



**UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES
LINEALES CON VARIABLE REAL, EN DOS ESTUDIANTES QUE REQUIEREN UNA
EDUCACION DIFERENCIAL**

RAQUEL VIDARTE JARAMILLO

Código: 201303694

STEPHANIE CELIS GALLEGO

Código: 201303724

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, AGOSTO 2016**



**UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES
LINEALES CON VARIABLE REAL, EN DOS ESTUDIANTES QUE REQUIEREN UNA
EDUCACIÓN DIFERENCIAL**

RAQUEL VIDARTE JARAMILLO

Código: 201303694

STEPHANIE CELIS GALLEGO

Código: 201303724

Trabajo para optar al título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática.
Modalidad Profundización.

TUTORA DE TRABAJO DE GRADO:

LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO, MG

PROFESORA DEL INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

COTUTORA:

JAQUELINE CRUZ PERDOMO, MG

PROFESORA DE LA ESCUELA DE REHABILITACIÓN HUMANA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI, AGOSTO 2016

Dedicatoria

A Dios por ser nuestro guía y darnos la fortaleza para alcanzar con éxito nuestros sueños; a nuestras familias que con su apoyo incondicional, hicieron más fácil nuestra labor; a todas aquellas personas que de una u otra forma nos brindaron orientación en el momento más oportuno y a su vez a aquellas personas que desde el cielo nos acompañan.

Agradecimientos

A Dios especialmente porque nos dio la sabiduría, la perseverancia y fue el principal guía que nos llevó a cumplir esta meta. A nuestras familias que nos acompañaron en este proceso y que gracias a su apoyo y cariño se ve culminado.

A los estudiantes que contribuyeron en esta investigación, a las directivas y docentes de las instituciones educativas de las cuales hacemos parte, por su colaboración y por creer en nosotras.

A nuestras directoras, Ligia Amparo Torres y Jaqueline Cruz por sus orientaciones, paciencia, aportes e ideas.

Tenemos una deuda de gratitud con cada una de estas personas que colectivamente motivaron a que lleváramos a feliz término este nuevo logro.

Contenido

	Pág.
Resumen.....	1
Introducción	2
 Capítulo 1. Aspectos Generales de la Propuesta de Trabajo	6
1.1. Planteamiento del problema	6
1.2. Objetivos	10
1.2.1. Objetivo General	10
1.3. Justificación.....	11
1.4 Antecedentes	15
1.4.1 Algunas investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra	16
1.4.2 Investigaciones de orden didáctico y curricular	17
1.4.4 Investigaciones referidas a dificultades generales en matemáticas con estudiantes que requieren una educación diferencial.....	21
 Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia.....	25
2.1 Hacia una educación diferencial:	25
2.1.1 Sujetos con discapacidad y el debate normal – anormal.....	27
2.1.2 La educación de las personas con discapacidad.....	28
2.1.3 El fracaso escolar y la enseñanza diferenciada	34
2.2 Perspectiva curricular.....	38
2.2.1 Procesos generales.....	39
2.2.2 Conocimientos básicos	40
2.2.3 Contextos	41
2.2.4 Estándares relacionados con el trabajo.....	41
2.3 Perspectiva matemática	44
2.3.1 Noción de igualdad y las relaciones de equivalencia	44
2.3.2 Sobre el concepto de ecuación.....	48
2.4 Perspectiva didáctica	50

Capítulo 3. Las Ecuaciones Lineales con una Variable Real en Estudiantes que requieren una Educación Diferencial.....	57
3.1. Caracterización de la población	58
3.1.1. Áreas de indagación personal del instrumento.....	58
3.1.2 El Instrumento	59
3.1.3. Implementación.....	64
3.1.4. Resultados y Análisis de los resultados, apartados (I, II, III, IV,V y VI).....	65
3.1.5 Resultados y Análisis de los Resultados, apartado (VII)	79
3.2 La Propuesta de aula sobre las ecuaciones de primer grado con una variable real en estudiantes que requieren una educación diferencial	86
3.2.1. Diseño de la propuesta de aula.....	87
3.2.2 Implementación de la propuesta.....	100
3.2.3 Resultados y análisis de los resultados.....	101
3.2.4 Resultados y análisis de los resultados de la Situación 1	101
3.2.5 Resultados y análisis de los resultados de la Situación 2	118
3.2.6 Resultados y análisis de los resultados de la Situación 3.....	139
 Capítulo 4. Conclusiones Generales y Algunas Reflexiones Didácticas.....	168
4.1Conclusiones generales	168
4.2 Reflexiones didácticas.....	172
 Referencias bibliográficas.....	176
 Anexos	182

Índice de figuras

Pág.

Figura 1. Esquema: Coherencia horizontal y vertical de los Estándares seleccionados.....	43
Figura 2. Concepto de ecuación y todos los elementos matemáticos involucrados en el mismo.	49

Índice de tablas

	Pág.
Tabla 1. Ecuación idéntica y ecuación condicional	48
Tabla 2. Estudiante 1 (IC): Condiciones favorables vs condiciones desfavorables	75
Tabla 3. Estudiante 2 (IC): Condiciones favorables vs desfavorables.....	75
Tabla 4. Estudiante 3 (IC): Condiciones favorables vs desfavorables.....	76
Tabla 5. Estudiante 4 (CB): Condiciones favorables vs condiciones desfavorables	76
Tabla 6. Estudiante 5 (CB): Condiciones favorables vs desfavorables	78
Tabla 7. Estudiante 6(CB): Condiciones favorables vs desfavorables	78
Tabla 8. Análisis matemático: Estudiantes IEIC	79
Tabla 9. Análisis matemático: Estudiantes IEIC	80
Tabla 10. Análisis matemático: Estudiantes IEIC	81
Tabla 11. Análisis matemático: Estudiantes CB.....	82
Tabla 12. Análisis matemático: Estudiantes CB.....	82
Tabla 13. Análisis matemático: Estudiantes CB.....	83
Tabla 14. Tareas, contenidos matemáticos y expectativas de desempeño presentes en cada una de las situaciones	90

Índice de Anexos

Anexo 1. Aplicación de instrumento de caracterización

Anexo 2. Prueba Diagnóstica matemáticas

Anexo 3. Fragmentos de situaciones aplicadas (Prueba Diagnóstica de matemática)

Anexo 4. Fragmentos de la aplicación del instrumento

Anexo 5. Fragmentos de situaciones implementadas (Propuesta de Aula)

Anexo 6. Evidencias (Fotos)

Resumen

En el presente trabajo se considera como punto de partida, los problemas de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones con variable real, asociados al aprendizaje del álgebra en la escuela. Dificultades que conllevan a la formulación de esta propuesta de aula implementada en dos estudios de caso, enmarcados en las necesidades educativas especiales, la cual reconoce la perspectiva de educación diferencial como referente para caracterizar logros y dificultades en la enseñanza de las ecuaciones lineales con variable real en dos estudiantes que requieren adaptaciones en su aprendizaje.

En consideración con lo anterior, para abordar las dificultades del aprendizaje del álgebra escolar pero de manera específica en las ecuaciones, se propone la movilización de este concepto a través de la implementación de tres situaciones las cuales parten de la variación hasta llegar a la conceptualización de la misma. Dado que esta propuesta de aula gira alrededor de las ecuaciones se privilegia el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos con sus diferentes representaciones (verbales, tabulares, algebraicas). Finalmente a partir de los resultados obtenidos, esta propuesta incluye reflexiones de orden didáctico, curricular y matemático como aporte a los procesos enseñanza y aprendizaje direccionado a docentes en ejercicio que estén interesados en esta problemática.

Palabras Claves: Ecuación lineal con variable real, Álgebra escolar, Propuesta de aula, Educación diferencial, Necesidades Educativas Especiales (NEE).

Introducción

El aprendizaje del álgebra en la escuela genera variedad de dificultades, ya que esta supone un cambio en el pensamiento del estudiante, siendo la dificultad para muchos el tránsito de lo aritmético a lo algebraico, en donde, según Kieran (1989), los escolares al comenzar el estudio del álgebra traen nociones y enfoques de uso en el campo aritmético, lo cual hace que las expresiones numéricas no les permita asignarle significado y sentido al álgebra escolar.

De otro lado Socas (1997), plantea que el origen de estas dificultades puede ser analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas y emocionales e igualmente atribuye el origen de dichas dificultades a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas y a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.

Es así como, sumado a las dificultades que conlleva la transición de lo aritmético a lo algebraico y los procesos cognitivos de los alumnos que, las necesidades e intereses individuales de formación matemática pueden diferir considerablemente y las diferencias entre los individuos en cuanto al aprendizaje de las matemáticas también, por lo que es necesario adoptar un currículo único, que puede ser adaptado a las particularidades de cada sujeto, o un currículo diferenciado, enmarcado dentro de un contexto de educación diferenciada y así las diferencias se pueden apreciar de una manera más positiva y como un estímulo para fomentar el aprendizaje.

Se debe entonces proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional dentro de un currículo que incluya una enseñanza diferencial, como uno de los logros para alcanzar. De manera que la enseñanza del contenido algebraico involucre conceptos y procedimientos que permitan analizar, organizar y modelar situaciones y problemas tanto de la actividad práctica como de las ciencias. Es por eso que los docentes tienen la responsabilidad de ofrecer a sus estudiantes estrategias específicas y diversificadas, como recursos y medios que promuevan el aprendizaje significativo, de acuerdo con las condiciones que resultan de cada dificultad de aprendizaje y de las necesidades particulares de cada estudiante. Fundamentada en la tendencia a una educación diferencial, es necesario sustentar una concepción de la enseñanza para estudiantes con discapacidad o dificultad de aprendizaje como mecanismo para garantizar una igualdad de condiciones dentro del aula. Las estrategias didácticas, son entonces un recurso y un derecho de y para los estudiantes a recibir una educación de calidad con equidad, a través de la construcción de ambientes orientados al logro de los aprendizajes.

Es de este modo como surge la necesidad de proponer nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como es el caso de ésta propuesta, para garantizar esta educación diferencial donde se considere el planteamiento y resolución de problemas matemáticos, en los procesos lógicos y analíticos que genere un cambio de actitud en los estudiantes. La exposición y la resolución de situaciones problemas que conlleven al planteamiento de ecuaciones lineales, son habilidades con serias dificultades que presentan los estudiantes de básica secundaria al no contar con suficientes destrezas esenciales como lo son traducir del lenguaje habitual al algebraico y viceversa, lo que hace importante resaltar la estrecha relación existente entre desarrollo del pensamiento variacional y la construcción de un lenguaje algebraico para la modelación de una situación que lo requiera para su interpretación.

Teniendo en cuenta estas consideraciones y en particular en estudiantes que tienen necesidades educativas especiales, se presentan a continuación los cuatro capítulos que conforman esta propuesta de aula que busca caracterizar los logros y dificultades de dos estudiantes que requieren una educación diferencial en la enseñanza de ecuaciones lineales con variable real y su aplicación en situaciones problema.

En el **primer capítulo** se exponen los aspectos generales de la propuesta de trabajo que inicia con la presentación del problema soportada por resultados y enfoques de investigadores interesados en la problemática planteada. Posteriormente se presentan los objetivos tanto generales como específicos dando paso a la justificación que pone en evidencia las razones por las cuales se aborda la problemática desde el enfoque propuesto. Luego se presentan los antecedentes constituidos por algunos referentes teóricos que permiten ubicar la problemática de los procesos de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales en el aula en estudiantes que requieren una educación diferencial y a su vez identificar los elementos que intervienen en el diseño y desarrollo de una propuesta de aula.

En el **segundo capítulo** se presenta el marco teórico de referencia, el cual se conforma de cuatro componentes teóricos, que en su conjunto le dan un sentido y horizonte a la propuesta de aula, estas son: La educación diferencial, la perspectiva curricular, la perspectiva matemática y la perspectiva didáctica del álgebra. La primera nos sitúa en el conocimiento de las características de la población con la cual se quiere trabajar, la matemática hace un acercamiento formal al concepto de ecuación, la curricular sitúa el papel de dicho concepto en la escuela y

finalmente lo didáctico proporciona evidencias literarias y experiencias acerca de los problemas en la enseñanza del álgebra y en el caso particular de las ecuaciones lineales con variable real.

El **tercer capítulo** presenta inicialmente el instrumento para la recopilación de información requerida para caracterizar la población objeto de estudio en este trabajo, en el cual la caracterización misma de esta población se realiza a través de una encuesta y la prueba para determinar la prueba diagnóstica de matemáticas realizada a seis estudiantes pertenecientes a dos instituciones educativas, de los cuales se seleccionan los dos estudios de caso. Se presentan también los resultados y análisis de la implementación de la propuesta de aula sobre las ecuaciones lineales con una variable real que propone la movilización de este concepto a través de la aplicación de tres situaciones las cuales parten de la variación hasta llegar a la conceptualización de la ecuación. La propuesta es diseñada a partir de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, para la aplicación de ésta, se tienen en cuenta estrategias metodológicas adaptadas a las particularidades de cada estudio de caso (E_1 y E_2).

Por último en el **capítulo cuatro** se presentan las conclusiones generales de este trabajo, las cuales aluden al proceso de indagación realizado, a las metas logradas de acuerdo a los objetivos planteados al interior de los resultados de la implementación de la propuesta de aula aplicada a los estudios de caso (E_1 y E_2), además se incluyen algunas reflexiones de orden didáctico como aporte a los docentes en formación matemática que puedan estar interesados en esta problemática y finalmente se presentan las referencias bibliográficas y anexos.

Capítulo 1.

Aspectos Generales de la Propuesta de Trabajo

Capítulo 1. Aspectos Generales de la Propuesta de Trabajo

En este capítulo se presentan los aspectos generales del trabajo de grado, los cuales inician a partir del planteamiento del problema y la formulación de los objetivos, para así dar paso a la justificación y a los antecedentes. En el primer apartado del planteamiento del problema se muestran algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas y de manera particular en el álgebra escolar y en correspondencia con las ecuaciones lineales con variable real. Seguidamente se plantean los objetivos, el general y los objetivos específicos, dando continuidad con la justificación la cual se establece desde el marco legal con base a directrices sustentadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Finalmente se exponen los antecedentes, en los cuales se incluyen algunos resultados investigativos y su relación con las dificultades del aprendizaje, la enseñanza del álgebra escolar, las ecuaciones lineales; y trabajos desarrollados en estudiantes sordos e invidentes, los cuales sirven de aporte algunos de los trabajos mencionados con anterioridad pueden ayudar a contextualizar cada experiencia para estrategias metodológicas, reflexiones de tipo didácticas y el análisis de competencias que se hacen manifiestas en su proceso de enseñanza y aprendizaje.

1.1. Planteamiento del problema

La presente propuesta de aula reflexiona acerca de los problemas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que se vienen observando en las instituciones educativas y que evidencian serias dificultades en el aprendizaje del álgebra en la escuela. Teniendo en cuenta elementos presentes en el sistema educativo colombiano y desde la experiencia personal docente, se dice que tradicionalmente se ha limitado la enseñanza de las matemáticas a los contenidos referidos a un objeto de saber específico, a través de un modelo estructural riguroso en el que se ignora el referente y contenido particular que tienen los símbolos, las reglas y los conceptos. Este sistema tradicional excluye casi siempre la comprensión del significado del

objeto matemático en estudio y centra su enseñanza a la exposición de contenidos repetitivos en los cuales no hay un enfoque concreto del objeto matemático.

La comprensión del significado de objetos matemáticos genera así una problemática que aumenta a medida que se generalizan los objetos y se requieren mayores procesos de abstracción para su comprensión, tal como sucede con el estudio del álgebra en sus conceptos básicos y procedimientos, dificultando el significado que se atribuyen a los términos, conceptos, las proposiciones y los símbolos algebraicos, así como el uso de estos significados en la construcción y argumentación de modelos y conceptos matemáticos más complejos.

Socas (1997), atribuye que debe tenerse en cuenta la pluralidad de los orígenes de los problemas que emergen en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual indica que en estos se ubican el estudiante, el contenido, el profesor, la institución entre otros. Con relación a lo anterior, en el caso particular del aprendizaje álgebra como parte de la actividad de razonamiento, no debe entonces iniciarse a partir de una teoría general de aprendizaje, si no por lo contrario tomar como foco principal los procesos de aprendizaje específicos de un contenido, propiciando a que se aborde en instancias como son la aritmética como marco referencial, la designación de objetos matemáticos, el papel fundamental que juegan las representaciones y la simbolización, la introducción al álgebra a partir de la resolución de problemas y otros más elementos que se desprenden de las dificultades que se presentan en el aprendizaje, pero que no deben sin lugar a dudas desconocerse.

Teniendo en cuenta lo mencionado con anterioridad, los problemas en el aprendizaje del álgebra son importantes analizarlos desde sus propias particularidades, lo cual genera que se dé una mirada detallada a la gama de dificultades que emergen en el aprendizaje del álgebra escolar, es así como de forma general en las Matemáticas el análisis de errores en los procesos de aprendizaje se ha transformado en una cuestión de continuo interés para las investigaciones en educación matemática. Según Kieran (1998), alude que la generalización y formalización de patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas al igual que el análisis de situaciones con la ayuda de símbolos constituyen una de las dificultades que mayormente predominan en los estudios sobre errores en matemáticas en la escuela.

La dificultad y a su vez la necesidad de analizar una situación matemática mediante un lenguaje simbólico, conlleva a pensar en los problemas que surgen del paso de lo aritmético a lo algebraico, como lo es el caso particular del aprendizaje de las ecuaciones lineales; en donde la

complejidad del concepto matemático subyace en la forma cómo el sujeto de enseñanza asimila los objetos que lo componen y la designación que da a su simbología algebraica. Gallardo y Rojano (1988), citan a G. Brousseau quien alude que esto es visto como una ruptura o corte de tipo didáctico, en donde los errores en el álgebra elemental son el resultado de la extrapolación o generalización inadecuada de los conceptos matemáticos.

En cuanto a otros elementos asociados con las dificultades de aprendizaje en el álgebra y de manera general en las matemáticas, se puede decir que la problemática no solo se circunscribe en los contenidos y sus estructuras matemáticas, sino también en aspectos propios del contexto del estudiante. Socas (1997), describe categorías para establecer el origen de las dificultades de aprendizaje del álgebra, en las cuales presenta la complejidad de los objetos de las matemáticas y procesos de pensamiento matemático como propias de la disciplina; igualmente atribuye orígenes de las dificultades a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas y a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, así como asocia las dificultades a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

De esta manera puede notarse varias perspectivas para abordar las dificultades según sea el énfasis en uno u otro elemento: procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, contexto social y escolar, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza; en las cuales sea posible dentro de cada una de ellas, brindar estrategias metodológicas en atención a los estudiantes que requieren una educación especial evidenciada en la integración educativa; es decir que dichas intervenciones no excluyan a este tipo de estudiantes de los procesos educativos y se tengan en cuenta todos los elementos que originan un problema de aprendizaje.

Además es importante, volver a mencionar hasta este punto la importancia de abordar los conceptos y procedimientos básicos del álgebra en un nivel estructural más que operacional, concibiendo cada expresión como un objeto matemático y no como símbolos operacionales, dotando cada símbolo de significado y dando sentido y lugar a los procedimientos algebraicos y a procesos más complejos; todo con el fin de encontrar solución a los problemas en las dificultades del aprendizaje y enseñanza del álgebra que presentan los estudiantes que requieren una educación diferencial.

De otra parte, es relevante considerar que las dificultades de aprendizaje del álgebra y los errores presentes en el aprendizaje de esta, no solo se presentan en los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE), sino también en alumnos que no presentan ninguna

evidencia de discapacidad, lo que nos induce a replantear la didáctica y pedagogía de las matemáticas hacia una orientación de educación diferencial o enseñanza diferenciada que tenga en cuenta la diversidad.

Considerar las diferencias del sujeto y el conocimiento, amerita de un despliegue de soportes y apoyos que contemplen las características que tal condición plantea, al tiempo que se sustenta en el reconocimiento que no todos los estudiantes aprenden igual, ni al mismo ritmo, lo que obliga al docente a asumir la dimensión general de cada dificultad así como la dimensión personal, para realizar un proceso de flexibilización y de ajuste en el desarrollo curricular y por lo tanto garantizar una calidad educativa con equidad.

Es así como se evidencia la necesidad de proponer nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para garantizar esta educación diferencial, donde se considere el planteamiento y resolución de problemas matemáticos en los procesos lógicos y analíticos que genere un cambio de actitud en los estudiantes; ya que es evidente que existe una actitud de apatía, falta de compromiso y bajo rendimiento de los estudiantes frente a las matemáticas y en especial en el campo conceptual del álgebra, debido a que la toman como algo abstracto y fuera de contexto con la vida cotidiana.

La exposición y la resolución de situaciones problemas que conlleven al planteamiento de ecuaciones lineales, son habilidades con serias dificultades que presentan los estudiantes de básica secundaria al no contar con suficientes destrezas esenciales como lo son traducir del lenguaje habitual al algebraico y viceversa, lo que hace importante resaltar la estrecha relación existente entre desarrollo del pensamiento variacional y la construcción de un lenguaje algebraico para la modelación de una situación que lo requiera para su interpretación.

Bien es sabido que para la mayoría de los estudiantes es complicado aprender las ecuaciones lineales así como las matemáticas de manera general, sobre el contexto de exposición oral, las operaciones repetitivas y soluciones individuales que son las principales actividades tradicionales de enseñanza. Se observa que la mayoría de los estudiantes no aprenden de manera adecuada a enfrentar los problemas de las ecuaciones, en muchos casos porque estos están alejados del contexto, las evaluaciones se realizan de manera individual y al final de cada sesión. Estos hechos han generado preocupación en las formas de enseñanza, en la metodología de enseñanza y aprendizaje esencialmente y se puede afirmar además que existen ciertas deficiencias en la aplicación de instrumentos de evaluación.

Por otra parte, esta propuesta de aula aporta un enfoque integral y más abierto, en cuanto a las estrategias de enseñanza que pueden ser implementadas en grupos de estudiantes, quienes presenten algún tipo de necesidad educativa. Con esto se pretende que los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula no sean cerrados al cambio y más aún cuando estamos expuestos en todo tiempo, a la diversidad estudiantil; la cual no puede ser vista como un problema, sino como la oportunidad de contar con currículos flexibles y estrategias de enseñanza caracterizadas por una mentalidad educativa más abierta e incluyente. De otro lado los referentes teóricos que se presentan a lo largo de este trabajo, permiten analizar los tipos de dificultad que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra elemental y en general de las ecuaciones lineales con variable real, lo que termina por consolidarse en una propuesta de aula implementada en dos estudios de caso¹ (enmarcados en las necesidades educativas especiales), la cual pretende proporcionar elementos fundamentales del pensamiento variacional en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales con variable real.

Finalmente esta investigación toma como consideración, el tipo de habilidades y competencias que se presentan en este tipo de población, además de herramientas tanto teóricas como prácticas, las cuales vienen a ser objeto de reflexión en educación matemática.

Teniendo en cuenta la problemática anterior, en este trabajo se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo, a través de una propuesta de aula sobre las ecuaciones lineales con variable real, se puede caracterizar logros y dificultades, de dos estudiantes que requieren una educación diferencial?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Caracterizar los logros y dificultades de dos estudiantes que requieren una educación diferencial, a través del desarrollo de una propuesta de enseñanza sobre las ecuaciones de primer grado con variable real.

¹En este trabajo, los dos estudios de caso mencionados hacen referencia a E₁, estudiante con una discapacidad de tipo visual (invidente) y E₂ estudiante con una deficiencia de aprendizaje, asociada a los niveles de desarrollo cognitivo por debajo del promedio normal (Diagnostico mediante pruebas estandarizadas que evalúan la escritura, lectoescritura y aritmética).

1.2.2. Objetivos Específicos

- Documentar la problemática, desde teorías didácticas y resultados de investigación sobre la enseñanza de las ecuaciones de primer grado con variable real y la educación diferencial.
- Relacionar elementos teóricos y metodológicos sobre la problemática, desde las perspectivas matemática, curricular y didáctica, en una propuesta de enseñanza de las ecuaciones lineales con variable real
- Identificar logros y dificultades en la implementación de la propuesta de aula, en dos estudiantes que requieren una educación diferencial.
- Aportar algunas reflexiones didácticas sobre la enseñanza de las ecuaciones de primer grado con variable real, en las instituciones educativas de los estudiantes objeto de estudio.

1.3. Justificación

“La diversidad y la individualidad son principios fundamentales... La educación puede promover la cohesión social si se preocupa en tomar en consideración y atender a la diversidad de individuos y grupos y no se convierte ella misma en fuente de exclusión”. (UNESCO, 1996)

Con base a los referentes teóricos contemplados en los lineamientos curriculares (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencia en matemáticas, se alude que los objetos matemáticos en las aulas regulares, deben estructurarse a partir de unos conocimientos básicos, unos procesos generales y a unos contextos significativos, en donde los conceptos deben comprenderse desde una perspectiva sistémica, como totalidades estructuradas, con sus

elementos y operaciones involucradas; sin embargo en la realidad del sistema educativo actual se hacen presentes posiciones que atañen a perspectivas instrumentales, en donde lo importante viene a ser las competencias que deben desarrollar los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, olvidando que lo verdaderamente relevante es encontrar el conjunto de alternativas que permitan al estudiante llegar a la solución de un problema, mediante buenas preguntas relacionadas con su contexto; es decir que el fin último no siempre será llegar a resultados sino fijar la mirada en cada uno de los procesos necesarios para llegar a estos.

Desde una perspectiva curricular, se plantea que los procesos de tipo algebraico se encuentran direccionados por el concepto de variación y a sus características propias, como lo es el caso de la importancia del álgebra simbólica, modelos y representaciones matemáticas, el papel fundamental de la incógnita, relaciones entre cantidades y magnitudes, procesos de observaciones en donde se incluyen registros y utilización de un lenguaje algebraico. Dentro del pensamiento variacional, se destaca que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo y su aprendizaje es un proceso que va madurando de manera paulatina, llegando a convertirse en un conocimiento sofisticado, lo cual quiere decir que es importante reconsiderar lo aprendido, mediante el diseño de nuevas situaciones problemáticas que busquen hacer un acercamiento a las conceptualizaciones propias de los conceptos matemáticos.

Los procesos de enseñanza en el ámbito tradicional, han limitado el aprendizaje a teorías generales, lo cual ha direccionado a un desconocimiento del comportamiento de los objetos algebraicos, de igual forma a encontrar un puente de aislamiento totalmente sesgado entre lo sintáctico y lo semántico, lo que técnicamente da como resultado dificultades como el reducir los procesos algebraicos a procesos netamente algorítmicos, confusión en cuanto a la atribución de términos, conceptos, representación y simbolización, dificultades en los cambios de representación y aún más cuando se trata de trabajar a partir de la resolución de problemas.

En cuanto al aprendizaje de álgebra, Pérez (2010) alude que no es una labor sencilla, pues las mismas características que la distinguen, hacen que su aprendizaje no sea sencillo, además que los estudiantes se sienten más cómodos y seguros, al trabajar con objetos concretos, como lo es en aritmética, pero en álgebra, los objetos que se manejan son abstracciones que requieren de un esfuerzo cognitivo significativo por parte del estudiante.

Es así entonces como surge la importancia de hacer una reflexión continua acerca del aprendizaje del álgebra, lo cual lleva a pensar no solo en los aspectos de tipo conceptual para su

enseñanza, sino a su vez en aspectos didácticos que permiten hacer un acercamiento al tipo de errores que cometen los estudiantes y de igual manera a establecer el origen de las dificultades presentes en los procesos de enseñanza del álgebra.

En el caso particular de las ecuaciones lineales con variable real, encontramos dificultades que se encuentran reducidas a la mecanización de procesos, lo que hace notorio la carencia de la aplicabilidad de las propiedades de equivalencia y el uso inadecuado en cuanto a la significación del signo igual.

Kieran (1981), alude que dentro de las dificultades comunes que se presentan, una que lo hacen con mayor frecuencia los estudiantes es sin lugar a dudas es “definir el concepto de igualdad”, en donde para el estudiante se convierte en una esquema que se escapa del hecho de ver la misma, como un conjunto de procedimientos tanto aritméticos como algebraicos que buscan llegar en definitiva a un resultado, no escapándose de la aplicabilidad de propiedades que se cumplen dentro una equivalencia de expresiones, como lo son por ejemplo: la Simetría, la transitividad y la uniformidad.

Para la mayoría de los estudiantes el resolver una ecuación de primer grado consiste en arrojar un resultado, ocasionalmente en hacer sustituciones y otras veces en hacer trasposición de términos deliberadamente. Todo lo anterior viene a suscitar una cadena de procesos repetitivos, que carecen de una estructuración de los contenidos algebraicos.

De acuerdo a lo anterior, es fundamental establecer la importancia del estudio del conjunto de los números reales para que de esta manera el estudiante vaya construyendo una relación e interrelación con los símbolos literales; con lo anterior se puede decir que un buen tratamiento atravesando una manera más general, con lo que respecta a estos y su adecuado estudio pueden garantizar una buena comprensión de estructuras algebraicas y sus relaciones. Como una muestra de que el estudio de los números y sus relaciones afecta el estudio del álgebra y en si la solución de ecuaciones, tenemos el caso de los enteros negativos y la operatividad que se despliega de los mismos, lo que ocasiona un error en el desarrollo de operaciones y en general una confusión de diferenciación numérica.

De esta forma, se hace un llamado a los educadores matemáticos, en cuanto a este tipo de problemática se refiere; ya que estos deben tratar de reflexionar acerca de estrategias, que permitan incentivar en los estudiantes el manejo de las propiedades matemáticas, inmersas en

los conjuntos numéricos y que pueden ser generalizadas en el tratamiento que se le da a la solución de ecuaciones lineales.

Se puede decir que las relaciones de equivalencia, en la comprensión de una ecuación son fundamentales, cuando se intenta dar una significación correcta a la igualdad y solo esto se puede lograr cuando se ponen en marcha los elementos que se consideran claves para tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales en la escuela.

Estos elementos a considerar (por ejemplo un cambio de pensamiento entre lo numérico y lo algebraico, la significación de la igualdad a partir de una adecuada relación de equivalencia, los cambios de representación etc.) ponen de manifiesto herramientas importantes a tener en cuenta a la hora de diseñar, proponer e implementar una estrategia de enseñanza, para el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Algo que también se resalta en este trabajo, es la importancia de como educadores aprenden a analizar el entorno escolar, haciendo un especial llamado a que las dificultades en matemáticas y en el caso puntual del álgebra, viene a ser un fenómeno que toca a toda la comunidad estudiantil, de distintas maneras y que puede ser mayor cuando se desconoce la individualidad del estudiante y los niveles de diversidad estudiantil en el aula, que pueden ir desde la relación con el otro hasta el saber mismo.

Con respecto a lo mencionado acerca de la diversidad de los sujetos y de manera adicional los tipos de discapacidad que se evidencian en algunas poblaciones; es de suma importancia resaltar lo que se contempla en nuestra constitución colombiana de 1991, en donde se reconoce las características pluriculturales de la población y en consecuencia, el deber ciudadano de prestar atención a cualquier persona en condición de discapacidad. Es así, como a nivel educativo se hacen presentes proyectos de integración e inclusión escolar, los cuales deben tener en cuenta, el proporcionar espacios y recursos que atiendan las necesidades educativas de cada sujeto de enseñanza, independientemente de su condición física, cognitiva, social y cultural.

De acuerdo a lo mencionado, con relación a los recursos que den atención a personas con alguna discapacidad, se encuentra el caso particular de personas quienes presentan dificultad visual, con quienes se hace necesario dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, incluir materiales y herramientas acordes a sus condiciones biológicas y sociales (ejemplo: Braille,

macrotipo, sonoros o en relieve), las cuales algunas de ellas, se encuentran mediadas por formas específicas de registros y códigos adquiridos mediante técnicas táctiles.

Con relación al tema de discapacidad, diversidad e inclusión estudiantil, Echeita (2011) sugiere, que esto debe ser visto como una búsqueda constante de mejores maneras de responder a la diversidad del alumnado, con miras en lograr conjugar la equidad y la calidad educativa, por medio de perspectivas cada vez más eficaces y comprensivas, sin necesidad de recurrir a discriminaciones y exclusiones. Esta última parte, muchas veces se ve imposibilitada y limitada debido a la falta de recursos destinados para el aprendizaje en muchas instituciones educativas, lo cual es contradictorio al sin número de herramientas proporcionadas por el devenir tecnológico.

Sin lugar a dudas, nuestra tarea es buscar luces que permitan entender a fondo la realidad educativa, y de esta manera propiciar alternativas que permitan el mejoramiento de aspectos, involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La reflexión acerca del saber matemático y el sujeto de enseñanza, permite pensar en el diseño e implementación de situaciones que favorezcan el aprendizaje de un determinado concepto matemático, como lo es el caso particular de las ecuaciones lineales con variable real, en estudiantes quienes presentan algún tipo de aprendizaje singular.

Se trata de aprender a vivir con la diferencia y a la vez de estudiar cómo podemos sacar partido a la diferencia. En este sentido, las diferencias se pueden apreciar de una manera más positiva y como un estímulo para fomentar el aprendizaje entre niños y adultos. Considerar las diferencias entre los estudiantes con dificultades de aprendizaje, amerita un despliegue de soportes y apoyos que contemplen las características que tal condición plantea, al tiempo que se sustenta en el reconocimiento de que no todos los estudiantes aprenden igual, ni al mismo ritmo, lo que obliga al docente a asumir la dimensión general de cada dificultad así como la dimensión personal, para realizar un proceso de flexibilización y de ajuste en el desarrollo curricular y por lo tanto garantizar una calidad educativa con equidad.

1.4 Antecedentes

En este apartado se presentan algunos referentes teóricos que permiten ubicar la problemática de los procesos de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales en el aula en

estudiantes que requieren una educación diferencial y a su vez identificar los elementos que intervienen en el diseño y desarrollo de una propuesta de aula. De acuerdo a esto, se tiene en cuenta algunas consideraciones referidas a la dificultad del aprendizaje del álgebra en la escuela, seguido de estudios sobre las ecuaciones e investigaciones específicas con estudiantes que requieren particularidades en su aprendizaje.

1.4.1 Algunas investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra

En primer lugar se consideran los factores que inciden en la dificultad de aprendizaje del álgebra, para lo cual se inicia revisando algunas investigaciones que se han centrado en las dificultades del tránsito del pensamiento del niño de la aritmética al álgebra (Kieran, 1989), haciendo hincapié en las diferencias de estas disciplinas o en sus semejanzas.

No hay duda de que entender el álgebra sin haber comprendido la aritmética es realmente imposible, pues el álgebra hunde sus raíces en la operatividad aritmética. Como generalización de la aritmética que es, gran parte de las dificultades de aprendizaje que presenta el álgebra se deben a deficiencias en el dominio de la aritmética. Esta conclusión está avalada por los estudios hechos por Novotná y Sarrazy (2005) quienes afirman entre otras cosas, que “las dificultades en el enfoque de álgebra se basan en la escasa atención que se presta a los aspectos estructurales y relacionales de la aritmética que constituyen la base de álgebra elemental”.

Hemos encontrado que las autoras Brizuela y Schliemann (2003) han demostrado que los alumnos dotan de sentido su aprendizaje algebraico desde niveles muy tempranos si se introduce la notación algebraica como variación de sus representaciones espontáneas de problemas fuertemente contextualizados, y que el álgebra formal alcanza un suficiente nivel de abstracción que permite la configuración del mismo como teoría de las estructuras y su aplicación al estudio de problemas matemáticos o de otras ciencias como herramienta independiente y prolífica.

Muchos autores han señalado la dificultad de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Booth, 1984, 1988; Herscovics, 1989, Kieran, 1992), donde Kieran (1992) destaca distintas variables que influyen en esta dificultad: el contenido de la propia álgebra, el aprendizaje inapropiado o la forma de enseñarlo. Kieran y Filloy (1989) citan a Vergnaud y Cortés (1986),

quienes han identificado ciertos invariantes operatorios que los estudiantes deben construir en su proceso de aprendizaje del álgebra: la conservación de la igualdad, el control algebraico de la validez de la transformación y la elección de la operación aritmética prioritaria.

Una parte importante de los errores en la resolución de problemas a través del álgebra y que son motivo de la dificultad de su aprendizaje, se encuentran en la mala traducción realizada o la incapacidad de los alumnos para hacerla. Desde distintas experiencias contextualizadas y a través de esta traducción los estudiantes pueden ir construyendo, por sí mismos y apoyados por el contexto social, el significado de variabilidad característico del signo algebraico, que no se construye con los programas exclusivamente sintácticos. Además, la posibilidad de dar y seguir instrucciones en un lenguaje nuevo y la componente imaginativa que esto conlleva pueden servir de incentivo a la hora de realizar dichas actividades. Los problemas contextualizados presentan así una oportunidad inmejorable para el aprendizaje del lenguaje algebraico.

En este sentido se observa que Sinitsky (2003) propone los problemas de combinatoria, por ejemplo, las particiones de un número natural como suma de dos bajo ciertas restricciones, como punto de partida para la introducción del álgebra. Este autor argumenta que la enseñanza del álgebra a partir de situaciones concretas cercanas al alumno ayuda a presentar su aprendizaje de forma lo más natural posible pues este aprendizaje informal, en el terreno del pensamiento algebraico, obliga a la utilización de un lenguaje que exprese informaciones matemáticas y posibilite la manipulación de las mismas en orden a la resolución de problemas.

1.4.2 Investigaciones de orden didáctico y curricular

Uno de los trabajos de investigación que aportan en la realización de este trabajo, se titula “La noción de variable en ecuaciones lineales: Una perspectiva funcional” de Benavides y Jaramillo (2011), en el cual se plantea desde el principio la importancia del pensamiento variacional en los procesos algebraicos y el rol determinante de la letra no como incógnita sino en cuanto a la significación de variable.

En este sentido se fundamenta, cada uno de los diseños de secuencias didácticas propuestas en el trabajo anterior, las cuales buscan que los estudiantes desarrollen cambios y representaciones del lenguaje simbólico, en donde la tarea principal no solo se encamina en llevar lo natural a lo simbólico, sino en llevar una situación algebraica a una situación en su

lenguaje natural (esta última parte es fundamental ya que permite una reconstrucción del concepto desde varias perspectivas, que apuntan a lo funcional).

En este trabajo, el sentido funcional es recreado por medio de situaciones enmarcadas en un contexto económico, en las cuales el concepto y empleo de variables se ve altamente evidenciado. Lo anterior viene a ser una característica fundamental de las situaciones que aquí se presentan por su significación de las letras, las relaciones de covariación y dependencia.

De otra parte, el trabajo de León y Valdez (2009), titulado “Iniciación al álgebra escolar desde una perspectiva funcional. Una secuencia didáctica para la introducción a las expresiones algebraicas y ecuaciones lineales”, se plantea tanto el diseño, la implementación y el análisis de las situaciones propuestas, a partir de componentes curriculares (lo aportes desde los estándares y lineamientos a nivel curricular), didácticas (desde los trabajos de investigación realizadas por Kieran y Heid), matemáticas (desde la teoría de las ecuaciones lineales) y cognitivas (desde los aportes de Raymond Duval acerca del análisis del funcionamiento cognitivo).

En el trabajo anterior, de igual manera se hace énfasis en la importancia del pensamiento variacional y las relaciones de covariación y dependencia, se sitúa especialmente en el uso de diferentes registros de representación semiótica, con el fin de favorecer la construcción y la transformación de representaciones algebraicas.

Esquinas (2009) cita a Kieran (1981), Vergnaud (1985) y Skemp (1993), donde aluden que “otro concepto aritmético que provoca dificultades en el aprendizaje del álgebra es el significado de la igualdad y Kieran sugiere que la comprensión del signo igual en primaria no es completa y esto puede ser causa de gran número de errores en etapas posteriores. Si su utilización siempre se presenta en expresiones del tipo $4+2=6$, se favorece la idea de que el $=$ simboliza un operador, en este caso de adición. Dicho signo habitualmente precede al resultado de una operación y, por lo tanto, se le confiere el sentido de signo totalizador. Skemp dice que en álgebra no ocurre así ya que la mayor parte de las veces no podemos terminar nuestros cálculos, como es usual en aritmética. De este tipo de desaciertos en la generalización provienen errores como $7 + 2a = 9a$, en los que el deseo de clausura desborda la capacidad de pensamiento lógico-algebraico. La introducción de cuestiones variadas en la enseñanza aritmética, dónde no siempre se pida el total, como por ejemplo sumas en las que se desconoce un sumando o incluso los dos, o relaciones de igualdad con omisión de un número, $\dots + 3 = 5$, $4 + 2 = \dots + 1$, etc.,

pueden favorecer la correcta significación de la relación de igualdad, que resulta fundamental para la comprensión de las expresiones algebraicas y las ecuaciones” (p.154)

También Esquinas (2009) cita a Vergnaud (1987) quien alude que: “En el caso de una ecuación, los alumnos piensan que lo que está a cada lado del signo igual es una cuenta indicada cuyo resultado debe tener algún significado. El igual se interpreta, de este modo, como un signo de escritura para separar dos informaciones o cantidades, como una coma. El problema de fondo se halla en que el aprendizaje del igual aritmético se ha interiorizado sin las propiedades de simetría y transitividad que le son propias. Muchos de los errores de resolución de ecuaciones se enmarcan en la incomprensión de la relación de igualdad, lo que provoca que las reglas de resolución carezcan de sentido propio y deban ser memorizadas sin comprensión alguna”. (p. 154)

Por su parte, Infante y Hurtado (2010) en su trabajo “Significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado”, plantean la construcción del concepto de igualdad desde distintas perspectivas, que van desde el estudio matemático, histórico y epistemológico hasta sus consecuencias didácticas.

Con respecto a lo anterior, este trabajo plantea que el tratamiento que los estudiantes le dan a las ecuaciones lineales depende en gran parte al sentido que estos le dan al signo igual ($=$), que en la mayoría de los casos lo atribuyen como una relación en búsqueda de un resultado, en otras como un separador entre expresiones y en pocos casos el signo igual desde una relación de equivalencia.

El concepto de igualdad que aquí se establece, se encuentra estrechamente relacionado con la importancia de incluir tempranamente en la escolaridad no solo la parte numérica, sino a su vez la parte simbólica, que permita poco a poco llevar a los estudiantes a familiarizarse con el lenguaje algebraico y no quedarse suspendidos solo el campo aritmético.

Las *situaciones matemáticas* implementadas en el trabajo de Infante y Hurtado (2010), buscan generar en los estudiantes discusión y capacidad de justificación, en cuanto a las nociones y conceptualizaciones que han sido objeto principal de estudio en el trabajo y las cuales fundamentan el concepto de igualdad.

1.4.3 Investigaciones sobre estudiantes que requieren una educación diferencial

“Aproximación a algunos aspectos curriculares en relación con la formación docente y la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con limitación visual”, aquí los autores Beltrán, Cerón y Pineda (2010) se sensibilizan con la población con limitaciones o capacidades excepcionales y por ende con necesidades educativas especiales y el hecho que genera esta problemática educativa en las instituciones y profesores, en donde es necesario una adecuación curricular. A su vez sistematizan las experiencias conjuntas al respecto, caracterizan los procesos curriculares, las prácticas y la formación de algunos profesores de matemáticas que trabajan con estudiantes con limitación visual, identificando dificultades y problemas además complementan con formulaciones al respecto.

Artunduaga y Ortega (2013), realizan un trabajo acerca de la “Identificación de competencias asociadas a la resolución de problemas en matemáticas en un grupo de estudiantes sordos de la educación media colombiana”, en el cual parten de una visión Socio-Antropológica de la sordera para así entender a estos individuos como un grupo cultural lingüísticamente particular. Los cuales son merecedores de unas adecuaciones pedagógicas acordes a sus necesidades. La importancia de este trabajo radica en el análisis de las características del sistema educativo colombiano y del diseño curricular propuesto por los lineamientos curriculares en matemáticas, además investigan el desempeño en el proceso de resolución de problemas matemáticos en algunos estudiantes sordos. Con este fin diseñan e implementan dos pruebas que posibilitan reconocer los procesos y estrategias usadas por los estudiantes en la búsqueda de la solución de cada problema planteado.

Criollo y González (2010), hacen una exploración pedagógica denominada “ Ciegos, función Lineal, impedidos Visuales, actividades del aprendizaje, Integración escolar”; este trabajo es un aporte importante ya que esta investigación gira en torno al concepto de función lineal y función afín, incorporando reflexiones de orden didáctico en lo relativo a los conceptos matemáticos para los cuales tiene en cuenta diferentes fenómenos que puede ser modelados a través de la función lineal, adicionalmente hace referencia a reconocer el principio de igualdad de oportunidades de educación para personas con discapacidad visual y los procesos de integración en el aula que conlleva a una serie de adaptaciones tanto a los materiales que median

las actividades en el aula , como el tipo de discurso que emplea el docente ya que se debe apelar a adjetivos demostrativos para referirse a una representación simbólica del objeto que se está estudiando.

1.4.4 Investigaciones referidas a dificultades generales en matemáticas con estudiantes que requieren una educación diferencial

Los trabajos realizados con alumnos con requerimientos de Educación Diferencial para las matemáticas, aspiran a promover el éxito en contenidos matemáticos concretos. Los investigadores analizan las repuestas de los alumnos partiendo del currículo oficial. En cierta forma, esto significa que se sobreentiende que las matemáticas para este tipo de estudiantado debe tener la misma estructura (el mismo tipo de ejercicios y en el mismo orden) que las matemáticas para los alumnos sin dificultades.

La parte de las matemáticas más investigada es el campo numérico y en especial, la suma y resta de números de uno o dos dígitos. La razón de esto puede deberse a que se conoce mucho sobre este campo en alumnos sin discapacidad, lo que permite tener marcos teóricos y resultados con los que contrastar las respuestas del alumnado con dificultades de aprendizaje, quienes obtienen resultados más bajos que los niños de desarrollo típico, tanto en cálculo como en la resolución de problemas.

Diferentes investigaciones, como las presentadas por Kilpatrick, Gómez y Rico (1998) sugieren que esto se debe a factores cognitivos y no cognitivos. Así, se ha observado que los niños con dificultades de aprendizaje usan estrategias más inmaduras para resolver problemas, son menos persistentes, tiene una baja autoestima y consideran difíciles las tareas que se les presentan, lo que les lleva a sus bajos niveles de éxito. Las explicaciones de tipo cognitivo indican que estos estudiantes tienen problemas con la memoria de trabajo y con la memoria a largo plazo, lo que les impide utilizar estrategias ya aprendidas o usar los conocimientos numéricos básicos (Zelege, 2004).

Los estudiantes con dificultades de aprendizaje matemáticos pueden desarrollar capacidades matemáticas, con ayudas y metodologías específicas, adaptadas a su proceso de aprendizaje. Romero (2004) describe también una experiencia de atención a la diversidad, con

alumnado con dificultades. El objetivo de la experiencia fue desarrollar capacidades matemáticas del alumnado de forma lúdica, a través de un taller de matemáticas.

Actualmente el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) está siendo cada vez más extendido en la enseñanza de personas con discapacidad. Así, se ha demostrado la eficacia de los programas informáticos para enseñar estrategias de resolución de problemas aritméticos a personas con dificultad de aprendizaje. Mastropieri, Scruggs y Shiah (1997) comprobaron la existencia de diferencias significativas en la resolución de problemas aritméticos, antes y después del uso de las TIC, además encontraron en el computador una herramienta motivadora para las personas que participaron en su estudio.

Existen varias hipótesis sobre posibles causas de las dificultades en el aprendizaje de la Matemática. Socas (1997), por ejemplo plantea que las dificultades en el aprendizaje de la Matemática se pueden enmarcar dentro de cinco factores: la complejidad de los objetos matemáticos, las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de esta disciplina, los procesos cognitivos de los estudiantes y las actitudes afectivas y emocionales hacia la Matemática. Sugiere además que los factores que intervienen en las dificultades del aprendizaje de la Matemática no son solo aspectos de índole cognitivo, sino actitudinal, lo que hace necesario conocer la visión del estudiantado sobre esta disciplina y hasta indagar cuál es la actitud de sus padres al respecto.

Por su parte, Núñez y otros (1998) concuerdan con Socas (1997) en que las dificultades en el aprendizaje de la Matemática son muy variadas y están relacionadas con una multiplicidad de factores. En adición a los ya mencionados, se sintetizan los siguientes: Creencias negativas y actitudes sobre la Matemática; la propia naturaleza de la Matemática; sus procesos de conocimiento y simbolismo, entre las que sobresalen la abstracción y generalización; complejidad de los conceptos; estructura jerárquica de los conceptos matemáticos y el carácter lógico; El lenguaje matemático; y Posibles alteraciones neurológicas. Chavarría y Diaz (2013) citan a Hernández y Moreno (2001), quienes identificaron varios de los factores antes mencionados, entre los más sobresalientes están: factores didáctico–metodológicos, factores socio–económicos, factores políticos y factores culturales.

De todo lo planteado anteriormente es posible decir que cada una de las investigaciones mencionadas son oportunas en cuanto a identificar los problemas y dificultades en el aprendizaje del algebra en la escuela, ya que permite dilucidar que es una problemática común en diversidad

de estudiantes, además que es pertinente buscar estrategias en pro de superar todas estas dificultades en el álgebra y específicamente de las ecuaciones de primer grado, es aquí donde el papel del maestro y sus conocimientos pueden ser el puente para generar tanto cambios, como propuestas curriculares que logren ser significativas. Después de hacer un rastreo a trabajos de investigación referidos al tema específico sobre la enseñanza de ecuaciones lineales en estudiantes que requieren una educación diferencial, se puede decir que son muy pocos los que aluden a este tema; pero se resalta que algunos de los trabajos mencionados con anterioridad pueden ayudar a contextualizar cada experiencia y orientar la metodología apropiada para el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Capítulo 2.

Marco Teórico de Referencia

Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia

Este capítulo se conforma de cuatro componentes teóricos, que en su conjunto le dan un sentido y horizonte a la propuesta de aula, estas son: La educación diferencial, la perspectiva curricular, la perspectiva matemática y la perspectiva didáctica del álgebra relacionadas con la población objeto de estudio y la problemática matemática de referencia. La primera nos sitúa en el conocimiento de las características de la población con la cual se quiere trabajar, la matemática hace un acercamiento formal al concepto de ecuación, la curricular sitúa el papel de dicho concepto en la escuela en relación a lo establecido por los Estándares Básicos de Competencia y Lineamientos curriculares de Matemática; y finalmente la didáctica, la cual proporciona evidencias literarias y experiencias acerca de los problemas en la enseñanza del álgebra y en el caso particular de las ecuaciones lineales con variable real.

2.1 Hacia una educación diferencial:

Conceptos de discapacidad ligados a los modelos

La concepción tradicional del análisis de la discapacidad se origina en una perspectiva de orden médico e individual. En esta se considera la discapacidad como una pérdida o anormalidad en la función o en la estructura corporal, psicológica o fisiológica. Sin embargo, corrientes de pensamiento en la orilla de lo social, consideran la discapacidad como una problemática social asociada a las desigualdades en el sistema socioeconómico capitalista y la falta de políticas públicas. Entre estos dos debates emerge también la pregunta por la normalidad - anormalidad. Para dar contexto a todo este debate y mostrar como todos ellos confluyen en la sociedad y en especial en el contexto educativo, se presenta a continuación la configuración de tres modelos sobre la discapacidad a lo largo de la historia.

Desde la antigüedad hasta el presente, han existido profundas contradicciones en torno a la concepción y al tratamiento de la discapacidad. Tales contradicciones son una constante

histórica, y constituyen una manifestación de la tensión existente entre las diferentes concepciones de las que es objeto la discapacidad; si bien podría afirmarse que las respuestas sociales y jurídicas hacia la discapacidad han ido fluctuando como consecuencia de estas dos perspectivas, es posible distinguir tres modelos que a lo largo del tiempo se ha dispensado a las personas con discapacidad, y que en algunos ámbitos coexisten de alguna manera en el presente. Estos tres modelos son: el de Prescindencia, el Rehabilitador y el Social.

En el modelo de Prescindencia la discapacidad tiene su origen en causas religiosas, siendo un castigo de los dioses. También se consideraba que las personas con discapacidad transmitían mensajes ‘diabólicos’, las vidas de estas personas no merecían ser vividas y por tanto su existencia era considerada innecesaria. Delgado y otros (2008) aluden que durante la Edad Media se mantuvo el modelo de prescindencia sosteniéndose la concepción de un origen sobrenatural para la discapacidad y se las internaba en forma permanente, o debían vivir de la limosna, conformándose así un modelo de marginación. En el segundo modelo, el rehabilitador, se considera que las causas que originan la discapacidad no son religiosas, sino científicas. Las personas con discapacidad ya no son consideradas inútiles o innecesarias, pero siempre en la medida en que sean rehabilitadas. Este modelo puede igualmente categorizarse como modelo médico ya que se caracteriza por considerar que las causas de la discapacidad se asientan en procesos biomédicos: aquellas personas que no podían ser curadas se internaban en establecimientos donde se atendía a personas con cualquier tipo de discapacidad. Éste modelo se extiende hasta fines del siglo XIX en el que comienza el modelo determinista funcional que concluye a fines del decenio de 1980 y en el que se desarrollan y comienzan a aplicarse los criterios de la rehabilitación médica y de la educación especial (Palacios, 2008).

Desde fines del decenio de 1980 hasta la fecha se desarrolla el modelo social o un modelo con perspectiva de inclusión. Este último modelo sostiene que la discapacidad tiene su origen en causas sociales, sin negar el sustrato médico - biológico, pero afirma que lo importante es el rol que juegan las características del entorno creado por el hombre (viviendas, escuelas, centros de trabajo, espacios urbanos, transporte, medios de comunicación). Las desventajas que experimentan las personas con discapacidad surgen de la interacción entre las características personales, sus deficiencias y el entorno. Otra de las características del modelo es que las personas con discapacidad gozan de igual valor en dignidad que el resto, y lo que puedan aportar

a la sociedad se encuentra relacionado con la inclusión y la aceptación de la diferencia y la diversidad del sujeto. Se manifiesta un enfoque integral de la discapacidad considerando a la persona y su entorno en la forma más amplia posible. Se apuesta a la educación inclusiva y se procuran como medios de subsistencia la seguridad social, el empleo y se aprueban medidas antidiscriminatorias y de incentivo para lograr su inserción laboral. El tratamiento social impartido es el de inclusión de la deficiencia como parte de la realidad humana y se orienta hacia la adecuada valoración de la persona con discapacidad.

En la actualidad las políticas del ministerio de educación nacional como las orientaciones pedagógicas para estudiantes con discapacidad cognitiva, visual, auditiva, motriz, autismo; contemplan en sus lineamientos pedagógicos y didácticos un enfoque entre social y biológico de la discapacidad, enmarcado también en los derechos de las personas con discapacidad a la educación, en dar herramientas a los maestros basadas en metodología flexibles y en adecuaciones al currículo.

2.1.1 Sujetos con discapacidad y el debate normal – anormal

De acuerdo con Skliar (2002), cuando sugiere que la discapacidad no es un fenómeno biológico sino una retórica cultural, vemos que no puede ser pensada como un problema de los discapacitados, de sus familias o de los expertos, sino que es una idea cuyo significado está íntimamente relacionado con el de la normalidad y con los procesos históricos, culturales, sociales y económicos que regulan y controlan el modo a través del cual son pensados e inventados los cuerpos, las mentes, el lenguaje y la sexualidad de los sujetos. Aguirre y otros (2008) lo reafirman al exponer que la discapacidad es una categoría social y política, ya que es una condición producida por la interrelación de las estructuras económica, social y cultural con la deficiencia en la función y/o estructura corporal, o sea que es una forma de opresión social que impone limitaciones a los sujetos que presentan algún déficit.

En el proceso de construcción de la normalidad como categoría de señalamiento, es preciso establecer los límites de la normalidad y la anormalidad con relación al sujeto y consecuentemente, comprender cómo se ha operado la clasificación, ubicación y ordenamiento de los sujetos. El concepto de normalidad es una invención de la modernidad, que se instaura

como una categoría que rige la mirada de médicos, educadores y criminólogos, pero es una categoría que se construye desde su negación, porque lo que su origen sintetiza no es la normalidad, sino la anormalidad, que confirma la propia pertenencia a lo Uno, a lo Mismo.

El concepto de lo anormal en torno a la discapacidad, constituye el concepto de un Otro que genera un absoluto temor a no ser completos, a la incongruencia, a la ambivalencia, al desorden, a la imperfección, a lo innombrable, a lo dantesco, a lo monstruoso, un Otro, como lo describe Skliar (2002), “cuyo todo y cada una de sus partes se han vuelto objeto de una obscena y caritativa curiosidad, de una inagotable morbosidad, de una pérvida etnografía de lo mismo, de un sueño o ideal de completamiento del otro, de perfectibilidad del otro, de corrección del otro, de normalización del otro”.

Foucault (2007), sugiere que el anormal se constituye como un dominio específico a partir de la síntesis de tres personajes: el monstruo humano, el individuo a corregir y el onanista, refiriéndose a personajes que corresponden a distintos momentos históricos y que confluyen en la configuración de la identidad anormal, lo que hoy aún se considera, ya que todo aquel señalado como loco, delincuente, discapacitado o pobre, entre otras anormalidades posibles, evoca en alguna medida, imágenes de alguna de estas tres figuras.

Es así como el camino hacia una educación que reconozca y asuma la diferencia y la diversidad humana, y en ese sentido una educación diferencial, significa que los estudiantes con discapacidades o con problemas en el aprendizaje sean tratados como sujetos únicos y no se los mida con parámetros de normalidad, implica a la educación conocer y reflexionar acerca de las particularidades de los estudiantes, además diseñar y pensar didácticas que pongan en juego las relaciones: sujeto maestro, sujeto estudiante con diversidad funcional o con discapacidad, objeto de conocimiento. Es decir las personas con discapacidad en el circuito de la educación escolar son una oportunidad valiosa que se le presenta a la educación para volver a pensar la enseñanza y para que el maestro se piense a sí mismo en su oficio de enseñar.

2.1.2 La educación de las personas con discapacidad

En el Renacimiento se empezó a cuestionar esa visión eclesiástica de posesiones diabólicas dando paso a que se gestara la primera intención de educación especial y no solo centrándose en entregar un servicio asistencial, como era lo que se hacía en conventos y otras

instituciones ligadas a la iglesia, avanzando con el tiempo la idea de una educación, quizás no como la que actualmente experimentamos pero que para la época significó un claro avance después de siglos de una postura rígida y excluyente. Hasta la Ilustración no había un tratamiento mínimamente educativo del retraso mental y esta identidad quedó diluida junto a otros trastornos como la locura, la demencia.

Las personas con discapacidad intelectual eran apartadas de la sociedad y se les atendía de manera meramente asistencial. Posteriormente entre los siglos previos a las grandes revoluciones ilustradas, personajes como Ponce de León, o Louis Braille hicieron contribuciones a la educación especial; el primero por su escuela para estudiantes sordos, y el segundo (después de un trágico accidente) por inventar un sistema de lectoescritura para personas con discapacidad visual.

Estudios realizados en Colombia por Yarza (2005) nos sugiere que las "anormalidades" y los "niños anormales" de finales del siglo XIX y principios del XX también fueron invenciones de la modernidad y nos ilustra como la pedagogía de anormales representa, para el saber pedagógico, la práctica o dominio discursivo que materializa con mayor legitimidad científica-experimental esta invención. Argumenta entonces que la discapacidad en general y las necesidades educativas especiales son expresiones de lo otro, o del Otro al que se refiere Skliar (2007), como una especie de alteridad deficiente. Así que estos conceptos son nuevas invenciones de la actual formación discursiva que impregnan y "condicionan" a las ciencias sociales, la pedagogía, la educación especial e incluso a los sistemas educativos. La educación especial desde la perspectiva de Yarza, debe contar con una pedagogía que la tome como objeto de saber, reincorporando sus objetos históricamente identificados, delimitando su estructuración y funcionamiento discursivo interno, vislumbrando las relaciones técnicas, aplicadas y conceptuales externas con otros saberes y sus condiciones sociales de existencia.

En Colombia la educación especial se institucionaliza a escala nacional en 1968 con la creación de la División de Educación Especial, en el Ministerio de Educación; en el cual se promueven programas y servicios de educación especial, tanto para alumnos subnormales como para estudiantes sobresalientes, definiéndose desde allí como un subsistema educativo que atendía a poblaciones excepcionales en el que se incluían a limitados, retrasados mentales, ciegos y sordomudos, con parálisis cerebral, sobresalientes, entre otros. Es así como desde la década de 1960 se impulsa la educación de niños con retraso mental y proliferan institutos de educación

especial, la instauración de la División de Educación Especial, del INCI (Instituto Nacional de Ciegos) y del INSOR (Instituto Nacional de Sordos), la apertura de programas de formación de maestros para limitados visuales y de niños con retraso mental, y del Programa de Aulas Especiales en las Escuelas Regulares en 1974. A partir de las décadas de 1980-1990 se introducen los discursos, las instituciones, las prácticas, los sujetos, los instrumentos o técnicas de la "integración educativa" desplazando la "educación especial" y haciéndola ver como una educación institucionalizada, segregadora, asistencialista, altamente médica, en síntesis: como un proyecto educativo fracasado. La integración académica, escolar o educativa se "institucionaliza" fuertemente desde la Ley 115 de 1994, Ley General de Educación. El Decreto 2082 de 1996 la reglamenta. La Resolución Ministerial 2565 de 2003 la puntualiza, precisa y demarca en el marco de la actual Revolución Educativa del Ministerio de Educación Nacional.

Debemos considerar que la educación especial, de pasar por procesos sociales de rechazo, a ir paulatinamente haciéndose necesidad, es una tarea presente y pendiente en la sociedad y en particular de la educación, de forma que desde el enfoque de la inclusión con perspectiva alternativa y no regulador, se reconoce que la educación de las personas que aprenden diferente a la norma requieren de respuestas que no están centradas en una tarea de manera exclusiva por algunos docentes, sino también de la sociedad, el ministerio de educación y sus secretarías, las comunidades educativas e instituciones de educación superior, estas últimas son las encargadas de formar docentes con los saberes y las prácticas necesarias para educar en el marco de la complejidad que implica el tema.

En 1975 la ONU formuló la Declaración de derechos de las personas con discapacidad, en la que se cita como derecho fundamental la dignidad de la persona, de lo que se derivarán el resto de los derechos. En 1974 la Secretaría de Educación del Reino Unido publica el Informe Warnock; en él se populariza el término Necesidades Educativas Especiales (NEE), que tendría primacía en lugar de Educación Especial (EE).

Poco después de la publicación del Informe Warnock en 1978, se celebró en Dinamarca la conferencia Una escuela para todos, en la que se enfatiza en la individualización de los servicios educativos como base para el éxito de la integración, determinándose que las personas no son iguales entre sí, sino que tienen necesidades muy distintas, que deberán ser evaluadas y compensadas por el centro educativo, haciendo uso de recursos e instrumentos varios. El alumno puede presentar así un continuo de situaciones que generarán múltiples tipos

de respuesta y diferentes modalidades de escolarización, generando así el concepto de inclusión escolar, que acepta a todos los alumnos como básicamente diferentes, sean cuales sean sus circunstancias personales y sociales. Este nuevo concepto de Inclusión Escolar fundamenta en las premisas de aplicación del principio de normalización, además de que la integración es el objetivo final de todos los sistemas educativos, en los cuales no se excluye de la educación a ningún individuo.

No obstante, estos principios y conceptos no bastan para establecer las mejoras que la educación debiera contener, sino que también falta sensibilización a padres, alumnos, profesores de manera amplia y sistemática, se alude a la falta de capacitación de los profesores, falta de apoyo de especialistas, falta de recursos y condiciones de infraestructura, destacando además es que se han de efectuar cambios en las actitudes del profesorado y en las prácticas educativas para avanzar hacia una verdadera educación inclusiva. En este tratamiento de la problemática que es entregar la educación inclusiva de calidad, los profesores requieren de un nuevo perfil docente enmarcado en mejorar sus prácticas pedagógicas pero al mismo tiempo dialogar de manera abierta con las Secretarías de Educación y el Ministerio de Educación de manera que se haga un ejercicio de corresponsabilidad para la enseñanza de los estudiantes que aprenden de manera diferente y que exigen pensar y actuar con otras prácticas y saberes pedagógicos y didácticos.

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), una necesidad educativa especial evoca a las necesidades educativas individuales que se hacen más evidentes en unos estudiantes con relación a los otros; las cuales por lo general no logran ser atendidas a través de los medios y las herramientas inmediatas con las que cuenta el docente en su contexto de aula regular, siendo necesario la adaptación de los recursos y medidas pedagógicas que son comunes a todos. Un estudiante que presenta una NEE por diversas causas que emergen de las dimensiones del desarrollo humano y que afectan su proceso de aprendizaje, requieren de unas acciones que permitan acceder al currículo, adaptaciones tanto curriculares, contextuales y organizacionales y servicios de apoyo especial.

Pero como docentes que en nuestro entorno pedagógico nos enfrentamos a las diferencias entre nuestros estudiantes, dentro de sus propios contextos socioculturales y políticos, debemos cuestionarnos tal como lo sugiere Yarza (2005), ¿Cuáles pedagogías y cuáles didácticas permitirían conceptualizar y experimentar sobre la educación especial? Este autor nos orienta hacia una alternativa promisorio de pedagogía diferenciada desarrollada en Francia y que se disemina en el mundo como Educación Diferencial. Esta educación diferencial cuenta con sus propios objetos de conocimiento, sus procedimientos pedagógicos, sus postulados éticos y filosóficos, su horizonte conceptual y aplicado, su proceso de emergencia y transformación. No obstante, para aplicar esta pedagogía en nuestro ámbito, implica conocer sus procesos históricos de emergencia discursiva, reinscribirla en las coordenadas históricas de la formación social, en la historicidad de la "pedagogía de anormales" y de la educación especial y articularla con nuestra tradición pedagógica.

La educación diferencial materializa una diferenciación pedagógica que acoge no solo a estudiantes con necesidades educativas especiales derivadas de discapacidad y de capacidades o talentos excepcionales, sino también a estudiantes de distinta procedencia cultural, lingüística, racial, sexual o de género; es decir, aboga por enfoques interseccionales para conocer y comprender a los sujetos educandos. Es por tanto diferencial ya que genera una multiplicidad en las prácticas pedagógicas y apuestas didácticas. Puede reconocerse además como diferencial porque acepta la educación en la diferencia del alumnado, en sus ritmos de aprendizaje, sus estilos de pensamiento, sus necesidades educativas y sus características individuales. Esta nueva tendencia educativa establece además relaciones con distintos objetos de conocimiento, disciplinas, contextos socioculturales y cotidianidades, con un aprendizaje que se enlaza con la transformación social.

Yarza (2005) citando a Zambrano (2002), reafirma que las prácticas de enseñanza diferencial deberían rescatar al otro en tanto radicalmente otro, basarse en unos principios de no-reciprocidad y de educabilidad e incluso ejercer su poder sobre la voluntad del otro. Esto sugiere que la no-reciprocidad implica no esperar nada del otro de la relación pedagógica, es decir sin esperar recompensa o resultados óptimos o pago por servicios prestados. Se hace necesario un cuestionamiento de la pedagogía diferenciada sobre lo universal y lo singular que puede extenderse hacia lo "normal" y lo "anormal", lo diferente y lo idéntico, la otredad o alteridad y la mismidad, lo que debe generar una iniciativa para dilucidar la problemática de los binomios

opuestos y constitutivos en la educación especial y evidenciados en la educación inclusiva. El reconocimiento de las diferencias debe a la vez unificar y diferenciar, como compromiso en la acción educativa y como un esfuerzo para reinterpretar esta contradicción y poder conciliar el proyecto de vivir juntos con aquel de vivir con el otro.

Según lo analiza y proponen Yarza (2005) y Gómez (2003) algunos métodos apropiables de esta pedagogía diferenciada pueden ser los siguientes: el reagrupamiento de los alumnos, los contratos didácticos, el trabajo individualizado, el proyecto del alumno y la evaluación sumativa, de sistema y formativa. Estos cuatro puntos demarcan el horizonte de un conjunto de reflexiones y experimentaciones que posibilitan estructurar pedagógicamente las conceptualizaciones epistemológicas. Sin embargo, es indispensable articular la pedagogía diferenciada francesa con la tradición pedagógica colombiana.

En este sentido de pedagogía diferenciada en relación con el desarrollo de habilidades para la solución de problemas matemáticos en los escolares con necesidades educativas especiales, se enriquece la connotación de la solución de problemas matemáticos en aras de la potenciación del cumplimiento de las funciones de los problemas matemáticos en la educación diferencial, que en su contextualización se le atribuyen, además de las funciones de enseñanza, educativa y de desarrollo, las funciones estimuladora y mediadora. Conseguir la igualdad para todos los alumnos requiere principalmente, ayudas y tiempo. Ayudas al profesorado para que disponga de recursos (humanos y materiales) que permitan trabajar las situaciones propias de este alumnado; tiempo para que los investigadores progresen en sus estudios

Los resultados de las investigaciones en este campo están muy dispersos, debido a las investigaciones que se han realizado con grupos de alumnos muy diferentes. Se necesita en este momento trabajos que unifiquen resultados y que incidan en aspectos cognitivos y formas de razonar por parte de este alumnado. También es necesario ampliar los tópicos matemáticos investigados, de manera que vayan más allá del campo numérico. Se requieren adaptaciones curriculares para cada necesidad que estén soportadas por resultados de la investigación y que contribuyan de manera efectiva al aprendizaje matemático.

Por su parte, González y Núñez (1998) concuerda con Socas (1997) en que las dificultades en el aprendizaje de la Matemática son muy variadas y están relacionadas con una multiplicidad de factores. En adición a los ya mencionados, se sintetizan los siguientes: Creencias negativas y actitudes sobre la Matemática; la propia naturaleza de la Matemática; sus

procesos de conocimiento y simbolismo, entre las que sobresalen la abstracción y generalización; complejidad de los conceptos; estructura jerárquica de los conceptos matemáticos y el carácter lógico; El lenguaje matemático; y Posibles alteraciones neurológicas. Hernández y Moreno (2001), identificaron varios de los factores antes mencionados. Entre los más sobresalientes están: factores didáctico–metodológicos, factores socio–económicos, factores políticos y factores culturales.

Se evidencia entonces que los factores que intervienen en las dificultades del aprendizaje de la Matemática van más allá de problemas cognitivos y abarcan, desde aspectos propios de la disciplina, hasta las actitudes que se tienen hacia esta asignatura en los centros educativos. Atender las necesidades educativas especiales mediante una educación diferencial en el contexto del aula matemática, exige entonces tomar en cuenta algunos de los factores anteriormente mencionados.

2.1.3 El fracaso escolar y la enseñanza diferenciada

Se habla de fracaso escolar tal como lo dice Ormrod Escudero (2005), cuando un estudiante no es capaz de alcanzar el nivel de rendimiento medio esperado para su edad y nivel pedagógico, entendiéndose además por el hecho de no lograr el título académico mínimo obligatorio de un sistema educativo. El fracaso escolar no es entonces un fenómeno natural, sino una realidad construida por y en la escuela en sus relaciones con los estudiantes y por supuesto, de éstos con ella.

El fracaso escolar depende también del modo que lo entiendan los docentes y de sus prácticas pedagógicas, así como de la forma en que evalúan el aprendizaje y de cómo manejan aquellos estudiantes que presentan dificultades en sus desempeños y habilidades. De todas maneras, el fracaso escolar resulta entonces de un desencuentro entre lo que la escuela y sus profesores esperan y exigen y lo que algunos alumnos son capaces de dar y de demostrar, dependiendo en resultados que son valorados como no satisfactorias de acuerdo con determinado cánones y niveles de exigencia.

Es así como se puede observar por ejemplo, que la repitencia en los primeros años, predice el doble de probabilidades de abandonar la escuela secundaria sin completarla. La repitencia es uno de los fenómenos que describen el fracaso escolar y tiene graves

consecuencias. Desde la perspectiva de la política y la gestión del sistema educativo y para encuadrar sus responsabilidades en cuanto a la disminución del fracaso escolar se plantean dos conceptos relevantes, como son la inclusión escolar total, plena y oportuna como derecho y las oportunidades educativas como rasgo de la oferta del Estado para ejercer ese derecho, canalizado a través de todas y cada una de las escuelas.

Plantea Farías y otros (2007) en el VI foro permanente de educación inclusiva realizado en Cali, “un sistema educativo que tolera el fracaso escolar generalizado no puede ser inclusivo” y “sin superar el fracaso escolar no se puede alcanzar la meta de inclusión”. Dado que la inclusión escolar es un derecho de la niñez y la adolescencia, debe poder ser ejercido en todas las escuelas y por lo tanto, es responsabilidad esencial del gobierno, tanto nacional como departamental, garantizar las condiciones en las cuales las escuelas y sus docentes produzcan el ámbito de enseñanza adecuado y brinden además las oportunidades educativas pertinentes, soportadas además en dos dimensiones fundamentales: Las condiciones organizativas posibilitadoras de la oferta del sistema educativo y la propuesta de enseñanza que se presenta a los estudiantes.

Enfrentar con seriedad el fracaso escolar requiere identificar y analizar los problemas para los cuales la repetición se ha planteado históricamente como una solución. La universalización de la educación básica y el compromiso mundial de una “Educación para Todos” implica el reconocimiento de que todos los niños y niñas pueden aprender y que todas las diversidades merecen las mejores condiciones para hacerlo.

Dentro de las intenciones a nivel global para enfrentar los problemas y buscar soluciones para el fracaso escolar, la UNICEF dentro de su plan de Educación para todos, apoya programas como el llamado “Todos pueden aprender”, acogido en la Argentina por Farias y otros docentes y colaboradores. Mientras se continúan, profundizan, instalan y consolidan las acciones que garanticen unas condiciones de funcionamiento del sistema escolar aceptables, el Programa “Todos pueden aprender” promueve intervenciones escolares, asistidas, reconocidas e impulsadas desde los sistemas educativos y con amplia participación de todas las personas y organizaciones involucradas, orientadas a: Prevenir que los alumnos y las alumnas repitan el año. Evitar que los estudiantes que repiten, “vuelvan a hacer el recorrido de actividades. Promover que los estudiantes que repitieron reparen y recuperen el desfasaje y el trauma que han sufrido.

Todo ello con una aplicación consciente, monitoreada y cooperativa de estrategias didácticas, con una tendencia muy marcada hacia una *enseñanza diferenciada*.

La enseñanza diferenciada hace parte de la educación diferenciada y se entiende como un método de enseñanza que implica una combinación de los estilos de aprendizaje con las habilidades. Esto se logra mejor a través de la agrupación intencional de los niños en similares niveles académicos para facilitar el proceso de aprendizaje. No hay un manual paso a paso para este tipo de enseñanza y más bien, incluye muchas estrategias y técnicas que serán las que mejor se adapten a un grupo de estudiantes en un momento dado y sobre todo, la enseñanza diferenciada es flexible y está en constante evolución para satisfacer las necesidades existentes.

La enseñanza diferenciada implica básicamente "remover" lo que sucede en el aula de modo que los estudiantes tengan múltiples opciones para captar información, comprender ideas y expresar lo que aprenden, construyendo diversos caminos para adquirir contenidos, procesar o comprender ideas y elaborar productos, para que cada alumno pueda aprender a su propio ritmo de manera eficaz (Tomlison, 2005)

Los estudiantes con necesidades especiales que tienen mayor tendencia al fracaso escolar y que presentan diferentes características intelectuales y lingüísticas, no aprenderán lo mismo que sus compañeros de clase, pero podrán aprender lo que sean capaces de aprender, teniendo la oportunidad de socializarse con sus pares, aprender el lenguaje y compartir la cultura y los espacios propios de su edad. El método de enseñanza tiene que tratar de que, en este contexto, puedan desarrollar su mayor potencial. Los salones de clase pueden entenderse desde un concepto de "espacios de aprendizaje", como comunidades que aprenden, donde los docentes tienen capacidad para flexibilizar los procesos, de manera que se pueda responder a la diversidad, la heterogeneidad de los grupos de estudiantes, de sus bagajes culturales, experiencias, intereses, estilos de aprendizaje e inteligencia. De tal manera que la diferencia es la norma y ser diferentes es lo normal, para entender el aprendizaje y plantear la enseñanza.

Los factores positivos que influyen para que una enseñanza diferenciada disminuya o mejore y radique el fracaso escolar son: La enseñanza diferenciada es proactiva, es más cualitativa que cuantitativa, se basa en el diagnóstico, proporciona múltiples enfoques del contenido, el proceso y el producto, está centrada en el alumno, es orgánica, combina la enseñanza global a toda la clase, la grupal y la individual,

Dentro de esas condiciones que suponen la exclusión y/o la inclusión de estudiantes al sistema educativo, es importante tener en cuenta las dificultades específicas de aprendizaje. La definición del concepto de dificultades específicas del aprendizaje, tal como lo plantea Bermeo, (2013) suele asociarse al concepto de “trastornos del aprendizaje”; sin embargo, es necesario hacer la distinción entre estos significados y el concepto de “dificultades de aprendizaje”. En el primer caso se alude a un conjunto de sujetos, bastante menor en proporción respecto de los que presentan dificultades de aprendizaje, dicho de otra manera, la población de estudiantes con dificultades de aprendizaje es proporcionalmente mayor a la de aquellos que presentan trastornos específicos de aprendizaje Burgos (2013). Las dificultades específicas de aprendizaje deben vincularse a una particular dificultad de aprendizaje que, a la vez, se relaciona a las denominadas necesidades educativas especiales de carácter transitorio.

Para el diagnóstico de las dificultades de aprendizaje, se utiliza en nuestro medio la recomendación de la Organización Mundial de la Salud OMS, en el uso del Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales (en inglés Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders (DSM) de la Asociación Psiquiátrica de los Estados Unidos (American Psychiatric Association), el cual contiene una clasificación de los trastornos mentales y proporciona descripciones de las categorías diagnósticas, con el fin de que los clínicos y los investigadores de las ciencias de la salud y la educación puedan diagnosticar, estudiar e intercambiar información y tratar los distintos trastornos mentales. Este tipo de diagnósticos alude a un heterogéneo grupo de alteraciones que se manifiestan en significativas dificultades en la adquisición y el uso de la escucha, el habla, la lectura, la escritura, el razonamiento o las habilidades matemáticas. Tales alteraciones son intrínsecas al individuo, se presume obedecen a una disfunción del sistema nervioso central, y pueden darse a lo largo de toda la vida. Los problemas en conductas autor regulatorias, percepción social e interacción social, pueden darse junto con trastornos del aprendizaje, pero no constituyen de por sí un trastorno del aprendizaje.

El docente que se interesa por las necesidades especiales de los estudiantes con dificultades de aprendizaje, puede definirse como el maestro que realmente intenta satisfacer las necesidades específicas de sus alumnos, sus intereses particulares, sus formas preferidas de aprender, es decir un docente interesado en aplicar una enseñanza diferenciada.

Se trata entonces de mantener a los estudiantes juntos dentro del contexto de un currículo flexible, pero atendiendo a sus necesidades individuales, sus intereses y sus formas

preferidas de aprender. Para ser efectiva esta estrategia, el maestro tiene que conversar con los estudiantes, conocerlos, pedirles su opinión sobre las cosas, sentarse con ellos un minuto o dos para ver cómo marchan las cosas, escucharlos y descubrir qué les interesa. Todo esto retroalimenta la enseñanza y los vínculos maestro-alumno no solo ayudan a en la planificación, sino que también motivan la diferenciación.

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente planteado, es posible inferir que la educación diferencial es a su vez una pedagogía diferencial, ya que acepta las diferencias del alumnado, lo cual enmarca en una nueva tendencia educativa y en reconocimiento de las diferencias y para efecto de esta propuesta de aula, el currículo debe ser único pero adaptado a las condiciones particulares de cada estudiante, generando estrategias metodológicas que permitan potenciar habilidades y destrezas en matemáticas y específicamente en el proceso enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales con variable real.

2.2 Perspectiva curricular

En este apartado se presentan los aspectos curriculares que están relacionados con el álgebra escolar que orientan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006); como parámetros del Ministerio de Educación Nacional (MEN), los cuales establecen unos referentes comunes para el diseño curricular en las instituciones educativas y propuestas de aula en la escuela.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemática (2006), y los Lineamientos curriculares (1998) plantean el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela, basados en una estructura curricular identificando tres ejes principales: procesos generales, conocimientos básicos y contexto. Estos tres aspectos permiten organizar el currículo de manera que el contenido matemático contribuya al desarrollo integral de los estudiantes, a través de una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales y en donde se prioricen los procesos de pensamiento propios de la actividad matemática con aplicabilidad y utilidad para el aprendizaje, además del énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos, con el fin didáctico y pedagógico de dar sentido al mundo que les rodea, así como representarlo y explicarlo.

2.2.1 Procesos generales

A continuación se presentan los procesos generales de la actividad matemática caracterizados desde las políticas curriculares colombianas.

Razonamiento Es el proceso que permite comprender regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, proponer interpretaciones por medio de argumentos o razones. Con respecto al área de matemáticas es significativo propiciar el razonamiento con aspectos espaciales, métricos, geométricos, numéricos y proporcionales, este último debe ser apoyado con el uso de gráficas.

Formulación, tratamiento y resolución de problemas: Este proceso está presente en las actividades curriculares de matemática, en aquellas situaciones problema ya que éstas proporcionan el contexto inmediato; estos problemas pueden surgir de experiencias de la vida cotidiana. Aquí se pone de manifiesto la habilidad de los estudiantes al utilizar variedad de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e identificar lo razonable de ellos, transformar condiciones y originar otros problemas.

Modelación: Este proceso se refiere a diferentes formas para identificar esquemas o comportamientos que se repiten en la vida cotidiana a través de representaciones mentales, gestuales, graficas o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos que permiten formular y resolver problemas de la realidad. Consecuentemente, en una situación problema, la modelación permite reconocer la relación entre variables y el cambio en diferentes contextos en cuanto a lo que cambia y permanece constante, además proponer un modelo que represente relaciones de dependencia e independencia entre variables. Las situaciones problemas utilizadas como puente en la iniciación al álgebra en la escuela deben permitir el reconocimiento de relaciones entre las variables que intervengan de manera que el estudiante pueda establecer regularidades que den paso a la modelación de dicha situación como apertura al estudio de las expresiones algebraicas.

Comunicación: Este proceso implica para el estudiante registrar el lenguaje propio de las matemáticas, hacer uso de las nociones y procesos matemáticos a través de la comunicación de ideas que posibiliten la discusión frecuente y explícita, expresar y deducir ideas matemáticas por medio de sistemas simbólicos (tabla de valores, un gráfico cartesiano, una expresión algebraica) que sirva para representar alguna situación de la vida cotidiana, ligado a lo anterior

debe estar la lectura e interpretación del lenguaje matemático. Este proceso hace parte esencial en el desarrollo de cada una de las Situaciones propuestas en la Unidad didáctica.

Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: Este proceso requiere comprometer al estudiante en construcciones y ejecuciones seguras y dinámicas de prácticas mecánicas denominadas “algoritmos” procurando la comprensión, alternando los momentos implícitos en esta clase de actividades como es el conocimiento conceptual y otros en el que prima el procedimental, que el estudiante pueda determinar el procedimiento indicado saber cuándo y dónde aplicarlo de manera fiable y eficaz, que invente otros procedimientos para la obtención de resultados en casos particulares.

Es importante anotar que para el diseño de la propuesta de aula se articulara cada uno de ellos, centrándose principalmente en los procedimientos, conceptos y resolución de problemas, ya que estos son el medio para que el estudiante interprete, explique, comunique y vea la lógica que le permita abordar las situaciones problema planteadas.

2.2.2 Conocimientos básicos

Los conocimientos básicos tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, los cuales se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Dado que esta propuesta de aula gira alrededor de las ecuaciones se privilegia el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, el cual por sus características es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables, es decir relaciones de dependencia.

En este sentido la enseñanza de los conceptos básicos de las ecuaciones, debe considerar el concepto de patrón como una propiedad y una regularidad que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición o composición. Los patrones y regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas y en otras áreas del saber. De esta manera el uso de símbolos contribuye a los procesos de generalización.

2.2.3 Contextos

El contexto se encuentra representado en las situaciones problemas, en las cuales se tiene en cuenta la matemática misma y por ende el docente como orientador de normas explícitas o implícitas con las cuales se labora en clase, referido al contexto inmediato o de aula; el contexto escolar o institucional del cual hacen parte los saberes previos, PEI, normas de convivencia, el currículo explícito etc, y el contexto extraescolar o sociocultural, el cual se conforma por todo lo que pasa fuera de la institución en el ambiente de la comunidad local y demás. Los tres contextos en el aprendizaje de las matemáticas son los que permiten darle significado a las actividades y contenidos matemáticos dentro del aula; por lo tanto es de gran relevancia tener en cuenta variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, de esta forma cada situación diseñada responde a una necesidad del contexto sociocultural de los estudiantes de forma que encuentren interés y utilidad en su resolución, es decir, le asigne significado.

Seguido lo anterior los contextos, los tipos de pensamiento con sus sistemas conceptuales y simbólicos más afines y los procesos generales antes mencionados se entrecruzan lo que permite que a través de estas políticas curriculares sea posible interpretar una nueva manera de reorganizar todos aquellos contenidos que se han constituido como referentes para el área de matemáticas en los grados de educación básica secundaria, tradicionalmente etiquetados con el nombre de álgebra; de este modo es importante acercarse al concepto de ecuación, a través del uso de situaciones problemáticas que estén relacionadas con la vida diaria y con las matemáticas mismas, lo que contribuye al desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional.

2.2.4 Estándares relacionados con el trabajo

Desde los Estándares (2006), la propuesta de aula considera tanto la Coherencia Vertical como la Coherencia Horizontal. La Coherencia Vertical presenta la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados,

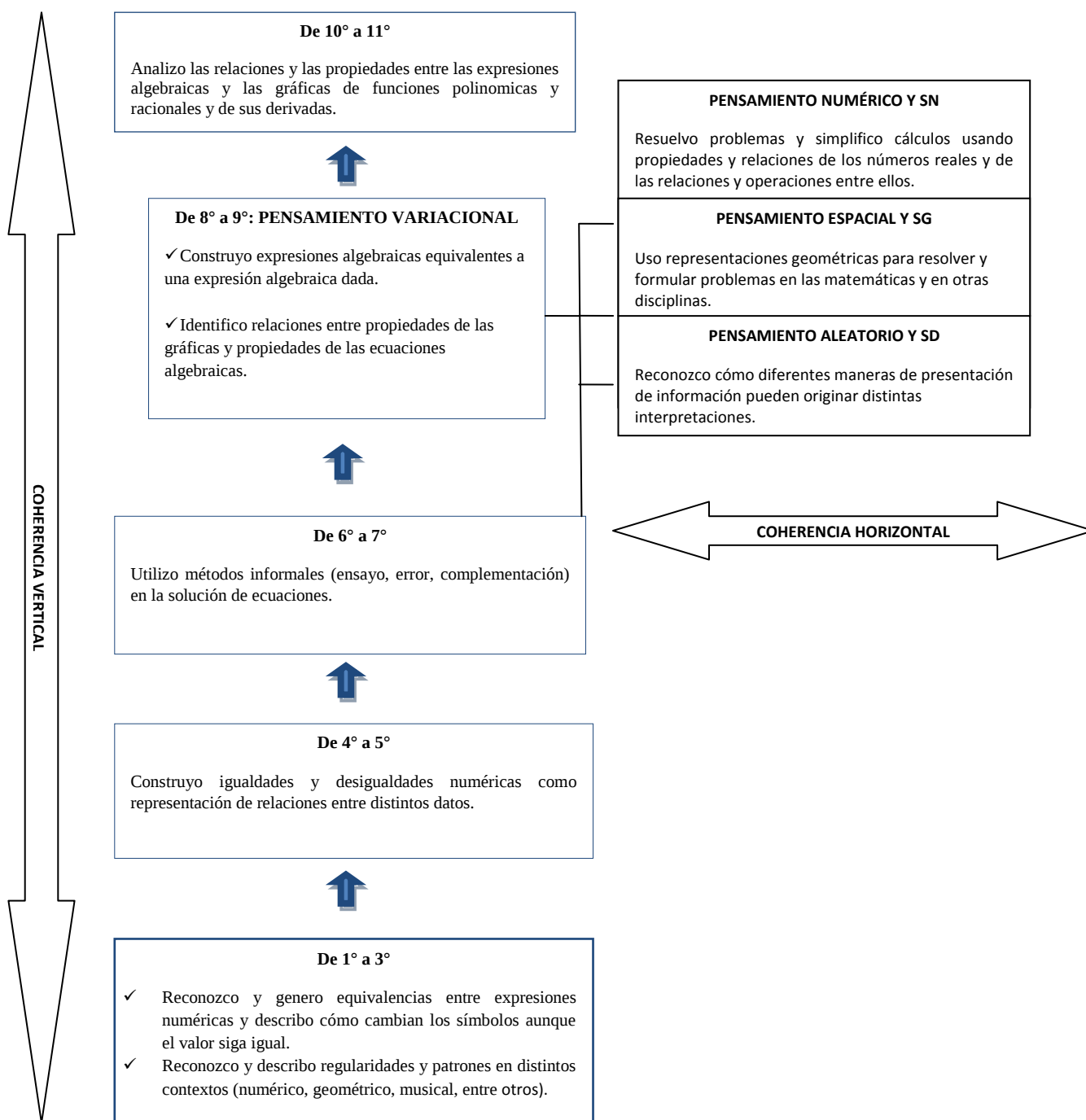
mientras que la Coherencia Horizontal expone la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

De acuerdo a lo planteado anteriormente la coherencia vertical y la coherencia horizontal refieren la complejidad conceptual y gradual del aprendizaje de las matemáticas, a la vez permiten ver que los conocimientos que tiene el estudiante se han ido construyendo sobre conceptos y saberes previos, los cuales son fundamentales para la adquisición de nuevos conocimientos.

Teniendo en cuenta el propósito de este trabajo y en atención al diseño de la propuesta de aula se toma en consideración los estándares que se encuentran en el conjunto de grados de octavo y noveno, ya que es aquí donde está presente la enseñanza de los sistemas algebraicos y analíticos de los cuales hacen parte las ecuaciones.

Lo anteriormente mencionado se indica en la Figura 1, un ejemplo de las relaciones para un estándar de los grados 8^o y 9^o teniendo en cuenta que son los grados objeto de estudio:

Figura 1. Esquema: Coherencia horizontal y vertical de los Estándares seleccionados



2.3 Perspectiva matemática

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones de primer grado, no solamente se encuentran mediados por factores de tipo didáctico e histórico, sino que a su vez están íntimamente permeados de la epistemología del concepto matemático o en términos generales, de la naturaleza del objeto en cuestión. Es por esta razón, que a continuación se plantea algunos aportes teóricos sobre ecuaciones de primer grado con variable real, desde la noción de igualdad, las relaciones de equivalencia y desde un concepto más formal de ecuación.

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que en este apartado toma como referencia algunos elementos formales de la teoría matemática, involucrados en el concepto de ecuaciones de primer grado; los cuales llevan a reflexionar acerca de los aspectos más importantes que movilizan la conceptualización de ecuación como objeto matemático.

2.3.1 Noción de igualdad y las relaciones de equivalencia

La representación y manipulación de los objetos matemáticos y en si su carácter de formalidad, evocan necesariamente hablar de simbolización; ya que esta permite representar el objeto matemático en el mundo sensible y a su vez manipular y generar diversidad de tratamientos.

Según Pimm (1999), los símbolos matemáticos se caracterizan por cumplir unas funciones específicas, como lo son: la ilustración de las estructuras matemáticas, la estructuración de las manipulaciones, reflexión sobre la disciplina, compacidad y permanencia del pensamiento; además de subrayar especialmente su sentido de significación y equivalencia.

La significación hace referencia al nombramiento, distinción del objeto y su conceptualización, de otra parte la equivalencia caracteriza los símbolos desde lo visible o lo tangible, facilitando de esta manera la manipulación de los objetos matemáticos.

En cuanto a una eficaz manipulación de los objetos matemáticos, es fundamental y necesaria la representación del concepto matemático por medio de símbolos, en el caso puntual de las ecuaciones de primer grado, su simbolización se denota por el símbolo igual ($=$); el cual permite dar cuenta de lo que es igual y adicionalmente como lo plantea Castro y Molina (2007):

Como todo símbolo matemático, el signo igual es la representación de un concepto o idea matemática. Se utiliza para representar una relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que se escriben a ambos lados de dicho signo.

Con respecto al rol que juega el signo igual en una ecuación, es importante hacer una diferenciación entre la conceptualización de igualdad en matemáticas y el símbolo del signo igual; ya que la primera hace referencia a un concepto matemático abstracto, idealista y únicamente asequible a la mente humana, de otra parte el segundo surge de los aportes hechos por el médico Robert Recorde, como respuesta a la necesidad de hacer más fácil su escritura matemáticamente hablando y así evitar escribir la palabra completa “es igual a”; además este permite manipular y establecer un tratamiento al interior de una representación establecida. En general el concepto de igualdad es mediado por la significación, lo que implica que la construcción de su conceptualización no se genera en las matemáticas mismas, sino en un mundo de manipulación sensible.

De acuerdo a lo citado por Prieto de Castro (2007), la igualdad viene a ser la esencia de las matemáticas y la define de una manera muy sencilla en donde intenta relacionar los conceptos más importantes de la misma y su objetivo principal:

La palabra ecuación es sinónima de igualdad, pues una ecuación es una igualdad que debe hacerse válida para los valores adecuados de la incógnita. Esos valores que han de conocerse constituyen la solución de la ecuación.

De otra parte, teniendo en cuenta los importantes aportes acerca de la teoría de conjuntos, hecha por el grupo de matemáticos franceses llamados los Bourbaki en la tercera década del siglo XX, se establece la postura del axioma por extensión, el cual explica el concepto de igualdad desde la teoría y la lógica de conjuntos así:

Sea un conjunto A y un conjunto B, diremos que el conjunto A es igual al conjunto B si y sólo si tiene los mismos elementos, es decir, cuando todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es un elemento de A².

²Aparece gracias a los estudios hechos por Freige (1986) y Zarmelo (1908)

Simbólicamente tenemos que:

$$A = B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)(x \in B \rightarrow x \in A)$$

A partir de la definición de contenencia entre conjuntos, se establece que un conjunto A está contenido en otro B, si todo elemento de A es elemento de B. En forma de proposición, se tiene que:

$$A \subseteq B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$$

De otra parte, La igualdad entre dos conjuntos se puede definir por doble contenencia, es decir, dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En forma de proposición se expresa de la siguiente manera:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B; B \subseteq A)$$

Finalmente se establece que dos elementos de un conjunto son iguales si cumplen la siguiente condición:

$$\forall a, b \in A, \quad a = b \leftrightarrow \left(a < b \wedge b > a \right)$$

A continuación se mencionan tres propiedades fundamentales que se estructuran en lo que se conoce como relación de igualdad, dentro de la teoría de conjuntos.

Sean A, B y C conjuntos, luego se cumple que:

- a) Propiedad Reflexiva $A = A$
- b) Propiedad simétrica Si $A = B$ entonces $B = A$
- c) Propiedad transitiva Si $A = B, B = C$ entonces $A = C$.

De otra parte para definir el concepto de igualdad, desde la relación de equivalencia a continuación se presentan las propiedades que permiten determinar una relación ε sobre un conjunto dado A:

- a) Propiedad Reflexiva: Para todo $a \in A$, $(a, a) \in \varepsilon$ es decir $a \varepsilon a$

- b) Propiedad Simétrica: Para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in \varepsilon$ entonces $(b, a) \in \varepsilon$, por lo tanto si $a \varepsilon b$ entonces $b \varepsilon a$.
- c) Propiedad Transitiva: Para todo a, b y $c \in A$, si $(a, b) \in \varepsilon$ y $(b, c) \in \varepsilon$, entonces $(a, c) \in \varepsilon$. Es decir si $a \varepsilon b$ y $b \varepsilon c$, entonces $a \varepsilon c$.

Seguidamente se presenta un ejemplo citado por Hurtado (2010) que muestra a claridad la relación de equivalencia desde la perspectiva de la igualdad ($=$) entre los grupos numéricos, como lo son: los naturales, los enteros, los racionales entre otros.

Sean $m, n, r, s \in N$ y sea:

$(n, m) \sim (r, s)$ Mediante una relación de equivalencia, entonces

$(n, m) \sim (r, s) \leftrightarrow n + s = r + m$ (Por definición).

- ✓ $(n, m) \sim (n, m) \leftrightarrow m + n = m + n$ (Propiedad reflexiva)
- ✓ $(n, m) \sim (r, s) \rightarrow (r, s) \sim (n, m)$ así $n + s = m + r$, entonces $r + m = s + n$ (Propiedad simétrica)
- ✓ $(m, n) \sim (r, s) \rightarrow (r, s) \sim (o, p) \rightarrow (m, n) \sim (o, p)$ donde o y $p \in N$,
Sean $n + s = m + r$ y $r + p = s + o$, entonces $n + p = m + o$
De esta forma se tendría que: $[(m, n)] = \{(r, s) / (r, s) \sim (m, n)\}$

Finalmente de acuerdo a lo citado por Luque, Mora y Torres (2006) se presentan a continuación la propiedad uniforme tanto en la suma como en la multiplicación de números reales:

Propiedad uniforme de la igualdad respecto a la operación de la multiplicación:

Para todo a, b, c , y d , números reales si:

$a = b$ y $c = d$ entonces $a \times c = b \times d$

Propiedad uniforme de la igualdad respecto de la operación de adición:

Para todo a, b, c y d , números reales si:

$a = b, c = d$; entonces $a + c = b + d$.

2.3.2 Sobre el concepto de ecuación

Desde la teoría de ecuaciones, se plantea que una ecuación polinómica es aquella que se puede expresar de la siguiente forma general:

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$$

Donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son coeficientes numéricos cualesquiera pertenecientes al dominio de los reales; n es un número entero el cual indica el grado de la ecuación, siempre y cuando $n > 0$ y $a_n \neq 0$, finalmente las raíces del polinomio son los valores que puede tomar, tal que al reemplazar en la ecuación polinómica se obtiene $0=0$.

Zill y Dewar (2000), plantean que para las ecuaciones de una sola variable, se hace uso de la siguiente notación desde una definición formal:

Sean $p(x)$ y $q(x)$ expresiones de una sola variable x , una ecuación está definida como una proposición abierta de la forma $p(x) = q(x)$. Si se cumple la igualdad para cualquier perteneciente al dominio de la variable, se dice que la ecuación es una identidad. Si por el contrario, hay por lo menos uno en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, entonces se dice que es una ecuación condicional.

Con la finalidad de esclarecer a fondo la distinción entre una ecuación idéntica y la condicional, en la siguiente tabla se presenta un ejemplo de una ecuación como identidad y otro que hace alusión a una ecuación condicional.

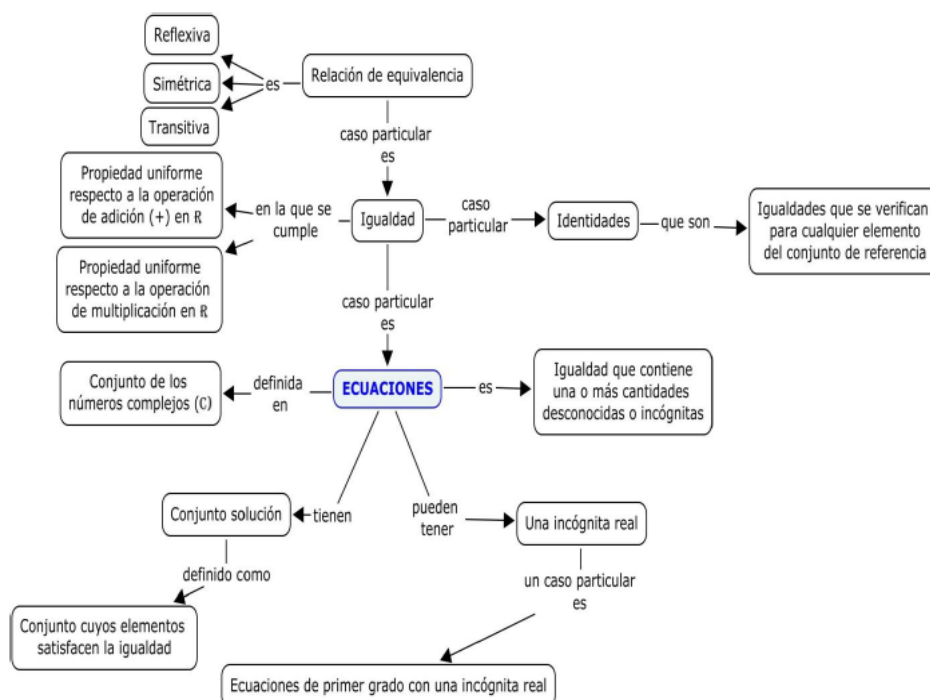
Tabla 1. Ecuación idéntica y ecuación condicional

Ecuación como identidad	Ecuación condicional
$\frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2x + 1$ En donde x representa todos los números reales, excepto $x = \frac{1}{2}$	$4x - 1 = 2$ Se tiene que 3, aunque está en el dominio de la variable, este no satisface la ecuación, puesto que $4(3) - 1 \neq 2$

En cuanto a la definición de ecuación, se plantea que es una igualdad en donde están presentes una o varias incógnitas, denotadas generalmente por las letras (ejemplo: x, y, z), las cuales toman valores en el conjunto de los números reales (Lopez y Rodríguez, 2013). Es importante tener presente que la definición de una ecuación lineal está vinculada estrechamente a su estructuración matemática y conceptual, a las relaciones de equivalencia y propiedades de la igualdad.

Teniendo en cuenta esta última parte, se presenta en la Figura 2 un esquema general elaborado por Hurtado (2013) acerca del concepto de ecuación y todos los elementos matemáticos involucrados en el mismo; el autor alude que dicha estructuración matemática evoca en el caso particular de una ecuación de primer grado con variable real, en donde se presenta una conexión e interrelación entre conceptos matemáticos, que conllevan a una lógica ecuacional; es decir que una ecuación de primer grado con variable real solo puede tener una solución dentro del conjunto de los números reales.

Figura 2. Concepto de ecuación y todos los elementos matemáticos involucrados en el mismo



Fuente. Hurtado (2013; 53)

De acuerdo a lo expuesto hasta este punto con relación a la noción de igual en el caso particular del concepto de ecuación; se puede decir que la igualdad representa una identidad entre los elementos de un conjunto dado; además las propiedades de equivalencia como lo es la propiedad uniforme y simétrica, permiten que se pueda llegar a obtener ecuaciones equivalentes y poder llegar a demostrar mediante procesos lógicos la validez de la igualdad entre dos expresiones de tipo funcional.

2.4 Perspectiva didáctica

El tema de las dificultades en el aprendizaje del álgebra y en el caso particular de las ecuaciones lineales, llevan dentro de la realidad educativa, a pensar en el caos que presentan la mayoría de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra; lo cual ha generado problemas relacionados con la extrapolación de procesos netamente numéricos a procesos formales en las expresiones algebraicas, la falta de significación simbólica, el debate entre la variable o la incógnita, la ecuación vista como un resultado mas no como un proceso y entre otras cosas, los tradicionales métodos de enseñanza, que en su mayoría omiten la importancia de incluir dentro de sus actividades, elementos que movilicen un acercamiento al objeto matemático de forma total mas no parcializada.

Teniendo en cuenta los propósitos presentados en la propuesta de aula, acerca de la enseñanza de ecuaciones lineales en estudiantes que requieren una educación diferencial, se toma como referencia en el siguiente apartado, algunas de las principales perspectivas investigativas en el campo de la didáctica y la educación matemática, en lo que concierne a las frecuentes dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar y de las ecuaciones lineales; además se hace especial énfasis en el trabajo citado por Gallardo y Rojano (1988), en donde las dificultades son categorizadas en unas áreas de investigación; las cuales han sido objeto de estudio en didáctica de las matemáticas.

Desde la misma practica en el aula y teniendo en cuenta el sin número de experiencias como profesores de matemáticas; es posible decir que el aprendizaje del álgebra en estas últimas décadas se ha visto fundamentado desde dos puntos de vista, los cuales implican hablar desde lo procedimental y estructural; es decir la llamada transición entre lo aritmético y lo algebraico.

Con respecto a lo expuesto, Kieran (1992) cita a Sfard (1991) quien alude que las nociones matemáticas abstractas son concebidas desde dos maneras totalmente diferentes, como es en el sentido estructural (objeto matemático formal) y en el sentido operacional (procesos desde la manipulación numérica); en donde la maduración de la parte operativa dentro de los procesos aritméticos juega un papel fundamental, que puede garantizar en una mayor parte la apropiación de la simbología algebraica, mediante la manipulación y designación formal de objetos algebraicos. Esto implica, que el paso de lo aritmético a lo algebraico, según el autor sea un proceso paulatino y con dificultad que no surge de la noche a la mañana, lo que invita a la reflexión de los profesores y entes educativos, con relación a las prácticas en el aula, al sentido de la evaluación, la importancia de lo que se enseña y en general el enfoque actual de los currículos en la escuela.

Tall (1989) considera que la manipulación algebraica es considerada una fuente de conflicto; ya que para la mayoría de los estudiantes es difícil ver el objeto matemático en su totalidad, e identificar las operaciones presentes en un nivel formal del álgebra (Ejemplo: simplificar términos semejantes en expresiones algebraicas, factorizar, racionalizar denominadores etc.), siendo esto muy diferente a los hábitos netamente algorítmicos de la aritmética (operaciones básicas matemáticas). Lo anterior, permite pensar que el aprendizaje del álgebra de muchos estudiantes, se está quedando o viendo interrumpido entre los dos puentes presentados hasta el momento, en donde los niveles académicos son independientes de los problemas propios de la contextualización del saber.

Las dificultades en el aprendizaje del álgebra, se pueden explicar a partir de algunas conceptualizaciones matemáticas, como lo es el caso de las ecuaciones lineales; las cuales pueden ser vistas desde lo aritmético y desde lo algebraico, pero el problema radica en que no siempre los procesos pueden ser generalizados; ya que las ecuaciones de tipo algebraicas son consideradas como entes estructurales, en donde los hábitos operacionales difícilmente entran a jugar parte.

Cuando se trata de modelar una situación problema por medio de una **ecuación lineal** de la forma $a \pm b = cx \pm d$, Filloy y Rojano (1984) aluden que es necesario para los estudiantes empezar a pensar en operaciones avanzadas, en donde no solo se operan los números sino también las expresiones algebraicas; además también es importante tener presente que hay acciones dentro de los procesos que implican un sentido de dualidad con respecto a la igualdad y

a la noción de equivalencia (acciones que se llevan a cabo en ambos miembros de la igualdad). Con respecto a lo anterior, la resolución de una ecuación algebraica (ocurrencia de la x en ambos miembros de la ecuación) puede conducir a cortes de tipo didáctico, los cuales surgen de la necesidad de operar la incógnita.

Rojano y Gallardo (1988) aluden que estudiantes de un nivel alto, perciben de entrada dificultades para solucionar este tipo de ecuaciones, puesto que aluden de manera verbal que se requiere de un método específico para su solución; de otra parte los estudiantes con un bajo rendimiento escolar no logran encontrar diferencia entre una ecuación aritmética y no aritmética, debido a que estos se niegan a salir de campo netamente aritmético y continúan empleando métodos de tanteo, seguidos de generalización de procesos.

Con relación a las dificultades que emergen en el aprendizaje de las ecuaciones lineales, Kieran y Filloy (1989) aluden que los hábitos aritméticos en estudiantes de niveles bajos de aprendizaje, generan que estos no puedan dar un sentido a ecuaciones de tipo algebraicas, tales como $2x + 3 = x + 4$, lo cual es contrario a la apreciación que suelen tener al momento de solucionar ecuaciones más sencillas de tipo $2x + 3 = 7$. Lo anterior es uno de los efectos, causados por el poco o nada de manejo de las propiedades de equivalencia, a su vez por la visión errada de igualdad, como un resultado mas no como un proceso de tipo estructural; además de las dificultades en la concatenación³ en expresiones algebraicas, la inadecuada jerarquía de las operaciones matemáticas básicas, algoritmos sobre cantidades numéricas y no sobre las expresiones formales, falencias en la designación de simbolismos algebraicos entre otros.

Adicionalmente a lo anterior, se puede decir que una de las mayores dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones lineales, radica en el tratamiento del paso de lo aritmético a lo algebraico; lo cual según Brousseau es visto como una ruptura o corte de tipo didáctico⁴, también se toma en consideración, de que los errores en el álgebra elemental son el resultado de la extrapolación o generalización inadecuada de los conceptos matemáticos, lo cual se debe al

³En álgebra la concatenación hace alusión a la multiplicación, y particularmente a los estudiantes les cuesta dificultad establecer una interpretación de una expresión algebraica, a manera de ejemplo se tiene que para estos no es lo mismo $4b$ y $4 \times b$.

⁴La palabra corte o ruptura se emplea para enfatizar el hecho de que el obstáculo en cuestión (el operar lo representado) se localiza en la frontera entre dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico (citado por Gallardo & Rojano); es decir, que se hace necesario romper con hábitos adquiridos en la aritmética para poder dar paso a las abstracciones inmersas en el tratamiento algebraico; sin embargo se hace claridad en que esta transición debe ser la extensión de los objetos aritméticos al universo de los objetos algebraicos.

uso de hábitos o estrategias que aunque pueden ser válidas en la aritmética, no siempre lo son para los procesos formales del álgebra.

De otra parte es importante tener en cuenta que las dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético al algebraico pueden ser observadas de forma amplificada en los sujetos con un bajo rendimiento escolar (nivel bajo) y con un rendimiento alto (nivel alto). De esta manera los estudiantes con un nivel alto, proporcionan elementos importantes para el análisis de los fenómenos de la transición de los procesos aritméticos a los procesos algebraicos, de otra parte los estudiantes del nivel bajo o cero son considerados claves para determinar los elementos que emergen de los procesos de asimilación y comprensión de conceptos.

En general las dificultades en el aprendizaje del álgebra y el caso particular de las ecuaciones lineales, están mediadas por unas categorías o áreas de dificultad; en donde la primera de ellas hace relación a la *dualidad de las operaciones*, en donde el estudiante no logra aceptar una expresión algebraica como resultado, si no que termina por cerrar un proceso mediante una acción inmediata, es por esta razón que el estudiante en muchas ocasiones no se percata por ejemplo, que una variable toma un valor numérico dentro de una ecuación. En segunda instancia, se encuentra la dificultad en *la lectura de una operación*; ya que se generaliza el hábito aritmético de hacer una lectura vertical, lo cual viene a ser un obstáculo en el álgebra; ya que en este último domina la lectura horizontal operativa.

De otra parte *la inversión de las operaciones*, hace referencia a la dificultad en el estudiante para consolidar una operación inversa, como por ejemplo: Confusión al momento de multiplicar o dividir; lo que conlleva al uso inconsciente de reglas primitivas de ensayo y error, como por ejemplo para determinar el valor de la incógnita en la siguiente ecuación aritmética opta por dividir los números incorrectamente, en el momento en el cual se percata de su error, invierte nuevamente la operación para obtener la respuesta correcta: $12x = 48$

Acción 1: $12 \div 48 = 0.25$

Acción 2: Comprueba y se percata de su error

Acción 3: invierte la operación $48 \div 12 = 4$

En cuanto a la naturaleza dual de la igualdad, se muestra dos tipos de perspectivas acerca del signo igual; en donde desde la aritmética se considera como un separador de una

operación que finalmente lleva a un resultado, mientras que en el álgebra el signo igual se visualiza tanto desde un sentido operativo, como de equivalencia. Asociado a lo anterior, se encuentran las dificultades que presentan algunos estudiantes con el manejo operativo de los números enteros positivos y enteros negativos, en donde una gran dificultad se presenta en los números 1 y 0 (números especiales); ya que por ejemplo se tiende a confundir y a generalizar la identidad $A \cdot 1 = A$ con la identidad $A + 0 = A$; este tipo de situaciones se debe por lo general a que los números enteros positivos se caracterizan por relacionarse directamente con fenómenos concretos de la medición, contrariamente a los enteros negativos se les considera secundarios y estrictamente ligados a los resultados de tipo operativo; además de igual manera se presentan casos en donde se niega que la solución de una ecuación sea cero, aludiendo la representación de la ausencia de un valor numérico.

Todo lo expuesto hasta este punto, viene a ser el resultado de estrategias inventadas por los estudiantes para dar solución a un problema y a su vez los recursos y estrategias que emplean los profesores para la enseñanza del álgebra. Es de esta manera, que se encuentran hábitos que hacen referencia a los *métodos primitivos* los cuales son empleados por algunos estudiantes para llevar a cabo procesos de tanteo y responder de alguna manera a la negación de procesos de tipo algebraico. Para finalizar se encuentran los *métodos escolarizados*, que para la enseñanza de ecuaciones aritméticas tales como $x \pm A = B$ y $Ax = B$, se emplean esquemas de inversión numérica; los cuales permiten al estudiante en un primer momento hacer una lectura verbal de la situación (lectura en lenguaje natural), mas no lograr hacer una relación a nivel algebraico, contrariamente para trabajar ecuaciones en donde se hace necesario operar varias incógnitas miembro a miembro de la igualdad este tipo de esquemas no funcionan; ya que estos están direccionados a la operatividad netamente numérica.

Es importante hablar de igual manera de que, una de las muchas dificultades que se presentan en la resolución de un problema matemático, radica en la diferencia entre un contenido aritmético y un contenido algebraico; es así como hasta este punto nuevamente el arraigamiento o costumbre de procesos aritméticos se hacen presentes. Las posiciones, en cuanto a los procedimientos que desarrollan los estudiantes en la resolución de un problema matemático, se encuentran divididas, ya que hay situaciones verbales que pueden ser resueltas mediante alternativas tanto aritméticas como algebraicas, sin embargo este hecho conlleva a la generalización de procesos para todo tipo de situación, a una irremediable incapacidad de

traspasar los límites que unen lo procedimental con lo formalmente estructural; esto se puede explicar mediante el hecho de que la mayoría de los estudiantes se les dificulta asumir que las expresiones algebraicas puedan ser operadas, que existen reglas y propiedades que rigen la resolución de una ecuación algebraica, que la variable siempre representa un valor numérico entre otros aspectos.

En cuanto a la naturaleza de lo aritmético y de lo algebraico en situaciones de tipo verbal, se han generado preguntas en torno a esta problemática, las cuales buscan elucidar el tipo de errores que comenten algunos estudiantes a la hora de dar solución a un problema o el tipo de obstáculos que se originan en la misma situación. Puig y Cerdán (1990) citan Wagner y Kieran (1989), quienes plantean preguntas que hacen referencia a: ¿qué es un problema verbal algebraico?, ¿existen problemas con más potencialidad algebraica que otros? ¿Qué métodos de resolución propician que un problema sea más algebraico que aritmético o viceversa?

Las respuestas a este tipo de preguntas, permiten tener un panorama más amplio acerca del tipo de preguntas que se les formula a los estudiantes en la clase de matemáticas, además de los contenidos involucrados, las dificultades en el aprendizaje y los posibles obstáculos en los procesos de verbalización y traducción de enunciados dados en lenguaje natural, siendo todo lo anterior aspectos importantes en la transición de la aritmética al álgebra.

Sin duda alguna el sistema de representación que requiere cada problema, es clave para su solución; ya que por ejemplo los problemas algebraicos requieren de manera inicial una descripción para de manera posterior llegar al cálculo (Socas, 1995). De otra parte Kieran (1992) alude en sus estudios que un problema algebraico es aquel que implica una relación matemática, en donde por ejemplo el signo igual “=”, no es sinónimo de efectuar una operación aritmética, si no que este representa un equilibrio entre lo que se encuentra al lado derecho e izquierdo de la igualdad. Para finalizar una de las dificultades más marcadas en algunos estudiantes, es la imposibilidad de proponer una situación problema a partir de una expresión algebraica dada (ecuación lineal), esto se manifiesta al momento que el estudiante presenta necesidad de encontrar significado a la incógnita, antes de tomar la decisión de relacionarla en un contexto determinado; es decir que se da una interacción entre lo sintáctico y lo semántico.

Capítulo 3.

Las Ecuaciones Lineales con una Variable Real en Estudiantes que requieren una Educación Diferencial

Capítulo 3. Las Ecuaciones Lineales con una Variable Real en Estudiantes que requieren una Educación Diferencial

En este capítulo se presentan la caracterización de la población, el diseño e implementación y análisis de los resultados de la propuesta. Para caracterizar la población objeto de estudio en este trabajo, se aplica un instrumento cuyo propósito es la recopilación de información; esta indagación se hace a través de una encuesta y una prueba diagnóstica de matemáticas, la cual es realizada a tres estudiantes de la Institución Educativa Inmaculada Concepción y a tres estudiantes del Colegio Bolívar (incluidos los dos estudios de caso) de grado noveno, quienes se identifican por sus aprendizajes diversos, lo cual es una particularidad para su selección.

El instrumento se divide en siete áreas de indagación, las cuales a su vez se dividen en dos partes, en donde la primera se refiere a la información acerca del estudiante, asociada tanto al aspecto académico, social y entorno familiar y en segunda instancia se presenta el área de indagación número siete, referente a los conocimientos y competencias matemáticas (prueba diagnóstica de matemáticas), la cual pretende evaluar conocimientos previos sobre procesos involucrados en patrones de variación lineal, en el concepto de igualdad en expresiones equivalentes y resolución de situaciones problemas. Esta prueba se compone de tres situaciones, en donde cada una de ellas trata de relacionar las características más importantes de cada uno de los procesos mencionados con anterioridad.

Finalmente se presenta la propuesta de aula, conformada por tres situaciones las cuales proponen la movilización del concepto de la ecuación lineal con variable real, que parten de la variación hasta llegar a la conceptualización de la misma, en estudiantes que requieren una enseñanza diferenciada. Para la aplicación de cada una de las situaciones se hacen unas adaptaciones para el aprendizaje relacionadas con recursos de tipo material y discursivo (para el caso del estudiante invidente) y recursos de carácter discursivo, inferencial e instruccional (para el caso del estudiante con dificultad de aprendizaje). De manera posterior, se presentan los resultados y los análisis de resultados, con relación a los desempeños esperados.

3.1. Caracterización de la población

En este apartado se presenta la caracterización de la población, a través del diseño e implementación del instrumento, el cual está conformado por siete áreas de indagación las cuales tienen como objetivo, permitir compilar información sobre aspectos educativos, personal- familiar, social y de competencias algebraicas relacionadas con patrones de variación lineal, concepto de igualdad en expresiones equivalentes, solución de ecuaciones de primer grado con variable real, formulación de problemas. Lo anterior con el propósito de caracterizar la población objeto de estudio, la cual se describe más adelante con base en los resultados obtenidos a través del instrumento.

3.1.1. Áreas de indagación personal del instrumento

Este instrumento está diseñado desde 7 áreas de indagación, en donde se presentan a continuación seis de ellas, que responden a las características del contexto escolar y familiar del estudiante y el área número siete que corresponde a los conocimientos y competencias matemáticas :

I Participación del estudiante en las actividades de la vida escolar: En esta primera área, juega un papel fundamental la información suministrada por un grupo de profesores, acudientes y el mismo estudiante; quienes en conjunto y/o de manera individual proporcionan datos básicos de identificación, además hace un acercamiento del historial académico del estudiante hasta el nivel escolar que se encuentra en la actualidad, lo que facilita identificar años reprobados durante su escolaridad, calificaciones y observaciones de los profesores en áreas principales como lenguaje y matemáticas, apoyos recibidos en sus procesos de enseñanza-aprendizaje.

II Actividades de rutina sencilla y compleja: Alude a hábitos de estudio y organización del estudiante en su vida escolar; tal como manejo de la agenda, cronogramas de trabajo y tiempo empleado para tareas en horarios extracurriculares.

III Entorno Familiar: Incluye información acerca del nivel de escolaridad de los acudientes y las formas de ayuda que estos proporcionan al estudiante en el proceso escolar.

IV Experiencias, gustos e intereses del estudiante: identifica información sobre la disposición para el trabajo en grupo y a su vez el sentido de autonomía en las actividades tanto escolares como en su vida diaria. Esta última parte hace referencia a intereses no asociados a lo académico del colegio

V Historia terapéutica/ Planes de apoyo escolar y extracurricular: interroga acerca de la asistencia del estudiante a programas de psicología, terapia ocupacional, fonoaudiología, psiquiatría, tutorías de maestros. También recopila información sobre los planes de apoyo que la institución proporciona al estudiante y el nivel de afinidad e interés de este, por dichos apoyos

VI Actividades de movilidad en la vida escolar: Este punto pregunta por las características del desplazamiento del estudiante involucradas en las diferentes actividades de la vida escolar, (salón de clase, espacios deportivos y recreativos), descripción y apoyo que brinda el docente en estos desplazamientos o actividades con énfasis manual y artístico.

VII Conocimientos y competencias matemáticas: Este último ítem es posible, gracias a la implementación de pruebas preliminares que hacen un acercamiento al concepto de ecuación lineal con variable real y a los elementos conceptuales de variación, posteriormente permiten identificar a partir de ciertas categorías (patrones de variación lineal, concepto de igualdad en expresiones equivalentes, solución de ecuaciones de primer grado con variable real y formulación de problemas) debilidades y fortalezas matemáticas presentes en el aprendizaje de los estudiantes.

3.1.2 El Instrumento

El instrumento brinda elementos para realizar la caracterización de la población, a partir de las seis áreas de indagación que tratan de reunir información acerca del estudiante; asociada tanto al aspecto académico, social y entorno familiar. En segunda instancia se encuentra el área de indagación número siete, referente a los conocimientos y competencias matemáticas (prueba diagnóstica de matemáticas)⁵, la cual pretende identificar los conceptos y procesos matemáticos previos que se involucran en el aprendizaje de una ecuación lineal. La recolección de los datos se llevó a cabo por medio de una entrevista, realizada a seis estudiantes;

⁵ Ver anexo 2

de los cuales los Estudiantes 1, 2, y 3 forman parte de la Institución Educativa Inmaculada Concepción de carácter oficial y los Estudiantes 4, 5, y 6 pertenecen al Colegio Bolívar, Institución de carácter privado, de los cuales el Estudiante 1 y el Estudiante 4 son seleccionados como dos estudios de caso.

A continuación se presenta en su totalidad el instrumento⁶ denominado: “Caracterización del estudiante para el diseño de una propuesta de aula, sobre ecuaciones lineales con variable real”.

El Instrumento:

“Caracterización del estudiante para el diseño de una propuesta de aula sobre ecuaciones lineales con variable real”

Cuadro 1. Participación del estudiante en las actividades de la vida escolar

Datos generales

Nombre del estudiante	
Edad	Fecha de nacimiento
Nombre del Padre	
Nombre de la Madre	
Número de hermanos	
Establecimiento Educativo	
Sede	
Barrio o Comuna	
Grado	Fecha
Área asignada	

B.

Nombre del docente
Título profesional
Área asignada
Director de grupo Sí____ No____

C. Historia escolar y aprendizaje actual (académica)

Cantidad de años de repitencia escolar y grados repetidos

Grados reprobados Sí____ No____	Cuáles y motivo o causas de la pérdida de año escolar

¹Instrumento diseñado en el Marco del Proyecto, bajo la asesoría de las profesoras Ligia Amparo Torres/ Jaqueline Cruz

⁶ Ver anexo 1: Orientaciones para la aplicación del instrumento

D. Calificaciones finales por grado terminado en las áreas de Lenguaje-Matemática ¹

GRADO ESCOLAR	LENGUAJE	MATEMÁTICAS	OBSERVACIONES DE LOS MAESTROS
1°			
2°			
3°			
4°			
5°			
6°			
7°			
8°			
9°			

E. Observaciones de los maestros acerca del aprendizaje del estudiante en el grado actual**Área de conocimiento****Lenguaje**

OBSERVACIONES	Descripción de las ayudas que el maestro realiza para el aprendizaje del niño

¹Esta información reposa en el archivo e historial del estudiante en la secretaría de la Institución

Observaciones de los maestros acerca del aprendizaje del estudiante en el grado actual**Área de conocimiento****Matemáticas**

OBSERVACIONES	Descripción de las ayudas que el maestro realiza para el aprendizaje del niño

F. Observaciones generales de los maestros⁷**Educación Básica Secundaria**

PREGUNTA	MAESTRO DE LENGUAJE	MAESTRO DE MATEMÁTICAS
¿Cuál es su preocupación actual, en relación con el aprendizaje del estudiante?		

⁷Encuesta realizada por Carvajal y Perdomo (2013).

Observaciones del estudiante

II. Actividades de rutina sencilla y compleja

¿Empleas una agenda diaria de trabajo? (Para tareas, trabajos pendientes, organización de su tiempo) Si _____ No _____ Algunas veces _____ Nunca _____ No tiene agenda _____ Fundamentalmente para: _____	¿En tu institución educativa, cuentas con un espacio en el cual se te permita avanzar en tareas y trabajos escolares? Si _____ No _____ Observación:	¿Eres ordenado y organizado en la toma de apuntes en diferentes aspectos de tu vida escolar? si _____ No _____ Algunas veces _____ Nunca _____
---	---	--

III. Entorno familiar

Composición familiar

<i>Formación académica:</i>
Marque el ultimo nivel de educación: Padre: Primaria____ Secundaria____ Técnico____ Universitario____ Maestría____ ¿otro?____ ¿cuál? ____ Madre: Primaria____ Secundaria____ Técnico____ Universitario____ Maestría____ ¿otro?____ ¿cuál? ____ ¿Qué clase de ayuda recibe en su casa, que garantice el progreso académico, en cuanto a la realización de tareas y trabajos escolares?

IV: Experiencia, gustos e intereses personales del estudiante

Nivel social

¿Te gusta estudiar en grupo, solo o de las dos formas?

¿Cuándo trabajas en grupo, tienes en cuenta la perspectiva del otro?

Escribe las actividades que compartes con tus compañeros

Identificación de intereses del estudiante (Actualmente)

V. Historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

Informe terapéutico o ayuda especializada de rehabilitación

El estudiante ha asistido a:	Si	No	Motivo	Que cambios ha tenido a partir de su asistencia a las terapias
Psicología				
Terapia ocupacional				
Fonoaudiología				
Fisioterapia				
Otro				
Observaciones:				

Apoyo escolar y extracurricular

Tutorías académicas	colegio	Fuera del colegio	Motivo	Cambios a partir de la tutoría
Asistencia a tutoría	Si___ no___	Si___ no___		

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

Pregunta	Descripción del docente	Descripción del apoyo
¿El estudiante se desplaza caminando o usando alguna ayuda técnica? (Silla de ruedas, Muleta, Bastón)		
¿El estudiante hace actividades manuales relacionadas con la escritura, lectura, uso de herramientas escolares (Escritura de Braille)?		

VII: Conocimientos y competencias matemáticas

En relación con las actividades desarrolladas en clase, responder cada ítem teniendo en cuenta las preguntas: ¿Qué hace?, ¿Cómo lo hace?, ¿Qué ayuda o apoyo ha usado usted como profesor para que el estudiante realice la actividad?.

Conceptos y procesos matemáticos que se involucran en el aprendizaje de una ecuación lineal

Pregunta	Descripción del docente	Descripción del apoyo
Patrones de variación lineal		
¿El estudiante reconoce patrones de variación y cambio involucrados dentro del concepto de ecuación lineal?		
¿El estudiante reconoce y describe regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, rítmico, entre otros)?		
¿El estudiante construye una expresión algebraica a partir de un patrón determinado?		
Concepto de igualdad en expresiones equivalentes		
¿El estudiante aplica el concepto de igualdad al momento de resolver una ecuación lineal?		
¿El estudiante construye e identifica expresiones algebraicas equivalentes?		
¿El estudiante propone una situación problema dada una igualdad entre dos funciones?		
Solución de ecuaciones de primer grado con variable real		
¿El estudiante emplea el inverso aditivo y multiplicativo para la solución de una ecuación lineal?		
¿El estudiante emplea el método del tanteo para resolver una ecuación lineal sencilla?		
¿El estudiante opera correctamente números enteros, racionales en la solución de una ecuación lineal?		
¿El estudiante identifica la solución de una ecuación lineal, a partir de su representación gráfica?		

3.1.3. Implementación

El instrumento fue implementado para tres estudiantes de la Institución Educativa Inmaculada Concepción (grado noveno) y tres estudiantes del colegio Bolívar (grado noveno), estos seis estudiantes son seleccionados con la finalidad de mostrar los tipos de diversidad en las aulas de clase con respecto no solo a sus aprendizajes sino también al tipo de contexto social

y económico, de otro lado se pretende validar⁸ el instrumento en cuanto a su aplicabilidad. Es importante anotar que el instrumento tuvo algunas modificaciones relacionadas con algunas preguntas que no fueron claras para todos los estudiantes.

Posteriormente se eligen dos estudiantes para aplicar el diseño de la propuesta de aula, en donde se tiene en cuenta el marco de las necesidades educativas especiales; uno de los estudiantes tiene como diagnóstico médico ceguera⁹ adquirida a los siete años por una enfermedad denominada Retinopatía y el otro estudiante tiene como diagnóstico médico o terapéutico un déficit de atención y una dificultad de aprendizaje¹⁰ determinada a los trece años, momento en el cual ingresa al colegio cursando el grado séptimo, dicha dificultad está asociada con su ritmo de trabajo y las falencias que ha presentado en gran parte de su escolaridad en la parte lingüística y numérica. Posteriormente la encuesta realizada para conocer aspectos académicos, sociales y entorno escolar, se hizo en un tiempo aproximado de una hora y media, para cada estudiante; en cuanto a la prueba diagnóstica de matemáticas, se empleó en cada situación dos horas por sesión.

3.1.4. Resultados y Análisis de los resultados, apartados (I, II, III, IV,V y VI)

A continuación se presenta un análisis de la parte inicial del instrumento; el cual está conformado por las seis áreas de indagación expuestas anteriormente y tomando como referencia los resultados de la implementación llevada a cabo en los seis estudiantes, de los cuales se encuentran incluidos los dos estudios de caso.

Estudiante 1 (IC)¹

I participación del estudiante en la vida escolar

Datos generales:

⁸La validez del instrumento es posterior a su aplicabilidad, lo cual implica que este debe estar mediado a las condiciones generales de la población, debe ser un instrumento que brinde claridad en las preguntas y el tiempo que se requiere para obtener la información no puede ser extenso.

¹(IC) Institución Educativa Inmaculada Concepción. Estudiantes 1,2,3

⁹Enfermedad diagnostica Retinopatía enfermedad no inflamatoria del ojo.

¹⁰Estudiante remitido a servicios estudiantiles y apoyo en hábitos de estudio, asignado a plan modificado en las áreas de Español, Matemática y Química.

Joven de 16 años, sexo masculino, vive con sus padres y su hermana, estudia actualmente en la Institución Educativa Inmaculada Concepción en el municipio de Ginebra. Reprueba grado segundo, por motivos de salud (perdida de la vista) su promedio en el área de Matemáticas de 5° a 9° es alto.

Y actualmente es nivel alto, su promedio en Lenguaje de 5° a 9° es básico y actualmente es básico.

Observaciones de matemáticas y lenguaje:

El profesor de lenguaje manifiesta que el estudiante registra sus apuntes en sistema Braille permanentemente, es atento y continuamente pregunta y solicita aclaraciones en los temas vistos, su rendimiento en el área es básico sus informes escritos son transcritos por un familiar para ser presentados al docente. El profesor de matemática expresa que el joven es activo en clase, siempre genera preguntas y pide aclaración ante sus inquietudes posee un excelente cálculo mental y habilidad memorística, su rendimiento en el área es alto, el grupo lo acepta y respeta su condición lo cual favorece el proceso académico.

En cuanto a la ayuda que el maestro realiza para el aprendizaje del estudiante, el maestro de lenguaje expresa que se está muy pendiente de sus sugerencias y se le da un tiempo especial para la toma de apuntes. Las ayudas en el área de matemáticas, son de carácter individual, depende de la profundización que requiera cada tema, para luego integrarlo al grupo, se le hace acercamiento de tipo matemático por medio del tacto, especialmente en las palmas de la mano, uso de material didáctico, con el objetivo de aproximarlos a la realidad.

II Actividades de rutina sencilla y compleja

El estudiante es organizado con su toma de apuntes, ya que esta le sirve para organizar su tiempo de tareas y actividades deportivas que practica. En el colegio cuenta con espacios en los cuales se les permite avanzar en tareas y trabajos escolares en forma individual, especialmente en las áreas de matemática y educación física, el estudiante se caracteriza por llevar un orden en la toma de apuntes.

III Entorno familiar

Su padre tiene estudios de primaria y su madre título de bachiller, para las actividades académicas el estudiante cuenta con el apoyo de su mamá para la traducción del Braille, en

determinadas áreas en las que se requiere ver lo escrito, su papá lo orienta en el uso de aplicaciones especiales para invidentes a través de celular (realiza consultas por internet para el desarrollo de sus tareas)

IV Experiencias gustos e intereses personales del estudiante

Le gusta trabajar en grupo, para intercambiar opiniones, compartir especialmente durante el descanso y en la clase de educación física, dentro de sus intereses esta el deporte como un medio para salir adelante y con el cual puede ayudar a su familia económicamente y llevar el nombre de su país en alto.

V Historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

El estudiante asistió a fisioterapia durante un año debido a molestias en la pierna causada por el deporte que practica (Atletismo), también asistió durante un año a tiflogía para la rehabilitación visual (Braille), manejo del ábaco, uso del bastón y tutorías para ser independiente.

El joven asiste en horario extracurricular a tutorías de matemática y educación física, actualmente pertenece al proyecto de inclusión de la institución.

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

El estudiante se desplaza con la ayuda del bastón dentro del colegio, hace uso de la escritura en Braille, utiliza el punzón el cual es lápiz y lapicero.

Estudiante 2 (IC)

I participación del estudiante en la vida escolar

Datos generales:

Joven de 14 años, sexo femenino, vive con su madre y abuelos maternos, hija única estudia actualmente en la Institución Educativa Inmaculada Concepción en el municipio de Ginebra. No presenta ningún grado reprobado. Su promedio en el área de matemáticas de 5º a 9º es básico y actualmente es nivel básico. Su promedio en Lenguaje de 5º a 9º es alto y actualmente continúa siendo alto.

Observaciones de matemáticas y lenguaje:

El profesor de lenguaje refiere que la estudiante participa en clase, cuestiona, aporta intelectualmente, posee habilidades comunicativas, expresándose de manera fluida, falta con frecuencia a clase su rendimiento en el área es alto. El profesor de Matemáticas indica que la estudiante se dispersa demasiado en clase, es responsable en cuanto al cumplimiento de sus tareas, le falta habilidad para resolver situaciones problema, su rendimiento en el área es básico.

En cuanto al plan de ayudas y apoyo para el aprendizaje del estudiante, en lenguaje se le destaca su esfuerzo, a través de estímulos. En el área de matemáticas se le da explicación personalizada ocasionalmente, se le hace refuerzo con talleres y salidas al tablero.

II Actividades de rutina sencilla y compleja

La estudiante hace uso de una agenda para distribuir su tiempo ya que en las tardes recibe clases de música.

III Entorno familiar

Su padre y su madre tienen estudios universitarios, cuenta con el apoyo directo de sus padres y abuelo materno quienes la acompañan en el proceso académico.

IV Experiencias gustos e intereses personales del estudiante

Le gusta trabajar en grupo, ya que sus compañeros le brindan colaboración en lo que ella no entienda, dentro de sus intereses personales está el arte (Música y Pintura), en la actualidad pertenece a una fundación de música, además le gusta compartir tiempo con sus amigos y familiares especialmente con sus abuelos.

V historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

- La estudiante no ha asistido a terapias de ninguna clase.
- Asiste en ocasiones a tutorías de Matemáticas.

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

No requiere de ninguna ayuda para su movilidad en la Institución.

Estudiante 3 (IC)

I participación del estudiante en la vida escolar

Datos generales:

Joven de 14 años, sexo masculino, vive con su madre y un hermano menor, estudia actualmente en la Institución Educativa Inmaculada Concepción en el municipio de Ginebra. No presenta ningún grado reprobado. Su promedio en el área de matemáticas de 5° a 9° es básico y actualmente es nivel básico. Su promedio en Lenguaje de 5° a 9° es básico y actualmente es básico. Se retira dos años de la Institución por cambio de lugar residencia y regresa en grado séptimo.

Observaciones de matemáticas y lenguaje:

El profesor de lenguaje menciona que el estudiante es atento en clase, muestra interés por aprender y comprender los diferentes temas vistos, cuestiona constantemente, le preocupa su tartamudez (Disfemia), trata de corregirlo cuando se expresa, su grafía es poco clara y los rasgos de la letra son muy alargados y diversos, se esfuerza por superar sus dificultades y tiene hábitos de estudio su rendimiento en el área es básico. El profesor de matemáticas expresa que el estudiante demuestra interés por aprender, participa activamente, hace preguntas relacionadas con cada tema para una mayor apropiación de los contenidos, se apoya con sus compañeros de clase para la realización de sus actividades, se le facilita el análisis e interpretación de situaciones problema, su rendimiento en el área es básico.

En cuanto al plan de ayudas y apoyo para el aprendizaje del estudiante, en lenguaje se le ha propuesto realizar ejercicios de caligrafía, lee con él lo que escribe, para aclarar dudas ortográficas, sintácticas y semánticas, sus compañeros de clase respetan su condición ya que en ello se trabaja constantemente. El profesor de matemática brinda acompañamiento en clase ante inquietudes presentadas por el estudiante, al presentar actividades de carácter evaluativo se efectúa retroalimentaciones de los temas para así brindar una mayor claridad de los mismos.

II Actividades de rutina sencilla y compleja

El estudiante no cuenta con una agenda, su tiempo lo distribuye de diferentes formas de acuerdo a sus necesidades.

III Entorno familiar

Su padre y su madre tienen estudios técnicos, no cuenta con el apoyo de sus padres en la realización de sus actividades escolares, expresa que hace uso de libros y el internet para sus consultas y tareas.

IV Experiencias gustos e intereses personales del estudiante

Le gusta trabajar en grupo, se acopla a cualquier tipo de situación y siempre piensa en el bienestar de ambas partes. Su interés actual es el ciclismo, no comparte mucho tiempo con su familia lo cual le genera estados de tristeza.

V Historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

El estudiante ha asistido a terapias de fonoaudiología, asiste irregularmente a tutorías de Matemáticas.

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

No requiere de ninguna ayuda para su movilidad en la Institución.

Estudiante 4 (CB)¹¹

I participación del estudiante en la vida escolar

Datos generales:

Joven de 17 años de sexo masculino, que en la actualidad se encuentra cursando grado decimo en el colegio Bolívar, ubicado al sur de la ciudad de Cali. Tiene cuatro hermanos y no presenta en sus reportes académicos grados reprobados; sin embargo la materia en la que siempre ha tenido dificultad es Matemáticas. Su nota promedio tanto para lenguaje como para matemática se encuentra en el rango de 60%-70%.

Observaciones de matemáticas y lenguaje:

El profesor de lenguaje alude que el estudiante tiene un vocabulario escaso, se le dificulta identificar situaciones de causa y efecto; sin embargo es un estudiante muy dispuesto y participativo. En cuanto al punto de vista del profesor de Matemáticas, su nivel de interpretación

¹¹(CB)Colegio Bolívar. Estudiantes 4, 5, 6.

y análisis es muy bajo, tiene dificultad en sus procesos aritméticos y algebraicos, también cabe destacar que ha respondido perfectamente a la modificación en su plan de matemáticas y esto ha generado un alto nivel de motivación en el mismo y un evidente mejoramiento académico en la materia. Ambos profesores coinciden en que el estudiante tiene un alto nivel de disposición y participación para el trabajo en clase y fuera de la misma.

En cuanto al plan de ayudas y apoyo para el aprendizaje del estudiante, en matemáticas se hace una disminución en el número de ejercicios, ajustes en las preguntas, se le facilita el listado de fórmulas y reglas (esto le permite llevar un orden de los temas vistos en clase y de los elementos más importantes de cada uno de ellos). Tanto para lenguaje como para matemáticas el estudiante asiste activamente a tutorías en horario extracurricular.

II Actividades de rutina sencilla y compleja

Su toma de apuntes y organización son excelentes, adicionalmente el estudiante asiste a tutorías en horario extracurricular y lleva una agenda de trabajo.

III Entorno familiar

Sus padres tienen estudios a nivel universitario, actualmente vive solamente con su papá y recibe apoyo directo del mismo en su casa y también de su hermano mayor.

IV Experiencias gustos e intereses personales del estudiante

Le gusta trabajar en grupo y compartir con los otros; sin embargo es consciente de que es mucho mejor trabajar solo para lograr concentrarse y para que el trabajo rinda más.

Le interesa el bienestar de su familia, cumplir con todas sus actividades académicas, adicionalmente le interesa cuidarse físicamente y siempre verse bien.

V Historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

El estudiante asistió solo por un tiempo corto de seis meses al psicólogo, posteriormente mediante pruebas estandarizadas se le determina una deficiencia de aprendizaje, asociada a los bajos niveles en sus procesos cognitivos, con relación a los rangos normales (escritura, lectoescritura y aritmética). Asiste activamente a los planes tutoriales que ofrece la institución

en horario extracurricular y en la actualidad cuenta con un plan modificado en el área de español, matemática y química.

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

No aplica

Estudiante 5 (CB)

I participación del estudiante en la vida escolar

Datos generales:

Joven de 15 años de sexo femenino, que en la actualidad se encuentra cursando grado noveno en el colegio Bolívar, ubicado al sur de la ciudad de Cali. Tiene tres hermanos y no presenta en sus reportes académicos grados reprobados; sin embargo la materia en la que siempre ha tenido dificultad es Matemáticas. Su nota promedio tanto para lenguaje como para matemática respectivamente es de 68% y 58%.

Observaciones de matemáticas y lenguaje:

El profesor de lenguaje alude que la estudiante tiene un vocabulario escaso, se le dificulta identificar situaciones de causa y efecto, su nivel de esfuerzo se encuentra en un término medio, se distrae con facilidad y es inconstante en la entrega de trabajos y tareas. En cuanto al punto de vista del profesor de matemáticas, su nivel algebraico es bajo; sin embargo tiene un buen manejo de operaciones matemáticas básicas (se le dificulta hallar el cociente con cifras más grandes), opera números enteros y racionales. Siempre se ve interesada y comprometida en las actividades asignadas en clase de matemáticas (Excepto cuando siente frustración por algo que aún no comprende).

En cuanto al plan de ayudas y apoyo para el aprendizaje del estudiante, en matemáticas se hace una disminución en el número de ejercicios, ajustes en las preguntas, se le facilita el listado de fórmulas y reglas (esto le permite llevar un orden de los temas vistos en clase y de los elementos más importantes de cada uno de ellos). Tanto para lenguaje como para matemáticas la estudiante no asiste de manera regular a tutorías en horario extracurricular.

II Actividades de rutina sencilla y compleja

La toma de apuntes y organización no son regulares, adicionalmente la estudiante no asiste de forma constante a tutorías en horario extracurricular, el uso de su agenda de trabajo es irregular.

III Entorno familiar

Sus padres tienen formación académica universitaria y cuenta con el apoyo de ambos, mediante tutorías de refuerzo en casa.

IV Experiencias gustos e intereses personales del estudiante

No le gusta trabajar en grupo; ya que considera que siempre termina por hacer el trabajo y los demás no aportan en el mismo. Le interesa salir con sus amigos, trabajar para subir sus notas en el colegio, ir al club, ver películas, pasar tiempo con su familia sobre todo con su hermano mayor.

V Historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

La estudiante nunca ha asistido ni a psicología ni a psiquiatría, pero si lo ha hecho a fisioterapias debido a un problema de la rodilla. De otro lado la estudiante no asiste con regularidad a tutorías en horario extracurricular (Cuando lo hace, solo asiste a las de matemáticas, Biología y Español). Actualmente está incluida en un programa de acomodaciones en matemáticas (Ajustes en las evaluaciones y en las ayudas para su aprendizaje).

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

No aplica.

Estudiante 6 (CB)

I participación del estudiante en la vida escolar

Datos generales:

Joven de 15 años de sexo femenino, que en la actualidad se encuentra cursando grado noveno en el colegio Bolívar, ubicado al sur de la ciudad de Cali. Tiene un hermano y presenta en sus reportes académicos un grado reprobado (tercer grado de educación básica primaria). Sus notas en matemáticas siempre han sido sobresaliente.

Observaciones de matemáticas y lenguaje:

El profesor de lenguaje alude que la estudiante tiene un nivel bajo de análisis y redacción, su nivel en la clase es uno de los más bajos, con un promedio de 65%; además

presenta poco esfuerzo, poco compromiso y dificultades en sus hábitos de estudio. En cuanto al punto de vista del profesor de matemáticas el nivel algebraico de la estudiante es el más alto de la clase (con un promedio acumulativo de 88%), tiene una excelente disposición, comportamiento y participación para el trabajo, se le facilita el análisis e interpretación de situaciones problemas. Tanto para lenguaje como para matemáticas la estudiante no asiste a tutorías en horario extracurricular.

Actualmente su plan de álgebra es normal, no cuenta con ayudas como por ejemplo formulas y disminución de ejercicios.

II Actividades de rutina sencilla y compleja

Su toma de apuntes y organización son excelentes, la estudiante no asiste a tutorías en horario extracurricular, solo algunas veces emplea una agenda de trabajo.

III Entorno familiar

Sus padres tienen formación académica universitaria y le proporcionar tutorías de refuerzo en casa.

IV Experiencias gustos e intereses personales del estudiante

Trabaja perfectamente en grupo, se amolda a cualquier tipo de situación (Siempre pensando en el bienestar de ambas partes). Le interesa obtener buenas notas en el colegio y tener siempre la oportunidad y el tiempo para montar a caballo.

V Historia terapéutica/planes de apoyo escolar y extracurricular

La estudiante asistió a psicología únicamente durante 8 meses.

VI Actividades de movilidad en la vida escolar

No aplica.

Caracterización, Aspectos generales apartados (I ,II, III, IV, V y VI)

Para el diseño de la propuesta de aula se clasifica a continuación la información de los seis estudiantes a los que se les aplico el instrumento (Incluidos los dos estudios de caso), bajo

las categorías de Condiciones Favorables y Desfavorables para la enseñanza y aprendizaje, cuyo propósito es caracterizar la población a partir de sus necesidades específicas.

Tabla 2. Estudiante 1 (IC)¹⁰ : Condiciones favorables vs condiciones desfavorables

Condiciones Favorables	Condiciones Desfavorables
• Tiene un alto nivel de superación personal • Maneja adecuadamente el Braille • Posee buena memoria de trabajo • Tiene buen cálculo mental • Pregunta y se interesa por aprender	• El rendimiento en el área de lenguaje es básico • Necesita mayor acompañamiento para desarrollar las actividades en el aula de clases • Requiere otras formas de representación verbal y táctil en la enseñanza

Teniendo en cuenta las condiciones favorables y desfavorables del Estudiante 1, se puede sugerir el uso de material didáctico concreto y táctil que le aporten acercamientos a la representación de la realidad. En las situaciones problemas que le planteen se le debe brindar ayuda por medio del tacto (palma de las manos) según la complejidad del tema, es importante que cuente con el asesoramiento y orientación de un compañero de clase, además se puede proporcionar al estudiante varias formas de solución a problemas que le permitan aprender desde sus propias potencialidades según su condición, situaciones en las cuales prime la apropiación del concepto no la forma de adquirirlo, se le debe facilitar en algunas ocasiones actividades en braille ya que la lectura le permite fortalecer la memoria inmediata, además lo motiva; para finalizar se debe continuar con el apoyo de la familia en su proceso de aprendizaje.

Tabla 3. Estudiante 2 (IC): Condiciones favorables vs desfavorables

Condiciones Favorables	Condiciones Desfavorables
• Buen dominio de lenguaje oral y escrito • Rendimiento en el área de lenguaje es alto	• Poca habilidad para resolver problemas matemáticos • Poca atención en clase de matemáticas • Expresa que la matemática no es de su agrado

Con base a las Condiciones favorables y desfavorables de la estudiante 2, se puede recomendar crear condiciones comunicativas que favorezcan un clima de reflexión crítica e investigación en el aula, se deben plantear situaciones matemáticas en las cuales pueda expresar posibles soluciones por medio de expresión de ideas matemáticas hablando, escribiendo, demostrándolas y representándolas, usar vocabulario matemático, notaciones y estructuras para representar ideas y modelar situaciones, se debe también orientar la atención del estudiante sobre los aspectos en los que debe poner especial cuidado al momento de procesar la información y

realizar los ejercicios, actividades y evaluaciones planteadas, finalmente se deben buscar estrategias que le generen confianza en el uso de la matemáticas.

Tabla 4. Estudiante 3 (IC): Condiciones favorables vs desfavorables

Condiciones Favorables	Condiciones Desfavorables
• Es atento y muestra interés por aprender • Buen análisis e interpretación de situaciones problema • Tiene hábitos de estudio	• Su grafía es poco clara rasgos muy alargados y diversos • Expresa mucha preocupación por su alteración del lenguaje (Disfemia)

Teniendo en cuenta las Condiciones favorables y desfavorables del estudiante 3, se debe potenciar la matemática por medio de la utilización del lenguaje matemático para expresarse, actividades que le permitan comprender la naturaleza de las matemáticas, definir conceptos e interiorizarlos a través de la comprensión de lo que se habla. Dejar mayor cantidad de actividades escritas por medio de las cuales pueda describir posibles soluciones, generar confianza en los momentos en que se exprese en forma oral. Para finalizar es importante desde el lenguaje afianzar la caligrafía por medio de ejercicios y juegos manuales con ojos abiertos y cerrado además propiciar el desarrollo de la lectura mental para que realice sus propias conjeturas y luego las pueda expresar.

Tabla 5 Estudiante 4 (CB)¹²: Condiciones favorables vs condiciones desfavorables

Condiciones Favorables	Condiciones Desfavorables
• Buena disposición para aprender, su nivel de esfuerzo y superación es alto • Busca continuamente alternativas de solución • Buena interpretación de situaciones por medio de mapas mentales, esquemas y gráficos de referencia • Tiene buenos hábitos de estudio	• Su vocabulario y nivel de análisis de la información escrita es bajo • Se le dificulta relacionar conceptos matemáticos. • Presenta dificultades de aritméticas y de conteo (Discalculia)

Teniendo en cuenta las Condiciones favorables y desfavorables del estudiante 4, se recomienda propiciar espacios que incentiven al estudiante a participar en actividades diversas, siempre y cuando se garanticen recursos y estrategias que le permitan acceder al conocimiento teniendo en cuenta sus niveles de interpretación y asimilación de situaciones (Ejemplo: Proporcionar en una actividad matemática, esquemas y listados de conceptos que le permitan llegar a la solución de un problema dado, de una forma guiada). Es fundamental que el estudiante

¹²Estudio de caso CB Colegio Bolívar (E₂ en la propuesta de aula, el cual presenta una discapacidad de tipo cognitiva asociada a su ritmo de aprendizaje y cálculos aritméticos)

sienta que su rol es muy importante e indispensable durante el proceso, que sienta que posee las herramientas y el apoyo necesario para solucionar las dificultades que se le presenten en el camino. En cuanto a las dificultades en sus conceptos previos, se debe hacer apoyos tutoriales en actividades extracurriculares y seguir realizando lectura comprensiva de tipo literal e inferencial.

Tabla 6. Estudiante 5 (CB): Condiciones favorables vs desfavorables

Condiciones Favorables	Condiciones Desfavorables
• Participa activamente y siempre busca alternativas adicionales para mejorar académicamente • Aprovecha los espacios de apoyo que le brinda la institución • Interrelaciona conceptos y procesos matemáticos, siempre y cuando tenga consignas claras y recursos suficientes para dar solución a un problema • Tiene buenos hábitos de estudio	• Requiere de recursos y elementos de apoyo (mapas del concepto, esquemas, listado de conceptos, tutorías en horario extracurricular) para avanzar satisfactoriamente en sus procesos de aprendizaje (requiere de seguimientos mediados por el profesor, sin olvidar la importancia del sentido de autonomía que debe tener el estudiante, el cual se encuentra en la capacidad de tomar decisiones e iniciativas autónomas, que lo hagan sentir parte importante del proceso). • Poca habilidad para analizar situaciones matemáticas • Pocos conocimientos básicos o previos asociados a conceptos matemáticos • Tiene poca creencia en sus conocimientos

Teniendo en cuenta las Condiciones favorables y desfavorables del estudiante 5, se recomienda propiciar espacios en donde el estudiante pueda participar en un ambiente de confianza que le permita aprender del error y proponga alternativas de solución. Es importante generar motivación en este estudiante, para que continúe avanzando de manera satisfactoria. Dentro de las estrategias de enseñanza está el de los esquemas y mapas mentales, que le permitan organizar y concatenar la información más importante presente dentro un nuevo concepto matemático, también emplear técnicas de verbalización en el desarrollo de un proceso matemático que le permita hacer aclaraciones en cuanto a un método empleado.

Tabla 7. Estudiante 6(CB): Condiciones favorables vs desfavorables

Condiciones Favorables	Condiciones Desfavorables
• Alto nivel de análisis e interpretación de situaciones matemáticas • Participación y responsabilidad son altas • Interrelaciona conceptos y procesos matemáticos(buenos conceptos previos)	• No asiste a tutorías en horario extracurricular • Presenta desinterés en algunas áreas no afines a lo numérico • No tiene hábitos de estudio

Teniendo en cuenta las condiciones favorables y desfavorables del estudiante 6, se recomienda tener en cuenta los gustos y afinidades del mismo, a la hora de presentarle una nueva actividad. Una estrategia para que este empiece a interesarse por las tutorías, radica en que vea este espacio como una oportunidad para avanzar en los conceptos (Por ejemplo: Temas de matemáticas) y que a su vez este proceso sea una oportunidad adicional de mejorar en su nota. El rol de monitor y líder en la clase, también viene a ser una estrategia clave de motivación dentro del proceso de dicho estudiante.

En consideración a lo anterior y para efectos de la propuesta de aula, se tiene en cuenta lo referido en el capítulo dos, sobre la educación diferencial y las características de una enseñanza diferenciada, en donde se plantea que se debe hacer un diagnóstico pedagógico inicial, el cual permita conocer los intereses y las modalidades de aprendizaje de los estudiantes y que se debe tener en cuenta, que los conocimientos posteriores deben basarse en conocimientos anteriores; ya que no todos tienen el mismo saber. La caracterización anteriormente planteada será el puente para la implementación de la propuesta, ya que tanto como las condiciones favorables y las condiciones desfavorables descritas con anterioridad y el entorno familiar, escolar de los E_1 y E_2 ; se tendrán en cuenta para el diseño e implementación de la propuesta, y a su vez servirán como referente para la adaptación de estrategias metodológicas que requiera cada estudiante de acuerdo a sus particularidades en el aprendizaje.

3.1.5 Resultados y Análisis de los Resultados, apartado (VII)

A continuación se presenta una síntesis de los análisis obtenidos, después de la implementación de la prueba diagnóstica de matemáticas; para de manera posterior presentar algunas consideraciones generales, en cuanto a los conocimientos y competencias matemáticas de los estudiantes y a su vez, ser tenidas en cuenta para el diseño de la propuesta de aula.

Tabla 8. Análisis matemático: Estudiantes IEIC¹³

Situación 1. Desplazamiento de un gusano en línea recta Patrones de variación lineal	
Estudiante 1	• Requiere un acercamiento por medio del tacto de la imagen del gusano. • Hace una ilustración con el joven mirando el gusano. • Completa de manera adecuada la tabla de valores, inicialmente lo hace de forma aditiva y luego comprende que de forma multiplicativa se abrevia el proceso. • Explica que la operación que realiza para hallar la distancia recorrida por el gusano al cabo de 38 segundos es una multiplicación. • Percibe el tipo de variación numérica en forma aditiva. • Identifica patrones numéricos simples. • Describe en lenguaje natural lo que se esperaba fuese en lenguaje algebraico. • No propone una ecuación lineal que permita modelar la situación planteada.

¹³IEIC: Institución Educativa Inmaculada Concepción

Continuación Tabla 8. Análisis matemático: Estudiantes IEIC¹⁴

Situación 1. Desplazamiento de un gusano en línea recta Patrones de variación lineal	
Estudiante 2	• Hace una ilustración con el gusano desplazándose sobre la línea recta • A mayor distancia no completa en la tabla de valores los tiempos en forma correcta, lo hace en forma aditiva, se le dificulta cuando los dos espacios están en blanco. • Determina por medio de una suma la distancia recorrida por el gusano al cabo de 38 segundos. • Percibe el tipo de variación numérica en forma aditiva. • Se le dificulta identificar patrones numéricos simples • No describe ni en lenguaje natural ni en lenguaje algebraico. • No desarrolla operaciones abreviadas se basa en la adición para la solución de la situación. • No propone una ecuación lineal que permita modelar la situación planteada.
Estudiante 3	• Hace una ilustración del gusano desplazándose sobre la línea recta • Al aumentar la distancia recorrida no logra determinar el tiempo faltante en la tabla de valores. • Determina por medio de una suma la distancia recorrida por el gusano al cabo de 38 segundos. • Percibe el tipo de valoración numérica en forma aditiva. • Identifica patrones numéricos simples. • Describe en lenguaje natural lo que se esperaba fuese en lenguaje algebraico. • No propone una ecuación lineal que permita modelar la situación planteada.

Tabla 9. Análisis matemático: Estudiantes IEIC

Situación 2. El Sube y baja Concepto de igualdad en expresiones equivalentes	
Estudiante 1	• Requiere un acercamiento por medio del tacto en la palma de la mano de la imagen del balancín. (se le hace una comparación con un tronco que sube y baja). • Representa gráficamente el peso de dos niños en un extremo y dos niñas en el otro extremo del sube y baja • Determina el peso de lucia por medio de la suma de $39 + 40 = 79$, le resta 35 y así obtiene el peso faltante de 34 kg. • Al resolver la situación de cambio de parejas, solicita que se le lea de nuevo la situación, toma apuntes de la pregunta 1 y 2 en sistema Braille. • Realiza sumas y restas para que los pesos quede iguales, así lo expresa. • Expresa operaciones de suma igualando los pesos • $P_1: 35 + 39 = 34 + 40$ • $P_2: 39 + 40 = 35 + 44$ • Determina el termino del valor desconocido, pero no lo plantea • Al tener que indicar el valor de verdad expresa que es real por qué Lucia pesa 34 kg, pero no lo tiene en cuenta como el valor de x. • No determina la expresión algebraica que representa la situación

¹⁴IEIC: Institución Educativa Inmaculada Concepción

Continuación Tabla 9. Análisis matemático: Estudiantes IEIC

Situación 2. El Sube y baja	
Concepto de igualdad en expresiones equivalentes	
Estudiante 2	• Representa numéricamente el peso de Ana y Martin en un extremo y Lucia y Gustavo en el otro extremo del sube y baja • Determina el peso de lucia por medio de la suma de $39 + 40 = 79$, le resta 35 y así obtiene el peso faltante de 34 kg. • Representa un dibujo en el balancín dos niñas en un extremo y dos niños en el otro extremo. • Plantea una ecuación para hallar los dos pesos $X + 40 = 74$ y $X + 35 = 79$. • Determina el término valor desconocido y lo plantea, determina X expresando que lo hace porque Lucia no tiene peso definido. • Al tener que indicar el valor de verdad expresa que es real por qué Lucia pesa 34 kg, lo tiene en cuenta como el valor de x. • Determina la expresión algebraica que representa la situación.
Estudiante 3	• Representa numéricamente el peso de Ana y Martin en un extremo y Lucia y Gustavo en el otro extremo del sube y baja • Determina el peso de lucia por medio de la suma de $39 + 40 = 79$, le resta 35 y así obtiene el peso faltante de 34 kg. • Representa un dibujo en el balancín dos niñas en un extremo y dos niños en el otro extremo. • Plantea una ecuación para hallar los dos pesos $X + 40 = 74$ y $X + 35 = 79$. • Determina el término valor desconocido y lo plantea, determina X expresando que lo hace porque Lucia no tiene peso definido. • Al tener que indicar el valor de verdad expresa que es real por qué Lucia pesa 34 kg, lo tiene en cuenta como el valor de x. • Determina la expresión algebraica que representa la situación

Tabla 10. Análisis matemático: Estudiantes IEIC

Situación 3. Expresiones Equivalentes	
Solución de ecuaciones de primer grado con variable real	
Estudiante 1	• Toma Apuntes en Braille, requiere acercamiento del término fichas por medio del tacto¹⁵. • Para determinar las fichas que comprenden las expresiones equivalentes $4x - 2x - 5$, selecciona dos fichas, la que contiene $2x - 5$ y $-14x + 35$, expresa que no entiende bien la equivalencia. • No es comprensible para él encontrar expresiones equivalentes en las fichas. • En la solución de ecuaciones hay dificultad con algunos signos. • En la solución de las ecuaciones lineales el estudiante, hace uso tanto del tanteo como del inverso aditivo y multiplicativo.
Estudiante 2	• No puede encontrar las fichas que satisfacen la condición de equivalencia. • Expresa que selecciona algunas por que las ve similares a la expresión dada. • En la solución de las ecuaciones presenta gran dificultad con los signos y con las operaciones de cada una. • Resuelve de manera fácil las ecuaciones breves.
Estudiante 3	• Selecciona algunas fichas, pero expresa que no entiende cuales serían. • Selecciona $2x$, porque la expresión $4x - 2x - 5$ tiene el $2x$, de igual forma selecciona

¹⁵ Hace alusión a los esquemas rectangulares que se presentan en la situación y que para el estudiante invidente viene hacer una representación tangible (fichas)

	$2x - 5$ por la misma razón. - En la solución de ecuaciones no las concluye todas, resuelve las que para él son más sencillas. - Presenta dificultad con los signos.
--	---

Tabla 11. Análisis matemático: Estudiantes CB¹⁶

Situación 1. Desplazamiento de un gusano en línea recta Patrones de variación lineal	
Estudiante 4	- No ilustra de forma gráfica el cambio de la distancia recorrida por el gusano en un intervalo de tiempo. - Alude que el cambio de distancia con respecto al tiempo, es como consecuencia de un patrón aditivo. Se le dificulta identificar un patrón de cambio multiplicativo. - Determina el valor de distancias y tiempos únicamente con respecto a cantidades numéricas pequeñas y consecutivas. - Describe en lenguaje natural lo que se esperaba fuese en lenguaje algebraico. - No propone una ecuación lineal que permita modelar la situación planteada
Estudiante 5	- No ilustra de forma gráfica el cambio de la distancia recorrida por el gusano en un intervalo de tiempo. - Alude que el cambio de distancia con respecto al tiempo, es como consecuencia de un patrón aditivo. Se le dificulta identificar un patrón de cambio multiplicativo. - Determina el valor de distancias y tiempos únicamente con respecto a cantidades numéricas pequeñas y consecutivas. - Propone una expresión algebraica que no corresponde a la situación planteada.
Estudiante 6	- Ilustra de forma gráfica el cambio de la distancia recorrida por el gusano en un intervalo de tiempo. - Determina el tiempo se segundo recorrido por el gusano en todo su dominio - Alude que el cambio de distancia con respecto al tiempo, es como consecuencia de un patrón multiplicativo - Describe en lenguaje algebraico la situación matemática propuesta. - Propone una ecuación lineal que modela la situación planteada ($s = 4t$ y $t = \frac{s}{4}$)

Tabla 12. Análisis matemático: Estudiantes CB

Situación 2. El Sube y baja Concepto de igualdad en expresiones equivalentes	
Estudiante 4	- No ilustra de forma gráfica la relación de equivalencia propuesta en la situación problema. - Propone una expresión errada con respecto a la representación del peso de Lucía ($39 + 40 = 35x$) - Alude que en la balanza, si el peso de los niños es mayor, entonces el de las niñas debe ser menor. - Reconoce que la variable “x” representa el peso de Lucía
Estudiante 5	- Plantea de forma gráfica la situación problema - Propone una expresión correcta, en la cual involucra el peso de Lucía ($39 + 40 = 35 + x$) - Reconoce que la variable “x” representa el peso de Lucía. - Halla correctamente el peso de Lucía “x”, a partir de la expresión $39 + 40 = 35 + x$ - Se le dificulta explicar un proceso matemático en lenguaje natural.
Estudiante 6	- Ilustra correctamente de forma gráfica la relación de equivalencia propuesta en la situación problema. - Propone una expresión correcta con respecto a la representación del peso de Lucía

¹⁶CB: Colegio Bolívar

- ($35 + 39 = 40 + x$)
- Alude que la mayor cantidad de peso a un lado de la balanza, genera que esta no se mantenga en equilibrio.
 - Reconoce que la variable “ x ” representa el peso de Lucía

Tabla 13. Análisis matemático: Estudiantes CB

Situación 3. Expresiones Equivalentes Solución de ecuaciones de primer grado con variable real	
Estudiante 4	• Se le dificulta determinar todas las expresiones equivalentes a $4x - 2x - 5$ (No emplea procesos de simplificación y amplificación). • Encuentra la mayoría de ecuaciones lineales equivalentes a $4 + 6x + 3 = x + 17$ (No se evidencia un proceso claro que argumente cada una de las respuestas). • Cuando soluciona una ecuación lineal sencilla, aunque intenta aplicar el inverso aditivo y multiplicativo, termina por emplear de forma errada los signos. Ejemplo 1: $4x = -7 - 5$ $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$ $x = 3$ Ejemplo 2: $6x + 7 = 2x - 5$ $\frac{8x}{8} = \frac{2}{8}$ $x = 4$ • En cuanto a los pasos y operaciones empleadas para solucionar una ecuación lineal, no identifica las propiedades de equivalencia presentes en el proceso (No identifica las propiedades básicas dentro de una ecuación sencilla, evidencia confusión en las operaciones).
Estudiante 5	• Se le dificulta determinar algunas de las expresiones equivalentes a $4x - 2x - 5$ (aparentemente emplea procesos de simplificación y amplificación; sin embargo estos no se evidencian en sus desarrollos). • Soluciona ecuaciones lineales sencillas; sin embargo no se evidencian en sus apuntes la aplicación del inverso aditivo (Omite pasos durante la solución de la ecuación). • Identifica los pasos uno a uno que se han empleado para solucionar una ecuación, sin embargo dentro de su discurso no se menciona las relaciones de equivalencia.
Estudiante 6	• Determina todas las expresiones equivalentes a $4x - 2x - 5$ (emplea procesos de simplificación y amplificación). • Halla todas las ecuaciones lineales equivalentes a $4 + 6x + 3 = x + 17$ (Se evidencia procesos claros, los cuales dan cuenta de cada una de las respuestas). • Soluciona correctamente ecuaciones lineales sencillas (Aparentemente se han aplicado las propiedades de equivalencia; sin embargo esto no se evidencia en los procesos) Ejemplo 1: $4x = -12$ $x = -3$ Ejemplo 2: $2x - 10 + 3x = x + 6$ $5x - x = 6 + 10$ $4x = 1$ $x = 4$

Caracterización, Aspectos generales apartado (VII)

En el presente apartado, se presenta un análisis general de los aspectos matemáticos con relación a la implementación de la prueba diagnóstica; la cual pretendía indagar acerca de los conocimientos previos de los estudiantes; por lo tanto el análisis se centra en los dos estudios de caso, codificados de la siguiente forma: El $(E_1)^{17}$, corresponde al Estudiante 1; de la Institución Educativa Inmaculada Concepción mencionado en la tablas 8,9 y10 y el $(E_2)^{18}$ corresponde al Estudiante 4 mencionado en las tablas 11,12 y13

Estudiante 1 (situación 1: Desplazamiento de un gusano en línea recta)

En cuanto a la situación 1, el estudiante comprende y describe una irregularidad y un patrón de variación lineal, a través de un sistema de representación tabular (discreta). El estudiante reconoce, este patrón de variación tanto de forma aditiva como multiplicativa; identificando inicialmente que para cada segundo de tiempo transcurrido el gusano avanza 4 mm, para luego deducir que 4 constituye una constante dentro de la situación de variación y dependencia entre tiempo y distancia recorrida. Sin embargo, se le dificultad al estudiante el uso del lenguaje algebraico y por tanto el planteamiento de una ecuación que modela la situación.

Estudiante 1 (Situación 2: El Sube y baja)

En cuanto a la situación 2, asociada al concepto de igualdad en expresiones algebraicas, el estudiante 1 plantea y aplica el concepto de igualdad entre dos expresiones numéricas, al igualar los pesos de los niños y efectuar adiciones y sustracciones entre las cantidades involucradas. Aunque identifica un término o valor desconocido en la igualdad y reconoce que este peso varía al intercambiar las parejas, la validación de la expresión es totalmente aritmética; ya que no hay relación entre el peso de Lucía y la variable que lo identifica, de igual forma el estudiante no construye las expresiones algebraicas para el caso 1: niño- niña y para el caso 2: niña-niña en los extremos del balancín.

¹⁷ E_1 , en el instrumento y en la propuesta de aula

¹⁸ E_2 , es el estudiante 4 en el instrumento y el estudiante dos en la propuesta de aula

Estudiante 1 (Situación 3: Expresiones Equivalentes)

Con relación a la solución de ecuaciones lineales con variable real, el estudiante 1 emplea métodos informales como estrategia de tanteo y métodos formales por medio de la propiedad uniforme de la igualdad; es decir el inverso aditivo y el inverso multiplicativo. Sin embargo algunas dificultades relacionadas con el manejo de los signos limitan el proceso de resolución de las ecuaciones.

Estudiante 4 (Situación 1: Desplazamiento de un gusano en línea recta)

Con respecto a la situación 1, al estudiante 4 se le dificulta comprender y describir una regularidad y un patrón de variación lineal, en un sistema de representación tabular; dado que no completa de forma adecuada algunos valores para el tiempo y la distancia recorrida. En este sentido, solo logra identificar el patrón de forma aditiva para aquellos valores consecutivos del tiempo, más no de forma multiplicativa, en tanto no reconoce la cantidad que permanece constante en esta situación de variación lineal.

Al igual que el estudiante 1, se le dificulta el uso del lenguaje algebraico y por ende el planteamiento de la expresión que modela la situación.

Estudiante 4 (Situación 2: El Sube y baja)

En cuanto a la situación 2, el estudiante 4 aunque reconoce que el peso de Lucía se puede representar por la variable x , no concreta expresiones algebraicas para determinar el peso de Lucía; además no calcula el peso de Lucía, ni plantea la igualdad entre dos expresiones numéricas. Con respecto a lo anterior, se puede decir que no hay un acercamiento al concepto de igualdad como una relación de equivalencia.

El estudiante no comprende que pese a la variación del peso de Lucía, entre el caso 1 y el caso 2 de la situación, ambos pueden ser representados por una igualdad numérica o algebraica, en tanto manifiesta que si el peso de los niños es mayor entonces el de los niños es menor.

Estudiante 4 (Situación 3: Expresiones Equivalentes)

Con respecto a la solución de ecuaciones lineales con variable real, el estudiante no hace uso correcto de las propiedades del inverso aditivo y del inverso multiplicativo; además evidencia dificultad en cuanto al empleo de los signos y sus procesos algorítmicos. De otro lado presenta problemas de argumentación en lo que se refiere a la falta de coherencia en sus procedimientos con relación a sus respuestas finales.

En consideración con lo anterior referido a los resultados y los análisis de resultados de la prueba diagnóstica de matemáticas se puede deducir que el E_1 y E_2 , presentan dificultades en el planteamiento de las expresiones algebraicas que modelan las situaciones, ellos no logran plantear la expresión, expresan igualdades aritméticas entre números, no identifican la variable, usan métodos de tanteo, aunque es importante aclarar que el Estudiante 1, aunque tiene una limitación visual expresa y comunica algunas soluciones de forma clara, mientras que el Estudiante 2 en algunas de las preguntas es necesario orientarlo para que el logre organizar sus ideas.

Es de este modo como se confirma que la selección de los dos estudiantes es pertinente en tanto se evidencian dificultades en los estudiantes en el planteamiento de una ecuación, a su vez es relevante anotar que los conocimientos previos de los estudiantes sobre la ecuación serán tenidos en cuenta para el diseño de la propuesta de aula.

3.2 La Propuesta de aula sobre las ecuaciones de primer grado con una variable real en estudiantes que requieren una educación diferencial

En este apartado, se presentan en primera instancia los elementos relacionados con el diseño de las tres situaciones (propuesta de aula); las cuales tienen en cuenta el objetivo principal de esta investigación, el cual es caracterizar logros y dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones lineales con variable real en estudiantes que requieren una educación diferenciada.

El diseño de la propuesta, tiene en cuenta algunos de los aportes teóricos de la conceptualización matemática de ecuación lineal, su incidencia y papel dentro del currículo colombiano en cuanto a elementos que se destacan dentro del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos; además la propuesta de aula se encuentra mediada por aspectos circunscritos en la educación diferencial.

Seguidamente, se refiere el proceso de implementación de la propuesta en el aula, en donde se explican los aspectos relacionados con la población objeto de estudio y la metodología empleada, finalmente se presenta el análisis de cada una de las situaciones, las cuales se fundamentan en una investigación de carácter cualitativo, cuyo propósito central es la descripción e interpretación que hace el docente investigador de los registros de los estudiantes (videos, dialogo, escritos). Por último se establecen algunas conclusiones, de acuerdo a los marcos teóricos de referencia señalados en el capítulo dos.

3.2.1. Diseño de la propuesta de aula

El diseño de las situaciones de la propuesta de aula, se realiza a partir de la identificación de algunas de las diferentes dificultades que subyacen en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar y en particular de las ecuaciones lineales con una variable real, problemas asociados a diversos aspectos: errores del álgebra que están en la aritmética, errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico; además se tiene en cuenta diferentes perspectivas, que van de lo curricular, a lo matemático y a lo didáctico. Se evidencia que esta problemática es común en diversidad de estudiantes, pero el caso particular de esta propuesta de aula es brindar estrategias metodológicas que permitan favorecer la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones lineales con variable real en un grupo de estudiantes que requieren una educación diferencial.

Para el diseño de las tres situaciones a desarrollar con los dos estudios de caso (Estudiante 1 y Estudiante 2) se tiene en cuenta tres fases:

Fase 1: Implementación de la prueba piloto a 6 estudiantes con particularidades en su aprendizaje, cuyo propósito fue la caracterización de la población y hacer un diagnóstico de los conceptos matemáticos referidos al álgebra y en correspondencia con las ecuaciones lineales con variable real, el cual a su vez permitió conocer los intereses y las modalidades de aprendizaje de los estudiantes.

Fase 2: Análisis de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica de matemáticas y a partir de este se plantean las actividades teniendo en cuenta las necesidades de enseñanza diferenciada de los dos estudios de caso.

Fase 3: El contexto planteado en las tres situaciones se genera a partir de las entrevistas y toma de registros realizados por los docentes investigadores a los dos estudios de caso, de los cuales se selecciona una de las experiencias vividas por uno de los dos estudiantes, la cual es sometida a cambios teniendo en cuenta elementos presentes en el contenido curricular, matemático y didáctico anteriormente establecido.

De este modo, el diseño de las situaciones tiene en cuenta algunas de las premisas de la educación matemática de acuerdo a directrices planteadas por el ministerio de educación nacional (MEN), que presenta como uno de los ejes principales del orden del currículo los procesos generales de la actividad matemática como son la formulación, tratamiento y resolución de problemas; ya que las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato, en donde el quehacer matemático cobra sentido en tanto se modelan procesos y fenómenos de la realidad, se razona, se argumenta y comunica a través del lenguaje propio de las matemáticas.

De esta forma, en las situaciones planteadas se encuentran inmersos los procesos generales de la actividad matemática, así:

Situación 1: Variaciones lineales y el Concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita real, pretende un acercamiento a la noción de ecuación a través de la percepción de la variación, repetición de patrones, uso adecuado de algoritmos, el razonamiento y comunicación de ideas matemáticas por medio de argumentos.

Situación 2: Descuentos, Impuestos y Ecuaciones Lineales busca que el estudiante identifique los elementos más importantes de variación y cambio dentro de una ecuación lineal en su forma básica (Ecuación aritmética), relacionando valores de dependencia y procesos algorítmicos de operaciones inversas.

Situación 3: Resuelve Ecuaciones Lineales con una variable Real, tiene como objetivo principal acercar al estudiante a un concepto más formal de ecuación lineal (ecuación algebraica), en donde relacione las propiedades de equivalencia para su desarrollo; además de modelar una situación matemática mediante procesos de enunciación que conlleven a una expresión algebraica.

La propuesta de aula sobre ecuaciones lineales con una variable real, desarrollada en este trabajo está compuesta de tres situaciones como se menciona con anterioridad, donde cada una de estas situaciones se compone de tareas.

A continuación se exponen los propósitos, contenidos matemáticos y expectativas de desempeño para cada situación:

Situación 1: Variaciones lineales y el Concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita real

Propósito:

Se espera que los estudiantes:

- Reconozcan situaciones de variación lineal, relacionando diferentes representaciones (tablas, expresiones verbales)
- Identifiquen relaciones de dependencia entre cantidades constantes y cantidades que varían

Situación 2: Descuentos, Impuestos y Ecuaciones Lineales

Propósito:

Se espera que los estudiantes:

- Identifiquen patrones que sirvan de guía más o menos directamente a la expresión algebraica
- Interpreten relaciones entre el lenguaje verbal y las expresiones algebraicas

Situación 3: Resuelve Ecuaciones Lineales con una variable Real

Propósito:

Se espera que los estudiantes:

- Reconozcan las propiedades inmersas en el proceso de resolución de ecuaciones lineales con una variable real
- Expresen situaciones problemas del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa

A continuación, en la siguiente tabla se exponen las tareas, contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño presentes en cada una de las situaciones:

Tabla 14. Tareas, contenidos matemáticos y expectativas de desempeño presentes en cada una de las situaciones

Situación	Tarea	Contenidos Matemáticos	Desempeños esperados
Situación 1: Variaciones Lineales y el Concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita real	Tarea 1: Comprendiendo la situación	Aproximación al concepto de Ecuación	Interpreta y encuentra sentido a las ideas matemáticas Razona y comunica por medio de procesos de argumentación Intercambia ideas intuitivas y formales Relaciona patrones numéricos crecientes con la adición o la multiplicación y decrecientes con la resta o la división
		Variación periódica, patrones y regularidades.	
	Tarea 2: Distancia Recorrida y Variación Lineal	Representación tabular ax	Percibe el tipo de variación numérica (aditiva o multiplicativa) Uso de expresiones o enunciados verbales (lenguaje verbal o lenguaje matemático)
		Tarea 3: Dólares Pagados y Variación Lineal	Variación del tipo $ax = b$
	Razón de cambio		Reconoce relaciones entre dos magnitudes
	Situación 2: Descuentos, impuestos y Ecuaciones lineales	Tarea 1: Descuentos y expresiones algebraicas	Representación tabular
Patrón de comportamiento multiplicativo			Hace uso de expresiones algebraicas para interpretar matemáticamente enunciados del lenguaje común
Relaciones de dependencia			Describe regularidades y patrones en diferentes contextos
Tarea 2: Descuentos y ecuaciones		Variación lineal	Identifica diferentes métodos para solucionar ecuaciones lineales
		Expresiones algebraicas	Construye expresiones algebraicas equivalentes

Continuación Tabla 14. Tareas, contenidos matemáticos y expectativas de desempeño presentes en cada una de las situaciones

Situación	Tarea	Contenidos Matemáticos	Desempeños esperados
Situación 3: Resuelve ecuaciones lineales con una Variable Real	Tarea 3: Acercándonos a la Ecuación de la forma $ax + b = c$	Representación Tabular Variación lineal Expresiones algebraicas	Usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para solucionar situaciones que requieren variables Comprende el proceso de despejar y realizar situaciones numéricas
	Tarea 1: Describiendo procesos de resolución de Ecuaciones	Concepto de ecuación lineal Propiedades de las ecuaciones lineales	Determina procesos de resolución de ecuaciones lineales Propone respuestas posibles por medio de argumentos y razones que implican el uso de expresiones algebraicas
	Tarea 2: Validando la Solución	Propiedades de las ecuaciones lineales Resolución de Ecuaciones	Verifica la validez de la resolución de Ecuaciones lineales
	Tarea 3: Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones Aritméticas Ecuaciones Algebraicas Propiedades de Equivalencia Identidad algebraica Simplificación de expresiones algebraicas.	Identifica propiedades como la uniforme de la igualdad o la transposición de términos como proceso de resolución de una ecuación lineal Identifica las expresiones que se generan en cada paso como expresiones que son equivalentes a la ecuación original
	Tarea 4: Resolviendo Ecuaciones y Situaciones Problema	Ecuación lineal Pasar de un sistema de representación a otro Enunciados verbales, enunciados algebraicos	Analiza situaciones problema que impliquen el uso de expresiones algebraicas Relaciona las diferentes representaciones del lenguaje verbal y el lenguaje algebraico

Sobre la propuesta de aula

Considerando lo mencionado en el capítulo dos, referente a la perspectiva de la educación diferencial, la cual hace referencia que los estudiantes deben ser incluidos en las actividades de manera homogénea; las situaciones presentadas a continuación se implementan para los dos estudios de caso (E_1 y E_2), por lo tanto solo se hace necesario hacer algunas adaptaciones a los diferentes tipos de recursos que puedan facilitar el aprendizaje de cada uno de los estudiantes.

Situación 1: Variaciones Lineales y el Concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita real

En las vacaciones del 2015; es decir entre los meses de Julio y Agosto, Samuel estudiante del colegio Bolívar de la ciudad de Cali viajó con su papá, su madrastra, y sus dos hermanos desde Cali a la ciudad de México DF. La distancia recorrida en el viaje fue de 2.861 km, con una duración de vuelo de 3 horas y 55 minutos. El costo de los tiquetes de avión en primera clase (ida y regreso) de toda la familia fue de 1.495 dólares.

Tarea 1: Comprendo la situación

- a) Teniendo en cuenta la situación anterior, indique el valor de los tiquetes en pesos colombianos, si el valor del dólar hoy es de \$ 2.850 pesos colombianos.
- b) Indique el valor total pagado en dólares por un tiquete de avión.
- c) Halle el valor en pesos colombianos de un tiquete de Cali a Ciudad de México.
- d) Encuentre el valor en pesos mexicanos de todos los tiquetes de Cali a Ciudad de México. (1 peso Mexicano \$174 pesos colombianos)
- e) Calcule Cuántos kilómetros recorre la familia Beltrán en un viaje ida y regreso de Cali, ciudad de México.

Tarea 2: Distancia Recorrida y Variación Lineal

Teniendo en cuenta la situación del viaje de Samuel completa la siguiente tabla:

N° de viajes	1	2	3		10	11	13	
Distancia en Km recorridos	2861			17166				57220

Tabla 1

- Teniendo en cuenta la información anterior, determine las magnitudes que intervienen en la situación, según la tabla 1
- Explique de qué depende la distancia recorrida en Km en el caso dado
- Indique a cuantos viajes corresponde la distancia de 100.135 km
- Para 32 viajes Cali- Ciudad de México qué distancia total se recorre.
- Escriba una expresión que le permita calcular la distancia recorrida en Km para cualquier número de viajes

Tarea 3: Dólares pagados y Variación lineal

Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta el valor en dólares que pago la familia Beltrán por cada tiquete de avión.

Número de viajeros	Precio por viaje(Dólares)	Precio total
1	299	
2		598
4		
7		

Tabla 2

- Teniendo en cuenta la información anterior, determine las cantidades que intervienen según la tabla
- Que cantidades varían y cuales permanecen constantes según la tabla
- Indique de que depende el valor total pagado en dólares
- Para 13.455 dólares cual es el número de viajeros

- e) Escriba una expresión que permita calcular el valor pagado por los viajeros para cualquier número de viajes
- f) Utilice la expresión anterior para calcular:
- g) Los dólares pagados por 23 viajes
- h) El número de viajes por persona si pagan 2.691 dólares

Situación 2: Descuentos, Impuestos y Ecuaciones Lineales

La familia Beltrán decidió hospedarse en el mes de Julio en el hotel StarwoodHotels&Resort, en donde en época normal por cena se pagan 50 dólares y en temporada de vacaciones se hace un descuento por el tiempo que permanezca en el hotel de 15 dólares diarios. Además con relación al hospedaje, a cada miembro de la familia le cobraron un impuesto de 61 dólares por todo el tiempo de estadía, por noche pagan 319 dólares cada uno.

Tarea 1: Descuentos y Expresiones Algebraicas

Teniendo en cuenta la información anterior complete la siguiente tabla:

Número de cenas	Precio normal por cena	Descuento diario	Precio total normal por cena	Descuento total a pagar en temporada de vacaciones	Precio total por cena en temporada de vacaciones
1	50	15	50	15	35
2			100		70
3					105
4		15			
	50		300	90	
					350
22				330	

Tabla 3

- a) Teniendo en cuenta la información dada en la tabla 3, indique las cantidades que intervienen en el problema.
- b) Analice los datos que completó en la tabla 3 y nombre a continuación las cantidades que varían y las que permanecen constantes.
- c) Indique de qué depende el valor total a pagar por cenas en temporada de vacaciones.

Tarea 2: Descuentos y Ecuaciones

- Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán calcular el dinero en dólares a pagar al restaurante en **temporada normal**, por un número cualquiera de cenas.
- Utilice la expresión algebraica anterior, para hallar el dinero en dólares que debe pagar **cada uno**, si alcanzan a consumir 9 cenas en **temporada normal**.
- Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán hallar el dinero en dólares a pagar al restaurante en **temporada de vacaciones**, por **un número** determinado de cenas.
- Utilice la expresión algebraica anterior, para calcular el dinero en dólares que debe pagar **cada uno**, si alcanzan a consumir 12 cenas en **temporada de vacaciones**.
- Samuel dice que la expresión para calcular el número de cenas en época de vacaciones es:
 $(50-15)x$
- Analiza la validez de esta afirmación
- Reduce la expresión
- Si la familia Beltrán pago 3.500 dólares por un numero de cenas x . Indique el número total de cenas pagadas.

Tarea 3: Acercándonos a la Ecuación de la Forma $ax + b = c$

Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la información sobre el hospedaje de la familia Beltrán en el hotel StarwoodHotels& Resort.

Número de noches	Precio por noche	Precio por número de noches	Valor Impuesto USD	Precio a pagar por el número de noches
1	319		61	
2		319×2		699
3				1.018
	319			1.975
			61	3.251
12				
				4.846
25	319			

Tabla 4

- a) Indique las cantidades que varían y las que permanecen constantes según la información de la tabla
- b) Describa como se calculó el precio total a pagar por 12 noches
- c) Escriba una expresión que le permita calcular el precio total a pagar por x noches, teniendo en cuenta el valor por noche e impuesto
- d) Use la expresión algebraica para encontrar el dinero total en dólares que la familia Beltrán pago por persona en 3 días, 50 días y 75 días.
- e) Calcule el número de noches pagadas con 2.613 dólares y explique cómo lo realizo
- f) Si en otro hotel la familia podría pagar por noche 289 dólares y un impuesto fijo de 121 dólares. Escriba una expresión que le permita calcular el costo de 5 noches en este hotel
- g) Indique para que cantidad de noches pagaría un miembro de la familia Beltrán el mismo valor en ambos hoteles.

Situación 3: Resuelve Ecuaciones Lineales con una Variable Real

Tenga en consideración las expresiones de las Situación uno y la Situación dos; estas expresiones se denominan Ecuaciones.

Teniendo en cuenta lo anterior recordemos que una ecuación condicional es:

Una **ecuación** afirma que dos expresiones son iguales y que al menos una de ellas contiene una variable. De otra parte; una solución o raíz de una ecuación es cualquier número que sustituido en ella, la convierte en una proposición verdadera, se dice que un número satisface una ecuación si es solución de la ecuación.

Una **ecuación** se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay al menos un número en el dominio de la variable que no la satisfaga, entonces se dice que es una **Ecuación Condicional**.

Samuel dice que las expresiones utilizadas para calcular el número de viajes por persona en la Situación Uno tarea 3 punto 6b, número de cenas en la Situación Dos en el punto 6 de la tarea 2 y el número de noches del punto 6 de la tarea 3, se denominan Ecuaciones Condicionales.

$$\text{Estas son: } 299x = 2691, \quad 50x = 3500 \quad \text{y} \quad 319x + 61 = 2613$$

Samuel necesita determinar el número de noches pagadas por un miembro de la familia en el hotel Starwood Hotels& Resort para un total de 2.613 dólares, para esto el resuelve la ecuación aplicando las propiedades de equivalencia como se muestra a continuación:

Proceso de Resolución:

$$319x + 61 = 2613 \quad (\text{Expresión Dada})$$

$$319x + 61 - 61 = 2613 - 61 \quad (1)$$

$$319x = 2552 \quad (2)$$

$$\frac{1}{319} \cdot 319x = 2552 \cdot \frac{1}{319} \quad (3)$$

$$x = \frac{2552}{319} \quad (4)$$

$$x = 8 \quad (5)$$

Tarea 1: Describiendo procesos de Resolución de Ecuaciones

- Explique el procedimiento realizado por Samuel para pasar de la expresión dada a la expresión (1)
- Porque Samuel obtuvo 2552 en el paso (2)
- Describe lo realizado por Samuel en el paso (3)
- Explique el proceso usado por Samuel para pasar del paso (4) al paso (5).

Tarea 2: Validando la Solución

Según lo expuesto el número de noches que pago un miembro de la familia de Samuel con 2.613 dólares es 8, teniendo en cuenta esta información:

- Encuentre una manera de probar que la respuesta es correcta
- Para 5.226 dólares, cuantas noches puede pagar
- Por 4 noches qué precio pagaría
- Escribe como se puede comprobar

Para solucionar una ECUACIÓN EQUIVALENTE:

- ✓ *Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.*
- ✓ *Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.*

Tarea 3: Ecuaciones Equivalentes

A continuación se muestra el proceso realizado por Samuel para solucionar la ecuación en donde $z \in \mathbb{Q}$.

$3(z - 4) + 5z = 6z + 10$	Expresión dada
$3z - 12 + 5z = 6z + 10$	Paso 1
$8z - 12 + 12 = 6z + 10 + 12$	Paso 2
$8z - 6z = 6z - 6z + 22$	Paso 3
$2z = 22$	Paso 4
$\frac{1}{2} 2z = \frac{22}{2}$	Paso 5
$z = 11$	

Teniendo en cuenta el proceso de resolución de la ecuación anterior, responde:

- Indique el proceso realizado por Samuel para pasar de la expresión dada al paso 1.
- Indique por qué se puede sumar 12 en ambos miembros de la ecuación, en el paso 2. Mencione el nombre de esta propiedad.
- Describe el procedimiento realizado por Samuel en el paso 3.
- Explique el proceso usado por Samuel, para pasar del paso 4 al 5
- Escribe enfrente de cada enunciado verdadero (V) o falso (F), según el procedimiento planteado por Samuel en la solución de la ecuación:

$$3(z - 4) + 5z = 6z + 10$$

(Justifique su respuesta)

- De la expresión dada al paso número 1, se aplicó propiedad distributiva_____
- En el paso 2 se usó la propiedad del inverso aditivo _____

- c) En el paso 3 se usó la propiedad del inverso aditivo _____
- d) Samuel aplicó correctamente el inverso multiplicativo en el paso 3 _____
- e) Samuel aplicó correctamente el inverso multiplicativo en el paso 5 _____
- Sustituya el valor de $z = 11$ en los pasos 1, 3, 5. Indique conclusiones.
 - Determine si las ecuaciones de los pasos 1, 3 y 5 son equivalentes (justifique su respuesta)
 - Proponga dos expresiones equivalentes a la siguiente ecuación
 - _____
 - _____
- $$7x - 3 = -21x - 31$$

Tarea 4: Resolviendo Ecuaciones y Situaciones problema

A. Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades de equivalencia:

- $3x - 4 = 13$
- $15x - 30 = 10x + 40$
- $\frac{6}{5}x + 20 = 72$
- $20x - 45 = 5(10x + 15)$

B. Complete la siguiente tabla, empleando una expresión algebraica para cada enunciado:

Enunciado	Expresión
El precio de un caramelo	
La mitad del precio de un caramelo	
El largo de un rectángulo es cuatro veces más grande que su ancho	
La quinta parte de la suma de dos números	

Tabla 5

C. Complete la siguiente tabla, empleando un enunciado que satisfaga la expresión algebraica dada:

Expresión	Enunciado
x	
$\frac{x}{3} + 2$	
$7(x - 8)$	
$y = 2x + 10$	

Tabla 6

C. Resuelva las siguientes situaciones:

- El doble de un número es igual a la diferencia entre el triple del número y 20. Halle el número.
- La edad de Carlos es el doble de la edad de Pedro, y la edad de María es cuatro veces la edad de Carlos y Pedro juntos. Si la suma de las edades es de 75 años, indique la edad de Carlos, Pedro y María.
- Juana vende lápices en la escuela a \$500 la unidad. Determine el número de lápices que debe vender Juana para obtener un ingreso de \$12.500.

3.2.2 Implementación de la propuesta

Población

La propuesta de aula fue aplicada entre los meses de Julio y Diciembre del 2015 a dos estudiantes de grado noveno denominados Estudios de Caso, pertenecientes a instituciones diferentes, y estos a su vez formaron parte de los seis estudiantes a los cuales se les aplicó la prueba diagnóstica de matemáticas mencionada anteriormente; a cada estudiante se le asigna un código Estudiante 1(E₁) y Estudiante 2 (E₂) y para la aplicación de cada una las situaciones se requirió un tiempo aproximado de tres horas.

El E₁ corresponde a la institución educativa Inmaculada Concepción sede Central ubicada en el municipio de Ginebra (Valle), institución de carácter oficial, estrato socioeconómico 3, cuenta con estudiantes de los estratos 1, 2 y 3. El joven forma parte de un grupo de 47 estudiantes, posee una discapacidad visual adquirida a los siete años debido a una enfermedad denominada Retinopatía, la selección de este joven obedece a los procesos de

enseñanza particulares que el requiere, además en el grado octavo presentó dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones. El proceso enseñanza y aprendizaje del álgebra fue lento y requirió de materiales principalmente táctiles, para así obtener un acercamiento a las expresiones algebraicas.

El E_2 pertenece al colegio Bolívar ubicado en la ciudad de Cali (Valle), institución de carácter privado, estrato socioeconómico 5 y 6. El joven hace parte de un programa de apoyo de aprendizaje; el cual monitorea sus hábitos de estudio que emergen de los procesos académicos, los cuales proporcionan ajustes tanto en el currículo como en las estrategias de enseñanza. La selección de este estudiante obedece a las características específicas en el proceso enseñanza y aprendizaje, como lo es el caso particular de las dificultades presentes en el área de matemáticas y lenguaje; por otra parte este joven desde su ingreso al colegio, siempre ha contado con apoyo por parte del equipo de recursos de aprendizaje.

3.2.3 Resultados y análisis de los resultados

En esta sesión se presentan los resultados y análisis de resultados organizados mediante una descripción individual de cada estudio de caso, estudiante 1 (E_1) y estudiante 2 (E_2), estas descripciones se desarrollan teniendo en cuenta las respuestas dadas por los estudiantes a las situaciones 1,2 y 3 y con base en los registros audiovisuales.

Inicialmente se narra el proceso de solución desarrollado por cada estudiante para las actividades propuestas, de manera posterior se hace un análisis general, el cual en ocasiones puede llegar a relacionar más de una pregunta. Los análisis se fundamentan en aspectos de tipo curricular, didáctico, matemático y lo referente a la educación diferencial. De otro lado los títulos se relacionan con cada una de las tareas y sus respectivas preguntas así: Tarea uno T_1 pregunta uno P_1 .

3.2.4 Resultados y análisis de los resultados de la Situación 1

Estudiante 1(E_1 , Institución Educativa Inmaculada Concepción):

Metodología: Para la aplicación de la Situación 1 se trabaja con el estudiante en forma individual, inicialmente se hace una lectura pausada junto al estudiante del enunciado de la

situación problema. Dada la limitación visual del joven, el transcribe en Braille la situación y las preguntas planteadas.

Para la comprensión de las tablas se implementa cada una de estas en forma física por medio del uso de plastilina, de tal manera que pueda tocar cada borde de fila y columna para así él luego construir sus propias tablas y escribir la información que contiene cada una.

Después de que el estudiante ha transcrito todo, procede a responder cada pregunta, y se le permite el uso de la calculadora. El docente investigador toma apuntes de lo resuelto por el estudiante, una vez que este le lee lo que ha hecho en cada actividad.

Situación 1(S1): Variaciones Lineales y el Concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita real

En las vacaciones del 2015; es decir entre los meses de Julio y Agosto, Samuel estudiante del colegio Bolívar de la ciudad de Cali viajó con su papá, su madrastra, y sus dos hermanos desde Cali a la ciudad de México DF. La distancia recorrida en el viaje fue de 2.861 km, con una duración de vuelo de 3 horas y 55 minutos. El costo de los tiquetes de avión en primera clase (ida y regreso) de toda la familia fue de 1.495 dólares.

Tarea 1(T₁): Comprendo la situación

Pregunta 1(P₁): Teniendo en cuenta la situación anterior, indique el valor de los tiquetes en pesos colombianos, si el valor del dólar hoy es de \$2.850 pesos colombianos

El estudiante obtiene la respuesta acertada a la pregunta del valor de los tiquetes en pesos colombianos multiplicando el precio de los tiquetes de toda la familia por el valor del dólar dado, es decir, 1.495 dólares x 2.850 pesos equivalente a \$4' 260.750. Utilizo para hacer este cálculo la calculadora especial para invidentes (Calculadora con parlante la cual permite a las personas que no ven escuchar los números marcados y la cantidad resultante)

P₂: Indique el valor total pagado en dólares por un tiquete de avión

El estudiante indica que la respuesta corresponde a 299 dólares como valor de un tickete, expresa que lo obtiene dividiendo el costo total de los tickets (1. 495 dólares) por el número de pasajeros (5)

Teniendo en cuenta las respuestas de las preguntas 1 y 2 (P_1 y P_2) del Estudiante 1, en las cuales él responde de manera acertada, se puede afirmar que este comprende el enunciado de la situación y lo pedido en cada pregunta. Esto se puede apreciar porque en la respuesta a la P_1 y en la respuesta a la P_2 realiza las operaciones requeridas de multiplicación y división, comprende los cambios de moneda (dólares a pesos) y encuentra el valor de un solo tickete en dólares.

Seguido a lo anterior se indica que de acuerdo a los registros audiovisuales se nota que el estudiante interpreta y encuentra sentido a las ideas matemáticas, mediante el proceso de razonamiento al reconocer en las preguntas situaciones multiplicativas y de reparto.

P_3 : Halle el valor en pesos colombianos de un tickete de Cali a Ciudad de México

El estudiante responde en forma acertada, el costo de un tickete en pesos equivale a \$852.150, realiza una multiplicación entre el costo de un tickete en dólares por el precio del dólar actual, es decir 299×2.850

P_4 : Encuentre el valor en pesos mexicanos de todos los tickets de Cali a Ciudad de México.
(1peso Mexicano corresponde a \$174 pesos colombianos)

El estudiante responde en forma no acertada al pasar el costo de los tickets en dólares a pesos mexicanos, expresa que es \$260.130 pesos mexicanos; él realiza una multiplicación del costo de los tickets de toda la familia (1.495 dólares) por el costo de un peso mexicano el cual equivale a \$174 pesos colombianos, el estudiante adjudica el valor total de los tickets en dólares y no en pesos colombianos asume de esta forma, que el valor de un dólar es de \$174 pesos mexicanos.

Con relación a las respuestas dadas a las preguntas P_3 y P_4 se observa que el estudiante convierte el valor de un tickete dado en dólares a pesos colombianos (P_3) y para el caso de P_4 la respuesta no es acertada, porque el estudiante toma el valor total de los pasajes en dólares y no

en pesos colombianos asumiendo también que un dólar equivale a 174 pesos mexicanos; por lo tanto multiplica estos valores. Es importante aclarar que para estas preguntas la complejidad con relación a las preguntas 1 y 2 es distinta puesto que el estudiante debe considerar los datos obtenidos en la respuesta 1 para la P_4 y la respuesta 2 para la P_3 . Se evidencia que la comprensión del estudiante se afecta porque el dato con el cual tiene que operar no está inmediato.

P_5 : Calcule cuántos Kilómetros recorre la familia Beltrán en un viaje ida y regreso de Cali, Ciudad de México

El estudiante acierta en su respuesta, obtiene un recorrido de 5.722 Km, él refiere que realiza una suma para calcular los kilómetros de ida y regreso que recorre la familia Beltrán de ida y regreso de Cali, ciudad de México, agrega que al ser un recorrido de dos veces lo suma $2.861\text{km} + 2.861\text{km}$.

Mediante el resultado dado por el Estudiante 1, para la P_5 , se evidencia que comprende lo requerido al expresar que es un recorrido de dos veces, aunque no utiliza la multiplicación para la solución, se valida el desempeño esperado ya que reconoce la suma reiterada como forma para calcular el recorrido en kilómetros de ida y regreso de Cali a Ciudad de México. De lo anterior es posible decir que el estudiante identifica la relación entre dos magnitudes que cambian al mismo tiempo.

Tarea 2(T_2): Distancia Recorrida y Variación Lineal								
P_1 : Teniendo en cuenta la situación del viaje de Samuel completa la siguiente tabla:								
N° de viajes					0	1	3	
Distancia en Km recorridos	861			7166				7220

Tabla 1

El estudiante completa de forma acertada a través de un patrón aditivo, los espacios 2 y 3 con 5.781km y 8.583 km respectivamente. En el registro faltante de número de viajes para una distancia recorrida de 17.166 km coloca el valor 4, ya que este alude que se debe seguir una

secuencia horizontal con respecto al número de viajes, él no percibe que es equivocada su respuesta y continua realizando sumas reiteradas para completar los espacios de 10,11 y 13 viajes con 28.610 km, 31.471km y 37.193 km en su orden respectivo, finalmente expresa que no sabe qué número de viajes corresponde a 57.220 km.

De manera general el estudiante presenta dificultad para completar los valores que faltan en la tabla 1, para poder realizar la actividad fue necesario implementar una tabla física construida en plastilina; con la finalidad de que el estudiante por medio del tacto pueda tener una idea cercana de las columnas y filas que esta contiene.

Los resultados de la Tabla 1, que corresponde a la P_1 de la T_2 , muestran que el estudiante reconoce por medio de la adición la relación entre las magnitudes involucradas, además es posible afirmar que la estrategia de la suma con la que puede calcular los valores iniciales para la distancia recorrida en kilómetros, no es tan útil para que él pueda calcular el valor que falta en número de viajes para la distancia recorrida en 17.166 km y 57.220 km, ya que son estimaciones de orden mayor.

Es importante recordar que de igual forma que en la pregunta anterior (P_5 de la T_1), realiza sumas reiteradas lo cual infiere una comprensión de patrón aditivo. En este orden de ideas se puede afirmar, por un lado se cumplen las expectativas de desempeño debido a que reconoce patrones numéricos en la tabla, sin embargo no lo interpreta en la forma multiplicativa que se esperaba. En general es pertinente destacar que de acuerdo al proceso realizado por el estudiante, aparentemente este no identifica la operación inversa de la multiplicación y aunque hace una relación en doble vía de las magnitudes en sentido vertical, no logra determinar el cociente entre una distancia recorrida y un número de viajes.

P_2 : Teniendo en cuenta la información anterior, determine las magnitudes que intervienen en la situación, según la tabla 1

El estudiante responde que las magnitudes que intervienen en la tabla son: cantidad de viajes y distancia recorrida en km.

P_3 : Explique de qué depende la distancia recorrida en Km en el caso dado

El estudiante determina la relación de dependencia y responde que la distancia recorrida en Km depende del número de viajes porque al sumar el número de viajes aumenta la distancia recorrida.

De acuerdo a las respuestas dadas en la preguntas P_2 y P_3 , se puede observar que el estudiante identifica las magnitudes que intervienen en la situación como cantidad de viajes y distancia recorrida en km, en lo requerido en la P_2 y además reconoce la relación de dependencia entre dichas magnitudes (P_3), ya que en su explicación plantea que al sumar el número de viajes aumenta la distancia recorrida. Estos resultados indican que el estudiante avanza en la noción de patrón; es decir que reconoce la adición como medio de solución relacionando situaciones anteriores, también percibe la magnitud directamente proporcional inmersa en la situación, al determinar en este caso la suma, como el algoritmo que produce a su vez el aumento en la distancia recorrida.

P_4 : Indique a cuantos viajes corresponde la distancia de 100.135 Km

El estudiante responde que la cantidad de viajes correspondiente a 100.135 Km es 35, alude que realizó una división de 100.135 Km entre 2.861 Km que es el recorrido de un solo viaje.

P_5 : Para 32 viajes Cali – Ciudad de México qué distancia total se recorre

El estudiante responde que se recorren 91.552 Km, expresa que hace lo contrario de la pregunta anterior que es multiplicar el número de viajes (32) por 2.861Km que es el recorrido hasta ciudad de México.

Con respecto a los resultados de las P_4 y P_5 se puede observar que el estudiante, afianza en la comprensión y argumentación de procesos ya que emplea los algorítmicos pertinentes en cada situación, además entiende la relación inversa que existe no solo entre las dos preguntas, sino también entre las operaciones que involucra cada cuestionamiento. Todo lo anteriormente mencionado permite validar el desempeño esperado en tanto él reconoce operaciones inversas.

P_6 : Escriba una expresión que le permita calcular la distancia recorrida en Km para cualquier número de viajes

El estudiante no indica la expresión acertada, pero responde de forma inmediata que la expresión es: $x = 2861 - 6$ al preguntarle, el porqué de su respuesta, este alude que toma un viaje de 6 como un valor cualquiera y que este no varía por lo tanto la expresión es: $x = 2861 - 6$

Según lo expuesto por el E₁ en la P₆, se puede inferir que el estudiante no reconoce el mismo objeto a través de las diferentes representaciones que se dan de él ya que se hace una idea de cualquier viaje que sería 6; es decir no logra asociar a esta pregunta los procesos desarrollados en las preguntas P₄ y P₅ donde de forma algorítmica lo resuelve para 32 viajes y explica en forma verbal y adecuada, que multiplica el número de viajes (32) por 2.861. De acuerdo a lo anterior es posible afirmar que el estudiante particulariza procesos aritméticos mas no se vale de los mismos para llegar a generalizarlos en una expresión algebraica; ya que no logra conectar sus habilidades numéricas y verbales con la expresión algebraica requerida.

Tarea 3 (T3) : Dólares pagados y variación lineal

Pregunta 1 (P1): Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta el valor en dólares que pagó la familia Beltrán por cada tiquete de avión.

Número de viajeros	Precio por viaje (Dólares)	Precio total
1	299	
2		598
4		
7		

Tabla 2

El estudiante completa totalmente la tabla 2, expresa de manera inicial que debe desarrollar multiplicaciones, para lo cual utiliza calculadora especial para invidentes, dentro de su proceso el estudiante multiplica el precio de un solo viajero equivalente a 299 dólares por la cantidad de viajes así: $299 \times 1 = 299$, $299 \times 2 = 598$, $299 \times 4 = 1.196$ y finalmente $299 \times 7 = 2.093$; además él expresa que 299 dólares siempre queda igual.

Conforme a los resultados de los cálculos dados por el Estudiante 1, para completar la tabla 2 de la P₁, se percibe que este reconoce uno de los aspectos más importantes de la

variación, como es el caso de lo que cambia y permanece constante, indicando que los 299 dólares siempre quedan igual. Finalmente es importante aclarar que a pesar de que las representaciones dadas en las tablas generan en él confusión, le brindan una comprensión en las reglas de formación, permitiéndole identificar el patrón multiplicativo implícito en la situación lo cual es muy significativo, ya que en este caso particular empieza a percibir una generalidad por medio del reconocimiento de un patrón multiplicativo, ya que logra “ver” y “decir”¹⁹ que el número de viajes siempre se multiplica por precio por viajero (299 dólares).

Es relevante precisar que la confusión se da debido a la lectura de tablas ya que él debe hacer un seguimiento de códigos dados en columnas y filas por su condición ante el registro visual.

P₂: Teniendo en cuenta la información anterior, determine las cantidades que intervienen según la tabla

El estudiante alude que las cantidades que intervienen en la tabla son tres: número de viajes, precio por viajero y precio total

P₃ Que cantidades varían y cuales permanecen constantes según la tabla

El estudiante responde que la cantidad que varía es número de viajes y la cantidad constante es el precio por viajero ya que su valor siempre es el mismo, omite el precio total. Para que el estudiante concluya lo requerido en la pregunta es necesario recordarle lo que está escrito ya que él cuestiona si le faltan cantidades porque son tres columnas, finalmente expresa que faltaba precio total, que varía porque es el resultado de la cantidad de viajeros.

Al relacionar las respuestas de la pregunta 2 y 3 referidas por el estudiante, se puede decir que el estudiante identifica las cantidades que intervienen en la tabla en la P₂ y determina con claridad las cantidades que varían y las que permanecen constantes lo pedido en la P₃, esto sugiere que el estudiante avanza en la conceptualización del pensamiento variacional al reconocer lo que cambia y lo que permanece constante, además tiene capacidad de interpretación, expresa ideas con claridad mediante un uso correcto del lenguaje matemático.

¹⁹ Proceso de generalización, según Mason y otros (1999)

P₄: Indique de que depende el valor total pagado en dólares

El estudiante responde que el valor total pagado en dólares depende del número de viajeros porque al multiplicar el número de viajes por el precio de cada viaje dan precios distintos.

P₅: Para 13.455 dólares cuál es el número de viajeros

El estudiante responde en forma acertada y expresa que el número de viajeros es 45 por que realiza una división de los 13.455 dólares entre 299 que es el precio por viajero

Con base a las respuestas dadas por el E₁, a las preguntas 4 y 5 se puede aludir que el estudiante establece relaciones de dependencia entre cantidades en la P₄, además determina el algoritmo adecuado para encontrar el número de viajeros para 13.455 dólares en la P₅.

Finalmente es posible afirmar que el estudiante progresa en el proceso de describir y modelar fenómenos reales, referidos a las relaciones cambiantes.

P₆: Escriba una expresión que permita calcular el valor pagado por los viajeros para cualquier número de viajes

El estudiante expresa que no entiende cómo hacerlo si no tiene un número de viajes, se le dice que lo haga entonces para n cantidades de viajes donde n puede ser el número de viajes que él quiera, vuelve a decir no, no entiendo.

P₇: Utilice la expresión anterior para calcular:

P_{7a}: Los dólares pagados por 23 viajes

El estudiante responde que si tiene en cuenta la tabla 2, que completo con anterioridad, él debe multiplicar 23 viajes por 299 dólares y así obtiene 6.877 dólares

P_{7b}: El número de viajes por persona si pagan 2.691 dólares

El estudiante no responde de forma numérica, si no que escribe que la expresión es:

$2691x = 9$, explica que esa es la expresión, porque son nueve viajes (hace varias operaciones en su calculadora especial), se le pregunta qué hiciste y alude que realiza divisiones para ensayar cual es la expresión correcta.

En concordancia con las respuestas dadas por el estudiante a las preguntas 6 y 7 (P₆, P_{7a} y P_{7b}), se confirma lo mencionado en la P₆ de la tarea 2, el estudiante entiende la variación; no obstante no la generaliza algebraicamente ya que en la P₆ se resiste a responder al decir que no entiende, porque no aparece un número determinado de viajes, lo cual no es coherente con lo resuelto en la tabla 2 de la P₁ ya que la completa para distintas cantidades de viajes.

Sin embargo, en la P_{7a}, no tiene ninguna dificultad en encontrar los dólares pagados por 23 viajes pero en forma numérica, sin necesidad de utilizar la expresión requerida en la pregunta, esto se transfiere a la P_{7b}, donde por el método de ensayo y error obtiene 9 como el número de viajes por persona si pagan 2.691 dólares pese a plantear la expresión incorrecta.

De acuerdo con lo anterior, el estudiante no percibe conexiones en las representaciones algebraicas, esto indica que el estudiante no logra formalizar el 299 como el patrón que se repite y a su vez hacer uso de él en diferentes situaciones, persistiendo en soluciones aritméticas lo que genera que no consiga determinar la expresión vista, como la herramienta que le permite sintetizar las relaciones entre los datos dados. Adicionalmente continua haciendo uso de métodos primitivos los cuales no le permiten el uso de la expresión como medio de solución.

Estudiante 2 (E₂ Colegio Bolívar):

Metodología: Para la implementación de la situación se hace inicialmente una lectura pausada de cada una de las tareas, en donde el estudiante pueda identificar los elementos más importantes y contextualizarse en las mismas; además de esto se hace uso de espacios individualizados en donde el estudiante complete cada una de las actividades programadas haciendo uso de recursos como la calculadora. La situación se hizo fueron por tareas, procurando constantemente que el estudiante estableciera relaciones entre cada una de ellas, las

lecturas de las actividades deben ser acompañadas por el docente investigador para ayudar a una mayor comprensión de estas.

S1: Variaciones Lineales y el Concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita real

En las vacaciones del 2015; es decir entre los meses de Julio y Agosto, Samuel estudiante del colegio Bolívar de la ciudad de Cali viajó con su papá, su madrastra, y sus dos hermanos desde Cali a la ciudad de México DF. La distancia recorrida en el viaje fue de 2.861 km, con una duración de vuelo de 3 horas y 55 minutos. El costo de los tiquetes de avión en primera clase (ida y regreso) de toda la familia fue de 1.495 dólares.

Tarea 1(T₁): Comprendo la situación

P₁: Teniendo en cuenta la situación anterior, indique el valor de los tiquetes en pesos colombianos, si el valor del dólar hoy es de \$2.850 pesos colombianos
 P₂: Indique el valor total pagado en dólares por un tiquete de avión.

En la P₁ el estudiante multiplica 1.495 dólares pagados por todos los tiquetes de avión con el valor equivalente a un dólar que corresponde a 2.850 pesos colombianos (Para los cálculos, utilizó como recurso de apoyo una calculadora convencional). De otra parte, recordemos que para la T₁P₂ se pide dar el valor total pagado en dólares por un tiquete de avión; descripción que el estudiante pasa por alto, y en lugar de usar la información suministrada en dólares, termina por tomar la información en pesos colombianos y dividir por el número total de viajeros.

De acuerdo a los datos obtenidos en la P₁ y en la P₂, el estudiante comprende el enunciado y seguidamente hace relaciones tanto numéricas como algorítmicas; sin embargo presenta confusión en el cambio y conversión de moneda, y en general en la operación inversa al producto. Es importante tener en cuenta que la P₂ presenta un error dentro del mismo enunciado; ya que se pide hallar el valor total pagado en dólares por un tiquete de avión, lo cual genera confusión para el estudiante la palabra resaltada total, pues este alude que la información que debe utilizar es la que está asignada desde el principio con esta característica de totalidad, es decir la respuesta encontrada en la P₁.

P₃: Halle el valor en pesos colombianos de un tiquete de Cali a ciudad de México.

P₄: Encuentre el valor en pesos mexicanos de todos los tiquetes de Cali a ciudad de México (1 peso mexicano \$174 pesos colombianos).

El estudiante encuentra la respuesta acertada para la P₃, para lo cual divide el total en pesos colombianos pagados por los tiquetes de avión entre el número total de viajeros. En cuanto a la P₄ desarrolla la conversión de pesos colombianos a pesos mexicanos correctamente, identificando que el proceso indicado corresponde a la división del total pagado por los tiquetes en pesos colombianos entre el valor equivalente de un peso mexicano; sin embargo al momento de describir en forma verbal el proceso realizado, manifiesta confusión a la hora de determinar si la respuesta final se encuentra en pesos colombianos o en pesos mexicanos.

En cuanto a las respuestas de las preguntas 3 y 4, el estudiante usa adecuadamente la conversión de la moneda en pesos colombianos y en pesos mexicanos. Desarrolla de manera satisfactoria procesos de tipo algorítmicos, empleando como recurso de conteo la calculadora convencional; además es importante subrayar que tiene un buen manejo de la herramienta y no presenta confusiones en la nomenclatura convencional de escritura numérica (el punto y la coma en la calculadora). En los registros audiovisuales, el estudiante manifiesta inicialmente duda en cuanto a las características que él debe atribuir a cada una de sus respuestas (¿Respuesta en pesos colombianos o en pesos mexicanos?).

P₅: Calcule cuántos kilómetros recorre la familia Beltrán en un viaje ida y regreso de Cali, ciudad de México.

Para el desarrollo de esta pregunta el estudiante multiplicó la distancia recorrida de 2861 km de ida y regreso por dos; aludiendo en su descripción verbal, que fueron y regresaron en total dos veces.

Teniendo en cuenta el registro audiovisual, en el inicio de esta pregunta el Estudiante manifiesta confusión a la hora de identificar dentro del problema el dato que corresponde a la distancia (2.861 km) y opta por tomar el dato que corresponde a los 1.495 dólares. Duda en varias oportunidades, mientras tanto vuelve a leer detenidamente y se da cuenta cuál es el dato que en este caso debe usar para el desarrollo. Finalmente identifica correctamente que a mayor

número de viajes (viaje de ida y regreso de Cali a ciudad de México), mayor es la distancia recorrida.

En cuanto a la respuesta a la P₅, el estudiante presenta dificultad en identificar y diferenciar magnitudes y sus características, como ejemplo la diferencia entre un valor de una distancia y un valor aludido a la moneda; sin embargo identifica la noción de proporcionalidad directa, aludiendo que algunas magnitudes como las que se presentan en el problema pueden aumentar al mismo tiempo.

Tarea 2(T₂): Distancia Recorrida y Variación Lineal								
P ₁ : Teniendo en cuenta la situación del viaje de Samuel completa la siguiente tabla:								
N° de viajes	1	2	3		10	11	13	
Distancia en Km recorridos	2861			17166				57220

Tabla 1

El estudiante completa la tabla correctamente para dos y tres números de viajes, para obtener la distancia recorrida en dos viajes, multiplica 2.861 km por 2, seguidamente para obtener la distancia correspondiente a tres viajes, a 5.722 km le suma 2861 km. De otra parte cuando se le pide determinar el número de viajes para una distancia recorrida de 17.166 km, el estudiante escribe una respuesta errada puesto que manifiesta que el patrón que siempre se debe seguir es multiplicar por dos y posteriormente sumar 2.861 km; además indica que de 8.583 km a 17.166 km la distancia se duplica, por tanto ocurre lo mismo con el número de viajes; sin embargo en su intento de duplicar el número de viajes no multiplica por dos, sino que suma dos obteniendo como resultado 5 número de viajes. Para número de viajes correspondiente a 10, 11 y 13 el estudiante emplea una lectura horizontal de la tabla, siguiendo un patrón aditivo de los 2.861 km y multiplicando posteriormente el resultado anterior por dos, esta última parte la desarrolla así:

$$17.166 \text{ km} + 2.861 \text{ km} = 20.027 \text{ km}$$

$$20.027 \text{ km} \times 2 = 40.054 \text{ km}$$

$$40.054 \text{ km} + 2.861 \text{ km} = 42.915 \text{ km}$$

Con relación a la respuesta de la pregunta 1 de la tarea 2, el estudiante no logra identificar el factor multiplicativo para cualquier número de distancias ni tampoco la relación inversa entre la distancia y el número de viajes, esto quiere decir que de manera inicial él completa correctamente distancias que corresponden a números de viajes consecutivos o a valores cercanos en la tabla, e intenta proponer un patrón que conlleve a cada una de las respuestas; sin embargo esta estrategia solo le funciona para los primeros tres datos de la tabla. Además es posible decir que el estudiante presenta dificultad para identificar la regularidad de un patrón numérico, teniendo en cuenta los diferentes momentos de la situación mediante datos organizados en una tabla. Cabe destacar que de manera inicial usa en sus procesos sumas reiteradas y multiplicaciones para determinar la distancia, haciendo una lectura lineal y omitiendo la relación vertical entre las magnitudes; sin embargo generaliza este esquema mencionado para el cálculo de los valores faltantes en la tabla, presentando dificultad en la validación del patrón.

P₂: Teniendo en cuenta la información anterior, determine las magnitudes que intervienen en la situación, según la tabla 1.

El estudiante identifica las dos magnitudes presentes en la situación correspondientes a la distancia y números de viajes. Es importante mencionar que para el desarrollo de esta pregunta, fue necesario de que el docente investigador diera claridad sobre la noción de magnitud a partir de ejemplos sencillos.

P₃: Explique de qué depende la distancia recorrida en km en el caso dado.

Para la P₃, alude una vez más que la distancia recorrida en km depende del kilometraje, es decir; de los 2861 km.

De acuerdo a las respuestas dadas en la pregunta 2 y 3, el estudiante presenta dificultad para identificar y diferenciar una magnitud; sin embargo logra llegar a la noción de esta mediante procesos de verbalización o formas discursivas mediadas por el profesor. De otra parte, se le dificulta determinar e identificar relaciones de dependencia entre dos magnitudes como lo es en este caso la distancia y Número de viajes; ya que alude que los kilómetros

recorridos dependen de los mismos kilómetros, de hecho esta respuesta confirma lo propuesto por él mismo en la T_2P_1 , en donde expresa que el patrón que siempre se cumple está determinado por la suma consecutiva de los 2861 km; lo cual indica que este continua haciendo una lectura horizontal de la tabla y omitiendo la relación vertical o en doble vía de las dos magnitudes.

P₄: Indique a cuántos viajes corresponde la distancia de 100.135 km.

P₅: Para 32 viajes de Cali-Ciudad de México qué distancia total se recorre.

En las preguntas 4 y 5 respectivamente, para determinar el resultado el estudiante divide 100.135 km entre los 2861 km, para lo cual obtuvo un total de 35 viajes, de otra parte para hallar la distancia total que se recorre en 32 viajes, multiplica 2861 km por 32 viajes, lo cual le da como resultado 91.552 km; el estudiante deja claramente indicado en su respuesta, que este valor corresponde a una distancia.

En cuanto a las respuestas 4 y 5, se puede decir que el estudiante emplea correctamente procesos algorítmicos y la reversibilidad de las operaciones (multiplicación para determinar el número de kilómetros y división para el número de viajes). Cabe anotar que el Estudiante en esta oportunidad en comparación con las anteriores, deja claro en su respuesta las unidades de medidas correspondientes, como por ejemplo: el caso particular de la distancia.

P₆: Escriba una expresión que le permita calcular la distancia recorrida en km para cualquier número de viajes.

En esta pregunta 6, cuando se le pide al estudiante que escriba una expresión que le permita calcular la distancia para cualquier número de viajes, este no logra dar una expresión algebraica en términos de una variable, si no que describe a manera de discurso lo que él comprende de la situación y lo manifiesta de la siguiente forma: “Siempre multiplicado por 2 o por la cantidad de 2.861”

Con relación a la respuesta de la pregunta 6, el estudiante no propone una expresión algebraica (expresión funcional) que represente o modele la situación matemática, es decir; que permita calcular la distancia recorrida en *km* para cualquier número de viajes; si no que lo hace

mediante un proceso verbal o discursivo de la situación. Es importante resaltar que desde el principio este manifiesta como patrón de regularidad que: “siempre se debe multiplicar por dos o sumar por la cantidad 2.861 km ”, lo cual indica que él reconoce que 2.861 km es un valor constante, a su vez lo particulariza multiplicando por dos, pero no lo logra generalizarlo a un nivel algebraico. Lo anterior quiere decir que prevalece dentro de su esquema un proceso aritmético y que usa una interpretación anterior de la situación solo en forma verbal.

Tarea 3 (T3) : Dólares pagados y variación lineal

Pregunta 1 (P₁): Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta el valor en dólares que pagó la familia Beltrán por cada tiquete de avión.

Número de viajeros	Precio por viaje (Dólares)	Precio total
1	299	
2		598
4		
7		

Tabla 2

El estudiante no acierta en los cálculos requeridos para completar los valores faltantes en la tabla, es así como para completar la columna del precio por viaje (en dólares) multiplica 299 dólares por 2, obteniendo 598 dólares, valor que posteriormente multiplica por 4; para completar esta columna, el estudiante desarrolla los siguientes productos:

$$299 \times 1 = 299$$

$$299 \times 2 = 598$$

$$598 \times 4 = 2.392$$

$$2.392 \times 7 = 16.744$$

De otra parte, para completar la columna del precio total, suma de manera consecutiva a cada resultado 299 dólares, hasta completar todos los valores ($299 + 299, 598 + 299, 897 + 299$).

Teniendo en cuenta la respuesta a la pregunta 1 de la tarea 3, el Estudiante identifica la cantidad que permanece constante y de hecho la utiliza en varias partes del desarrollo del problema; sin embargo no logra establecer una relación de dependencia y variación entre el

precio por viaje y el número de viajeros, además no usa el patrón multiplicativo para completar la información que se le pide. En general presenta confusión en la lectura e interpretación de datos organizados en tablas. Finalmente es posible decir que el estudiante por lo general se vale de reglas o estrategias que designan un patrón errado para dar paso a la solución de la situación.

P₂: Teniendo en cuenta la información anterior, determine las cantidades que intervienen según la tabla.

P₃: Qué cantidades varían y cuáles permanecen constantes según la tabla.

P₄: Indique de qué depende el valor total pagado en dólares.

En cuanto la pregunta 2 el estudiante no presenta un proceso por escrito; sin embargo en los registros de campo se evidencia que el estudiante identifica en el problema dos cantidades: número de viajeros y precio en dólares. De otra parte, teniendo en cuenta las cantidades que varían y las que permanecen constantes, el estudiante responde en la P₃ que los 299 dólares permanecen constantes, aludiendo que este es un valor dependiente y que lo variable viene a ser el dinero. Finalmente para P₄ el estudiante indica que el valor total pagado en dólares, depende del precio por viaje (299 dólares).

Con relación a las respuestas dadas por el estudiante a las preguntas 2, 3 y 4, es posible decir que mediante formas discursivas el estudiante identifica una o más cantidades dentro de la situación matemática y a su vez describe valores de dependencia; sin embargo al momento de observar y analizar la tabla dada, se le dificulta hacer una relación entre las cantidades variables y no variables, dice: “Los 299 dólares son un valor fijo y el dinero total varía”. De acuerdo a lo anterior es posible inferir que el estudiante particulariza la situación en su discurso mas no logra matematizarlo.

P₅: Para 13.455 dólares cuál es el número de viajeros.

En esta pregunta 5, el estudiante para determinar el número de viajeros que corresponden a 13.455 dólares pagados, divide dicho valor entre los 299 dólares (precio por viaje), con lo cual obtiene un valor acertado de 45 personas.

Con relación a la respuesta correspondiente a la pregunta 5, se evidencia procesos algorítmicos correctos, lo cual indica que el estudiante empieza a identificar operaciones inversas, como lo es el caso puntual del cociente entre dos valores. Es importante recordar que al estudiante se le dificulta determinar relaciones e identificar algoritmos cuando se encuentra con este tipo de preguntas en representación tabular.

P₆: Escriba una expresión que permita calcular el valor pagado por los viajeros para cualquier número de viajes.

P₇: Utilice la expresión anterior para calcular:

- a. Los dólares pagados por 23 viajes
- b. El número de viajes por persona si pagan 2.691 dólares.

Como expresión que le permite calcular el valor pagado por los viajeros para cualquier número de viajes, el estudiante escribe: 299 por cantidad de personas, seguidamente confirma su afirmación con la expresión $299x$. En cuanto a la P₇ el estudiante vuelve a escribir la expresión $299x = \underline{\hspace{2cm}}$ (No escribe nada en el espacio, después del signo igual). Usando la expresión, multiplica 299 dólares por 23 viajes, con lo cual obtiene un valor total de 6.877 dólares. De otra parte divide 2.691 dólares entre 299 dólares y obtiene un total de 9 viajes.

Con relación a la respuesta de la pregunta 6 y pregunta 7, el estudiante representa una expresión algebraica sencilla mediante un lenguaje natural y un lenguaje algebraico; sin embargo continua presentando confusión al momento de identificar las magnitudes que intervienen en dicha representación. De otra parte se le dificulta especificar con claridad un proceso, buscando siempre obtener un resultado, pasando por alto las propiedades de equivalencia en la resolución de una ecuación lineal y en este caso particular una ecuación aritmética sencilla.

3.2.5 Resultados y análisis de los resultados de la Situación 2

Estudiante (E₁):

Metodología: para la aplicación de esta situación se hace uso del sistema Braille, se presenta dificultad en la lectura de este, especialmente la información de las tablas, el estudiante requiere constantemente ayuda para completar lo referido a las tablas el expresa que algunas letras las confunde ya que los códigos de las mayúsculas se le parecen algunas letras minúsculas.

En busca de facilitar un poco el trabajo del estudiante se decide leer en forma pausada la información de la tabla 3 que tiene la Tarea uno (T_1) y la información de la tabla 4 de la Tarea 3 (T_3), para que el estudiante la transcriba.

Es importante resaltar que para la transcripción tabular es necesario un acercamiento de la tabla por medio de la implementación física de esta en plastilina, para que él luego deslice sus dedos por filas y columnas, finalmente el estudiante las construye en el sistema Braille en tres columnas y luego las otras tres.

Situación 2: Descuentos, Impuestos y Ecuaciones Lineales

La familia Beltrán decidió hospedarse en el mes de Julio en el hotel StarwoodHotels&Resort, en donde en época normal por cena se pagan 50 dólares y en temporada de vacaciones se hace un descuento por el tiempo que permanezca en el hotel de 15 dólares diarios. Además con relación al hospedaje, a cada miembro de la familia le cobraron un impuesto de 61 dólares por todo el tiempo de estadía, por noche pagan 319 dólares cada uno.

Tarea 1 (T_1): Descuentos y Expresiones Algebraicas					
P ₁ : Teniendo en cuenta la información anterior complete la siguiente tabla:					
Número de cenas	Precio normal por cena	Descuento diario	Precio total normal por cena	Descuento total a pagar en temporada de vacaciones	Precio total por cena en temporada de vacaciones
1	50	15	50	15	35
2			100		70
3					105
4		15			
	50		300	90	
					350
22				330	

Tabla 3

El estudiante completa el registro tabular en forma acertada, inicia con los valores que son constantes; dice que en la columna del precio normal por cena siempre va 50 y el descuento que hacen diario que es de 15 dólares, también queda igual, luego expresa que los valores de la columna cuatro se completan multiplicando el número de cenas por el valor de precio normal por cena ($3 \times 50 = 150$, $4 \times 50 = 200$ y $22 \times 50 = 110$), seguido lo anterior alude que para

completar la columna cinco del descuento total a pagar en temporada de vacaciones multiplica número de cenas por el descuento diario así:

$$2 \times 15 = 30, 3 \times 15 = 45, 4 \times 15 = 60.$$

Seguido lo anterior dice que en la columna uno que corresponde a la fila 5 va el número 6 y que realiza una división ($300 \div 50 = 6$), continua con el cálculo de la columna seis, correspondiente a la fila 4y alude que resta el descuento diario para 4 cenas que es 200 y así obtiene 140 ($200 - 60 = 140$), luego realiza varias multiplicaciones ensayando qué valor corresponde a la fila 5 columna uno, posteriormente dice, que se guía con el valor de 300, ($300 - 90 = 210$).

Finalmente para completar los registros que faltan en la tabla hace varias operaciones, se le pregunta ¿Qué haces?, Responde: No, estoy ensayando con multiplicación, división y resta, esto quiere decir que el estudiante no logra aclarar que hizo exactamente para concluir la totalidad de los datos requeridos en la tabla, es decir, no especifica columna 5 valor que corresponde a fila 6 y columna 6 correspondiente a fila 5 y fila 8.

Es de gran importancia mencionar que el trabajo ante este registro tabular fue un proceso lento y a su vez requirió de un mayor acompañamiento discursivo por parte del docente.

De acuerdo a los cálculos realizados por el Estudiante 1, para completar la información requerida en la tabla 3 correspondiente a la P_1 ; se puede afirmar que el estudiante afianza en la comprensión de las cantidades que permanecen constantes, al expresar que el precio normal por cena es de 50 dólares y el descuento diario siempre es de 15 dólares, además identifica y utiliza los algoritmos adecuados como es el caso de la división, multiplicación y resta para los valores que faltan en la columna uno fila 5 y 6 respectivamente.

Como estrategia el estudiante toma puntos de referencia, al expresar que ciertos valores le sirven de guía para continuar con los cálculos, además la estrategia de ensayo y error que utilizó el joven evidencia una comprensión parcial de patrones que se repiten, ya que no logra generalizar las operaciones requeridas para completar los valores de la tabla 3, como se mencionó anteriormente.

P₂: Teniendo en cuenta la información dada en la tabla 3, indique las cantidades que intervienen en el problema

El estudiante identifica de forma clara las cantidades que intervienen en la tabla 3 y responde número de cenas, precio normal por cena, descuento total a pagar en temporada de vacaciones, descuento diario (la cantidad de descuento diario la coloco en orden diferente, el estudiante lee de nuevo la tabla, compara lo escrito con lo que hace para saber si no le falta alguna cantidad), finalmente expresa que le falta precio total por cena en temporada de vacaciones, seguido lo anterior para estar totalmente seguro pregunta si son seis columnas.

P₃: Analice los datos que completó en la tabla 3 y nombre a continuación las cantidades que varían y las que permanecen constantes

El estudiante responde que las cantidades constantes son: número de cenas, precio normal por cena, descuento diario y que las cantidades que varían son: precio normal por cena, descuento total a pagar en temporada de vacaciones y precio total por cena en temporada de vacaciones

Según lo expuesto en los resultados de las P₂ y P₃, por el estudiante, se alude que él reconoce las cantidades que intervienen en la tabla 3 en lo referido a la P₂; además determina las cantidades que varían y las cantidades que permanecen constantes en la P₃. Es importante aclarar que la confusión que genera en el estudiante la información dada en la tabla, con respecto al número de columnas, no fue obstáculo para que él determinara lo requerido en cada una de las preguntas.

Finalmente de acuerdo al tiempo requerido por el E₁ para calcular valores dados en las tablas y a su vez que él pueda interpretar la información dada en ellas, se resalta que con un estudiante invidente se debe tener en cuenta: Que el ritmo de trabajo, tanto en la elaboración como en la interpretación de las representaciones es lento, también el apoyo verbal es básico para afianzarlo en su trabajo o alertarlo sobre posibles errores cometidos durante el proceso de elaboración e interpretación.

P₄: Indique de qué depende el valor total a pagar por cenas en temporada de vacaciones

El estudiante indica que el valor a pagar por cenas en temporada de vacaciones depende de la cantidad de cenas y del descuento que se hace diariamente de los 15 dólares

De acuerdo a la respuesta dada por el estudiante a la P₄, es posible inferir que él logra afianzar sus conocimientos en cuanto a la interpretación de la información de la tabla 3, explica relaciones de dependencia entre cantidades, además deduce, que depende de la cantidad de cenas y del descuento que se hace diariamente de los 15 dólares. Lo anterior evidencia un acercamiento a la noción de variación por medio de las relaciones de dependencia y la argumentación de las mismas.

Tarea 2 (T₂): Descuentos y Ecuaciones

P₁: Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán calcular el dinero en dólares a pagar al restaurante en **temporada normal**, por un número cualquiera de cenas.

El estudiante responde que la expresión es $50x$ por que en época normal se pagan 50 dólares por cena

P₂: Utilice la expresión algebraica anterior, para hallar el dinero en dólares que debe pagar cada uno, si alcanzan a consumir 9 cenas en **temporada normal**

El estudiante responde que el dinero que paga cada uno si consumen 9 cenas es de 450 dólares, ya que se debe multiplicar una cena de 50 dólares por el número de cenas; al momento de preguntarle si utilizo la expresión de $50x$, alude de manera afirmativa, que x serian las 9 cenas y esto se multiplica por 50.

Teniendo en cuenta las respuestas de las preguntas 1 y 2 indicadas por el Estudiante 1, se evidencia que este produce un modelo matemático, que permite verificar una situación problema en lo descrito en la P₁ y lo logra aplicar en la P₂ al determinar que x son las cenas y por lo tanto se debe multiplicar por 50, estos resultados permiten validar una de las expectativas de desempeño planteadas, al hacer uso de expresiones algebraicas para interpretar matemáticamente enunciados del lenguaje común, adicionalmente es posible afirmar que

generaliza un patrón, ya que de acuerdo a las preguntas anteriores logra visualizar mediante los diferentes registros un patrón numérico, lo verbaliza, lo contextualiza y finalmente lo registra por medio de una expresión algebraica.

En contraste con las respuestas dadas a las preguntas 6 (tarea 1, situación 1) y 6 (tarea 3, situación 1), el estudiante logra plantear la expresión algebraica que le permite generalizar el cálculo del dinero para cualquier cantidad n de cenas. En este sentido, avanza en el desarrollo del pensamiento variacional, el concepto de variable y la noción de variación en tanto empieza a reproducir un patrón por medio de cierto procedimiento, algoritmo o formula (Estándares básicos de competencias MEN)

P₃: Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán hallar el dinero en dólares a pagar al restaurante en **temporada de vacaciones**, por un número determinado de cenas

El estudiante escribe la expresión $35x = 6$, se le pregunta porque lo igualas a 6, y él explica que escoge un número determinado de 6 cenas y que este no varía

P₄: Utilice la expresión algebraica anterior, para calcular el dinero en dólares que debe pagar cada uno, si alcanzan a consumir 12 cenas en **temporada de vacaciones**

El estudiante responde que el dinero que debe pagar cada uno al consumir 12 cenas en temporada de vacaciones es 420, al preguntarle ¿Qué hiciste?; él alude que hace una multiplicación de las 12 cenas por el precio de una sola que son 35 dólares, como es época de vacaciones las cenas cuestan solo 35 dólares, se le pregunta ¿Utilizaste la expresión?, y expresa que multiplico 35 por x ; porque x serian las 12 cenas.

Con relación a las respuestas dadas por el E₁ a las P₃ y P₄ se puede aludir que el estudiante determina que el valor de cada cena en temporada de vacaciones es de 35 dólares, lo cual indica que tiene en cuenta que el costo de las cenas es de 50 dólares y hace el descuento de 15 dólares por cena en temporada de vacaciones por lo tanto formaliza en una expresión $35x$, sin embargo lo iguala a 6, a partir de este momento desliga el enunciado con la expresión algebraica al parecer lo confunde, asume que lo debe hacer por un número determinado de cenas,

ya que habla de variación pero expresa que toma 6 cenas, pero este 6 no varía en lo requerido en la P_3 , lo anterior permite inferir que el estudiante ve la expresión algebraica como incompleta e intenta cerrar el proceso mediante una igualdad; es decir, en términos de Palarea y Socas (1994, pag. 98) “no hay aceptación de la falta de clausura” mientras que en la P_4 tiene clara la expresión y la utiliza de manera acertada, lo cual indica que identifica un modelo que es $35x$.

Todo lo anteriormente planteado evidencia que el estudiante con una discapacidad visual al igual que los demás estudiantes posee las mismas dificultades relacionadas con la naturaleza abstracta de los objetos algebraicos; es decir, que perciben las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos.

P_5 : Samuel dice que la expresión para calcular el número de cenas en época de vacaciones es: $(50-15)x$

P_{5a} : Analiza la validez de esta información

El estudiante responde que es verdadera la expresión: $(50 - 15)x$, por que en época normal una cena cuesta 50 dólares y en vacaciones 15 dólares menos, por lo tanto a 50 se le debe restar 15

P_{5b} : Reduce la expresión

El estudiante responde que no entiende ¿Cómo así reducir la expresión?, se le da una explicación de forma numérica; en donde se tienen varios números y mediante la operación indicada se reducen, pero aun así expresa: esta pregunta no la entiendo

P_6 : Si la familia Beltrán pago 3.500 dólares por un número de cenas x . Indique el número total de cenas pagadas.

El estudiante responde que son 70 cenas, expresas que multiplico el dinero total que ellos habían pagado, es decir, el costo de una cena que cuesta 50 dólares por una cantidad más alta de cenas como el 70. Explica que hizo ensayos de multiplicaciones por varias opciones

numéricas hasta que obtiene los 3.500 dólares que pago la familia Beltrán. (Hace uso de la calculadora)

Con base a los resultados obtenidos en las P_{5a} , P_{5b} y P_6 se puede observar que el estudiante reconoce la expresión $(50 - 15)x$ como fórmula para calcular número de cenas en temporada de vacaciones en la P_{5a} , y en la P_{5b} , vuelve y se confunde al solicitarle que reduzca la expresión como en requerimientos que se le hacen en preguntas anteriores; se resiste a dar respuesta al expresar no entiendo, mientras que en la P_6 utiliza el método de ensayo y error para hallar el número de cenas pagadas con 3.500 dólares. Es decir, pese a que el estudiante en la pregunta 1 de la T_1 y P_1 de la T_2 de la situación 2 plantea, reconoce lo constante y lo que varía, e identifica el modelo matemático $50x$, no hace uso de esta expresión para dar solución a la pregunta requerida, no utiliza la división como forma de solución ya que continua haciendo tanteos con la multiplicación hasta obtener el resultado.

En este sentido se puede afirmar que continúa la dificultad en asociar el mismo objeto con las diferentes representaciones que se dan de él comprende pero no formaliza la expresión, el estudiante hace uso de métodos primitivos lo que le impide generalizar los cálculos.

Es pertinente aclarar que la formulación de la pregunta 6, no es clara con respecto a la temporada de consumo de las cenas, normal o vacaciones, por tanto se deben aceptar las dos respuestas y que el utilice cualquiera de las dos opciones ($35x$ o $50x$). El estudiante ante esta situación recurre a $50x$, que ha consolidado como la expresión que modela el dinero a pagar por determinado número de cenas.

Tarea 3: Acercándonos a la Ecuación de la Forma $ax + b = c$

P₁: Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la información sobre el hospedaje de la familia Beltrán en el hotel Starwood Hotels& Resort.

Número de noches	Precio por noche	Precio por número de noches	Valor Impuesto USD	Precio a pagar por el número de noches
1	319		61	
2		319 x 2		699
3				1.018
	319			1.975
			61	3.251
12				
				4.846
25	319			

Tabla 4

El estudiante realiza todos los cálculos requeridos en la tabla 4, inicia al decir, que la columna de precio por noche se completa toda con 319 por que no cambia y que el valor del impuesto en dólares también va igual todo con 61 porque es un cargo fijo, alude que es similar a la tabla anterior tabla 3 de la T₁.

Posteriormente dice que la columna 3, precio por número de noches se completa multiplicando 319 por cada valor de la columna de número de noches (319x1,319x2, 319x3,319x12,319x12 y 319x25). Para los valores que faltan en la columna uno de número de noches correspondientes a las filas 4,5 y 7 expresa que son 6, 10 y 15 respectivamente, los completa por método de ensayo y error, hace uso de la calculadora.

Para determinar los registros de la columna 5 de precio total a pagar por el número de noches explica que multiplico número de noches por el precio número de noches y que luego adiciono el cargo fijo que es 61, obteniendo los valores de la columna 5 así: 380 fila 1, 3.889 fila 6 y 8.036 fila 8.

Es importante anotar que el estudiante inicia un trabajo muy lento para hallar los valores de la tabla ya que debe buscar lo escrito en Braille, expresa que debe leer despacio porque confunde algunos códigos (letras mayúsculas con letras minúsculas), se decide darle la

información contenida en la tabla en forma oral ya que expresa que no comprende muchos de los datos dados, se hace por medio de lectura pausada y él la realiza de tres columnas y luego las dos faltantes.

P₂: Indique las cantidades que varían y las que permanecen constantes según la información de la tabla

El estudiante responde que las cantidades que varían son número de noches, y precio a pagar por número de noches y las cantidades que no varían, precio por noche, y valor impuesto, luego el estudiante expresa: que debe tener en cuenta que son 5 columnas por lo tanto le falta una de las cantidades que varía, finalmente dice que faltaba precio a pagar por el número de noches

Mediante los resultados expuestos por el E₁ en las preguntas 1 y 2, se puede señalar que el estudiante reconoce cantidades constantes al determinar que la columna de precio por noche se completa con el 319 ya que este valor no cambia y de igual manera expresa, que el impuesto es fijo, adicionalmente determina las operaciones adecuadas, comprende secuencias aditivas y multiplicativas, busca estrategia de ensayo y error con multiplicación y suma para completar los registros en la fila 4,5 y 7 correspondientes a la columna uno en lo referido a la P₁, además interpreta la variación al reconocer lo que cambia y lo que permanece constante en la P₂.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede afirmar que el estudiante avanza en la interpretación y generalización de patrones a través de expresiones numéricas generales, que modelen el comportamiento multiplicativo de sus términos, pero aún no percibe las operaciones inversas (resta y división) como posible alternativa para calcular los valores faltantes en la columna uno de la tabla 4. Lo anterior corrobora lo expuesto en la pregunta 2 tarea 2 de la situación 2.

P₃: Describa como se calculó el precio total a pagar por 12 noches

El estudiante responde que el precio a pagar por 12 noches lo calculó multiplicando 12 noches por 319 dólares y que de esta forma se obtiene 3.828 dólares, luego le adiciono 61; esto equivale finalmente a 3.889 dólares.

P₄: Escriba una expresión que le permita calcular el precio total a pagar por x noches, teniendo en cuenta el valor por noche e impuesto

El estudiante dice que la expresión es $319x + 61$ porque x sería la noche a pagar y 61 es el impuesto fijo, responde de forma inmediata no duda al dar la respuesta

P₅: Use la expresión algebraica para encontrar el dinero total en dólares que la familia Beltrán pago por persona en 3 días, 50 días y 75 días

El estudiante usa la expresión $319x + 61$ donde por 3 días pagaría 1.018 dólares, se le pregunta al estudiante que hace y él explica que multiplico 319 por 3 equivalente a 957 aumentando el 61 que es el cargo fijo equivalente a 1.018, seguido lo anterior se le cuestiona ¿Por qué esta expresión? El alude por que 61 es impuesto y no varía, siempre es constante. Se le hace escribir de nuevo y leer lo escrito, ya que se percibe que se le olvidan los datos sino están escritos.

Para 50 días el estudiante dice que multiplica 319 por 50 equivalentes a 15.950 y la expresión es $319x + 15.950 = 61$. **Para 75 días** el estudiante multiplica 319 por 75 equivalentes a 23.925 y la expresión es $319x + 23.925 = 61$, al preguntarle porque cambias la expresión, él responde, en esta forma es posible luego adicionar el 61. Los valores dados por el E₁ para 50 días y para 75 días no son acertados ya que en ambos casos omite adicionar el cargo fijo.

En los resultados presentados en las preguntas 3, 4 y 5 por el E₁, se puede observar que el estudiante determina que 61 es un costo fijo, reconoce las operaciones pertinentes para calcular el costo total a pagar por 12 noches en la P₃, además progresa en plantear la expresión algebraica que le permita calcular el precio por noche teniendo en cuenta el impuesto en lo referido a la P₄; utiliza la expresión para calcular el costo de hospedaje por persona durante 3 días, pero al hacerlo por 50 días y 75 días omite el costo fijo el cual había indicado con anterioridad.

Todo lo expuesto anteriormente infiere que el estudiante hace sustituciones formales en el proceso de particularizar (para $x=3, 50, 75$) pero no valida la expresión para diferentes valores de la variable en la misma situación, dado que omite el cargo fijo para 50 y 75. Continúa

con la necesidad de operar y en este caso es el cierre de la ecuación igualándola siempre a un tercer número, es decir, que percibe el enunciado de forma incompleta como lo indica Moreno (2014) citando a Collís (1974).

P₆: Calcule el número de noches pagadas con 2.613 dólares y explique como lo hizo

El estudiante responde que el número de noches pagadas con 2.613 dólares es 8 noches, él alude que hizo una resta 2.613 dólares menos 61 que es el impuesto fijo, equivalente a 2.552 dólares y luego ese resultado lo dividió entre 319 dólares que era el costo de una noche. No duda en ningún momento de las operaciones que realizó.

P₇: Si en otro hotel la familia podría pagar por noche 289 dólares y un impuesto fijo de 121 dólares. Escriba una expresión que le permita calcular el costo de 5 noches en este hotel

El estudiante responde que la expresión es $289x = 121$, él expresa que la expresión es de esta forma porque 121 es el impuesto fijo no varía, complementa diciendo que las 5 noches tendrían un costo de 1.445 dólares, ya que él multiplica 289 dólares por 5 donde x son las 5 noches, luego adicionó 121 dólares que es el costo fijo para cualquier cantidad de noches para así obtener 1.566 dólares como el costo total de las 5 noches en el hotel.

P₈: Indique para que cantidad de noches pagaría un miembro de la familia Beltrán el mismo valor en ambos hoteles

El estudiante expresa que no entiende esta pregunta, que se confunde demasiado, al preguntarle qué es lo que no comprende, alude que confunde esta información con la del otro hotel

Al relacionar las respuestas de las preguntas 6,7 y 8 dadas por el Estudiante 1, llama la atención que el estudiante determina las operaciones adecuadas de la P₆, muestra seguridad al hacerlo, pero en la P₇ no utiliza la expresión correcta para calcular el costo de 5 noches en otro hotel con un valor nuevo del impuesto fijo, además alude que el 121 no varía, sin embargo con la expresión equivocada logra determinar en forma acertada el costo de las cinco noches en el

hotel, mientras en lo requerido en la P_8 ; se resiste a dar respuesta al expresar, no, me confundo con lo del otro hotel.

Se puede concluir que el planteamiento adecuado o no de la expresión algebraica no incide sobre los resultados de las diversas preguntas, puesto que a expresiones algebraicas incorrectas resultados correctos y a expresiones correctas resultados correctos.

Los resultados anteriores permiten cuestionar si la falta de visión genera en él mayor confusión en el momento de registrar la expresión, ya que de forma verbal parece que la percibe y la describe por medio de argumentos claros, pero al escribirla siente la necesidad de cerrarla con el signo igual y con un tercer número, todo lo anterior indica que el estudiante continua viendo la expresión algebraica como un enunciado incompleto.

Estudiante (E_2):

Metodología: En esta situación se hace de manera inicial un recuento y procesos más importantes trabajados en tareas anteriores, con el propósito de movilizar conceptos previos, adicionalmente se apoya al estudiante atreves de procesos discursivos que dé cuenta de las características más importantes involucradas en el concepto matemático de ecuación lineal.

Situación 2: Descuentos, Impuestos y Ecuaciones Lineales

La familia Beltrán decidió hospedarse en el mes de Julio en el hotel Starwood Hotels& Resort, en donde en época normal por cena se pagan 50 dólares y en temporada de vacaciones se hace un descuento por el tiempo que permanezca en el hotel de 15 dólares diarios. Además con relación al hospedaje, a cada miembro de la familia le cobraron un impuesto de 61 dólares por todo el tiempo de estadía, por noche pagan 319 dólares cada uno.

Tarea 1 (T₁): Descuentos y Expresiones Algebraicas					
P ₁ : Teniendo en cuenta la información anterior complete la siguiente tabla:					
Número de cenas	Precio normal por cena	Descuento diario	Precio total normal por cena	Descuento total a pagar en temporada de vacaciones	Precio total por cena en temporada de vacaciones
1	50	15	50	15	35
2			100		70
3					105
4		15			
	50		300	90	
					350
22				330	

Tabla 3

El estudiante afirma que tanto el precio como el descuento son valores que no cambian y que permanecen constantes, por lo que inicia completando los valores correspondientes a la columna del precio normal por cena y descuento diario, con 50 dólares y 15 dólares respectivamente, seguidamente continúa completando la tabla en forma horizontal y consecutiva, de la siguiente manera:

Para completar la información de las filas del precio total normal por cena, multiplica el precio de una cena 50 dólares por el número de cenas que encuentra en la columna 1 (1,2,3,4,,5,22 *cenas*), luego para completar las filas del descuento total a pagar en temporada de vacaciones, multiplica el descuento por cena (15 *dólares*) por el número de cenas (columna 1), posteriormente con lo que respecta a las filas del precio total por cena en temporada de vacaciones, resta al precio total normal por cena el descuento total a pagar en temporada de vacaciones.

Aunque completa casi en su totalidad la tabla sin presentar problema alguno, el estudiante presenta dificultad en completar el resto de la información, debido a que no se le proporciona como dato inmediato el número de cenas (fila 6 y fila 7). Para la fila 6, aunque manifiesta obstáculos de manera inicial, toma como dato referencial el precio total normal por cena de 300 dólares, buscando mediante ensayo el número que multiplicado por el precio normal de 50 dólares de una cena, de cómo resultado ese valor; es decir $50 \times 6 = 300$.

Finalmente en la fila 7 para la columna 1, asume de forma equivocada que el número de cenas es consecutivo por tanto escribe que corresponde al número 7, para determinar el precio total normal por cena multiplica 50 dólares por 7 cenas, seguidamente para el descuento total a

pagar en temporada de vacaciones (fila 7, columna 5) al precio total normal por cena (fila 7, columna 4) le resta el descuento diario de 15 dólares, con lo cual obtiene 335 dólares.

Con relación a la P_1 al estudiante se le facilita la identificación y distribución de información, lo que indica que comprende la representación tabular dada en la tarea; siempre y cuando los datos se muestren de forma clara (tabla 3). Reconoce e indica las cantidades constantes y variables dentro del problema, establece relaciones de dependencia entre magnitudes, lo que se evidencia en la interrelación de las cantidades presentes en la tabla.

Desarrolla e identifica algoritmos básicos, como lo es el caso de la adición y el producto; empleando el método de ensayo y error en un nivel aritmético, de otro lado su dificultad se hace presente en el desarrollo e identificación de algoritmos en donde se ven involucradas operaciones inversas como la división y la resta entre número enteros. Cabe puntualizar que para la P_1 de la T_1 , el estudiante en ningún momento generaliza procesos a nivel algebraico.

P_2 : Teniendo en cuenta la información dada en la tabla 3, indique las cantidades que intervienen en el problema.

P_3 : Analice los datos que completó en la tabla 3 y nombre a continuación las cantidades que varían y las que permanecen constantes.

P_4 : Indique de qué depende el valor total a pagar por cenas en temporada de vacaciones.

En la respuesta correspondiente a la pregunta 2 el estudiante enuncia, que las cantidades que intervienen en el problema son: Precio de cenas, número de cenas, precio total, el descuento y el precio total de cena. Además manifiesta en forma verbal, que las dos cantidades presentes en la tabla se refieren al número de cenas y al precio en dólares de las mismas. En la pregunta 3 responde que las cantidades que permanecen constantes son: el precio de la cena y el descuento; no especificando si el precio de la cena es en temporada normal o en temporada de vacaciones. También responde que las cantidades variables se refieren al precio total, descuento total a pagar y precio total de cena, finalmente en la P_4 cuando se le pregunta de qué depende el valor total a pagar por cenas en temporada de vacaciones, el estudiante responde que depende del precio total y el descuento total a pagar.

Con relación a las respuestas dadas en la pregunta 2, 3 y 4, el estudiante dos enuncia las magnitudes presentes en la situación, identifica y categoriza los valores constantes y variables, atribuyéndole sus principales características; sin embargo no logra identificar relaciones de dependencia entre cantidades. Teniendo en cuenta lo anterior, parece ser que existiera una contradicción entre la respuesta de la pregunta 1 con respecto a la respuesta de la pregunta 4; ya que en la representación tabular, el valor dependiente del número de cenas, fue un dato clave que el estudiante empleó durante la mayoría de sus procedimientos para completar los datos restantes de la tabla, mas sin embargo más adelante presenta dificultad para mencionar e identificar de forma puntual el valor de dependencia y su relación entre cantidades numéricas.

Tarea 2 (T₂): Descuentos y Ecuaciones

P₁: Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán calcular el dinero en dólares a pagar al restaurante en **temporada normal**, por un número cualquiera de cenas.

P₂: Utilice la expresión algebraica anterior, para hallar el dinero en dólares que debe pagar **cada uno**, si alcanzan a consumir 9 cenas en **temporada normal**.

Para la pregunta 1 de la tarea 2, el estudiante escribe que la expresión que permite calcular el dinero en dólares en temporada normal, por un número cualquiera de cenas es $50x$, explicando a su vez verbalmente que x puede representar un número cualquiera de cenas. En cuanto a la P₂, usa la expresión y evalúa el número 9 en la misma, dejando indicada la operación como 50×9 ; sin embargo no enuncia que esto equivale a 450 dólares.

Teniendo en cuenta las respuestas dadas para la pregunta 1 y 2, parece indicar que el estudiante modela la situación matemática, a partir de una representación tanto variable como algebraica, la cual se ha venido consolidando desde los procesos desarrollados en la tarea 1.

Además designa adecuadamente los objetos matemáticos involucrados, como lo es el caso puntual del número y de la letra, mediante el reconocimiento de un valor constante y un símbolo que varía dentro de un precio; también identifica valores que corresponden a una incógnita y evalúa cantidades numéricas en la misma.

Se infiere en el tipo de respuesta para la P₂, que el estudiante no indica el cierre de una operación a nivel aritmético, lo que lleva a pensar que el estudiante atribuye al lugar que ocupa la incógnita, un valor estático con el cual no se puede obtener un resultado.

P₃: Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán hallar el dinero en dólares a pagar al restaurante en *temporada de vacaciones*, por **un número** determinado de cenas.

P₄: Utilice la expresión algebraica anterior, para calcular el dinero en dólares que debe pagar **cada uno**, si alcanzan a consumir 12 cenas en *temporada de vacaciones*.

En la P₃ el estudiante escribe dos expresiones de manera respectiva, $15x$ y $35x$; sin embargo en su respuesta no especifica cuál de las dos expresiones permite calcular el dinero en dólares a pagar en temporada de vacaciones. De otra parte en la pregunta 4, el estudiante toma la expresión de la pregunta número dos ($50x$) y la usa para evaluar el número 12 así:

$$50 \times 12 = 600$$

En cuanto a la respuestas de la pregunta 3 y 4, el estudiante aunque identifica dos expresiones algebraicas, no logra hacer ningún tipo de diferenciación entre ellas, lo que le genera confusión al momento de implementarlas, esto quiere decir que no asigna el tipo de modelo a la que cada una corresponde, como lo es el caso puntual de la representación de un descuento. Parece indicar que el estudiante presenta un problema de interpretación de un enunciado en lenguaje natural a un lenguaje algebraico y en términos generales obvia un dato importante de la situación (expresión que representa el descuento), lo cual no hizo en la P₃; ya que para esta, da el resultado de una expresión algebraica que corresponde al precio en dólares, la cual viene hacer posterior al descuento; esto quiere decir, que de manera indirecta lo identifica dentro de la situación, mas no logra aplicarlo ni generalizarlo.

P₅: Samuel dice que la expresión para calcular el número de cenas en época de vacaciones es: $(50-15)x$

- a. Analiza la validez de esta afirmación
- b. Reduce la expresión

P₆: Si la familia Beltrán pago 3.500 dólares por un numero de cenas x . Indique el número total de cenas pagadas.

El estudiante no logra analizar el por qué la expresión $(50 - 15)x$, le permite a Samuel calcular el número de cenas en época normal. El estudiante da como respuesta: $35x$. De otra parte cuando se le pide que reduzca dicha expresión, aunque lo intenta solo escribe 35. Para la P_6 , el estudiante multiplica $70 \times 50 = 3500$ y luego concluye que consumieron en total 70 cenas.

Con relación a la respuesta dada en la pregunta 5, parece indicar que no se presenta un análisis tanto verbal como escrito que valide a la expresión $(50-15)x$; sin embargo el estudiante deja indicado que la validez de dicha expresión viene a ser igual a $35x$, esto demuestra que el estudiante no admite que una expresión por si misma tenga sentido, es decir que represente un fenómeno tanto matemático como de la cotidianidad, además se le dificulta indicar los elementos que componen un todo de una expresión algebraica. De otro lado, usa correctamente procesos algorítmicos que le permiten calcular el número de cenas que se consumen para un valor determinado en dólares. La pregunta P_6 muestra un error en cuanto a la claridad de la consigna; ya que el propósito central de esta era que el estudiante hallara el número de cenas pagadas en temporada de vacaciones, mas no en temporada normal.

Tarea 3: Acercándonos a la Ecuación de la Forma $ax + b = c$

P_1 : Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la información sobre el hospedaje de la familia Beltrán en el hotel Starwood Hotels& Resort.

Número de noches	Precio por noche	Precio por número de noches	Valor Impuesto USD	Precio a pagar por el número de noches
1	319		61	
2		319×2		699
3				1.018
	319			1.975
			61	3.251
12				
				4.846
25	319			

Tabla 4

El estudiante completa la tabla correctamente solo para las filas en donde se especifica el número de noches, de otra parte cuando se le pide determinar el número de noches (dado el precio por noche, el valor de los impuestos y el precio a pagar por el número de noches) no logra hallar los valores y deja espacios en blanco.

Con relación a la P_1 la tarea 3, cuando se establece dentro de los datos el número de noches; para el estudiante es fácil desarrollar procesos aritméticos que le permiten encontrar el precio por número de noches y seguidamente el precio a pagar por el número de noches. La dificultad se hace presente al momento de omitir este dato dentro de la información dada en el problema (“número de noches”), lo que se convierte para él en un obstáculo para completar los datos descritos anteriormente. Aunque dentro de sus fortalezas está el identificar los valores que permanecen constantes dentro de la situación, como lo es el caso del precio por noche (319 dólares) y el valor del impuesto (61 dólares), no logra encontrar el número de noches, aplicando más de dos operaciones dentro de su proceso.

P_2 : Indique las cantidades que varían y las que permanecen constantes según la información de la tabla.

El estudiante especifica que las cantidades que varían son el número de noches y el precio a pagar, de otra parte quienes no cambian o permanecen constantes son los 319 dólares y los 61 dólares (No especifica dentro de su proceso escrito que el 319 hace referencia al precio por noche y el 61 al pago de los impuestos).

Con respecto a la respuesta de la P_2 de la tarea 3, el estudiante identifica elementos de variación y cambio dentro de la situación, como lo es el caso de los datos que permanecen constantes (relación de independencia) y aquellos que cambian (relación de dependencia). Esto se hace posible para el estudiante, al momento de caracterizar y contextualizar los elementos que hacen parte del problema, por ejemplo: características propias de un impuesto etc.

P_3 : Describa cómo se calculó el precio total a pagar por 12 noches.

El estudiante explica que para calcular el precio total a pagar por 12 noches se divide, seguidamente escribe: 319×12 .

De acuerdo a la respuesta dada por el E₂, se infiere que él hace caso omiso al impuesto y confunde en su interpretación verbal, el tipo de operación matemática que debe desarrollar.

Para el estudiante no es claro, qué operación aritmética desarrollar; sin embargo en su proceso multiplica correctamente los 319 dólares por las 12 noches, pasando por alto el valor agregado de los impuestos. Es importante recordar que cuando se le presentan los datos organizados en la tabla 4, este completa satisfactoriamente todos los datos concernientes al precio por noche y al precio a pagar por el número de noches.

P₄: Escriba una expresión algebraica que relacione el total de dinero a pagar por la estadía, con el precio por un número determinado de noches y los impuestos respectivamente.

P₅: Use la expresión algebraica para encontrar el dinero total en dólares que la familia Beltrán pago por persona en 3 días, 50 días y 75 días.

P₆: Calcule el número de noches pagadas con 2613 dólares y explique cómo lo realiza.

El estudiante dice que la expresión es $\frac{x}{319}$ en lo requerido en la pregunta 4, De otra parte en cuanto a la pregunta 5 multiplica correctamente los 319 dólares por 3, 50 y 75 dólares; sin embargo una vez más omite sumar el impuesto de 61 dólares dentro del pago que se debe realizar. Finalmente en la P₆ alude que la respuesta es 8 o 9 noches y el proceso que realiza de manera consecutiva es ir multiplicando 319 por un número, de tal forma que el producto se acerque lo más posible a 2613 dólares. Aunque este, acertó en parte de que el número de noches equivale a 8, no logró incluir en ningún momento el valor del impuesto dentro del proceso.

Con relación a las respuestas dadas por el estudiante, en las preguntas 4, 5 y 6, no se evidencia una expresión algebraica correcta de la forma $ax + b = c$ la cual modele la situación matemática planteada; sin embargo es claro para el estudiante que el valor total a pagar en dólares depende de un número determinado de días (noción de una ecuación aritmética sencilla de la forma $ax = c$), pero en ningún momento dentro de su discurso incluye el valor que permanece constante (En este caso se hace referencia al valor en dólares del impuesto). Se evidencia el uso del ensayo y el error mediante multiplicaciones de manera consecutiva, con la finalidad de obtener como resultado un número determinado.

P₇: Si en otro hotel la familia podría pagar por noche 289 dólares y un impuesto fijo de 121 dólares. Escriba una expresión que le permita calcular el costo de 5 noches en este hotel.

P₈: Indique para qué cantidad de noches pagaría un miembro de la familia Beltrán el mismo valor en ambos hoteles.

Para la pregunta 7 el estudiante responde a esta pregunta, como se muestra a continuación:

$$\frac{5 \times 289}{121} \quad o \quad \frac{121x + 289}{5}$$

De otra parte en la P₈ el estudiante hace una interpretación verbal de la situación, sin proponer ningún proceso matemático; además este especifica que podrían pagar mínimo dos noches con los impuestos incluidos (En esta respuesta si toma como dato relevante los impuestos).

Con relación a las respuestas dadas por el estudiante en las preguntas 7 y 8, al momento de hacer un análisis verbal de la situación, el estudiante logra dar solución al problema, aún sin dar cuenta de un proceso matemático paso a paso. Reconoce dentro de su lenguaje natural las cantidades variables y aquellas que permanecen constantes, también alude que el impuesto afecta el pago total en dólares por la estadía; sin embargo la expresión algebraica que propone para la situación no se acerca medianamente a la expresión correcta.

Con respecto al análisis e implementación de la situación 2, se puede decir que tanto el E₁ y E₂ hacen uso de expresiones algebraicas que modelan variaciones simples, como lo es el caso de la expresión de la forma $ax = b$, esto lo logran mediante métodos primitivos que les permite llegar de manera paulatina a la noción de una ecuación aritmética sencilla. Además, se evidencia una identificación de manera verbal y escrita, con respecto a las cantidades que permanecen constantes y las que cambian dentro de la situación planteada por parte del E₁, sin embargo el E₂ presenta dificultad en la identificación de cantidades que permanecen fijas (descuentos e incrementos).

Teniendo en cuenta el proceso de análisis de esta situación cabe anotar que es significativo que los dos estudios de caso avanzan en el reconocimiento de un patrón algebraico, en tanto empiezan a usar procesos multiplicativos, a diferencia de la situación uno; en donde ambos identificaban patrones aditivos. Adicionalmente los dos estudiantes usan procesos de

ensayo y error para determinar el valor de una incógnita, lo cual no les permite avanzar en la generalización de un patrón, quedándose así en hábitos aritméticos.

De otra parte el E_1 asocia y reconoce un modelo de la forma $ax + c = d$, mientras que el E_2 no lo logra, ya que desde el inicio a presentado dificultad para identificar un valor constante, el cual incide en la variación. El estudiante 1 identifica las relaciones y argumenta para dar solución a un problema, pero el estudiante 2 aunque identifica la relación verbalmente, no lo formaliza en un nivel algebraico.

Finalmente es relevante decir que los dos estudiantes (E_1 , E_2)²⁰ progresaron paulatinamente en algunos de los procesos característicos en la generalización de un patrón (“Ver” y “decir”) lo cual es muy significativo teniendo en cuenta sus aparentes limitantes de tipo cognitivo y visual. Todo lo anteriormente planteado permite evidenciar que se cumplen algunos de los desempeños esperados, en tanto empiezan a describir un patrón en forma parcial, aclarando que no logran registrarlo de manera formal.

3.2.6 Resultados y análisis de los resultados de la Situación 3

Estudiante (E_1):

Metodología: Para la aplicación de esta situación se le dicta al estudiante cada tarea, luego se procede a la solución de cada pregunta, se trabaja con el estudiante en forma individual, se nota interés y mucha disposición para realizar esta situación. El docente investigador toma apuntes de todo lo que hace el Estudiante 1.

Es importante resaltar que esta situación se le aplica al estudiante durante un receso estudiantil a finales de noviembre del 2015, lo cual facilito mucho el trabajo ya que el joven presento mucha disposición, no habían ruidos externos propios de una institución educativa, el se sentía cómodo con lo que hacía, se disponía de tiempo suficiente; adicionalmente lo acompaño en esta actividad un compañero de clase el cual es un apoyo muy importante para la realización de las diferentes actividades académicas que conlleva su quehacer diario en el colegio.

Situación 3: Resuelve Ecuaciones Lineales con una Variable Real

²⁰Ven el patrón multiplicativo de forma parcial y lo utilizan para describir un proceso

Samuel dice que las expresiones utilizadas para calcular el número de viajes por persona en la Situación Uno tarea 3 punto 6b, número de cenas en la Situación Dos en el punto 6 de la tarea 2 y el número de noches del punto 6 de la tarea 3, se denominan Ecuaciones Condicionales. Estas son: $299x = 2691$, $50x = 3500$ y $319x + 61 = 2613$

Samuel necesita determinar el número de noches pagadas por un miembro de la familia en el hotel Starwood Hotels& Resort para un total de 2.613 dólares, para esto el resuelve la ecuación aplicando las propiedades de equivalencia como se muestra a continuación:

Proceso de Resolución:

$$319x + 61 = 2613 \quad (\text{Expresión Dada})$$

$$319x + 61 - 61 = 2613 - 61 \quad (1)$$

$$319x = 2552 \quad (2)$$

$$\frac{1}{319} \cdot 319x = 2552 \cdot \frac{1}{319} \quad (3)$$

$$x = \frac{2552}{319} \quad (4)$$

$$x = 8 \quad (5)$$

Tarea 1(T₁): Describiendo procesos de Resolución de Ecuaciones

P₁: Explique el procedimiento realizado por Samuel para pasar de la expresión dada a la expresión (1)

El estudiante responde: el proceso realizado por Samuel es el inverso, recordemos que el 61 está con el mas, inverso de dicho número quedaría menos 61, el cual lo utiliza en ambos lados de la ecuación

P₂: Porque Samuel obtuvo 2.552 en el paso 2

El estudiante responde en forma acertada en el paso dos Samuel obtuvo este resultado por que hizo una resta 2613 menos 61 equivalentes a 2552. “muy sencillo” expresa

P₃: Describa lo realizado por Samuel en el paso 3

El estudiante responde en este paso tres, el inverso multiplicativo de 319 pasaría de multiplicar a dividir por eso es $\frac{1}{319} \times 319x = \frac{2552}{319}$

P₄: Explique el proceso usado por Samuel para pasar del paso (4) al paso (5)

El estudiante explica que para pasar del paso (4) al paso (5), Samuel dividió 2.552 entre 319 equivalente a 8; para obtener el cociente 8 que sería la cantidad de noches pagadas por un miembro de la familia.

Analizando las respuestas indicadas por el Estudiante¹ en las preguntas 1, 2,3 y 4 se puede decir que el estudiante argumenta de forma natural cada paso, lo que permite apreciar que existe la idea de equivalencia, aplicando la propiedad uniforme de la igualdad aunque no la hace explícita. Seguido lo anterior es posible pensar que esta clase de procedimientos, se le facilita al estudiante ya que la ecuación dada se presenta en el dominio de los enteros, además tiene una sola variable ubicada al lado izquierdo de la igualdad

Tarea 2(T₂): Validando la solución

Según lo expuesto el número de noches que pago un miembro de la familia de Samuel con 2.613 dólares es 8, teniendo en cuenta esta información:

P₁: Encuentre una manera de probar que la respuesta es correcta

El estudiante realiza varias pruebas con la calculadora, al preguntarle qué haces expresa que está haciendo algunas sumas y restas, luego procede a responder, explicando que a 2.613 le resto 61 obteniendo así 2.552, y luego este resultado lo divide entre 319, además alude que por medio de estas operaciones se puede demostrar que un miembro de la familia pago 8 noches con los 2.613 dólares.

P₂: Para 5.226 dólares, cuantas noches puede pagar

El estudiante responde, qué suma dos veces 2.613 ($2.613 + 2.613$) y el resultado es 5.226 dólares, teniendo en cuenta que 8 noches son 2.613, las noches que se pagarían con 5.226 dólares son 16 noches, el estudiante se muestra muy seguro en esta respuesta

De acuerdo a los resultados presentados por el estudiante en las preguntas 1 y 2, es posible manifestar que él interpreta en forma ágil y acertada las operaciones requeridas para validar la afirmación que con 2.613 dólares se pueden pagar 8 noches en el hotel StarwoodHotels& Resort en la P₁, además relaciona y precisa el costo de 16 noches, al expresar si 8 noches cuestan 2.613 dólares con 5.226 dólares se pagarían 16 noches (P₂). Todo lo anterior permite deducir que el estudiante avanza en el proceso de formulación ya que sustenta y domina procedimientos y algoritmos matemáticos; asimismo verifica e identifica lo razonable en cada situación.

A diferencia de lo expresado anteriormente en la pregunta 7 T₃ de la situación 2, la explicación dada por el joven a la P₁T₂ de la situación 3, deja ver que hace uso de la expresión para validar la respuesta al parecer si se le da la expresión la comprende y la utiliza.

P₃: Por cuatro noches qué precio pagaría

El estudiante responde que el precio que pagaría es 1.337 dólares, ya que el multiplica 319 por 4 equivalente a 1.276 y luego le suma 61 y obtiene 1.337 dólares, finalmente alude que 61 siempre es un costo fijo.

P₄: Escribe como se puede comprobar

El estudiante responde que es solo remplazar los valores agregados, así queda 1.276, que en este caso sería 319 el número de noches y como son 4 noches quedaría 319 por 4 equivalentes a 1276, sin olvidarse del 61 que es el cargo fijo, por lo tanto sería $1276 + 61$ equivalente a 1.337

Según las respuestas dadas por el E₁ en las preguntas 3 y 4 se observa que se cumplen las expectativas de desempeño planteadas ya que el estudiante determina por medio de

razonamientos lógicos y algoritmos acertados el precio que pagaría en 4 noches en lo requerido en la P_3 , además argumenta la validez de lo realizado mediante la conexión de referentes como “es solo reemplazar los valores “en lo expuesto en la P_4 , teniendo en cuenta siempre el cargo fijo que es 61, lo cual indica un acercamiento informal al proceso de modelación a través de cálculos numéricos en los cuales es posible razonar y demostrar.

Tarea 3(T_3): Ecuaciones Equivalentes

Para solucionar una ECUACIÓN EQUIVALENTE:

- ✓ Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.
- ✓ Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.

A continuación se muestra el proceso realizado por Samuel para solucionar la ecuación en donde $z \in \mathbb{Q}$.

$3(z - 4) + 5z = 6z + 10$	Expresión dada
$3z - 12 + 5z = 6z + 10$	Paso 1
$8z - 12 + 12 = 6z + 10 + 12$	Paso 2
$8z - 6z = 6z - 6z + 22$	Paso 3
$2z = 22$	Paso 4
$\frac{1}{2} 2z = \frac{22}{2}$	Paso 5
$z = 11$	

Teniendo en cuenta el proceso de resolución de la ecuación anterior, responde:

P₁: Indique el proceso realizado por Samuel para pasar de la expresión dada al paso 1

El estudiante responde que el proceso que realizó Samuel fue quitar primero el paréntesis multiplicando 3 por z y el mismo 3 por 4 y así se obtiene $3z - 12$. El estudiante realiza estas operaciones primero en Braille y luego las explica

P₂: Indique porque se puede sumar 12 en ambos miembros de la ecuación, en el paso 2. Mencione el nombre de esta propiedad.

El estudiante responde que se puede sumar en ambos miembros de la ecuación porque aquí Samuel utiliza el inverso aditivo de -12 que es $+12$, esta es la propiedad del inverso

P₃: Describe el procedimiento realizado por Samuel en el paso 3

El estudiante responde que Samuel en el paso 3 utiliza el inverso de $+6z$ que es $-6z$, adicionalmente explica que por este inverso, en los dos lados debe ir el $-6z$

P₄: Explique el proceso usado por Samuel, para pasar del paso 4 al paso 5

El estudiante responde que Samuel utiliza la propiedad del inverso multiplicativo de $2z$ que es $\frac{1}{2}$ y explica que si multiplica el dos pasa a dividir, igualmente si suma pasa a restar; concluye expresando que las operaciones cambian siempre.

Con relación a las respuestas dadas por el Estudiante 1 a las preguntas 1, 2, 3 y 4 es posible decir que el estudiante comprende el proceso de simplificación de expresiones algebraicas utilizado en la P₁, ya que explica con claridad que primero se debe quitar el paréntesis haciendo uso de la multiplicación, además reconoce de forma espontánea la propiedad uniforme en las P₂, P₃ y P₄ al expresar que se puede sumar o restar en ambos miembros de la ecuación. Por lo tanto esos resultados permiten validar el desempeño esperado, en tanto el estudiante hace uso de la propiedad uniforme como proceso de solución de la ecuación.

P₅: Escribe enfrente de cada enunciado verdadero (V) o falso (F), según el procedimiento implementado por Samuel en la solución de la ecuación: $3(z - 4) + 5z = 6z + 10$
(Justifique su respuesta)

P_{5a}: De la expresión dada al paso número 1, se aplicó la propiedad distributiva

El estudiante responde que el enunciado es verdadero porque se hace una distribución de la multiplicación del 3 con z y el 3 con 4, se le pregunta qué quieres decir y expresa que se multiplican todos los valores que se encuentran dentro del paréntesis con el número 3

P_{5b}: En el paso 2 se usó la propiedad del inverso aditivo

El estudiante responde verdadero porque Samuel uso el inverso aditivo del -12 que es +12, lo utilizo en ambos lados

P_{5c}: En el paso 3 se usó la propiedad del inverso aditivo

El estudiante responde verdadero porque se usa la propiedad del inverso, como lo dije antes del $+6z$ que es $-6z$

P_{5d}: Samuel aplicó correctamente el inverso multiplicativo en el paso 3

El estudiante responde es falso, porque en este paso Samuel no utiliza el inverso multiplicativo, ya que Samuel utiliza es el inverso aditivo del $+6z$ que es $-6z$

P_{5e}: Samuel aplicó correctamente el inverso multiplicativo en el paso 5

El estudiante responde verdadero, porque Samuel utiliza el inverso multiplicativo de 2 que es $\frac{1}{2}z$ luego $\frac{1}{2} \cdot 2z = \frac{2z}{2}$, al final de esta actividad el E₁ hace una observación, expresando que lo de las propiedades de los inversos si le gustan

Los resultados expuestos por el estudiante en la pregunta 5 literales a, b, c, d y e, evidencian que este reconoce las propiedades inmersas en la resolución de la ecuación ya que justifica en forma clara cada paso pedido, lo cual permite validar algunos de los desempeños esperados en tanto reconoce la propiedad uniforme, la relación de equivalencia existente; aunque

no lo hace de manera explícita, pero indica en la P_{5b} , que el inverso aditivo de -12 es +12 y que debe ir en ambos lados de la ecuación.

P₆: Sustituya el valor de $z = 11$ en los pasos 1, 3, 5. Indique conclusiones

El estudiante reemplaza en el paso 1, el número 11 en $5z$ es decir $5(11)$ y en $6z + 10$ por lo tanto obtiene $66 + 10$, seguido lo anterior reemplaza así: $3(11) - 12 + 5(11) = 66 + 10$ y finalmente obtiene $33 + 43 = 76$. En el paso 3 reemplaza correctamente los valores en cada lado de la ecuación, cambia un signo así: $8(11) - 6(11) = 6(11) + 6(11) + 22$; como se puede observar cambia el signo de la ecuación dada al colocar 6 por once más 6 por once, a partir de este momento ya coloca la respuesta incorrecta porque él expresa finalmente el resultado es $22 = 154$. Para concluir en el paso 5 si reemplaza y obtiene valores equivalentes así: $\frac{1}{2} \cdot 2(11) = \frac{22}{2}$; $11 = 11$. El trabajo para lo requerido en estas preguntas fue lento ya que el estudiante se devuelve en repetidas ocasiones a verificar resultados.

P₇: Determine si las ecuaciones de los pasos 1, 3 y 5 son equivalentes (justifique su respuesta)

El estudiante expresa que en el paso tres al reemplazar el 11, al final queda una suma que equivale a 76 de la forma $33 + 43 = 76$. En el paso 2 el estudiante reemplaza en forma correcta todos los valores de z pero cambia un signo que lo hace fallar en los resultados como se indica: $88 - 66 = 66 + 66 + 22$

$$22 = 154$$

Finalmente en el paso 5 si reemplaza correctamente el valor 11 correspondiente a z ; el estudiante se devuelve a verificar (lee en repetidas ocasiones lo escrito por él en Braille), los resultados obtenidos y expresa que la ecuación del paso 1 y el paso 3 no son equivalentes ya que en el paso 1 obtuvo una adición cuyo resultado es 76, en el paso 3 le dieron dos números diferentes que son 22 y 154 que no son de igual valor, mientras que el paso 5 si obtuvo una igualdad ya que en el primer lado de la ecuación obtuvo 11 y en el segundo lado también 11, luego $11 = 11$

Al relacionar las respuestas dadas por el Estudiante 1 a las preguntas 6 y 7 se puede observar que el estudiante tiene claro el proceso de sustitución pedido en la P₆, pero no percibe de forma clara que la expresión $33 + 43 = 76$ es una igualdad en lo descrito en el paso 1, además cambia signos en lo realizado por él en el paso 3 donde él cambia el menos que antecede a 66 y coloca el signo más al reemplazar el valor 11 en z , mientras que en el paso 5 logra determinar que es una igualdad porque $11 = 11$.

Todo lo anterior permite referir que se valida lo requerido en la situación en tanto comprende el proceso de sustitución, lo cual infiere que al estudiante se le pueda dar un valor en la variable y él lo valida, la dificultad está en lo operatorio y en el manejo inadecuado de signos, además es importante cuestionar si la falta de visión es lo que no le permitió determinar la igualdad que existía en lo solucionado por él en el paso 1 ($33 + 43 = 76$)

P₈: Proponga dos expresiones equivalentes a la siguiente ecuación: $7x - 3 = -21x - 31$

El estudiante reemplaza el valor de tres en un lado de la ecuación y en el otro lado coloca el uno, como es posible observar en el siguiente registro tomado por el docente investigador:

8- $7x - 3 = -21x - 31$

Pues sería así: $7(3) - 3 = -21(1) - 31$

$21 - 3 = -21 - 31$

$18 = -52$

¿Porque haces esto Hoover?

Reemplazo el 3 en x como se puede hacer para cualquier valor

Profe no entiendo no soy capaz

Al preguntarle por qué hace esto, él explica que como son dos expresiones equivalentes; si él quiere puede tomar cualquier valor, y que por esto decide dar el valor tres en uno de los lados y en otro lado calcula que puede ser el número 1, para que de esta forma queden equivalentes, pero que al reemplazarlo no le da la igualdad que esperaba, finalmente alude que no entiende y que no es capaz de resolverla.

De acuerdo al proceso realizado por el estudiante, para la pregunta 8, es posible decir que el estudiante no tiene en cuenta el aplicar propiedades para generar nuevas ecuaciones, él asume que si reemplaza valores en las variables puede volverlas dos expresiones equivalentes lo

cual evidencia que no comprende el enunciado, se percibe en el estudiante la necesidad de hacer algo, en este caso particular encontrar un valor para la incógnita por medio de tanteo al expresar que utiliza el tres a un lado y el uno en el otro.

Todo lo anterior indica que el estudiante no alcanza a considerar que a ambos lados de la igualdad se están dando dos expresiones que representan la misma información y por lo tanto al realizar operaciones a ambos lados se están encontrando expresiones equivalentes.

Tarea 4 (T₄): Resolviendo ecuaciones y Situaciones Problema

P₁: Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades de equivalencia:

- a. $3x - 4 = 13$
- b. $15x - 30 = 10x + 40$
- c. $\frac{6}{5}x + 20 = 72$
- d. $20x - 45 = 5(10x + 15)$

El estudiante determina en forma acertada la solución de las ecuaciones 1b, 1c y 1d; tiene en cuenta los pasos y tiene en cuenta los signos, en la ecuación 1c, omite al finalizar en las ecuaciones 1b y 1d, aplicar el inverso multiplicativo para concluir la ecuación pasa el número a dividir de una vez, es decir en $5x = 70$ resuelve $x = \frac{70}{5}$ y *obtiene* $x = 14$ (1b)

Luego en la otra (1d) tiene $-30x = 120$ resuelve $x = \frac{120}{-30}$ y obtiene $x = -4$ (En la solución de esta ecuación se devuelve varias veces a rectificar resultados, lee en repetidas ocasiones)

En la solución de la ecuación 1a, si se equivoca en el paso 3 ya que escribe en un lado el inverso correctamente y al otro lado le coloca el más y el resto le queda mal, debido al error inicial, como se muestra en el siguiente registro tomado por el docente Investigador:

Tarea 4: Resolviendo Ecuaciones y situaciones problema

1- Resuelve las siguientes ecuaciones.

a- $3x - 4 = 13$
 $3x - 4 + 4 = 13 + 4 + 4$
 $3x = 13 + 8$
 $3x = 21$
 $(\frac{1}{3}) 3x = 21(\frac{1}{3})$
 $x = \frac{21}{3}$
 $x = 7$

b- $15x - 30 = 10x + 40$
 $15x - 10x - 30 + 30 = 40 + 30$
 $5x = 70$
 $x = \frac{70}{5}$
 $x = 14$

c- $\frac{6}{5}x + 20 = 72$
 $\frac{6}{5}x + 20 - 20 = 72 - 20$
 $\frac{6}{5}x = 52$
 $\frac{6}{5}x = 52$
 $(\frac{5}{6})(\frac{6}{5}) = 52(\frac{5}{6})$
 $x = \frac{260}{6}$ lo divido en la calculadora
 $x = 43,3$

d- $20x - 45 = 5(10x + 15)$
 $20x - 45 = 50x + 75$
 $20x - 50x - 45 + 45 = 75 + 45$
 $-30x = 120$
 $x = \frac{120}{-30}$
 $x = -4$
 En esta ecuación se devuelve varias veces a verificar los resultados.

En relación con los resultados de la pregunta 1 literales a,b,c,d se puede aludir que el estudiante, reconoce los pasos a seguir para la solución de una ecuación lineal con variable real, qué existe la idea de equivalencia de ecuaciones aplicando la transposición de términos aunque no aplica la propiedad uniforme, es decir divide en un solo lado de la igualdad y no en ambos lados, lo realizado en los puntos 1b y 1d; presenta confusión de signos en la ecuación 1a cuando adiciona el 4 dos veces, lo cual no le permite hallar la solución acertada, pero tiene claro los pasos en la ecuación 1c.

Lo anterior evidencia que en el estudiante prevalece una idea mecánica para buscar la solución de la ecuación lo cual no le permite un dominio conceptual más cercano a la idea de ecuación, el cual es la relación de equivalencia entre dos expresiones y que estas a su vez requieren de la aplicación de determinadas propiedades en el conjunto de los enteros y el manejo adecuado de los signos.

P2: Complete la siguiente tabla, empleando una expresión algebraica para cada enunciado:	
Enunciado	Expresión
El precio de un caramelo	
La mitad del precio de un caramelo	
El largo de un rectángulo es cuatro veces más grande que su ancho	
La quinta parte de la suma de dos números	

Tabla 5

El estudiante pregunta después de leer lo que debe hacer, que si puede tomar para las expresiones cualquier letra, el docente investigador le responde que si, seguidamente el

estudiante dice, que x es un caramelo, para la mitad del precio de un caramelo expresa $\frac{x}{2}$ se le pregunta porque haces esto y dice la mitad de algo puede ser la fracción $\frac{1}{2}$. Para el enunciado El largo de un rectángulo es cuatro veces más grande que su ancho pregunta si puede utilizar la letra L , a lo cual se le responde que sí; seguidamente el expresa: $L = 4a$, parece estar totalmente seguro de su respuesta. Para el último enunciado, la quinta parte de la suma de dos números $\frac{1}{5}(a + b)$, alude que tomo a , que es un número y b el otro número y la quinta parte puede ser la fracción y como es una parte se debe multiplicar por un quinto.

P ₃ : Complete la siguiente tabla, empleando un enunciado que satisfaga la expresión algebraica dada:	
Expresión	Enunciado
x	
$\frac{x}{3} + 2$	
$7(x - 8)$	
$y = 2x + 10$	

Tabla 6

El estudiante en la expresión x , inicia preguntado si esa letra puede ser cualquier cosa: número, edad, dinero se le responde que si, luego él explica que x es la edad de Carlos, en la expresión $\frac{x}{3} + 2$ el estudiante dice que el enunciado es: a la tercera parte de un número se le agrega dos; en la siguiente expresión $7(x - 8)$ alude que lo puede relacionar con la primera que es la edad de Carlos entonces puede ser, siete veces la edad de Carlos disminuida en ocho; finalmente en la expresión $y = 2x + 10$ dice, el doble de la edad de Pedro aumentada en 10 es la edad de Juan.

Teniendo en cuenta las respuestas dadas por el estudiante en las preguntas 2 y 3 se observa que él hace conexiones entre el lenguaje verbal y el lenguaje algebraico al representar en forma acertada la mayor parte de lo requerido en cada tabla, aunque no expresa en forma acertada la mitad del precio de un caramelo $\frac{x}{2}$, tiene la idea que la mitad es una fracción por lo tanto la escribe completa como denominador. Es preciso aclarar que las dos preguntas poseen estructuras inversas ya que en una se requiere la expresión tras dar el enunciado y en la otra se da la expresión para plantear verbalmente el enunciado, en ambas situaciones el estudiante acierta en un 87,5% en sus representaciones.

Todo lo anteriormente expuesto indica que se cumplen las expectativas de desempeño esperadas a medida que el estudiante convierte un enunciado verbal en una expresión algebraica, y a su vez una expresión la interpreta por medio de un enunciado, lo cual es significativo porque empieza a desarrollar el álgebra en su forma estructural.

P₄: Resuelva las siguientes situaciones:

P_{4a}: El doble de un número es igual a la diferencia entre el triple del número y 20. Halle el número

El estudiante alude que va a tomar la letra m como el número que se pregunta en la situación, seguidamente dice $2m = 20 - 3m$, lo resuelve como se puede observar en el siguiente registro tomado por el docente investigador:

$$\begin{aligned}
 &4\text{-Resuelva las siguientes situaciones} \\
 &a\text{-voy a tomar la } m \text{ como número} \\
 &2m = 3m - 20 \\
 &2m - 3m = 3m - 3m - 20 \\
 &-m = -20 \\
 &-1m = -20 \\
 &m = \frac{-20}{-1} \\
 &m = 20 \quad \text{Respuesta: El número es 20}
 \end{aligned}$$

P_{4b}: La edad de Carlos es el doble de la edad de Pedro, y la edad de María es cuatro veces la edad de Carlos y Pedro juntos. Si la suma de las edades es de 75 años, indique la edad de Carlos, Pedro y María.

El estudiante se niega hacer el problema, al inicio plantea que Carlos es equivalente al doble de la edad de Pedro más 4 veces la edad de María, y al momento se niega rotundamente, dice, no son muchas edades (registro tomado por el docente investigador)

$$\begin{aligned}
 &b = 2p + 4p \\
 &\text{- No lo puedo hacer} \\
 &\text{- Intentalo de nuevo (docente)-} \\
 &\text{- No, son muchas edades}
 \end{aligned}$$

P_{4c}: Juana vende lápices en la escuela a \$ 500 la unidad. Determine el número de lápices que

debe vender Juana para obtener un ingreso de \$12.500

El estudiante responde, Juana debe vender 25 lápices, seguido se le pregunta ¿Qué hiciste?, y él alude que dividió \$12.500 entre \$500, para así obtener los 25 lápices. Se le pide que plantee una ecuación para calcular la cantidad de lápices y expresa que la expresión es:

$$500l = 12500$$

$$\text{Luego } l = \frac{12500}{500}$$

$l = 25$ Se le pregunta ¿Por qué haces esto? A lo que él responde, si 500 está multiplicando luego pasa a dividir

Analizando las respuestas dadas por el Estudiante 1, a la pregunta 4 puntos a, b y c se observa que el estudiante comprende determinadas situaciones problema P_{4a} y P_{4c} utiliza y se apropia del lenguaje algebraico para plantear la expresión, seguido lo resuelve en forma acertada, pero en las situaciones que no comprende como en la P_{4b} se resiste a dar respuesta aludiendo no comprender, al parecer como son demasiadas variables se niega a continuar con el planteamiento.

Es importante anotar que existe un avance significativo al representar en forma algebraica distintas situaciones problema, las cuales a su vez permiten una significación en el uso de las ecuaciones lineales.

Estudiante (E₂):

Metodología: Cada una de las tareas es desarrollada en momentos y horas diferentes de clase, se intenta que de manera inicial el estudiante identifique los elementos más importantes de la situación. De otra parte el profesor viene a ser un facilitador durante la actividad, dando la posibilidad al estudiante de responder de manera autónoma a cada una de las preguntas relacionadas en cada apartado.

Situación 3: Resuelve Ecuaciones Lineales con una Variable Real

Samuel dice que las expresiones utilizadas para calcular el número de viajes por persona en la Situación Uno tarea 3 punto 6b, número de cenas en la Situación dos en el punto 6 de la tarea 2 y el número de noches del punto 6 de la tarea 3, se denominan Ecuaciones Condicionales.

$$\text{Estas son: } 299x = 2691, \quad 50x = 3500 \quad \text{y} \quad 319x + 61 = 2613$$

Samuel necesita determinar el número de noches pagadas por un miembro de la familia en el hotel Starwood Hotels & Resort para un total de 2.613 dólares, para esto el resuelve la ecuación aplicando las propiedades de equivalencia como se muestra a continuación:

Proceso de Resolución:

$$319x + 61 = 2613 \quad (\text{Expresión Dada})$$

$$319x + 61 - 61 = 2613 - 61 \quad (1)$$

$$319x = 2552 \quad (2)$$

$$\frac{1}{319} \cdot 319x = 2552 \cdot \frac{1}{319} \quad (3)$$

$$x = \frac{2552}{319} \quad (4)$$

$$x = 8 \quad (5)$$

Tarea 1 (T₁): Describiendo procesos de Resolución de Ecuaciones

P₁: Explique el procedimiento realizado por Samuel para pasar de la expresión dada a la expresión (1)

El estudiante alude que Samuel para pasar de la expresión dada a la expresión 1, suma en ambas partes el número 61. Recordemos que para la pregunta 1 (P₁) se espera que el estudiante responda que el proceso realizado por Samuel consistió en sumar -61 en ambos miembros de la igualdad.

P₂: Porque Samuel obtuvo 2.552 en el paso 2

El estudiante manifiesta que para obtener 2.552 Samuel restó la cantidad de 61 a 2613; además vuelve a mencionar que finalmente lo que Samuel hizo fue restar en ambas partes.

P₃: Describa lo realizado por Samuel en el paso 3

El estudiante dentro de su descripción dice que Samuel igualó los 2.552 a $319x$ y que seguidamente divide en ambas partes, idea que prontamente abandona y se retracta diciendo que multiplicó en ambas partes 319.

P₄: Explique el proceso usado por Samuel para pasar del paso (4) al paso (5)

El estudiante indica textualmente que: Samuel divide el resultado 2.552 por 319, lo que genera que al final obtenga 8 como resultado.

Analizando las respuestas indicadas por el Estudiante en las preguntas 1, 2, 3 y 4 parece indicar que este aunque se acerca a la noción del inverso aditivo, no identifica la forma algorítmica correcta dentro del proceso, posiblemente esto se deba a su dificultad con las operaciones entre números enteros; también es importante resaltar que aunque desarrolla satisfactoriamente el algoritmo de la división dentro de un proceso detallado, no logra identificar el uso del inverso multiplicativo en ambos miembros de la igualdad. En general el estudiante tiene claro que hay acciones dentro del proceso que siempre deben de realizarse en ambos miembros de una ecuación.

Tarea 2(T₂): Validando la solución

Según lo expuesto el número de noches que pagó un miembro de la familia de Samuel con 2.613 dólares es 8, teniendo en cuenta esta información:

P₁: Encuentre una manera de probar que la respuesta es correcta

El estudiante afirma que no hay manera de probarlo ya que la multiplicación no da el mismo valor, por lo tanto la respuesta es incorrecta. Para esta pregunta este multiplica de manera errada $319 \times 8 = 2.552$ y olvida sumar el valor constante de 61.

P₂: Para 5.226 dólares, cuantas noches puede pagar

El estudiante responde que con 5.226 dólares se pueden pagar 16 noches; ya que $2.613 \times 2 = 5.226$.

De acuerdo a la respuesta dada por el Estudiante en las preguntas 1 y 2, este tiene en cuenta las cantidades variables dentro del problema, pero aparentemente omite las cantidades que permanecen constantes y que afectan de manera global un resultado; se destaca que este hace uso de habilidades aritméticas rápidas, como por ejemplo doblar, triplicar una cantidad a partir de un dato de referencia etc. Lo que permite determinar de manera más sencilla el valor de una incógnita, sin necesidad de recurrir a métodos de evaluar un valor numérico o de solucionar parcialmente una ecuación.

P₃: Por cuatro noches qué precio pagaría

El estudiante textualmente alude que por cuatro noches debe pagar 836\$. En este caso multiplicó un valor cualquiera que él mismo se inventó y lo multiplicó por cuatro así:

$$209 \times 4$$

P₄: Escribe como se puede comprobar

El estudiante escribe que para comprobarlo, debe desarrollar lo siguiente:

$$209 \times 4 = 836\$ \text{ dólares}$$

Según las respuestas dadas por el Estudiante en las preguntas 3 y 4 se observa que él omite información relevante presente dentro del problema y no logra hacer una relación sistemática entre datos numéricos, lo cual genera que termine por inventar valores con el objetivo de forzar una respuesta. Es claro que dentro de su invención, éste continúa tomando

valores variables y no incluye dentro de su propuesta un valor contante que modele una expresión de la forma $ax + b = c$.

Tarea 3(T₃): Ecuaciones Equivalentes

Para solucionar una ECUACIÓN EQUIVALENTE:

- ✓ *Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.*
- ✓ *Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.*

A continuación se muestra el proceso realizado por Samuel para solucionar la ecuación en donde $z \in \mathbb{Q}$.

$3(z - 4) + 5z = 6z + 10$	Expresión dada
$3z - 12 + 5z = 6z + 10$	Paso 1
$8z - 12 + 12 = 6z + 10 + 12$	Paso 2
$8z - 6z = 6z - 6z + 22$	Paso 3
$2z = 22$	Paso 4
$\frac{2}{2}z = \frac{22}{2}$	Paso 5
$z = 11$	

Teniendo en cuenta el proceso de resolución de la ecuación anterior, responde:

P₁: Indique el proceso realizado por Samuel para pasar de la expresión dada al paso 1

El estudiante alude que para pasar de la expresión dada al paso 1, Samuel multiplica el número 3 por la expresión que se encuentra dentro del paréntesis $(z - 4)$, por lo cual obtiene como resultado $3z - 12$.

P₂: Indique porque se puede sumar 12 en ambos miembros de la ecuación, en el paso2. Mencione

el nombre de esta propiedad.

El estudiante alude en forma escrita que el número 12 puede sumarse en ambos miembros de la ecuación ya que aparentemente el -12 es un número sobrante y es necesario “romper la ecuación en partes”. Cuando se le pregunta el porqué de esta afirmación alude que es necesario reescribir la ecuación en dos sentidos o partes iguales, finalmente el estudiante no logra enunciar el nombre de la propiedad matemática que permite que se pueda realizar dentro de una igualdad este tipo de acción.

P₃: Describe el procedimiento realizado por Samuel en el paso 3

El estudiante identifica que en el paso tres se restaron expresiones anteriores, como lo es el caso de $-12 + 12$ y posteriormente $10 + 12$. Dentro de su respuesta no se evidencia que este identifique la acción, ni la propiedad matemática que permite sumar en ambos miembros de la igual $-6z$.

P₄: Explique el proceso usado por Samuel, para pasar del paso 4 al paso 5

El estudiante indica que para pasar del paso 4 al paso 5, Samuel divide en ambos miembros de la igualdad entre el número 2, para finalmente obtener como resultado $z = 11$.

Con relación a las respuestas dadas por el Estudiante a las preguntas 1, 2,3 y 4 se puede apreciar que aunque logra identificar procesos algorítmicos dentro de la resolución de la ecuación lineal, no logra identificar con claridad las propiedades matemáticas involucradas en el proceso, como lo es el caso particular de la propiedad del inverso aditivo y multiplicativo. Para este estudiante es claro, que hay acciones que deben realizarse en ambos miembros de la igualdad, pero no lo logra proporcionar una explicación formal del tipo de acciones que se pueden emplear para dar solución a una ecuación lineal. Cabe decir, que a este se le facilita identificar operaciones aritméticas básicas dentro del desarrollo; siempre y cuando el enunciado sea dado paso a paso

P₅: Escribe enfrente de cada enunciado verdadero (V) o falso (F), según el procedimiento implementado por Samuel en la solución de la ecuación: $3(z - 4) + 5z = 6z + 10$

(Justifique su respuesta)

P_{5a}: De la expresión dada al paso número 1, se aplicó la propiedad distributiva.

El estudiante escribe que el enunciado es verdadero; ya que inicialmente Samuel multiplicó el número 3 por el paréntesis $(z - 4)$.

P_{5b}: En el paso 2 se usó la propiedad del inverso aditivo.

El estudiante escribe que el enunciado es verdadero; ya que era necesario suprimir el número -12 que según él reitera, es el valor sobrante en la ecuación.

P_{5c}: En el paso 3 se usó la propiedad del inverso aditivo

El estudiante escribe que el enunciado es falso y no justifica su respuesta.

P_{5d}: Samuel aplicó correctamente el inverso multiplicativo en el paso 3

El estudiante escribe que el enunciado es verdadero, aludiendo que en ambos miembros de la ecuación se restó $-6z$. Al parecer este, confunde la propiedad del inverso aditivo, con la del inverso multiplicativo.

P_{5e}: Samuel aplicó correctamente el inverso multiplicativo en el paso 5

El estudiante escribe que el enunciado es verdadero; ya que Samuel divide en ambas partes de la ecuación entre el número 2.

Con relación a las respuestas dadas por el estudiante en el numeral 5, parece indicar que este manifiesta confusión al momento de identificar las propiedades de equivalencia involucradas en la resolución una ecuación lineal: además se limita a describir procesos que son fáciles para él designarlos paso a paso, pero no manifiesta una apropiación a conciencia de cada uno de los procesos presentes. Cabe decir, que se le facilita hacer argumentaciones sencillas cuando los elementos involucrados son de tipo aritmético, lo cual quiere decir que una de sus

mayores dificultades radica en operar expresiones algebraicas y generar relaciones entre símbolos algebraicos.

P₆: Sustituya el valor de $z = 11$ en los pasos 1, 3, 5. Indique conclusiones

Para esta pregunta, el E₂ no da una respuesta, atribuye que es muy complicado sustituir el número 11; ya que la expresión que se da es bastante compleja y tiene muchas operaciones juntas.

P₇: Determine si las ecuaciones de los pasos 1, 3 y 5 son equivalentes (justifique su respuesta).

Debido a que el estudiante no responde de forma acertada la pregunta número 6, infiere que las ecuaciones tienen que ser equivalentes porque tienen el mismo numeral de la pregunta anterior.

Al relacionarlas respuestas a las pregunta 6 y 7, parece indicar que el estudiante no acepta el valor de una incógnita como un valor numérico dentro de una expresión algebraica formal. Es importante tener en cuenta hasta esta parte, que para este es mucho más fácil hacer sustituciones cuando se trata de expresiones que representa una ecuación aritmética; ya que se le dificulta relacionar en conjunto las operaciones, esto hace que se frustre con mucha facilidad y desista de continuar con el ejercicio debido al obstáculo que esto le representa en el proceso.

P₈: Proponga dos expresiones equivalentes a la siguiente ecuación: $7x - 3 = -21x - 31$

Las dos expresiones equivalentes que el estudiante propone son las siguientes:

9. Proponga dos expresiones equivalentes a la siguiente ecuación

1. $-3x = 7 - 21x - 31$
 2. $21x = 7x - 31 + 3$

$7x - 3 = -21x - 31$

De acuerdo a la respuesta para la pregunta 8, al estudiante se le dificulta usar las propiedades básicas de equivalencia, como lo es el caso del inverso aditivo y el inverso

multiplicativo, además no se vale de las operaciones básicas y procesos de simplificación y amplificación, que le permitan obtener expresiones equivalentes a una expresión dada.

Tarea 4 (T₄): Resolviendo ecuaciones y Situaciones Problema

P₁: Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades de equivalencia:

- a. $3x - 4 = 13$
- b. $15x - 30 = 10x + 40$
- c. $\frac{6}{5}x + 20 = 72$
- d. $20x - 45 = 5(10x + 15)$

Para la pregunta 1a, el estudiante suma a ambos lados de la igualdad 4 y desarrolla el algoritmo correcto; sin embargo en lugar de dividir en ambos miembros de la igualdad, entre 3 divide entre 17, obteniendo como respuesta un número decimal $x = 0.17$.

• TAREA 4.

① ① → $3x - 4 = 13$
 $+4 \quad +4$
 $3x = 17$
 $\frac{3x}{17} = \frac{17}{17}$
 $x = 0.17$

En la pregunta 1b suma de forma acertada en ambos miembros de la igualdad -40 ; seguidamente suma en ambos miembros -10 , no como un valor variable en términos de una incógnita, si no como una constante, después de desarrollar la suma del inverso aditivo en los dos lados de la igualdad, procede a dividir entre 80 la expresión $15x = -80$, dando como resultado $x = 0.18$

② $15x - 30 = 10x + 40$
 $-40 \quad -40$
 $15x - 70 = 10x$
 $-10x \quad -10x$
 $5x - 70 = 0$
 $+70 \quad +70$
 $5x = 70$
 $\frac{5x}{5} = \frac{70}{5}$
 $x = 14$
 $x = 0.18$

De otra parte en la pregunta 1c, el estudiante resta en ambos miembros de la igualdad -72 ; seguidamente traspone con igual signo, al lado derecho de la igualdad la suma de 20 y -72 . De acuerdo al proceso desarrollado por el estudiante que se muestra a continuación, se evidencia que multiplica en cruz las cantidades de los extremos $(6x, 1)$ y de los medios $(5, -52)$, también se puede ver que multiplica en forma horizontal los denominadores $(5, 1)$.

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad \frac{6x}{5} + 20 &= -72 \\ \frac{6x}{5} &= -92 \\ 6x &= -460 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{-460}{6} \\ x &= -\frac{230}{3} \end{aligned}$$

Para finalizar en la pregunta 1d, el estudiante distribuye correctamente el número 5 con la expresión $(10x + 15)$, posteriormente suma en ambos lados de la igualdad -75 y hasta el momento soluciona los algoritmos pertinentes; sin embargo suma de forma incorrecta en ambas partes 50, vuelve a trasponer al lado derecho con signo equivocando la suma de -120 y 50. Aunque los valores numéricos obtenidos no corresponden a la ecuación inicial, cabe destacar que para culminar el proceso el estudiante multiplica correctamente en ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de 20.

$$\begin{aligned} \textcircled{d} \quad 20x - 45 &= 5(10x + 15) \\ 20x - 45 &= 50x + 75 \\ -75 & \quad -75 \\ 20x - 120 &= 50x \\ -30x & \quad -30x \\ -120 &= 30x \\ \frac{-120}{30} &= \frac{30x}{30} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

En relación con los resultados de la pregunta 1 literales a, b, c, d se puede aludir que el Estudiante 2 emplea el inverso aditivo en ecuaciones aritméticas simples, más se le dificulta hacerlo en ecuaciones de tipo algebraicas. De otra parte, presenta dificultad en operaciones inversas con números enteros, como lo es el caso puntual de la división, con respecto a esto no logra identificar el inverso multiplicativo de un número entero.

Hace uso del desarrollo de procesos horizontales, característicos en el álgebra; y aunque tiene claro desde el inicio que el objetivo principal es hallar el valor de la incógnita, no busca formas de validar sus respuestas. Aunque presenta falencias al momento de implementar las propiedades de equivalencia que le permitan solucionar una ecuación lineal con variable real, todo parece indicar que su problema emerge en la designación y concatenación de objetos algebraicos.

P ₂ : Complete la siguiente tabla, empleando una expresión algebraica para cada enunciado:	
Enunciado	Expresión
El precio de un caramelo	
La mitad del precio de un caramelo	
El largo de un rectángulo es cuatro veces más grande que su ancho	
La quinta parte de la suma de dos números	

Tabla 5

A continuación se presenta las respuestas dadas por el estudiante, al momento de completar la tabla 5, seguidamente se hace una descripción del proceso desarrollado por este:

ENUNCIADO	EXPRESIÓN
El precio de un caramelo	x
La mitad del precio de un caramelo	$\frac{4}{2}$
El largo de un rectángulo es cuatro veces más grande que su ancho	$\frac{x}{4} + x$
La quinta parte de la suma de dos números	$\frac{15}{5}$

Para completar la información de la tabla correspondiente a la pregunta 2 de la Tarea 4, el estudiante escribe que la expresión que representa el precio un caramelo es x , la mitad del precio de una caramelo es $\frac{4}{2}$ (tomando como referencia un valor total de 4 caramelos). De otra parte, con base a la proposición de que el largo de un rectángulo es cuatro veces más grande que su ancho, este escribe la expresión $\frac{x}{4} + x$ y finalmente termina por escribir que la quinta parte de la suma de dos números es igual a $\frac{15}{5}$ (escoge dos números cualquiera y luego los suma, obteniendo como resultado 15, así: $8 + 7 = 15$).

P ₃ : Complete la siguiente tabla, empleando un enunciado que satisfaga la expresión algebraica dada:
--

Expresión	Enunciado
x	
$\frac{x}{3} + 2$	
$7(x - 8)$	
$y = 2x + 10$	

Tabla 6

A continuación se presenta las respuestas dadas por el estudiante, al momento de completar la tabla 6, seguidamente se hace una descripción del proceso desarrollado por este:

ENUNCIADO	EXPRESIÓN
la cantidad de perros	x
el largo del vestido es cinco veces más largo que dos metros	$\frac{x}{3} + 2$
siete veces la cantidad basada en los ocho años	$7(x - 8)$
la cantidad de números es igual a dos de los números	$y = 2x + 10$

Tabla 6

Para esta pregunta 3 de la tarea 4, el estudiante debe enunciar en lenguaje natural, cada una de las expresiones algebraicas relacionadas en la tabla, para esto escribe que x representa la cantidad de perros, que $\frac{x}{3} + 2$ puede ser el largo de un vestido, que es cinco veces más largo que dos metros y para la expresión $7(x - 8)$ escribe como enunciado que es siete veces la cantidad basada en los 8 años. Finalmente el estudiante escribe que $y = 2x + 10$ representa la cantidad de números que es igual a dos de los números.

Teniendo en cuenta las respuestas dadas por el E_2 , en las preguntas 2 y 3, de la tarea 4, se puede decir que con relación a su respuesta en la pregunta 2, parece indicar que identifica valores desconocidos y los relaciona con un contexto determinado; además expresa y representa tipo de particiones con respecto a una cantidad numérica; sin embargo presenta dificultad al momento de representar el producto entre una variable y un número.

Por consiguiente es posible decir que al estudiante se le dificulta escribir una expresión algebraica, que represente un enunciado dado en lenguaje natural, mediante la relación de una incógnita con una operación matemática (como lo es el caso del cociente entre dos cantidades), optando generalmente dentro de su respuesta, por dar una cantidad numérica al valor

desconocido, lo que quiere decir; que no admite que una expresión en términos de una variable, pueda dar solución a ningún tipo de representación verbal y es por esto, que termina por inventarse algún tipo de regla con el objetivo de cerrar una operación.

Con respecto a la respuesta de la pregunta 3 de la tarea 4, el estudiante identifica que una letra puede representar cualquier cantidad de elementos de un conjunto con características comunes. De igual manera le atribuye a la letra un contexto de la cotidianidad, como por ejemplo: que x puede representar un número determinado de perros, un número de vestidos, años y cantidad de números; sin embargo no relaciona adecuadamente la simbología, operaciones aritméticas y objetos algebraicos en su lenguaje natural.

Además se evidencia dentro de su descripción verbal, la dificultad que presenta el estudiante al momento de designar operaciones inversas, como lo es el caso de la división y la resta; lo que ocurre contrariamente con la multiplicación y la suma; ya que identifica y escribe sin problema enunciaciones en un lenguaje natural, las cuales representan claramente en parte, la expresión algebraica dada.

P₄: Resuelva las siguientes situaciones:

P_{4a}: El doble de un número es igual a la diferencia entre el triple del número y 20. Halle el número.

El estudiante para esta pregunta, da como respuesta cualquier número; en este caso el número 5, no propone de entrada una expresión algebraica que represente la situación, parece indicar que este asume que la cosigna “Halle el número”, denota el proponer cualquier valor numerico; es por esto que cierra el problema dando un número cualquiera.

P_{4b}: La edad de Carlos es el doble de la edad de Pedro, y la edad de María es cuatro veces la edad de Carlos y Pedro juntos. Si la suma de las edades es de 75 años, indique la edad de Carlos, Pedro y María.

Para esta pregunta, el estudiante ensaya con varios números de tal manera que al repartirlos entre Carlos, Pedro y María la suma sea igual a 75 años. Escribe que Carlos tiene 20 años, María 45 años y finalmente Pedro tiene 10 años (De acuerdo a lo que manifiesta el

estudiante, Pedro tiene la mitad de la edad de Carlos, y sumando las dos edades es igual a 30 años, por tanto quiere decir que María debe tener los años que faltan, para que las tres edades sumen en total 75 años).

P_{4c}: Juana vende lápices en la escuela a \$ 500 la unidad. Determine el número de lápices que debe vender Juana para obtener un ingreso de \$12.500

El estudiante responde que Juana debe vender 25 lápices, para obtener \$ 12.500. El proceso que realiza es buscar por ensayo y error un número que multiplicado por \$ 500 (El valor de la unidad), dé como resultado \$12.500. Con respecto a lo anterior, el estudiante escribe:
 $500 \times 25 = 12.500$

Analizando las respuestas dadas por el Estudiante a la pregunta 4, con relación a los puntos a, b y c se observa que no logra proponer una igualdad entre dos expresiones funcionales que modelen cada una de las situaciones matemáticas propuestas en lenguaje natural. No logra generalizar un procedimiento en términos formales del álgebra, es por esto que opta por usar hábitos primitivos, como lo es el caso de procedimientos netamente aritméticos, procesos de ensayo y error e invenciones de estrategias que buscan cerrar una operación. De otra parte, con relación a la respuesta a la pregunta 4c, parece indicar que el estudiante identifica magnitudes de proporcionalidad directa e identifica valores de dependencia presentes en la situación, además limita los procesos algorítmicos a operaciones aritméticas relacionadas con la suma y la multiplicación.

Con relación al análisis e implementación de la situación 3, se puede decir que tanto el estudiante 1 y el estudiante 2, logran una comprensión mayor de las tareas mediante esquemas y tablas. De otra parte al E₁ se le facilitó el reconocimiento y argumentación de propiedades de equivalencia, presentes en la solución de una ecuación, sustitución de cantidades numéricas, enunciados verbales dada una expresión algebraica y traducción de enunciados algebraicos; mientras que el E₂, aunque reconoce las propiedades no las sistematiza correctamente dentro del desarrollo de una ecuación lineal, evalúa cantidades numéricas a partir de una expresión algebraica usando métodos primitivos de tanteo, identifica la incógnita como un valor desconocido; sin embargo no hace relaciones de la misma expresión algebraica con operaciones de tipo aritméticos.

En cuanto a la solución de situaciones problemas tanto el E_1 como el E_2 usan variaciones sencillas, con relación a la ecuación de la forma 1: $ax = b$; sin embargo a ambos se les dificulta modelar una situación matemática en lenguaje natural, mediante una representación algebraica, aparentemente más compleja, de la forma 2: $ax + b = c$. El E_1 puede dar solución a un problema de la forma 1, empleando métodos aritméticos con inmersión de la operación inversa a la multiplicación y a su vez puede plantear la expresión de forma algebraica, por el contrario el E_2 , aunque parece indicar que tiene la noción de este tipo de ecuación aritmética sencilla, solo esto se alude a un hábito primitivo propio de la aritmética, la cual consiste en ensayar valores numéricos hasta obtener el resultado que se espera. Los dos estudiantes hacen uso de invenciones de estrategias que aunque buenas o malas, les permite de una u otra manera poder dar solución total o en parte del problema, es menester que el E_1 utiliza más un lenguaje algebraico y simbólico, mientras que el E_2 se vale de técnicas netamente algorítmicas desde lo aritmético.

Capítulo 4.

Conclusiones Generales y Algunas Reflexiones

Didácticas

Capítulo 4. Conclusiones Generales y Algunas Reflexiones Didácticas

En este apartado se presentan las conclusiones generales de este trabajo de grado, las cuales aluden al proceso de indagación realizado, a las metas logradas de acuerdo a los objetivos planteados y con relación a los resultados de la implementación de la propuesta de aula, aplicada a los estudios de caso (E_1 y E_2), además se incluyen algunas reflexiones de orden didáctico como aporte a los procesos de enseñanza-aprendizaje que interesen fundamentalmente a las instituciones educativas que hicieron parte de este proceso y finalmente se presentan las referencias bibliográficas.

4.1 Conclusiones generales

Se exponen a continuación las conclusiones generales relacionadas con los objetivos propuestos para este trabajo de profundización dando cuenta de esta forma de los logros alcanzados a través del desarrollo del trabajo.

En relación con el objetivo específico 1, referido a documentar la problemática, desde teorías didácticas y resultados de investigación sobre la enseñanza de las ecuaciones de primer grado con variable real y la educación diferencial, es posible concluir que:

- Estudios realizados acerca de las dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar y en el caso particular de las ecuaciones lineales con variable real, según los aportes investigativos presentados en este trabajo de grado, entre los cuales se plantean aspectos que interfieren en el aprendizaje del álgebra elemental, como lo es el caso de lo procedimental desde lo netamente numérico y de los procedimientos estructurales en el álgebra o en otras palabras, los procedimientos desarrollados sobre expresiones algebraicas; siendo esto fundamental para describir de una manera más detallada la transición de la aritmética al álgebra y por ende los obstáculos de tipo didáctico que pueden presentarse en el proceso. En cuanto a las dificultades de aprendizaje del álgebra escolar, se dice que pueden ser analizadas a partir de unas áreas de dificultad que van desde la parte operacional, la naturaleza de los conjuntos numéricos en $\mathbb{R}$, el problema en la inversión de las operaciones, la naturaleza dual de la

igualdad, la simbología algebraica, los métodos primitivos y escolarizados en la resolución de una ecuación lineal. Lo anterior permite dar una mirada a fondo, acerca del tipo de errores y estrategias primitivas presentes en estudiantes de niveles académicos bajos y altos, lo cual viene a ser resultado de problemas propios del álgebra elemental y de la extrapolación inadecuada de los conceptos matemáticos. Con relación a las ecuaciones lineales, se encuentra que una de las mayores dificultades se refleja en la imposibilidad que presentan la mayoría de los estudiantes, para entender la noción de igualdad, a partir de las propiedades de equivalencia y en ver una ecuación algebraica desde su totalidad como objeto matemático; además subraya las falencias para traducir en términos de una igualdad un enunciado verbal, donde se evidencia falta de comprensión en cuanto a dos tipos de lenguajes y de representación.

- Desde la educación diferencial se evidencia que, esta no se encuentra estandarizada en un manual de enseñanza paso a paso, sino que más bien es una recopilación de estrategias y técnicas que procuran orientar la enseñanza a partir de conocer la diversidad estudiantil, además lo que es común y lo que no es común en los estudiantes, proporciona elementos que son relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. También se resalta la importancia de conocer el contexto tanto social como escolar de los estudiantes; ya que esto proporciona elementos claves que permiten encaminarse en la búsqueda de estrategias metodológicas que permitan atender las necesidades individuales, intereses y modalidades de aprendizaje de los estudiantes para favorecer la enseñanza desde perspectivas diferenciadoras. Finalmente, esta parte del marco teórico amplía de manera circunstancial los conceptos que emergen de las necesidades educativas especiales (NEE), como lo es el caso de la ambigüedad que hoy en día se tiene, acerca de lo que se conoce como una dificultad de aprendizaje.

Respecto al objetivo 2, articular elementos teóricos y metodológicos sobre la problemática, desde las perspectivas matemática, curricular y didáctica, en una propuesta de enseñanza de las ecuaciones lineales con variable real se puede concluir:

- Desde la perspectiva matemática se tienen en cuenta aspectos fundamentales del álgebra y de las ecuaciones lineales con variable real, los cuales presentan elementos conceptuales claves

que le dan la significación al saber matemático y esto lleva a reflexionar acerca de los problemas que emergen de los mismos contenidos y que están ligados a los elementos característicos del álgebra elemental; es importante entonces pensar en lo que hace importante a un objeto matemático y lo que lo diferencia de otros, teniendo en cuenta que en el caso particular de la ecuación lineal con variable real es relevante pensar en su sentido de equivalencia, desde la noción de igualdad entre dos expresiones funcionales, el papel que juega la incógnita y la variable, las representaciones de tipo simbólicas, las expresiones algebraicas y las propiedades de equivalencia en el proceso de resolución.

- Es importante tener en cuenta que la enseñanza del álgebra y de las ecuaciones lineales con variable real, no deben circunscribirse en métodos ambiguos y repetitivos, sino que por lo contrario deben propiciarse espacios en donde el profesor tenga la oportunidad de compartir en el aula de clases, teniendo en cuenta el contexto del estudiante, formas diferentes de presentar un contenido matemático de ecuación lineal, basándose en sus elementos y aspectos que vienen a ser característicos del álgebra escolar.

En general, la perspectiva matemática proporciona elementos teóricos relacionados al concepto formal de ecuación lineal, desde el papel que juega la simbolización dentro de un objeto matemático, la significación del concepto de ecuación, sus representaciones de tipo simbólicas; además de proporcionar dos formas de ser vista la ecuación lineal: Desde la teoría de conjuntos y desde un sentido funcional. Los elementos mencionados, permitieron incluir dentro de las tareas de la propuesta de aula, propiedades matemáticas importantes de la ecuación lineal, como lo es la movilización de las propiedades de equivalencia; además el concepto de igualdad llevó a incluir dentro las situaciones tareas que obligaran al estudiante a ver la ecuación como la equivalencia entre dos funciones, conformada por elementos que se relacionan entre si dentro de un conjunto.

Desde la perspectiva curricular se tienen en cuenta el diseño de situaciones del contexto relacionadas con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, haciendo énfasis principalmente en los procesos de resolución y planteamientos de problemas, contextualización referida a actividades de modelación a partir del análisis de situaciones a través de diferentes sistemas de representación: tabular, grafico verbal y la expresión simbólica.

Con relación a los elementos que proporciona esta perspectiva, dentro de las tareas de la propuesta de aula, se incluyeron los puntos más importantes del pensamiento variacional, como lo son el uso de patrones y tipos de representación que ayudan a movilizar el concepto de ecuación lineal, también se incluyeron situaciones problemas dentro de las tareas y resolución de ecuaciones, en donde se identificara el uso de las propiedades de equivalencia y procedimientos estructurales característicos del álgebra.

Desde la perspectiva didáctica se tienen en cuenta algunos elementos teóricos relacionados con aspectos didácticos afines con la ecuación lineal con una variable real, haciendo referencia a las áreas de dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar, transición de lo aritmético a lo algebraico, análisis desarrollados a partir de estudios de caso (nivel bajo, nivel medio y nivel alto), estudios de caso en los cuales es posible observar que los estudiantes de nivel bajo y nivel medio poseen habilidades de gran importancia en el aprendizaje del álgebra.

En relación al objetivo específico 3, identificar logros y dificultades en la implementación de la propuesta de aula, se puede concluir que:

Los estudiantes que aparentemente se encuentran en un nivel académico bajo, desarrollan habilidades propias de la aritmética, las cuales se siguen haciendo presente en estudiantes que se encuentran en un nivel alto. Esto quiere decir que es importante tener en cuenta este tipo de habilidades, las cuales vienen a ser invenciones estratégicas producto de los problemas propios del álgebra, problemas que no solo se presenta en estudiantes con necesidades educativas especiales, sino que también pueden ser parte de cualquier tipo de población.

En su mayoría, los dos estudios de caso (E_1 y E_2) desarrollan procesos algorítmicos correctos desde la perspectiva aritmética; sin embargo no logran modelar esta parte operacional en un nivel formal del álgebra. Se hace presente para estos, la necesidad de recurrir a estrategias y hábitos de tipo primitivos, que les permitan dar cierre a un problema que inicialmente se supone debe resolverse por alternativas de tipo algebraicas. Esta última parte, hace alusión a la dificultad al momento de expresar una enunciación verbal en términos algebraicos, sobre todo cuando se pretende que el estudiante haga una relación entre la igualdad de dos funciones, teniendo en cuenta el tratamiento que debe darse a su simbología algebraica.

El E_1 debido a su condición visual presenta dificultad para hacer asociaciones entre los elementos dados en un registro tabular; ya que los códigos y símbolos empleados en el Braille no logran dar un registro claro de este tipo de esquemas, lo cual genera que para el estudiante sea

difícil percibir la posición de cada uno de dichos elementos y la interrelación entre los mismos, teniendo en cuenta por ejemplo ubicación de filas, columnas y distribución de la información. Teniendo en cuenta lo anterior, es importante pensar en recursos y herramientas adicionales al braille, que permitan trabajar este tipo de representaciones (gráficas, esquemas, tablas etc.), como por ejemplo invenciones que el docente a cargo proponga, en donde se proporcione materiales con los cuales el estudiante pueda interactuar por medio de procesos asociados al tacto que faciliten la representación del conocimiento.

El E₂ se le dificulta analizar e identificar información contenida en registros tabulares, sobre todo cuando hay gran cantidad de datos (ejemplo: magnitudes) que no son aislados el uno del otro; sin embargo este logra relacionar la información cuando se vale de procesos discursivos en donde comenta con el profesor acerca del problema en cuestión. Lo anterior también viene a ser una dificultad cuando debe de argumentar de forma escrita, mediante simbolismos algebraicos un proceso estructurado que dé cuenta del objeto matemático.

4.2 Reflexiones didácticas

Teniendo en cuenta los análisis y resultados de la implementación de la propuesta de aula es importante poner en consideración algunas reflexiones didácticas, con la idea de generar un aporte que sirva para la labor de profesores de matemática en ejercicio y en proceso de formación, especialmente a los profesores que hacen parte de las dos instituciones en donde dio lugar este trabajo de grado; teniendo en cuenta que estas son un referente con relación a la realidad colectiva que se vive a diario en las aulas de clases y que se relacionan directamente con las necesidades educativas de la comunidad:

- En cuanto a las actividades de aula, es importante que el docente tenga claridad en relación a los propósitos de cada una de las tareas, los cuales no solo están relacionadas con el concepto matemático, sino también con el contexto social y escolar del estudiante. El hecho de tener presente todos los elementos involucrados dentro de una actividad de aula, implica que se reflexione sobre la importancia de la actividad misma, en donde el objetivo principal no es encontrar resultados inmediatos, sino un proceso que va ligado a las características propias de un saber matemático y del tipo de asimilación o comprensión de aprendizaje del estudiante.

En general, una situación debe tratar en su mayoría de movilizar todos aquellos elementos de enseñanza que le permitan al estudiante apropiarse de un concepto matemático.

- Cuando se habla de situaciones o tareas diferenciadas en el aula, se debe tener presente que no se debe caer en un sesgo, pensando en un tipo de población con limitaciones; sino más bien pensar en personas quienes estas sujetas a los mismos deberes y derechos constitucionales, en donde el problema no radica en algún tipo de discapacidad, bien sea física o cognitiva, si no en los recursos con los cuales se cuenta para enseñar en la clase, en la disposición de los docentes e investigadores en educación matemática, para transformar y crear nuevas tareas, para reflexionar acerca de lo que verdaderamente necesita aprender un estudiante, pensando en currículos y formas de evaluación flexibles, lo cual no genere ningún tipo de discriminación y diferencia; sino la búsqueda de alternativas para que todos puedan aprender en su ritmo, teniendo en cuenta las necesidades educativas propias de cada individuo. En general, las tareas no son las que deben diferenciarse, sino las estrategias y los recursos que se implementen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es de esta manera que se puede lograr que dichos procesos incluyan a toda persona sin excepción alguna.
- Teniendo en cuenta los aportes tomados, del trabajo desarrollado con los dos estudios de caso (E_1 y E_2) con relación a la propuesta de aula, se puede decir que los currículos escolares no deben ser excluyentes; ya que se alude que los estándares de desempeño trabajados pueden ser los mismos para cualquier estudiante, independientemente si presenta o no una necesidad educativa especial (NEE). Si bien es cierto, que dentro de los análisis de resultados con respecto a los dos estudios de caso, se presentaron elementos comunes y no comunes, también lo es, que estos permitieron enriquecer la propuesta en cuanto a la necesidad de reflexionar acerca de algunas de las hipótesis iniciales que dieron lugar a este trabajo de investigación y por ende su reformulación; además de hacer una invitación a los profesores de matemáticas y a todos aquellos interesados en la diversidad estudiantil, a no caer en el error de generalizar a los estudiantes al momento de hacer conjeturas, pues se debe tener en cuenta que cada individuo tiene formas diferentes de aprender, y además que tener una necesidad educativa o una discapacidad no implica que esto sea una imposibilidad dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, pues es importante tener presente que a las

necesidades escolares, no se les debe atribuir como problemas aislados de la realidad educativa, por tanto el saber debe estar a la disposición de todos y lo único que debe diferenciarse dependiendo de las situaciones de enseñanza son las estrategias metodológicas y saber dar uso a los recursos con los cuales se cuenta.

- Desde la perspectiva curricular y con relación a los elementos involucrados en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, se puede decir que estos permiten ver el concepto de ecuación lineal con variable real, desde un punto de vista más dinámico y menos estático; en donde son relevantes el tipo de representaciones y patrones que dan lugar al concepto, por lo cual es de suma importancia que los profesores de matemáticas piensen en proponer en sus aulas de clase, tareas que movilicen los elementos más significativos dentro del concepto de ecuación lineal y que están directamente evocados en su estructuración formal.
- Este trabajo de grado es un aporte importante tanto para la Institución Educativa Inmaculada Concepción y el Colegio Bolívar, aunque direccionado de forma diferente; teniendo en cuenta que las dos instituciones son distintas en cuanto a su población y contexto socioeconómico, ya que la primera es de carácter público y por tanto posee un programa de inclusión, el cual por falta de recursos del Ministerio de Educación, no es debidamente atendido, y de igual forma los docentes no tienen la formación adecuada para atender una población que requiere una educación diferencial, por consiguiente como aporte, se hace un llamado a los docentes desde su disciplina y su práctica, a generar adaptaciones didácticas mediadas a través de investigaciones y modificaciones en el plan de área, que permitan la atención de esta población, con proyección a potenciar habilidades y destrezas en los estudiantes que requieren particularidades en su aprendizaje. Con respecto al Colegio Bolívar, siendo una institución de carácter privado, cuenta con los recursos, tanto económicos como humanos; para atender a los procesos de enseñanza y aprendizaje, permitiéndole a los profesores mediante un coach de instrucción²¹; mejorar sus prácticas educativas; sin embargo el aporte a esta institución, se dirige en, ampliar nuevas perspectivas de atención a población con algún tipo de limitación física. De manera general

²¹Coach de instrucción, se refiere a la persona encargada de liderar, guiar y apoyar a los profesores en el desarrollo de estrategias metodológicas al interior del aula.

se hace una invitación a los docentes en formación matemática que puedan estar interesados en esta problemática y quieran buscar alternativas para mejorar su quehacer en el aula y por consiguiente el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Aguirre, P. et al. (2008). Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de discapacidad visual y sordoceguera. *Andalucía, España: Consejería de Educación, Junta de Andalucía. Recuperado de: <http://www.juntadeandalucia.es/educacion/nav/contenido.jsp>.*

Artunduaga Mejía, S. X., & Ortega Díaz, K. (2013). *Identificación de competencias asociadas a la resolución de problemas en matemáticas en un grupo de estudiantes sordos de la educación media colombiana [recurso electrónico]* (Doctoral dissertation).

Beltrán, L., Cerón, L., & Pineda, P. (2010). *Aproximación a algunos aspectos curriculares en relación con la formación docente y la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con limitación visual*. Trabajo de pregrado. Universidad del Valle.

Benavides, E. y Jaramillo, N. (2011). *La noción de variable en ecuaciones lineales: Una perspectiva funcional*. Trabajo de pregrado. Universidad del Valle.

Bermeo Álvarez, I. D. L. (2013). La neuropsicología en el análisis de los problemas de aprendizaje: evaluación y recuperación en aulas de apoyo psicopedagógico de Cuenca.

Bolívar, A. (2004). Ciudadanía y escuela pública en el contexto de diversidad cultural. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 9(20), 15-38.

Burgos, C. O. (2013). El dilema de la educación diferencial hoy:¿ el currículum o las habilidades específicas?. *Temas de Educación*, 19(2), 69-82.

Camacho, M., Hernández, J., & Socas, M. M. (1995). Concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la Matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. *LJ Blanco y V. Mellado. La formación del profesorado deficiencias y matemáticas en España y Portugal*, 81-97.

Carvajal, M.M & Perdomo Cruz J (2013), *Instructivo N°1: Participación del estudiante en las actividades de la vida escolar*. Escuela de rehabilitación humana Universidad del Valle.

Chavarria y Diaz (2013). La realidad de estudiantes de secundaria con adecuación curricular o significativa en matemáticas. *Revista Uniciencia*. Vol 27, N 1. pp. 15-33.

Criollo y González (2010). Ciegos, función lineal, impedidos visuales, actividades del aprendizaje, integración escolar. Trabajo de pregrado. Universidad del valle.

De Castro, C. P. (2007). 450 años de igualdad... matemática. *Ingenierías*,10(36).

Delgado, G., et al. *La discapacidad en el cine: un estudio descriptivo*. Diss. Tesis U, Guía B. Yankovic (Pág 10-15), Santiago, 2008.

Echeita Sarrionandia, G., & Ainscow, M. (2011). La educación inclusiva como derecho: marco de referencia y pautas de acción para el desarrollo de una revolución pendiente. *Tejuelo: Revista de Didáctica de la Lengua y la Literatura*.

Esquinas, A. (2009). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico, del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente. *Memoria de tesis doctoral (Director: Félix E. González J), Madrid, España*.

Farías, M., Fiol, D., Kit, I., & Melgar, S. (2007). Todos Pueden Aprender. Propuestas para superar el fracaso escolar. *Buenos Aires: Fondo de las Naciones Unidas para la infancia y Asociación civil educación para todos*.

Filloy, E., & Rojano, T. (1984). *La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico*. Centro de Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica.

Foucault, M. (2007). *Seguridad, territorio, población: Curso del College de France (1977-1978)*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didatique des mathematiques*, 9(2), 155-188.

Hurtado, C. (2013). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica. Trabajo de posgrado. Universidad del Valle.

Infante y Hurtado (2010). Significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado. Trabajo de pregrado. Universidad del Valle.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. una empresa docente.*

León y Valdez (2009). *Iniciación al álgebra escolar desde una perspectiva funcional, una secuencia didáctica para la introducción a las expresiones algebraicas y ecuaciones lineales.* Trabajo de pregrado. Universidad del Valle.

Lopez y Rodríguez (2013). *Análisis Didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica.* Trabajo de grado maestría. Universidad del Valle.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gower, N. (1999). *Rutas hacia el/Raíces del álgebra*. (Traducción al español: Cecilia Agudelo). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Serie Lineamientos curriculares. República de Colombia. Bogotá, D.C. Colombia. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Colombia, Santafé de Bogotá

Ministerio de Educación Nacional. (2006b). *Orientaciones pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad cognitiva*.

Ministerio de Educación Nacional (2006c). Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo a estudiantes con Necesidades Educativas Especiales NEE. Guía N 12.

Moreno Salazar, L. (2014). La lúdica como estrategia didáctica.

Núñez Pérez, J. C., González García, J. A., García Rodríguez, M. S., González-Pumariega Solís, S., Roces Montero, C., Álvarez Pérez, L., & González Torres, M. D. C. (1998). Estrategias de aprendizaje, autoconcepto y rendimiento académico. *Psicothema*, 10 (1).

Ormrod, J. E. (2005). *Aprendizaje humano*. Madrid, Spain: Pearson Educación.

Palacios, A., & Románach, J. (2008). El modelo de diversidad: una nueva visión de la bioética desde la perspectiva de las personas con diversidad funcional (discapacidad). *Intersticios*, 2(2), 37-47.

Pérez (2010). Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal, un estudio con profesores de bachillerato. Universidad Autónoma de Yucatán.

Puig, L., & Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48).

Robayna, M. M. S., & Medina, M. M. P. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (16), 91-98.

Romero, C. (2004). La escuela media en la sociedad del conocimiento. *Novedades Educativas*.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Skliar, C. (2002). Alteridades y pedagogías. O... ¿y si el otro no estuviera ahí? *Educação & Sociedade*, 23(79), 85-123.

Skliar, C. S. (2007). *Y si el otro no estuviera ahí?: notas para una pedagogía (improbable) de la diferencia* (No. 376). Miño y Dávila.

Socas, M. M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Ed. Horsori

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the learning of mathematics*, 9(3), 37-42.

Tomlinson, C. A. (2005). *Estrategias para trabajar con la diversidad en el aula*. Paidós.

Wagner, S. E., & Kieran, C. E. (1989). Research issues in the learning and teaching of algebra, Vol. 4. In *This monograph contains revisions of papers presented at The Research Agenda Conference on Algebra, which was held in Mar, 1987, at the University of Georgia, Athens, under the auspices of the National Council of Teachers of Mathematics, Inc.*. National Council of Teachers of Mathematics.

Yarza (2005), Travesías: *apuntes para una epistemología y una pedagogía de la educación especial en Colombia*. Revista de Pedagogía v.26, n.76

Zelege, S. (2004). Differences in self-concept among children with mathematics disabilities and their average and high achieving peers. *International Journal of Disability, Development and Education*, 51(3), 253-269.

Zill y Dewar (2012). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. Tercera edición. Traducción en español por McGraw-Hill/Interamericana editores.

Anexos

Anexo 1: Orientaciones para la aplicación de instrumento:

A continuación se presentan las instrucciones generales para el uso del instrumento:

- ¿En qué lugar se debe llenar la información?: La información se recopila en la institución educativa, en la cual se pretende desarrollar las actividades, para de manera posterior hacer una descripción de las mismas.
- ¿Quién provee la información de cada una de las 7 áreas?: Aquí se tienen en cuenta las características principales de cada área, para de esta manera determinar si la información debe ser suministrada por: El estudiante, el acudiente o el profesor.
- ¿En dónde se busca la información documental?: Esta información se busca teniendo en cuenta los expedientes escolares de cada uno de los estudiantes involucrados, como lo son: La historia académica, la cual incluye hoja de vida, resultados de notas, diagnósticos psicológicos y terapéuticos (Esto se lleva a cabo, teniendo en cuenta los permisos respectivos otorgados por la institución a cargo y por los acudientes).
- ¿Qué se le dice a los docentes y al estudiante sobre el qué y el para qué de llenar la información?: Se les indica que este tiene como finalidad recopilar datos relevantes para el trabajo de investigación, los cuales de manera posterior serán descriptos y analizados solo con fines de tipo académico.
- ¿Qué materiales se requieren?: Registros escritos y digitales (protocolos, videos y audios), el instrumento de caracterización, pruebas diagnósticas, actividades acerca de la propuesta didáctica.

Anexo 2: Prueba diagnóstica de matemática

INSTITUCIÓN: _____

ESTUDIANTE: _____ FECHA: _____

TIEMPO DE CLASE: 2 HORAS

SITUACIÓN I: DESPLAZAMIENTO DE UN GUSANO EN LINEA RECTA

Consideremos un gusano que se desplaza a lo largo de una línea recta y un joven observa detenidamente el movimiento. El joven hace una raya sobre la trayectoria para indicar la posición que ocupa el gusano cada segundo. Luego mide las distancias y resume la información en la siguiente tabla de datos:

DISTANCIA RECORRIDA EN mm		8	12			24		32	40		48			96
TIEMPO EMPLEADO (EN seg)	1	2		4		6	7		10			14	20	



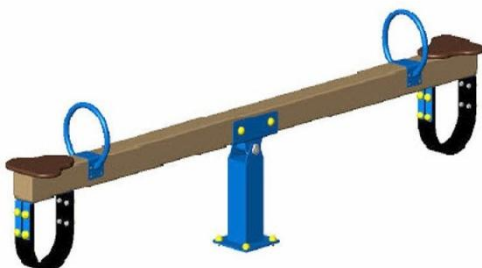
1. Haga un dibujo que ilustre la situación planteada
2. Complete la tabla
3. a) Indique la distancia que ha recorrido el gusano al cabo de 38 segundos
b) Explique. ¿Cómo halló la respuesta?
4. a) Escriba cuántos segundos se demora en recorrer 40 mm y 200 mm
b) (Explica tu respuesta)
5. Escriba una manera de calcular la distancia (S) recorrida por el gusano en un tiempo (t) cualquiera
6. Si la distancia recorrida por el gusano es de 100 mm. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer dicha distancia?
7. Escriba una expresión que permita encontrar el tiempo (t) utilizado por el gusano, para recorrer una distancia (s) cualquiera.

SITUACIÓN II: EL SUBE Y BAJA

En el juego del sube y baja (Balancín) participan cuatro amigos Ana, Lucía, Martín y Gustavo. En un extremo están Ana y Martín y en el otro extremo Lucía y Gustavo. Ana dice “yo peso 35 kg”, Martín dice “yo peso 39 kg”, Gustavo dice “yo peso 40 kg”, Lucía dice “yo no me acuerdo de mi peso”.

1. Si el balancín está en equilibrio:

a) Dibuja la situación en el siguiente balancín (representación gráfica)



b) Representa la situación numéricamente

c) ¿Cuál es el peso de Lucía?

2) Suponiendo que los dos chicos están en un extremo y las dos chicas en otro y que el balancín está en equilibrio:

a) Haga un dibujo que ilustre la situación

b) ¿Cuál es el peso de Lucía en este caso?

c) Indique como resolvió la pregunta

3) teniendo en cuenta las preguntas 1 y 2 encuentre una expresión que permita calcular el peso de Lucía en el caso 1 y en el caso 2

4) Gustavo afirma que la expresión que permite calcular el peso de Lucía en el caso 2 es:

$$39 + 40 = 35 + x$$

a) Indique el valor de verdad de esta afirmación

b) Que indica x en la expresión

c) Utiliza esta expresión para encontrar el peso de Lucía

SITUACIÓN III: EXPRESIONES EQUIVALENTES

1. Ayuda a María, a encontrar las expresiones equivalentes a: $4x - 2x - 5$.

$2x + 4$

$x - 2$

$2x - 5$

$4x - 10$

$2x$

$-14x + 35$

$6x - 4x - 5$

$4 + 5x$

2. Soluciona las siguientes ecuaciones

a) $4x = -7 - 5$

b) $6x + 7 = 2x - 5$

c) $z - 30 = 90$

d) $5x = 20$

3. Complete la siguiente información teniendo en cuenta que la edad de Ana es el triple de la edad de María, la edad de María es el doble de la edad de Susana y la suma de las edades es igual a 27.

- a) Complete la siguiente información, si se sabe que x corresponde a la edad de Susana:

LENGUAJE NATURAL	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
Edad de Susana	x
Edad de María	
Edad de Ana	

- b) Determine cuántos años tiene Susana, María y Ana

Anexo 3. Fragmento de situaciones aplicadas (Prueba diagnóstica de matemáticas)

Prueba al estudiante del Colegio Bolívar (2 páginas):

PRUEBA PARA LINEA BASE DE MATEMÁTICAS

INSTITUCIÓN: Colegio Bolívar

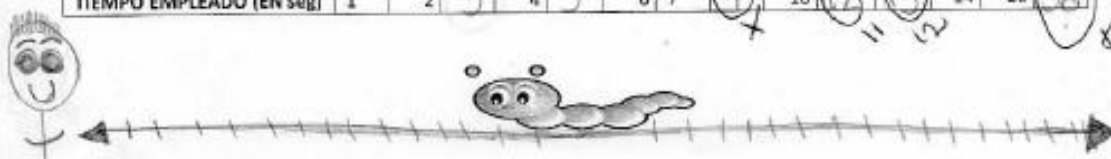
ESTUDIANTE: [Nombre] A: 24/01/2015

TIEMPO DE CLASES: 2 HORAS

SITUACIÓN I: DESPLAZAMIENTO DE UN GUSANO EN LINEA RECTA

Consideremos un gusano que se desplaza a lo largo de una línea recta y un joven observa detenidamente el movimiento. El joven hace una raya sobre la trayectoria para indicar la posición que ocupa el gusano cada segundo. Luego mide las distancias y resume la información en la siguiente tabla de datos:

DISTANCIA RECORRIDA EN mm	4	8	12	16	20	24	28	32	40	44	48	54	62	96
TIEMPO EMPLEADO (EN seg)	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13	14	20	38



1. Haga un dibujo que ilustre la situación planteada ✓

2. Complete la tabla

3. a) Indique la distancia que ha recorrido el gusano al cabo de 38 segundos
b) Explique. ¿Cómo halló la respuesta?
Basicamente recorre 96 mm en 38 segundos.

4. a) Escriba cuántos segundos se demora en recorrer 40 mm y 200 mm
b) Explica tu respuesta
En recorrer 40 mm el gusano tarda 10 segundos
y en 200 mm recorre 50 segundos

5. Escriba una manera de calcular la distancia (S) recorrida por el gusano en un tiempo (t) cualquiera
Se puede sumar la distancia respecto a los segundos
o viceversa

6. Si la distancia recorrida por el gusano es de 100 mm. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer dicha distancia?
40 segundos.

7. Escriba una expresión que permita encontrar el tiempo (t) utilizado por el gusano, para recorrer una distancia (s) cualquiera.
Segundos más la suma de distancia recorrida.

1 |

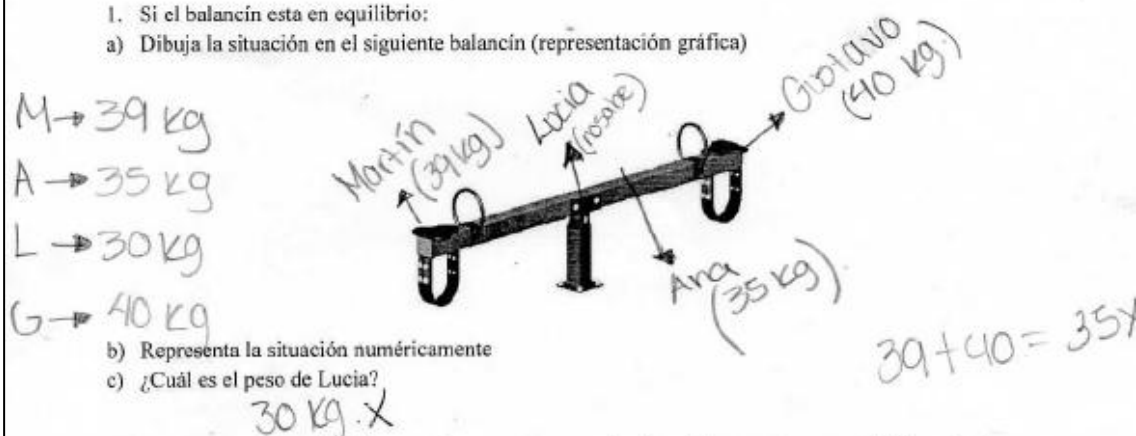
PRUEBA PARA LINEA BASE DE MATEMÁTICAS

SITUACIÓN II: EL SUBE Y BAJA

En el juego del sube y baja (Balancín) participan cuatro amigos Ana, Lucía, Martín y Gustavo. En un extremo están Ana y Martín y en el otro extremo Lucía y Gustavo. Ana dice "yo peso 35 kg", Martín dice "yo peso 39 kg", Gustavo dice "yo peso 40 kg", Lucía dice "yo no me acuerdo de mi peso".

1. Si el balancín está en equilibrio:

a) Dibuja la situación en el siguiente balancín (representación gráfica)



b) Representa la situación numéricamente

c) ¿Cuál es el peso de Lucía?

30 kg. X

2) Suponiendo que los dos chicos están en un extremo y las dos chicas en otro y que el balancín está en equilibrio:

a) Haga un dibujo que ilustre la situación

b) ¿Cuál es el peso de Lucía en este caso?

c) Indique como resolvió la pregunta

Si los niños tienen un mayor peso los niños tendrían menos. al suponer ana tiene 35 podemos inferir que Lucía está entre los 30 y 35.

3) teniendo en cuenta las preguntas 1 y 2 encuentre una expresión que permita calcular el peso de Lucía en el caso 1 y en el caso 2

Ana 35 kg → Lucía 30 kg

Respecto a todos los números disminuyen a partir de Gustavo. Los 30

4) Gustavo afirma que la expresión que permite calcular el peso de Lucía en el caso 2 es:

$$39 + 40 = 35 + x$$

a) Indique el valor de verdad de esta afirmación

b) Que indica x en la expresión

c) Utiliza esta expresión para encontrar el peso de Lucía

Indica el peso que no se sabe de Lucía.

2 |

$$\rightarrow 35 + 39 = 40 + x$$

Prueba al estudiante de la I.E. Inmaculada Concepción (4 páginas):

PRUEBA DIAGNOSTICA DE MATEMÁTICAS

INSTITUCIÓN: Inmaculada Concepción

ESTUDIANTE: _____ FECHA: 22/04/15

TIEMPO DE CLASE: 2 HORAS

SITUACIÓN I: DESPLAZAMIENTO DE UN GUSANO EN LINEA RECTA

Consideremos un gusano que se desplaza a lo largo de una línea recta y un joven observa detenidamente el movimiento. El joven hace una raya sobre la trayectoria para indicar la posición que ocupa el gusano cada segundo. Luego mide las distancias y resume la información en la siguiente tabla de datos:

DISTANCIA RECORRIDA EN mm	4	8	12	16	20	24	28	32	40	44	48	52	44	96
TIEMPO EMPLEADO (EN seg)	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13	14	20	38



$mm = x + 52 = 96$
 $x = 96 - 52$
 $x = 44$

1) 

3) $x + 4 = 38$ • la distancia que ha recorrido el gusano en 38 segundos fue de 9.5 centímetros
 $x = \frac{38}{4}$
 $x = 9.5$ • Por medio de una división

4) $\begin{array}{r} 80 \\ +80 \\ \hline 160 \\ +40 \\ \hline 200 \end{array}$ R11: Se desmora a las 40mm se tarda 10 segundos y a las 200m se desmora 50 segundos

PRUEBA DIAGNOSTICA DE MATEMÁTICAS

SITUACIÓN II: EL SUBE Y BAJA

En el juego del sube y baja (Balancín) participan cuatro amigos Ana, Lucía, Martín y Gustavo. En un extremo están Ana y Martín y en el otro extremo Lucía y Gustavo. Ana dice "yo peso 35 kg", Martín dice "yo peso 39 kg", Gustavo dice "yo peso 40 kg", Lucía dice "yo no me acuerdo de mi peso".

1. Si el balancín esta en equilibrio:

a) Dibuja la situación en el siguiente balancín (representación gráfica)



b) Representa la situación numéricamente

c) ¿Cuál es el peso de Lucía? R/1: 34

2) Suponiendo que los dos chicos están en un extremo y las dos chicas en otro y que el balancín esta en equilibrio:

a) Haga un dibujo que ilustre la situación

b) ¿Cuál es el peso de Lucía en este caso? R/1: 44

c) Indique como resolvió la pregunta



a) Ana martin	lucia gustavo	2. gustavo martin
35 39	34 40	40 39
74	74	79
		lucia Ana
		44 39
		79

b) gustavo pesa 40 y martin pesa 39 entonces los dos pesan 79, Ana pesa 35 lucia en este caso pesa 34

c) la solucion sumando dio el valor de 79 y necesito q' los niños igualen los pesos, en este caso lucia pesa 44

$$\begin{array}{ll}
 3. \quad x + 40 = 74 & 2. \quad x + 35 = 79 \\
 x = 74 - 40 & x = 79 - 35 \\
 x = 34 & x = 44
 \end{array}$$

4. Utilice otro metodo de igual forma me dio la soluci

a) Se indica x a lucia por q' no tiene peso definido

b) hacer una expresion imaginada q' da la ecuaci

Anexo 4. Fragmentos de aplicación instrumento

Instrumento de Caracterización (3 páginas):

Datos generales

1.

Nombre del estudiante	
Edad 14 años	Fecha de nacimiento Agosto del 2000
Nombre del Padre	
Nombre de la Madre	
Número de hermanos	
Establecimiento Educativo I.E Inmaculada Concepción	
Sede Central	
Barrio o Comuna Alto bonito (Costavilla)	
Grado Noveno A 99	Fecha 21/04/2015
Área asignada Matemáticas	

2

Nombre del docente	Raquel Vidarte J
Título profesional	Licenciada en Educación Básica
Área asignada	Matemáticas
Director de grupo	Sí ☒ No ☐

4. Calificaciones finales por grado terminado en las áreas de Lenguaje-Matemática¹

GRADO ESCOLAR	LENGUAJE	MATEMÁTICAS	OBSERVACIONES DE LOS MAESTROS
1°	B	A	
2°	B	B	
3°	4,0	3,5	
4°	4,2	4,0	
5°	4,0	4,0	
6°	4,0	3,5	
7°	4,2	3,4	
8°	4,2	3,3	
9°	3,6	3,2	

6. Observaciones de los maestros acerca del aprendizaje del estudiante en el grado actual

Área de conocimiento

Lenguaje

OBSERVACIONES	Descripción de las ayudas que el maestro realiza para el aprendizaje del niño
El estudiante no presenta ninguna condición de anomalía. Participa en clase: ✓ interoga ✓ aporta intelectualmente	✓ Se aclara y amplía oportunamente cuando interoga o presenta dudas sobre un tema o aspectos de éste. ✓ Se revisa en su compañía, los informes o resultados de sus consultas o tareas formuladas
✓ Se lleva bien con sus compañeros. ✓ Discute sobre los resultados de las evaluaciones. ✓ Consulta las tareas y las expone ✓ En frecuencia faltó a clases	✓ Se anima a través de consejos y notas, como estímulo, la participación en clase y la práctica de una excelente relación personal (intra y extra-clase). ✓ Se le enseña lo importante de la puntualidad y asistencia a clases, etc.

Instrumento de Caracterización (2 páginas):

I. Participación del estudiante en las actividades de la vida escolar

Datos generales

1.

Nombre del estudiante	
Edad 16 años	Fecha de nacimiento Julio 6 1998
Nombre del Padre	
Nombre de la Madre	
Número de hermanos 1	
Establecimiento Educativo Institución Educativa Inmaculada Concepción	
Sede Central	
Barrio o Comuna	
Grado 9 ^a	Fecha abril 21/15
Área asignada Matemática	

2

Nombre del docente Raquel Urdete
Título profesional Licenciada en Educación Básica
Área asignada Matemática
Director de grupo Si ☒ No ☐

Historia escolar y aprendizaje actual (académica)

3. Cantidad de años de repitencia escolar y grados repetidos

Grados reprobados Si ☒ No ☐	Cuáles y motivo o causas de la pérdida de año escolar
Grado Segundo. Motivo Salud (Pérdida de la vista)	

6. Observaciones generales de los maestros¹

Educación Básica Secundaria

PREGUNTA	MAESTRO DE LENGUAJE	MAESTRO DE MATEMÁTICAS
¿Cuál es la mayor preocupación de usted como maestro, en relación con el aprendizaje del estudiante?	que los conocimientos saberes y experiencias asimilados no los ponga en práctica	La serie de dificultades que se presentan para que comprenda deter- minados temas

II. Actividades de rutina sencilla y compleja

¿El estudiante emplea una agenda diaria de trabajo? (Para tareas, trabajos pendientes, organización de su tiempo) Si <u>X</u> No _____ Algunas veces _____ Nunca _____ No tiene agenda _____ Fundamentalmente para: <u>Para</u> <u> Saber el orden de las</u> <u> actividades que hay</u> <u> diariamente</u>	¿Dentro de la institución educativa, el estudiante cuenta con un espacio en el cual se le permita avanzar en tareas y trabajos escolares? Si <u>X</u> No _____ Observación: En el área de Matemá- ticas y Educación Física Median espacios especia- les para trabajo individual	¿El estudiante se caracteriza por su orden y organización en la toma de apuntes y en aspectos que se le parezcan? si <u>X</u> No _____ Algunas veces _____ Nunca _____
--	---	---

Anexo 5. Fragmentos de situaciones implementadas (Propuesta de Aula)

Evidencias Estudiante 1. Registros tomados por el docente investigador (2 páginas):

Situación 1

Variaciones lineales y el concepto de Ecuación de primer grado con una incógnita Real

Tarea 1: Comprendo la situación

- 1) R/ El valor de los tickets en pesos colombianos es \$ 4'260.750
Que hago? Multiplico el peso de los tickets por el valor del dólar actualmente
- 2) R/ Un ticket de avión cuesta 299 USD Que hago? Se divide el costo de los tickets por el número de pasajeros que es 5
- 3) R/ Costo de un ticket en pesos es \$ 852.150 Que hago? Se multiplica 299×2.850 operación que realice por el peso actual
- 4) R/ \$ 260.130 Pesos Mexicanos Que hago? multiplico esto total por el peso del peso mexicano que es de 174 peso colombiano
- 5) R/ Recorren 5722 Km que recorren hasta son 2.861 Km + 2.861 Km por que son recorridos dos veces de ida 2.861 y se hace 6 veces de regreso

Tarea 2: Variación lineal

1: Uº de viajes	1	2	3	3	10	14	13	
Completar la tabla								
Distancia en Km recorridos	2861	5722	99.226	13.166	26.640	31.471	32.193	57.220

Problema planteado

- 2- R/ Cantidad de viajes y distancia recorrida
- 3- R/ Depende del # de viajes por que al sumar el número de viajes aumenta la distancia recorrida
- 4- R/ 35 viajes, Divide 100.000 entre 2.861 y esto equivale a 35 viajes
- 5) R/ Se recorren 48.552 Km. Se multiplica el número de viajes por la Km que es el recorrido hasta México
- 6- R/ $x = 2861 - 6$ Por que hace esto por que tiene un viaje de 6 Km al no hacer entera $x = 2861 - 6$

1- Completar:

Número de Viajeros	Precio Por viaje (Dólares)	Precio Total
1	299	299
2	299	598
4	299	1.196
7	299	2.093

Se hace multiplicación, multiplique el precio de un solo viajero que es 299 por la cantidad de viajes.

2- Las cantidades que utilizamos son 3 y son 1 número de viajes
 2 Precio Por viajero
 3 Precio Total

3- Varía número de viajes y es constante Precio por viajero

4- El valor total pagado depende del número de viajeros por que al multiplicar el número de viajes por el precio de cada viaje dan precios distintos

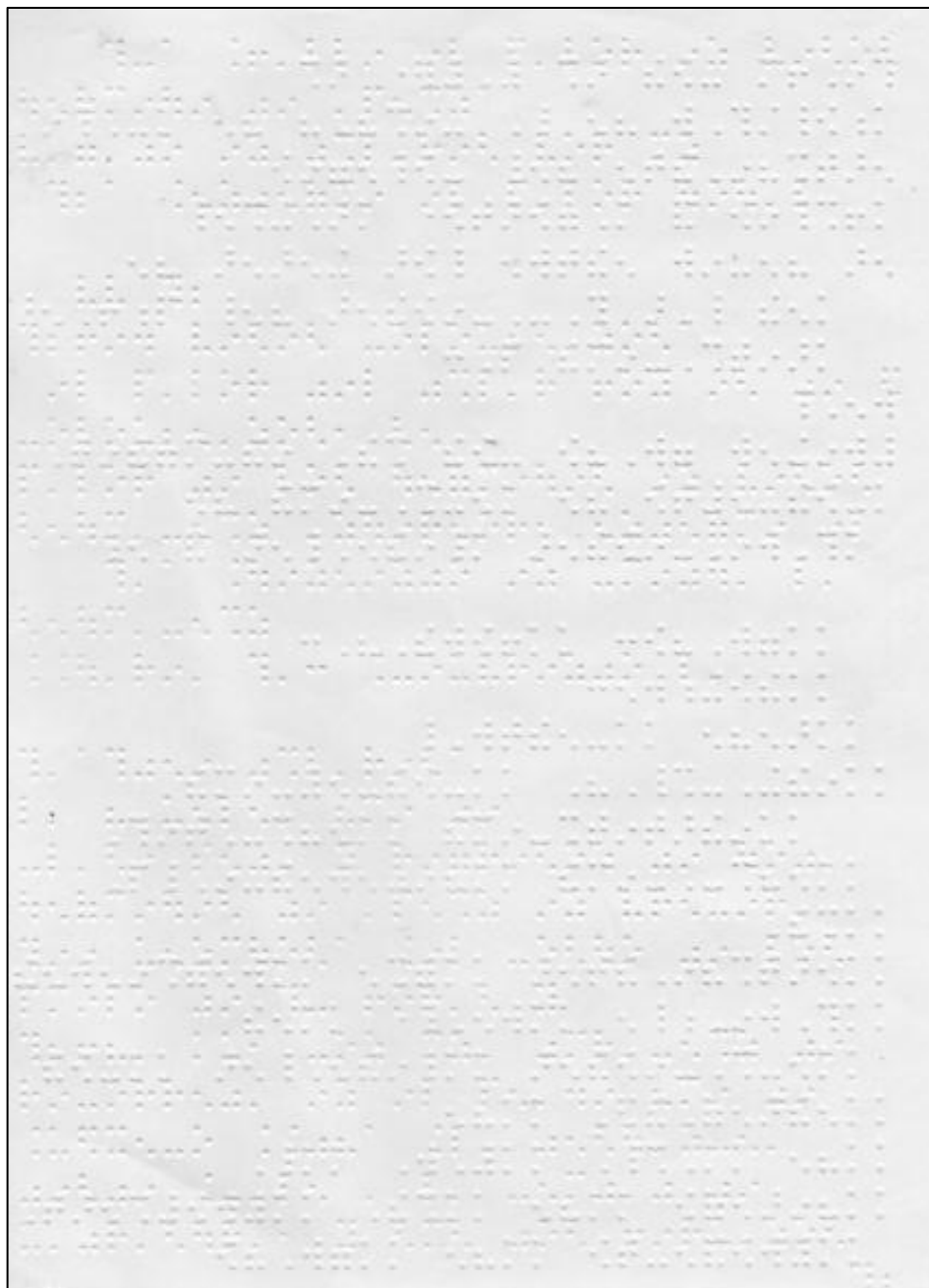
5- El número de viajeros es 45 por que es sencillo Dividir 13.455 entre 299 y me da 45

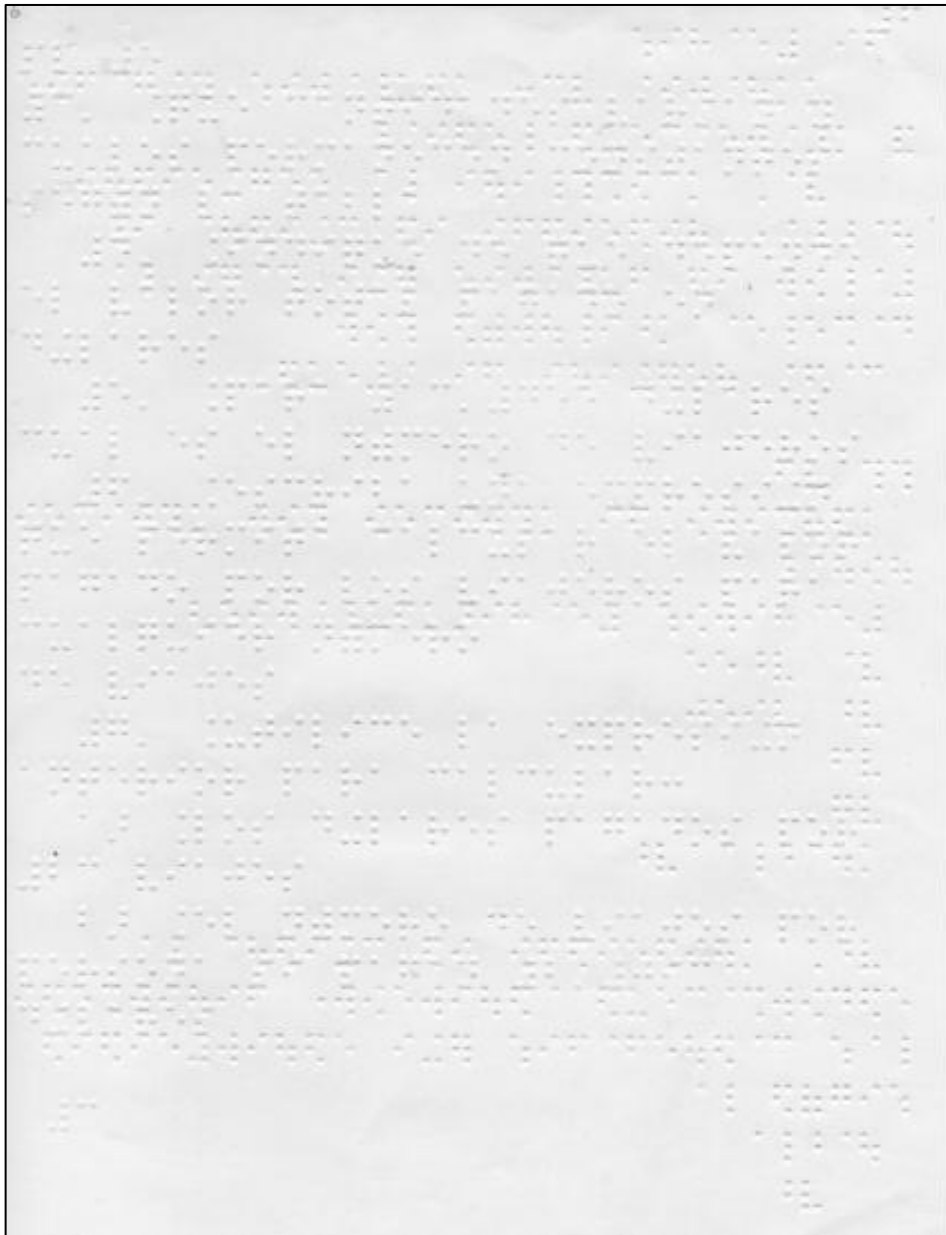
7- a) El estudiante expresa si tengo en cuenta la tabla

23 Viajes Sería multiplicar Por 299, Luego obtengo $23 \times 299 = 6.877$ y esto sería 6.877 Dólares

b) La expresión es $299x = 9$ ya que esta expresión es por que son 9 viajes, le preguntó que le diera por que lo veo haciendo varias operaciones en la calculadora y responde que divisiones para encontrar cuál es la respuesta correcta

6) El estudiante expresa que no entiende como hacerlo le dijo Hacer hacer una expresión con un número cualquiera de viajes 1000, 10, 5, como quieras y que no, no entiendo profe

Evidencias Estudiante 1. Registros en sistema Braille (2 páginas):



Evidencias Estudiante 2 (2 páginas):

 **PROYECTO DE GRADO DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES CON VARIABLE REAL, EN ESTUDIANTES QUE REQUIEREN UNA EDUCACIÓN DIFERENCIAL**

COLEGIO BOLIVAR

NOMBRE: _____

GRADO: 11G JORNADA: _____

Situación 2: Descuentos, Impuestos y Ecuaciones Lineales

La familia Beltrán decidió hospedarse en el mes de Julio en el hotel Starwood Hotels& Resort, en donde en época normal por cena se pagan 50 dólares y en temporada de vacaciones se hace un descuento por el tiempo que permanezca en el hotel de 15 dólares diarios. Además con relación al hospedaje, a cada miembro de la familia le cobran un impuesto de 61 dólares por todo el tiempo de estadía, por noche pagan 319 dólares cada uno.

TAREA 1: Descuentos y Expresiones Algebraicas

1. Teniendo en cuenta la información anterior complete la siguiente tabla:

Número de cenas	Precio normal por cena	Descuento diario	Precio total normal por cena	Descuento total a pagar en temporada de vacaciones	Precio total por cena en temporada de vacaciones
1	50	15	50	15	35
2	50	15	100	30	70
3	50	15	150	45	105
4	50	15	200	60	140
6	50	15	300	90	210
7	50	15	350	105*	350
22	50	15	1100	330	770

Tabla 3

2. Teniendo en cuenta la información dada en la tabla 3, indique las cantidades que intervienen en el problema.

3. Analice los datos que completo en la tabla 3 y nombre a continuación las cantidades que varían y las que permanecen constantes.

• cantidades constantes → Precio decena y descuento
 • cantidades variables → Precio total, descuento total a pagar, Precio total de cena.

Elaborado por Stephanie Celis/Raquel Vidarte, bajo la asesoría de Lilia Amparo Torres Rengifo.

4. Indique de qué depende el valor total a pagar por cenas en temporada de vacaciones. *depende del precio total y el descuento total a pagar.*

TAREA 2: Descuentos y Ecuaciones

- Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán calcular el dinero en dólares a pagar al restaurante en temporada normal, por un número cualquiera de cenas. $50 \cdot (x)$
- Utilice la expresión algebraica anterior, para hallar el dinero en dólares que debe pagar *cada uno*, si alcanzan a consumir 9 cenas en temporada normal. 50×9
- Escriba una expresión algebraica, que le permita a la familia Beltrán hallar el dinero en dólares a pagar al restaurante en temporada de vacaciones, por un número determinado de cenas. $15 \cdot (x)$ y $35 \cdot (x)$
- Utilice la expresión algebraica anterior, para calcular el dinero en dólares que debe pagar *cada uno*, si alcanzan a consumir 12 cenas en temporada de vacaciones. $50 \times 12 = 600$
- Samuel dice que la expresión para calcular el número de cenas en época de vacaciones es:
 $(50-15)x$
 - Analiza la validez de esta afirmación. $(35)x$
 - Reduce la expresión. 35
- Si la familia Beltrán pago 3.500 dólares por un número de cenas x . Indique el número total de cenas pagadas. $70 \times 50 = 3500 \$$ *entotal hicieron 70 cenas.*

TAREA 3: Acercándonos a la Ecuación de la Forma $ax + b = c$

1. Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la información sobre el hospedaje de la familia Beltrán en el hotel StarwoodHotels& Resort.

Número de noches	Precio por noche	Precio número por de	Valor Impuesto USD	Precio a pagar por el número de noches
1	319	319×1	61	380
2	319	319×2	61	699
3	319	319×3	61	1.018
	319	319×4	61	1.337
	319	319×5	61	1.656
12	319	319×12	61	4.046
25	319	319×25	61	

Tabla 4

- ② • varían → Número de noches / precio a pagar
 • constantes → 319 y 61

- ③ • El precio total se obtuvo por la división de 319×12 .

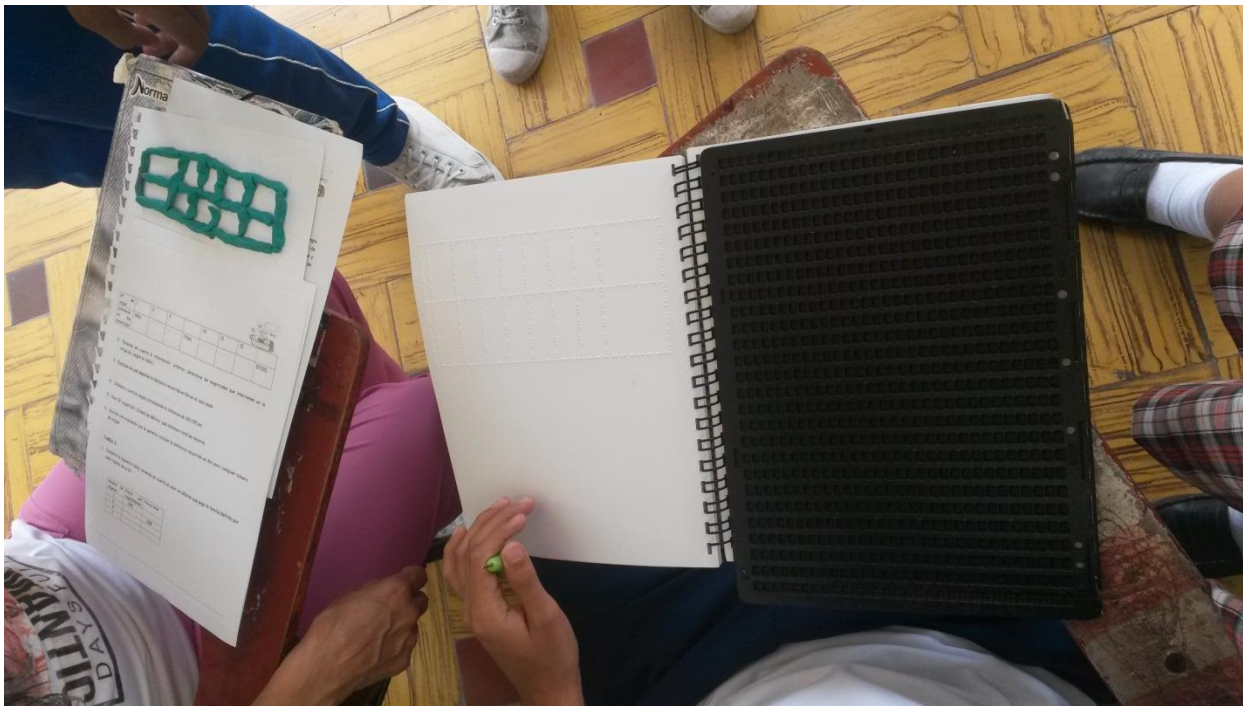
④
$$\begin{array}{r} \times \\ 319 \end{array}$$

- ⑤ 3 días → 957 \$
 50 días → 1,5950 \$
 75 días → 23,925 \$

- ⑥ Número de noches → 8 o 9 noches, multiplique 319 x el número indicado o las veces multiplicados.

Anexo 6. Evidencias (Fotos)

Fotografía 1:



Fotografía 2:



Fotografía 3:

