CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS DE GONSETH SOBRE EL ESPACIO GEOMÉTRICO Y SUS APLICACIONES EN LA ENSEÑANZA

Yeison Hernando Martinez Vaquiro – Cód. 1622372

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

2021

CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS DE GONSETH SOBRE EL ESPACIO GEOMÉTRICO Y SUS APLICACIONES EN LA ENSEÑANZA

Yeison Hernando Martinez Vaquiro

Luis Carlos Arboleda Aparicio

Director del Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

2021

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por la fortaleza que nos brinda cada día, y por la sabiduría y el entendimiento que me ha concedido para realizar este trabajo de grado.

A mi familia por su apoyo y su comprensión, por el tiempo que no les dediqué, para ocuparme en adelantar esta investigación.

A la Universidad del Valle por darme la oportunidad de recibir el conocimiento con maestros idóneos que me ayudaron a crecer cada día como profesional.

Al investigador emérito Luis Carlos Arboleda por su asesoría, su entusiasmo, su paciencia y su apoyo en este trabajo.

Al doctor Diego Garzón por su indicación en la elección del enfoque trabajado en este proyecto.

A mis compañeros del pregrado, especialmente a Carolina Gómez Sánchez y a John Jairo Díaz por compartirme sus experiencias, sus saberes y por los gratos momentos vividos.

Resumen

En la formación docente, no se cuenta con un conocimiento suficiente del idoneísmo de Gonseth, ni de la importancia de sus concepciones geométricas en la enseñanza de las matemáticas. Este trabajo presenta una lectura crítica de la relación entre las concepciones epistemológicas que Gonseth desarrolla sobre el espacio geométrico y sobre la filosofía del idoneísmo, y sus aplicaciones en la enseñanza de la geometría en Francia.

Dicha lectura se desarrolla en tres secciones. Primero, con base en el estudio realizado por Marco Panza (1996), se contextualiza el enfoque de Gonseth en sus dimensiones histórica, epistemológica, filosófica. Luego se desarrolla un análisis del uso y de la apropiación de este enfoque en la enseñanza de la geometría en Francia, para lo cual se acude a los trabajos realizados de Bkouche (1990), Houdement y Kusniak (1999).

En la tercera sección, se formulan algunas consideraciones acerca de la formación de profesores de Matemáticas en Colombia bajo el encuadre del estudiante de licenciatura en Matemáticas y Física; también, se precisan las nociones de “esquema”, “objeto”, “intuición”, “experiencia”, “teoría”, “método axiomático” e “Idoneísmo”, fundamentales en los trabajos realizados por Ferdinand Gonseth que motivan la realización de este trabajo

Palabras Clave: Gonseth, Idoneísmo, Historia de las Matemáticas, Epistemología de las Matemáticas, Enseñanza de la Geometría.

Abstract

In teacher training there is insufficient knowledge of Gonseth's suitability, nor of the importance of his geometric conceptions of mathematics. This work presents a critical reading of the relationship between the epistemological conceptions that Gonseth develops on geometric space and on the philosophy of Suitability, and their applications in the teaching of Geometry in France.

This reading is developed in three sections. First, based on the study carried out by Marco Panza (1996), Gonseth's approach is contextualized in its historical, epistemological, and philosophical dimensions. Then an analysis of the use and appropriation of this approach in the teaching of Geometry in France is developed, for which the work carried out by Bkouche (1990), Houdement and Kusniak (1999) is used.

In the third section, some considerations are made about the training of mathematics teachers in Colombia under the framework of the undergraduate student in Mathematics and Physics; Also, the notions of "scheme", "object", "intuition", "experience", "theory", "axiomatic method" and "Suitability" are specified, fundamental in the works carried out by Ferdinand Gonseth that motivate the realization of this job.

Keywords: Gonseth, Suitability, History of Mathematics, Epistemology of Mathematics, Teaching of Geometry.

Tabla de contenido

Pág.

Agradecimientos ... **3**

Resumen ... **4**

Abstract ... **5**

Tabla de contenido ... **6**

Introducción ... **8**

1. Aspectos generales de este trabajo ... **10**
1.1 Planteamiento del problema y contextualización ... 10
1.2 Objetivos ... 13
1.2.1 Objetivo general ... 13
1.2.2 Objetivos específicos ... 13
1.3 Justificación ... 14

2. Concepciones Filosóficas y Epistemológicas de Gonseth ... **16**
2.1 Gonseth y el contexto intelectual de su época ... 16
2.2 La axiomática de las matemáticas y sus fundamentos, en Gonseth ... 20
2.3 Matemática y realidad ... 23
2.4 La ciencia de cualquier objeto y los comienzos de la lógica ... 29
2.5 El Principio de la Geometría y el Problema del espacio ... 34
2.6 El idoneísmo en el problema del espacio ... 50
2.7 Conclusiones ... 52

3. Gonseth y las aplicaciones en la enseñanza de la Geometría ... **54**
3.1 Bkouche; el idoneísmo de Gonseth y el problema epistemológico de la demostración en geometría ... 54
3.1.1 Intuición, Experiencia y Teoría concebidas como tres tipos de conocimiento ... 55
3.1.2 Teorema de Euler ... 56
3.1.3 Demostración hindú del teorema de Pitágoras ... 63
3.1.4 Por un punto en una recta, pasa una y solo una perpendicular: demostración por Blanchetón ... 73
3.1.5 Conclusiones ... 78
3.2 Houdoment y Kuzniak: el problema del espacio en Gonseth y sus aportes a la enseñanza de la geometría y a la formación de maestros ... 79
3.2.1 Consideraciones de los autores sobre el enfoque de Gonseth en el problema del conocimiento geométrico ... 79
3.2.2 Consideraciones sobre la geometría natural, la geometría axiomática natural y la geometría axiomática formalista ... 82
3.2.3 Ejemplos ilustrativos ... 85
3.2.4 Conclusiones ... 89

4. Recomendaciones ... **92**

5. Referencias ... **96**

Índice de figuras

Figura 1. *Diagrama del esquema de Gonseth (1936) sobre matemática y realidad* 24

Figura 2. *Diagrama que presenta Panza en 1996 de Gonseth* 41

Figura 3. *Intervalos encajonados* 43

Figura 4. *Diagrama que presenta Panza de Gonseth sobre la geometría Hiperbólica* 46

Figura 5. *Representación de la formación del disco de Poincaré* 47

Figura 6. *Plano hiperbólico en un disco de Poincaré* 47

Figura 7. *Construcción de una caja con un cubo y un balón con un rombicosidodecaedro* 58

Figura 8. *Esquema fundamental para realizar la demostración hindú del teorema de Pitágoras* . 64

Figura 9. *Representación de la demostración de Blanchet expuesta por Bkouche en 1990* 73

Introducción

El presente trabajo se realiza para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Área de Educación Matemática, en la línea de investigación en Historia y Educación Matemática. Es un trabajo de orden monográfico en el cual se propone adelantar una lectura crítica de una bibliografía especializada que permitirá desarrollar la pregunta de investigación y, de esta manera, realizar el objetivo general y los objetivos específicos.

Los avances en el campo de la matemática en los primeros decenios del siglo XX se enfrentaron a grandes conflictos en cuanto a los "fundamentos" y orientaciones metodológicas; en especial, entre los partidarios de las escuelas logicista, formalista, intuicionista y empirista (Ruiz, 2011). En este contexto se sitúan los trabajos de Gonseth estudiados en esta investigación, los cuales tuvieron como propósito esclarecer la naturaleza y la función del método axiomático; particularmente, en cuanto a la constitución y la formulación teórica de la geometría. En esta contextualización se ahondará al momento de formular la pregunta de investigación, los objetivos y la justificación de este estudio, lo cual constituye el contenido de la primera parte del trabajo.

En el segundo capítulo se abordan las principales investigaciones que se han desarrollado sobre las concepciones epistemológicas y filosóficas de Gonseth. A diferencia de otros trabajos suyos sobre Gonseth, el artículo Panza (1996), publicado en una recopilación hecha por el IREM de estudios filosóficos de reconocida importancia para la investigación en educación matemática titulada Les Philosophes et les mathématiques, se propone examinar las investigaciones de Gonseth sobre matemáticas y realidad para

esclarecer cómo llega a lo que él denomina “filosofía abierta”, y qué es lo que Gonseth entiende por “idoneísmo” filosófico.

Ya en el tercer capítulo, último del cuerpo en sí de este abordaje crítico, se buscará ubicar el aporte de la filosofía de Gonseth en la enseñanza de las matemáticas y en la formación de profesores. Con esta orientación, se estudia el trabajo en que Bkouche (1990) discute la importancia que reviste la filosofía de Gonseth tanto para el docente en formación inicial, como para el docente en formación, interesados en el problema epistemológico de la demostración en geometría. Se estudia también el trabajo en que Houdement y Kuzniak (1999) proponen un marco conceptual para el estudio de la enseñanza de la geometría en la formación de maestros adaptando la filosofía de Gonseth; especialmente, su reflexión filosófica sobre la geometría y sobre el problema del espacio.

De estos artículos se toman los elementos teóricos y metodológicos más relevantes, los cuales se ampliarán junto con la revisión de otra literatura vinculada a estos temas con el fin motivar reflexiones acerca de la enseñanza de la geometría en la formación docente alrededor de las concepciones epistemológicas y filosóficas de Gonseth, y su pertinencia en el contexto colombiano.

1. Aspectos generales de este trabajo

La lectura crítica que sustenta el presente trabajo parte de comentar una selecta colección de referentes bibliográficos que, luego, se discutieron en un seminario con el profesor Luis Carlos Arboleda. Como resultado inicial, se elaboró una versión preliminar en la que se integró toda la temática estudiada. Dicha versión se somete a la revisión del profesor Arboleda, cuyos comentarios enriquecen el texto para dar lugar a la escritura de la versión final. Este procedimiento se siguió para la realización de los tres capítulos que conforman el cuerpo del trabajo. Así, en este primer capítulo se presenta la problemática, se contextualiza y se establecen los objetivos y la justificación de estudiar en la actualidad algunos de los principales aportes del matemático y filósofo suizo Ferdinand Gonseth.

1.1 Planteamiento del problema y contextualización

Antes de formular el problema que sustenta este trabajo de grado, conviene dar un vistazo a los primeros decenios del siglo XX que contextualizan y delimitan los temas filosóficos que interesaron a Gonseth en su relación con las matemáticas: fundamentos de las matemáticas, axiomática e intuición, geometría y experiencia, lógica y constitución de objetos, matemáticas y realidad. Este contexto está especialmente determinado por la confrontación histórica entre las diferentes escuelas de filosofía de las matemáticas dadas a finales del siglo XIX y principios del siglo XX: logicismo, con Russell; intuicionismo, de Brouwer; formalismo, de Hilbert; y, en general, los problemas lógicos.

Panza (1996) se refiere a la filosofía de Gonseth como aquella cuyo objetivo fue desarrollar la pregunta: ¿qué es lo que hace única y específica a la ciencia? Esta pregunta, de un lado, lo lleva a investigar el sustento y el sentido epistemológico de las matemáticas

(en particular, de la geometría) como ciencias axiomatizadas buscando detectar la naturaleza profunda del acto de axiomatización. En este sentido, las escuelas mencionadas ayudan a encaminar a Gonseth para indagar sobre la axiomatización de la geometría (euclidiana y no euclidiana). Por otro lado, Panza muestra el proceso que Gonseth siguió en la generalización de los resultados alcanzados mediante este análisis, llegando a dos caminos paralelos: i. el buen método de cualquier filosofía; es decir, el método de la "filosofía abierta"; y ii. la representación específica de toda ciencia verdadera: lo que Gonseth denomina "idoneísmo".

En relación con lo anterior, la pregunta ¿cómo la axiomática y los fundamentos de la matemática, para Gonseth, conllevan a que las matemáticas sean una réplica consciente de la actividad inconsciente que crea en nosotros una imagen del mundo? conduce a Gonseth (1926) a afirmar que las matemáticas no son un edificio anclado en la realidad que emerge con absoluta solidez, sino que son una construcción aérea que contiene, como por milagro, la aventura atrevida y más improbable de la mente.

El diálogo de Gonseth con los enfoques filosóficos de la matemática –que corresponden a la llamada "crisis de los fundamentos" (empirismo, intuicionismo, logicismo y formalismo)– lo lleva a preguntarse por la originalidad de su reflexión sobre la problemática de la relación entre "matemática y realidad", cuyo punto de partida, según Gonseth (1936), se centra en la formulación de una nueva teoría de conceptos. Sobre la oposición "intuicionismo y logicismo", interesa precisar las concepciones de Gonseth sobre "la física de cualquier objeto" y sobre "los orígenes de la lógica"; su posición con respecto a las "antinomias lógicas" y, en general, su "enfoque lógico del método axiomático".

Se llega así a la pregunta fundamental: ¿cómo es que Gonseth conduce a una manera innovadora de reflexionar filosóficamente sobre el espacio geométrico? A partir de su libro

sobre los orígenes de la geometría y el problema del espacio, en el cual Gonseth (1945-55) estudia el problema de la axiomatización del espacio en las diferentes geometrías (la de Euclides, Lobachevsky y Riemann), dicha pregunta puede replantearse así: ¿Cómo, la explicación de estas distintas geometrías lleva a Gonseth a desarrollar un planteamiento innovador del método axiomático? Lo que conduce a la reflexión crítica desarrollada por Panza (1996) al final de su trabajo sobre el "idoneísmo" que propuso Gonseth. La explicación que Panza ofrece sobre la fundamentación teórica de esta filosofía aborda una cuestión más profunda: ¿Cómo el "idoneísmo" podría ofrecer la garantía de una mejor comprensión de la geometría, si se opera una reorientación filosófica en la enseñanza? Pregunta que, a su manera, se propusieron desarrollar tanto Bkouche (1990), como Houdement y Kuzniak (1999), investigadores de la educación matemática en Francia.

Bkouche (1990) analiza algunas demostraciones en las que Gonseth apoya su reflexión filosófica. Por su parte –inspirados en las tres síntesis dialécticas de geometría que, según Gonseth, en su desarrollo del problema del espacio, reorganizan y articulan las relaciones entre intuición, experiencia y deducción–, Houdement y Kuzniak (1999) desarrollan un modelo en el cual plantean tres niveles en el proceso de aprendizaje de la geometría: natural, axiomática natural y axiomática formal. Cabe preguntarse, entonces, por la manera como se manifiesta o no este modelo en la enseñanza de la geometría, tratando, además, de explicar los cambios que se dan entre la manera como se comprende el espacio en la educación escolar y, luego, en la universidad. Además, porque estos autores asumen que los estudiantes y los profesores implícitamente se mueven en contextos diferentes, y que este hecho es fuente de malentendidos pedagógicos.

Se cree que tales acercamientos a las reflexiones de orden filosófico realizados por Gonseth y su aplicación en la enseñanza de la geometría se vinculan a la preocupación que debería tener todo educador en matemáticas para desarrollar su trabajo docente en Colombia, como en Francia; de manera que, aportan a un desempeño efectivo del profesional en constante aprendizaje y, a su vez, como agente responsable de promover ambientes propicios de aprendizaje para los estudiantes.

Bajo este contexto, la pregunta principal que orientará el desarrollo de este trabajo es, entonces, la siguiente:

¿Cuál es la relación entre las concepciones epistemológicas sobre el espacio geométrico desarrolladas por Gonseth y su postura filosófica denominada Idoneísmo; y algunas de sus aplicaciones a la enseñanza de la geometría en Francia podrían adecuarse al contexto colombiano?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Analizar la concepción epistemológica y filosófica desarrollada por Ferdinand Gonseth sobre el espacio geométrico, y algunas de sus aplicaciones a la formación docente.

1.2.2 Objetivos específicos

– Estudiar la concepción epistemológica y filosófica de Gonseth sobre el espacio geométrico y la recepción que de ella se registra en la lectura hecha por Marco Panza.

– Estudiar algunos de los trabajos de Bkouche, Houdement y Kuzniak sobre la enseñanza de la geometría y la formación de profesores, a partir de las concepciones desarrolladas por Gonseth.

– Formular algunas consideraciones y recomendaciones sobre la formación de profesores de matemáticas en Colombia.

1.3 Justificación

Aprender y enseñar matemáticas ha sido una necesidad social a lo largo de la historia; por lo que vislumbrar las diferentes miradas que se vienen desarrollando en el manejo de las técnicas, los procedimientos y las teorías de la enseñanza de las matemáticas en la formación de profesores ocupa un papel importante en el trabajo de la Línea de investigación en Historia y Educación de las Matemáticas de la Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Así, la importancia de realizar el presente trabajo, inicialmente, radica en que la investigación es un recurso fundamental para quienes se están formando como profesores de matemáticas y para quienes ya son profesores en ejercicio, en tanto que puede contribuir al desarrollo de sus prácticas. También es un campo que hoy en día ha tomado mucho poder en el ámbito nacional e internacional, ya que permite a la comunidad de educadores en matemáticas enterarse del estado actual de los avances que afectan sus prácticas y reflexionar sobre su campo.

Desde una mirada filosófica, la relación de la lógica con la fundamentación de las matemáticas (Gonseth, 1933), la relación entre las matemáticas y la realidad, la naturaleza y la función del método axiomático (Gonseth, 1936), las implicaciones epistemológicas del problema del espacio en el campo de la geometría (Gonseth, 1945, 1946, 1947, 1949, 1952 y 1955) y las características de la “filosofía abierta” (Gonseth, 1954, como se citó en Panza, 1996) constituyen aspectos del pensamiento filosófico de Gonseth que han cobrado un interés creciente para el campo de la educación matemática en Francia y en otros países

desde finales de la década de 1990, a raíz de la publicación de los artículos antes referidos. Sin embargo, en lo que se conoce, estas reflexiones filosóficas han tenido hasta el momento poco o ningún impacto entre los matemáticos, los filósofos de las matemáticas y los profesores de matemáticas en Colombia. Esto justifica que, en una primera fase divulgativa y bajo los límites de un trabajo de pregrado, se estudie la filosofía de Gonseth a partir del comentario general que de Marco Panza se publicó en la colección de artículos filosóficos para profesores de matemáticas del IREM.

Se dejan de lado, para ser estudiados eventualmente en otras ocasiones, a un nivel superior, trabajos filosóficos y epistemológicos sobre Gonseth más especializados, tanto del mismo Panza, como de otros autores. Por la misma razón, se espera que este trabajo de grado propicie una exploración más completa de la literatura sobre la aplicación de su filosofía en la enseñanza, que lo que se hará ahora con los trabajos de Bkouche, Houdement y Kuzniak.

2. Concepciones Filosóficas y Epistemológicas de Gonseth

En este capítulo, de carácter histórico, epistemológico y filosófico, se exponen y comentan las ideas y los planteamientos que los autores hacen acerca de las investigaciones y de las concepciones epistemológicas (esquemas, objetos, intuición, experiencia, teoría, realidad, método axiomático, idoneísmo) que desarrolló Ferdinand Gonseth, específicamente en la siguiente lista de sus publicaciones: *Les fondements des mathématiques. De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme* (1926), "Sur l'axiomatique et la théorie des ensembles et sur la logique des relations" (1933), *La logique en tant que physique de l'objet quelconque* (1936), *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomtique* (1936), *Philosophie mathématique* (1939) y *La géométrie et le problème de l'espace* (1945-55). Además, se tiene en cuenta el artículo "Gonseth et les mathématiques" escrito por Marco Panza (1996).

Las principales ideas de Gonseth son la relación entre matemática y realidad, la física de cualquier objeto y los orígenes de la lógica, los orígenes de la geometría y el problema del espacio, y la filosofía del idoneísmo. Se procura hacer un estudio sobre las relaciones que se plantean en la filosofía del espacio geométrico de Gonseth entre el sujeto que conoce y la lógica de la axiomatización.

2.1 Gonseth y el contexto intelectual de su época

En las primeras décadas del siglo XX la vida de Gonseth atravesó diversos sucesos cuyo resumen permitirá acercarse a su enfoque filosófico.

Gonseth no era un filósofo francés, no gozaba de formación específica en esta rama; nació en 1890 en Sonvilier (Jura Bernés) y falleció en Lausana en 1975. Enseñó en el

Instituto Federal Suizo de Tecnología, en Zúrich, y en la universidad de Berna. Sus estudios autodidactas en la materia fueron muy difíciles por el deterioro de su visión. Debido a que, durante un tiempo quedo ciego, aprendió a utilizar el lenguaje para comunicar ideas y no para, encantar ni dejarse encantar. Su cultura matemática parece bastante fragmentada ya que en varios de sus escritos profundiza y se actualiza en ciertos campos o en relación con determinados períodos, mientras que su conocimiento reducido o vago en otros. No obstante, de su formación como matemático, Gonseth extrae la propensión a una exposición ordenada y rigurosa que pone al servicio de los individuos durante su acercamiento a problemas más propios de los filósofos.

Su obra titulada *Les fondements des mathématiques. De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme* (1926) permite observar la forma como Gonseth desarrollaba sus proyectos de trabajo. Repasa y analiza los resultados para, así, avanzar en el desarrollo de sus ideas. Escribe esta obra en el periodo de la "crisis de la matemática"; varias escuelas filosófico-matemáticas afrontaban dificultades, una tras otra. El descubrimiento de varias paradojas[1] puso en duda cada doctrina. En esta situación, el problema era encontrar una teoría satisfactoria, sin contradicciones; pero, las distintas escuelas filosóficas de las matemáticas tenían visiones diferentes.

Las obras *Sur l'axiomatique et la théorie des ensembles et sur la logique des relations* (1933) y *La logique en tant que physique de l'objet quelconque* (1936) recogen los acontecimientos de las matemáticas en el periodo inicial de esta rama de la ciencia y el

[1] Argumento informal que si se intenta formalizar conduce a una contradicción.

desarrollo de la lógica teniendo presente a Gottlob Frege (1848-1925), un platonista cuyas visiones se mostraban escalonadas durante su historia. En matemáticas, intentó desarrollar un plan denominado el logicismo; que, mediante la teoría de conjuntos, buscaba minimizar las matemáticas a la lógica. Dada la presencia de paradojas en su edificio fundamental, esta etapa logicista entró en crisis y abrió lugar a una tentativa totalmente nueva, desarrollada por Bertrand Russell (1872-1980); un intento fragmentado intensamente con la introducción elemental de axiomas.

Gonseth, en *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomtique* (1936) y en *Philosophie mathématique* (1939), retoma su discusión con el logicismo (Frege) para, luego, entrar a dialogar con otras dos escuelas fundacionales: el formalismo (Hilbert, 1862-1943) y el intuicionismo (Brouwer, 1881-1966).

El formalismo buscaba basar la matemática de forma técnica mostrando la consistencia de sus sistemas axiomáticos; de tal manera que un objeto matemático no existe a menos que sea construido en un número de pasos finitos; además, retornaba a la intuición en contraposición con el reduccionismo analítico que intentaron Frege y Russell.

Por otro lado, entre los intuicionistas, la ley del tercero excluido no era continuamente idónea porque no consideraban decisivo lo axiomático-formal y lógico; pero, las matemáticas seguían siendo absolutas. La intuición era necesaria, pero, temporal, es decir: una intuición que se transforma.

Se ha contextualizado una selección precisa de escritos de Gonseth, en especial de la obra *La géométrie et le problème de l'espace* (1945-55), enumerando las escuelas filosófico matemáticas del contexto y estableciendo relaciones entre ellas. En la perspectiva de Gonseth, la filosofía matemática se concreta mediante la enunciación de tesis; este autor

consideraba necesario empeñarse por entender y dar los resultados de la manera más clara y nítida posible. Luego, visto por Panza (1996), la filosofía de Gonseth es una dialéctica, ya que, toma como punto de partida la observación del carácter unitario del conocimiento y estima cualquier estudio no como una división de lo diverso sino como una excepción de diferentes puntos con miras a la comprensión. Es decir, una distinción que hace el filósofo y que necesita ir acompañada de una síntesis capaz de recomponer la unidad rota.

La mirada filosófica de Gonseth tiene un solo objetivo: entender qué constituye el carácter peculiar y específico de las ciencias modernas. Para alcanzarlo, se deja llevar por dos perspectivas diferentes. Por un lado, sigue la exploración de las matemáticas (especialmente la geometría) como ciencias axiomatizadas intentando encontrar la naturaleza, no de la axiomática como tal, sino del acto de la constitución original de la axiomatización. Por el otro lado, es responsable de una generalización de los resultados alcanzados por este estudio, llevados por un doble espejismo: i. el método de la "filosofía abierta" que expone de forma unida el procedimiento de cualquier filosofía, y ii, el carácter específico de cualquier filosofía: “Idoneísmo”. Este estudio se centra primordialmente en la primera de las dos perspectivas ya mencionadas, mediante el acto de interpretación. Sin embargo, se exponen unas cortas consideraciones sobre la segunda perspectiva, en especial, la filosofía de axiomatización de Gonseth.

2.2 La axiomática de las matemáticas y sus fundamentos, en Gonseth

Según Panza (1996), cuando se enuncia una proposición con base en un sistema de axiomas, no interviene un juicio filosófico. Entonces, no basta con reconocer que el punto de partida de un sistema de proposiciones matemáticas no es una verdad en el sentido lógico de la palabra y que no es un enunciado de la experiencia, sino, más bien, un origen epistémico de las teorías matemáticas y las proyecciones en el espacio de las razones y los actos que las llevaron a consolidarse como tal; es decir, un espacio donde lo concreto se traduce en abstracto, al pasar a formar parte de un sistema axiomático y, de esta forma, ofrecerse a la comprensión de la manera exclusiva en que es viable como representación de lo concreto.

Gonseth entiende la crisis de los fundamentos no como un impedimento para ir más allá garantizando una base lógica y segura de las matemáticas, sino como señal de una imposibilidad de lo abstracto para manifestar lo concreto. Este es el sentido del primer libro filosófico de Gonseth: *Les fondements des mathématiques – De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme* (1926).

Gonseth (1926) parte de la siguiente afirmación: no es posible, hacer explícitos los conceptos "específicamente matemáticos", por ejemplo, de número, el continuo, etc. Son innovaciones perfectamente irreductibles de nuestra mente cuyo papel solamente es comprensible en su interacción con la intuición y la experiencia. Aparece aquí, una tricotomía clave: intuición, experiencia, teoría matemática; la cual se tratará posteriormente.

El problema del fundamento de una teoría matemática es, justamente, el de sus relaciones con la intuición y la experiencia. En el caso de Gonseth (1926), se asume que la geometría es la ciencia del espacio geométrico, por consiguiente, no puede definirse sin la

construcción del espacio del que es ciencia; existe únicamente como consecuencia de esta creación. Además, no es otra cosa que una axiomatización, o sea, una división de lo intuitivo y lo lógico. No hay campo de las matemáticas, por diminuto que sea, donde la axiomática podría ser suficiente en sí misma; pero, aun cuando las matemáticas no tienen la posibilidad de reducirse a un sencillo grupo de fórmulas, el sistema axiomático es una necesidad fundamental.

Por ejemplo, Gonseth (1926) compara la axiomatización de la geometría euclidiana que desarrolla Hilbert con la que en 1924 plantea M. Geiger (1880-1937). Mientras la primera solo proporciona definiciones de conceptos como "puntos", "líneas rectas" y "planos", la de Geiger, en cambio, da cuenta de una interacción importante que específica solo mediante los axiomas de la teoría matemática. Aquí hay dos tipos diferentes de axiomatización, correspondientes a diferentes etapas de la dialéctica de lo concreto y lo abstracto; y, he aquí, paralelamente, un modo de formular el problema de los fundamentos de las matemáticas: ¿cómo justificar este doble paso, de una geometría elemental e intuitiva (**I**) a una axiomática (**A**), que incide en los objetos de aquella primera geometría, y de esta axiomática a una teoría puramente formal (**T**)? Esta formulación resume, además, la dificultad del problema encontrando y la cuestión de la coherencia de una teoría matemática.

Cinco años antes de que Gödel planteara el teorema de incompletitud sintáctica, Gonseth (1926) afirmó que la única forma de demostrar la no contradicción de un conjunto de axiomas es asignarle un modelo del que se conoce que no es contradictorio. Así, la certeza de la no contradicción encuentra sus raíces fuera de lo axiomático; por ejemplo, se puede estar de acuerdo en no ver en una catedral la expresión misma de la realidad de Dios; pero, sí la de la fe; análogamente, lo axiomático no es en sí mismo la expresión de una verdad

absoluta, solo lo es de una creencia en la efectividad de las ideas abstractas. Por consiguiente, la axiomática es el procedimiento que permite edificar una ciencia abstracta; sin embargo, esto no significa que el contenido de tal ciencia se encuentre dado solo por las relaciones lógicas establecidas por los axiomas, más bien, estas ciencias se muestran a sí mismas como esquemas del mundo real constituidos por un esfuerzo de abstracción; especialmente para la geometría. Debido a que la axiomática es solamente el método constitutivo de la ciencia geométrica, en lo que respecta a su parte formal, el significado de tal ciencia solo se encuentra en su interpretación en el mundo sensible, en su carácter de imagen abstracta del universo.

Lo anterior, es solo un aspecto de la geometría que la cataloga en relación con **I**; el segundo aspecto se hace manifiesto en su dimensión experimental (**E**), en tanto esquema abstracto de una experimentación viable. En este sentido, la legitimidad de la geometría euclidiana depende de la experiencia. Así, por ejemplo, al definir simultáneamente nociones geométricas en **R** (mundo sensible), por un lado, y una serie de correcciones o ajustes innovadores, por el otro, para aplicarla a las medidas considerando la posibilidad de que varíen según las circunstancias hace que la geometría desborde los límites de lo euclidiano.

El tercer aspecto de la geometría, como de toda teoría matemática, es el lógico. Gonseth (1926) en este sentido resalta que reconocer este aspecto no debe entenderse como razón suficiente para creer que las matemáticas tienen una base lógica. Es cierto que las ciencias abstractas se construyen mediante la aplicación de las reglas de la lógica, estas son justamente aplicadas a una serie de hechos básicos. Según Panza (1996), para Gonseth, la lógica solo expresa la forma de estos hechos siendo un conjunto de sucesos matemáticos en su forma más abstracta. Por tanto, las matemáticas no permanecen contenidas en la lógica;

más bien, integran un dominio que forma un todo por sí mismo. Ahora bien, en todo caso por el lado de las matemáticas, hay una demarcación clara, aunque la intuición de la lógica y la de las matemáticas son perfectamente idénticas; desarrollándose, las matemáticas, a partir de las reglas de la lógica, debido a que no parecen tener un dominio ilimitado de validez.

La conclusión de Gonseth (1926) es que, en su esencia, las matemáticas se configuran a partir de un conjunto de puntos de vista y procesos que esquematizan la mente humana, una copia consciente de la actividad inconsciente que crea en el pensamiento una imagen del mástil de un grupo de estándares por los que se actúa y se reacciona; la matemática no es un edificio anclado a la pieza con absoluta solidez, sino una construcción aérea, que sujeta milagrosamente la atrevida y la más improbable aventura de la mente.

2.3 Matemática y realidad

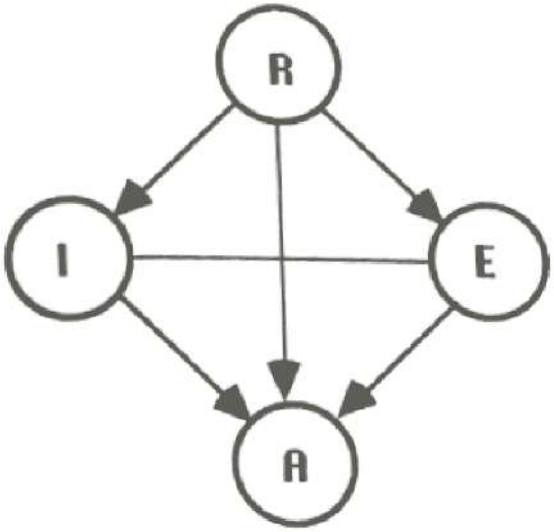
Se analiza el esquema mediante el cual Gonseth (1936) explica la relación entre la matemática y la realidad, cuya formulación sustenta en una nueva teoría de conceptos que se desarrolla en dos etapas.

La primera, abarca las imágenes intuitivas; es decir, la transición de la intuición a la experimentación (ver figura 1). Por ejemplo, cuando una persona piensa que una línea recta se conecta por dos puntos y lo confirma con experimentos (dibujos, doblado de papel, cortes con una rama, entre otros) en su mente se forma una imagen intuitiva.

La realización de la segunda etapa, implica dos pasos: primero, con base en las pruebas externas intuitivas e internas que se produjeron en la etapa anterior se realiza un

bosquejo de las concepciones que una persona formula a cerca de su alrededor y de la manera como las verifica en su experiencia, para explicar esta relación (ver figura 1).

Figura 1. *Diagrama del esquema de Gonseth (1936) sobre matemática y realidad*



El segundo momento de esta etapa es el paso del pensamiento matemático a la lógica formal: si la distinción entre los tres aspectos (**R**, **I** y **E**) de una teoría matemática muestra, precisamente, la manera en que nace el problema de los fundamentos de las matemáticas, este problema no puede solucionarse a partir de la intuición; requiere la construcción de una teoría capaz de servir de base irrefutable a cada área de las matemáticas. Además, su solución es inherente a la construcción de las matemáticas; es decir, construir una teoría matemática no significa resolver el problema de sus fundamentos, más bien, se tratará de comprender las maneras de esta solución hallando, en las teorías matemáticas, las condiciones de su legitimidad intrínseca. Estas condiciones, según Gonseth (1936), se usan únicamente en las conexiones que se realizan entre los múltiples aspectos de una teoría matemática.

Tal vez influenciado por las reflexiones contemporáneas de Piaget, Gonseth habla de una generalización en el conocimiento de una persona. Piaget aborda el desarrollo

cognitivo del infante que trata sobre la noción de objeto; para llegar a esta, se necesita un grupo de referencias y normas que conforman una “forma intuitiva” (Gonseth, 1936). Por consiguiente, un objeto es solamente una separación más o menos esquemática de **R** y no un dato que velozmente presente al individuo como portador de esta misma realidad; de hecho, está constituido por un acto de interpretación partiendo, ciertamente, de las sensaciones. Sin embargo, ¿para qué construir un esquema teórico?, ¿como medio de proyección de las sensaciones sobre el grupo de referencias y patrones? Algo análogo ocurre, generalmente, con lo que se llama "realidad": no se le da al hombre desde la intuición; es, más bien, el resultado de una sedimentación progresiva generada por la matemática; por su relación con el marco de intuición y por aspectos de referencia, de proyección. Es decir, un proceso que solo puede describirse si se reconoce su alcance intuitivo y experimental.

De esta manera, Gonseth (1936) entra a criticar a I Kant (1724-1804) en lo que concierne a su ideal de una ciencia; según el cual, esta únicamente ha logrado reproducir su ideal una vez que se ha acercado a las matemáticas. Gonseth afirma todo lo contrario, para él, las matemáticas habrán llegado a su ideal cuando hayamos explicitado, en su propia organización, el vínculo con la experiencia, es decir, la constitución las realidades.

Gonseth empieza por someter a reflexión lo que entiende como la formulación de una nueva teoría de conceptos (**A**). Para él, debe entenderse como una herramienta cognitiva de orientación que hace posible la acción. Como se observará, Gonseth (1936) precisa que los diversos tipos de esquemas no están sujetos a una descripción, ni vaga, ni rigurosa, más bien resultan de un acto de selección de ciertos aspectos que se piensan sobresalientes en un contexto y en relación con un objetivo determinado que, principalmente, es solo el de la

acción. Por ejemplo, si un arquitecto dictamina medir el lote donde va a construir, se da cuenta de que posee fronteras y, a estas, decide llamarlas líneas; y que, el fin de ellas son puntos. Por ende, plantea que las líneas están conformadas por dos puntos; además, cualquier criterio no solo puede enriquecerse tomando en cuenta nuevos aspectos, sino que también puede modificarse eliminando los considerados anteriormente.

Es gracias a esta capacidad de orientación, que los esquemas ofrecen testimonio de determinados conceptos, los cuales, según Gonseth (1936), se adquieren. En este nivel el conocimiento es original, constituye la base misma de toda construcción científica y podría calificarse como "conocimiento intuitivo”. De esta primera forma de conocimiento resulta una composición objetiva que, si bien, solo es una construcción, funciona como una realidad primaria, sobre la que cada quien construye sus propias teorías científicas y matemáticas en relación con cierta manifestación ya dada de la realidad.

Desarrollar una teoría matemática, en cambio, es parte del proceso de conocimiento; no existe un entendimiento que logre ser pensado como una pura reproducción o apropiación al instante. En su primera fase, suponiendo una verdadera física ingenua de **R**, este proceso parte de formar un conjunto de imágenes intuitivas. Dicha física puede desarrollarse sin necesidad de un sistema de referencia que proporcione concepciones inalterables; en otras palabras, que proporcione maneras en las que las propias sensaciones no interfieran. La introducción de estas formas, según Gonseth (1936), es el primer paso en un proceso de esquematización matemática de la realidad. De hecho, marca el paso de la **I** a la **E** (la física ingenua a la física experimental); puesto que, de ser posible este paso, esta sería una de las misiones epistemológicas primordiales que deben cumplir las matemáticas. La precisión de la intuición y la experimentación dan lugar a la abstracción en las matemáticas. De esta

forma, Gonseth encuentra un tema fundamental en su concepción trascendente de las matemáticas: el diagrama (ver la figura 1).

Gonseth (1936) acude al ejemplo de la geometría para ilustrar y desarrollar su argumento que caracteriza lo abstracto geométrico como una especie de bimodalidad que está a medio camino entre **I** y **A**; esto es: lo abstracto de lo cual el esquema es lo concreto y lo concreto de lo que el axioma es lo abstracto. Por consiguiente, lo geométrico no debe confundirse con lo axiomático. Si bien lo geométrico deviene de lo intuitivo, por un acto de esquematización (que ya es axiomático), su axiomatización requiere un nuevo acto de esquematización que libera su estructura lógica profunda. Tanto en el primer acto como en el segundo, la abstracción involucra una pérdida de determinación y de capacidad representativa de la integridad que es, a la vez, una ganancia de capacidad representativa de uno o más aspectos de lo concreto.

El segundo acto está marcado, en especial, por una pérdida de sustancia en las nociones matemáticas manifestadas a lo largo del primero; una pérdida de todo que rememora su significado en el mundo de los fenómenos percibidos de forma directa por los sentidos; recordando, así, la doble axiomatización de la que surge la geometría axiomática: la primera mantiene, de esta forma, las maneras particulares de los fenómenos, mientras la segunda conserva solo la estructura lógica de las relaciones entre dichas maneras.

Por otra parte, la primera axiomatización ocurre principalmente en virtud de la memoria de las realizaciones en las que las nociones fueron percibidas; de modo que, si la idea de lo geométrico tiene origen intuitivo, su ámbito específico de existencia se encuentra comprendido entre la primera axiomatización, que le otorgó una apariencia abstracta, intuible para quien está conociendo, y la segunda, que lo concretiza en términos puramente

lógicos. Dicho de otra manera, las nociones geométricas deben concebirse como imágenes ideales, que descansan sobre el objeto real; representaciones esquemáticas cuyo significado es inteligible únicamente teniendo presente la lógica.

En estas relaciones de lo geométrico con lo intuitivo y con lo lógico existe la imagen misma de cualquier relación entre lo concreto y lo abstracto. En cualquier entorno, el término "abstracta" toma tres maneras: como una representación intuitiva; como una idea específica de una ciencia particular; y, finalmente, como una relación lógica. Incluso, en esta última forma, el término sigue viviendo de sus existencias anteriores. La ciencia en cuestión no adquiere su autonomía solo como estructura lógica en la que lo intuitivo apenas sobrevive como memoria; debe su adecuación a la relación entre lo intuitivo y la realidad.

Si este es el caso de la geometría, también es el caso de la aritmética; cuyo desarrollo sigue tres fases: la representación intuitiva –como el acto de contar unidades–, la construcción de una teoría matemática adecuada –como la teoría de los números lanzada durante la primera fase– y, finalmente, la lógica –por axiomatización–. Este proceso no es, en modo alguno, un canon a priori de la razón; es el resultado de una serie de abstracciones que parte de la representación intuitiva de los objetos como tales. Por esto es posible pensar en ella como una ciencia natural de carácter muy primitivo; como una verdadera física de cualquier objeto. (Gonseth, 1936)

La exploración de la geometría, la aritmética y la lógica conlleva consideraciones sobre la naturaleza de la axiomática, que pueden observarse mediante la construcción de un esquema de cierta realidad dada que, paralelamente, crea una realidad totalmente nueva. Por lo tanto, el sistema axiomático opera en todos los niveles del proceso de abstracción como

diagrama, caracterizándose por los cuatro aspectos fundamentales de cualquier esquema que otorga una explicación resumida de una realidad preliminar: **R**, **I**, **E** y **A**.

El último diseño de la prueba deductiva, como un proceso puramente lógico, resulta de una doble sustitución: la primera con evidencia intuitiva externa de las pruebas internas que aporta el esquema matemático resultado de la primera axiomatización y con la sustitución a estas mismas pruebas mediante un estándar de lógica formal; luego, en su última sustitución, la prueba se transforma en eventos intuitivos más evidentes que los generados en la primera. El ejemplo más claro se observa en la presentación general de las normas abstractas de la evidencia lógica perfecta: **R** puede aludir enteramente a hitos del acto original de contar y no a objetos resultantes de un número entero que, principalmente, accede en una prueba lógica como axiomatización posterior; tal la axiomatización de Peano.[2]

2.4 La ciencia de cualquier objeto y los comienzos de la lógica

Las consideraciones anteriores muestran un cuadro general de una teoría matemática como consecuencia de un acto de esquematización y constitución de la realidad; queda por demostrar la forma en que este proceso se realiza en casos particulares; por ejemplo, en la

[2] Los cinco axiomas de Peano son los siguientes: "A1. El objeto 0 (cero) pertenece al conjunto N: $0 \in N$. (O sea: 0 es un número natural); A2. Si $x \in N$, existe y es único $sig(x) \in N$. (O sea: A cada número natural corresponde un número natural llamado siguiente de él, unívocamente determinado.); A3. Para todo $x \in N$ es $sig(x) \neq 0$. (O sea: 0 no es siguiente de ningún número.); A4. Si $sig(x) = sig(y)$, entonces $x = y$. (O sea: Un número natural no puede ser siguiente de dos distintos.); y A5. Si C es un subconjunto de N ($C \subset N$) y verifica: i. $0 \in C$; ii. $X \in C \rightarrow sig(x) \in C$. Entonces $C = N$. (O sea: Si un conjunto C de números naturales cumple estas dos condiciones: i. 0 pertenece a C. ii. Si un número natural pertenece a C, también su siguiente pertenece a C. Entonces, TODOS los números naturales pertenecen al conjunto C)". (Trejo, 1968, 27)

lógica. Según los trabajos de Gonseth (1933; 1936; 1939), las procedencias de la lógica entraban a repensarse a partir del momento en que se descubren las antinomias lógicas, hecho que lo motiva a tematizar la concepción lógica del método axiomático.

Comentando un escrito de 1913 de Federigo Enriques (1871-1946), Gonseth (1936) formula dos reparos a las afirmaciones de ese autor. El primero es de carácter histórico y se refiere al punto formal: que piensa la lógica como un canon de deducción para dar estructura a los constructos de la mente (las ideas). Segundo: que presenta la lógica como un resultado de una abstracción, **A**, vía esquematización; o sea, como un puente que une el objeto pensado en su existencia y el juicio tomando como la veracidad de este.[3]

En contraste con dichos planteamientos, Gonseth precisa la característica distintiva de su concepción de la lógica: la afirmación de su autonomía como una teoría matemática (o cuasi-matemática) particular. Para él, la imagen de la lógica como sitio de fundación de las matemáticas es tres veces falsa. Primero, porque parte de una idea de la lógica y de lo matemático como dos dominios separados que acceden a la relación entre ellos como un todo ya conformado como tal. Segundo, porque atribuye a las teorías matemáticas un motivo externo, al dejar su legitimidad suspendida a la espera de un veredicto que realmente no les concierne. Por último, porque asigna a la lógica una labor que no es la suya, lo cual lleva a diversos malentendidos sobre su propia naturaleza. Uno de dichos malentendidos está, según Gonseth (1936), en los principios de las antinomias lógicas; porque estas vendrían de una concepción de los objetos de la teoría de conjuntos, no como objetos lógicos puros,

[3] Consultar a Arboleda y Recalde (2003) sobre las discusiones entre Enriques, Gonseth, Fréchet y otros a cerca de las relaciones entre la lógica y la constitución de los espacios abstractos por medio de la realidad concreta.

desprovisto de cualquier propiedad especial, sino, como objetos aristotélicos, especificados por ciertos números y letras que permiten su categorización.

Para eludir cualquier contradicción, basta con tener en cuenta, en la teoría de conjuntos, objetos puramente lógicos que solo tienen la posibilidad de caracterizarse por el hecho de llevar a cabo su funcionalidad de objetos: entrar en relación con otros objetos del mismo tipo (refiriéndose a un juicio). Como se ha observado, para Gonseth, esta especificación es de carácter general; pues, prácticamente se debería al reconocimiento del papel inadecuado que se deseaba asignar a la lógica.

Al restablecer el papel de la lógica, se disuelven las antinomias; y, como estas, impiden llegar, desde la misma lógica, a cualquier teoría matemática; porque, si bien un sistema axiomático es un diagrama, una representación no lo es. En este sentido, el restablecimiento depende del esquema; es decir, la realidad propia y anterior saca a relucir una realidad totalmente nueva (una teoría de conjuntos general). Por ende, no hay antinomias que surjan solo de un criterio general ni tampoco conceptos particulares que intervienen en una representación particular. Lo anterior, se opone a la concepción lógica, internalista y totalitaria del método axiomático esquemático particular.

Para Gonseth el problema de entender los principios de la lógica, radica en concebirla como consecuencia de un esfuerzo de esquematización y constitución. Este es el asunto de hasta cinco capítulos de *Matemáticas y realidad* (1936); obra que surge de la invitación que Federigo Enriques (filósofo e historiador del pensamiento científico) le hace de publicar un ensayo sobre las teorías científicas e industriales de las noticias lógicas. El ensayo que resultó se divide en dos secciones: en la primera, Gonseth plantea y discute diferentes concepciones de la lógica, diferentes “doctrinas preliminares” sobre la naturaleza y las

funcionalidades, desde Port-Royal hasta llegar al propio Enriques, pasando por las ideas de Kant, Russell, Carnap y Poincaré (sin citar a Frege, Brouwer, Hilbert y Gödel) oponiendo la perspectiva formalista, que piensa la lógica como un canon de deducción, al punto de vista trascendental, que la estima como una estructura propia de la mente humana. En la segunda parte, Gonseth busca una síntesis entre estas concepciones opuestas; de donde presenta la lógica como la consecuencia de una abstracción por esquematización.

Según su concepción, la lógica descubre su origen en la expansión de una especie de preaxiomatización que libera de objeto a la iniciativa intuitiva. Así, la idea de objeto es únicamente el producto de ser o no ser. Bajo esta manera de verla, la lógica se presenta como una especie de ontología pura; es decir, como una teoría de las condiciones de existencia. Precisamente, mediante esta primera abstracción, es posible encontrar los tres primeros axiomas del ser de cualquier objeto. (Gonseth, 1936; como se citó en Panza, 1996)

I) Todo objeto es idéntico a sí mismo (identidad).

II) Cualquier objeto es o no es (terceros excluidos).

III) Un objeto no puede ser y no ser al mismo tiempo (contradicción).

En una fase subsiguiente, se introducen los símbolos; lo cual posibilita, por medio de una especie de retorno a lo concreto, una técnica específica. Sean F y G dos objetos. Se indica por $\underline{Y}$ el hecho de que Y (objeto) existe; y por $\overline{Y}$, el hecho de que Y no existe. Entonces, hay cuatro posibilidades: a) $\underline{F}$, $\underline{G}$; b) $\underline{F}$, $\overline{G}$; c) $\overline{F}$, $\underline{G}$; d) $\overline{F}$, $\overline{G}$. Gonseth llama al grupo {a, b, c, d} la manera abstracta relativa a dos objetos abstractos. Cualquier subconjunto de este grupo es una subforma que especifica las probables maneras en relación con la existencia de F y G. De esta manera {a, d}, por ejemplo, es la subforma de la equivalencia;

y {b, c} es la subforma de exclusión recíproca. De ahí se abre la posibilidad de formular el cuarto axioma:

IV) Dos objetos determinados que entran en la forma de equivalencia no tienen la posibilidad de entrar en la de exclusión recíproca.

Este axioma expresa, en lo sucesivo, a una ley natural de todo el universo de los objetos materiales que debería pensarse como una verdad lógica previa; pero, es un paso demasiado primitivo y es, en definitiva, de validez fundamentalmente infalible, lo cual no puede ser posible. Asimismo, es clara la manera en que tienen la posibilidad de rehacer las tablas de verdad de las proposiciones, entendidas como tablas de existencia, como subformas particulares del grupo {a, b, c, d}; del mismo modo que se llega a la más primitiva y sencilla de las versiones de la lógica que se muestra en este periodo como una teoría racional de la experiencia objetiva. No obstante, la lógica solo alcanzó una primera etapa en su evolución.

La segunda fase está captada, en general, por la introducción de las nociones de juicio, verdad y falsedad, y por su sustitución por las nociones de objeto, existencia e inexistencia. Las tablas de la existencia se transforman, así, en tábanos de la verdad y la lógica, toma la manera de un canon de juicio, incondicional y verdad. Para ir más allá y pasar de la lógica de las proposiciones a la de los predicados, se requiere, según Gonseth (1936), una axiomatización totalmente nueva que esquematice las ideas intuitivas de recopilación y de calidad, y que genere las ideas lógicas de conjunto y atributo. La lógica se presenta así, como una carta de nuestras propias libertades naturales, porque esquematiza la independencia original y primera de clasificación, por ejemplo, la forma axiomática de Peano.

2.5 El Principio de la Geometría y el Problema del espacio

En la reflexión filosófica que Gonseth desarrolla a cerca de la axiomática, se detiene a comprender el proceso a través del cual el individuo genera un conocimiento sobre un objeto matemático. De esa manera, Gonseth (1945-55) indica que la axiomática permite construir diversas nociones de espacio, tanto en la geometría euclidiana como en las no euclidianas: del primer tipo de geometría, Geiger (1924) presenta un sistema axiomático con el que se propone estudiar su paso a las geometrías no euclidianas. L Recalde (2017) analiza las geometrías no euclidianas como construcciones axiomáticas, con el objetivo de encontrar la forma de explicar el espacio geométrico. En este estudio, se analiza la filosofía abierta, o el idoneísmo, de Gonseth, entendido como una garantía filosófica para desarrollar ideas matemáticas que se generaliza a cualquier ciencia.

El diagrama evolutivo de la geometría presentado por Gonseth en *Matemáticas y realidad* (1938) constituye una "dialéctica" en la que los aspectos intuitivo, experimental y axiomático o racional participan en un proceso de comprensión de la realidad (Panza, 1996). La figura 1 ilustra esta idea; básicamente, en un extremo, se tiene **R**: lo concreto que percibe cada individuo por medio de **E** y de **I**; luego, de un modo complejo, se pasa al extremo **A**: cierta realización de una teoría. Así, abordar la cuestión del origen y la naturaleza de la geometría significa lanzarse al análisis de una dialéctica, tarea que Gonseth realiza a lo largo de VI fascículos que redacta en 1945, 1946, 1947, 1949, 1952 y 1955. En el fascículo I introduce el diagrama. En el II, identificar, en la primera construcción elemental, los tres aspectos (**R**, **E**, **I**), explica los términos de la síntesis que articula en una teoría matemática exclusiva. En el fascículo III, el problema del espacio surge de nuevo como irresoluble si no es hallando en la intuición elemental las condiciones que hacen posible la deducción

geométrica; para encontrar así "la autonomía de la geometría". En el IV, desarrolla la correspondencia esquemática. En el V, pasa a exponer la geometría hiperbólica y, de esta forma, propone de nuevo el problema de la unidad de la geometría. El VI es el de las conclusiones.

Entonces, en la introducción (fascículo I, 1945) señala que, en una perspectiva natural, el espacio físico y el geométrico se confunden. Sin embargo, una vez que la geometría y la física se separan, bajo las demandas opuestas por la "necesidad racional" y la experimentación, el espacio se convierte en su lugar de encuentro. Esta reunión ahora solo podría ser una síntesis de aspectos separados. Aquí surge la finalidad que Gonseth persigue: detectar las condiciones en general bajo las cuales puede solucionarse el problema del espacio y puede recrearse la unidad del conocimiento espacial. Para lo cual, debe imaginarse una dialéctica capaz de conseguir tal reunificación y que comprenda tres momentos principales: un conjunto de visiones apoyadas en hechos elementales que constituyen una "doctrina preliminar de verdades elementales"; otro de normas primordiales de asociación de los diferentes recursos de la doctrina preliminar; y el objetivo mismo de la unificación que se persigue. En pocas palabras, a lo largo de la constitución y en el ejercicio de una dialéctica la mente es informada por la doctrina preliminar de las verdades elementales, regida por las reglas y dirigida por sus fines.

Una encuesta realizada en 1945, en el Instituto Federal Suizo de Tecnología en Zúrich mostró, por primera vez, que cualquier compromiso real con la geometría, inclusive el más elemental, va acompañado de cierto grupo de ideas sobre la naturaleza de seres geométricos y su relación con la realidad física. Es pues, la doctrina preliminar la que, de esta forma, llega a constituir la base de la construcción de la geometría. Desde esta base, la

geometría se hace primero como una ciencia elemental, con la cual, los *Elementos* de Euclides constituyen el paradigma.

En el fascículo II, según Panza (1996), la síntesis parece tener lugar de antemano respecto a la división de los tres aspectos que conviven en una relación dominante de total equivalencia; surge en retrospectiva, como una solución involuntaria al problema del espacio, al grado de la información natural. La información siguiente arroja luz sobre el carácter relativo y provisional de esta síntesis. Un segundo paso es ver cómo a aquellos diferentes recursos anteriores, en el mundo de la intuición y de la experiencia –que, a través de los siglos, ha construido la raza humana–, como las observaciones del espacio astronómico o las medidas de agrimensura –que se transmitían por civilizaciones de forma oral– se asignan ciertas reglas que las asocien. Se obtienen, entonces, las definiciones y los procedimientos. De una manera concreta, por ejemplo, el teorema de Pitágoras es la proposición 47 del libro I en los *Elementos* de Euclides; su demostración se fundamenta en una secuencia deductiva de postulados, definiciones, proposiciones y teoremas previos hasta llegar a un nivel de unificación teórica que explica cada una de las condiciones empíricas de las formas triangulares.

Luego, el tercer paso es el propósito de la unificación. Se da en el instante en que la humanidad entiende la orientación que se ha de dar al esfuerzo de demostrar el teorema; incluso, este existía como la suma del área construida sobre los catetos e igualándola con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Lo anterior existía mucho antes de Euclides; sin embargo, es él quien, en su teoría elemental de la geometría, lo demuestra por primera vez para darle unicidad al conocimiento de las formas triangulares.

El término “dialéctica” permite observar cómo llegar a una teoría desde los objetos empíricos pasando por el mundo de la intuición y la experiencia de los individuos; de tal forma que, las doctrinas preliminares conforman la geometría que se realiza como una ciencia elemental en un primer momento, respecto del cual los *Elementos* de Euclides constituyen el acercamiento con lo concreto.

El segundo fascículo, *Les Trois Aspects de la Géométrie de Gonseth* (1946), aclara los términos “intuitivo”, “experimental” y “axiomático o racional”. En el dominio intuitivo, el conocimiento es dependiente de su desarrollo, de la disponibilidad de ciertas formas, en las cuales se insertan los datos intuitivos. Estas maneras son precisamente los objetos de la geometría intuitiva y se poseen debido a una especie de pre-axiomatización. Luego, el dominio experimental depende de la probabilidad de materializar estas formas a través de la fabricación de herramientas adecuadas sobre las cuales los teoremas de la geometría se verifican como leyes empíricas de dichos objetos. Finalmente, el dominio racional o teórico depende de la posibilidad de sustituir las anteriores herramientas con objetos abstractos fijados por una práctica discursiva y una dialéctica deductiva que permiten proponer y resolver problemas específicamente geométricos. (Panza, 1996)

La dialéctica, en primera instancia, está relacionada con el concepto de objeto; con la manera como se conoce cierto objeto; o sea, hay un paso de un grado de conocimiento a otro, hasta llegar a la abstracción en el instante, por lo cual, se ha capturado la propiedad característica del objeto, como en la geometría euclidiana. Además, la figura 1 es un modelo en el que el objeto se encuentra en **R** debido a que en **R** hay objetos espaciales. Por ejemplo, la clase de círculos que, llegados a este punto, no hay aún conocimientos de aquel objeto, este solamente aparece en su manifestación visual; como al ver una rueda, el sol, una

moneda, entre otras. Se tiene que convertir en una propiedad teórica, en un conocimiento geométrico, una vez que se pasa a **A**.

El paso de **R** a **A** es complejo, dialécticamente hablando, en el sentido del contraste que resulta al confrontar un polo con otro polo. Existe una dialéctica deductiva: una manera lógica de ver un objeto en la realidad, en el mundo de la experiencia, y pasar a verlo en el mundo de la teoría. Se pasa de **R** a **A** por **I** (intuición elemental: la obra *Elementos* es la base de la geometría) y por **E**, como las flechas lo presentan en la figura 1. La flecha que conduce directamente de **R** a **A** tiene que pasar por **E** debido a que el tratamiento de los objetos es diverso, de acuerdo con las diferentes posibilidades en que los hombres se relacionan con ellos luego de pasar a **A**; en esos instantes el razonamiento es arduo, involucra tensiones, cambios y transformaciones que se presentan cuando un individuo se enfrenta al mundo de la realidad y se plantea, por ejemplo, la pregunta "¿qué es un circulo?". No es solo una forma espacial; es una propiedad característica. Llegar a **A** es implantar el conocimiento unitario, la propiedad elemental (la definición en el libro I de Euclides).

En el fascículo III que, dice Panza (1996), está dedicado a la presentación de la axiomática de Hilbert para la geometría euclidiana, ya la "dialéctica de la deducción" viene a establecerse en la geometría. No obstante, junto con la posibilidad de deducción, el nuevo sistema axiomático abre un nuevo problema de síntesis de tres aspectos. Y, esta vez, este problema, por el momento, no puede resolverse con una simple relación de equivalencia; pues, ya se ha realizado la división y se habla de hacer la síntesis.

La dialéctica, entonces, involucra diferentes instantes epistemológicos, o grados de desarrollo, hasta conseguir su estado unitario; en la situación de los triángulos rectángulos, son grados de la propiedad pitagórica hasta llegar a convertirse realmente en el teorema. En

los pitagóricos, solo está una propiedad; quien primero la sitúa en el mundo axiomático es Euclides y, colocada la propiedad como teorema, ya que es la manera de destinar todos los objetos que tengan la forma rectangular y que viven en el mundo de la realidad, formas de las cuales se tienen percepciones intuitivas. Así, sobre la figura 1, toma forma el término "dialéctica". Pero, además, está el problema del espacio; pues, pasar de **R** a **A** es un gran problema cognitivo y epistemológico. La historia revela la complejidad de lo que pasó para que Euclides llegara, durante el siglo II a C, a formular su libro. Con la ciencia elemental, se recibe la primera síntesis; ya que, con Euclides, un objeto consigue la propiedad característica, su conocimiento unitario en el mundo de las teorías axiomáticas, pasando por los niveles de intuición elemental y experiencia en que el ser humano percibe esos objetos que viven en la realidad.

Como la intuición elemental no es suficiente para ofrecer solución al problema del espacio, por el fallo del quinto postulado, decae a nivel axiomático. Por consiguiente, la geometría de Hilbert retoma la de Euclides y transforma la dialéctica, a una deductiva, dando lugar a un debate para los tres aspectos y abriendo oportunidades a la innovación.

La situación cambia radicalmente una vez que se crea una mayor axiomatización; los diferentes episodios de la historia de la geometría se usan, y son tan necesarios, como recursos de una dialéctica ideal. De esta forma, se presenta el axiomático hilbertiano, no solo anterior a considerar la probabilidad misma de una geometría no euclidiana, sino también, desprovista de una de sus motivaciones históricas más profundas: la de liberar la estructura lógica de la geometría de la referencia explícita y fundamental, para los objetos euclidianos clásicos.

Gonseth (1947) presenta el dominio axiomático como una especie de organización lógica de las interacciones que hay entre los objetos logrados *a priori* por la intuición resultando simple recalcar la permanencia sustancial del aspecto intuitivo, en lo que este dominio axiomático hace posible; retorna, entonces, a un juicio que había adelantado en sus fundamentos de las matemáticas, al insistir en que, en la naturaleza de las definiciones implícitas concretas de los axiomas de Hilbert únicamente se esconden las causas intuitivas que intervienen en el argumento que todavía no alcanza el estatus de deducción puramente lógica. En este nivel de axiomatización, la autonomía del plano deductivo todavía está inconclusa; y el dominio lógico o racional se mezcla precisamente con el intuitivo. No obstante, hay una cierta forma de autonomía; porque, una práctica deductiva se establece y pasa a ser deducción dependiente de las causas originales que la justifican. La cuestión de la comprensión de los tres aspectos no puede resolverse con una simple apelación a la conciencia compartida de la equivalencia total.

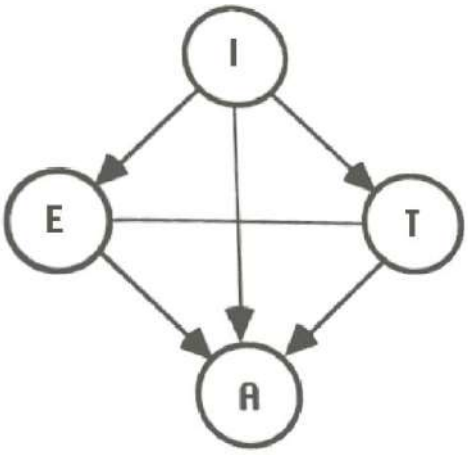
La síntesis del fascículo IV, según Panza (1996), no es aún la solución del problema del espacio; porque, la unidad de la geometría es aún solo la unidad de la geometría euclidiana. La experiencia histórica que conduce a la preparación de las geometrías no euclidianas todavía no se incluye en esta segunda síntesis.

Con base en el problema que identificó en el fascículo III, generado por la geometría de Hilbert, Gonseth identifica, en el fascículo IV, un esquema (ver la figura 2) inferior al de la figura 1, para ilustrar la lógica implementada por Hilbert. Primero, un ser humano piensa; por consiguiente, para resolver problemas, la intuición será el raciocinio de un individuo; en el otro extremo está la axiomatización. Se convierte, así, la dialéctica deductiva en el puente que junta ambos polos. Y, como se tiene la posibilidad de mirar, no es viable pasar de **I** a **A**

de forma directa; se debe pasar por **E** o por **T**, la teoría, que son las diversas indagaciones llevadas a cabo sobre la intuición, y este paso ha de tener coherencia para llegar a **A**. En este sentido, el esquema juega un papel importante; porque, **T** no podría ser de cualquier tipo. Se pasa por niveles de conocimiento cada vez superiores y procurando modelar el mundo concreto (realidad). Hasta aquí, todos los escritos (babilónicos y pitagóricos) son intuitivos. Por lo tanto, aunque no aportan mucho sustento a demostraciones, sí motivan argumentaciones filosóficas.

Gonseth ahonda en su concepción esquemática acudiendo a la propiedad de los triángulos rectángulos; primero se obtienen intuiciones y experiencias, a través de las diversas civilizaciones, que permiten llegar a **A**; además, gracias a **T**, en esta situación, la concepción esquemática aceptada por la sociedad matemática es Euclides. No podrían ser los babilónicos o los pitagóricos, debido a que las investigaciones realizadas por aquellas civilizaciones son intuitivas; además, no podría ser toda la teoría que existente en la obra, sino, la secuencia lógica (una dialéctica deductiva) apuntando a la axiomática de Hilbert.

Figura 2. *Diagrama que presenta Panza en 1996 de Gonseth*



Según Panza (1996), el nuevo diagrama permite presentar conceptos clave en la dialéctica: esquema, horizonte de la realidad y modelo. El esquema contrapone el

significado externo (representatividad) y la estructura interna (funcionalidad). La significación externa, la realidad que el esquema representa, no preexiste al esquema como una especie de pre-esquemática ya dada, es la estructura de otro esquema de un nivel inferior, una abstracción que el nuevo esquema transforma en una forma concreta caracterizándolo justamente como una unificación exterior. La estructura interna es la funcionalidad del esquema, la economía del acto representativo. El horizonte de realidad, el esquema como un significado externo; aquello que se representa. La realidad no preexiste al esquema; es en el mismo acto de esquematización que se tiene dicha significación externa; porque, podría ser que, en otro instante anterior de la intuición, haya otra manera de verlo y esa no es la que va a dar la base al siguiente esquema; es el mismo esquema el que le da su representación al objeto; es decir, no se fundamenta en ninguno anterior.

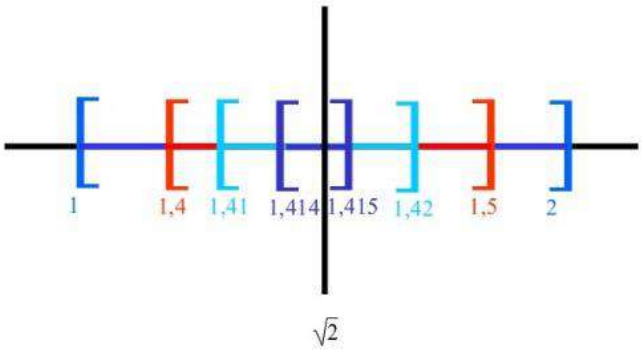
El horizonte de realidad queda definido por las sucesivas significaciones externas, encajonadas una en la otra, cuyas sustituciones son el acto mismo del conocimiento. Este acto solo es un proceso de construcción y de superación de horizontes de realidad por medio del recurso de identificación de esquemas; de esta forma, la idea abstracta es del acto y lo más concreto es del horizonte de realidad.

Al pasar de un esquema 1 al esquema 2 y del 2 al 3, y así sucesivamente hasta llegar al conocimiento, se define una secuencia, la cual constituye el horizonte; en su límite, se captura el sentido real y va de significados externos aproximados, a otro más próximo; de aquellos aspectos externos va hasta el real que es el conocimiento. El encajonamiento de esquemas puede verse mediante el encaje de intervalos (teorema de Bolzano-Weierstrass); la manera como Bolzano (1781-1848) consideraba que una sucesión de puntos determinados por los extremos de los intervalos va aproximándose al límite. Es decir: es posible

aproximarse a un punto (ver figura 3), un irracional, a través de una sucesión de puntos o a través de los irracionales. Entonces, un esquema anterior es un significado externo que representa al objeto real; pero, no es el conocimiento todavía; hay un movimiento dialectico que une un esquema anterior a uno más fino (un irracional está más próximo al punto).

Una vez que pasa de un esquema S_n inferior a uno $S_{(n+1)}$ preeminente en aquel paso, no se conoce, por ejemplo, raíz de dos. Es decir, el límite no es antecedente de los términos de la sucesión, sino que se encuentra; de modo que, el individuo toma el límite como dado en muchos casos, pero, lo fundamental es dar la sucesión y encontrar el límite. Por consiguiente, lo anhelado es que obtenga acercamientos pero sin poseer el conocimiento; más bien, situado en su construcción. Entonces, si se pasa de un esquema superior a uno inferior, no se conoce a donde se va. Por ejemplo, una vez que una sucesión se desarrolla, no se sabe cuál será su límite; sin embargo, se tiene un camino, y solo se conoce lo que será el paso siguiente. Es decir, se tiene un esquema menos abstracto que el anterior. La realidad no preexiste al esquema, solo hay una función obteniendo dos dimensiones: una conceptual, de contenido de verdad, y un contenido epistemológico que garantiza que los pasos son correctos, que tienen un contenido propio y que, además, tienen una direccionalidad, llevan de n a n+1: los concretos significativos son los horizontes.

Figura 3. *Intervalos encajonados*



El modelo se define como el sistema de las relaciones constitutivas de la estructura interna (elementos del diagrama); se puede tener en una duplicación de los elementos del diagrama, pues, en la geometría hiperbólica, la intuición opera en la base como una dialéctica. (Panza, 1996)

En el origen de las geometrías hiperbólicas, el espacio geométrico tiene la forma de una silla de montar a caballo y lleva a una presentación totalmente nueva del triángulo analizando una curvatura negativa. En consecuencia, si se suman las mediciones de los ángulos internos del triángulo, esta será menor que 180° y, en vista de esto, este no será un triángulo plano como el presentado en las geometrías euclidianas, donde la curvatura es igual a cero y la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo es igual 180°. Recalde (2017) menciona que N. Lobachevski (1792-1856) emprendió la labor de examinar cuál tipo de geometría concierne al espacio físico. Para hacerlo, analizó el triángulo compuesto por la Tierra, el Sol y estrella Sirio, lo que lo llevó a descubrir que la suma de las medidas de los ángulos internos es menor a 180°, aunque estas mediciones contienen errores bastante pequeños, considerados en el margen de error habitual, decidió dejarlo solo expresado.

Como nota histórica, hasta entonces, se ha presentado el surgimiento de la geometría hiperbólica; pero, esta no es la única geometría que apareció planteada en la época. El geómetra B. Riemann (1826-1866) encontró la geometría esférica (riemanniana); este matemático expone las distintas maneras en las que puede concebirse el espacio y las múltiples posibilidades en las que puede conceptualizarse la actividad de medir (distinción entre magnitudes discretas y magnitudes continuas); la geometría presentada por este matemático obedece a los postulados I, III y IV de la geometría euclidiana, pero, como es

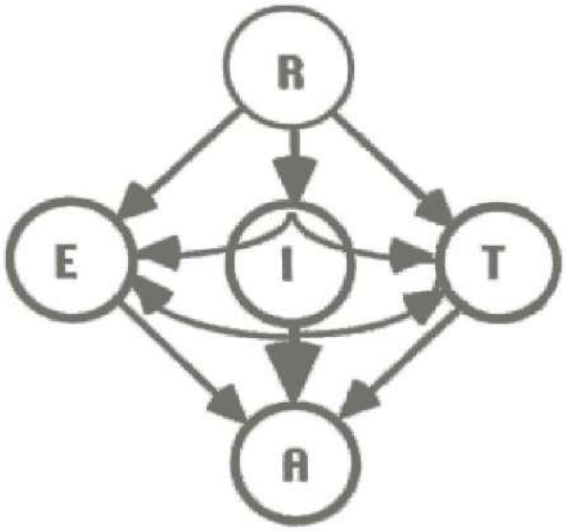
notable en el quinto postulado, estas dos geometrías junto con la hiperbólicas se comportan de maneras opuesta; dado que, en la geometría riemanniana, este postulado toma la forma: "por un punto exterior a una recta no pasan rectas paralelas". Además, para Riemann, las líneas no se pueden prolongar indefinidamente. Se aparta, así, del postulado II de Euclides.

En resumen, Recalde (2017) afirma que "Riemann muestra que existen espacios que no necesariamente tienen curvatura constante; en estos espacios se puede definir la curvatura localmente" (p. 334). Lo que implica que el espacio geométrico toma la forma de una esfera y, si se traza un triángulo en esta geometría, se analiza una curvatura que es positiva llegando, así, a que la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo va a ser mayor que 180°, lo cual permite ver una distinción entre las tres geometrías hasta ahora presentadas.

El horizonte de realidad depende de cada horizonte **I**, **E**, **T** y **A** (ver la figura 4); y, en otros términos, la realidad no se da sin dichos horizontes. Por ejemplo, la proposición 19 de la axiomática de Lobachevski prácticamente afirma que la suma de los ángulos internos de cualquier triangulo en este espacio no supera los 180°; este es el polo al que se quiere llegar, pero, el horizonte de la realidad no es que se forme inconscientemente, sino que se construye por medio de ambos modelos previamente mencionados. En el horizonte de la experiencia, se tiene un problema: aun cuando se supone que no funciona con ayuda de la evolución tecnológica, puede encontrarse un camino; por ejemplo, la distancia de la estrella de Sirio. Como puede observarse en la figura 4, el horizonte intuitivo funciona como punto de encuentro debido a que cada flecha pasa por él, lo que se debería a que la conciencia de cada individuo manipula el entendimiento. Finalmente, se forma el horizonte teórico, que se

refiere a las investigaciones sobre la suma de los ángulos de cualquier triángulo en este contexto geométrico específico.

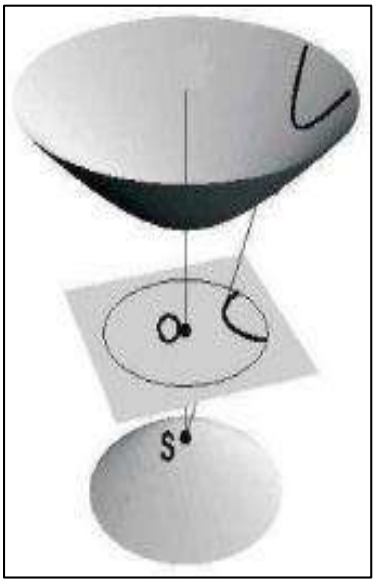
Figura 4. *Diagrama que presenta Panza de Gonseth sobre la geometría Hiperbólica*



En el fascículo V, el modelo de esquematización se fundamenta en el modelo de H. Poincaré (1854-1912) para la geometría hiperbólica separando la intuición del cerebro. Entonces, esta opera en la dialéctica deductiva. Aun cuando no funciona como una garantía final, opera bajo el control de una lógica interna que no legitima. Así, la dialéctica opera entre y en ellos (Panza, 1996). La proposición 31 de la teoría de Lobachevski refiere la curva conocida como horiciclo; básicamente tiene la forma de una circunferencia y las líneas sobre esta superficie lo intersectan siendo estas perpendiculares; además, entre ellas, son paralelas y se dirigen hacia un punto que parece como si se interceptara. Se relaciona con la proximidad asintótica que se explica en la proposición 24 y trata de una redefinición de paralelismo; sin embargo, es complicado tener una representación, por lo tanto, el modelo geométrico simétrico con la geometría hiperbólica, o disco de Poincaré, se produce desde la consideración de un hiperboloide equilátero de dos hojas cuya intercepción con el plano Z = 0 es vacía y, si se toma la proyección estereográfica de la hoja superior del hiperboloide a

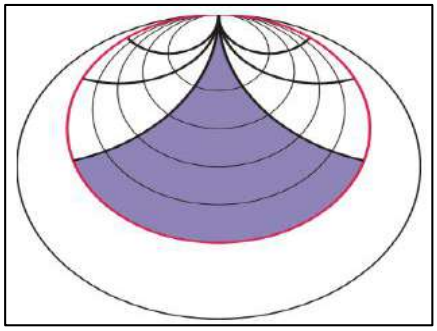
partir del vértice de la hoja inferior, S, sobre el plano Z = 0, se obtiene el disco de Poincaré como una proyección del hiperboloide de dos hojas (como se observa en la figura 5).

Figura 5. *Representación de la formación del disco de Poincaré*



En la figura 6, puede observarse el plano hiperbólico. Esta sección es exactamente un plano en el disco de Poincaré, un modelo bidimensional e isométrico que permite estudiar las propiedades de los objetos geométricos en la geometría de Lobachevski; las líneas que pasan por sus secciones representan aquel espacio. Este modelo ayuda, además, a mostrar que la geometría hiperbólica es equiconsistente con la euclidiana. Es decir que ambas teorías son consistentes en el sentido de que permanecen lógicamente bien estructuradas; lo que llevo a dar solución a la separación de estas dos geometrías debido a que se garantiza que la dialéctica es deductiva y se une desde ambas teorías; solo que, en la hiperbólica, está en la base, como se ha mencionado.

Figura 6. *Plano hiperbólico en un disco de Poincaré*



Según Gonseth (1955), no puede creerse que la intuición se elimine de la geometría no euclidiana; por el contrario, la intuición opera de esta forma en geometrías no euclidianas, con las mismas modalidades que en las geometrías euclidianas, una vez que se razonan estas geometrías, refiriéndose a uno de sus modelos euclidianos.

De esta forma, la construcción de geometrías euclidianas pone en duda, no el papel de la intuición en la geometría, sino, más bien, la iniciativa de que la evidencia intuitiva es un "testigo indiscutible e incorruptible"; una instancia última e ilógica. Lo anterior es suficiente para asegurar la necesidad de una síntesis totalmente nueva, en esencia distinta de la segunda y capaz de ofrecer razones no solo del nuevo papel de la intuición, sino también de la constitución de un horizonte espacial y de una experiencia deductiva, derivada directamente del esquema axiomático no euclidiano.

Los tres aspectos de la geometría se presentan, en vísperas de esta síntesis, como pluralizados; por lo cual, la unificación dialéctica, que debería lograrse en medio de estos aspectos y por el esfuerzo mismo de conceder a la geometría una completa autonomía en el orden de lo abstracto, expone una determinada multiplicidad de realizaciones. Por lo tanto, se debe intentar una tercera síntesis; así, el fascículo VI resuelve la ruptura haciendo unas relaciones entre la geometría de Euclides, la de Lobachevski y la de Riemman. La equivalencia práctica involucra el horizonte experimental; el mismo que, en la segunda

síntesis, nace de la dialectización y se divide dando lugar a dos variantes: la euclidiana y el horizonte de la hiperbólica (Panza, 1996).

Ahora, como es bien conocido en Euclides y aún previo a él, los objetos matemáticos (geométricos, en este contexto específico) nacen de forma directa del pensamiento matemático y no precisamente poseen un vínculo con el mundo físico. De ahí que la comunidad matemática de la época encontrara diversos problemas para incorporar las nuevas geometrías (no-euclidianas), mientras sus más serios investigadores se proponen buscar una presentación de la geometría que aporte una mejor descripción del mundo físico.

La geometría de Euclides es intuitiva y puede experimentarse por medio del espacio físico inmediato; sin embargo, su postulado V motivó una controversia entre una geometría que se ajusta más a la realidad y otra geometría más ligada con la intuición. Con la experiencia, se une y sintetiza este horizonte y la geometría euclidiana; debido a que las dialécticas funcionan de distinta manera, pues, tienen un problema de fondo: en una, el conocimiento es una construcción que parte de las intuiciones y las representaciones que los individuos desarrollan de los objetos empíricos de la realidad. Entonces, la construcción que dirige las intuiciones y las percepciones sobre la realidad, las manda al conocimiento (al mundo de la teoría). Por tanto, una experiencia puede dirigirse por diferentes caminos; uno es el horizonte de la geometría hiperbólica. Con la alianza de estas geometrías, Gonseth soluciona el problema del espacio en esta tercera síntesis.

En un inicio, puede aceptarse que todos los esquemas geométricos que ahora hacen parte del aspecto teórico de la geometría –ya que juegan un papel abstracto en la síntesis dialéctica–, al equiparar las respuestas que son precisamente diversas, este cree poder demostrar que las “doctrinas preliminares” de cada una son diferentes entre sí y que

únicamente es posible escoger gracias al criterio de la “mejor idoneidad” establecido a posteriori en relación con la experiencia real de construir una geometría.

2.6 El idoneísmo en el problema del espacio

La geometría y el problema del espacio constituyen el punto más alto alcanzado por exploración filosófica que Gonseth desarrolla sobre la axiomática. En los años posteriores a la publicación del último fascículo de esta obra, dedicó la mayor parte de sus energías a la promoción del "idoneísmo" (filosofía abierta). La motivación de Gonseth, ya mostrada en las conclusiones de su obra principal, es la de escribir un nuevo discurso sobre el método. Para Gonseth, según Panza (1996), un método no debe ser un precepto inmutable y universal; no parece, además, consistir en un conjunto de normas que aseguren un fundamento bueno y definitivo de la ciencia; en otras palabras, se juzga por los resultados que permite alcanzar, por las explicaciones que proporciona, en definitiva, por su “idoneidad”. Pero, también, depende de la situación y la evolución de la investigación. A continuación, se presenta, a grandes rasgos, el ritmo al que avanza el conocimiento científico, según Gonseth, según lo comenta Panza, 1996).

A) Ninguno de los pasos de la ciencia real se realiza desde un estado de conocimiento cero; el procedimiento científico puede llevarse a cabo solo a partir de una determinada situación de conocimiento; una situación, en la que el científico tiene un cierto conocimiento previo y un cierto lenguaje preconstituido.

B) La investigación encuentra o revela nuevos elementos que no se integran en la situación inicial.

C) Ocurre que, para integrar los nuevos elementos, es necesario imaginar y probar nuevas hipótesis; e incluso hipótesis incompatibles con la situación inicial (experimentar).

La idoneidad posee ciertos requisitos de coherencia y adecuación; para ser adecuado a su función, el material geométrico, en todas sus formas, debe satisfacer ciertos requisitos que conviene definir en forma de principios, según Panza (1996, citando a Gonseth):

1. Debe satisfacer un principio de apertura, según el cual ningún elemento del conocimiento geométrico puede postularse cerrado, completo en su significado y, en consecuencia, sin arbitrariedad.

2. Debe satisfacer un principio de pluralidad de aspectos, según el cual puede haber varios aspectos diferentes e incluso irreductibles de lo que constituirá para los intérpretes una misma y única realidad. Cada uno de estos aspectos es específico de una forma de abordar esta realidad irreformable en todos sus significados.

3. En sus diversos dominios, el conocimiento geométrico debe satisfacer un principio de compromiso que puede, en ciertos casos, revestir la forma de una actividad técnica más o menos definida (principio de tecnicismo). Debe considerarse, de acuerdo con este principio, que el avance de la disciplina, en uno u otro de estos modos de abordaje, podría depender de la implementación de medios adecuados; además, que no se dan necesariamente por adelantado.

4. La disciplina debe cumplir, finalmente, con un principio de integridad, según el cual un conjunto de movimientos (mentales, verbales, técnicos, etc.) organizados con miras a un determinado conocimiento no se establece en partes separadas, cubriendo y manteniendo por ellos mismos un significado adecuado.

Estos principios se aplican a todo tipo de ciencias que caracterizan una "metodología" del proceso científico transformándose los dos primeros, para la ocasión, en principios de reversibilidad y dualidad que reconoce preceptos para la teoría de la ciencia, que realiza, por otra parte, un diálogo, una dialéctica, en la que lo abstracto y lo concreto se especifican en relación entre sí.

2.7 Conclusiones

El estudio de Panza sobre las concepciones epistemológicas y filosóficas que Gonseth desarrolla en textos como, Les fondements des mathématiques. De la géométrie d'euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme o La Géométrie et le Problème de L'espace, no son exhaustivos, porque no es su objetivo. Por ejemplo, en estas obras, Gonseth desarrolla su enfoque filosófico que se conoce como idoneísmo; sin embargo, el estudio de Marco Panza no lo precisa; incluso lo cuestiona, al considerar que –a pesar del ingenio, la variedad y la veracidad observables en los escritos de Gonseth– dicho enfoque constituye una manifestación de inseguridad intelectual.

Aunque en Gonseth si se percibe dicha inseguridad, esto no quiere decir que no desarrolle una elección de orden filosófico pertinente; en sus escritos, aborda problemas clave del siglo XX y, como lo señala Panza (1996), comprende la participación de las matemáticas en la compleja empresa del conocimiento. Lejos de ser la simple realización de un juego lógico, el idoneísmo de Gonseth constituye el resultado de un esfuerzo humano de comprensión, representación y constitución de la realidad.

El esfuerzo humano que supone la ciencia de las matemáticas permite reflexionar sobre la formación de docentes de matemáticas, en particular de geometría. En ese sentido

Gonseth aporta un desarrollo singular de la tricotomía clásica: **E**, **I** y **T** que fundamenta la comprensión de los orígenes de la geometría explicando la solución de uno de los mayores problemas en este campo: el paso a las geometrías no euclidianas gracias a las controversias a que en su momento se sometió el quinto postulado de Euclides.

Para la enseñanza de las matemáticas, es esencial estudiar y tener presentes los aportes de Gonseth: horizonte de realidad, esquemas, síntesis, entre otros; el estudio de la importancia y la pertinencia de lo anterior en el campo de la educación matemática será el motivo de la siguiente sección de este trabajo.

3. Gonseth y las aplicaciones en la enseñanza de la Geometría

En particular, se tiene el interés de comprender cómo podría aplicarse la filosofía de Gonseth en el mejoramiento de la enseñanza de la geometría, facilitándole al profesor tomar conciencia de los problemas de la relación entre intuición y formalismo en la comprensión idónea de la naturaleza del espacio geométrico. Es decir, llevarlo a reflexionar sobre los contenidos que va a enseñar, los métodos a enseñar (cómo hacer que el estudiante pase de la intuición a la experiencia, hasta la información del pensamiento geométrico), su propia enseñanza (concepto de idoneidad). Por lo tanto, con la lectura de los trabajos de Bkouche (1990) y Houdement, en colaboración con Kuzniak, (1999) se explorará la manera como ellos han sostenido estas reflexiones para el contexto de la enseñanza en Francia, para poder concluir algunas consideraciones relativas el caso colombiano.

3.1 Bkouche; el idoneísmo de Gonseth y el problema epistemológico de la demostración en geometría

El trabajo de Bkouche (1990) aporta sustento a la reflexión histórico-epistemológica sobre las fases de la esquematización de Gonseth. Lo que permitirá entender, en primer lugar, la representación del espacio intuitivo habitual; en segundo lugar, el espacio físico, cuyas propiedades son dadas por la experiencia y, en tercer lugar, los espacios abstractos, es decir, concepciones más generales que pueden deducirse del espacio intuitivo por abstracción y generalización. Estas conceptualizaciones le permitieron a Bkouche analizar algunas demostraciones en las cuales se apoyó Gonseth para fundamentar su reflexión filosófica sobre el problema del espacio (teorema de Euler, teorema hindú de Pitágoras y la proposición euclidiana de la perpendicular a la recta).

Bkouche (1996) abre su obra afirmando que "para saber, no es necesario saber cómo sabemos" (p. 1). Cabe resaltar que, de este modo comienza su abordaje de *Geometría y el Problema del Espacio*, escrito por Gonseth entre 1945 y 1955, con un doble objetivo epistemológico: por un lado, en cuanto a la contribución de Gonseth al problema de legitimación de la demostración; y, por otro lado, la didáctica (aquí la didáctica se ancla al problema del conocimiento en cuestión), en cuanto, al lugar de la demostración, en la enseñanza de las matemáticas (esta no debe confundirse con el problema de la enseñanza demostrativa, enseñanza que solo pueden abordar quienes ya tienen una práctica demostrativa).

3.1.1 Intuición, Experiencia y Teoría concebidas como tres tipos de conocimiento

Esta lectura se limita esencialmente a la demostración geométrica; un tema recurrente en la obra de Gonseth. Precisamente, porque, en los límites entre los diversos modos de entender las nociones espaciales, los tres niveles en el desarrollo del conocimiento planteados por Gonseth –intuitivo, experimental y teórico– se entrelazan en cada etapa de la construcción del conocimiento geométrico.

En el capítulo II de *Geometría y el Problema del Espacio*, Gonseth explica los diversos modos de aprehender el conocimiento geométrico. Su planteamiento es cercano al de Federigo Enriques definiendo –en un artículo titulado "The Principles of Geometry" publicado en la Encyclopedia of Mathematical Sciences que, según Bkouche (1990), manifiesta tres nociones de espacio– el espacio intuitivo habitual, es decir, la representación del espacio como lo concibe la mente humana; el espacio físico, cuyas propiedades son dadas por la experiencia; y los espacios abstractos, concepciones más generales que es posible deducir del espacio intuitivo, por abstracción o por generalización.

A continuación, el papel del problema de los distintos modos de aprehender el conocimiento geométrico lleva a Gonseth a definir los tres aspectos mencionados anteriormente: intuitivo, experimental y teórico; también estudia cómo encajan estos aspectos en el desarrollo de tres demostraciones: el teorema de Euler, demostración hindú del teorema de Pitágoras y la demostración de Bachelard del quinto postulado de Euclides.

3.1.2 Teorema de Euler

Anteriormente se trató a Gonseth focalizando la dimensión epistemológica de sus trabajos; ahora se enfoca especialmente lo que atañe a la enseñanza, en especial, su práctica de la demostración, para lo cual se ha decidido abordar el fascículo II del libro *La géométrie et le problème de l'espace* (1946). Bkouche (1990) analiza dicho texto, específicamente lo que se refiere al teorema de Euler; en el cual, la verificación no se completa sin la propiedad de conexión simple para poliedros.

Un poliedro es simplemente conexo si se determina como un objeto geométrico cuyas caras son planas y contiene un volumen finito, en el que, para cualquier par de puntos, el segmento que los une está contenido en él. Por ejemplo, en la geometría euclidiana, la triangulación funciona para calcular el área de un polígono que se divide en partes triangulares y, por ende, se verifica el siguiente enunciado:

Sean un poliedro cualquiera; s, el número de sus vértices; f, el número de sus caras; y a, el número de sus aristas. Se supone que se saben las definiciones; ¿cómo representar y cómo dividir una superficie poliédrica a lo largo de una arista o una línea formada por aristas sucesivas para que se verifique la ecuación 3.0?

$$S + f - a = 2 \qquad (3.0)$$

Para el caso de una pirámide triangular, que es un poliedro formado por cuatro caras incluida la base triangular y tres triángulos laterales, o sea: f = 4. Los vértices unen cada uno de los lados contiguos (s = 4), en donde coinciden las aristas (a = 6). Entonces, se cumple la relación (ver la ecuación 3.0) de la siguiente manera:

$$4 + 4 – 6 = 2$$

$$2 = 2$$

Ahora, lo anterior se realiza con un cubo, el cual es un poliedro formado por seis caras, dos de ellas son cuadrados y bases, junto con cuatro caras laterales cuadrangulares, o sea: f = 6; los vértices unen cada uno de los lados contiguos (s = 8); y coinciden las aristas (a = 12). Entonces, se cumple la ecuación 3.0:

$$8 + 6 – 12 = 2$$

$$2 = 2$$

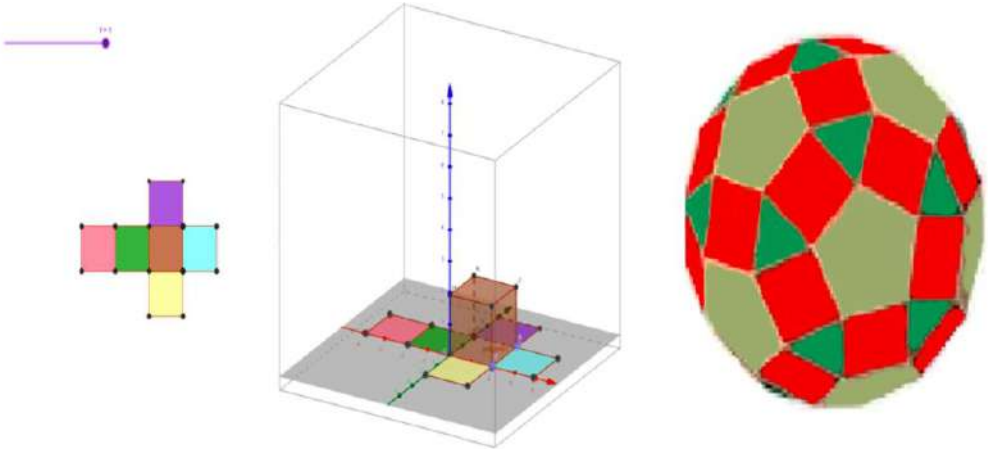
También es posible verificar el teorema de Euler en los balones de futbol. Uno de ellos tiene la forma del rombicosidodecaedro, con 62 caras (f = 62); entre ellas 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos, 120 aristas (a = 120), y 60 vértices (s = 60); por lo tanto, se cumple la ecuación 3.0:

$$60 + 62 – 120 = 2$$

$$2 = 2$$

En las cajas, entre otros, ver la figura 7. Ahora bien, para verificar la demostración del enunciado, se cuenta tanto con Gonseth (1946) como con Bkouche (1990), quienes comparten unos requisitos antes de realizar la demostración y la definición de los términos antes dichos:

Figura 7. *Construcción de una caja con un cubo y un balón con un rombicosidodecaedro*



La experiencia, según Gonseth (1946) depende de la posibilidad de materializar las definiciones o los enunciados abstractos mediante la fabricación de herramientas y las propiedades empíricas de estos objetos. Por lo tanto, mientras el primer autor quiere verificar el enunciado proponiendo la fórmula de Euler, con la notación s como número de vértices; a, de aristas; y f, de caras de un poliedro ordinario (simplemente conexo); el otro solo reconstruye la demostración y comenta el análisis epistemológico de Gonseth desde la perspectiva de la educación matemática.

La intuición, parafraseando a Gonseth (1946), indica cómo el conocimiento de un sujeto depende, de su determinada etapa de desarrollo; es decir, un sujeto construye su intuición de una fórmula desde una manifestación figurativa (los ejemplos de una pirámide triangular y el cubo) hasta llevarla a una forma abstracta (la ecuación 3.0).

La axiomática, en la perspectiva de Gonseth, es una organización lógica de las relaciones que existen entre los objetos, obtenidas a priori por la intuición; es decir, los dos autores prueban el enunciado a través de una secuencia lógica de premisas “p” implica “q”, siendo p la hipótesis y q la concusión. Así, se verifican los teoremas de la geometría que permiten tanto la práctica discursiva como plantear y resolver problemas específicamente

geométricos. Entonces, la lógica tanto en Gonseth como en Bkouche (1990) denota y organiza las ideas entre experiencia, intuición y axiomática; para poder acercarse al paso de cada aspecto, por ejemplo, si se quiere ir de **R** a **E**, es necesario expresarse mediante denotaciones y los pasos seguidos, de manera conjunta, en un lenguaje específico conocido como dialéctica.

Hay que tener en cuenta los conocimientos previos ejemplificando las concepciones de poliedro, cara, arista y vértice; de modo que, en el primer momento en que el pensamiento está determinado por la intuición del sentido común, por ejemplo, en el teorema de Euler, al comienzo de la fórmula esta se visualiza para objetos geométricos concretos, que modelan sus propiedades en dos y tres dimensiones, como la pirámide triangular, un cubo y un rombicosidodecaedro.

Obteniendo una experiencia que se acerca cognitivamente al sujeto, adquiere la fórmula válida a través de la manipulación empírica (no formal) de sus propiedades, en modelos materiales; pero, también, el pensamiento axiomático del sujeto se concreta cuando razona de manera lógica con cuantificadores y con expresiones algebraicas.

El sujeto dispone de una comprensión intuitiva, euclidiana, de las propiedades geométricas de los poliedros, como la conexidad de la superficie poliédrica. Por ende, al dividir una superficie poliédrica (F) en varias piezas poligonales, se obtiene la siguiente relación:

$$s + f - a = 1 \qquad (3.1)$$

La intuición se obtiene a través de los sentidos, tal y como, lo afirma Bkouche; ya que se forma un puente entre la experiencia y la intuición; por ejemplo, el balón motiva una idea sobre las partes que conforman dicho objeto geométrico que se forma con los triángulos,

los cuadrados y los pentágonos (superficies poligonales). Así, la intuición perceptual se evidencia por manipular aquellas superficies; adicional a lo anterior, se desea escalar a una intuición abstracta que no dependa de los sentidos sino de la mente; es decir, correspondiente al estado cognitivo en que el sujeto, partiendo de sus intuiciones y experiencias, comprende la validez general de las fórmulas y puede argumentar sobre ellas, en términos deductivos, utilizando, de manera apropiada, el simbolismo lógico. Por ejemplo, el cumplimiento de la fórmula de Euler en el cubo y la pirámide triangular.

La axiomática y la lógica se conservan, y dan un orden y garantizan la certeza de la prueba; al unir intuición-experiencia y axiomática-lógica, se procede a demostrar:

(1) *Construir la superficie del poliedro*. Simplemente se pegan las piezas. Se pueden presentar dos casos: el ensamblaje de las piezas no reconstituye el poliedro o el ensamblaje reconstituye el poliedro. Es posible recurrir a la representación, pero, en este caso, la idea es llegar a una mental y no física.

(2) Se tienen dos piezas, denotadas por s_1, f_1, a_1 y s_2, f_2, a_2; y el número respectivo de vértices, caras y aristas de cada una de las piezas, es decir:

$$s_2 + f_1 - a_2 = 1$$

$$s_2 + f_2 - a_2 = 1$$

Luego,

$$S_1 + s_2 + f_1 + f_2 - (a_1 + a_2) = 2$$

Nótese que:

$$F_1 + f_2 = f$$

$$S_1 + s_2 = s + S$$

$$A_1 + a_2 = a + A$$

s, f y a denotan los respectivos números de vértices, caras y aristas; S y A son, respectivamente, el número de vértices y el número de bordes de la línea, en la cual, son contiguos los polígonos. Así, el pegado de piezas se convierte en la operación suma obteniendo la siguiente ecuación:

$$s + f - a = 2 - (S - A) \qquad (3.2)$$

(3) Que el primer caso del paso (1), $S - A = 1$, implica la ecuación (3.1).

(4) Se verifica el segundo caso; los polígonos están contiguos, es decir: $S - A = 0$ y, por lo tanto, resulta la ecuación 3.0; lo que verifica que la demostración cumple con las condiciones del teorema.

Según el paso (1), para formar un puente de la intuición perceptual a la abstracta, se debe hacer que el sujeto entienda la lógica de la fórmula; primero, se pasa por una actividad preparatoria de la demostración, por ejemplo, la representación figurativa de la caja en forma de cubo (figura 7) para llegar a las denotaciones e ideas, y, así, obligar al sujeto a pensar en términos deductivos.

En el paso (2), la frase “pegar las piezas” se entiende en un mundo simbólico como la operación suma; entonces, si se forman ideas concretas y específicas que solo dependen de una intuición abstracta, se llega a lo axiomático (por ejemplo, el teorema de Euler).

En el paso (3), se llega a que la intuición es abstracta en el primer caso; ya que, si se observan, los dos autores exponen una expresión analítica de lo que es un polígono. La experiencia funciona como medio para llegar a la conclusión a través de la pregunta: si se corta todo en polígonos y luego se pega, y no se completa la figura, entonces, ¿qué es? Efectivamente es otro polígono; en donde el papel de lo axiomático y el de lo lógico son

fundamentales para ordenar la dialéctica en cada paso incluyendo la detonación y la sustitución.

Por último, en el paso (4), se puede notar que la intuición se vuelve abstracta; pues, se comprende que lo trabajado es una expresión analítica. Lo experimental, se desarrolla a través de las propiedades aritméticas, para transformar la ecuación, teniendo en cuenta que, del lenguaje natural al analítico, el pegado de las piezas se transforma en la operación suma (operaciones mentales). Por último, lo axiomático, se establece con dos pasos: la verificación de la fórmula en general (legitimidad de la operación) y la lógica, con la que cada paso queda organizado (legitimidad de la secuencia).

La legitimidad de cada operación está garantizada por el marco intuitivo, es decir, por las representaciones que se forman en la mente; en cuanto a la legitimidad de la secuencia, que Gonseth observa, no fue dada de antemano, se construye, al tiempo que la demostración, recurriendo al discurso, a las operaciones de corte mental y el marco intuitivo antes citado; es decir, la noción más o menos clara de poliedro. En resumen, según Bkouche (1990), la actividad teórica o axiomática se presenta como un experimento sobre eventualidades claramente concebidas; de manera que, la intuición sabe decidir cada vez si son compatibles o contradictorias, además, como todo esto está sujeto a las reglas del razonamiento, es decir, a las leyes que gobiernan sus combinaciones, entonces, en la demostración anterior, es el marco intuitivo el que asegura la validez del razonamiento. Sin embargo, se observa el papel de la lógica increíblemente reducido, solo como el de un policía de tráfico.

Este conocimiento axiomático (**A**) es creado gracias a los conocimientos del mundo real (**R**), la intuición (**I**) y la experiencia (**E**); por lo que, pasar del uno al otro es arduo y

complejo; pero, puede mediarse en este caso a través de una dialéctica deductiva, es decir, implica al sujeto moverse de un mundo en el cual está fundamentándose la comprensión del teorema de Euler, a la manipulación de un objeto físico en **R** como un balón o una caja; este movimiento está dado a través de la demostración obligando al sujeto a ir al mundo formal **A** pasando por **I**, porque, lo que antes intuía geométricamente ahora lo intuye con símbolos; así mismo, pasa por **E**, presentando un objeto físico y llevándolo a un mundo de fórmulas mediante operaciones algebraicas. Sin embargo, cuando el sujeto está en **A** (un mundo lógico formal), la intuición que ya se ha edificado ha avanzado y no es solamente figurativa, sino que es lógica; esto es, el pensamiento abstracto formal rompe con la intuición experimental, pero construye una nueva intuición.

Si el conocimiento intuitivo proporciona un marco para el pensamiento y la acción, resulta insuficiente, ya que no informa de su vigencia, según Bkouche (1990), la validez es menos verdad que la adecuación entre este conocimiento y nuestra relación con la realidad. Es decir, la adecuación es lo que Gonseth llama idoneidad (es posible compararla con el resultado de bucles de retroalimentación que convergen hacia una o más soluciones estables, cuando existen, cumpliendo con cuatro principios: apertura, pluralidad, compromiso e integridad), porque toma en cuenta tanto las limitaciones externas (¡lo real!) como la construcción de la realidad por parte de la mente humana, así, el papel del conocimiento experimental y del conocimiento teórico es construir la idea, tal y como se evidenció en la verificación del teorema de Euler.

3.1.3 Demostración hindú del teorema de Pitágoras

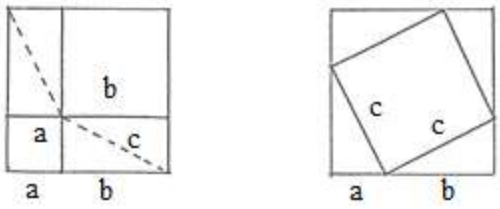
Se considera hindú por el matemático indio Bhaskara, quien nació en 1114 en Bijjada Bida cerca de las montañas de Sahyadri. Bijjada Bida es hoy conocido como Bijapur, en el

estado de Mysore, India. Murió en el año 1185, en Ujjain, India. Su padre fue astrónomo y le enseñó matemáticas; de lo cual, en uno de sus trabajos más importantes entre los problemas geométricos, aporta una demostración del teorema de Pitágoras; antes, los hindúes reconocían este teorema de manera geométrica por medio de desplazamientos y representaciones.

En 1936, planteando el problema de la legitimidad del enfoque deductivo, en *Matemáticas y realidad* (Capítulo XVII), Gonseth comenzó por estudiar el papel de la evidencia en esta legitimación. Recordando, así, la demostración hindú clásica del teorema de Pitágoras que se expondrá en tres pasos, y se enuncia así: "L'arie du carré construit sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égale à la Somme des aires des deux carrés construits sur les cathètes". (1936, 324)

(1) Ahora, se realizará la representación indicada en la figura 8, con base en el clásico método que se conoce como construcción con regla y compás.

Figura 8. *Esquema fundamental para realizar la demostración hindú del teorema de Pitágoras*



(2) Si se quitan del cuadrado izquierdo los cuatro triángulos rectángulos, de lado a, b y c, colocándolos en las posiciones del cuadrado del lado derecho de igual área, se evidencia que los triángulos se eliminan por poseer igual área quedando en el lado izquierdo el cuadrado de lado b y el otro de lado a que es igual al cuadrado de lado c.

(3) Sea Δ el área del triángulo de lados a, b y c; y, de acuerdo con la demostración hindú del teorema, se tiene que el área del cuadrado de la izquierda es $(a + b)^2 = a^2 + 4\Delta + b^2$

y el de la derecha es $(a + b)^2 = 4\Delta + c^2$. Por la propiedad de transitividad (si $y = x \wedge y = z \rightarrow x = z$), resulta $a^2 + 4\Delta + b^2 = 4\Delta + c^2$. Por lo tanto, si se resta a ambos lados 4Δ, por propiedad uniforme, se obtiene $a^2 + b^2 = c^2$.

Esta es la demostración lógica hindú del teorema de Pitágoras, de la que ahora se desarrollará una reflexión relativa a la educación matemática con la guía de Bkouche.

En el primer paso, la lógica apenas interviene, ya que esta demostración es empírica; luego se formaliza, al emplear la sintaxis algebraica, es decir, al plantearla a la manera de un razonamiento algebraico. El primer momento se da en la realidad (**R**) al representar y componer las áreas; luego, de una realidad empírica, a través de una intuición (**I**) y una experiencia (**E**), va a una abstracción, que es la construcción de lo teórico (**T**). De modo que los significados externos se mantienen en la intuición del sujeto, pero, luego lo transpone a un nivel abstracto (**T**) a través de un lenguaje de tipo simbólico; o sea que, no es solo una manipulación de regiones que se desplazan con ciertos movimientos, sino que se emplea un lenguaje algebraico. Entonces, es posible estudiar cómo proceden este paso del mundo **R** al mundo **T** y el que cumple la función **I** y **E**.

El segundo paso se basa en evidencias intuitivas, no es solo geométrica; es decir, se pasa de **R** a **I** cuando se depende de propiedades como superposición de figuras. De este modo, se recuerda la primera síntesis teórica que establece la construcción euclidiana y esta no escapa de **I**; en especial, la demostración de la proposición 4 del Libro I de los Elementos (el segundo caso de igualdad de triángulos), que consiste en mostrar la igualdad de los dos triángulos llevando uno de ellos sobre el otro, de tal manera que coincida, dejando claro que esta demostración tiene lugar completamente en los significados externos; recurriendo al conocimiento previo de los movimientos, de la invariancia de ángulos, distancias y áreas,

etc. Según Bkouche (1990), si los triángulos se volvieran demasiado grandes para que la realización de un desplazamiento se tornara prácticamente imposible, no obstante, se consideraría el diagrama de toda la operación como una garantía suficiente de la legitimidad del proceso mostrando el papel de los significados externos en la actividad demostrativa del matemático. O sea, la intuición de lo lógico en un área muy grande da a entender que se está pensando en cierto "para todo"; entonces, la demostración hindú no puede darse para algunos casos finitos que se puedan manipular en la página, si no se da para todo. Cabe resaltar que esta pregunta es reflexión propia de Bkouche y Gonseth con fines relativos a la enseñanza; ya que, hasta el momento, solo se supone que los hindúes antes de Bhaskara no tenían una idea intuitiva de que se cumplía para todas las áreas.

Por más empírica que sea la demostración, es preciso tener, de alguna manera, la convicción de que eso se cumple para todos aquellos objetos que no están en el papel; y lo que garantiza esta convicción, según Bkouche (1990), es que el diagrama se puede extender. Entonces, se pasa de una intuición con el papel a una mental; dando lugar a la garantía del "para todo". El diagrama es el dispositivo que permite pasar de unas dimensiones pequeñas a unas grandes para cumplir la condición de que la construcción sea demostrativa en términos generales y no particulares. La intuición de lo más abstracto está naciendo en un procedimiento empírico, emergiendo la lógica de este procedimiento. El razonamiento está haciendo una inducción porque de un caso particular en el papel, se vuelve en ese diagrama por una inducción en una imagen abstracta: un salto a la generalidad.

De la experiencia empírica, cortar en un cuadrado y pegar en el otro esos recortes, se llega por inferencia a una intuición diagramática abstracta. El diagrama ya no es el que se interpone allí para cortar y pegar, sino que se ve con los ojos de la mente; una intuición que

permite justificar que lo que se ha realizado con cuadrados pequeños puede garantizarse para todo cuadrado; es decir, que es una intuición que va de una experiencia geométrica concreta sobre el papel, con recortes, a una experiencia intuitiva que se realiza en el pensamiento (aún no es el teórico puro, ya que este nivel se desarrolla en lo algebraico). El significado externo, según Gonseth (1949), son los horizontes de realidades que van concatenados unos dentro de otros, cuya sustitución es el acto mismo del conocimiento. Está ligado a una operación empírica concreta, es algo que se vuelve igual por coincidencia por cortar y pegar. Mientras la experiencia intuitiva es mental, no responde a una acción empírica porque no puede hacerse para triángulos muy grandes; entonces, el paso de lo externo a lo intuitivo es a lo que se llamará "generalización o inducción". Salir de una acción con un referente significativo empírico concreto para pasar a la misma acción con una intuición ya más bien mental.

De la intuición mental y el diagrama mental se ha dicho que todavía no legitiman. Es necesario que lo lógico se exprese como forma simbólica y de manera consistente con propiedades aritméticas precisas; por ejemplo, las propiedades de la multiplicación o de la suma, y los axiomas aritméticos que garantizan la viabilidad lógica de esas operaciones. Antes, no había mundo de los símbolos; había mundo de construcción geométrica (cortar y pegar en un cuadrado que puede dibujarse en una hoja para pasar al diagrama que puede usarse para generalizar a todo tipo de cuadrado, independiente de que sea un área pequeña o grande). Y es posible preguntarse si esta es toda la demostración; pero, no: falta lo lógico, llegando lo simbólico, es decir, el álgebra a designar los objetos con símbolos. No se habla de cortar y pegar (superponer) sino que se comparan los dos cuadrados, por sus áreas, utilizando un lenguaje algebraico y unas reglas lógicas (reglas aritméticas que cumplen la

operación de sumar y la de multiplicar). Se soluciona así, en la expresión algebraica, en la composición y la recomposición que, en el fondo, es equivalencia algebraica; ya que lo que se ha empleado es la igualdad por superposición. Se han convertido construcciones geométricas en construcciones algebraicas; es decir, se ha pasado a la expresión a^2 que equivale a la expresión a * a sin, necesariamente, referirse a un cuadrado; sino solo a un producto de números. Lo mismo que con a + b, en donde a y b pasan a ser magnitudes, ya no líneas; y así sucesivamente.

En el tercer paso, como se mencionó antes, el sujeto (docente de matemáticas en formación o en ejercicio) realiza una construcción geométrica y se pregunta si es igual para áreas muy grandes; y comprende que sí, porque el diagrama se cumple para áreas pequeñas y también para grandes. Entonces, ese docente, o sus estudiantes, están adquiriendo evidencias de que el teorema es válido en términos generales. Así, la evidencia sería la verdad; según Bkouche 1990 (citando a Legendre), una de las funciones de la demostración es fabricar evidencias. Finalmente, llega –utilizando un lenguaje algebraico matemático de manipulación de signos– a una ecuación y ve que la general es un desarrollo lógico natural de un proceso constructivo (el teorema).

La experiencia y la representación intuitiva se van escalonando de acuerdo a evidencias; es decir, cada vez que se relacionan los datos geométricos con la expresión algebraica, se adquiere un alcance hacia el logro de la generalidad. Al igual que el conocimiento experimental, el conocimiento racional o teórico resulta del razonamiento; es decir, el conocimiento se adquiere realmente solo cuando se han modificado profundamente las concepciones de quien pasa a poseerlo (las bases de **I** y **E**).

Se observa que, al llevar el idoneísmo de Gonseth al extremo, se abre la posibilidad de decir que se sabe en el momento en que se ha olvidado cómo se sabe. Al demostrar un teorema, se ha comprendido; entonces, un poder de síntesis hace que lo anterior ya se olvide. Por ejemplo, el procedimiento experimental que se empleó con los hindúes, una vez se ha realizado –pasar la realidad a las áreas, cortar y pegar, tener una idea geométrica de lo que es el teorema por la representación– se llega la pregunta de si tal sistema de relaciones se cumple para toda área; se introduce, entonces, un cuantificador (un simbolismo) marcando un procedimiento dialéctico en el cual se pasa del uno al otro (la función cognitiva de generalizar). ¿Qué es lo que se está dando allí?: se pasa de un nivel de conocimiento a otro, de un nivel empírico a uno geométrico y, de ahí, a uno lógico; entonces el conocer (el saber) se concreta cuando luego de seguir adecuadamente los pasos, sin distraerse, sin cometer errores, al final de todo ese proceso idóneo, se sabrá y no se estarán recordando los pasos previos; porque ya se llegá a la comprensión lógica de este teorema que la provee: la expresión algebraica. Entonces, lo que interesa es que el estudiante comprenda que el teorema es válido para todo triángulo rectángulo que tiene como catetos a, b y c; es a lo que se quiere llegar, es el saber de tipo general.

De esta manera, el pensamiento matemático que se desarrolla en el estudiante sujeto, el conocimiento algebraico, no es ya la conformidad de una doctrina expresamente formulada, sino la permanencia de una técnica de demostración y deducción, las reglas que se adoptan mucho más siguiendo una práctica exigente que un análisis razonado, habiendo asimilado profundamente ciertos procedimientos y el espíritu con el que se van a implementar sintiéndose seguro de sus medios, para generar un pensamiento idóneo del teorema de Pitágoras que él sepa; el conocimiento algebraico resulta por la vía de la

demostración. Entonces, ya instalados en ese nivel de pensamiento del teorema, los niveles de pensamiento anteriores han estado integrados en los pasos siguientes ya no son válidos por sí mismos, porque el conocimiento válido es el pensamiento matemático abstracto, por cuanto se basa en la demostración lógica, no en la geométrica; por eso es que se olvida. Es decir, si el estudiante no logra hacer la demostración lógica, y solo alcanza a la geométrica, allí, el idoneísmo de Gonseth señala, algo ha fallado. Pero, según Bkouche (1990), el matemático no siente la necesidad de una teoría de la demostración; solo demuestra. El problema es explicar menos los fundamentos del conocimiento y más la comprensión del cómo se transforman, de los motivos de su cuestionamiento (¡crisis!) y las condiciones para definir y desarrollar nuevos conocimientos.

Si este matemático fuese el estudiante que se está formando para ser profesor o el estudiante en el aula, a quien el profesor, ya formado, le está dando a entender la prueba del teorema de Pitágoras, y ya ha realizado todo este esfuerzo de llegar a la construcción geométrica hasta llegar a la fórmula, y luego a la demostración del teorema; cuando se está haciendo la demostración lógica del teorema, no se siente la necesidad de hacerlo, sino que la lógica del procedimiento de pasar de **R** a **I** y **E** para llegar a **T** se ha vinculado al expositor y lo ha llevado, de una manera natural, a la demostración. Resulta como algo natural del proceso previo que la dialéctica se vislumbre como un resultado natural; de la relación entre la realidad, la intuición, la experiencia y la teoría; la lógica resulta como efecto natural. Un sujeto instalado en **T** haciendo la demostración del teorema lógico la hace de una manera natural a condición de que no se hable de lados de una medida sino que dice “a es el número que representa el lado”; a condición de que esa persona sepa sumar, es una suma de números, no una práctica de pegar cuadrados, que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$; al tener todo claro, hace

la demostración de una manera natural: está instaurado en un nivel lógico. La teoría de la demostración, así instaurada, justifica la capacidad de explicar que a es el signo que simboliza la longitud de un cateto, que + es la operación… De un paso se llega al otro paso. El estudiante no se sabe esta teoría, pero tiene la competencia para dar estos pasos. Que los signos de letras simbolizan magnitudes, que los signos de operaciones simbolizan sumas geométricas; que el signo de igualdad simboliza una congruencia; esta teoría el estudiante la sabe y no tiene necesidad de pensar mucho; lo hace naturalmente. Menos los fundamentos y más del cómo se transforman en virtud de las operaciones algebraicas; "si le quito cuatro delta a ambos lados, por la propiedad conmutativa de la igualdad, para transformar la ecuación a lo que quiero llegar"; se explica cómo se transforma. Los motivos de cuestionamiento: cuando no se llega al resultado, se produce una crisis: "no entiendo bien", "no llego", inquietud: "no cumplí cierta propiedad de la suma" o "¿qué fundamento no empleé?", "¿qué condiciones adecuadas no cumplí?", entre otros cuestionamientos. Se llega entonces a nuevos procedimientos. Está lo dialéctico, es decir, ese procedimiento idóneo que permite llegar a lo que se quiere encontrar; y que no se da de un solo golpe; cuyo desarrollo implica incurrir en errores, reconocerlos, pensar de nuevo y replantear el sistema de pasos a seguir.

Una vez que se comprenden los fundamentos, se pasa al discurso demostrativo: definiciones, postulados, axiomas y proposiciones primarias en que se sustenta ese discurso. Pero, como se ha notado, este discurso recurre a significados externos; a saber: el movimiento que permite el reconocimiento de la igualdad de figuras por superposición permitiendo el establecimiento de un razonamiento que olvida el movimiento como tal. Esta ocultación del movimiento a través de la enunciación de un principio que al mismo tiempo

se basa en el movimiento y permite librarse de él es un punto crucial en la construcción de la racionalidad griega y, según Bkouche (1990), es la primera construcción racional de una ciencia, en la medida en que, una vez formuladas las primeras proposiciones, el razonamiento depende solo de él conservando una base intuitiva irreductible, llegando a la conclusión de la demostración, queriendo lograr una autonomía de **T**. Pero, este problema de la autonomía de lo teórico está en el centro de la problemática gonsethiana, y Gonseth lo aborda en su primer trabajo: *The Foundations of Mathematics* (1926).

No se trata de rechazar los aspectos intuitivos y experimentales del conocimiento geométrico sino de ir más allá de ellos. Puede decirse que la geometría se constituyó en ciencia abstracta cuando, partiendo de nociones fundamentales (cuyo origen es experimental o intuitivo), se estableció posteriormente utilizando solo la deducción lógica y ya no tomando prestado de la intuición directa.

Parece que, en este primer trabajo, Gonseth pone al mismo nivel, en relación, a **T**, **I** y **E**. Se analizará con más detalle, más adelante, con el cuestionamiento sobre la naturaleza de los objetos de la geometría y la crítica de la demostración de la siguiente proposición: “Por un punto en una recta, pasa una sola perpendicular”. Demostración que atribuye a Blanchet en una reedición póstuma de los *Elementos de Geometría*. Cuando el sujeto está en la bola **T**, la intuición no es empírica; es abstracta. Por ejemplo, la construcción geométrica se cumple para áreas grandes; pero, no es empírica sino generalizada. Entonces, no puede darse esta intuición como un pensamiento empírico, es intuición directa.

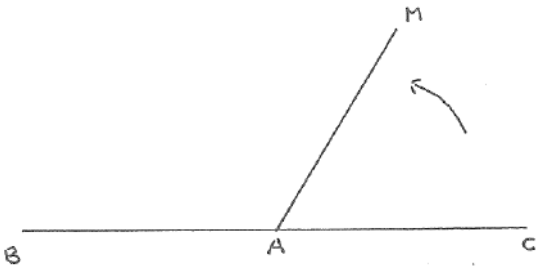
3.1.4 Por un punto en una recta, pasa una y solo una perpendicular: demostración por Blanchetón

El axioma “por un punto en una recta, pasa una sola perpendicular”, conocido como axioma de las paralelas de Euclides, sufre varias modificaciones para llegar a la compleja contribución de Legendre, la cual dio lugar a las geometrías no euclidianas. Durante veinte siglos, este axioma motivó un cuestionamiento a la consistencia del sistema de axiomas de Euclides: ¿el axioma de las paralelas es independiente de los demás? Muchos pensadores trataron de demostrarlo, a pesar de ser un principio inicial fundamento para toda una serie de axiomas y estar en la base del desarrollo de una teoría.

En un sistema de axiomas, para que un conjunto esté allí, se requieren varias condiciones: que cada axioma sea independiente de los demás, que no sea superfluo y que el número mínimo de axiomas sea suficiente, completo, que no falte ninguno.

Los *Elementos* de Euclides han experimentado diversas modificaciones; entre ellas la que en 1823 aportó el matemático francés Legendre (1752-1833); quién aportó también a la estadística, a la teoría de números, al análisis matemático y al álgebra abstracta. Luego, en 1848, Blanchet también modificó los *Elementos* de Euclides en la variación desarrollada por Legendre; en especial, la demostración de la proposición: “Por un punto en una recta, pasa una sola perpendicular”. La figura 9 guía la demostración que presenta Bkouche (1990) de la versión de Blanchet, que se expone a continuación:

Figura 9. *Representación de la demostración de Blanchet expuesta por Bkouche en 1990*



(1) Se considera una línea recta AM sobre AC que gira alrededor del punto A, formando dos ángulos adyacentes MAC y MAB.

(2) Si el ángulo MAB es mayor que el ángulo MAC, este disminuirá constantemente a cero; ya que el movimiento se realiza en sentido antihorario.

(3) Habrá una posición AM de la línea móvil donde los dos ángulos serán congruentes (la medida de estos ángulos es igual a 90°) y es obvio que solo habrá uno.

En el primer paso, como se sabe, la realidad empírica (**R**), se conoce cómo la construcción geométrica vive en un mundo euclidiano: son pedazos de área. Los hindúes trabajaron sobre la figura y llegaron a la construcción por experiencias empíricas, probablemente; pero, la esquematización se hace sobre la figura. La construcción de movimiento se forma por la construcción geométrica que es compleja; es un esquema mental y elaborado según lo que se quiere demostrar; la flecha indica movimiento, una acción física de desplazamiento; se tiene la intención de desarrollar la argumentación demostrativa, es decir, de orientar la primera demostración y no la física.

Lo intuitivo (es una intencionalidad que está relacionada con la representación) está, primero, en la construcción geométrica; ya que la construcción se ha realizado con una intención. En este nivel, como lo decía Gonseth, la flecha va de **I** a **T**; se trata de acercarse a partir de la experiencia, para, después, realizar una serie de pasos argumentativos que conducen a la prueba. La organización de ángulos que hay en el esquema constructivo no se ha hecho arbitrariamente; sino con una intención específica de hacer una prueba. La intuición toma lo dado y le da una organización geométrica que permitirá desplegar una argumentación lógica: de **I** a **T**. Las transformaciones son lógicas; el razonamiento se mueve hacia un terreno no euclidiano, para pasar, así, a otro tipo de geometrías; las no euclidianas.

Nótese que el conocimiento intuitivo (**I**) está entre el perceptual y el mental; ya que la realidad (**R**) va siendo esquematizada por la figura; entonces, es indispensable para el entendimiento de la demostración. Además, los conocimientos previos (como las definiciones de recta, ángulo y movimiento) hacen posible una relación entre la teoría (**T**), (**I)** y la experiencia (**E**); puesto que, quien realiza esta demostración, bien sea un estudiante en formación para docente de matemática o el mismo profesor de matemáticas que se confronta a la demostración, no recurre a una búsqueda de situaciones empíricas para entender esta realidad abstracta y esquematizada teniendo en cuenta el papel de la lógica como denotación y cuantificadores respecto al movimiento de la recta que se verá más adelante.

En el segundo paso, el movimiento trae consigo el problema del infinito y la continuidad (Bkouche); el problema de Aristóteles y el del continuo. Si el desplazamiento de este segmento, con sus ángulos adyacentes, es o no continuo, ¿cómo garantizar las infinitas posiciones desde lo perpendicular a las diferentes posiciones de los ángulos?

La experiencia del movimiento hará que no haya vacíos para que no haya ninguna posición que no se cubra y, si este concepto filosófico no está resuelto, resultará muy difícil. La intuición plantea la duda de si pasa por todas las posiciones; ya que, la cultura previa de Aristóteles siempre lo planteó. La relación de orden entre los ángulos, del nivel de la construcción geométrica al nivel lógico de la proposición; paradojas como las de Zenón (confusión mental) que surgen entre los años 490 y 430 a. c., cuando un gladiador se quiere acercar a una tortuga que está a un paso de él pero, antes de llegar a ella tiene que pasar por el punto medio de su distancia y, antes de llegar a ese punto, tiene que pasar por el punto medio de los dos, y así sucesivamente hasta concluir que ha de dar infinitos pasos para llegar

a la tortuga y, por ende, no se desplazaría; pero, esta paradoja produjo grandes avances como la versión épsilon-delta de Weierstrass y Cauchy desarrolló una formulación rigurosa de la lógica y del cálculo involucrados.

En este trabajo no se estudiará la paradoja a profundidad, solo se dirá que el sujeto (sea docente en ejercicio o en formación) entiende el movimiento de la recta, de modo que sabe que, al moverse, ya no estará en la posición anterior; avanzara. Por ende, **E**, **T** e **I** permiten concluir que el movimiento de la recta suceda y que el ángulo disminuirá constantemente a cero resaltando que la dialéctica constituye un puente de comunicación entre las dos. Por ejemplo, si se está en **E**, con el desplazamiento, la interpretación que puede darse es por medio de **I**; pero, se transforma mediante un lenguaje que transmite una acción mental a una generalización.

En el tercer paso, la representación juega un papel muy importante; a lo que Gonseth (1986) llama esquematización, la cual establece un mapa. Sin siquiera una aproximación de ese mapa, el enfoque sería imposible o equivaldría a una prueba y error ineficaz. Primero, la figura 9 es un elemento esencial del razonamiento; ya sea que la figura esté realmente dibujada o que sea imaginada; sin esta figura, el discurso de la manifestación pierde todo sentido. Esto se debe a que se razona en lo sensible y no en abstracto; por ende, el aspecto experimental predomina a través del movimiento. Sin embargo, Bkouche (1990) critica en Gonseth que no dude de que hay un razonamiento; es decir, la intervención de lo teórico. Un razonamiento marcado al mismo tiempo por la intención de mostrar que existe una posición de la línea AM, tal que los ángulos MAB y MAC sean congruentes; y, por el método basado en el uso del movimiento (pero aquí es donde radica el problema). En este sentido, esta demostración no es euclidiana; menos por la referencia a la figura (es una figura

basada en los geómetras griegos) como por el uso efectivo del movimiento. Por lo tanto, la demostración de Blanchet sería un experimento físicamente alcanzable y, para Gonseth, proviene de una geometría experimental, la hermana mayor de la física experimental.

En resumen, lo que un docente en ejercicio o en formación ha de tener en cuenta principalmente es la dialéctica, porque vincula los conocimientos **R**, **I**, **E**, **T** y **A** siendo recursos para cada uno. Sin embargo, en el establecimiento del discurso teórico, no puede encontrar certeza; en la medida en que el conocimiento, al progresar, las cuestiona. Incluso los datos inmediatos (lo obvio); es este cuestionamiento el que plantea el problema de cómo se llega a saber: la necesidad de volver a desprenderse de lo empírico. Para darle una solución desde una teórica autónoma, una racionalidad pura que puede encontrar tanto conocimiento como las condiciones de conocimiento, tal y como el problema se deriva en redefinir las condiciones de legitimidad del razonamiento y, según Gonseth (1945-1955), esta reconstrucción será garantizada por el método axiomático como lo desarrolló Hilbert.

El método axiomático, redefiniendo las condiciones de razonamiento, tuvo que permitir el establecimiento teórico que puede finalmente desarrollarse de manera puramente deductiva dejando la oscuridad de la intuición euclidiana, pero requería tres puntos. i. Definir los términos originales sin ninguna referencia al significado de estos. ii. Enunciar las relaciones primitivas (axiomas) sin ninguna referencia al conocimiento intuitivo o experimental. iii. Por último, explicar las reglas del razonamiento; es decir, dar cierto orden al trabajo de Euclides para compensar algunos errores, como el quinto postulado (por un punto solo pasa una paralela a una recta). En consecuencia, la legitimidad de un nuevo conocimiento se da mediante un encajonamiento entre **I**, **E** y **T**; es decir, cada vez que se

avanza, se aprende y se experimenta un acercamiento a una generalidad que fundamenta la axiomática (**A**), para que sea posible alcanzar este nuevo saber.

3.1.5 Conclusiones

Al estudiar el trabajo de Bkouche (1990) sobre la enseñanza de la geometría y la formación de profesores a partir de las concepciones de Gonseth, en especial, sobre el tema de las demostraciones, se cumple el doble objetivo. Por un lado, se desarrolla la filosofía de Gonseth basándose en el trabajo de los orígenes de la geometría y el problema del espacio; además, se observa que, para saber, es necesario avanzar a partir del conocimiento con el que se cuenta y, una vez que se esté en un nivel algebraico, o medio alto, no se tiene la necesidad de devolverse cada vez que se afronta un problema similar.

En cuanto a la enseñanza –que trasciende al estudiante en formación, como se comprende al analizar la realización de demostraciones geométricas en la trasmisión profesional del conocimiento–, este estudio ha permitido observar cómo el uso de los esquemas, de los recortes de papel, de los dibujos y de conocimientos teóricos previos puede articularse para orientar e implementar una demostración logrando desarrollar su sentido y, en última instancia, dando lugar a su comprensión.

Bkouche (1990), al comentar a Gonseth, conduce a construir un conocimiento a partir de otro conocimiento dado siguiendo los principios de apertura, pluralidad, tecnicismo e integridad, lo que aportó una orientación para comprender el idoneísmo, en su sentido epistemológico; para lo cual, describió la manera como Gonseth expuso sus ideas sobre los orígenes de la geometría y el problema del espacio entre 1945 y 1955.

3.2 Houdoment y Kuzniak: el problema del espacio en Gonseth y sus aportes a la enseñanza de la geometría y a la formación de maestros

Para reflexionar sobre la aplicación de las ideas de Gonseth a la enseñanza de la geometría, se estudian ahora dos aspectos del trabajo realizado por Houdement y Kuzniak (1999). Por una parte, las diferentes maneras de conocer la geometría, vinculadas a los niveles concebidos y analizados a partir del encuadre idoneísta de Gonseth –experiencia, intuición y teoría–: geometría natural, geometría axiomática natural y geometría axiomática formalista. Se consideran las variaciones en el currículo y en la enseñanza de estas modalidades del conocimiento de la geometría entre la escuela y la secundaria, y, luego, entre la secundaria y la universidad.

Por otra parte, en un estudio de caso sobre la formación de profesores en la IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maîtres), los autores analizan la fuente de malentendidos pedagógicos que resultan de un manejo inadecuado de estas modalidades por parte de los estudiantes que se están formando como profesores. Este estudio se espera que pueda aplicarse al caso colombiano.

3.2.1 Consideraciones de los autores sobre el enfoque de Gonseth en el problema del conocimiento geométrico

En la perspectiva pedagógica de este estudio, es importante comprender la evolución y las relaciones existentes entre la geometría y la realidad. Para un sujeto que aprende geometría, esta articulación requiere una mejor definición de los tres modos de conocimiento del espacio que constituyen la intuición, la experiencia y la deducción. Para precisar el significado que se atribuye a estos tres términos se revisan estas expresiones, luego se desarrolla una síntesis que resulta de una adaptación al tema estudiado en la obra de Gonseth.

La intuición parece ser fundamental en el acercamiento a la geometría. Pero la primera vergüenza que se experimenta al enfatizarla resulta de la dificultad para definir con precisión lo que este término abarca; debido a que proviene de diferentes campos del conocimiento, como la lógica o la psicología. Se seguirá, entonces, a Gonseth (1945-1955) cuando adopta la idea kantiana de la "forma intuitiva" como forma de conocimiento. La intuición aparece, así, como el receptáculo interpretativo de sensaciones que estructura el pensamiento en términos de evidencia. Entonces, la intuición puede caracterizarse como el contacto inmediato, directo y concreto con su objeto; pero, según Houdoment y Kuzniak (1999), este contacto directo logra el entendimiento más íntimo con su objeto, dándole alcance en su esencia y en su singularidad.

En la concepción que en este trabajo se desarrolla, la intuición puede evolucionar con el estudiante en formación o con el docente de matemáticas por efecto de un conjunto de experiencias y, por tanto, de conocimientos *a posteriori*. La contradicción es solo aparente, al verse la intuición estructurada a nivel del individuo en un conjunto de capas que se superponen y llevan a olvidar las primeras intuiciones. Algunos de estos estratos serían comunes a todo individuo; es trabajo de los psicólogos sacarlos a la luz (teoría de etapas), otros dependerían de la práctica de la asignatura y dependerían del pasado escolar o profesional. La experiencia permite acercarse a la geometría sin dejar de estar cerca de la acción y de una determinada realidad física; la naturaleza de la experiencia geométrica dependerá de los objetos sobre los que se ejerza.

Así, en un primer caso, según Houdoment y Kuzniak (1999), para hacer un experimento en geometría, se intentará verificar materialmente lo que se avanza. Se mostrará, por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un ángulo

plano al acercar las plantillas a los tres ángulos del triángulo; se verá más adelante con la actividad del texto escolar CE2 empleado en Francia. Las construcciones de plegado, corte y regla y compás forman la base de este enfoque experimental que ya puede desarrollarse en la escuela. Este enfoque se desarrolla en un espacio medible, gracias a la percepción o a los instrumentos.

A los medios tradicionales de experimentación se suman ahora las posibilidades que ofrecen los ordenadores con cierto software como Cabri, Géometre o Logo. Simulaciones que operan sobre objetos virtuales que identifican los autores por medio de encuestas a docentes y que no se profundizaran en el trabajo de grado. Sin embargo, se dirá que gracias a estas herramientas Houdoment y Kuzniak logran descubrir ciertas intersecciones de líneas, ciertas alineaciones de puntos o lugares geométricos; los fractales son la "ilustración de moda" de este vínculo entre geometría y experiencia a través de la simulación.

La experiencia tiene un papel fundamental en la configuración de las intuiciones porque, en determinadas circunstancias, configura expectativas estables. Esto no significa que exista, en matemáticas, una relación única que iría de la experiencia a la intuición. Según Houdoment y Kuzniak (1999), en algunos casos, un experimento construido sobre el razonamiento lleva a la intuición debidamente (en geometría no euclidiana o en funciones continuas no derivables). Esta experiencia es, entonces, la fuente de nuevas intuiciones en un nuevo paradigma.

La deducción según Houdoment y Kuzniak (1999, citando a Oleron), puede definirse diciendo que permite obtener nueva información a partir de la ya adquirida, sin recurrir a la experiencia ni a ninguna otra fuente externa. Se basa en el razonamiento y permite

reorganizar los aportes de la experiencia. Se usó la palabra “deducción”; pero, el uso que se hace de ella es más amplio, más cercano al “razonamiento” como un todo.

El polo deductivo y lógico es muy importante cuando se piensa en geometría. Algunos justifican mantener su enseñanza por las contribuciones lógicas que se supone que aporta. Pero, es importante no reducir estos aspectos deductivos a la demostración basada en axiomas bien definidos y en número reducido. El niño también puede hacer deducciones y probar afirmaciones deducidas de sus observaciones y basadas en construcciones. Las figuras se convierten, así, en el soporte adaptado para orientar la intuición; pero ya no son suficientes para demostrarlo. Se ilustrará este punto de vista más adelante.

La síntesis que realizan Houdoment y Kuzniak (1999), con base en Gonseth y su obra sobre *Los orígenes de la geometría y el problema del espacio*, ofrece tres síntesis dialécticas de la geometría que reorganizan y articulan las relaciones entre intuición, experiencia y deducción. Ellos tomaron su idea y la transformaron para adaptarla a la asignatura que concierne a la enseñanza y a la formación de maestros.

Por lo tanto, proponen una visión unificadora de la geometría gracias a la idea de una síntesis dialéctica en evolución entre varios polos. Este punto de vista resulta fundamental en una perspectiva de formación docente. La geometría debe contener los tres polos: intuición, experiencia y deducción; hay malestar, si se pierde uno de los polos: ejemplo, hipertrofia del polo deductivo.

3.2.2 Consideraciones sobre la geometría natural, la geometría axiomática natural y la geometría axiomática formalista

Con el desarrollo de los tres polos, también Houdoment y Kzniak (1999) exponen las tres modalidades del conocimiento de la Geometría que ellos integran en el modelo que

proponen: geometría natural (I), geometría axiomática natural (II) y geometría axiomática formalista (III), las cuales se exponen a continuación.

La geometría natural –o la confusión entre geometría y realidad– tiene como fuente de validación la realidad, lo sensible; incluye los tres aspectos, intuición, experiencia, deducción, pero, la deducción se ejerce principalmente sobre los objetos materiales con la ayuda de la percepción y la manipulación de instrumentos. En este sentido, la geometría de Euclides no es natural; es más bien el entorno en el cual la deducción puede vincularse a un experimento mecánico evitando estorbar la mente con demostraciones de cosas obvias. Además de los experimentos físicos, existe también un tipo intermedio de razonamiento que se ilustra con la "prueba" que se hace del siguiente teorema, recordando a Bachelard:

Por un punto tomado en una línea, puede levantarse una y solo una perpendicular a dicha línea.

Como se sabe, la figura 9 ilustra este razonamiento: la línea AM interceptada en AC gira alrededor del punto A. El ángulo MAC inicialmente pequeño se vuelve grande a diferencia de su ángulo adyacente MAB que se vuelve pequeño para llegar a 0. Por lo tanto, el ángulo MAC inicialmente menor que MAB se vuelve mayor que este ángulo; en consecuencia, habrá una posición AM de la línea móvil donde estos dos ángulos serán iguales y es obvio que solo habrá uno.

No se trata aquí de una demostración matemática clásica (una serie de silogismos concatenados con rigor y continuidad), es una demostración articulada sobre el mundo sensible, y no sobre la pura deducción lógica y abstracta que invoca la experiencia mental del mundo sensible. En este sentido, aparece la posibilidad de una 'geometría experimental'.

Esta demostración dinámica no cae en el dominio habitual de la geometría de Euclides, pero, por otro lado, parece muy cercana a la percepción del espacio por parte del niño.

En la geometría axiomática natural, gracias a la síntesis axiomática euclidiana, los aspectos "no rigurosos" y las apelaciones a la intuición del espacio dan paso a la deducción lógica y a la prueba en un sistema axiomático lo más preciso posible. Según Houdoment y Kuzniak (1999), la axiomatización es una formalización que no es necesariamente formal; la sintaxis no está aislada de la semántica basándose en la segunda síntesis dialéctica que propone una geometría que no se reduce a lo natural, sino que combina las nociones de horizonte de realidad, de diagrama y de modelo.

Esta geometría no pretende ser geometría natural, que sea la realidad; aspira a ser un esquema de la realidad. La singular fábula del bosque, descrita por Gonseth (1945-1955): una llanura está cubierta por un bosque bastante denso, pero sus árboles están distribuidos irregularmente. En algún lugar dentro del bosque hay un claro y, en este claro, una gran bola. Hay que rodarlo hasta cualquier punto del borde. En lugar de hacer rodar la bola y empujarla al azar, es posible pasar por el intermedio de un diagrama en una hoja donde los puntos representarán los árboles. Los colores indicarán los segmentos prohibidos para el paso de la bola (distancia entre los árboles menores que el diámetro de la bola). El problema puede entonces resolverse (en la mesa) gracias a las indicaciones dadas en el diagrama. La geometría euclidiana clásica se basa en esta línea, pero, todo el esfuerzo de esquematización se oculta y permanece implícito sobre todo conforme se realizan las demostraciones por medio de definiciones, axiomas y teoremas.

En contraste con la geometría axiomática formalista, esta vez, tras la aparición de geometrías no euclidianas, se corta el cordón umbilical que unía geometría y realidad. Los axiomas ya no se basan en lo sensible y se impone la primacía del razonamiento lógico.

Según Houdoment y Kuzniak (1999), en la docencia, este diseño permitió introducir una geometría elemental basada en el álgebra lineal cuyo espacio subyacente es el espacio D3 dotado de un producto escalar.

3.2.3 Ejemplos ilustrativos

Houdoment y Kuzniak (1999) para ilustrar su modelo, se apoyan en algunos ejemplos elegidos voluntariamente de todos los niveles educativos en Francia.

Desde la escuela primaria, es posible encontrar ejemplos de situaciones geométricas concretando el enfoque de la intuición y, en particular, para diferenciarlo de la percepción. El extracto del libro de texto escolar CE2, para estudiantes de 8 años, que exponen Houdoment y Kuzniak (1999) proporciona un ejemplo de una actividad que requiere una fuerte intuición. En la primera pregunta, los autores piden a los estudiantes que identifiquen, entre diseños muy complejos de kirigami de papel chinos, los que se obtienen al doblar y cortar. Sin embargo, esta identificación solo puede referirse a un conocimiento a priori del efecto de doblar y cortar en una hoja de papel; no puede bastar con una sola percepción, se requiere lo que se llama una fuerte intuición. Esta no es innata, puede ser el resultado de experiencias previas en este tipo de objeto. Además, la pregunta dos brinda la experiencia que se reinvierte en la última pregunta; donde, los alumnos deben comparar el resultado de su división con su representación incompleta. La actividad, tal como se propone, proviene primero de la intuición, luego de la experiencia que pudo haber forjado esta intuición.

Por tanto, se ve aquí que la intuición no se reduce necesariamente a una aprehensión inmediata de la forma; que puede resultar de una experiencia previa que habría dejado una huella. El ejemplo que acaba de estudiarse tiene lugar en Geometría I, pero se amplía esta visión de la intuición a otras geometrías y, según Houdoment y Kuzniak (1999, citan a Arsac, 1997) puede concluirse que una educación en geometría debe resultar, en particular, en una educación de la intuición; que, por lo tanto, no puede considerarse como una consecuencia de la percepción únicamente.

En un manual escolar francés para CM2 19, destinado a estudiantes de 10 años, con motivo de revisiones sobre triángulos, los autores piden a los estudiantes que construyan todos los triángulos posibles yuxtaponiendo tres pajitas entre pajillas de tres longitudes fijas. (4 cm, 5,5 cm y 8 cm). Esta actividad ofrece una experiencia en el marco de la Geometría I, ya que se sitúa completamente en el mundo físico; los estudiantes podrían ver que no todas las combinaciones sugeridas son posibles. Por consiguiente, el experimento permite concluir en la imposibilidad de montar, en todos los casos, un triángulo a partir de tres pajitas, y esto se relaciona con las longitudes elegidas por el maestro para las pajitas.

Es posible explicar, con los alumnos, las razones de esta imposibilidad; no funciona porque es demasiado corto, porque las pajitas no se unen. A condición de hacer el paso de las pajitas a las longitudes, los alumnos pueden extraer de la experiencia un comienzo de explicación del proceso de no construcción de un triángulo dado por las longitudes de tres lados y que no siempre puede construirse un triángulo de tres longitudes fijas. Inclusive pueden llegar a explicar en qué casos no es posible la construcción, si una de las longitudes es mayor que la suma de las otras dos.

Pues bien, este es el objetivo de la guía ya que finaliza la actividad con el siguiente enunciado: “Concluya que, para construir un triángulo, la dimensión mayor debe ser menor que la suma de las otras dos”. Pero esta fase corresponde a lo que se llamó un aspecto deductivo de la geometría I; no es algo automático en el alumno, conduce a la generalización del proceso de construcción de triángulos para poder construir uno. A partir de tres longitudes fijas, es necesario que cada una de las tres longitudes (o la mayor) sea menor que la suma de las otras dos.

El papel del maestro es fundamental para llegar a esta conclusión, que es mucho más rica que la observación inicial que se había dicho antes. Los alumnos generalmente no son capaces de inducir esta generalización por sí mismos; así, en la escuela primaria, la experiencia y la deducción se encuentran, a menudo, ligadas al docente jugando un papel fundamental en la transición de la experiencia a la deducción.

La actividad anterior, tal como se ofrece en CM2, es en geometría I. Sin embargo, el paso de la experiencia de construir triángulos con pajitas al proceso absoluto de existencia de triángulos desde tres longitudes arbitrarias da sentido al axioma del camino más corto, que se ubica en la geometría axiomática, II. Se enfrenta aquí un posible proceso de elaboración de un axioma de geometría axiomática, II; a partir de la geometría natural, la experiencia da lugar a un cuestionamiento que permite deducir el enunciado desde el camino más corto. Esta declaración se convierte en un punto de partida en geometría II en la siguiente forma:

Si A, B y C son tres puntos del plano, siempre se verifica la siguiente desigualdad: $AB < AC + CB$. Este mismo diseño triangular da lugar a una nueva interpretación en

geometría III. En efecto, de la desigualdad triangular se deriva, en la geometría III, una nueva propiedad, esta vez vinculada a los vectores:

Si A, B y C son tres puntos del plano, los tres vectores que generan satisfacen la propiedad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Aparecen, así, tres interpretaciones geométricas diferentes de un mismo dibujo, estando estas interpretaciones situadas en los tres paradigmas diferentes, los cuales resultan de los tres niveles (en el modelo de Gonseth) o modalidades (en la adecuación de Houdoment y Kuzniak) del aprendizaje de la geometría.

En geometría I, el dibujo se lee en primer grado: el dibujo es objeto de estudio y se valoran sus logros concretos. En geometría II, el dibujo ya no prueba la existencia efectiva del triángulo que ahora está validado por un axioma. El dibujo ya no es un objeto de estudio, es solo el soporte de objetos construidos sobre lo sensible, los segmentos, cuyas propiedades contiene bastante bien (rectitud y longitud). En geometría III, el dibujo ilustra una relación entre objetos virtuales, los vectores, y permite emitir conjeturas que deberán ser validadas por las reglas algebraicas relacionadas con los vectores. Entonces, según Houdoment y Kuzniak (1999), el dibujo ya no se interpreta de la misma manera; ahora tiene una dirección, un significado, una longitud; es el representante de una clase de objetos que ya no son materializables.

Por tanto, las tres modalidades que toma la geometría en el proceso de su aprendizaje ponen en juego una relación diferente entre objeto geométrico y diseño. En geometría I conviven dos tipos de objetos físicos: el objeto material en tres dimensiones (aquí las pajitas) y la representación de este objeto en la hoja de papel. El dibujo no tiene el estatus de "concepto figurativo", es solo una imagen. En geometría II, el único objeto físico es el dibujo, pero un dibujo controlado por su definición, aunque puede estar inspirado en un

objeto real. En geometría III, el dibujo queda bien bajo el control de la definición, pero es sobre todo la representación esquemática de un objeto teórico y un posible soporte para el razonamiento. Estos diversos roles del dibujo ilustran bien la evolución del estado del objeto geométrico que Houdement y Kuzniak (1999, cita a Tall, 1995) señalan como crucial en el paso del pensamiento matemático elemental al avanzado. Este paso, en particular en el ejemplo de los triángulos del manual, de una problemática de geometría I a una problemática de geometría II, no es automático, ni fácil. La construcción de situaciones didácticas de pasaje constituye todo un tema de investigación.

3.2.4 Conclusiones

En su estudio sobre la enseñanza de la geometría y la formación de profesores a partir de las concepciones de Gonseth, Houdement y Kuzniak (1999) realizan una entrevista cuyos resultados no aportan a este trabajo de grado en el que se prioriza el tema de la enseñanza en sí y no la manera como sus entrevistados la entienden. Si bien, con base en Bkouche (1990), es posible precisar que el idoneísmo, en tanto enfoque filosófico, se cumple bajo unas condiciones necesarias: los principios de apertura, pluralidad, tecnicismo e integridad; Houdoment y Kuzniak (1999), en cambio, se limitan a realizar, de estos principios, una síntesis propia. Esto resulta interesante para investigaciones futuras, considerando la enseñanza de la geometría en diferentes niveles: desde la escuela primaria hasta la formación del profesorado; lo que llevaría a estudiar sobre el caso particular de la geometría, al cierre de una especie de ciclo de enseñanza.

Algunas preguntas con las que concluyen Houdoment y Kuzniak (1999) pueden parafrasearse para adecuarse al contexto colombiano: ¿Cómo pueden prepararse, en las Facultades de Educación o Pedagogía para enseñar geometría que se ha tenido que olvidar

o reprimir para poder estudiarla? ¿Cómo dar a cada nivel se comprensión de la geometría su especificidad y su razón de ser? Esta aproximación a la geometría estructurada en torno a tres modos de conocimiento idénticos pero evolucionando en el tiempo puede constituir una fuente de esclarecimiento para los futuros profesores; además de preguntarse lo mismo para el caso colombiano, lo cual motivaría próximos trabajos.

Se han definido tres modalidades de comprensión de la geometría: geometría natural (geometría I), geometría axiomática natural (geometría II) y geometría formalista axiomática (geometría III). Esta última, probablemente, debido al nivel de la educación que estudiaron Houdoment y Kuzniak, ha quedado en un segundo plano y será necesario verificar su relevancia a nivel de los estudiantes de secundaria y sus docentes, si es que ya no existen trabajos al respecto. Por consiguiente, se mantienen las mismas entradas en cada una de las tres maneras de conocer la geometría: intuición, experiencia, deducción. Si bien los significados vinculados a cada una de estas expresiones aún necesitan ser refinados, parecen permitir dar cierta coherencia al conjunto de la geometría y, simultáneamente, un significado a la noción de ruptura o variación.

Houdoment y Kuzniak (1999) indican que algunas de sus preguntas quedan sin respuesta: ¿incluso, si se admite la relevancia de la síntesis aquí expuesta, este marco permite dar una coherencia real de geometría a la escuela (antes de los 12 años)?, ¿realmente promueve la articulación entre los diferentes ciclos de enseñanza?; finalmente: ¿cómo concienciar a los futuros profesores de este enfoque de la geometría y de su enseñanza?

La única respuesta que, de momento, puede plantearse desde la experiencia, desde este trabajo realizado por un docente en formación de la Universidad del Valle Colombia, es incentivar, con este trabajo mismo, la realización de otras investigaciones al respecto,

para construir una educación con buenos fundamentos; en particular, en el campo de la geometría. De darse este ideal, se lograrían resultados significativos, tanto el presente como para el futuro.

4. Recomendaciones

Las recomendaciones particulares se pueden deducir en cada uno de las conclusiones de los capítulos, de modo que en esta sección se darán las recomendaciones generales del trabajo. En este estudio observamos la importancia de la filosofía de Gonseth sobre el espacio geométrico y las aplicaciones que Bkouche, Houdement y Kuzniak le dan a esa geometría a la enseñanza. Una de las recomendaciones es que el objetivo general de este trabajo se mantenga en estudio de los profesores del país en las licenciaturas en matemáticas. Además, de los objetivos específicos, es necesario leer otros trabajos de quienes estén interesados en el idoneísmo y sus aplicaciones a la enseñanza ya que aquí solo presentamos algunos autores y mis consideraciones al respecto.

La relación entre las concepciones epistemológicas sobre el espacio geométrico desarrolladas por Gonseth y su postura filosófica denominada idoneísmo, estudiada desde una mirada histórica – epistemológica – filosófica (con la ayuda de Panza en la guía de la concatenación de ideas de Gonseth, por su escritura tan compleja) se logra desarrollar algunas de sus aplicaciones a la enseñanza de la geometría para el caso de Francia; tanto en la demostración con Bkouche (ver página 78) como Houdement y Kuzniak en los problemas referentes a la formación de profesores el hecho que no se sitúen los actores como alumnos, alumnos en formación docente y docentes en ejercicio convenientemente en los paradigmas que corresponden de la enseñanza de la geometría (ver página 89) para formular algunas consideraciones en Colombia.

Los paradigmas en los que se plantean los problemas o las respuestas esperadas no son explícitos, lo que puede dar lugar a malos entendidos; esto no muestra la importancia de adelantar estudios y proyectos de investigación sobre la claridad de qué tipo de

problemas corresponden a qué tipo de geometría. Como el caso de los tres autores (Bkouche, Houdemet y Kuzniak), hay que realizar cosas parecidas.

Un enfoque estructurado en torno a los tres modos de conocimiento definidos anteriormente debería permitir a los docentes enriquecer su propia concepción de la geometría y compararla con los paradigmas geométricos en los que sus estudiantes deben evolucionar. Por ende, se recalca que es vital seguir investigando en este campo de la historia y filosofía de las matemáticas y su aplicación a la enseñanza para transformar la educación en Colombia, tanto la enseñanza como el aprendizaje.

Analizando las concepciones epistemológicas y filosóficas de Gonseth sobre el espacio geométrico y sus aplicaciones en la formación de profesores, este trabajo guía al lector en una perspectiva filosófica fundamental en el contexto de la enseñanza. Además, se hace con el fin de que los docentes en formación y ejercicio comprendan la importancia de indagar y superar las concepciones de Gonseth, por ejemplo, “esquema”, “objeto”, “intuición”, “experiencia”, “teoría”, “método axiomático” e “Idoneísmo” para lograr un cambio en nuestro país ya sea en el orden curricular o en términos de lo cognitivo.

Definir marcos conceptuales en la historia y la filosofía de la geometría responde al cómo en un texto de geometría se aprovecha la historia y filosofía para entender los enunciados geométricos, las demostraciones, las aplicaciones de esos enunciados y la secuencia de los objetos que se utilizan, y no que unos textos de geometría sean unos discursos generales, que el estudiantes no tiene ninguna explicación de cuáles fueron los obstáculos que hubo que superar para llegar a ese enunciado que se desprende de un sistemas de axiomas. Es decir, es necesario investigar este marco conceptual, antes descrito, para elaborar nuevos textos para la enseñanza de la geometría apoyándose en los

estudios que se han comentado en este trabajo incluyendo, además, estudios como: "Matemáticas: una reconstrucción histórico-filosófica para una nueva enseñanza" (Ruiz, 2011), "La historia y la educación matemática en el «horizonte» conceptual de la pedagogía" (Arboleda y Castrillón, 2012) y "La introducción del método analítico en la enseñanza de las matemáticas en Colombia", (Arboleda, 2018).

Ruiz (2011) presenta un análisis del origen de la visión racionalista de las matemáticas, especialmente en los aspectos deductivo-formales, apriorísticos y axiomáticos, cuya sugerencia vincula la necesidad de un cambio radical en la filosofía moderna de las matemáticas que permita alternativas en su enseñanza. Si a este trabajo se aplicara la filosofía de Gonseth, podría trascender y dar un gran aporte en la enseñanza de la geometría en Colombia.

También, existen trabajos que contribuyen a la reflexión metodológica sobre el fortalecimiento del campo de la educación desde el punto de vista de la historia y la educación matemática, como el de Arboleda y Castrillón (2012). Mientras autores como Bkouche, Houdoment y Kuzniak, reflexionan más a partir de la historia de la filosofía de Gonseth, a quienes se deja como motivo de reflexión para dar la continuidad a esta investigación por parte del lector.

Por último, Arboleda (2018) presenta el método analítico orientado a la enseñanza de las matemáticas en Colombia; realiza, en ese contexto, un acercamiento al método axiomático de Hilbert, respecto del cual se pregunta cómo puede enseñarse; pero, es necesario investigar a fondo estos términos.

Convendría analizar si en la composición de los textos de geometría en los que más suelen apoyarse los docentes de matemáticas en Colombia, por ejemplo La *Geometría* de

Edwin E. Moise y Floyd L. Downs (1972) o la *Geometría* de Daniel C. Alexander y Geralyn M. Koeberlein (2013) se toman en consideración recursos propios del marco conceptual que se ha expuesto; de ser así, de qué manera, y en qué caso contrario, resultaría pertinente preguntarse a cerca de la manera en que dicho marco conceptual podría enriquecer su estrategia pedagógica.

5. Referencias

Arboleda, L. (2018). La introducción del método analítico en la enseñanza de las matemáticas en Colombia. Paradigma (38 (1)), 202-222. Recuperado el 17 de octubre de 2020, de https://bit.ly/3iIMJej.

Arboleda, L. & Recalde, L. (2003). Fréchet and the logic of the constitution of abstract spaces from concrete reality. Syntheses (134 (1/2)), 245-272. Recuperado el 21 de noviembre de 2020, de https://bit.ly/3oEu6fz.

Arboleda, L. & Castrillón, G. (2012). La historia y la educación matemática en el "horizonte" conceptual de la pedagogía. Quipu (14 (1)), 13-32. Recuperado el 12 de octubre de 2020, de https://bit.ly/3ms8X5u.

Bkouche, R. (1990). Quelques remarques sur la démonstration (Autor de la philosophie de Gonseth). *Repères* - IREM de Lyon (26), 115-127.

Alexander, D. & Koeberlein, G. (2013). *Geometría* (5 ed.). Santa Fe: OVA.

Moise, E. y Downs, F. (1972). *Geometría*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Enriques, F. (1913). *Les concepts fondamentaux de la science*. Paris: Flammarion.

Geiger, M. (1924). *Systematiche axiomatik der euklidischen geometrie*. Augsburg: B. Filser.

Gonseth, F. (1926). *Les fondements des mathématiques - De la géométrie d'euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme*. Paris: Alcan.

Gonseth, F. (1933). Sur l'axiomatique et la théorie des ensembles et sur la logique des relations. *Commentarii mathematici helvetici* (5 (1)), 108-136.

Gonseth, F. (1936). *La Logique en tant que Physique de l'objet quelconque*. Paris: Hermann.

Gonseth, F. (1936). *Les Mathématiques et la Réalité, Essai sur la Méthode Axiomatique*. Paris: Alcan.

Gonseth, F. (1939). *Philosophie Mathématique*. Paris: Hermann.

Gonseth, F. (1945 - 1955). *La Géométrie et le Problème de L'espace* (*Vols. I-VI*). Neuchâtel: Le Griffon.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un Example de Cadre Conceptuel pour Létude de L'enseignement de la Géométrie en Formation des Maîtres. *Educational Studies in Mathematics* (40 (3)), 283-312. Recuperado el 26 de enero de 2021, de https://bit.ly/3iCKh9l.

Panza, M. (1996). Gonseth et les Mathématiques. En: E. Barbin, *Les Filosophes et les Mathématiques*. 264-283. París: Ellipses.

Recalde, L. (2017). *Lecturas de Historia de las Matemáticas*. Cali: Universidad del Valle.

Ruiz, Á. (2011). Matemáticas: Una Reconstrucción Histórico-filosófica para una Nueva Enseñanza. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*.

Trejo, C. (1968) *El concepto de número*, Washington: Unión Panamericana.