MASTERMIND: Un Juego y estrategias para ganar

Irene Tischer
Profesora
Universidad del Valle
Cali - Colombia

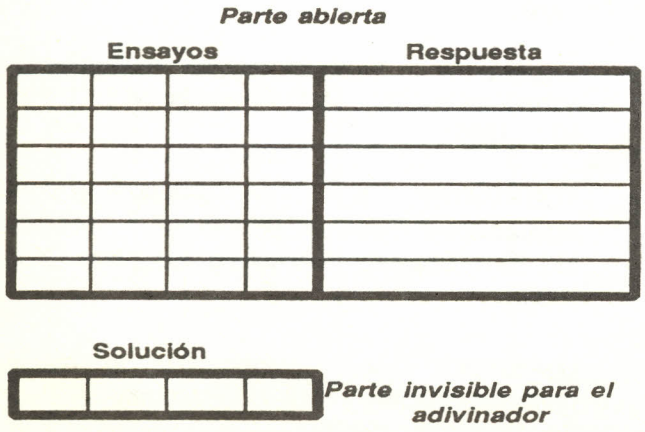
MASTERMIND es un juego que por los años setenta estaba muy de moda en los Estados Unidos. Es parecido al juego de picas y famas, que todos conocemos de los tiempos de colegio.

Es un juego muy interesante que fomenta el pensamiento lógico y la aplicación de la combinatoria. En lo que sigue se tratará de definir el juego y analizar dos estrategias.

I. EL JUEGO

1. Accesorios

Se utiliza un tablero diseñado para el juego, que tiene una parte abierta para los ensayos diferentes y sus respuestas y una parte que es visible solamente para uno de los dos jugadores, un número suficiente de fichas de 6 colores diferentes y de fichas blancas y negras (si faltan estos elementos se puede usar papel y lápiz)



2. Reglas de Juego

Juegan dos personas, un contestador y un adivinador según las reglas siguientes:

Regla 1: Inicio del partido

El contestador selecciona una solución, es decir: coloca 4 fichas de colores en posiciones fijas (invisibles para el adivinador). Se pueden repetir los colores.

Regla 2: Etapas del partido

Ensayo: El adivinador posiciona 4 fichas de colores en posiciones determinadas.

Respuesta: El contestador responde con una ficha negra para cada color, que se adivinó en su correcta posición, con una ficha blanca si se adivinó un color, pero la posición no está correcta.

Regla 3: Fin del partido

Se repiten las etapas hasta que se cumpla una de las siguientes condiciones:
- El adivinador adivinó la solución (la respuesta entonces consiste en 4 fichas negras) o
- Se hicieron 6 etapas.

Regla 4: Evaluación de un partido

El ganador del partido es el adivinador:

- Si logró encontrar la solución dentro de 6 etapas o
- Si una respuesta del contestador era falsa.

En otro caso gana el contestador

3. Ejemplo de un partido MASTERMIND

(Aquí y en lo siguiente se codificarán los 6 colores por las cifras de 1 hasta 6 y las fichas negras y blancas por las letras N y B)

1	2	3	4	N	N	.	.	
1	2	5	6	N	B	.	.	
1	1	3	5	N	.	.	.	
1	4	6	4	B	.	.	.	
6	2	3	2	N	N	N	N	*

*** Solución**

II CONSIDERACIONES GENERALES

1. El Conjunto de las posibles soluciones

Al iniciar el partido, el contestador escoge una solución cualquiera. Para el adivinador en este momento, todas las posibilidades tienen igual probabilidad:

El conjunto S_o de las posibles soluciones al empezar el partido son todas las $6^4 = 1296$ posibilidades.

Terminando la primera etapa del juego, ya se sabe más: La solución produce la respuesta r_1 al primer ensayo e_1, es decir, el conjunto de las posibles soluciones consiste ahora de todos los elementos de So que dan resultado r_1 al ensayo e_1.

Aunque el adivinador no conoce la solución, sí puede determinar el conjunto:

$S(e_1, r_1) = \{s\ S_o$ / s produce respuesta r_1 al ensayo $e_1\}$

y sabe que la solución es un elemento de este conjunto.

Con cada etapa del partido, el adivinador obtiene más información que restringe el conjunto de las posibles soluciones:

Después de la segunda etapa, el adivinador conoce el conjunto:

$S(e_1, r_1 ; e_2, r_2) = \{s\ S_o$ / s da respuesta r_1 al ensayo e_1 y respuesta r_2 al ensayo $e_2\}$

$= S(e_1, r_1)\ \ S(e_2, r_2)$;

y en general se obtiene después de la etapa n:

$S(e_1, r_1 ; e_2, r_2 ; \ldots ; e_n, r_n) = S(e_1, r_1)\ \ S(e_2, r_2) \ldots S(e_n, r_n)$;

Si no se repiten ensayos, esta intersección se disminuye en cada paso, de tal manera que después de un número finito de pasos consiste de un solo punto (Una intersección vacía sólo se da en el caso de que el contestador de una respuesta falsa): ahora, el adivinador tiene certeza de que es la solución.

El Objetivo del adivinador es, escoger los ensayos de tal manera que dentro de las 5 etapas del partido se reduce el conjunto de las posibles soluciones a un punto;debe entonces ensayar la solución correcta a lo más tardar en su último ensayo.

2. Ejemplo

Observemos en el ejemplo I.3 la reducción del conjunto solución:

Etapa 1

1	2	3	4	N	N	.	.

Las fichas en correcta posición pueden ser las parejas (1,2), (1,3), (1, 4), (2,3), (2,4), (3,4).

Para las posiciones restantes se pueden escoger colores del {5,6} o repetir los colores de la pareja; así que:

S(1234, NN..) =
{12xy / x, y # 3; x, y # 4} U {1x3y / x, y # 2; x,y # 4} U
{1xy4 / x, y # 2, x, y # 3} U {x23y / x, y # 1; x, y # 4} U
{ x2y4/ x, y # 1; x, y # 3} U {xy34 / x, y # 1; x, y # 2}.

La cardinalidad de S(1234, NN..) es $6 * 4^2 = 96$

Etapa 2

1	2	5	6	N	B	.	.

En la solución solamente ocurre uno: el 1 o el 2; éste ya en posición correcta. Además: la solución contiene ó el 5 ó el 6 en una posición diferente al ensayo 2.

S(1234, NN.. ; 1256, NB..) =
{153x, 1x35, 163x / x=1 o x=3} U {1535} U
{15x4, 16x4, 1x64 / x=1 o x=4} U {1664} U
{523x, 623x, x235 / x=2 o x=3} U {5235} U
{52x4, 62x4, x264 / x=2 o x=4} U {6264}.

La cardinalidad de S(1234, NN.. ; 1256, NB..) es:
4*7 = 28

Etapa 3

1	1	3	5	N	.	.	.

Del conjunto anterior solamente quedan los elementos que tienen una ficha correcta en su posición, o sea:

S(1234, NN.. ; 1256, NB.. ; 1135, N...) =
= {1464, 1644, 1664, 6232, 6233}

Etapa 4

1	4	6	4	B	.	.	.

S(1234, NN.. ; 1256, NB.. ; 1135, N... ; 1464, B...) =
= { 6232, 6233}

Etapa 5

6	2	3	2	N	N	N	N

Con el ensayo 6232 se adivina la solución correcta:

S(1234, NN.. ; 1256, NB.. .; 1135, N... ; 1464, B... ; 6232, NNNN) = {6232}

3. Partición del conjunto por un ensayo

Al decidirse por un ensayo, ya de antemano se puede analizar, cual es el conjunto de posibles soluciones para cada resultado posible, o sea:

Ya por el ensayo se obtiene una partición del conjunto de las posibles soluciones. El número de las posibles soluciones que dan un resultado determinado es conocido, es decir: se conoce también la probabilidad, con la cual ocurre un resultado determinado.

III. ESTRATEGIAS

1. Definición

Una estrategia para el adivinador es un conjunto de reglas que se definen para un partido:

- Cuál es el primer ensayo
- Dado los ensayos anteriores con sus respuestas respectivas, cómo se escoge el próximo ensayo

2. Evaluación de estrategias

Dada una estrategia, se busca un mecanismo para decidir qué tan buena es, o sea contestar preguntas como:

- ¿Cuál es el porcentaje promedio de partidos ganados?
- ¿Cuál es el número promedio de ensayos que se requieren?
- ¿Cuál es el número máximo de ensayos requeridos?

Una respuesta a estas preguntas se puede obtener jugando muchas veces, anotando y analizando los resultados.

Este proceso se facilita por un ***programa de computación*** que simula rápidamente un número grande de partidos, incluso con la ventaja de evitar respuestas falsas del jugador contestador, el computador.

Por un estudio del caso peor se obtiene claridad sobre el número máximo de ensayos requeridos.

IV LA PRIMERA ESTRATEGIA

1. Definición de la estrategia 1

Dado que después de un número de etapas se conoce el conjunto de soluciones posibles, se examina la siguiente estrategia:

Estrategia 1

Primer ensayo: Al azar

Próximo ensayo: Al azar del conjunto de las soluciones posibles según etapas anteriores.

2. Ejemplos para la aplicación de la estrategia 1

a) Ejemplo I.3 aplica la estrategia 1

b) Ejemplo para el caso peor:

1	1	1	1	.	.	.	.
2	2	2	2	.	.	.	.
3	3	3	3	.	.	.	.
4	4	4	4	.	.	.	.
5	5	5	5	N	.	.	.
5	6	6	6	N	N	B	B
6	5	6	6	N	N	B	B
6	6	5	6	N	N	B	B
6	6	6	5	N	N	N	N

Análisis del ejemplo b):

Intuitivamente está claro que los ensayos de este ejemplo son muy mal hechos. La razón es la siguiente:
La partición del conjunto de las soluciones posibles que produce el primer ensayo está definido por los conjuntos:

$P_1 = \{ s S_o \ / \text{número de unos en } s=1 \} \quad (0 \leq 1 \leq 4)$

Es decir: se pueden obtener solamente 5 posibles resultados, consecuentemente la cardinalidad de conjunto de soluciones posibles después de la respuesta a este ensayo es relativamente alta; por la respuesta no se obtiene mucha información sobre la solución.

En los ensayos siguientes se repite este defecto.

3. Evaluación de la estrategia 1 por simulación:

Se simulan 3000 partidos de MASTERMIND, obteniendo los siguientes resultados:

Estrategia 1, simulación de 3000 partidos

Solución encontrada al Ensayo #	Número Veces
1	2
2	46
3	249
4	1058
5	1283
6	341
7	21
otros	0

4. Análisis del resultado

Estrategia 1: está basada en el análisis del conjunto de las posibles soluciones de cada etapa. Utilizando la estrategia 1 se obtienen los siguientes resultados:

- El adivinador puede esperar a ganar un 99.3% de todos los partidos
- El número promedio de ensayos para llegar a la solución se encuentra alrededor de 4.56
- El número máximo de ensayos requeridos es 9 (caso peor)

V BUSCANDO UNA ESTRATEGIA MEJOR

Si se asume una pérdida alta del jugador adivinador en el caso de perder un partido, se justifica estudiar estrategias alternas que bajan el riesgo de perder.

En búsqueda de una estrategia mejor, se puede mejorar el primer ensayo y la selección de los ensayos siguientes. Clave para posibles mejoramientos es el hecho que si se tiene información sobre un ensayo que en la estrategia 1 no se utiliza: la información sobre la partición que produce cada posible ensayo.

1. Mejorar el primer ensayo

Para analizar cómo se puede mejorar el primer ensayo, regresemos al análisis del caso peor, aplicando la estrategia 1:

Por la estrategia 1 se escoge el pirmer ensayo al azar, o sea no se aprovecha de la información que se tiene sobre la partición que implica cada ensayo:

La partición obtenida por un primer ensayo que consiste de 4 diferentes colores contiene 14 conjuntos: todas las respuestas son posibles.

2. Mejorar los ensayos siguientes

El mismo razonamiento se puede aplicar a los próximos ensayos: un ensayo es mejor cuando produce una mejor partición, que no necesariamente se obtiene por un ensayo del conjunto de las soluciones posibles, como muestra el siguiente ejemplo:

Etapa 1

1	2	3	4	N	N	N	.

El conjunto de las posibles soluciones consiste de 20 elementos.

Etapa 2 (Ensayo del conjunto de las soluciones posibles)

1	2	3	5

Sin conocer el resultado ya se puede decir:

Resultado Posible	Cardinalidad del conjunto
N N N N	1
N N N .	4
N N B .	3
N N . .	12

Etapa 3 (ensayo fuera del conjunto de las soluciones posibles):

1	3	5	6

Se obtiene una partición con:

Resultado Posible	Cardinalidad del conjunto
N N B .	1
N N . .	2
N B B .	3
N B . .	6
N . . .	3
B B . .	2
B . . .	3

Obviamente el segundo ensayo, fuera del conjunto de las soluciones posibles, es mejor, dado que en el peor caso devuelve un conjunto de 6 posibles soluciones, mientras al ensayar dentro del conjunto se pueden obtener 12 posibles soluciones.

3. La entropía: una medida para la calidad de un ensayo

La teoría de información ofrece una medida para la calidad de un ensayo; en términos generales:

Sea A un experimento que puede tener los posibles resultados A_i, cada evento A_i ocurre con la probabilidad p_1 $(1 \leq i \leq n)$.

Con la entropía H del experimento A, definido por:

$$H(A) : H(p_1, \ldots, p_n) = - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

$(p_i \log p_i = 0 \text{ si } p_i = 0)$;

Se obtiene una función que mide el grado de incertidumbre de un experimento. H tiene las siguientes propiedades:

- H es continua y positiva
- H toma su máximo para la distribución uniforme, el caso donde el resultado del experimento es más incierto
- Si se tiene certeza sobre el éxito de un experimento, es decir $p_i=1$ para un i, $p_k=0$ para $i \neq k$, la función H toma el valor 0
- Si al experimento a se agrega un resultado imposible (con probabilidad 0), no se cambia el valor de H
- Si se realizan a la vez dos experimentos independientes A y B, entonces:

  $H(AB) = H(A) + H(B)$, y más general:

- Para dos experimentos arbitrarios se tiene:

$$H(AB) = H(A) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_i(B)$$

Donde $H_i(B)$ es la entropía condicional de B considerado en el subconjunto definido por A_1

Se puede demostrar que la función H es (hasta un factor constante positivo) totalmente definida por estas propiedades.

Al realizar un experimento, se obtiene certeza sobre el resultado. Si el experimento tenía un alto grado de incertidumbre, del resultado se puede esperar más información. Consecuentemente, se puede ver la entropía también como una medida de la cantidad de información que se puede esperar a realizar en un experimento.

VI. LA SEGUNDA ESTRATEGIA

Aplicando el concepto de entropía se obtiene:

Al realizar un ensayo con entropía máxima se puede esperar más información sobre el conjunto de las posibles soluciones. Por eso se va a definir una estrategia donde se compara en cada etapa la entropía de cada ensayo posible y se escoge un ensayo con entropía máxima.

Entre todos los posibles primeros ensayos, un ensayo de 4 colores diferentes tiene la máxima entropía, por eso el primer ensayo debe ser de este tipo.

Para cada siguiente etapa, se puede calcular la entropía de cada ensayo, considerado en el conjunto de las posibles soluciones de esta etapa, y escoger un ensayo que produce entropía máxima.

Si entre varios ensayos con máxima entropía hay uno del conjunto de las posibles soluciones, es preferible a los demás, porque posiblemente ya puede ser la solución.

1. Definición de la estrategia 2

Para reducir el tamaño del problema, se descartó la componente aleatoria (escoger cualquier primer ensayo de 4 colores diferentes, escoger cualquier próximo ensayo dentro de aquellos con mayor entropía) y se definió, suponiendo los posibles ensayos orde-nados ascendentes):

Estrategia 2:

Primer ensayo: El ensayo 1 2 3 4

Próximo ensayo: Si todos los ensayos con entropía máxima están fuera del conjunto de las soluciones posibles: el primero de ellos. Si existen ensayos con entropía máxima dentro del conjunto de las soluciones posibles: el primero del conjunto de las posibles soluciones con entropía máxima.

2. Ejemplos para la aplicación de la estrategia 2:

a) La aplicación de la estrategia 2 a la solución del ejemplo I.3

1	2	3	4	N	N	.	.	
1	3	5	6	B	B	.	.	
3	6	4	4	B	B	.	.	
6	2	3	2	N	N	N	N	*

* **Solución**

Análisis de los conjuntos de las posibles soluciones

Etapa 2

1	3	5	6	B	B	.	.

Las fichas en posiciones falsas pueden ser las parejas (3,5), (3,6) ó (5,6).

Además la solución contiene o el 5 o el 6 en una posición diferente al ensayo 2.

S(1234, NN.. ; 1356, BB..) =
{x534 / x = 3, 4, 5 } U {523x / x = 2, 3, 5} U
{x235 / x = 2, 3, 5 } U {x634 / x = 3, 4, 6} U
{623x / x = 2, 3 } U {5264}

Con una cardinalidad de 15.

Etapa 3

3	6	4	4	B	B	.	.

Del conjunto anterior solamente quedan los elementos

S(1234, NN.. ; 1356, BB.. ; 3644, BB..) =
{6232, 6233}

b) Ejemplo para el caso peor

1	2	3	4	N	B	.	.	
1	3	5	6	B	B	.	.	
6	2	2	3	N	.	.	.	
1	1	6	6	.	.	.	.	
4	5	3	3	N	N	B	B	
5	4	3	3	N	N	N	N	*

* **Solución**

3. Evaluación de la estrategia 2 por simulación:

Dado que a una solución se asocia por la *estrategia 2* una secuencia fija de ensayos, se puede aplicar esta estrategia a todas las soluciones para llegar a la evaluación.

Estrategia 2 aplicada a todas las 1296 soluciones:

Solución encontrada al Ensayo #	Número Veces
1	1
2	4
3	155
4	1464
5	1347
6	28
otros	0

4. Análisis del resultado

La *estrategia 2* consiste en maximizar la información que se espera obtener de un ensayo. Ya se consideran los posibles resultados del ensayo a hacer, o sea: se está mirando al futuro más cercano, la próxima etapa.

- El adivinador gana todos los partidos; nunca se necesitan más de 6 ensayos
- Se llega a la solución con un promedio de 4.42 ensayos

VII. PERSPECTIVAS

1. Preguntas abiertas

Al definir la estrategia 2 se decidió escoger el primer ensayo entre aquellos con entropía máxima, es decir todavía queda la posibilidad de hacer otro tipo de selección.

- ¿Se puede mejorar la estrategia 2, aplicando el concepto de entropía a un futuro más lejano (varias etapas)?
- ¿Existe una estrategia que siempre llega a una solución dentro de 5 (o menos) etapas?
- ¿Cómo se define una estrategia óptima, cuál será?

2. Modificación del juego

Como se encontró una estrategia ganadora para el jugador adivinador, se propone una modificación de las reglas, para hacer el juego más interesante.

El contestador participa activo en el juego: en vez de escoger la solución a empezar, el contestador solamente da una respuesta a los ensayos (puede escoger el caso peor para el adivinador).

Si al terminar el partido no existe una solución que produce las repuestas, o si la última respuesta son 4 fichas negras, perdió el contestador, en otro caso pierde el jugador adivinador.

Cuáles serán buenas estrategias para ambos jugadores? ❦

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. **TUCKER, ALAN.** *Applied Combinatorics.* John Wiley & Sons, New York. 1980.
2. **KHINCHIN, A. I.** *Mathematical Foundations of Information Theory.* Dover Publicationes, Inc. New York. 1957.