cuestión muy importante en la biología y en la química. Incluso en la música, pues los pentagramas guardan relación con la escala logarítmica.

Todo lo anterior nos muestra que no sólo estamos ante una simple operación matemática, sino ante una noción matemática que juega un papel decisivo en el desarrollo económico, industrial, tecnológico y social del mundo. Aunque históricamente, en sus inicios se estableció como una simple herramienta para simplificar cálculos, lo cual hoy sería irrelevante por el uso de los computadores, su importancia se debe a la cantidad de fenómenos naturales que permite modelar.

Por eso cobra mucha importancia su enseñanza y por tanto es deseable entender y tener un buen manejo del concepto de los logaritmos y todas sus propiedades.

Uno de los obstáculos cognitivos de este concepto es la forma de su enseñanza, pues se presenta como un objeto el cual se reemplaza algunos valores en una fórmula dada por el profesor, o como una operación opuesta a la exponenciación, dejando de lado los aspectos conceptuales, lo que permite el surgimiento de obstáculos cognitivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En algunos de los casos la enseñanza de los logaritmos se inicia, mostrando la relación entre la logaritmación y la exponenciación, luego se muestra el logaritmo natural; posteriormente se pasa a enumerar las propiedades se proponen ejercicios donde se

utilicen estas propiedades, de tal forma que se pueda tener los pasos necesarios para involucrar las ecuaciones logarítmicas y finalmente, tratar de resolver ecuaciones logarítmicas y luego unos ejercicios de aplicación en los cuales son repetitivos: aumento de poblaciones, tasas de intereses, descomposición de sustancias, etc.

Visto desde el punto de vista matemático, este esquema es satisfactorio, pero se encuentra muy lejano de la realidad del estudiante quien lo percibe como poco evidente y carente de sentido; además, muestra un esquema perezoso como lo anota Bachelard (Bachelard, 2000) .

El punto de vista histórico permite conocer cómo se crearon y construyeron estos conceptos y las teorías que hoy día se manejan producto del trabajo acumulativo; también ayuda a poder comparar técnicas actuales con las usadas en el pasado, además de mostrar las distintas técnicas de resolver un mismo problema.

Para abordar la enseñanza de los logaritmos generalmente se ha optado por utilizar problemas de acuerdo a las siguientes componentes:

- Las intenciones metodológicas del profesor,
- el contenido matemático, la componente matemática
- la componente heurística.

Esto conlleva a una ausencia de aprendizaje significativo, pues el alumno solo está esperando a que el profesor haga evidente los conceptos, definiciones y algoritmos para la resolución de los problemas sin ningún análisis personal. Pero es evidente que esta forma de establecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, no permite construir en el estudiante el concepto deseado. (Barrantes, 2006)

Por otro lado, las construcciones axiomáticas sugieren un aprendizaje donde el conocimiento solo abarca el espacio curricular, lo que conlleva a la ausencia de conocimiento significativo pues el estudiante conoce, pero no sabe nada de los axiomas ni de las consecuencias que derivan de ellos.

Según Brousseau existen algunos objetivos que deben guiar la didáctica (Barrantes, 2006). En primera instancia se debe analizar condiciones que deben de cumplir los problemas de tal forma que garanticen la aparición de conceptos y que a su vez

desplacen o rechacen conocimientos anteriores que pueden impedir el nuevo aprendizaje, lo cual conllevaría a un obstáculo epistemológico.

Por otro lado el estudiante debe interactuar mucho con las situaciones problema propuestas, discutiéndolas y confrontándolas con situaciones anteriores, de tal forma que pueda revisar, modificar y complementar conocimientos anteriores y tal vez desechando aquellos que no estén claros o que no conlleven a temas nuevos de aprendizaje.

Brousseau relaciona los obstáculos epistemológicos y los errores que permanentemente cometemos en el proceso de enseñanza-aprendizaje: “El error no solamente es un efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o inadecuado” En este sentido Brousseau propone que no necesariamente se está hablando de un conocimiento errado, sino de conocimientos que interfieren con la construcción de nuevo conocimiento.

Las generalidades de la noción de obstáculo no son fáciles de expresar, es por eso que se deben diferenciar “obstáculo” de “dificultad”. El obstáculo se reconoce porque son errores que no son producto del azar, es decir son recurrentes en su aparición pues están atados a concepciones y características o un conocimiento anterior.

Un obstáculo no es difícil de afrontar lo ideal es reconocer en que área es válido y en cual tal vez no lo es.

En la potenciación el exponente es una cantidad que no cambia las unidades de medida de la base. En algunos contextos se justifica el exponente entero, pero es un poco más complicado pensar en un contexto donde los exponentes sean números racionales, enteros negativos o números irracionales.

Estas dificultades pueden mostrar la razón por la cual, el desarrollo histórico de la función exponencial se dio de manera paralela a la relación logarítmica, además es más fácil entender los exponentes racionales, dado que al conocer la relación entre la función logarítmica y la relación existente con los números reales se puede dar sentido a varios contextos en los cuales ellas los modelan.

El estudio de los logaritmos nos lleva a hacernos las siguientes preguntas ¿Qué tan buenas son las aproximaciones con las operaciones realizadas con los logaritmos? O ¿qué tipo de exactitud necesitaron las tablas de logaritmos?

Estas preguntas no llevan a una relación de los procesos actualmente infinitos que se debe manejar de una forma implícita. Dado que la parte decimal de muchos logaritmos corresponden a una secuencia infinita, la única manera de reconocerlos es a partir de proceso de aproximación, los cuales se realizan con ayuda de tablas. Esto permite relacionar lo continuo y lo discreto, respecto al desarrollo decimal de los números que se obtienen en una tabla de logaritmos.

Desde una mirada moderna cabe preguntar sobre el tipo de propiedades que se generan en una tabla de logaritmos. Tengamos en cuenta que la idea de lo trascendente es algo que se da prácticamente en el siglo XVIII. Recordemos que un número trascendente es aquel que no es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes racionales. El origen de este concepto se remonta desde los griegos con la aparición de algunos problemas como la duplicación de un cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del Angulo.

Los antecedentes de las cantidades trascendentes se pueden remontar a la antigüedad griega, cuando Plutarco en su libro *Sobre el exilio* cuenta que Anaxágoras, mientras estaba en la cárcel, intentó cuadrar el círculo. (Rosales, 2010).

Durante el siglo XIX el problema que motiva la investigación sobre los números trascendentes es el problema de la cuadratura del círculo. La trascendencia y la irracionalidad están muy ligadas.

El concepto de número trascendente o de una función trascendente se ha formado poco a poco a medida que ha ido progresando el álgebra. Cabe anotar que fue Leibniz quien en 1704 usa la palabra trascendente. La primera demostración de irracionalidad de un número fue la dada por Euler en 1737 para los números e y e^2 .

2. Antecedentes históricos de los logaritmos

En el desarrollo histórico de los números reales, podemos identificar antecedentes importantes de los logaritmos desde la antigüedad griega. El antecedente más antiguo, que marcará el desarrollo de los números irracionales, lo podemos ubicar en el siglo VII a.C., con el descubrimiento, por parte de los pitagóricos, de las magnitudes inconmensurable, es decir, magnitudes cuya razón no era igual a una razón entre números [naturales], como ocurre con la diagonal y el lado de un pentágono regular o con la diagonal y el lado de un cuadrado.

En principio, los pitagóricos basaron sus construcciones matemáticas en la teoría de la conmensurabilidad; al encontrarse con las magnitudes inconmensurables, debieron revisar sus procedimientos y concepciones, buscando métodos que permitieran efectuar las demostraciones, aun en casos no conmensurables.

Fueron muchas las técnicas que movilizaron el desarrollo de los números Reales. Entre estas técnicas, hacia los siglos XVI y XVII aparecen los logaritmos, los cuales fueron utilizados durante muchos años como la principal herramienta en diferentes cálculos aritméticos (Moreno, 2003). Un increíble esfuerzo se ahorró utilizándolos, pues permitieron trabajar con los pesados cálculos necesarios en los problemas de agrimensura, astronomía y particularmente en las aplicaciones a la navegación. Esto se logra gracias a Jhon Napier, quien apuesta a una relación entre progresiones geométricas y aritméticas conocida por los matemáticos de la época. Napier elabora una técnica en la cual, las multiplicaciones pudieron sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las potencias por productos y las raíces por divisiones. En esta técnica aparecían cantidades no racionales, que aunque solucionaban los problemas antes mencionados también harían sentir la necesidad de fundamentar estas nuevas cantidades que cada vez se hacían más comunes.

Pero vamos unos siglos atrás, hasta Arquímedes, quien en el *Arenario* propone la siguiente idea:

Cuando varios números están en proporción continua a partir de la unidad, y algunos de estos números se multiplican entre sí, el producto estará en la misma progresión, alejado del más grande de los números multiplicados tantos números como el más pequeño de los números multiplicados lo está de la unidad en la progresión, y alejado de la unidad la suma menos uno de los números de lugares que los números multiplicados están alejados de la unidad. (Recalde, 2012)

En este enunciado se puede evidenciar el surgimiento de la idea que, como veremos más adelante, llevó a Napier a establecer tablas de logaritmos, comparando sucesiones aritméticas y geométricas, tal como se describe en la siguiente tabla:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

Supongamos que tenemos dos progresiones, la superior es una aritmética cuya diferencia es 1, y la inferior una geométrica cuya razón también es 2.

Si tomamos el resultado de la multiplicación de dos términos de la progresión geométrica generará un término cuyo exponente es el resultado de la suma de los términos correspondientes de la progresión aritmética; además, al hacer la división de dos términos de la progresión geométrica se produce un término cuyo exponente corresponde a la diferencia de los de los correspondientes de la aritmética.

De esta forma es muy útil trabajar con los exponentes de las potencias, en lugar de hacerlo con las cantidades iniciales. Por ello, para hacer el producto solo hemos tenido que hacer una suma de exponentes; para el cociente, una diferencia; etc. Pero enseguida nace una pregunta: ¿Si los números no son potencias de 2 que se puede hacer?

Si esos nuevos números y cualesquiera otros positivos, aunque no estén en la tabla dada de potencias de 2, también pueden expresarse como potencias de 2 con exponentes racionales ejemplo de ello es $678314=2^{19.371594}$ y $15432099=2^{23.879431}$ al multiplicar las dos cantidades:

$$678.314 \times 15.432.099 = 2^{19.371594} \times 2^{23.879431} = 2^{19.371594+23.879431} \\ = 243.251025 = 1,0467811 \times 10^{13}$$

Posteriormente, hacia el siglo XI, Ibn Jounis, matemático árabe propuso un método a través del cual mediante relaciones trigonométricas se podía reducir la multiplicación de senos a sumas y restas de estos; a esta relación de se le conoce como la *prostaféresis*, método que fue bastante utilizado por matemáticos por varios siglos, siendo muy popular en los observatorios astronómicos, pero que no reducía significativamente el cálculo, pues conllevaba a una cierta cantidad de operaciones que no lo hacían muy funcional; en esencia era la misma idea de Arquímedes sobre reducir multiplicaciones y divisiones a sumas y restas de cantidades que estuvieran relacionadas entre sí.

En el Renacimiento, una pseudociencia como la astrología contribuyó indirectamente al progreso de la ciencia, ya que la elaboración de los horóscopos obligaba a cálculos y observaciones astronómicas. En arquitectura, el diseño de fortalezas teniendo en cuenta las condiciones del terreno utilizando la ayuda de bastiones, ángulos, etc. protegerse de la artillería.

Estas necesidades planteaban problemas de trigonometría y había que disponer de tablas trigonométricas precisas. En ese sentido el matemático alemán Johanness Müller, más conocido como “Regiomontano”, publica en el siglo XV tablas del seno de un ángulo a intervalos de 1' y tablas de la tangente en intervalos de 1°.

Posteriormente Michael Stifel, quien en su publicación “*Arithmetica integra*”, de 1544, aborda por primera vez el cálculo de potencias de exponentes racionales cualesquiera y en general la regla de la multiplicación $a^m a^n = a^{m+n}$, para cualquier par de números racionales n y m (Knott, 1915). En cierto sentido Stifel genera una tabla muy rudimentaria de logaritmos, la cual solo contiene los números enteros entre el -3 y el 6 y las correspondientes potencias de 2. Stifel reconoce que existen propiedades muy interesantes en estas tablas, pero dice que se ve obligado a dejarlas a un lado, pues carece de las herramientas para estudiarlas a fondo.

Paralelamente, en Portugal, Alvarus Thomas hizo su versión geométrica de lo que Stifel había hecho, pues al parecer la idea de dos progresiones, una geométrica y otra aritmética, que guardaban una relación entre sí, era común a los matemáticos de la época. Varios pensadores trabajaban con las mismas progresiones en un mismo desarrollo de manera independiente; además mientras Stifel abordaba el problema desde el punto de vista aritmético, Thomas lo hacía desde lo geométrico. (Knott, 1915)

En el siglo XVII, surge una preocupación sentida por estudiar las leyes naturales. Aspectos como el movimiento, el calor, las catástrofes, entre otros, exigen la construcción de un formalismo que proporcione explicaciones coherentes y predictivas. Pero se trataba de conceptos teóricos que tenían que aplicarse a medidas experimentales, sobre las que posteriormente había que realizar cálculos pesados. Se ponían en evidencia dos cosas importantes: el disponer de un sistema universal de medidas y mejorar la capacidad de cálculo que se tenía hasta la fecha.

Lo primero se logra de forma satisfactoria en 1792, cuando la Academia de Ciencias de Paris establece el sistema métrico decimal, un avance significativo gracias a la Revolución Francesa.

Pero uno de los mejores y más notables avances fue en los cálculos, tanto en rapidez como en precisión; era una línea de avance permanente desde el siglo XV, que había empezado a insinuarse desde el siglo XVI.

El inglés Edward Wright y el danés Christen Longomontanus, también tenían desarrollos similares sobre los logaritmos. Jhon Napier, quien era un barón escocés, aparentemente sin conocimiento alguno de los desarrollos de la época, también adelantaba ideas similares.

La idea detrás de este desarrollo de los logaritmos, era la de reducir los cálculos con grandes números pues como decía Napier:

Considerando que no hay nada más problemático en la práctica de la matemática, nada que moleste y obstaculice más los cálculos, que la multiplicación, división, extracción de raíces cuadradas y cúbicas de grandes números... comencé por consiguiente a considerar en mi mente con qué arte rápido y definitivo podía remover esos obstáculos. (Knott, 1915)

Trabajos previos a Napier muestran que la elaboración de tablas de logaritmos, corresponde a un producto colectivo. Lo cierto es que fue Napier quien hizo los adelantos más significativos en este tema, al desarrollar una técnica para calcular los logaritmos de diferentes números. Esta técnica es la que abordaremos en capítulos posteriores y mostraremos como movilizó o sirvió de catalizador para mostrar cantidades que posteriormente Cantor y Dedekind consideraron que era necesario formalizar.

Exploremos un poco los adelantos hechos por matemáticos contemporáneos a Napier para conocer sus aportes y puntos de vista sobre esta situación. Uno de los principales trabajos en los cuales se puede encontrar un adelanto significativo, fue realizado por Stifel, quien hizo una mejora del trabajo hecho por Apianus (1540-1601). Stifel trabajo con las siguientes secuencias de números:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

Supongamos que deseamos multiplicar 4 por 8; miramos en la tabla de los exponentes de estos números y encontramos que estos son 2 y 3, respectivamente. Sumando estos exponentes nos da 5. Ahora hacemos el proceso inverso, determinando que 32 es el número que corresponde al exponente 5. Stifel fue un poco más allá, pues no solo se preocupó por exponentes positivos, sino que también lo hizo para exponentes negativos mediante la serie:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

(Knott, 1915). Pag. 85

Aunque Stifel avanza al proponer la progresión aritmética con números negativos sostiene que se puede escribir un libro con estas cantidades pero que tenía que abstenerse y hacerse el desentendido.

Paralelamente, en Portugal, Alvarus Thomas hizo su versión geométrica de lo que Stifel había hecho, pues al parecer la idea de dos progresiones: una geométrica y otra

aritmética que guardaban una relación entre si era común a los matemáticos de la época. Thomas en un trabajo titulado *Liber de Triplici Motu*, cuya publicación fue en 1509, él divide segmentos de línea que representan los términos de una sucesión geométrica convergente de una forma muy similar a como lo hizo Napier.

También se encuentra el trabajo del matemático inglés Edward Wright, quien construyó una tabla de logaritmos hecha para la navegación antes de 1610. De hecho el nombre dado es “logaritmo náutico”. En la carta de Mercator, los meridianos de longitud son líneas paralelas entre sí, por lo que las paralelas de latitud se hacen más grandes de lo que deberían. Edward Wright en su *errores certaine en navegación* (1599; 2ª ed., 1610), en el cual analiza las bases matemáticas de los desarrollos de Mercator, y se construye una tabla de referencia cuyo factor de multiplicación varía linealmente en función de la latitud¹.

Distintos pensadores trabajaban con las mismas progresiones en un mismo desarrollo de forma paralela. Matemáticos como el astrónomo Danes Crhirstian Longomontanus y el matemático inglés Edward Wright tenían desarrollos similares sobre los logaritmos.

Contemporáneos a todos estos hombres estaba Jhon Napier quien era un barón escocés el cual aparentemente sin conocimiento alguno de los desarrollos hechos por estos hombres, también adelantaba propuestas similares. La idea detrás de este desarrollo que, de forma independiente, llevaba cada uno, era la de reducir los cálculos con grandes números, pues como decía Napier:

Considerando que no hay nada más problemático en la práctica de la matemática, nada que moleste y obstaculice más los cálculos, que la multiplicación, división, extracción de raíces cuadradas y cúbicas de grandes números... comencé por

¹ La **proyección de Mercator** es un tipo de proyección cartográfica ideada por Gerardus Mercator en 1569, para elaborar mapas de la superficie terrestre. Ha sido muy utilizada desde el siglo XVIII para cartas náuticas porque permitía trazar las rutas de rumbo constante o loxodrómicas como líneas rectas e ininterrumpidas, a diferencia de otras proyecciones más precisas.

Es un tipo de proyección cilíndrica tangente al ecuador. Como tal, deforma las distancias entre los meridianos (en la tierra son como "gajos" de polo a polo) en líneas paralelas, aumentando su ancho real cada vez mas a medida que se acerca a los polos.

Esta proyección tampoco respeta las distancias reales entre los paralelos, la amplía en largo, cada vez más a medida que se acerca a los polos, distorsionando las áreas cercanas a los polos aún más. Nótese la diferencia con la proyección cilíndrica equidistante, que sí respeta distancias entre paralelos y tiene sólo las deformaciones meridionales de la proyección cilíndrica.

consiguiente a considerar en mi mente con qué arte rápido y definitivo podía remover esos obstáculos (Knott, 1915)

Esto lleva a pensar que la idea de reducir operaciones grandes era bastante común a los hombres versados en matemáticas de la época.

En la segunda mitad del siglo XVI, los matemáticos dedicaron gran parte de su tiempo a la elaboración de tablas de las funciones trigonométricas naturales. Uno de los personajes más conocidos en este tema, fue Georg Joachim Rheticus; su trabajo consistió en una tabla de senos por cada 10 segundos, que utilizaba 15 cifras decimales.

A principio del siglo XVII, el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler trabajaba con cálculos numéricos que posteriormente lo llevaría a las formular tres leyes del movimiento planetario, el cual liberaba del dogma del universo geocéntrico que proponían los antiguos. Estos cálculos numéricos involucraban cantidades de datos cada vez mayores, forzando a los científicos de la época a dedicar mucho tiempo en cálculos tediosos. Es así como Napier ocupó gran parte de su tiempo en la creación de un nuevo método, que de alguna forma pudiera simplificar estos cálculos.

El trabajo de Napier titulado *Descriptio*, fue publicado en el año de 1614, y para esto se apoyó en ciertas ayudas mecánicas, las cuales le ayudaron a calcular las multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces cuadradas y cubicas; todos estos inventos fueron publicados en su obra de 1617, llamada *Rabdologia*. En este método, que lleva el título de su obra, consiste en el cálculo de multiplicaciones y divisiones por medio de un conjunto de barras llamadas “huesos de Napier”.

Como se mostró anteriormente, Stifel propuso una progresión aritmética y otra geométrica. Su tabla de logaritmos (progresión aritmética) y antilogaritmos (progresión geométrica) no basta para poder realizar multiplicaciones y otro tipo de operaciones. Si se quiere distinguir los logaritmos correspondientes a una determinada progresión geométrica de los correspondientes a otra progresión geométrica, llamemos a la base de la sucesión.

El logaritmo de un número b en una cierta base a es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener dicho número b . De la misma forma, si n es el logaritmo de b en una base a , entonces b es el antilogaritmo de n en dicha base. Es decir:

$$b = a^n \rightarrow n = \log_a b$$

O también

$$b = \text{antilog}_a n$$

O se puede escribir la regla para la multiplicación como:

$$c = a^m \rightarrow m = \log_a c$$

O bien,

$$c = \text{antilog}_a m.$$

Por lo tanto,

$$b \cdot c = a^{n+m} \rightarrow n + m = \log_a b \cdot c.$$

De lo anterior se sigue que,

$$b \cdot c = \text{antilog}_a(n + m) = \text{antilog}_a(\log_a b + \log_a c).$$

Este resultado muestra que, en una determinada base, el logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de dichos números en la misma base. De esta forma se pueden deducir las restantes propiedades conocidas. (Leonhard, 1988)

Si por ejemplo deseamos construir una tabla de logaritmos cuya base sea 10.

Se calcularán sus logaritmos de la siguiente forma:

$$1 = 10^0 \rightarrow \log_{10} 1 = 0$$

Luego, 1000 difiere en a lo mas en 2.5% de 1024, es decir, $2^{10} = 1024$

$$2^{10} \cong 10^3 \rightarrow 2 \cong 10^{\frac{3}{10}} = 10^{0,3} \rightarrow \log_{10} 2 \cong 0,3$$

De nuevo por multiplicación obtenemos:

$$3^9 = 19683 \cong 20000 = 2 \cdot 10000 \cong 10^{0,3} \cdot 10^4 = 10^{4,3} \rightarrow$$

$$3 \cong 10^{\frac{4,3}{9}} \cong 10^{0,48} \rightarrow \log_{10} 3 \cong 0,48$$

De esta forma se puede obtener una tabla de logaritmos

N	Log N	N	Log N
1	0	20	1,3
2	0,3	30	1,48
3	0,48	40	1,6
4	0,6	50	1,7
5	0,7	60	1,78
6	0,78	70	1,84
7	0,84	80	1,9
8	0,9	90	1,95
9	0,95		
Antilog n	n	Antilog n	n

3. Construcción de los logaritmos por Napier

En 2014 se cumplieron 400 años de la publicación *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, obra de Jhon Napier. En esta obra Napier muestra la construcción de lo que llama logaritmo. La simplificación que estos producen en los cálculos es significativa, de tal manera que su importancia puede compararse con la creación del sistema numérico por parte de los indios y transmitido a Europa por los árabes. Debido a esto (Knott, 1915) publicó un trabajo como celebración a la creación de los logaritmos.

Este capítulo tiene como objetivo analizar de raíz las ideas originales, desarrollos y dificultades que estuvieron involucrados en el avance de la técnica de los logaritmos por parte de John Napier.

En general es aceptado que los logaritmos empezaron a aparecer aproximadamente hace unos 400 años, a través de los trabajos del escosés Jhon Napier; aunque algunos² investigadores argumentan que otros matemáticos anteriores y contemporáneos a Napier, ya habían trabajado o estaban trabajando sobre este mismo desarrollo.

Cabe resaltar que si pensamos en la época en la cual Napier hace el desarrollo de las tablas de los logaritmos, había pocas herramientas con las cuales podía contar, pues cuestiones como el desarrollo de series infinitas aun no existían, tampoco el cálculo diferencial e integral. La concepción de Napier de los logaritmos hace creer que debía tener una idea de relaciones funcionales. Un ejemplo es la variabilidad en el movimiento de un punto sobre una recta para poder mostrar su técnica que más adelante abordaremos

El Barón Napier nació en Merchiston, cerca de Edimburgo Escocia, en el año de 1550; estudió a los 13 años en St. Andrews, pero no terminó sus estudios allí. En 1566 viaja al exterior y regresa en el año de 1571. Se casó con su primera esposa y tuvo dos hijos, poco tiempo después ella murió y se volvió a casar teniendo con su nueva esposa diez hijos. De ellos el segundo hijo, Robert es quien fue su biógrafo. En 1593 publica su primer trabajo titulado *A plaine discovery of whole Revelation of St Jhon*, el cual fue

² (Knott, 1915) se presentan distintas concepciones de los logaritmos y de quienes posiblemente también trabajaron en desarrollos similares.

uno de los más importantes libros de teología de la época, pues alcanzó 21 ediciones en cuatro idiomas. (Eli, 1994) pag 12.

Posteriormente en 1596, Napier publicó un documento donde hace referencia a algunos inventos que había hecho en forma secreta, según él para defenderse de los enemigos extranjeros. Esto debido al temor que generaba una invasión del rey Felipe II de España. Entre sus inventos figuraba un espejo que quemaría a los barcos adversarios sin importar la distancia a la que se encontrara, una pieza de artillería que podría desaparecer a todo ser viviente en un cierto radio. También sus inventos alcanzaron la agricultura: hizo un sistema de abono con sal. En el campo de las matemáticas, en 1839 publicó *De Arte Logistica*, donde muestra que algunas de sus investigaciones en aritmética y álgebra lo habían llevado al estudio de las raíces imaginarias de las ecuaciones, como también un método generalizado para la extracción de raíces de ecuaciones de cualquier grado. No se sabe a ciencia cierta porque dejó de lado estas investigaciones y se dedicó a trabajar sobre métodos que ayudaran a reducir el cálculo numérico.

Aunque diferentes autores argumentan que no se puede atribuir a Napier la autoría de los logaritmos, pues por lo que se sabe varios hombres tuvieron ideas muy similares a las suyas antes que él, Napier fue quien hizo los adelantos más significativos en este tema, pues se desarrolló una técnica para calcular los logaritmos de diferentes números, esta técnica es la que abordaremos y mostraremos como movilizó o sirvió de catalizador para desarrollar algunas cantidades que posteriormente Cantor y Dedekind, buscarían formalizar en un corpus teórico y que corresponden a los números irracionales.

Dejando atrás la historia y las discusiones sobre quien o quienes fueron los autores de los logaritmos, pues aunque de manera aislada cada uno hizo su propio desarrollo, con sentidos y enfoques distintos, el modelo de John Napier fue el más significativo, por ello, nos centraremos en la construcción de Napier.

Se sabe que Napier trabajó al menos unos 20 años en este desarrollo, además, su objetivo con lo que él llama “Maravilloso tratado de logaritmos” era el de reducir las pesadas multiplicaciones que se hacían con tablas trigonométricas a operaciones mucho más sencillas de realizar.

No se conoce que ideas fueron las que estuvieron detrás del desarrollo hecho por Napier, pero lo que sí es claro es el conocimiento que él tenía de la trigonometría, y en particular de la conociera la fórmula de la *prostaferesis*:

$$\text{Sen}A \cdot \text{Sen}B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) - \text{Cos}(A + B)]$$

$$\text{Cos}A \cdot \text{Cos}B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) + \text{Cos}(A + B)]$$

$$\text{Sen}A \cdot \text{Cos}B = \frac{1}{2} [\text{Sen}(A + B) + \text{Sen}(A - B)]$$

$$\text{Cos}A \cdot \text{Sen}B = \frac{1}{2} [\text{Sen}(A + B) - \text{Sen}(A - B)]$$

Estas expresiones eran muy utilizadas en aquel momento en la reducción de multiplicaciones de cantidades muy grandes de senos y cosenos a sumas y resta de éstos.

La idea con la que Napier trabaja en su *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* es la construcción de dos sucesiones de cantidades relacionados de forma que cuando una de ellas se incrementa en forma de una progresión aritmética, la otra disminuye en forma de una progresión geométrica. De esta forma, el producto de las dos cantidades en la progresión geométrica tiene una relación sencilla de la suma de los números correspondientes en la primera y, de esta forma, el producto se puede reducir a una adición. Así, Napier puede facilitar de manera notoria los cálculos. Cabe aclarar que para la época en la cual vivió Napier el seno se calculaba a partir de la longitud de los segmentos. El radio se denominaba como “Sinus Totus”, cuando éste era igual a la unidad, la longitud del seno se indicaba como $\text{sen}\phi$. Si r no era la unidad, la longitud se conocía como $r\text{sen}\phi$. En la proposición 26, Napier definía el logaritmo de la siguiente forma: “El logaritmo de un seno dado es un número el cual aumenta aritméticamente con cierta velocidad mientras que el radio decrece geométricamente” (Napier, 1889),

El logaritmo con el cual Napier realiza sus tablas no es el que conocemos hoy día, pues en sus tablas sus logaritmos se trabajaban con una base $\frac{1}{e}$.

Debido a esto, el primer intento en construir sus tablas fue algo complicado pues correspondía a lo que hoy día conocemos como logaritmo natural, aunque en realidad Napier no era conocedor del número e , ni tampoco de una base para la construcción de su sistema de logaritmos, pero sí reconocía que su trabajo lo estaba haciendo de una manera arbitraria. Su elección en la forma de trabajar la hizo con el fin de que el logaritmo de un seno entre ángulos entre 0 y 90°, o dicho de otra manera entre 0 y 10^7 .

Napier construye tres tablas con sus logaritmos a partir de las sucesiones geométricas y aritméticas. En la primera tabla construye 100 términos donde el primero es 10^7 , con una razón de $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$, donde n es un valor que se encuentra entre 0 y 100. Napier construye cada término restando al término inmediatamente anterior el valor arrojado por la secuencia que está dada por el radio. Por ejemplo, el segundo término de la tabla se obtiene así:

$$10^7 - \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^1 = 9999999.$$

Visto de otra forma, cada término de la sucesión está generado por la progresión $10^7(1 - 10^{-7})^n$ con $n = 1, 2, \dots, 100$. Napier llama a los números n “el logaritmo”.

Notemos que si $x_1 = 10^7(1 - 10^{-7})^{n_1}$, entonces $\frac{x_1}{x_2} = 10^7(1 - 10^{-7})^{n_1 - n_2}$. La diferencia de los logaritmos depende solo de la razón de x_1 y x_2 o como lo dice Napier, en su proposición 36: “los logaritmos de senos similarmente proporcionales son equidiferentes”. (Napier, 1889)

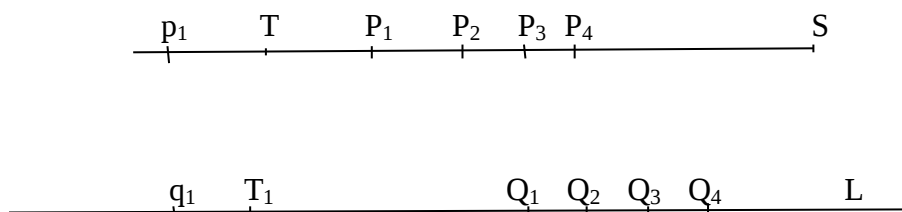
Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una progresión geométrica entonces sus respectivos logaritmos serán los términos de una progresión aritmética.

En su segunda tabla solo calcula 50 términos de una serie geométrica cuya razón es $(1-10^{-5})$; de esta forma la sucesión es entonces los términos están dados por $10^7(1-10^{-5})^n$ con $n=1,2,\dots,50$.

La tercera tabla consta de 21 filas y 69 columnas. El primer número en cualquier columna se obtiene al tomar $\frac{99}{100}$ partes del primer número en la columna anterior. Los números en cualquier columna se obtienen al multiplicar de forma iterada por $\frac{1999}{2000}$ de esta forma el m -ésimo número en la n -ésima columna es:

$$10^7 \left(\frac{1999}{2000} \right)^{m-1} \left(\frac{99}{100} \right)^{n-1}$$

En cuanto a la versión geométrica del concepto de logaritmo Napier la describe así:



Sea TS un segmento y L una semirrecta. Ahora sea Q un punto que parte de T y se mueve a lo largo de TS con una velocidad variable que decrece en proporción a su distancia a S ; supongamos que un punto Q inicia su movimiento al tiempo que P se mueve a lo largo de la semirrecta L con una velocidad uniforme igual a la que tenía P . A la distancia variable TQ_1 Napier le llama logaritmo de PS . (Hobson, 1914) pag. 23.

Napier supone el segmento TS tiene de longitud 10^7 , luego toma un punto P , el cual inicialmente está en T , que se mueve de izquierda a derecha de modo que su velocidad es en todo punto proporcional a la distancia que se tiene hasta S , produciendo puntos $P_1, P_2, \dots$ que describen segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots$ en iguales intervalos de tiempo. Por otro

lado, supongamos que se tiene una línea recta L , y ubiquemos un punto T_1 sobre ella, ahora, definamos como cantidades positivas las que están ubicadas a la derecha de T_1 , y negativas las que están a su izquierda. Sea Q un punto que se mueve sobre L con una velocidad constante de 10^7 , esta es la velocidad que tiene P al inicio de su movimiento en el segmento TS . Ahora, los puntos $Q_1, Q_2, \dots$, producidos por el movimiento de Q , describen segmentos de igual longitud, y cuando P se ha movido hasta la posición P_1 , el logaritmo de la distancia P_1S , es dado por la distancia que ha recorrido Q en la línea recta hasta la posición Q_1 , en otras palabras podemos decir que:

$$\text{Log}_N P_1 S = T_1 Q_1$$

ó

$$\text{Log}_N P_2 S = T_1 Q_2$$

De aquí se puede concluir que $\text{Log}_N TS = 0$, debido a que el punto estaría sobre T_1 . Otra consecuencia de este movimiento es que el logaritmo de Napier de una longitud muy pequeña es una cantidad muy grande.

Por otro lado cuando la distancia TS es superior a 10^7 , es claro que debemos de mover el punto P hacia la izquierda de T , lo cual produce que el logaritmo sea una cantidad negativa.

Napier muestra que existe una proporción entre $SP_1:SP_2 = SP_2:SP_3 = \dots$, lo cual corresponde a los valores de una sucesión. Para lo cual, la serie de valores descritos por $T_1 Q$ hacen parte de una sucesión aritmética y SP corresponde a una sucesión geométrica.

Ahora si el coloca un punto P entre $P_1 P_2$ y P^* un punto que se encuentre entre $P_2 P_3$ de tal forma que $P_1 P:PP_2 = P_2 P^*:P_2 P_3$, entonces la velocidad del punto P tiene una

relación constante que la velocidad de P^* , dada por $\frac{SP_1}{SP_2} \equiv \frac{SP_2}{SP_3} \equiv \frac{P_1 P_2}{P_2 P_3}$ (Hobson,

1914) pag. 25.

Podemos hacer una analogía entre el modelo cinemático y el numérico describiéndolo de la siguiente forma:

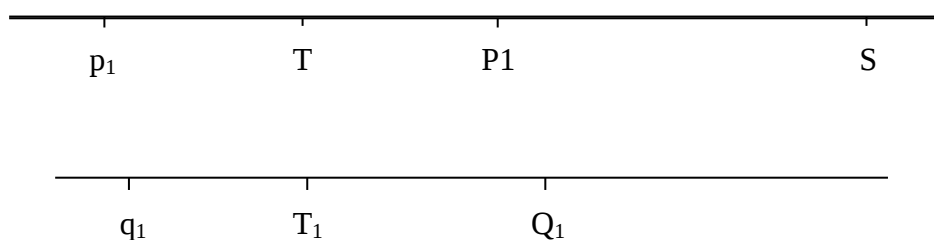
Pensemos en el movimiento, descrito anteriormente, se puede decir que $x = SP$ y que el movimiento de P está descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -x.$$

Con condiciones iniciales dadas por $x(0) = 10^7$, su solución está dada por

$$t = \log \frac{10^7}{x}.$$

Debe ser claro que no existe un método con el cual se pueda calcular un logaritmo de una forma exacta, pero si se puede calcular con un buen grado de exactitud, pero Napier obtiene dos límites entre los cuales el logaritmo debe estar, y su método de construcción depende del uso de este par de límites.



Para esto utiliza sus proposiciones 28 y 39 las cuales son:

28. El logaritmo de cualquier un seno dado es mayor que la diferencia entre la razón y el seno dado, y menor que la diferencia entre el radio y el la cantidad que excede en la relación de la razón del seno dado. Y estas diferencias son llamadas límites del logaritmo.

39. La diferencia de los logaritmos de dos senos se encuentra entre dos límites; el mayor de los límites es al razón como la diferencia de los senos es al menor de estos, y el límite inferior debe ser al razón como la diferencia de los senos es al seno mayor. (C.H, 1979) pag. 145

Recordemos que las velocidades de P en el punto T y de Q en T_1 son las mismas, pero posteriormente, mientras la velocidad de P decrece la de Q se mantiene constante, es así como se puede decir que: $TP_1 < T_1Q_1$, además, si suponemos que el movimiento que se hace en p_1T y en TP_1 se hace en un intervalo de tiempo igual, tenemos que:

Si, $\text{Log}_N x = T_1 Q_1$, entonces $\text{Log}_N x > TP_1$ o su equivalente $\text{Log}_N x > 10^7 - x$

y $\text{Log}_N x = q_1 T_1 < p_1 T$ o $TP_1 \frac{10^7}{x}$.

Esto es,

$$10^7 - x < \text{Log}_N x < (10^7 - x) \frac{10^7}{x}.$$

De una manera similar se puede mostrar que

$$10^7 \frac{y - x}{y} < \text{Log}_N x - \text{Log}_N y < 10^7 \frac{y - x}{x}.$$

4. Desarrollos posteriores: Euler

Leonard Euler fue uno de los matemáticos más prolíficos de la historia; nació en 1707, Basilea Suiza y murió en 1783, San Petersburgo Rusia. Euler recibió su instrucción inicial por su padre quien era un pastor Calvinista que tenía grandes logros en el campo de las matemáticas. Posteriormente fue enviado a la Universidad de Basilea donde estudió matemáticas con la dirección de John Bernoulli. (Struik, 1954)

En su trabajo, *Introductio in Analysin Infinitorum*, publicado en 1748 en dos volúmenes, se tratan temas como preparación para sus obras posteriores. Aquí el concepto tratado es el de función la cual define como: “una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes”.

Lo importante de este trabajo que hizo fue la conversión de función en un objeto matemático fundamental para el desarrollo del Cálculo, que hasta ese momento se basaba enteramente en las propiedades que poseían las curvas.

Euler marcó un hito en la matemática pues, estudió las funciones polinómicas, logarítmicas exponenciales y trigonométricas, además, gracias a sus trabajos ya no se les llamará más curvas o líneas trigonométricas, sino que adquieren el nombre de funciones, es decir, ya las curvas trigonométricas no serán llamadas así, sino funciones trigonométricas.

En el capítulo 6 de *Introductio* presenta el logaritmo de x con base a de la forma como actualmente se conoce, $\log_a x$ visto como el exponente al cual se tiene que elevar la base a para que dé como resultado la potencia x , es decir $a^y = x$, su afirmación

..daremos un valor y tal que $a^y = x$. Este valor y , considerado como función de x , se llama el logaritmo de x

En su obra es sobresaliente como trabaja con unas cantidades infinitamente pequeñas y con otras infinitamente grandes, además como hace desarrollos en serie de las funciones elementales sin hacer uso de la derivación y además como la función logaritmo aparece en algunas situaciones.

Además en este capítulo se considera a^y cuando a es una constante y el exponente y variable. Tomando a y como entero positivo se tiene los valores $a^1, a^2, a^3, \dots$, ahora si es un entero negativo se obtiene $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots$ ahora si es igual a 0 se tiene que $a^0 = 1$. Si se sustituye y por fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$ se obtienen valores como $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2}, \dots$ el hace énfasis en que estos valores pueden tener más de una raíz, se toma el ejemplo de $a^{\frac{5}{2}}$ donde sus raíces son $-a^2\sqrt{a}$ y $a^2\sqrt{a}$ donde solo se considera la cantidad positiva. También se toman valores irracionales pero dice que son más difíciles de entender el concepto detrás de ellos.

Se puede decir que inicialmente los valores tomados por a^y dependen solo de la magnitud de la constante a , por ejemplo si $a = 1$ entonces $a^y = 1$ sin importar el valor que tome la variable y . Por otro lado si $a > 1$, a^y puede tomar valores tan grandes como lo sea y incluso hasta el infinito, en cuyo caso la potencia a^y también lo hará.

Si $y = 0$ tenemos que $a^y = 1$; pero si $a < 0$ entonces los valores de a^y son menores que 1 y si y decrece hasta $-\infty$ entonces la potencia a^y decrece hasta 0. Ahora si $a < 1$ pero positivo entonces los valores de a^y decrecen cuando y se encuentra por encima de 0. La función exponencial aumenta como y aumenta en el sentido negativo.

Por otro lado hay saltos cuando la constante a un valor negativo, prueba de ello es por ejemplo para $a = -2$ tomando la secuencia $a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots$, tenemos $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \dots$

Posteriormente se considera los inconvenientes generados por valores negativos del número a debe ser un número positivo mayor que 1, también el caso en el cual a es un numero entre 0 y 1 es sencillo de analizar. Si para $x = a^y$ y se sustituye en y cualquier número real el cual puede estar entre ∞ y $-\infty$ hace que x tome también valores reales

entre 0 y ∞ , de esta forma si y es ∞ entonces x va hacia ∞ , pero si $y = 0$ entonces $x = 1$ y cuando $y = -\infty$ se tiene que x se va hacia 0. Si se da un valor negativo para x , entonces el correspondiente valor para y no es real.

Euler propone que si $x = a^y$ se tiene que $x^2 = a^{2y}$, $x^3 = a^{3y}$, $x^n = a^{ny}$, de aquí podemos decir que $\sqrt{x} = a^{\frac{1}{2}y}$, $\frac{1}{x} = a^{-y}$, además si $v = a^y$ $vx = a^{y+y}$ y $\frac{v}{y} = a^{y-y}$

Ahora Euler introduce el logaritmo de la siguiente forma: dado a para cualquier valor de y , se puede encontrar un valor de y , tal que a su vez se le da un valor positivo a un x deseado, de tal forma que $x = a^y$. Este valor de y que se ve en función de x se le llama logaritmo de x . Esto supone que debe existir cierta cantidad fija llamada base. Habiendo asumido esta base se puede decir que el logaritmo de x es el exponente de la potencia a^y .

Después de esto Euler enuncia las propiedades ya bien conocidas hoy día de los logaritmos como lo es la del producto, el cociente y la potencia. Por otro lado, él deduce que el logaritmo no va a ser un número racional a no ser que el número dado sea una potencia de la base así se puede expresar como un número racional. Los logaritmos que no son potencias de la base y no son racionales se les llaman cantidades trascendentes.

Cuando los logaritmos son trascendentes se pueden aproximar por expresiones decimales. A medida que se utilizan más decimales la aproximación al logaritmo es mucho mejor, esta se logra haciendo la extracción de raíces cuadradas. Sea $\log x = y$ y $\log v = z$ entonces $\log \sqrt{xv} = \frac{y+z}{2}$. Si el número b se encuentra entre a^2 y a^3 entonces los logaritmos respectivos lo encontraremos entre 2 y 3 respectivamente. Ahora si se toma el caso de $a^{\frac{5}{2}}$ entonces b estaría entre a^2 y $a^{\frac{5}{2}}$ o entre $a^{\frac{5}{2}}$ y a^3 . Si se toma la media geométrica entre estas dos cantidades las veces que sea posible para refinar la aproximación al intervalo en el cual se encuentra b .

Si tomamos el 5 que se encuentra entre 0 y 10, su logaritmo se encuentra entre 0 y 1 para hallarlo se toman raíces cuadradas sucesivas hasta llegar aproximadamente a 5.

Sea $A = 1$ $\log A = 0$

$B = 10$ $\log B = 1$ $C = \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{1 \cdot 10}$

$C \approx 3.162277$	$\log C = 0.5$	$D = \sqrt{B \cdot C} = \sqrt{31.62277}$
$D \approx 5.623413$	$\log D = 0.75$	$E = \sqrt{C \cdot D} = \sqrt{17.782789}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X \approx 4.999997$	$\log X = 0.6989697$	$X = \sqrt{W \cdot V} = \sqrt{24.999959}$
$Y \approx 5.000003$	$\log Y = 0.6989702$	$Z = \sqrt{XY} = \sqrt{24.999999}$
$Z \approx 5.000000$	$\log Z = 0.6989700$	

Esta es la forma en que se calcularía $\log 5$ en base 10 por aproximación. También se puede decir que $10^{\frac{698970}{1000000}} \approx 5$ (Leonhard, 1988)

Una de las importancias del logaritmo en el desarrollo del cálculo, se encuentran en Gregori de Saint- Vincent (1584-1667), el encontró una asombrosa relación entre la función logaritmo natural y la hipérbola rectangular (C.H, 1979). El trabajo en varios problemas de cuadratura, entre ellos el de la curva $\frac{1}{x}$, en esta notó que los rectángulos que se utilizaban para aproximar el área bajo la hipérbola tenían bases iguales siempre y cuando se utilizaran progresiones geométricas para esto. El ancho de estos estaría dado por $a - ar = a(1 - r)$, $ar - ar^2 = ar(1 - r)$, ..., mientras que sus alturas serían $\frac{1}{ar}$, $\frac{1}{ar^2}$, ... por tanto podemos decir que sus áreas son iguales.

$$A_1 = (a - ar) \frac{1}{ar} = \frac{1 - r}{r}$$

$$A_2 = (ar - ar^2) \frac{1}{ar^2} = ar(a - r) \frac{1}{ar} = \frac{1 - r}{r}$$

$$\vdots$$

Esto nos dice que si la distancia desde 0 crece de forma geométrica, las áreas correspondientes crecerán con el mismo incremento, es decir de forma aritmética, esto sucede cuando $r \rightarrow 1$. Esto conduce a que la relación entre el área y la distancia es logarítmica.

Lo anterior se puede precisar como; Sea $A(t)$ el área bajo la hipérbola desde algún punto de referencia fijo $x > 0$ hasta un punto cualquiera pero variable $x = t$, entonces $A(t) = \log t$, quien representa el área bajo la hipérbola de función variable t , desafortunadamente no se tiene una base particular implicada. Esta base debe de existir, de forma “natural” para que determine la base numéricamente, Cuando se estudia la derivada de la función e^x se puede encontrar que la base es el numero e .

Podemos ver la existencia entre la función logaritmo natural y la cuadratura de la hipérbola $xy = 1$.

Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado de elementos positivos, y sea el área que está definida en el intervalo y bajo la curva $xy = 1$ que se denota por $A_{a,b}$. St. Vincent descubrió que si $t > 0$, entonces

$$A_{ta,tb} = A_{a,b}$$

Si

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Son una gran cantidad de divisiones del intervalo $[a, b]$ con igual longitud. Estos rectángulos van a tener una base $\frac{b-a}{n}$ y altura $\frac{1}{x_i}$ y $\frac{1}{x_{i-1}}$ respectivamente.

En este sentido se muestra que,

$$\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} \leq A_{a,b} \leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_{i-1}}$$

Ahora sea

$$ta = tx_0 < tx_1 < \dots < tx_{i-1} < tx_i < \dots < tx_n = tb$$

El inscribe y circunscribe rectángulos en el intervalo $[ta, tb]$ además, inscribe y circunscribe en el intervalo $[tx_{i-1}, tx_i]$. Ahora los intervalos tienen como base $\frac{tb-ta}{n}$ y altura $\frac{1}{tx_i}$ y $\frac{1}{tx_{i-1}}$ respectivamente. Después de esto vemos que las áreas son iguales al inscribir y circunscribir rectángulos en $[x_{i-1}, x_i]$, esto significa que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} \leq A_{ta,tb}$$

Combinando y acercándonos a la verdad, $A_{ta,tb} = A_{a,b}$.

Sea $l(X)$ satisfaciendo la regla de los exponentes $L(xy) = L(x) + L(y)$, siempre que x, y sean más grandes que 1, entonces

$$L(xy) = A_{1,xy} = A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y}$$

Entonces, $L(x, y) = L(x) + L(y)$

Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} L\left(\frac{1}{h}\right) L\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

Haciendo $k = \frac{h}{x}$ entonces, $\frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} L(1+k) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(1+k) - L(1)}{k} = \frac{L'(1)}{x}$

El limite cuando $h \rightarrow 0$, $L'(1) = 1$ el limite como $h \rightarrow 0$, $L'(1) = 1$ o bien $L'(1) = 1$ o tambien $\frac{1}{x}$. Dado $L(x)$ y $\log x$ tienen algunas derivadas y $L(1) = \log 1 = 0$ y $x = 1$, entonces

$$L(x) = \log x$$

Aunque la relación precisa entre los logaritmos y las áreas hiperbólicas no se entendían en el siglo XVII sirvió para estimular el estudio de éstas, que desempeñaron un papel importante en la introducción de series infinitas y técnicas de cálculo algorítmico desde 1650 a 1660. Los primeros datos sistemáticos de los logaritmos como áreas hiperbólicas fueron llevados a cabo por Newton. En un manuscrito escrito alrededor de 1667 que se inicia con la hipérbola (C.H, 1979) pag. 158

$$y = \frac{1}{1+x} \quad (x < -1)$$

Y calcular el área bajo la curva $A(1+x)$ y bajo la hipérbola y fuera del intervalo $[0, x]$

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Lo infinito de esta serie se refleja en la división mecánica de $1 + x$ en 1. El integra término por término para obtener término por término se obtiene

$$A(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Con Euler aparece por primera vez el logaritmo interpretado como un exponente. Cabe anotar que Euler reconoce la naturaleza inversa entre las funciones exponencial y logarítmica, además, antes de él el estatus de la función logarítmica solo era la de reducir grandes cálculos pero ahora había cobrado estatus de función.

Uno de los grandes avances de Euler fue el haber hecho un desarrollo en serie de la función exponencial $a^y = x$, ($a > 1$). Debido a que no tiene el concepto de derivación, sino hasta su trabajo posterior *Institutiones Calculi Differentialis* (1748) donde aparece. Entonces considera una cantidad infinitamente pequeña y positiva w , donde esta consideración le permite definir

$$a^w = 1 + \xi$$

En la cual ξ se considera como otra cantidad infinitamente pequeña. Luego propone

$$a^w = 1 + kw$$

Siendo k un número que depende enteramente de la base a . Después introduce la variable

$$j = \frac{y}{w}$$

$$\begin{aligned} a^y &= (a^w)^{y/w} = (1 + kw)^j = \left(1 + \frac{kw}{j}\right)^j = \\ &= 1 + j\left(\frac{kw}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2 \cdot 1}\left(\frac{kw}{j}\right)^2 + \dots = \end{aligned}$$

$$= 1 + ky + \frac{(j-1)}{j} \left(\frac{k^2 y^2}{2 \cdot 1} \right) + \dots =$$

Posteriormente propone que $j = \frac{y}{w}$ debe ser una cantidad infinitamente grande, debido a que w es infinitamente pequeño, por tanto se seguiría que

$$1 = \frac{j-1}{j} = \frac{j-2}{j} = \frac{j-3}{j} = \dots$$

Sustituyendo esto en la expansión binomial entonces

$$a^y = 1 + ky + \frac{k^2 y^2}{2 \cdot 1} + \frac{k^3 y^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots$$

Ahora si sustituimos $y = 1$ obtenemos una relación entre a y k

$$a^y = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$$

Ahora Euler introduce el famoso número e como el valor de a para el cual $k = 1$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Identifica e como la base natural y escribe esta expansión de forma decimal:

$$e \approx 2.71828182845904523536028$$

En últimas, Euler acababa de deducir el conocido desarrollo exponencial

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Si colocamos $a^x = e^y$ al tomar logaritmos hiperbólicos es claro que tendríamos $x \ln a = y$, ahora sustituyendo esta relación en la expresión anterior obtenemos

$$e^y = 1 + \frac{(\ln a)x}{1!} + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \dots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$$

Que representa hoy día el desarrollo de la función exponencial en cualquier base.

Ahora para el logaritmo Euler escribe $1 + x = a^y = a^{jw} = (1 + kw)^j$, entonces $\log_a(1 + x) = kw$ entonces

$$1 + kw = (1 + x)^{1/j}$$

Donde $w = ((1 + x)^{1/j} - 1)/k$ de esto se sigue que

$$\log_a(1 + x) = kw = \frac{j}{k} [(1 + x)^{1/j} - 1]$$

Si ahora reemplazamos a por e (para $k = 1$) se obtiene

$$\log(1 + x) = j[(1 + x)^{1/j} - 1].$$

Actualmente esto se puede interpretar como

$$\log(1 + x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[(1 + x)^{1/n} - 1].$$

Por otro lado el número e juega un papel muy importante, es un número irracional, es decir no expresable mediante una razón de dos números enteros; o dicho de otra forma, no se puede representar como un número decimal exacto o decimal periódico. Además es un número trascendente por lo que no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales.

Sabemos que esta cantidad se expresa como $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ o en otras ocasiones como $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ pero probemos que este número es irracional:

Como se dijo anteriormente $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y como una serie. Ahora, Sea S_n la suma parcial n -ésima de la serie que representa el número e , esta sucesión es de términos positivos y estrictamente creciente, en consecuencia $s_n < e$ para todo n o equivalente $0 < e - s_n$ para todo n . Por otro lado,

$$\begin{aligned}
e - s_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Para $n \geq 1$, se tiene que $\left| \frac{1}{(n+1)!} \right| < 1$ y por tanto la serie geométrica que aparece es convergente:

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}.$$

Así se obtiene

$$e - s_n < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}, \quad \forall n \geq 1. \quad (*)$$

Ahora si $e = \frac{p}{q}$ con p y q enteros positivos deducimos que $q!e = q!(p/q)$ es entero. Además,

$$q!s_q = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right),$$

es un número entero con lo cual $q!(e - s_q) = q!e - q!s_q$ también es entero.

Ahora de la igualdad (*) se puede deducir que

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Además si $e = p/q$ con p y q enteros positivos, es decir si e fuera un número racional, se deduciría que el número entero $q!(e - s_q)$ estaría comprendido entre 0 y 1, lo cual es absurdo. Por tanto, e es un número irracional.

5. Conclusiones

Cuando se quiere estudiar en detalle una noción matemática, un buen inicio es analizar los elementos de causalidad que van evolucionando hasta delinear el concepto o la teoría matemática en consideración. Esto debido a que posteriormente pueden surgir desarrollos que pueden simplificar las ideas originales, de tal forma que los conceptos generadores del descubrimiento han sido transformados. Más aún, cuando hablamos de la invención de un nuevo método a veces se analiza de una manera superficial, dejando atrás esas ideas que motivaron su desarrollo.

Generalmente se presentan los logaritmos operativamente y no la construcción conceptual, desconociendo las raíces de la problemática que les dio sentido. Los introducen como operación inversa a la exponenciación. De esta manera, las dificultades en el aprendizaje del concepto se trasladan de forma directa a los problemas de la potenciación, lo cual conlleva a la pérdida del marco de referencia que permita entender la lógica íntima de los logaritmos y sus propiedades.

La evolución del concepto del logaritmo está ligado a la relación existente entre dos sucesiones de números, una que está en progresión aritmética y la otra en progresión geométrica. Es por esto que la revisión del concepto de logaritmo y función logarítmica, permitió conocer diferentes momentos durante el desarrollo de este concepto, iniciando por los antiguos griegos hasta llegar a Euler.

La identificación histórica de la noción de logaritmo, es decir el proceso en la cual se identifica como un nuevo concepto, tratando de desligarse de las progresiones discretas, para entrar en el campo de lo continuo a través de la variabilidad y continuidad, se dio en un proceso lento y repleto de altibajos. Este proceso se inició con diversas interpretaciones geométricas y con la elaboración de largas y abstrusas tablas.

Un antecedente de la noción de logaritmo es la relación, que se conocía desde los antiguos griegos, entre una progresión aritmética y otra geométrica. En el renacimiento Michael Stifel (1544) trabaja en esta relación, y aunque no muestra grandes avances establece un acercamiento a la regla de formación que esta relación implica.

A través del tiempo, se hicieron variaciones sobre la idea inicial de logaritmo trabajada por Napier; en particular una etapa de este desarrollo se relaciona con la hipérbola. Gregoire de Saint- Vincent, quien en su *Opus geomeoricorum quadrature circuli et sectionum coni*, intenta cuadrar el círculo siendo todo un fracaso, pero evidencia una relación entre la cuadratura de la hipérbola y los logaritmos.

El descubrimiento de la relación de los logaritmos con las áreas hiperbólicas provocó un desarrollo que traspasa las barreras operativas, buscando un acomodo en el campo del análisis matemático. Debido a esto aparecieron nuevos trabajos sobre las áreas hiperbólicas, lo cual trajo como consecuencia el inicio de desarrollos en series.

El desarrollo en series infinitas se debe a varios personajes como James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), Edmon Halley (1656-1742), Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727), Nicholas Mercator (1620-1687). Este último trata, en su *Logarithmotechnia*, el cálculo de los logaritmos por métodos utilizados por Napier y Briggs, también contiene fórmulas de aproximación para el cálculo de ellos. De manera moderna, la idea de Mercator se reduce a que el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$ desde $x = 0$ hasta $x = x$ es igual a $\ln(1+x)$ o, visto de otra forma, a $\int_0^x \frac{dt}{1+t}$.

Posteriormente Euler hace grandes aportes, pasa de llamar las curvas o líneas trigonométricas a funciones; también introduce el logaritmo de x con base a , $\log_a x$, visto como el exponente al cual se tiene que elevar la base a para que dé como resultado la potencia x . Para el caso de un exponente variable analiza varios casos. Si el exponente es cero la potencia es uno; pero si es una fracción, las toma como las raíces

de la base y pueden tener más de un valor. Euler considera que si los valores de los exponentes son racionales las potencias son más difíciles de entender por el concepto que hay detrás de ellas. En general, si se tiene $x = a^y$, Euler llama logaritmo de x al valor y , suponiendo una cierta cantidad fija llamada base; además, llama cantidades trascendentes a aquellos logaritmos que no son potencias de la base es decir que no son racionales.

Una de las cantidades trascendentes que existen es e . Se puede decir que su primera aparición fue de forma casi accidental. En la construcción en las tablas de logaritmos por parte de Napier, cuando construyó una tabla de números que iniciaba en 10^7 y disminuía a razón de $1 - \frac{1}{10^7}$ entre uno y otro, la entrada 10.000.000 sería 3678794, que es una muy buena aproximación de $\frac{1}{e}$ por 10^7 .

En 1661 Huygens relacionó el número e con la hipérbola rectangular. A estas alturas ya se sospechaba que existía una relación entre el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ y los logaritmos.

En 1668, Mercator, en su trabajo *Logarithmotechnia*, encuentra una serie para calcular logaritmos naturales. Aquí por primera vez utiliza la expresión “logaritmo natural” para referirse a los logaritmos con base e , pero el número como tal no aparece aún.

En 1683 aparece una definición más precisa de e en un trabajo hecho por Bernoulli (1654-1705) sobre interés compuesto, al tratar de calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

que corresponde a la definición del número e y fue la primera vez que se definió un número mediante un límite.

En 1748 Euler encontró propiedades para e ; en su obra *Introductio in analysis infinitorum* define la función logarítmica y exponencial como:

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{1/n} - 1) \quad \text{y} \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

En 1873, Charles Hermite demostró la trascendencia de e .

En el siglo XVII las funciones eran estudiadas como curvas; en 1647 Torricelli (1608-1647), se ocupaba del cálculo del área limitada por la curva, cuya función hoy conocemos como $x = \log y$, su asíntota y una ordenada; también del volumen del sólido que se obtenía al girarla alrededor del eje OX . Por otro lado, Euler en su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) considera valores reales como también imaginarios del argumento para una función, la toma como expresión analítica. Una expresión analítica se obtiene operando cantidades mediante las operaciones aritméticas, las potencias, las raíces y las soluciones de ecuaciones algebraicas.

Ahora, abordando la parte disciplinar e histórica podemos encontrar las siguientes posibles dificultades:

- La relación posterior con la operación potenciación.
- El identificar el logaritmo como el exponente de la potenciación.
- Visualizar la relación existente entre lo continuo y lo discreto que aborda la interpolación entre datos de la tabla y abordándola desde el sentido que se le debe de dar a los exponentes racionales no naturales.
- Pensar que las operaciones de los logaritmos son lineales.
- La enseñanza de situaciones modeladas a partir de la función exponencial y el uso de la función logarítmica como su función inversa.
- La relación existente entre la relación de las progresiones aritméticas y geométricas y las nociones de logaritmos y exponenciales como funciones.

Desde edades tempranas en la enseñanza, los logaritmos se presentan como una operación inversa a la potenciación. Es decir, se presenta la potenciación como una operación en la cual dada una base, ésta se multiplica la cantidad de veces como lo indica el exponente, de esta forma produciendo una cantidad llamada potencia. Desde aquí posteriormente se explican operaciones como la logaritmación y la radicación, vistas estas como operaciones opuestas a la potenciación, se presentan como la solución para hallar el exponente y la base cuando tienen los otros términos, esto para es natural para el estudiante que en el mejor de los casos está acostumbrado a la división vista como inversa de la multiplicación ni a la conmutatividad de una operación.

Desde este punto de vista, los logaritmos presentan un obstáculo en la forma en que se enseñan, pues como se dijo en el desarrollo de este trabajo, este concepto nace a partir de la relación entre números y no como una operación.

Es claro que desde el punto de vista histórico los logaritmos nacen de la necesidad de la reducción de cálculos astronómicos y de otras disciplinas, pero no como una operación opuesta a otra, su aparición fue estrictamente numérica.

En este sentido, la forma de enseñar los logaritmos en el aula de clases es casi que netamente axiomática, dado que no existen elementos en la presentación de estos en un ambiente escolar que propicien el paso de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto, y además es muy alejado del tratamiento original dado por Napier, como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose sobre una recta, uno con velocidad constante y el otro con velocidad decreciente (C.H, 1979) pag.148. No se conserva la relación explícita existente con las progresiones y otras características que han desaparecido en su presentación.

Teniendo en cuenta que el contexto de aparición de los logaritmos es netamente numérico, se puede decir que la forma de presentación en el aula de los logaritmos es un obstáculo pues la mayoría de los estudiantes están acostumbrados a que los conceptos que abordan tengan alguna aplicación inmediata en contextos de la naturaleza o de la vida cotidiana. Prueba de esto es la multiplicación de números negativos, que al no tener tampoco un contexto inmediato al que acudir para ser explicada se convierte en una regla, en muchos casos, sin sentido para los estudiantes (Gacharná, 2012).

Por otro lado, no es nueva la interpretación que hacen los estudiantes acerca de propiedades que poseen algunas funciones hacia otras, como por ejemplo la linealidad. Existen varios estudios que documentan estos problemas y en ello no es ajeno la función logarítmica. En algunos estudios hechos sobre el aprendizaje del álgebra (Cofrey, 1995), (Kieran F. E., 1989) se puede observar que la propiedad de la linealidad $f(x + y) = f(x) + f(y)$ la extienden a otras funciones, caso particular se toma: $\log(x + y) = \log x + \log y$.

Este fenómeno puede ser atribuido a la forma de presentar los logaritmos, es decir, como un grupo de reglas que sirven para solucionar problemas donde se involucran funciones exponenciales, como crecimiento de bacterias o poblaciones entre otros. Al

presentar la linealidad en las funciones se debería de presentar ejemplos de funciones que no cumplen con esta regla.

En algunas oportunidades los estudiantes preguntan: ¿para que los logaritmos?, respuesta sobre la cual sería muy interesante que el profesor pudiera mostrar la esencia de éstos y su origen; pero como se ve en el estudio hecho por (Farfan Marquez Rosa Maria, 2007), a veces ni siquiera los profesores conocen la relación existente entre las progresiones, por tanto, para los mismo docentes se hace difícil responder de forma satisfactoria a esta inquietud.

Con esto en mente sería bueno poder proponer actividades de aulas que puedan mostrar la relación existente entre las progresiones y como pueden conectarse con las relaciones encontradas por Napier y otros autores.

Bibliografía

- Astudillo, M. T. (2007). Segmentos de la historia: la funcion logaritmica. *Matematicas: Enseñanza Universitaria*, 129-144.
- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico. Construcción a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Mexico D.F: Siglo veintiuno.
- Barrantes, H. (2006). Los obstaculos Epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 40-46.
- Boyer, C. (1919). *A History of Mathematics*. Londres: Macmillian & CO Ltd.
- Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.
- Cofrey, J. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 66-85.
- Eli, M. (1994). *e The Story of a number*. New Jersey: Princeton University Press.
- Farfan Marquez Rosa Maria, F. E. (2007). Una Visión Socioepistemologica. Estudio de la funcion Logaritmo. *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. IPN. Mexico*, 86-91.

- Florian, C. (1913). History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *The American Mathematical Monthly*, 75-84.
- Gacharná, O. L. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media*. Bogotá: Tesis de Maestría.
- Hobson, E. (1914). *John Napier and the invention of logarithms, 1614*. London: Cambridge University Press.
- J, C. (enero 1995). Splitting, Covariation and Their Role in the Development of Exponential Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 66-86.
- Javier, T. M. (2003). Historia de los Logaritmos. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 5-22.
- John, N. (1889). *The construction of logarithms with a catalogue of Napier's works*. Edinburgh and London: william blackwood and sons.
- Kieran, C. &. (1989). El Aprendizaje del Algebra Escolar Desde una perspectiva Psicologica. *Enseñanza de las Ciencias*, 229-241.
- Kieran, F. E. (1989). El Aprendizaje del Algebra Escolar desde una Perspectiva Psicologica. *Enseñanza de las Ciencias*, 229-241.
- Knott, C. G. (1915). *Napier Tercentenary Memorial Volume*. London: Longmans Green and Company.
- Leonhard, E. (1988). *Introduction to Analysis of the Infinite*. New York: Springer.
- Martinez Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de maestría. Mexico D.F.: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.
- Moreno, F. J. (2003). Historia de los Logaritmos. *Apuntes de historia de las Matemáticas*, 5-22.
- Napier, J. (1889). *The construction of the wonderful canon of Logarithms*. Edinburgh: William Blackwood and sons.

Recalde, L. (2012). *Lecturas de Historia de las matemáticas*. Cali: Universidad del Valle. (En prensa)

Rosales, A. (2010). Números Trascendentes: Desarrollo Histórico. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 1-12.

Struik, D. (1954). *A Concise History of Mathematics*. London: G. Bell And Sons LTD.