



Mediación de Herramientas Digitales en las Creencias de los Estudiantes sobre el concepto de
Probabilidad y su Incidencia en la Resolución de Problemas

Tesis Doctoral

Arnulfo Fajardo Valencia

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Doctorado Interinstitucional en Educación
Énfasis Educación Matemática
2023

Mediación de Herramientas Digitales en las Creencias de los Estudiantes sobre el concepto de
Probabilidad y su incidencia en la Resolución de Problemas

Arnulfo Fajardo Valencia

Dr. David Benítez Mojica

Director de Tesis

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Doctorado Interinstitucional en Educación
Énfasis Educación Matemática
2023

*“Me sentiré satisfecho si esta historia quedó bien escrita y ordenada.
Si no es así, y tiene poco valor, deben saber que hice lo mejor que pude”*

2 macabeos 15:38

*A los seres que amo
Quienes han sido mi fuerza, mi mente y mi corazón.*

*A mi esposa por su paciencia,
por su amor, su entrega y solidaridad.*

*A mi hija,
Mi faro, mi luz, mi todo.
A mi familia de quienes soy un trozo de cada uno.*

Agradecimientos

Al terminar esta parte del proceso de formación doctoral, quiero expresar mi sentimiento de gratitud con todas las personas que de una u otra manera han hecho posible la consolidación de esta investigación.

Al Dios de la vida, en quién creo y confío plenamente.

A nuestra amada Universidad del Valle.

Al personal directivo, docente y administrativo del Doctorado Interinstitucional en educación de la Universidad del Valle.

A mi director de tesis, Dr. David Benítez Mojica, por su entrega, apoyo y solidaridad en cada uno de los momentos del proceso de realización del doctorado.

Al Dr. Oswaldo Jesús Martínez Padrón, por su compromiso, acompañamiento y su calidez humana en su función como asesor de tesis durante el proceso de pasantía internacional.

A los compañeros del seminario de formación permanente, Leonel, Yonathan y Wilmer; por el esfuerzo, constancia y perseverancia con la que hemos venido trabajando durante este tiempo.

A las directivas y compañeros docentes de la Institución Educativa Técnico Industrial José María Carbonell, por su apoyo y solidaridad.

A la memoria de mi hermano Fernando Fajardo, un ejemplo de vida y de entrega por sus semejantes.

A mis padres y hermanos por toda la comprensión y el cariño incondicional.

Resumen

La presencia de fenómenos aleatorios y la incertidumbre juegan un papel importante en diferentes áreas del conocimiento, esto convierte a la probabilidad en un componente crucial en la educación de todos los niveles escolares. Sin embargo, los resultados de investigación reportan que los estudiantes presentan dificultades para lograr un aprendizaje con comprensión de conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar. Esta investigación exploró las creencias de los estudiantes de sexto grado sobre probabilidad, con el fin de diseñar e implementar actividades de aprendizaje centradas en el uso de la tecnología que permitan movilizarlas hacia el desarrollo del pensamiento probabilístico y el mejoramiento de habilidades al resolver problemas que involucren este concepto. El estudio se enmarcó en el paradigma de la investigación basada en diseño, la estrategia metodológica fue el experimento de enseñanza, en él se aplicó una encuesta de diagnóstico, para identificar creencias de los estudiantes sobre probabilidad, dificultades en la comprensión de conceptos y errores al resolver problemas. Se diseñó una intervención didáctica compuesta por tres actividades, divididas en dos momentos: uno sin el uso de herramientas digitales y otro en donde se utilizaron aplicaciones diseñadas en GeoGebra. La recolección de los datos se realizó a través de hojas de trabajo, videgrabaciones y notas del observador. Se concluyó que intervenciones con profesores capacitados, el uso de tecnología y una metodología participativa impactan positivamente la comprensión de conceptos, la resolución de problemas de probabilidad, el cambio de creencias y la expansión del dominio expresivo de estudiantes en matemáticas.

Palabras Claves: Teoría de la probabilidad, Resolución de problemas, Razonamiento, Tecnología digital, Educación matemática.

Abstract

The presence of random phenomena and uncertainty plays a significant role across various fields of knowledge, making probability a crucial component in education at all levels. However, research findings indicate that students encounter challenges in achieving a comprehensive understanding of concepts and formal procedures related to randomness. This study explored sixth-grade students' beliefs about probability, aiming to design and implement technology-centered learning activities that facilitate their transition towards probabilistic thinking and improved problem-solving skills involving this concept. The research adopted a design-based research paradigm, employing a teaching experiment as the methodological strategy. A diagnostic survey was administered to identify students' beliefs about probability, comprehension difficulties, and problem-solving errors. A didactic intervention comprising three activities was designed, divided into two phases: one without digital tools and another utilizing GeoGebra-designed application. Data collection involved worksheets, video recordings, and observer notes. The study concluded that interventions involving trained teachers, technology usage, and participatory methodology positively impact the understanding of concepts, probability problem-solving, belief transformation, and the expansion of students' expressive domain in mathematics.

Keywords: Probability Theory, Problem Solving, Reasoning, Digital Technology, Mathematical Education.

Tabla de Contenido

Resumen	6
Abstract	7
Índice de Tablas.....	11
Índice de Figuras	12
Introducción.....	13
Capítulo 1	15
El Problema	15
1.1 Identificación del problema.....	15
1.2 Justificación	19
1.2.1 Importancia del estudio de las creencias de los estudiantes sobre la resolución de problemas.....	19
1.2.2 Importancia del aprendizaje de la probabilidad en la educación básica.	20
1.2.3 Necesidad de promover la enseñanza de la resolución de problemas en educación básica secundaria.....	21
1.2.4 Incidencia de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.....	23
1.3 Objetivos de Investigación	24
1.3.1 Objetivo general	25
1.3.2 Objetivos específicos.....	25
1.4 Preguntas de investigación	25
1.4.1 Pregunta central	25
1.4.2 Preguntas auxiliares	25
Capítulo 2	27
Marco Teórico Referencial	27
2.1 Contextualización teórica	27
2.1.1 Acerca de las creencias de los estudiantes.....	27
2.1.2 Creencias de los estudiantes de secundaria frente a conceptos asociados a la probabilidad.....	31
2.1.3 Acerca de la resolución de problemas	32
2.1.4 Sobre la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad.....	35
2.1.5 Acerca de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.....	37

2.2 Bases Teóricas.....	40
2.2.1 Las creencias de los estudiantes y los sistemas de creencias. Un camino que define el proceso de resolución de problemas	41
2.2.2 La resolución de problemas: una vía para asumir la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.....	45
2.2.3 Caracterización del razonamiento probabilístico.....	51
2.2.4 El uso de herramientas digitales en la resolución de problemas	55
2.2.5 Objetos matemáticos abordados en la investigación	60
Capítulo 3	63
Marco Metodológico	63
3.1 Fundamentos metodológicos	63
3.1.1 El paradigma de investigación	63
3.1.2 El método.....	64
3.1.3 Estrategia investigativa: Experimento de enseñanza	65
3.2 Sujetos de la investigación	66
3.3 Diseño de investigación	67
3.3.1 Fase 1. Análisis de la situación. Definición del problema.	67
3.3.2 Fase 2. Diseño de intervención	69
3.3.3 Fase 3. Validación de la investigación.....	71
3.3.4 Fase 4. Análisis y evaluación de resultados	76
Capítulo 4	77
Desarrollo del Experimento de Enseñanza y Análisis de Datos.....	77
4.1 Encuesta de diagnóstico	77
4.1.1 Descripción de la actividad	77
4.1.2 Objetivos de la encuesta de diagnóstico.....	80
4.1.3 Condiciones de aplicación.....	81
4.1.4 Análisis de la información	81
4.1.5 Evaluación general de la actividad de diagnóstico	93
4.2 Intervención didáctica.....	95
4.2.1 Condiciones de aplicación de la intervención didáctica	96
4.2.2 Descripción de la actividad 1	97
4.2.3 Objetivos de aprendizaje de la actividad 1.....	99

4.2.4 Análisis de la Información. Actividad 1	99
4.2.5 Descripción de la actividad 2	112
4.2.6 Objetivos de aprendizaje de la actividad 2.....	115
4.2.7 Análisis de la Información. Actividad 2	115
4.2.8 Descripción de la actividad 3	130
4.2.9 Objetivos de aprendizaje de la actividad 3.....	133
4.2.10 Análisis de la Información. Actividad 3	133
4.2.11 Evaluación general del experimento de enseñanza	145
Capítulo 5	147
Conclusiones y sugerencias.....	147
5.1 Respuesta a las preguntas de investigación.....	147
5.2 Sugerencias	157
5.2.1 Sugerencias para la docencia.....	157
5.2.2 Sugerencias para la investigación	157
5.2.3 Sugerencias para el diseño curricular	158
5.2.4 Sugerencias para la formación de profesores.	158
5.3 Producciones	158
Referencias Bibliográficas	160
Anexos	178

Índice de Tablas

Tabla 1. Niveles de razonamiento probabilístico.....	52
Tabla 2. Dimensiones de la variable razonamiento probabilístico	72
Tabla 3. Conceptos generales para obtención de datos cualitativos	73
Tabla 4. Soluciones anticipadas y contenidos matemáticos involucradas en el cuestionario	78
Tabla 5. Valoraciones y criterios de evaluación dependiendo el tipo de respuesta dada por los estudiantes.....	83
Tabla 6. Distribución de frecuencias para la puntuación total del cuestionario	83
Tabla 7. Estadísticos descriptivos de los datos asociados a la prueba de diagnóstico	84
Tabla 8. Sistema de categorías para el análisis cualitativo de la información diagnóstica	86
Tabla 9. Clasificación de respuestas de los estudiantes por niveles de razonamiento probabilístico	91
Tabla 10. Actividades diseñadas para la intervención didáctica.....	96
Tabla 11. Nivel de impredeción. Ejemplos de respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes.....	100
Tabla 12. Nivel Determinístico. Ejemplos de respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes.....	101
Tabla 13. Nivel Mecánico. Respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes	103
Tabla 14. Nivel de Pre-rigor. Ejemplos de respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes	104
Tabla 15. Porcentajes de justificaciones de los estudiantes por nivel de razonamiento probabilístico al seleccionar un número para un sorteo de dos cifras.....	107
Tabla 16. Porcentajes de conclusiones de los estudiantes por nivel de razonamiento probabilístico después de realizada la actividad con el uso de la herramienta digital GeoGebra	110
Tabla 17. Actividad 2. Comparativo de algunas respuestas de los estudiantes a problemas similares antes y durante el uso de la herramienta digital GeoGebra.....	128
Tabla 18. Creencias asociadas a los niveles de razonamiento probabilístico de los estudiantes	148
Tabla 19. Informe estadístico del diagnóstico	150
Tabla 20. Informe estadístico de las actividades sin uso de GeoGebra	151
Tabla 21. Informe estadístico de las actividades con uso de GeoGebra	151

Índice de Figuras

Figura 1. Simulación en GeoGebra para 1000 lanzamientos de dos dados.....	39
Figura 2. Fases de la investigación.....	67
Figura 3. Proceso establecido para el análisis de contenido de la encuesta de diagnóstico.	82
Figura 4. Distribución de puntuaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba diagnóstico	85
Figura 5. Ejemplo 1 de nivel de impredeción	87
Figura 6. Ejemplo 2 de nivel de impredeción	87
Figura 7. Razonamiento determinístico asociado a propiedades físicas.....	88
Figura 8. Razonamiento determinístico mítico	88
Figura 9. Ejemplo de razonamiento determinístico empírico	89
Figura 10. Respuesta clasificada en el nivel de razonamiento mecánico. Uso de porcentajes.....	89
Figura 11. Respuesta categorizada en el nivel de razonamiento mecánico. Uso de proporciones	90
Figura 12. Respuesta clasificada en el nivel de Pre-rigor	90
Figura 13. Respuesta clasificada en el nivel de rigor	91
Figura 14. Porcentaje de respuestas de acuerdo con los niveles de razonamiento probabilístico	93
Figura 15. Interfaz del applet de GeoGebra utilizado en la hoja de trabajo 1.	99
Figura 16. Actividad 1. Porcentaje de respuestas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico	105
Figura 17. Criterio para la selección de un número en un sorteo. Ejemplo 1.....	106
Figura 18. Criterio para la selección de un número en un sorteo. Ejemplo 2.....	107
Figura 19. Uso de deslizador para realizar entre 1 y 1000 sorteos.	108
Figura 20. Uso de expresiones propias de la probabilidad fuera de contexto.....	109
Figura 21. Registros de los datos de los estudiantes, de acuerdo a la simulación sorteos en GeoGebra	109
Figura 22. Variación de los niveles de razonamiento durante el desarrollo de la actividad 1. ..	111
Figura 23. Registro de niveles de razonamiento de los estudiantes previos y posteriores al uso de la herramienta digital GeoGebra. Actividad 1	112
Figura 24. Simulación del lanzamiento de dos dados en GeoGebra	114
Figura 25. Diagrama dinámico de barras y tablas de frecuencia para el lanzamiento de dos dados.....	115
Figura 26. Respuesta categorizada en el nivel de impredeción relacionada con la idea de espacio muestral.....	116
Figura 27. Comparación de probabilidades sin el uso de GeoGebra	117
Figura 28. Comparación de espacios muestrales.....	117
Figura 29. Nivel de pre-rigor respecto a eventos equiprobables.....	119
Figura 30. Comparación de probabilidades.....	119
Figura 31. Actividad 2. Porcentaje de respuestas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico	120
Figura 32. Representación geométrica de combinaciones del lanzamiento de dos dados.....	122
Figura 33. Simulación de 2000 lanzamientos de los dados realizada en GeoGebra	123
Figura 34. Impredeción al comparar probabilidades.....	124

Figura 35. Determinismo al comparar probabilidades	124
Figura 36. Nivel mecánico al comparar probabilidades.....	125
Figura 37. Nivel de rigor al comparar probabilidades.....	127
Figura 38. Porcentaje de justificaciones de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico durante la intervención con el uso de GeoGebra.....	128
Figura 39. Registro de niveles de razonamiento de los estudiantes previos y posteriores al uso de la herramienta digital GeoGebra. Actividad 2.....	130
Figura 40. Interfaz del applet de GeoGebra utilizado en la hoja de trabajo 3.....	132
Figura 41. Interfaz del segundo applet de GeoGebra utilizado en la hoja de trabajo 3.....	133
Figura 42. Nivel mecánico en donde se utilizan recursos defectuosos	136
Figura 43. Nivel de pre-rigor. aproximación al lenguaje probabilístico	137
Figura 44. Nivel de rigor en donde se evidencian argumentos de tipo matemático.....	138
Figura 45. Actividad 3. Porcentaje de respuestas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico	138
Figura 46. Nivel mecánico. Expresiones fuera de contexto	142
Figura 47. Nivel de pre-rigor. Compara diferentes espacios muestrales.....	143
Figura 48. Nivel de rigor. Uso de argumentos de tipo matemático.....	144
Figura 49. Actividad 3. Porcentaje de justificaciones de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico durante la intervención con el uso de GeoGebra.....	144
Figura 50. Registro de niveles de razonamiento de los estudiantes previos y posteriores al uso de la herramienta digital GeoGebra. Actividad 3.....	145
Figura 51. Diagrama de barras de los niveles de razonamiento durante el desarrollo de las actividades de la intervención didáctica sin el uso de GeoGebra.....	152
Figura 52. Diagrama de barras de los niveles de razonamiento durante el desarrollo de las actividades de la intervención didáctica con la mediación de GeoGebra.....	153

Introducción

Los fenómenos fortuitos, los sucesos aleatorios y la incertidumbre hacen parte de la experiencia diaria de los individuos, lo que convierte el estudio de la Didáctica de la Probabilidad en un elemento preponderante para la preparación de los estudiantes en los diferentes niveles educativos. En palabras de Budgett y Pfannkuch (2019), basta tener en cuenta que “el razonamiento probabilístico es esencial para operar de manera sensata y óptima en el siglo XXI” (p. 3) lo cual es un indicador para justificar el incremento de los estudios

sobre didáctica interesados en aspectos como el desarrollo cognitivo, la enseñanza, la resolución de problemas, la formación de maestros y los desarrollos curriculares. Sin embargo, aún se reportan grandes dificultades de los estudiantes frente al aprendizaje y la comprensión de conceptos asociados con la probabilidad, tal como lo indican Ang y Shahrill (2014), Saldanha y Liu (2014), Sharma (2012) y Barragues y Guisasola (2009).

En el caso de la educación básica, investigadores como Batanero et al. (2016), Vásquez Alsina (2015), Rodríguez-Alveal et al. (2018) han relacionado estas dificultades con múltiples causas, destacando la complejidad de los diferentes significados y enfoques de la probabilidad, sumado a que los contenidos son poco abordados en las aulas, existe falta de conocimiento de los profesores sobre el tema, es poco el apoyo que ofrecen los libros de texto, así como el hecho de que los estudiantes al abordar situaciones probabilísticas utilizan estrategias centradas en sus creencias que generalmente son adquiridas desde la experiencia y tomadas de su entorno social (Amir y Williams, 1999; Sharma, 2016).

Con el propósito de superar algunas de estas dificultades, se han utilizado múltiples recursos educativos para apoyar el desarrollo del pensamiento probabilístico. Particularmente en los últimos años se ha promovido su enseñanza y aprendizaje a partir del uso de la tecnología.

Estudios como los de Batanero y Sánchez (2005) y más recientemente Batanero et al. (2016), English y Watson (2016) y Parzysz (2018) plantean que el uso de software dinámico, programas de internet y otras aplicaciones digitales, facilitan la exploración de representaciones, conceptos y procedimientos estocásticos, redundando en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas. Tales autores sostienen que este tipo de recursos permite a los profesores crear entornos donde los estudiantes pueden comparar los resultados de las simulaciones con sus creencias y confrontar sus conceptos erróneos.

Sobre la base de lo planteado anteriormente, en esta investigación se indagó sobre cuáles son las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad y se evaluó el impacto del uso de la herramienta digital GeoGebra en el sistema de creencias que tienen los estudiantes sobre este concepto.

El interés por el estudio de las creencias nace de su estrecha relación histórico epistemológica con elementos asociados a la probabilidad, la introducción de herramientas

digitales responde a consideraciones de múltiples investigaciones que indican que el uso de tecnología fomenta el desarrollo del razonamiento probabilístico (Borovcnik y Kapadia, 2010; Gürbüz y Birgin, 2012; Parzysz, 2018; Ruiz-Reyes et al., 2019) y favorece las habilidades para la resolución de problemas.

El estudio tiene como objetivo diseñar y validar actividades de aprendizaje centradas en el uso de herramientas digitales que permitan investigar sobre la posible transformación de las creencias que tienen los estudiantes al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad. En este sentido, se pretende generar un compendio de elementos que sirvan de apoyo específico al aprendizaje con comprensión de la probabilidad en el marco de la resolución de problemas, asumiendo: (a) los planteamientos de Polya (1945) y Schoenfeld (1992), respecto a estrategias cognitivas y metacognitivas utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a tareas no rutinarias; (b) el marco propuesto por Callejo y Vila (2004) para identificar, evaluar y modificar creencias; (c) los niveles de razonamiento probabilístico definidos por Sánchez y Benítez (1997) y (d) algunos elementos de la teoría de la mediación instrumental frente al uso de herramientas digitales (Moreno Armella, 2002).

Capítulo 1

El Problema

1.1 Identificación del problema.

Desde hace más de cinco décadas, la investigación sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la probabilidad ha generado hallazgos relevantes en relación con su utilidad en la cotidianidad, su papel instrumental en disciplinas como la matemática, la política, la economía, y a su importancia en el desarrollo del pensamiento crítico (Gómez Torres, 2016; Saldanha y Liu, 2014; Sharma, 2012; Vásquez y Alsina, 2017), por lo que cada vez son más los países que han optado por incluirla en sus currículos obligatorios desde la educación

primaria y en la formación de maestros (Batanero et al., 2016; Vásquez y Alsina, 2017; Groth et al., 2021).

Algunos investigadores han centrado su estudio en analizar la comprensión de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en los estudiantes de educación básica secundaria (Batanero Bernabeu, 2005; Sánchez y Valdés, 2013; J. Watson et al., 2009; Groth et al., 2021). Sin embargo, como lo registran Barragues y Guisasola (2009), la investigación didáctica viene señalando que los estudiantes tienen dificultades para lograr un aprendizaje con comprensión de los conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar, lo que es reafirmado por Callingham et al. (2021) quienes consideran que “hay poca evidencia de que la comprensión de los estudiantes sobre la probabilidad haya avanzado” (p. 329).

Estas dificultades se observan en los estudiantes, cuando al enfrentarse a problemas que involucran el concepto de probabilidad, utilizan estrategias no probabilísticas (Groth et al., 2021). Algunos consideran que es completamente imposible predecir resultados cuando se encuentran en situaciones de azar (Sánchez y Benítez, 1997); otros asocian el resultado de un experimento aleatorio a fenómenos físicos, a poderes sobrenaturales o a la suerte (Amir y Williams, 1999; Sánchez y Benítez, 1997; Watson et al., 2004a), existiendo quienes creen que los resultados de experiencias aleatorias dependen del control de las personas sobre los dispositivos generadores de aleatoriedad (Nicolson, 2005).

Un ejemplo de este tipo de situaciones es ilustrado por Pratt (2005), quien al preguntar a uno de sus estudiantes sobre los resultados que se pueden obtener al lanzar una moneda al aire, recibió la siguiente respuesta:

Paul. No estoy seguro, pero creo que la razón por la que caen en un determinado lado es por el peso de un lado. Cuando se voltea, un lado se vuelve más pesado, así que cae en ese lado y, si te fijas, la cara tiene más peso. Así que es más pesada en ese lado, por lo que cuando cae así [sobre la mesa] es cruz y cuando la ponemos en nuestra mano y la volteamos (pasa la moneda de la palma de la mano derecha al dorso de la mano izquierda) es cara, porque se vuelve hacia el lado opuesto (Pratt, 2005, p. 84)

Este tipo de argumentos de los estudiantes, dificultan la comprensión del concepto de probabilidad, por lo que muchos terminan considerándola como un tema aburrido, difícil de aprender y aplicar, tanto de manera formal como en contextos cotidianos.

Entre las posibles causas que dificultan la comprensión del concepto de probabilidad se pueden mencionar las siguientes:

1. *La probabilidad es poco abordada en el aula de clase:* Batanero et al. (2016) plantean que los docentes indican diversas razones para reducir u omitir su enseñanza, como la falta de tiempo debido a lo apretado de los programas o su inseguridad para enseñarla, aseveración también sostenida por Inzunza (2014) quien argumenta que, con frecuencia, los profesores manifiestan que les falta conocimiento para impartirla, lo que genera que no todos los docentes se sientan a gusto cuando abordan la enseñanza de temáticas de probabilidad.

2. *Los libros de texto:* Vásquez y Alsina (2015) afirman que la mayoría de los maestros de educación primaria tienen poca o ninguna preparación sobre probabilidad y su didáctica, por lo que convierten al libro de texto en uno de sus principales recursos para abordar su enseñanza. Sin embargo, Rodríguez-Alveal et al. (2018) indican que los documentos curriculares y los libros de texto, que en muchas ocasiones constituyen un facilitador para la labor del profesor, en el caso de la probabilidad, no ofrecen el apoyo suficiente. Así mismo, Langrall (2018) sostiene que la enseñanza de la probabilidad se ha centrado, principalmente, en fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas.

3. *Las creencias de los estudiantes:* Algunas investigaciones identifican como una de las posibles causas de dificultades en la comprensión de la probabilidad, el hecho de que los jóvenes al resolver problemas que involucran este concepto, utilizan estrategias adquiridas más desde la experiencia de vida y tomadas de su entorno social (Amir y Williams, 1999; Sharma, 2012, 2016).

Desde el punto de vista de Pajares (1992), las verdades personales, derivadas de la experiencia o de la fantasía, centradas en componentes afectivos y valorativos, son consideradas creencias; por lo que pareciera que las decisiones que toman los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas de probabilidad están centradas fundamentalmente en sus sistemas de creencias, más que en la comprensión que se tiene sobre conceptos asociados a la probabilidad.

Frente a las dificultades en la comprensión de algunos conceptos en Educación Matemática, tanto investigadores como maestros han puesto en juego diversas estrategias didácticas con el fin de movilizar el pensamiento matemático de los estudiantes. Algunos han

utilizado como herramienta central el uso de la tecnología, muy probablemente bajo la premisa de que, si la tecnología ha generado cambios significativos en la vida de los ciudadanos, es probable que pueda incidir en los procesos de formación de los estudiantes.

En los últimos años se han incrementado los estudios de investigación sobre el uso de software dinámico en la resolución de problemas, incluidos los problemas de probabilidad (García-García et al., 2018; Parzysz, 2018; Pratt y Kazak, 2018; Gürbüz y Birgin, 2012; Yáñez y Jaimes, 2013). Martin et al. (2022) argumentan que en la enseñanza de la probabilidad “las herramientas tecnológicas permiten apoyar a los estudiantes en varias funciones: completar ejercicios, dibujar diagramas de árbol, dibujar diagramas de Venn, calcular probabilidades, aprender jugando” (p. 663), por su parte, Olsson y Granberg (2019) sostienen que el software dinámico facilita visualizar las relaciones entre representaciones, permite ofrecer comentarios sobre las acciones de los estudiantes y proporciona múltiples variaciones, es decir que beneficia el aprendizaje de las matemáticas. Fiallo y Gutiérrez (2007) plantean que las nuevas tecnologías ofrecen herramientas para la enseñanza que contribuyen a que los estudiantes pongan en juego sus ideas, exploren, analicen, tomen datos y experimenten sus conjeturas.

Frente a los rápidos cambios en el desarrollo tecnológico, Batanero et al. (2016) sugieren la necesidad de nuevas investigaciones sobre el uso de la tecnología por parte de los estudiantes para resolver problemas reales que utilizan modelos de probabilidad.

Desde estas perspectivas, esta investigación busca determinar:

- ¿Cuáles son las características de las actividades de aprendizaje centradas en el uso de herramientas digitales que permitan movilizar las creencias que tienen los estudiantes de grado sexto al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad?
- Indagar e identificar cuáles son las creencias de los estudiantes de sexto grado de educación básica secundaria sobre el concepto de probabilidad.
- Diseñar e implementar actividades de aprendizaje centradas en el uso de la tecnología que permitan movilizar dichas creencias hacia el desarrollo del pensamiento probabilístico y hacia el mejoramiento de las habilidades de los estudiantes al resolver problemas que involucren este concepto.

- Aportar a la investigación sobre el aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de básica secundaria.

La importancia de esta investigación radica en que al generar estrategias que logren fortalecer la comprensión del concepto de probabilidad, los estudiantes puedan desenvolverse mejor en un ambiente de incertidumbre, comprendan las situaciones aleatorias y tomen decisiones adecuadas no sólo en el aula de clase, sino fuera de ella. En palabras de Batanero et al. (2016), los estudiantes necesitan adquirir estrategias y formas de razonamiento que les ayuden a tomar decisiones en situaciones cotidianas y profesionales donde el azar está presente, esta idea es reforzada por Barragues y Guisasola (2009) quienes consideran que la probabilidad es importante para la formación de ciudadanos, capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas. En este sentido, cobra importancia la investigación sobre el diseño e implementación de actividades de aprendizaje mediadas con Tecnologías Digitales que permitan movilizar las creencias de los estudiantes sobre el concepto de probabilidad.

1.2 Justificación

A continuación, se presentan los aspectos centrales sobre los que se justifica esta investigación, desde los ámbitos, teórico, práctico y metodológico.

1. Importancia del estudio de las creencias de los estudiantes sobre la resolución de problemas.
2. La importancia del aprendizaje de la probabilidad en la educación básica.
3. La necesidad de promover la enseñanza de la resolución de problemas en educación básica secundaria.
4. La incidencia de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

1.2.1 Importancia del estudio de las creencias de los estudiantes sobre la resolución de problemas

La investigación sobre el dominio afectivo de las matemáticas ha demostrado que las creencias que tienen los estudiantes “inciden en la forma en como ellos mismos se ven frente al aprendizaje en esta área, ya sea generando sentimientos de motivación e interés en sentido positivo o de desinterés y angustia en sentido negativo” (Fajardo y Benítez, 2020). Roesken et

al. (2011) consideran que las opiniones de los estudiantes sobre sí mismos como aprendices de matemáticas son fundamentales para su compromiso y éxito en la escuela.

El impacto de las creencias se refleja en la capacidad de participar productivamente en la resolución de problemas y en la comprensión de conceptos matemáticos (Bakar et al., 2019; Stylianides y Stylianides, 2014). Para Schoenfeld (1985) las creencias y los sistemas de creencias son importantes en la Educación Matemática, teniendo en cuenta que aquello que una persona piensa es determinante en la manera como selecciona recursos y estrategias para abordar problemas.

En términos generales, los investigadores plantean que el estudio de las creencias es un tema central en la Educación Matemática, ya que estas afectan la forma en que los estudiantes ven y abordan el aprendizaje. Existe consenso frente a que las creencias personales de los estudiantes afectan la manera en que estos enfrentan los problemas y pueden determinar el éxito o el fracaso en sus procesos de resolución (Bakar et al., 2019; Pitsia et al., 2017; Pongsakdi et al., 2019; Stylianides y Stylianides, 2014; Tarmizi y Tarmizi, 2010).

Identificar las creencias que tienen los estudiantes sobre la resolución de problemas, posibilita abordar dichas creencias en la vía de mejorar los logros en el aprendizaje de las matemáticas (Burrus y Moore, 2016; McLeod, 1988).

1.2.2 Importancia del aprendizaje de la probabilidad en la educación básica.

Diversas investigaciones informan sobre el bajo nivel que muestran los estudiantes frente a la comprensión de conceptos básicos de probabilidad (Busadee y Laosinchai, 2013; Ernst y Morton, 2019; Leavy y Hourigan, 2015; Penalva et al., 2010; Saldanha y Liu, 2014). Sin embargo, la comunidad académica ha aceptado la importancia de la probabilidad como un componente fundamental en la Educación Matemática, debido a sus múltiples aplicaciones en las diferentes áreas del conocimiento y a los desarrollos de investigación que han propiciado su incorporación en los currículos escolares en diferentes países (Batanero et al., 2016; Langrall, 2018; Sánchez, 2009; Vásquez y Alsina, 2014) una muestra de esta situación se ve reflejada en el impulso dado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), al incluir la enseñanza de la estadística y la probabilidad a partir de los 3 años de edad (Alsina y Salgado, 2019).

Algunos investigadores argumentan que “la probabilidad es un área de aprendizaje importante por derecho propio” (Sharma, 2012), ya que contiene conceptos y procesos claves del pensamiento estadístico y del aprendizaje de materias más avanzadas, Sánchez (2009) destaca que el aprendizaje de la probabilidad es esencial para ayudar a preparar a los estudiantes para la vida, ya que los eventos aleatorios y los fenómenos de azar están en los ámbitos en los que vivimos.

Teniendo en cuenta los argumentos presentados, es importante que los estudiantes tengan la oportunidad de confrontarse con actividades de aprendizaje que permitan el mejoramiento de la comprensión de los conceptos asociados con la probabilidad, como lo propone Alsina (2012) el aprendizaje de la probabilidad está justificado desde las primeras edades porque es útil para la vida posterior en la escuela. Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando el razonamiento crítico basado en la valoración de la evidencia objetiva. Inzunza (2014) refuerza este planteamiento cuando afirma que la sociedad actual requiere individuos que sean competentes para analizar, comprender e interpretar información de diversos hechos que suceden a su alrededor, los cuales con frecuencia involucran algún componente de incertidumbre.

1.2.3 Necesidad de promover la enseñanza de la resolución de problemas en educación básica secundaria.

Desde hace varios años, autores como Polya (1945), Halmos (1980), Charles y Lester (1982), Schoenfeld (1985), han indicado que la resolución de problemas es una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas, más recientemente Baumanns y Rott (2022) , Liljedahl y Cai (2021) Son y Lee (2021), Santos-Trigo (2014) continúan sosteniéndolo, ellos coinciden en reconocer la resolución de problemas como un proceso central que dinamiza las matemáticas.

Halmos (1980) plantea que aquellos que creen que el corazón de las matemáticas consiste en los problemas no están necesariamente equivocados. Kleiner (1986) sugiere que algunos conceptos y teorías abstractas emergen al dar solución a problemas específicos. Santos-Trigo (2014) reconoce que hay rastros de actividades de resolución de problemas a lo largo de la historia de las matemáticas y la civilización humana.

Durante muchos años, una de las preocupaciones de investigadores y docentes ha sido la búsqueda de un camino correcto para hallar la solución a un problema, a partir de los estudios de Polya (1945), quien enfatizó en la importancia del uso de estrategias heurísticas al abordar la resolución de problemas. Como lo argumenta Liljedahl et al. (2016); se pensó que la enseñanza y el aprendizaje de estrategias, principios y herramientas heurísticas permitirían a los estudiantes mejorar sus habilidades de resolución de problemas, por su parte Schoenfeld (1985) propone que al abordar la solución de un problema es necesario tener en cuenta otras situaciones que van más allá de las heurísticas, dándole una posición relevante a los recursos, los procesos de metacognición y las creencias del resolutor, Schoenfeld (1992) plantea que un problema es una herramienta que permite el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. En otras palabras, se concibe un problema como el punto de partida y la resolución como el camino para la comprensión del conocimiento matemático, como lo argumenta Liljedahl et al. (2016) la resolución de un problema centrada en aspectos cognitivos y heurísticos, se amplió con ciertos aspectos específicos del alumno, como las actitudes, las emociones y el comportamiento autorregulado.

En esta misma línea, el NCTM propuso en 1980 que la resolución de problemas debía ser el enfoque de las matemáticas escolares. En los documentos presentados en 1989, 2000 y 2009, la entidad sigue sosteniendo que la resolución de problemas continúa siendo un elemento central en el aprendizaje de las matemáticas y una forma de fomentar el razonamiento matemático, lo que puede observarse también en el documento publicado en 2014 en donde el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas ha identificado ocho prácticas eficaces de enseñanza y aprendizaje entre las que recomienda de manera específica “implementar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas” (NCTM, 2014, p. 3).

Es claro que la resolución de problemas es un elemento fundamental en los procesos de enseñanza de las matemáticas, sin embargo, son muchos los investigadores que consideran que a pesar de los grandes esfuerzos en investigación en este campo no se han logrado muchos avances en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes cuando abordan la resolución de un problema (Bingolbali y Bingolbali, 2019; Schoenfeld, 1992). Leong y Janjaruporn (2015) manifiestan que parece haber una falta de éxito en cualquier intento de enseñar a resolver problemas dentro del currículo escolar; Stacey (2005) argumenta que,

aunque la resolución de problemas es uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, también es uno de los más esquivos.

En este sentido, se justifica la necesidad de promover la resolución de problemas en la educación básica, si se tiene en cuenta que, al resolver problemas, “los estudiantes adquieren formas de pensar, hábitos de persistencia y curiosidad, y confianza en situaciones desconocidas que les serán útiles fuera del aula de matemáticas” (Leong y Janjaruporn, 2015), es necesario aprovechar las potencialidades que ofrece la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

1.2.4 Incidencia de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

A pesar de que los recursos tecnológicos han estado presentes en los procesos educativos, desde hace ya varios años, y que un grupo significativo de investigadores ha realizado estudios que sustentan la importancia que puede tener el uso apropiado de las herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Artigue, 2010; Drijvers, 2018, 2020; Heid, 2018; Kuzle, 2013; Parzysz, 2018; Santos-Trigo et al., 2021), la transformación de las prácticas de enseñanza de la educación matemática, han tenido un impacto relativamente pequeño en las experiencias de aprendizaje de los estudiantes asociadas con el uso de la tecnología, como lo argumentan Clark-Wilson et al. (2014) muy distante de lo que se esperaba hace algunos años, asimismo Drijvers (2018) manifiesta que “el beneficio del uso de la tecnología en la educación matemática a partir de estudios experimentales es modesta y que los conocimientos basados en la evidencia sobre los factores que afectan estos beneficios son limitados” (p. 173) .

A veces la presencia de herramientas tecnológicas en el aula de clase es escasa, en otros casos la falta de experiencia en el uso de este tipo de recursos lleva a que el maestro no las utilice y limita el uso que sus estudiantes puedan hacer de ellas; como lo ha argumentado Goos et al. (2003) la tecnología ha sido utilizada como un reemplazo rápido y confiable para los cálculos mentales o con lápiz y papel, no obstante los métodos de enseñanza, el diseño de las tareas y las estrategias de evaluación siguen siendo las mismas, y no se asume la tecnología como un elemento que permita potenciar procesos centrales de pensamiento matemático, tales como: resolver y proponer problemas, argumentar y comunicar ideas matemáticas, representar y modelar matemáticamente.

A pesar de que los antecedentes permiten observar una separación entre las propuestas de los investigadores y las prácticas de los docentes en las aulas de clase; respecto al uso y la importancia de las herramientas tecnológicas, son muchos los investigadores y maestros que continúan creyendo que estas herramientas contribuyen de manera positiva en el desarrollo del pensamiento matemático.

Hu (2023) Considera que “desde el punto de vista pedagógico, la integración de nuevas tecnologías en diseños diferenciados de enseñanza y aprendizaje puede abrir oportunidades de enseñanza y aprendizaje que transformen un aula de matemáticas” (p.21). Para Goos et al. (2003) utilizar dispositivos electrónicos tanto en el aula de clase como fuera de ella potencian el trabajo colaborativo, facilitan el consenso y el disenso sobre las matemáticas y favorece los procesos de argumentación y comunicación.

También se ha planteado que el uso del software como GeoGebra y algunas otras aplicaciones de internet propician múltiples representaciones y visualizaciones, favoreciendo la comprensión de los conceptos matemáticos (Goos, 2014; Santos-Trigo et al., 2016).

Santos-Trigo y Machín (2013) afirman que la tecnología digital brinda distintas posibilidades para que los estudiantes representen, exploren y resuelvan tareas matemáticas. Leung (2017) manifiesta que la tecnología es una herramienta pedagógica para enriquecer la capacidad cognitiva de los profesores y de los estudiantes. Goos (2014) sostiene que las tecnologías digitales se han vuelto esenciales para gestionar las actividades laborales y de ocio.

La incorporación de la tecnología en la Educación Matemática puede ofrecer entornos de aprendizaje favorables. Mediante simulaciones, aplicaciones y software especializado como GeoGebra se brinda a los estudiantes la oportunidad de recopilar, registrar, organizar y analizar información. Estas herramientas abren nuevas posibilidades para la comunicación y la comprensión matemática (Ball et al., 2018; Gurer y Akkaya, 2022; Thurm y Barzel, 2020).

1.3 Objetivos de Investigación

En los siguientes apartados, se presentan el objetivo general y los objetivos específicos que guiaron el desarrollo de la presente investigación y permitieron concretar aportes significativos al campo de la educación y, en particular, a la mejora del aprendizaje de la probabilidad

1.3.1 Objetivo general

Diseñar y validar actividades de aprendizaje centradas en el uso de herramientas digitales que permitan movilizar las creencias que tienen los estudiantes de grado sexto al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Indagar sobre las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad.

2. Evaluar el impacto del uso de la herramienta digital GeoGebra en el sistema de creencias que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad

3. Identificar características que deben tener las actividades de aprendizaje para promover la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad.

4. Analizar la importancia que tiene el uso de los diferentes tipos de representación en la resolución de problemas que involucran el concepto de probabilidad con la mediación de GeoGebra.

1.4 Preguntas de investigación

Las preguntas formuladas para el desarrollo de la investigación se plantean en concordancia con los objetivos establecidos. Se busca dar respuesta a ellas con un enfoque en el aprendizaje de los estudiantes, centrando la atención en identificar creencias que puedan interferir en la comprensión de los conceptos asociados a la probabilidad y en las posibles estrategias mediadas por tecnología que permitan movilizar dichas creencias.

Esta investigación desea responder a las preguntas que se presentan a continuación.

1.4.1 Pregunta central

¿Cuáles son las características que debe tener el diseño de actividades de aprendizaje, centradas en el uso de herramientas digitales que permitan movilizar las creencias que tienen los estudiantes de grado sexto al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad?

1.4.2 Preguntas auxiliares

1. ¿Cuáles son las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad?

2. ¿Qué impacto tiene el uso de la herramienta digital GeoGebra en el sistema de creencias de los estudiantes sobre el concepto de probabilidad
3. ¿Cuáles son las características que deben tener las actividades de aprendizaje para promover la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad?
4. ¿Qué importancia tiene el uso de los diferentes tipos de representación en la resolución de problemas que involucran el concepto de probabilidad con la mediación de GeoGebra?

Capítulo 2

Marco Teórico Referencial

2.1 Contextualización teórica

En este apartado se presenta la contextualización teórica sobre creencias, resolución de problemas y mediación de tecnología digital. Se establecen relaciones entre estos elementos y el aprendizaje de nociones fundamentales de probabilidad a manera de preámbulo a las bases teóricas de la presente investigación.

2.1.1 Acerca de las creencias de los estudiantes

La investigación sobre el papel de las creencias de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas ha venido en ascenso a partir de la década de los años ochenta, como respuesta a las dificultades que se evidenciaron después de abordar la resolución de problemas matemáticos sólo desde la perspectiva de elementos de tipo cognitivo (Galende et al., 2019; Pongsakdi et al., 2019).

El estudio de las creencias ha sido reconocido en el campo investigativo como un componente del dominio afectivo, lo que se refleja en las múltiples publicaciones sobre el tema y en la difusión que se le ha dado en la literatura internacional. Un claro ejemplo ha sido la publicación de documentos tales como: (a) *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 1. Knowledge, Beliefs, and Identity in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Portari et al., 2008); (b) *Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics: Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner* (Li y Moschkovich, 2013), (c) *Views and Beliefs in Mathematics Education. The Role of Beliefs in the Classroom* (Rott et al., 2018).

La investigación reciente se ha preocupado por indagar e identificar las creencias que tienen los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas (Galende et al., 2019; Kele, 2018; Markovits y Forgasz, 2017; McDonough y Sullivan, 2014; Roesken et al., 2011; Tarmizi y Tarmizi, 2010).

Prendergast et al. (2018), por ejemplo, reportan una investigación que busca identificar las creencias que tienen los estudiantes sobre la resolución de problemas de matemáticas. Concluyen que los mayores están más convencidos que los más jóvenes de que no todos los problemas pueden resolverse mediante la aplicación de procedimientos de rutina,

observándose algunas diferencias relacionadas con el género, manifiestas en que los varones tenían creencias más positivas en relación con la resolución de problemas. Proponen que a partir de la evaluación de las creencias de los estudiantes, se planifiquen e implementen intervenciones que permitan transformar gradualmente las representaciones ingenuas sobre la naturaleza de las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos.

Vesga-Bravo y Escobar-Sánchez (2018) presentan una investigación orientada a determinar si una propuesta pedagógica centrada en el marco teórico de la resolución de problemas tiene impacto sobre las creencias de un grupo de estudiantes de séptimo grado; se realizaron cinco actividades de resolución de problemas y un cuestionario con el fin de conocer las creencias de los estudiantes; después de realizar el análisis cuantitativo de los datos se concluyó que hubo mejores creencias después de la intervención solo en el factor referido a la velocidad de aprendizaje; los estudiantes fortalecieron sus creencias sobre la importancia de esforzarse y no rendirse si no se pueden resolver los problemas en un corto período de tiempo. Los investigadores proponen que para lograr intervenciones que modifiquen las creencias de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas es necesario considerar otros aspectos que hacen parte del contexto escolar.

Jäder et al. (2017) llevaron a cabo un estudio para explorar las creencias y el razonamiento de los estudiantes suecos de educación secundaria al resolver tareas no rutinarias. Después de recolectar datos a partir de sesiones de resolución de tareas obtenidas en grabaciones de video; soluciones escritas de los estudiantes y entrevistas, se analizaron por separado los elementos de razonamiento y creencias frente a la resolución de las tareas no rutinarias. Concluyeron que cuando los estudiantes trabajan en este tipo de tareas utilizan varios enfoques de razonamiento que incluyen el razonamiento imitativo y el razonamiento matemático creativo y están de acuerdo en que las tareas influyen en la manera en que los estudiantes razonan, lo que contradice estudios previos sobre las creencias de los estudiantes.

Francisco (2013) examina las creencias sobre el aprendizaje matemático de cinco estudiantes de secundaria y su comportamiento frente a un problema de probabilidad desafiante. El estudio fue de tipo longitudinal y buscó inferir las creencias a partir de reflexiones de los estudiantes, por lo que se utilizaron entrevistas y tareas matemáticas. Los resultados demostraron que los estudiantes valoran el sentido del trabajo colaborativo, el aprendizaje por descubrimiento y hacen énfasis en que los procesos matemáticos como la

justificación, las discusiones, las conexiones y la resolución de problemas para hacer y aprender matemáticas son muy importantes para los estudiantes. El estudio sugiere que diferentes experiencias conducen a diferentes creencias y es por esto que los profesores deben ayudar a los estudiantes a encontrar disposición y comportamientos positivos hacia la matemática.

Otra línea de interés de los investigadores en este campo, ha sido la de explorar tipos de creencias específicas de los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas; entre otras las creencias de autosuficiencia y autopercepción que tienen los estudiantes frente al conocimiento de las matemáticas (Bonne y Johnston, 2016; Kleitman y Gibson, 2011; Ozgen, 2013; Tirosh et al., 2013), así mismo, las creencias epistemológicas que se relacionan con el rendimiento académico frente a las matemáticas (Henschel y Roick, 2017; Vizcaino Escobar y Manzano Mier, 2017), y las creencias científicas (Beghetto y Baxter, 2012).

En esta línea de investigación, Lindfors et al. (2019) presentan un estudio longitudinal, cuasi experimental, sobre las creencias que tienen los estudiantes entre los 7 y los 9 años en Nueva Zelanda sobre ellos mismos como aprendices de matemáticas, buscando identificar las relaciones entre la inteligencia de los estudiantes, la autosuficiencia matemática específica y el logro matemático. Se utilizaron como herramientas de toma de información cuestionario diseñado a medir las creencias generales de dominio de los estudiantes sobre su capacidad para aumentar su inteligencia y creencias específicas de tareas sobre su capacidad matemática, y una prueba de rendimiento matemático. El estudio arrojó que los maestros, a partir de sus intervenciones en el aula, pueden fortalecer la confianza de los estudiantes sobre su capacidad de aprender y de paso aumentar su rendimiento académico. Por otra parte, los investigadores recomiendan que agregar elementos psicológicos al aprendizaje profesional del profesor de matemáticas podría redundar en beneficios para el estudiante en el aula de clase.

Alabau, Solaz-Portolés y Sanjosé (2020) han realizado una investigación con estudiantes de educación secundaria en el que buscan analizar los efectos del nivel académico y el género sobre las creencias epistemológicas y sobre la resolución de problemas de los estudiantes; y analizar en que contribuyen tanto las creencias epistemológicas como el género sobre el desempeño en la resolución de problemas. A través del uso de cuestionarios de creencias sobre resolución de problemas, pruebas escritas sobre problemas tomados de pruebas PISA 2003 y después de su respectivo análisis cuantitativo, se llegó a concluir que

entre mayor es el nivel académico de los estudiantes, más sofisticadas son las creencias sobre la resolución de problemas; por otra parte se observó que el género de los estudiantes tiene una influencia significativa sobre las creencias epistemológicas pero no sobre la resolución de problemas. Los autores consideran que los estudiantes deben mejorar frente a las creencias de resolución de problemas, pero que esto sólo será posible a través de una concepción didáctica donde el eje del currículo sea resolver problemas, resaltan el valor de las creencias epistemológicas en el aprendizaje de las matemáticas como un elemento que puede afectar la motivación, las emociones y la ansiedad ante los problemas.

Otros investigadores se han preocupado por identificar procesos de intervención que permitan transformar las creencias de los estudiantes para facilitar el aprendizaje de las matemáticas (Jankvist, 2015; Wang et al., 2019). Stylianides y Stylianides (2014) reportan una investigación en donde se busca dar respuesta a la pregunta ¿es posible desarrollar intervenciones de corta duración en las aulas de matemáticas que tengan un impacto en las creencias específicas de resolución de problemas de los estudiantes? Basando su marco teórico en la noción de memoria episódica de Tulving y las creencias de autosuficiencia de Bandura, se diseñó un problema que se aplicó a los estudiantes, se tomaron videos de la implementación y se realizaron observaciones de campo; la investigación concluyó que las intervenciones de corta duración en el aula pueden impactar positivamente aspectos afectivos y cognitivos de los estudiantes, es decir que pueden incidir en la transformación de las creencias de los estudiantes frente a la resolución de problemas.

Una línea del estudio de las creencias que también ha despertado interés en los investigadores es la que vincula las creencias con diferentes elementos del dominio afectivo de las matemáticas y su relación con el éxito o el fracaso en el aprendizaje (Cerda et al., 2016; Di Martino y Zan, 2011; Molera Botella, 2012; Niepel et al., 2018; Martínez-Padrón, 2013; Pitsia et al., 2017). En esta línea de trabajo, Pongsakdi et al. (2019) investigaron sobre el papel que tienen las creencias y las variables motivacionales en la mejora de la resolución de problemas de palabras con contenidos matemáticos, el estudio se llevó a cabo con estudiantes de cuarto y sexto grado de escuelas primarias. Los elementos utilizados en la recolección de información fueron una prueba de resolución de problemas de palabras; un cuestionario de motivación y otro de creencias sobre resolución de problemas de palabras con contenidos matemáticos. El estudio concluyó que el programa de enriquecimiento de palabras (WPE)

impacta positivamente tanto el desempeño de los estudiantes, como sus creencias acerca de la naturaleza de la resolución de problemas con contenidos matemáticos.

Burrus y Moore (2016) examinaron que tan importantes son las creencias y las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes cursantes de tercero y cuarto año de secundaria. Para ello aplicaron una encuesta en línea, denominada American College Test (ACT) cuyos puntajes fueron relacionados con las calificaciones obtenidas en los cursos de matemáticas que habían tomado previamente. Los investigadores concluyeron que, efectivamente las creencias y las actitudes hacia las matemáticas de ese grupo de estudiantes son predictores de su motivación y comportamiento con respecto al logro en matemáticas; así mismo, se pudo concluir que esas actitudes y creencias se pueden alterar con intervenciones simples que tengan como objetivo cambiar los conceptos erróneos de los estudiantes. Este tipo de intervenciones inciden sobre el comportamiento y los resultados educativos del estudiante.

2.1.2 Creencias de los estudiantes de secundaria frente a conceptos asociados a la probabilidad.

Diferentes estudios en educación matemática se han centrado en identificar las creencias y los sistemas de creencias de los estudiantes y su relación con el desarrollo del razonamiento probabilístico (Amir y Williams, 1999; Fischbein y Schnarch, 2016; Rubel, 2007; Sánchez y Benítez, 1997; Sharma, 2016; Watson et al., 2004). Se han identificado cuatro perspectivas desde dónde se ha abordado la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, ellas son: “actitudes y creencias, con potencial de influencia cultural sobre ellas; la necesidad de comprender y apreciar el espacio muestral como subyacente al cálculo de probabilidades; la ley de los grandes números; y dos temas secundarios avanzados, problemas binomiales y condicionales” (Watson, 2014).

A pesar de la importancia de estos estudios, la investigación ha sido escasa en los últimos 10 años, conservándose aún algunos direccionamientos como los propuestos por Amir y Williams (1999), quienes plantean que el lenguaje, las creencias y la experiencia son elementos culturales que influyen en el conocimiento de los niños sobre la probabilidad, siendo las creencias el componente de mayor incidencia en el desarrollo del pensamiento probabilístico. Asimismo, Konold (1991) argumenta que una de las principales razones por

las que es difícil la enseñanza de la probabilidad radica en que los estudiantes traen al aula una variedad de creencias sobre el azar.

Los investigadores coinciden en que creencias como la suerte (Watson et al., 2004), la intervención divina (Sharma, 2006), el control humano sobre los objetos generadores de aleatoriedad (Amir y Williams, 1999; Ang y Shahrill, 2014; Nicolson, 2005) están presentes en el razonamiento de algunos estudiantes al abordar situaciones en las que intervienen eventos aleatorios, o al tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. En este sentido, “una serie de estudios de investigación desde diferentes perspectivas teóricas y contextos culturales muestran que los estudiantes tienden a tener ciertas creencias sobre la probabilidad que impactan negativamente su aprendizaje” (Sharma, 2016). Frente a esta problemática, se considera que el conocimiento de las creencias de los estudiantes, por parte de los maestros, es un elemento central para comprender sus razonamientos y posiblemente ayudar a los estudiantes en el mejoramiento de sus procesos de aprendizaje (Erazo y Aldana, 2015; Fajardo y Benítez, 2020; Konold, 1991; McDonough y Sullivan, 2014; Prendergast et al., 2018).

2.1.3 Acerca de la resolución de problemas

La resolución de problemas es una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas (Benítez, 2006; English y Sriraman, 2010; MEN, 1998; NCTM, 2000; Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2014; Schoenfeld, 1992), destacando Halmos (1980) que el corazón de las Matemáticas son los problemas y su resolución va más allá de lo meramente cognitivo, lo que obliga a considerar otros factores como los de ámbito metacognitivo, social y afectivo (Martínez- Padrón, 2021). Dicha importancia se ha visto reflejada en múltiples documentos yendo desde comunicaciones breves hasta memorias y libros de investigadores de gran reconocimiento en el campo, basta observar publicaciones como *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985), *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics* (Jurdak, 2016), *Problem Solving in Mathematics Education ICME-13 Topical Surveys* (Liljedahl et al., 2016) y la *Encyclopedia of mathematics education* (Santos-Trigo, 2014).

Los trabajos de George Polya y su libro “Cómo plantear y resolver problemas” (*How to Solve It*, en el original en inglés), publicado en 1945, son considerados iniciadores de la

investigación sistemática sobre la resolución de problemas de matemática (Bingolbali y Bingolbali, 2019; Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2019). A partir de este trabajo seminal, English y Gainsburg (2015) identifican dos enfoques: el primero es cómo enseñar a los estudiantes a resolver problemas de matemática y el segundo es definir cuál es el propósito de esta resolución en el aula de clase.

Desde la línea de cómo enseñar a los estudiantes a resolver problemas, en la última década se han reportado algunas investigaciones que continúan tomando como referente los pasos propuestos en el modelo de Polya (Eisenmann et al., 2015; S. Y. Lee, 2016; Tjoe, 2019), siguiendo, al menos, algunas de las etapas propuestas: entender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás o examinar la solución obtenida, centrando su atención en el mejoramiento de los estudiantes para enfrentarse a cualquier problema, a través de una lista de pasos y algunas estrategias de solución preestablecidas.

Hensberry y Jacobbe (2012) intentan aumentar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al hacerles seguir las fases de Polya y llevar un diario del proceso. Sostienen que este tipo de experiencias puede conducir a estrategias de solución más ricas y, a aumentar la capacidad para resolver problemas. Tjoe (2019) centra su estudio en “mirar hacia atrás”, planteando que el realizar el análisis retrospectivo de cómo se resolvió un problema, permite identificar otros métodos de solución, del mismo problema, advierte que la práctica de “mirar hacia atrás” no se ha integrado de manera efectiva en la instrucción en el aula por lo que propone considerar otros estudios que examinen un marco pedagógico que integre la necesidad de resolver problemas utilizando diferentes métodos de solución. Albarracín y Gorgorió (2014) se centran en “diseñar un plan”, estudio enfocado en los planes y esquemas destinados a resolver problemas diseñados por estudiantes, abordando problemas de Fermi, los cuales involucran grandes números. Concluyen que los estudiantes son capaces de crear esquemas que incluyen estrategias matemáticas adecuadas para resolver los problemas presentados.

Considerando que “tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata.” (Polya, 1962), entonces, para darle solución se debe activar un proceso de búsqueda de conocimientos y de heurísticas que puedan resultar de utilidad para lograr el objetivo.

Aunque los aportes de Polya siguen siendo valiosos para el desarrollo del campo de la resolución de problemas con contenidos matemáticos “la investigación ha indicado que enseñar a los estudiantes a usar estrategias generales de resolución de problemas y heurísticas tiene poco efecto en que los estudiantes sean mejores solucionadores de problemas” (Lester y Cai, 2016), esta idea es compartida por algunos investigadores destacados como Schoenfeld (1992), English y Gainsburg (2015) y Bingolbali y Bingolbali (2019). La investigación posterior a los trabajos de Polya, ha mostrado el camino para nuevas perspectivas en la resolución de problemas, que apuntan a definir cuál es el propósito de la resolución de problemas en el aula de clase.

Otros investigadores han realizado estudios aproximándose más al enfoque de Alan Schoenfeld (Benítez, 2006, Santos-Trigo 2014); reconociendo que sus propuestas tienen fuertes raíces en los argumentos de Polya, sin embargo, están de acuerdo en que cuando se quiere trabajar utilizando la resolución de problemas, cómo una estrategia didáctica, es necesario tener en cuenta otros aspectos que van más allá del uso de heurísticas, como por ejemplo el dominio de estrategias metacognitivas y la influencia del sistema de creencias en la resolución de problemas.

En este sentido, Schoenfeld (1985) establece cuatro categorías para enfocar la resolución de problemas, a saber: los recursos, estrategias cognitivas, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias. Los recursos centrados en los conocimientos específicos de matemáticas con los que cuenta un estudiante y que pueden ser utilizados al abordar la resolución de un problema. Las estrategias cognitivas definidas como las maneras y técnicas implementadas para encontrar caminos de solución a un problema. Las estrategias metacognitivas, compuestas por actividades de control asumidas por los individuos para monitorear y autoevaluar la resolución de un problema, tienen el propósito de no solo entender el enunciado del problema, revisar los recursos y los caminos de solución seleccionados, sino monitorear los cálculos, revisar si lo encontrado es solución de problema y si existen alternativas de solución. Las creencias, entendidas como todo lo que una persona piensa acerca de las matemáticas, o de una parte de ella, determinan la forma como un individuo selecciona recursos y estrategias para resolver un problema.

La literatura evidencia, también, el impulso que se ha dado en la última década a la propuesta de enseñar matemáticas a través del método de resolver problemas. Este método se

apoya en el problema como el punto de partida para el aprendizaje y el proceso de resolución se convierte en el camino que permite la construcción del conocimiento matemático.

Para Onuchic (1999) la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas difiere de los enfoques que privilegian las reglas sobre el “cómo”, abandonando de cierta manera el dominio de los procedimientos algorítmicos o la adquisición de conocimientos a través de la rutina o el ejercicio mental. Dentro de este marco, se han realizado estudios de investigación enfocados en la educación básica (primaria y secundaria) que dejan claro la vigencia de la resolución de problemas y la preocupación por identificar elementos didácticos que puedan fortalecer a los estudiantes en el desarrollo de habilidades para plantear, definir y solucionar problemas (Jones y Inglis, 2015; Lee, 2016; Sumirattana et al., 2017; Yuanita et al., 2018).

En esta línea Bingolbali y Bingolbali (2019) reportan una investigación que explora cómo se aborda la resolución de problemas desde dos libros de texto de matemáticas de grado sexto, los cuales se analizan desde tres enfoques de enseñanza: “para, sobre y mediante” la resolución de problemas. El estudio muestra que ninguno de los libros fue guiado por un enfoque específico de los planteados para la enseñanza y concluyeron que siendo el libro de texto un elemento esencial de guía para algunos maestros, se corre el riesgo de que estos no sigan ningún enfoque de resolución de problemas en la práctica, lo que podría afectar la calidad de la instrucción sobre el tema. Yuanita et al. (2018) buscan identificar el papel de la representación matemática como mediador entre las creencias y la resolución de problemas en estudiantes de secundaria, utilizando el enfoque de la educación matemática realista como un marco para resolver y proponer problemas que se basan en rutinas diarias y situaciones suficientemente conocidas por los estudiantes. Los resultados del estudio muestran que el uso de este enfoque aumenta la confianza de los estudiantes al abordar la solución de problemas de aritmética y motiva a los estudiantes para proponer sus propias ideas frente a situaciones o experiencias de la vida real.

2.1.4 Sobre la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad.

Los procesos de resolución de problema facilitan la comprensión de los conceptos y potencian el desarrollo del pensamiento matemático (Schoenfeld, 1992); como afirman Penalva et al. (2010) esta situación no es diferente para el caso del dominio de la

probabilidad, por ejemplo, Batanero (2005) sostiene que, desde hace algunos años la investigación sobre la enseñanza y la resolución de problemas es una de las líneas centrales de la investigación sobre didáctica de la probabilidad.

En la última década, algunos investigadores se han centrado en analizar la capacidad que tienen los estudiantes como resolutores y en identificar las posibles dificultades que presentan en los proceso de solución, al igual que en indagar sobre estrategias que posibiliten el mejoramiento de sus competencias al abordar problemas que involucren conceptos asociados con la probabilidad (Alonso-Castaño et al., 2019; Awuah y Ogbonnaya, 2020; Beitzel et al., 2011; Huerta y Bresó, 2013; Obersteiner et al., 2015; Penalva et al., 2010; Raya, 2020; Zahner y Corter, 2010).

Raya (2020), por ejemplo, describe algunas estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de probabilidad, haciendo énfasis en que estas estrategias rara vez son estudiadas a profundidad. La investigación concluye que las estrategias usadas para abordar problemas de probabilidad varían según la capacidad que tenga cada individuo de comprender la información y del conocimiento que posea cada persona al enfrentar situaciones de probabilidad.

Obersteiner et al. (2015), realizan un estudio sobre cómo los estudiantes utilizan el razonamiento combinatorio en la resolución de problemas; informan que los estudiantes a menudo comienzan en el nivel más alto sin una comprensión relacional y, de lo contrario, cometen fácilmente errores al intentar ir de un nivel inferior a uno más alto. Afirma que algunos estudiantes esperan resultados más rápidos utilizando fórmulas, sin embargo, quienes muestran una mayor comprensión de los conceptos obtienen mejores resultados. Por su parte, Awuah y Ogbonnaya (2020) presentan un estudio en esta línea que busca identificar qué tan competentes son los estudiantes para resolver problemas de probabilidad. Utilizando tablas de contingencia y diagramas de árbol, observaron que, aunque los estudiantes podían dibujar algunos diagramas, no podían interpretar el diagrama ni utilizarlo adecuadamente en la solución de problemas; se observó que esta dificultad es fruto de que los estudiantes no tengan una comprensión completa de las leyes y principios de la probabilidad.

Otros investigadores se han preocupado por identificar cómo incide la resolución de problemas en la comprensión conceptual de elementos de la probabilidad (Busadee y Laosinchai, 2013; Coenen et al., 2018; Heyvaert et al., 2018; Martin et al., 2018; Martin y

Theis, 2012). En esta línea se destaca el trabajo de Martin et al. (2018), en donde se abordan problemas de probabilidad como una tarea matemática que le permite al estudiante el desarrollo de nuevos conocimientos a partir de la comprensión de los conceptos involucrados en los problemas planteados. En el estudio, se discuten argumentos de gran relevancia tales como la importancia del trabajo colaborativo en la solución de problemas de probabilidad, la importancia de establecer una conexión entre los enfoques teórico y experimental para apoyar el pensamiento probabilístico de los estudiantes y algunos elementos que permiten identificar la probabilidad, como una de las ramas de las matemáticas con una connotación menos negativa que otras.

Investigaciones han documentado el uso de recursos utilizados en el aula, entre otros el apoyo que brindan los libros de texto a los maestros, desde los enfoques de resolución de problemas que se plantea en ellos (Lonjedo et al., 2012; Sánchez-Acevedo, 2017).

Por otra parte, la investigación sobre la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad se ha centrado en problemas que involucran el análisis combinatorio (Busadee y Laosinchai, 2013; Coenen et al., 2018; Zahner y Corter, 2010), así como en problemas de probabilidad condicional (Huerta y Bresó, 2013; Lonjedo et al., 2012; Zahner y Corter, 2010) y en menor escala al uso de representaciones gráficas en la resolución de problemas (Awuah y Ogbonnaya, 2020; Obersteiner et al., 2015).

2.1.5 Acerca de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

La investigación sobre el impacto de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas se ha multiplicado considerablemente (Ball et al., 2018; Drijvers et al., 2016; Drijvers, Kieran, et al., 2010). Un grupo significativo de investigadores ha realizado estudios que sustentan la importancia que puede tener el uso apropiado de las herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Artigue, 2010; Kuzle, 2013; Santos-Trigo et al., 2016).

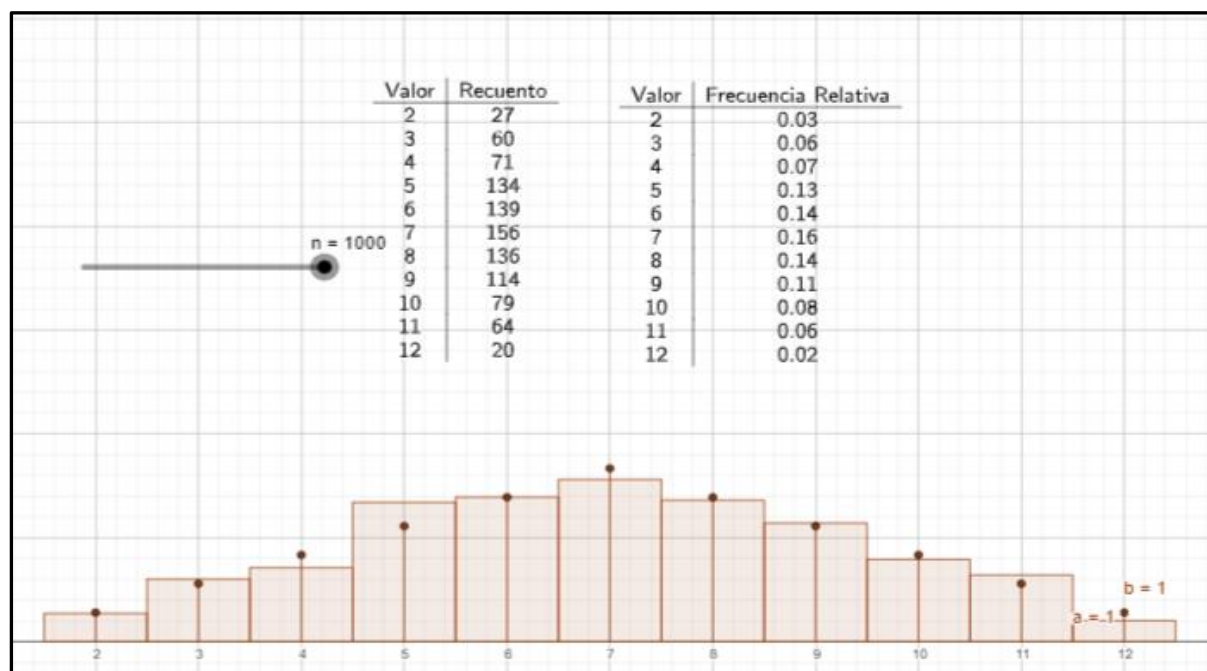
Heid (2018) considera que la incorporación de tecnología digital específica de matemáticas en la instrucción de los estudiantes puede cambiar las representaciones que ven, la actividad matemática en la que participan y el contenido matemático que aprenden. En este sentido, se ha planteado que el uso de software dinámico como GeoGebra y Cabri, así como algunas aplicaciones de internet propician múltiples representaciones y visualizaciones,

favoreciendo la comprensión de los conceptos matemáticos (Goos, 2014; Santos-Trigo et al., 2016; Santos-Trigo y Machín, 2013). Otros argumentan que hacer uso de herramientas digitales al resolver problemas no rutinarios de matemáticas fomentan la creatividad de los estudiantes (Goos, 2010). Santos-Trigo y Machín (2013) afirman que la tecnología digital brinda distintas posibilidades para que los estudiantes representen, exploren y resuelvan tareas matemáticas, y Leung (2011) considera que la tecnología es una herramienta pedagógica que puede enriquecer la capacidad cognitiva de los estudiantes.

Específicamente en el área de probabilidad, algunos investigadores creen que las herramientas que brinda la tecnología permiten generar una gran cantidad de información, además de producir de manera rápida diferentes tipos de representaciones y la ventaja de realizar cálculos con facilidad, lo que redundaría en que los estudiantes puedan dedicar más tiempo a la comprensión de los conceptos (Batanero et al., 2016; Borovcnik y Kapadia, 2010; Parzysz, 2018).

Por ejemplo, en la Figura 1, se presenta una simulación realizada con GeoGebra en la que se observan 1000 lanzamientos de un par de dados, los resultados de la suma de los dados, así como sus frecuencias absolutas y relativas. En esta simulación se manejan de manera simultánea representaciones tabulares y representaciones gráficas, lo cual puede ayudar al estudiante a mejorar la comprensión sobre estos fenómenos de probabilidad.

Figura 1. Simulación en GeoGebra para 1000 lanzamientos de dos dados



Como lo argumentan Pratt y Kazak (2018) “la investigación continúa sugiriendo que ciertos tipos de tecnología, utilizados en situaciones cuidadosamente diseñadas, pueden ofrecer oportunidades para el aprendizaje probabilístico que van más allá de las disponibles en la experiencia diaria” (p. 211).

Prodromou (2012) sostiene que la Tecnología Digital que ayuda en la manipulación y representación de datos, facilita a los estudiantes realizar inferencias, sin depender exclusivamente de la comprensión clásica de la probabilidad, en este sentido, la investigación viene enfatizando en que la probabilidad debe enseñarse a partir del análisis de fenómenos del mundo real, por lo que tanto la modelación cómo la simulación de estos fenómenos se han convertido en un objeto de estudio central en el campo (Batanero et al., 2016).

Se han documentado una serie de investigaciones en las que el uso de herramientas digitales especializadas en simulación probabilística tales como Fathom, Tinkerplot, GeoGebra, Probability Explorer, Excel y otros recursos que ofrece internet, han sido utilizados para indagar sobre los procesos de razonamiento de los estudiantes, y determinar si la enseñanza mediada por tecnología favorece el aprendizaje formal de la probabilidad (Aizikovitsh-Udi y Radakovic, 2012; Ben-Zvi et al., 2012; Coutinho y Caberlim, 2015; Gürbüz y Birgin, 2012; Lee et al., 2010; Stack y Watson, 2013; Yáñez y Jaimes, 2013).

Gürbüz y Birgin (2012) han investigado sobre cuáles son los efectos de la enseñanza asistida por computador (CAT) para remediar conceptos erróneos que los estudiantes tienen sobre la probabilidad. Utilizando herramientas digitales como el software Macromedia Dreamweaver, Flash MX 2004, el lenguaje Java y el editor NetBeans, con el fin de crear sus propias animaciones y simulaciones enfocadas en comparaciones de probabilidad y los conceptos de equiprobabilidad y representatividad, concluyeron que la CAT favorece el aprendizaje de la probabilidad y la transformación de los conceptos erróneos, ya que permite al estudiante participar en la construcción de su propio conocimiento.

Yáñez y Jaimes (2013) presentan un trabajo en el que indagan sobre los procesos de razonamiento probabilístico de los estudiantes, respecto a la ley de los grandes números. Se apoyaron en el uso de simulaciones generadas en el software Probability Explorer, asumiendo que la simulación computacional de la probabilidad permite superar algunos sesgos y malas concepciones de los estudiantes. Al respecto, concluyen que para que los estudiantes comprendan los conceptos de variabilidad en el corto plazo y estabilidad de las frecuencias relativas deben realizarse actividades bidireccionales que involucren el espacio muestral y los resultados obtenidos.

English y Watson (2016) informan sobre una investigación en dónde estudiantes de educación primaria experimentan sobre los conceptos de variación y expectativa a partir del lanzamiento de monedas, utilizando en algunas ocasiones simulaciones con el apoyo del software TinkerPlots. Entre los hallazgos reportan que los estudiantes desarrollaron una mejor comprensión de la relación entre frecuencia relativa y probabilidad teórica, así como sus respectivas asociaciones entre variación y expectativas. En general, los estudiantes mostraron mejores niveles de comprensión frente a la probabilidad.

2.2 Bases Teóricas

Algunos investigadores se han ocupado del estudio de las creencias y cómo estas pueden favorecer o perjudicar la forma en que los individuos comprenden conceptos matemáticos y abordan la resolución de problemas. Para este estudio, relacionado con la probabilidad, se presentan algunas nociones teóricas sobre la conceptualización de creencias, destacando el marco propuesto por Callejo, y Vila (2004) para identificar, evaluar y modificar creencias, así como los planteamientos de Polya (1945) y Schoenfeld (1985, 1992), respecto a

estrategias cognitivas y metacognitivas utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a problemas matemáticos. Son tenidos en cuenta los estudios de Moreno-Armella (2017) y Santos-Trigo (2014) frente a la mediación de herramientas digitales en los procesos de resolución de problemas en Educación Matemática.

2.2.1 Las creencias de los estudiantes y los sistemas de creencias. Un camino que define el proceso de resolución de problemas

Muchos estudios han destacado un papel importante de las creencias de los estudiantes en la resolución exitosa de problemas de matemáticas (Callejo y Vila, 2003; Martínez-Padrón, 2021; Prendergast et al., 2018; Schoenfeld, 1992), asignándole un rol significativo frente a la toma de decisiones que emprenden al enfrentarse a una tarea no rutinaria. Hay quienes afirman que las creencias pueden definir la manera en que los individuos, ya sean profesores o estudiantes; se involucran en actividades de resolución de problemas, lo que implica que estas conducen a acciones particulares tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con Fajardo y Benítez (2020), La investigación sobre identificación de creencias carecería de valor si no se desarrollaran estrategias que ayuden a los estudiantes a superar las creencias menos positivas ante el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas, por lo que es necesario realizar procesos que permitan evaluar dichas creencias. Desde la perspectiva de Callejo y Vila (2004), al evaluar creencias en los estudiantes, deben considerarse los siguientes aspectos:

1. ¿Por qué evaluar las creencias?: Es importante conocer las creencias de los estudiantes, porque estas pueden influir en su motivación, su enfoque hacia el aprendizaje y su éxito académico. Por otra parte, cuando se comprenden las creencias de los estudiantes “es posible ajustar progresivamente la intervención educativa a las características y necesidades del alumnado” Callejo y Vila (2004, p.103).

2. ¿Qué evaluar?: Es necesario evaluar las creencias explícitas, es decir las que los estudiantes pueden expresar directamente. También las creencias implícitas, que son aquellas que subyacen de manera inconsciente en las acciones y actitudes de los estudiantes. Callejo y Vila (2004), consideran que además de identificar las creencias e inferir su estructura (Explícitas-implícitas), es necesario identificar aspectos en la formación sobre los

cuales se puede incidir para un cambio, así como realizar procesos de seguimiento a la evolución y modificación de las creencias.

3. ¿Quién debe evaluarlas?: Los procesos de evaluación de creencias pueden ser realizados por investigadores, educadores, psicólogos, y otros profesionales capacitados para ello, pero debe involucrarse la autoevaluación de los estudiantes, permitiéndoles reflexionar sobre sus propias creencias.

4. ¿Cómo y cuándo deben ser evaluadas?: Callejo y Vila (2004) manifiestan que puede diseñarse un sistema de evaluación de creencias que contemple unos instrumentos, unos momentos y unos criterios. Los instrumentos deben hacer referencias a tres necesidades distintas, (a) Instrumentos de recogida de información con relación a los objetos de evaluación; (b) Instrumentos de categorización, registro e interpretación de la información; (c) Instrumentos de devolución de esta información ya elaborada.

Se puede hacer uso de cuestionarios, entrevistas, observación y análisis de las respuestas y comportamientos de los estudiantes. Estas actividades pueden llevarse a cabo tanto al inicio de un programa educativo, así como a lo largo del proceso de aprendizaje o como un componente de la evaluación al finalizar una intervención

Este apartado de la investigación busca profundizar en el análisis del concepto de creencias, la manera en que se relacionan y su conexión con las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse a problemas en donde se involucra el concepto de probabilidad.

2.2.1.1 Conceptualizaciones sobre creencias

El estudio de las creencias se reconoce en investigación educativa como uno de los componentes centrales del dominio afectivo (Martínez-Padrón, 2021). En lo que respecta al escenario de la educación matemática, los investigadores coinciden en la dificultad que representa definir este término (Callejo y Vila, 2003; Lemus y Ursini, 2016; McDonough y Sullivan, 2014; Stylianides y Stylianides, 2014), por lo que aún no se ha llegado a un acuerdo sobre el concepto de creencia.

Algunos investigadores consideran que una de las dificultades para la conceptualización de las creencias, radica en el hecho de que se han utilizado con diferentes significados y acepciones en distintas áreas del conocimiento y en la vida cotidiana (Callejo y Vila, 2003; Lemus y Ursini, 2016, Pajares, 1992).

Pajares (1992) afirma que las creencias se han relacionado con términos como “actitudes, valores, juicios, axiomas, opiniones, ideología, percepciones, concepciones, sistemas conceptuales, preconcepciones, disposiciones, teorías implícitas, teorías explícitas, teorías personales, procesos mentales internos, estrategias de acción, reglas de práctica, principios prácticos, perspectivas, repertorios de comprensión y estrategia social” (p. 309), por lo que definir las creencias carece de precisión.

Para Callejo y Vila (2003), en la literatura de investigación sobre didáctica de las matemáticas, se encuentran más referencias implícitas que definiciones formales explícitas sobre creencias, que aparece en ocasiones en oposición a conceptos como conocimiento, actitud, concepción, entre otros o como una explicación a determinadas formas de proceder en la actividad matemática.

Estas discrepancias han sido abordadas en estudios que buscan aclarar cada uno de los conceptos involucrados. Abelson (1979) establece una distinción entre conocimiento y creencias, argumentando que el conocimiento es consensuado por grupos humanos, mientras que las creencias no siempre surgen del consenso. Considera además que el conocimiento está sujeto a criterios de verdad, lo cual no siempre aplica para las creencias. Hannula et al. (2007) coinciden con este tipo de planteamientos al concluir que el conocimiento y la creencia son partes distintas del constructo de la cognición.

Respecto a los términos concepción y creencia, se ha considerado que las concepciones son un tipo de estructura mental más general, desde la perspectiva de Thompson (1992) las concepciones engloban las creencias, significados, conceptos, proposiciones y las imágenes mentales, Pajares (1992) sostiene que las creencias son una subcategoría de las concepciones que están relacionadas con las actitudes, valores y convicciones de los individuos.

Desde la mirada de Pajares (1992) las creencias son verdades personales, que se derivan de la experiencia o de la fantasía, se fundamentan en componentes afectivos y valorativos. Para Callejo y Vila (2003) las creencias son un tipo de conocimiento subjetivo que se refiere a contenidos concretos, sostienen que, aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden ser transformadas si los individuos se enfrentan a experiencias que las puedan desestabilizar. Lemus y Ursini (2016) sostienen que son un conjunto de perspectivas

que una persona tiene acerca de las matemáticas y su aprendizaje, y pueden potenciar u obstaculizar el desarrollo de las competencias en esta área del conocimiento.

Schoenfeld (1992) considera que las creencias acerca de las matemáticas son la perspectiva desde la cual cada persona se aproxima al mundo matemático y pueden determinar la forma, los procedimientos, el tiempo y el esfuerzo con que abordará un problema dado. También argumenta que se construyen desde las experiencias y desde la cultura en la que se esté inmerso, enfatiza que los estudiantes adquieren creencias sobre las matemáticas en gran medida a partir de las experiencias positivas o negativas vividas en las aulas de clase. Para el desarrollo de esta investigación se considera una creencia en educación matemática como:

un tipo de conocimiento subjetivo, que se adquiere a partir de experiencias positivas o negativas vividas en los procesos de formación individual y colectiva, es decir que está fuertemente mediado por los sentimientos y las emociones de las personas y por lo tanto son esencialmente construcciones personales y sociales, que pueden definir cómo un individuo abordará el tratamiento y la resolución de un problema matemático, entendiendo así que cada persona podrá verlo de manera diferente (Fajardo y Benítez, 2020).

2.2.1.2 Sistemas de creencias

Algunos investigadores coinciden en que las creencias no son independientes entre sí, por lo que conforman grupos o redes que configuran sistemas. También señalan la ausencia de “consenso sobre la definición de sistema de creencias [y]...en la manera cómo se organizan dichas creencias en estos sistemas” (Stylianides y Stylianides, 2014, p. 9). Callejo y Vila (2003) refrendan que una creencia nunca se sostiene con independencia de otras, destacando que un sistema de creencias no representa una suma de creencias sino una red organizada entendida como un conjunto de creencias aisladas, “hipótesis, expectativas conscientes y subconscientes y posibles interrelaciones entre ellas” (Jankvist, 2015, p. 44).

En tales interacciones interculturales subyacen, afloran, despliegan, fortalecen o cambian no solo las creencias sino las actitudes y los valores que forman parte del factor identitario de los sujetos, configurando en cada uno su propio sistema de creencias (Ross, 2004), el cual interviene e impulsa comportamientos o acciones ante determinados eventos.

Sobre la base de esas particularidades, Ross (2004) señala que un sistema de creencias está conformado por los siguientes componentes básicos: (a) Creencias: convicciones aceptadas que se comportan como principios rectores que no requieren demostración alguna (Martínez-Padrón, 2021); (b) Actitudes: “reacciones valorativas o evaluativas manifiestas a través del agrado o desagrado hacia algún objeto, sujeto o situación” (Martínez-Padrón, 2013, p. 32), involucrando factores como creencias, sentimientos, emociones, valores y disposiciones para actuar de determinadas formas; y (c) Valores: son creencias duraderas consideradas como criterios que utilizan las personas, en base a los cuales actúan (Rokeach, 1973).

Según Borg (2015), las creencias son fundamentales en la definición de tareas y en la selección de herramientas cognitivas útiles para la interpretación y toma de decisiones de los sujetos, jugando un papel preponderante tanto en la organización del conocimiento y la información como en el comportamiento (Turşucu et, al. 2018). Pero, para que se produzcan cambios en los comportamientos de los sujetos es necesario tomar en cuenta su sistema de creencias, en vez de sus creencias aisladas (Misfeldt, Jankvist, y Aguilar, 2016), el cual puede poseer una estructura nuclear de creencias psicológicamente fuertes, que se apoyan mutuamente, pudiendo ser resistentes al cambio. No obstante, se estima que estas creencias pueden cambiar (Walsch, 2003), a pesar de la dificultad que tienen los agentes externos para producir cambios en los comportamientos o en las acciones.

2.2.2 La resolución de problemas: una vía para asumir la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

Es claro para la investigación en Educación Matemática, la importancia de la resolución de problemas como un dinamizador de los procesos centrales de pensamiento (English y Sriraman, 2010; Santos-Trigo, 2014; Schoenfeld, 1992). Los estudios en el campo han informado que resolver problemas permite al estudiante desarrollar sus procesos de razonamiento, transformando sus actitudes frente al aprendizaje (Yuanita et al., 2018).

Se ha documentado que las habilidades de resolución de problemas, no sólo permiten “adquirir formas de pensar, formar hábitos de persistencia y desarrollar confianza para enfrentar situaciones desconocidas” (Santos-Trigo, 2019), sino que potencian el uso del pensamiento matemático creativo de los estudiantes y mejora la capacidad para pensar de

manera crítica frente a situaciones que puedan presentarse tanto dentro como fuera del aula (Eisenmann et al., 2015; van Zanten y van den Heuvel-Panhuizen, 2018), en otras palabras, los procesos de resolución de problemas activan el razonamiento y la comprensión de los conceptos matemáticos (Schoenfeld, 1992), lo que puede considerarse como lo propone Eisenmann et al. (2015), en la base para una educación matemática exitosa.

Lo planteado a nivel de la investigación en otros dominios de la Educación Matemática sobre la resolución de problemas, no es diferente en el caso de la probabilidad, si se tiene en cuenta que esta tiene su origen de manera formal, a partir del interés por resolver problemas asociados con situaciones de azar e incertidumbre (Batanero, 2007; García y Sánchez, 2013; Huerta, 2014; Parzysz, 2018; Stack y Watson, 2013; Zahner y Corter, 2010), de hecho, como afirma (Batanero, 2007) una de las líneas definidas dentro del marco de la didáctica de la probabilidad es la enseñanza y resolución de problemas, en palabras de Huerta (2002) enseñar probabilidad es enseñar resolución de problemas.

Tomando en cuenta los argumentos planteados en los párrafos anteriores, se declara que en este trabajo se integrarán algunas teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas con énfasis sobre la comprensión de los conceptos de probabilidad, teniendo como componente central el análisis de los sistemas de creencias de los estudiantes.

2.2.2.1 El concepto de problema

En general, se ha documentado que la resolución de problemas juega un papel central en la Educación Matemática. Sin embargo, también se ha identificado la dificultad que representa definir de manera universal lo que es un “problema”.

Múltiples estudios ofrecen diferentes conceptos y representaciones de problemas y de la resolución de problemas, sin observar que se haya llegado a un consenso en este campo (English y Gainsburg, 2015; English y Sriraman, 2010). Como un ejemplo de ello, hay quienes consideran que resolver problemas implica transferir conocimientos y habilidades para nuevas situaciones, este tipo de estudios se enfocan en la aplicación de algoritmos y estrategias para la resolución de problemas de matemáticas (Star, 2005; Lesch y Lemon, 1992).

Otros estudios hacen énfasis en la comprensión de los problemas y sus representaciones (Kuzle y Kovacic, 2014; Coob et, al., 1992). Algunos investigadores consideran la resolución de problemas como un proceso que implica planificar, ejecutar y evaluar estrategias de resolución de problemas, por lo que se enfocan principalmente en el pensamiento crítico, la toma de decisiones y las estrategias de metacognición (Kaput y Tinker, 2002; Costa y Kallick, 2018; Yun-Dai, 2017, Schoenfeld 1985).

Otros estudios resaltan la importancia de resolver problemas auténticos y contextualizados, relacionados con la cotidianidad de los estudiantes, centrados en aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones reales y a desarrollar habilidades para resolver problemas del mundo real (Carlson y Rasmussen, 2010; Boaler, 2009).

Para Castro Martínez (2008) la dificultad para definir el término problema en Educación Matemática puede originarse en las diferentes aproximaciones teóricas que se han realizado desde diversas miradas, como la de los filósofos, psicólogos, matemáticos y educadores matemáticos. Para Schoenfeld (1985) la complejidad de definir el término radica en las relaciones que establece un individuo con la tarea que realiza, afirmando que la definición de un problema es relativa, pues lo que para unos es un problema, para otros puede considerarse simplemente un ejercicio, dependiendo de la difícil que resulte para quién intenta resolverlo.

Desde los planteamientos de Polya (1945), tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata. Charles y Lester (1982) señalan que un problema es una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución. Estas definiciones coinciden en gran medida en la propuesta por Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen (2018) quienes expresan que un problema es una tarea matemática no rutinaria para la cual los estudiantes no tienen inmediatamente una estrategia de solución particular a su disposición, por su parte (Martin et al., 2018) definen un problema como una tarea matemática que permite a un estudiante desarrollar nuevos conocimientos a través de la actividad matemática real.

En este sentido, con fundamento en la revisión de la literatura sobre la definición de problema, en el desarrollo de esta investigación se entiende el término “problema” como una tarea no rutinaria, que permite al estudiante desarrollar nuevos conocimientos y que es

abordada inicialmente sin tener todos los recursos y las estrategias necesarias para ser resuelto.

2.2.2.2 Polya. Un método para la resolución de problemas

El trabajo de Polya (1945) es considerado como el inicio de la investigación sobre la resolución de problemas en Educación Matemática (Bingolbali y Bingolbali, 2019 Santos-Trigo, 2014, Schoenfeld 1992).

English y Gainsburg (2015) argumentan que a partir del trabajo de Polya, se identifican al menos dos enfoques. Por una parte, propone cómo enseñar a los estudiantes a resolver problemas y por otra se intenta definir cuál es el propósito de la resolución de problemas en el aula. En términos generales, el trabajo está centrado en la enseñanza de los diferentes tipos de habilidades que requieren los estudiantes para resolver problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985).

Polya propone en su libro "Cómo Resolverlo" publicado en 1945, un método que no solo busca que el resolutor encuentre solución al problema, sino que utilice y desarrolle conocimientos y habilidades que lo hagan competente en la resolución de problemas en general. Este método está constituido por cuatro etapas que son:

Comprender el problema: No es posible resolver un problema si no se ha comprendido su enunciado, para el estudiante debe quedar claro cuáles son los datos, cual es la incógnita y cuales las condiciones que se establecen en el enunciado, determinar si estas condiciones son necesarias, suficientes, relevantes, redundantes y contradictorias entre la información dada.

Concebir un plan: En este paso es importante el conocimiento y la creatividad de quién aborda el problema, estos elementos le permitirán al resolutor encontrar estrategias, procedimientos y operaciones necesarias para resolverlo, como lo argumenta Tjoe (2019) un plan bien ideado hace la conexión más directa entre los datos y las incógnitas. Polya presentó diferentes estrategias heurísticas para resolver problemas, entre otras: utilizar diagramas para representar el problema, considerar problemas similares, dividir un problema en subproblemas, observar casos especiales para determinar patrones, trabajar hacia atrás. El uso de heurísticas presentadas en forma de sugerencias o preguntas pueden llevar al estudiante a concluir aspectos importantes del plan de solución al problema, tales como técnicas a utilizar o métodos a seguir.

Ejecutar el plan: En este paso el resolutor debe implementar las estrategias seleccionadas en el plan, considerando que se debe conceder un tiempo razonable para su ejecución y que de no poder encontrar una posible solución correcta es preferible dejar de lado el problema y retomarlo en otro momento.

Examinar la solución, mirar hacia atrás: Llegar a una solución del problema no significa necesariamente que el proceso haya terminado. Una mirada retrospectiva permite al resolutor revisar su trabajo y determinar si se han cometido errores, o si se ha trabajado de manera acertada, los resultados y los métodos utilizados pueden ser valiosos para su uso en futuros problemas.

2.2.2.3 El trabajo de Alan Schoenfeld

Schoenfeld (1985) desarrolló un programa de investigación centrado en el análisis de las formas de pensamiento matemático que tienen los estudiantes al resolver problemas. Sugiere que en las aulas de clase se deben generar condiciones que reflejen el microcosmos que caracterizan las prácticas matemáticas de los expertos.

Un elemento central en el trabajo de Schoenfeld es definir y caracterizar lo que significa pensar matemáticamente, en ese aspecto Schoenfeld (1992) afirma que aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático: valorar los procesos de matematización y abstracción y tener la predilección por aplicarlos, y (b) desarrollar competencia con las herramientas del oficio y usar esas herramientas en el servicio del objetivo de comprender la estructura: dar sentido matemático.

Por otra parte, busca documentar como los estudiantes desarrollan habilidades para resolver problemas y como el uso de estas habilidades los convierten en resolutores exitosos de tareas matemáticas.

En su libro “Mathematical Problem Solving” publicado en 1985, Schoenfeld utiliza un conjunto de problemas no rutinarios, buscando involucrar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas que impliquen el uso de estrategias heurísticas, como resultado de su estudio establece cuatro categorías para enfocar la resolución de problemas: los recursos, estrategias cognitivas o heurísticas, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias, como afirma Santos-Trigo (2014) estas categorías están entrelazadas y arrojan luz sobre las formas

de orientar el desarrollo gradual de las competencias de resolución de problemas de los estudiantes.

Los Recursos: Son los conocimientos matemáticos previos que posee un individuo al enfrentarse a un problema, como lo expresa Schoenfeld (1985,1992), hace parte de esta categoría, el conocimiento informal e intuitivo sobre el dominio del problema, la capacidad de ejecutar procedimientos algorítmicos, los conceptos y definiciones, la familiaridad con los procedimientos de rutina al abordar un problema.

Estrategias cognitivas: Estas estrategias son métodos heurísticos que pueden ser de gran utilidad al abordar y resolver un problema, son consideradas estrategias y técnicas que permiten avanzar en el proceso de resolución, entre otras se pueden mencionar: descomponer el problema, invertir el problema, relajar las condiciones del problema, introducir un elemento auxiliar, realizar analogías con otros problemas, entre otras.

Schoenfeld (1985) considera que desde la mirada de Polya, pareciera que para cada tipo de problema es necesario la utilización de un grupo de estrategias particular, plantea que las estrategias heurísticas observadas desde esta perspectiva son muy generales y que implicarían el uso de tiempo que el estudiante podría utilizar en aprender otros conceptos.

Estrategias metacognitivas: Para Schoenfeld (1985), esta categoría se ocupa de la manera en que los individuos utilizan la información que está a su disposición, está centrada en las decisiones importantes sobre qué hacer o deshacer en un problema. Las estrategias metacognitivas o de control consisten en el monitoreo del propio resolutor sobre el proceso y la validación de los resultados de los pasos utilizados en la solución del problema.

Desde el punto de vista de Schoenfeld (1992), los matemáticos expertos dedican gran parte de tiempo a entender y dar sentido al problema, se observa que constantemente revisan lo que hacen y realizan verificación del proceso, mientras que los estudiantes en las aulas de clase, no cambian con facilidad las estrategias utilizadas a pesar de que los resultados no se puedan dar.

Sistemas de creencias: Para Schoenfeld (1992) las creencias acerca de las matemáticas son la perspectiva desde la cual cada persona se acerca al mundo matemático y pueden determinar la forma, los procedimientos, el tiempo y la intensidad del esfuerzo con que abordará un problema. En este sentido considera que las creencias establecen el marco bajo el cual se utilizan los recursos, las heurísticas y el control.

Schoenfeld (1992) plantea que los estudiantes abstraen sus creencias acerca de las matemáticas en gran medida de sus experiencias en las aulas de clase, y reconoce que las creencias moldean su comportamiento de tal forma que pueden tener consecuencias poderosas en el aprendizaje, pero que a menudo esas consecuencias son negativas. Estas creencias pueden incidir en la manera como los estudiantes abordan los problemas, principalmente las que plantean que no todas las personas pueden ser resolutores exitosos, algunas de estas creencias son: Sólo los genios son capaces de descubrir o crear matemáticas (Schoenfeld, 1985), las matemáticas son para gente creativa; el resto sólo intenta aprender lo que se le transmite (Garófalo, 1989), los alumnos que entienden matemáticas son capaces de resolver cualquier problema (Schoenfeld, 1992).

2.2.3 Caracterización del razonamiento probabilístico

Desde hace varias décadas, la pretensión de mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre ha sido motivo de preocupación entre quienes investigan sobre Educación Matemática, en vista de que no ha podido cristalizarse un desarrollo favorable del aprendizaje de los contenidos matemáticos, por parte de los estudiantes. Tal problemática debe seguir arrostrándose, debido a que, casi siempre, los aprendices tienen pendiente la posesión y el manejo de las pericias requeridas para la resolución de problemas de Matemática, lo cual sigue ocurriendo a pesar de los avances tecnológicos actuales (Martínez-Padrón, 2021).

Puede observarse que sigue vigente la necesidad de propiciar la comprensión y el mejoramiento de los procesos de formación de los estudiantes. Por tanto, resulta oportuno seguir indagando en este sentido si lo que se quiere es transformar, hacia el mejoramiento, las acciones didácticas mediante la puesta en escena de procesos proyectados, consensuados y respaldados en constructos que permitan mejorar todo aquello que tenga que ver con el aprendizaje de la Matemática, tal como ocurre con la investigación didáctica llevada a cabo con la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, la cual es una rama de la Matemática que se ocupa de determinar si un fenómeno o evento aleatorio puede ocurrir o no bajo determinadas condiciones

La probabilidad surgió como un intento por responder interrogantes relacionadas con los juegos de azar, su utilidad en la cotidianidad y su papel instrumental en diferentes disciplinas, en otras palabras, por la necesidad de razonar para resolver problemas.

Jones y Thornton (2005) sostienen que la investigación sobre el razonamiento probabilístico se origina en los estudios presentados por Piaget e Inhelder (1966), quienes si bien no estaban preocupados por los procesos de enseñanza y aprendizaje, se ocuparon de identificar las etapas de desarrollo en que los individuos tienen acceso, con comprensión, a las ideas sobre aleatoriedad y probabilidad, destacando en sus hallazgos que los niños sólo eran capaces de enfrentarse con la probabilidad cuando alcanzaban la etapa operativa formal, es decir, después de los 11 años, etapa en la que ya podían abordar el razonamiento proporcional y combinatorio.

Diferentes estudios se han preocupado en identificar teorías y modelos cognitivos que favorezcan los procesos de razonamiento probabilístico de los estudiantes (García y Sánchez, 2013; Gómez, 2003; Polaki, 2002; Sánchez y Landín, 2014). “Estos modelos sugieren diferentes niveles o patrones de crecimiento en el razonamiento probabilístico” (Mooney et al., 2014, p. 495).

Esta investigación se apoya en una clasificación propuesta por Sánchez y Benítez (1997), la cual se sostiene en cinco niveles de razonamiento utilizados por los estudiantes, al momento de enfrentarse a problemas que involucran el concepto de probabilidad (ver Tabla 1).

Tabla 1. Niveles de razonamiento probabilístico

Nivel	Agrupación a las personas que...
1. Impredicción	Al estar en situaciones de azar, les es completamente imposible predecir resultados
2. Determinístico	explican el comportamiento de los fenómenos de azar, mediante alguna causa poderosa que los rige: ▪ Físicas ▪ Mítico/Mágicas ▪ Empíricas
3. Mecánico	incorporan constructos de la Matemática para explicar fenómenos de azar, pero la cita se hace fuera de contexto.
4. Pre-rigor	utilizan argumentos desde el punto de vista matemático, alejándose del pensamiento determinístico. Tienen, por lo menos, un terreno

	abonado para iniciar la discusión de fenómenos probabilísticos. Se notan rasgos de pensamiento combinatorio, son capaces de avizorar resultados, su mente tiene la capacidad de combinar parcialmente resultados, ve más de una posibilidad de que el fenómeno suceda, pero no encuentra todos los resultados posibles o ve más de los que son realmente a causa de las falacias que rondan su pensamiento.
5. Rigor	utilizan, correctamente, diferentes representaciones para explicar el comportamiento del suceso y, dependiendo de la naturaleza del problema, pueden apoyarse en tablas, gráficas, diagramas, ecuaciones y otros recursos matemáticos

Un caso representativo que ilustra el nivel de impredeción es presentado por Sánchez y Benítez (1997), cuando ante la pregunta:

“Si lanzamos un par de dados y sumamos los puntos resultantes. ¿Qué es más probable?

- (a) Obtener una suma igual a 4 puntos
- (b) Obtener una suma igual a 5 puntos
- (c) ambos eventos son igualmente probables” (p. 158).

La respuesta de uno de sus estudiantes fue “c. Ambos eventos son igualmente probables, ya que, si lanzamos los dados, no sabremos, si nos va a caer 4 o 5, probablemente ninguno de los dos” (p. 159).

Como en el ejemplo anterior, expresiones como: no sabremos, no se puede predecir, es imposible saber la respuesta correcta, entre otras, se convierten en un claro indicador para el nivel de impredeción frente a un evento probabilístico.

Son ejemplos paradigmáticos del nivel de razonamiento determinístico, aquellos en donde el estudiante asocia el resultado de un experimento aleatorio con alguna causa poderosa que lo rige, como es el caso de las propiedades físicas, “la fuerza con la que se lanza una moneda, el material del que esté constituida la moneda, la cara por la cual se lance, el peso de los puntitos del dado” Sánchez y Benítez (1997, p. 159), este tipo de razonamiento también se manifiesta cuando los estudiantes asocian sus respuestas con elementos míticos o mágicos, es decir con poderes sobrenaturales o con fenómenos que les resultan inexplicables como el destino, la voluntad divina, la suerte, entre otros.

En ocasiones el razonamiento determinístico puede ser considerado empírico, cuando se basa en experiencias que se han convertido en creencias para el estudiante, sustentadas en sus relaciones de tipo social y familiar. Cuando se practica juegos de azar, por ejemplo, hay quienes consideran que obtener un seis al lanzar un dado es más complicado que obtener cualquier otro valor, cuando se participa de un sorteo, es común que las personas consideren que hay números “bonitos o feos” para apostar, o que no es posible ganar cuando se escogen números consecutivos como el 234.

En el caso del razonamiento mecánico, es común que los estudiantes presenten resultados o procedimientos de manera memorística, dando muestras de no haber entendido el problema que se plantea, un ejemplo ilustrativo de este tipo de situación se presenta a continuación:

“Si tenemos una caja con tres bolas blancas y tres bolas negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) dos bolas de la caja, ¿qué es más probable?

- a. Tomar dos bolas blancas
- b. Tomar dos bolas negras
- c. Tomar 1 bola blanca y 1 bola negra
- d. Los tres eventos anteriores son igualmente probables

La respuesta dada por un estudiante [...], fue:

d. Pues hay 6 bolas en total, o sea 3 de cada color, entonces podríamos decir que $3/6$ son blancas y $3/6$ son negras. Simplifico $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ por eso da lo mismo” (Sánchez y Benítez, 1997, p. 160).

Frente a la pregunta analizada anteriormente: Si lanzamos un par de dados y sumamos los puntos resultantes. ¿Qué es más probable?

- (a) Obtener una suma igual a 4 puntos
- (b) Obtener una suma igual a 5 puntos
- (c) ambos eventos son igualmente probables

Un ejemplo de respuesta que muestra un razonamiento de pre rigor es: “la opción b. Porque los casos de 5 son dos, $3+2$ y $4+1$; pero los casos de 4 son tres, $2+2$, $2+2$ y $3+1$ ”.

Aunque la respuesta no es correcta, el estudiante muestra rasgos de pensamiento combinatorio, tiene la capacidad de combinar parcialmente resultados, a través de sus representaciones se observa que se ha alejado de la impredeción y del razonamiento determinístico.

Cuando el estudiante ha alcanzado el nivel de rigor, hace uso de diferentes tipos de representaciones y utiliza argumentaciones matemáticas de manera correcta para comunicar sus resultados.

2.2.4 El uso de herramientas digitales en la resolución de problemas

La investigación en Educación Matemática ha considerado que las herramientas digitales juegan un papel importante en los procesos de resolución de problemas (Drijvers et al., 2016; Parzysz, 2018; Santos-Trigo y Machín, 2013). El uso de estas herramientas en la enseñanza de las matemáticas, transforma las actividades que se proponen en el aula, los contenidos matemáticos que se enseñan y se aprenden, y también el tipo de representaciones a las que pueden acceder los estudiantes.

El uso de Tecnologías Digitales permite a los estudiantes explorar conceptos matemáticos y representar problemas de forma dinámica, lo que trae como consecuencia la posibilidad de reconocer propiedades, identificar patrones, establecer relaciones, plantear conjeturas, generalizar y extender problemas iniciales. (Santos-Trigo y Machín, 2013; Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2019). En otras palabras, el uso de estas herramientas permite desarrollar formas de pensamiento que potencien habilidades cognitivas del individuo, lo que pueden favorecer la solución de un problema.

En ocasiones los estudiantes utilizan software de geometría dinámica como GeoGebra, para construir figuras geométricas, explorar sus propiedades y relaciones, realizando transformaciones sobre los objetos. En estos casos pueden observar como cambian las figuras al modificar algunos parámetros y desarrollar una comprensión más profunda de los conceptos geométricos. Gökçe y Güner (2022) proporciona un ejemplo desde esta perspectiva cuando afirma que “los estudiantes pueden dibujar un círculo y ajustarlo para explorar los cambios en la ecuación de la circunferencia, mientras también cambian su ecuación para rastrear las alteraciones en el círculo en la ventana de geometría” (p. 5304). En este caso GeoGebra permite rehacer construcciones, introducir nuevos componentes y mejorar la comprensión de los conceptos.

Las herramientas digitales, también permiten a los estudiantes representar gráficamente funciones matemáticas, establecer relaciones entre variables, cuando se ajustan parámetros y se observa como cambian los gráficos, Doorman et al., (2012) por ejemplo,

concluyó en su estudio que la intervención de una herramienta digital, ayudó a los estudiantes a integrar los aspectos operativos y estructurales sobre el concepto de función, los estudiantes pudieron comprender mejor las relaciones matemáticas y desarrollar habilidades de modelado.

Desde el punto de vista de Heid (2018) utilizar herramientas digitales puede transformar las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, sobre la misma tecnología, o sobre ellos mismos como hacedores de matemáticas.

2.2.4.1 La mediación instrumental.

Moreno-Armella (2002) afirma que las herramientas, como instrumentos de mediación, han sido desarrolladas en distintos medios culturales y en diversos periodos históricos, por lo que son parte integral de la actividad humana. En esa medida considera que no hay actividad cognitiva al margen de la mediación instrumental, pues siempre ha existido un vínculo que relaciona el uso de instrumentos de mediación con los procesos de pensamiento de los individuos, en otras palabras, las características de una forma de conocimiento están en íntima relación con los instrumentos que sirven como mediadores en el proceso de construcción de ese conocimiento (Moreno-Armella, 2017).

Ante la idea de incorporar herramientas digitales en los procesos de enseñanza de las matemáticas, Moreno-Armella (2014) sostiene que cuando se utilizan medios dinámicos, estos actúan como mediadores semióticos, por lo que el conocimiento que se adquiere, no es independiente del mediador. En este sentido, considera que la mediación digital posibilita una reconceptualización de conocimientos previos.

Asimismo, plantea que cuando se añade una representación en un medio dinámico, el objeto de estudio se transforma y las posibilidades de intervención de los estudiantes sobre él aumentan. Para Moreno-Armella (2014), el objeto siempre está en construcción ya que es inseparable de sus representaciones, lo que favorece la comprensión de los conceptos asociados al objeto.

Las personas adquieren habilidades cognitivas cuando representan y exploran tareas, así como al resolver problemas utilizando tecnología. La interacción constante con la tecnología la convierte gradualmente en parte de nuestros recursos cognitivos, por ejemplo “Una tecnología digital como GeoGebra puede mejorar y eventualmente transformar las habilidades cognitivas que ya poseemos y ayudarnos a desarrollar otras nuevas” (Santos-Trigo

y Moreno-Armella, 2016, p. 191). Desde este mismo punto de vista, Santos-Trigo (2014) considera que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas matemáticas, el uso de la tecnología les brinda la oportunidad de aprovechar las posibilidades que ofrece para representar y explorar diferentes formas de comprender conceptos matemáticos y resolver problemas.

Frente a estas consideraciones Moreno-Armella (2014) sostiene que “hoy en día estamos presenciando la migración de los objetos matemáticos hacia los medios digitales y con ello se está produciendo, ante nuestros ojos, una transformación epistémica que afecta lo que ocurre y ocurrirá en las escuelas, en cada salón de clases” (p. 204).

Esta afirmación cobra validez si se observa que en los últimos años el uso de herramientas digitales en la educación ha impulsado la investigación sobre su impacto en los procesos de pensamiento matemático.

En el contexto de esta investigación se considera la tecnología como una herramienta de mediación que promueve actividades cognitivas orientadas a amplificar y reorganizar los procesos de resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad.

La presencia de herramientas digitales en la educación ha potenciado la investigación sobre su incidencia en los procesos centrales de pensamiento matemático, en este caso se entienden como herramientas de mediación de actividades cognitivas orientadas al aprendizaje.

De acuerdo a los planteamientos de Duval (2006) se accede al conocimiento y la comprensión de los objetos matemáticos a través de representaciones semióticas. Cuando de herramientas computacionales se trata, estas representaciones pueden ser procesadas, pueden ser manipuladas por el usuario como si fueran objetos materiales como sucede en algunos softwares dinámicos como GeoGebra y Cabri, puede decirse que estas representaciones son ejecutables ya que se puede realizar una serie de acciones sobre una representación particular (Hegedus y Moreno-Armella, 2010; Moreno-armella y Sriraman, 2010)

En la opinión de Moreno-Armella (2002) “La mediación instrumental comienza desde el momento en que podemos redefinir los objetos matemáticos en términos de las construcciones ejecutables” (p. 84).

Frente al papel que cumplen las herramientas digitales en los procesos de mediación de conocimiento matemático, estas pueden ser entendidas como herramientas de amplificación o de reorganización cognitiva, se presentan estas ideas a través de metáforas:

La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de reorganización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto. Se abre entonces, la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo (Armella, 2002).

La herramienta en su rol de amplificador, no modifica, sino que complementa el pensamiento del estudiante, mientras que, en el papel de reorganizador, su pensamiento matemático puede tener una transformación a partir de la presencia de la herramienta, es allí donde la herramienta puede considerarse un instrumento matemático.

Aunque una herramienta digital pueda considerarse un artefacto con un reconocido potencial educativo, o transformador del pensamiento, no permite per se, ventajas educativas (Drijvers, Doorman, et al., 2010; Lopes y Costa, 2019), por lo que se hace necesario el análisis de los factores que caracterizan la transformación de un artefacto en instrumento.

El proceso por el cual un artefacto se convierte en parte de un instrumento en manos de un usuario, se llama *génesis instrumental* (Drijvers, Kieran, et al., 2010). Para Rabardel (2002) un artefacto es un objeto, que puede ser material o simbólico. Cuando se establecen relaciones significativas entre el usuario y el artefacto para el desarrollo de una actividad específica, se configura en un instrumento. Un instrumento incluye al artefacto, pero de manera adicional involucra las técnicas de uso y los esquemas mentales que desarrolla el usuario cuando utiliza el artefacto.

En el desarrollo de la génesis instrumental, se establece una relación en doble vía entre el usuario y el artefacto, por una parte, la instrumentalización; en palabras de Rabardel y Beguin (2005), el proceso en que el usuario enriquece las propiedades del artefacto, seleccionándolas y modificándolas, y por otra parte la instrumentación, este proceso trata

sobre el desarrollo que hace el usuario sobre el instrumento, el sujeto adapta la herramienta a sí mismo a través de esquemas de utilización.

Como lo hacen notar Alqahtani y Powell (2017) a través de los dos procesos de génesis instrumental, instrumentación e instrumentalización, dialécticamente las herramientas influyen en el pensamiento del alumno y el alumno influye en el diseño de las herramientas.

2.2.4.2 GeoGebra. Una herramienta digital para el estudio de la resolución de problemas.

Una de las herramientas digitales utilizadas en múltiples investigaciones relacionadas con la resolución de problemas es GeoGebra (Jacinto y Carreira, 2017; Olsson y Granberg, 2019; Santos-Trigo et al., 2016, 2021; Zengin, 2019). Este software fue diseñado originalmente para aprender y enseñar matemáticas de manera dinámica en educación secundaria, su idea fundamental fue la de establecer múltiples representaciones geométricas y algebraicas y propiciar relaciones entre ellas. En la actualidad, su uso se ha ampliado al estudio del cálculo, la estadística y la probabilidad y es utilizada desde la escuela primaria hasta niveles universitarios.

GeoGebra es una herramienta digital que potencia la exploración y la resolución de problemas de forma interactiva, permite que los estudiantes se involucren y expresen sus ideas libremente durante el proceso de aprendizaje.

Hohenwarter (2007) afirma que GeoGebra debe verse como una herramienta cognitiva en el sentido de constructivismo, ya que brinda al alumno la oportunidad de trabajar de forma independiente, activa y creativa con objetos matemáticos, para Olsson (2018) es una herramienta para ayudar a los estudiantes a expresar, ajustar y refinar su pensamiento, Zengin (2019) argumenta que brinda oportunidades para establecer conexiones entre el conocimiento conceptual y procedimental y facilita las conexiones dinámicas entre las diferentes representaciones. En términos más generales, el uso de sistemas de matemáticas dinámicas como GeoGebra facilita encontrar, analizar y explorar patrones, establecer relaciones matemáticas, formular y argumentar conjeturas y construir significados conceptuales (Santos-trigo y Moreno-armella, 2016; Santos-Trigo y Machín, 2013).

2.2.5 Objetos matemáticos abordados en la investigación

En la educación básica, el aprendizaje de la probabilidad se introduce de forma gradual y está centrada en conceptos fundamentales que sientan las bases para una comprensión más avanzada en niveles educativos posteriores. A continuación, se presentan algunos conceptos fundamentales para el aprendizaje de la probabilidad y para el desarrollo de esta investigación.

Experimento aleatorio. Desde la perspectiva de Wackerly et al. (2014), “un experimento es el proceso desde el cual se lleva a cabo una observación” (p. 27), se considera que el experimento es aleatorio, cuando el resultado no puede ser determinado con certeza antes de ser realizado, debido a la presencia de elementos de incertidumbre. Por ejemplo, se habla del experimento del lanzamiento de un dado, cuando se desea observar el número de puntos que aparecen en la parte superior del dado. En este caso, se aplica el término de experimento “para considerar las observaciones que se obtienen de situaciones que no se pueden controlar en absoluto” (Wackerly et al., 2014, p. 27).

Espacio muestral. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, recibe el nombre de espacio muestral (Chernoff y Russell, 2011; Ross, 2007; Wackerly et al., 2014). Ross (2007) proporciona mayor claridad sobre este concepto:

“Supongamos que vamos a realizar un experimento cuyo resultado no es predecible de antemano. Sin embargo, aunque el resultado del experimento no se conozca de antemano, supongamos que se conoce el conjunto de todos los resultados posibles. Este conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se conoce como espacio muestral del experimento y se denota por S ” (p. 1).

Si el experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de una moneda al aire, entonces el espacio muestral es $S = \{c, s\}$ donde c significa que el resultado del lanzamiento es cara, mientras que s es sello. Cuando el experimento es el lanzamiento de un dado el espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, lo que significa que el resultado del experimento pueden ser los puntos que representan los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Un espacio muestral discreto, es aquel que contiene una cantidad finita y contable de elementos, mientras que un espacio muestral continuo, consta de un número infinito, no contable de sucesos. Las actividades propuestas para este estudio, considerando el nivel de

formación de los estudiantes, se centrarán en la realización de experimentos basados en espacios muestrales discretos.

Sucesos equiprobables y no equiprobables. Un suceso es un subconjunto del espacio muestral, que puede presentarse en un experimento aleatorio. El suceso puede ser elemental si corresponde a cualquiera de los posibles resultados simples, o compuesto si puede ser considerado un subconjunto del espacio muestral.

Cuando se habla de sucesos equiprobables, se hace referencia a sucesos en donde todas las posibilidades tienen la misma probabilidad de ocurrir, como es el caso del lanzamiento de un dado, en donde los sucesos representados en las posibilidades de obtener un número del 1 al 6 tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Cuando el experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados y sumar sus resultados individuales, el suceso de obtener un 5 u obtener un 6, un es ejemplo de sucesos no equiprobables, ya que las posibilidades de obtener un 5 y obtener un 6 son diferentes. Las posibilidades de obtener 5 son cuatro; 1+4, 2+3, 3+2, 4+1. Mientras que las posibilidades de obtener 6 son cinco; 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1.

Significados de la probabilidad. Batanero et al. (2016) afirman que las principales interpretaciones que se han dado a la probabilidad, son de carácter intuitiva, clásica, frecuentista, subjetiva, lógica, propensiva y axiomática. Cada uno de estos puntos de vista implica cuestiones filosóficas y es utilizado de la manera más adecuada para modelar fenómenos particulares del mundo real o para ser tenido en cuenta en los planes de estudio de determinados estudiantes. Desde esta perspectiva, en el transcurso de esta investigación se tendrán en cuenta los significados intuitivo, clásico y frecuentista.

1. Significado intuitivo: “Las ideas intuitivas sobre el azar surgieron muy temprano en la historia en muchas culturas diferentes y estaban vinculadas a problemas relacionados con el establecimiento de apuestas justas en los juegos de azar” (Batanero et al., 2016, p. 2) por lo que se puede afirmar que aparecieron antes del estudio formal de la probabilidad, están estrechamente relacionadas con las intuiciones que pueden tener los niños pequeños o personas sin formación acerca de los fenómenos aleatorios. Estas personas, basándose en expresiones cualitativas expresan su grado de creencia en la ocurrencia de eventos aleatorios (Batanero y Díaz, 2004; Cotrado et al., 2022).

2. **Significado clásico:** Este significado de la probabilidad se fundamenta en la suposición de que todos los sucesos elementales del espacio muestral son equiprobables.

La fórmula de la regla de Laplace para calcular la probabilidad de un evento (suceso), se expresa de la siguiente manera: Sea A un evento particular del espacio muestral de un experimento aleatorio, donde k es el número de resultados favorables del evento y n el número total de resultados posibles, entonces la probabilidad de que ocurra A está dada por la expresión $P(A) = \frac{k}{n}$

Al dividir el número de resultados favorables en el número de resultados posibles, se obtiene la probabilidad del evento en términos de fracción, un decimal o un porcentaje.

3. **Significado frecuencial:** Como lo presenta Batanero (2005), “En esta visión se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite, cuya frecuencia relativa observada es un valor aproximado” (p. 254). Este significado se fundamenta en la primera prueba de la ley de los grandes números realizada por Bernoulli, en donde se observa la convergencia de frecuencias relativas para el mismo evento a un valor constante después de un gran número de ensayos independientes idénticos de un experimento aleatorio.

La investigación sobre didáctica de la probabilidad ha mostrado la relevancia de estos conceptos tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de esta disciplina. Además, ha destacado también las dificultades que los estudiantes presentan al comprender dichos conceptos.

Como argumentan Saldanha y Liu (2014), los programas de instrucción deben tratar directamente con los obstáculos epistemológicos y conceptuales de los estudiantes en el aprendizaje, por lo que los conceptos presentados anteriormente son de suma importancia al momento de diseñar una estrategia de intervención que facilite la comprensión y tenga un impacto positivo en la resolución de problemas de probabilidad.

Capítulo 3

Marco Metodológico

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos y los procedimientos que se llevaron a cabo en la investigación. Se describen los fundamentos metodológicos del estudio, los sujetos de investigación, el diseño de la investigación y sus correspondientes fases.

3.1 Fundamentos metodológicos

3.1.1 El paradigma de investigación

Este estudio se enmarcó en el paradigma de la investigación basada en diseño; este paradigma, busca “comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico” (Molina et al., 2011, p. 75). Se preocupa por abordar problemáticas educativas a través de elementos que pueden transformar el entorno de aprendizaje de los estudiantes. Por otra parte, este paradigma busca entender y mejorar procesos educativos a través de un desarrollo iterativo. De acuerdo con Romero y De Benito (2020), una de las metas de la investigación basada en diseño es “proponer soluciones a problemas detectados en la realidad educativa a través de programas, materiales o estrategias didácticas innovadoras en el ámbito estudiado” (p. 4).

Desde la perspectiva de Cobb et al. (2017), la investigación basada en diseño tiene una orientación tanto práctica como teórica, si bien es cierto que se trata de investigar, elaborar y mejorar un diseño para apoyar el aprendizaje desde el punto de vista teórico, también busca desarrollar, comprobar y revisar conjeturas sobre los procesos de aprendizaje y sobre los medios que apoyan dicho aprendizaje.

Bakker y Van Eerde (2015), plantean que los estudios de diseño se caracterizan al menos por los siguientes aspectos:

1. Integran el diseño y la investigación, el diseño de entornos de aprendizaje está entrelazado con la prueba o el desarrollo de la teoría.
2. Tiene un objetivo explicativo y de asesoramiento, es decir, dar una idea teórica de cómo se pueden promover formas particulares de enseñanza y aprendizaje. El tipo de teoría desarrollada también puede ser de naturaleza predictiva (¿Qué pasaría sí?).

3. Los investigadores proponen conjeturas sobre como los estudiantes o profesores responderán a herramientas o tareas particulares en función de su conocimiento práctico y teórico, estas conjeturas pueden ser revisadas y transformadas en el proceso de rediseño y mejora de los materiales educativos.
4. La investigación basada en diseño es de naturaleza abierta e intervencionista, los investigadores manipulan deliberadamente una condición o enseñan de acuerdo con ideas teóricas particulares.

Esta investigación puede ser considerada un estudio de diseño de aula, si se tiene en cuenta que en este tipo de estudio se intenta apoyar el aprendizaje de las matemáticas de un grupo de estudiantes durante un período de tiempo que puede ir desde unas semanas hasta un año escolar o más si se considera necesario (Cobb 2017). En el desarrollo de esta investigación, se adoptó la postura de Cobb (2017), quién afirma que los entornos de aula no sólo influyen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sino en sus producciones, incluidas las formas de razonamiento matemático que desarrollan, por lo que las tareas y herramientas utilizadas, las normas de aula y la calidad del discurso de quienes participan se consideran aspectos preponderantes en el desarrollo de la investigación.

3.1.2 El método

Si bien es cierto que en la investigación basada en diseño existe cierta tendencia a utilizar métodos cualitativos (Camargo, 2021; De Benito-Salinas, 2016), se valida también la postura de que, en este tipo de estudios se pueden complementar con el método cuantitativo, teniendo en cuenta que para la recolección y análisis de datos es importante la calidad de los argumentos, en las diferentes etapas y para diferentes propósitos de un mismo estudio (Rinaudo y Donolo, 2010).

De acuerdo con los objetivos establecidos, este estudio tuvo componentes cualitativos, ya que se identificaron creencias de los estudiantes, estas hacen parte de la individualidad de los sujetos y tienen una marcada influencia del entorno social, por lo que se requiere un análisis interpretativo a partir de la aplicación de hojas de trabajo, videograbaciones y procesos de observación a los participantes. Por otra parte, elementos propios de la investigación cuantitativa como el uso de encuestas y el desarrollo de cuestionarios en el marco de la resolución de problemas fueron necesarios con el fin de identificar respuestas

correctas, incorrectas o parcialmente correctas y establecer comparaciones entre ellas y entre los niveles de razonamiento probabilístico mostrado antes y después del diseño, por lo que el método de la investigación fue mixto.

El estudio de métodos mixtos está definido formalmente como la clase de investigación en la que “el investigador mezcla o combina técnicas, métodos, enfoques, conceptos o lenguaje de investigación cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio” (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), en este sentido “la elección de métodos mixtos de investigación puede ser apropiada para aportar una mayor generalizabilidad a los resultados, al tiempo que se mantiene suficiente detalle sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje para ser válidos y replicables” (Castro y Godino, 2011, p. 102).

Por otra parte, Hernández et al. (2010) señalan que “los estudios exploratorios se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes” (p. 79), para Cohen et al. (2007) la investigación descriptiva se ocupa de condiciones o relaciones que existen; prácticas que prevalecen; creencias, puntos de vista o actitudes que tienen los individuos, grupos e instituciones.

En la construcción del estado del arte, no se encontraron suficientes estudios sobre propuestas de intervención educativa en la línea de modificar las creencias a través de la mediación de herramientas digitales. Por lo tanto, este estudio fue de tipo descriptivo-exploratorio, pues si bien es cierto que se han realizado algunas investigaciones que relacionan las creencias que los estudiantes tienen sobre el azar con la comprensión de conceptos probabilísticos, su número es limitado.

3.1.3 Estrategia investigativa: Experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza es una estrategia investigativa que busca comprender el aprendizaje y el razonamiento de los estudiantes, busca aproximar al investigador a identificar las maneras de como los estudiantes aprenden (Bernabéu et al., 2019), esta estrategia “consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico” (Camargo, 2021, p. 68)

3.2 Sujetos de la investigación

Los sujetos de investigación fueron estudiantes de sexto grado de educación básica secundaria, pertenecientes a una institución educativa de carácter oficial, ubicada en la zona centro de la ciudad de Cali, Colombia. La institución cuenta con 175 estudiantes de sexto grado, distribuidos en 6 grupos, con rango de edades entre los 11 y los 14 años de edad.

Los estudiantes de sexto grado fueron seleccionados como informantes de este estudio teniendo en cuenta su rango de edades. De acuerdo a lo planteado por Piaget e Inhelder (2016), entre los 11 y los 15 años de edad, los niños acceden al período de adquisición de las operaciones formales caracterizado por “el razonamiento combinatorio, la lógica de proposiciones, la proporcionalidad, la comprensión de la relatividad de dos movimientos o velocidades, la comprensión del equilibrio mecánico [...], la probabilidad y la correlación, que para Piaget es el último paso en la comprensión de la probabilidad” (Batanero, 2013, p.4).

Lo anterior indica que los estudiantes están en una etapa cognitiva en la que pueden comprender conceptos matemáticos más complejos, su capacidad para comprender relaciones causa efecto ha mejorado, lo que les permite abordar problemas de probabilidad con algunos niveles de complejidad.

En esta etapa de formación, los problemas se pueden relacionar con situaciones de la vida real, como los juegos de azar, los deportes y el análisis de información; lo que puede resultar atractivo y motivador, además puede favorecer a los estudiantes en la vía de la comprensión y la construcción de creencias sobre elementos asociados a la probabilidad.

La prueba piloto de los diseños de investigación se realizó con estudiantes del grupo 6-6, el cual estaba conformado por 32 estudiantes: 18 hombres y 14 mujeres. Este no fue considerado un grupo de control, pues los resultados obtenidos en el estudio piloto no fueron comparados con el grupo objeto de investigación.

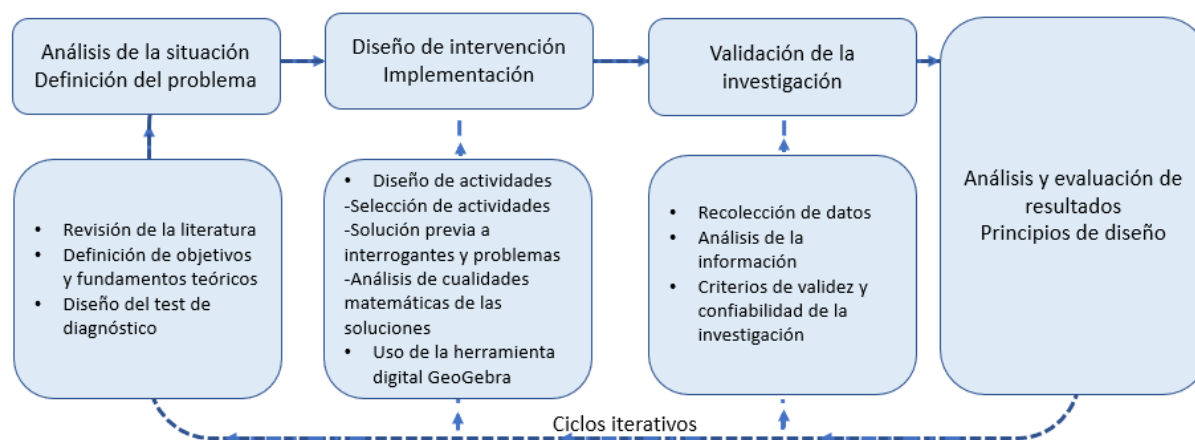
De acuerdo con el plan de área de la asignatura de matemáticas de la institución, los estudiantes desde tercero a sexto grado han abordado contenidos que implican la clasificación y representación de datos, así como la organización de información en tablas de frecuencias, la interpretación cualitativa de datos referidos a situaciones del entorno escolar y la predicción acerca de posible ocurrencia de eventos.

3.3 Diseño de investigación

La metodología de este estudio fue la investigación basada en diseño (IBD), ya que se buscó proponer un tipo de solución a una problemática educativa a partir de elementos que pudieran transformar el entorno de aprendizaje de los estudiantes. Este tipo de estudios busca entender y mejorar procesos educativos a través de un desarrollo iterativo de soluciones, basados en la teoría y el conocimiento situado.

Al margen de las etapas que compongan un estudio de IBD, “todos ellos incluyen una serie de acciones comunes como son: definición del problema, diseño, desarrollo, implementación y evaluación”(De Benito y Salinas, 2016). Con base en diferentes propuestas en relación con la estructura de la IBD (Benítez, 2006; Cobb et al., 2015; De Benito y Salinas, 2016; McKenney y Reeves, 2014). En la Figura 2 se describen las fases que se han considerado para el desarrollo de esta investigación.

Figura 2. Fases de la investigación



3.3.1 Fase 1. Análisis de la situación. Definición del problema.

En esta fase, se desarrollaron tres etapas con la intención de identificar y definir claramente el problema de investigación, ellas fueron: la revisión de la literatura, la definición de objetivos y fundamentos teóricos y el diseño del test de diagnóstico para identificar una línea base del estudio.

3.3.1.1 Revisión de la literatura

La revisión y análisis de la literatura se centró en reportes de investigaciones (artículos de revistas), tesis doctorales y capítulos de libros que informaban sobre el papel de las creencias de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y su relación con el razonamiento probabilístico. Asimismo, se analizaron estudios sobre los diferentes enfoques de resolución de problemas, particularmente de las estrategias que facilitaban el mejoramiento de las competencias de los estudiantes al abordar problemas que involucran conceptos probabilísticos. La literatura sobre la mediación de la tecnología digital en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas también fue un objeto de estudio, esto debido a la presencia que el uso de herramientas digitales viene haciendo en las aulas de clase y de manera particular en los procesos de enseñanza de las matemáticas.

La intención en esta etapa fue identificar investigaciones que abordaran problemáticas de enseñanza aprendizaje de la probabilidad y analizar de qué manera los sistemas de creencias de los estudiantes inciden en su razonamiento en este campo. Por otra parte, se buscaba indagar sobre los tipos de problemas, tareas y actividades que se pueden plantear para facilitar la comprensión de conceptos relacionados con la probabilidad e identificar cuáles de ellos podrían proponerse para su diseño en un entorno de herramientas digitales de tal manera que favorecieran la transformación de algunas de sus creencias.

3.3.1.2 Definición de objetivos y fundamentos teóricos

A partir de la revisión y el análisis de la literatura que se documentó previamente en el capítulo 2, se precisó el marco teórico de la investigación, y se definieron tanto el objetivo general como los cuatro objetivos específicos del estudio. Con base en estos elementos, se establecieron los lineamientos para el diseño de la encuesta de diagnóstico y las hojas de trabajo que se utilizaron como recurso para el desarrollo del experimento de enseñanza. En los insumos diseñados se incluyeron actividades que pudieran dar cuenta de las creencias de los estudiantes sobre probabilidad y sus formas de razonamiento, así como el tipo de procedimientos utilizados para la resolución de problemas y las formas de uso de la herramienta digital GeoGebra.

3.3.1.3 Diseño del test de diagnóstico

El test de diagnóstico se diseñó en consonancia con el primer objetivo de la investigación: “Indagar sobre las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad”, al identificar estas creencias, se trazó una línea de base para la investigación que dio las pautas para el diseño de la intervención didáctica y permitió observar la evolución de dichas creencias en el transcurso del experimento de enseñanza.

3.3.2 Fase 2. Diseño de intervención

En esta fase, se identificaron dos componentes, el diseño de las actividades y el uso de herramientas digitales, los cuales se describen a continuación.

3.3.2.1 Diseño de actividades

Para el diseño de las actividades se tuvieron en cuenta tres elementos: (a) La selección de actividades; (b) la solución previa a interrogantes y problemas y (c) el análisis de las cualidades matemáticas de las soluciones.

- a. **Selección de actividades.** En este primer momento se seleccionaron las preguntas abiertas y problemas que los estudiantes participantes en el estudio resolverían.

Los criterios a tenidos en cuenta al seleccionar las actividades fueron:

- Las preguntas abiertas fueron directas e indirectas, de asociación de situaciones y de opciones escalares, teniendo en cuenta que se buscaba identificar posibles creencias de los estudiantes, asociadas con el azar y con la probabilidad.
- Los procesos de solución de los problemas seleccionados contemplaron actividades del desarrollo del pensamiento matemático tales como: establecer relaciones, plantear conjeturas, identificar patrones, generalizar y extender problemas iniciales, utilizar diversos tipos de representaciones y extraer información relevante de ellas.
- Los problemas establecieron una relación directa con los contenidos curriculares propuestos sobre probabilidad para el nivel escolar de grado sexto, entre otros: discutir y predecir posibilidades de ocurrencia de un evento, conjeturar acerca de un

experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad, resolver y formular problemas a partir de conjuntos de datos y sus representaciones.

- Los problemas involucraron los conceptos probabilísticos básicos: experimentos aleatorios y no aleatorios, dependencia e independencia de sucesos, espacio muestral finito, espacio muestral equiprobable y no equiprobable, cálculo de probabilidades (regla de Laplace), comparación de probabilidades y probabilidad frecuencial.
- Los problemas propuestos se diseñaron a partir de investigaciones previas, con el fin de contrastar los posibles hallazgos y fortalecer el proceso de triangulación con la literatura existente.
- Los problemas propuestos fueron simulados en la herramienta digital GeoGebra.

b. ***Solución previa a interrogantes y problemas.*** En este apartado del estudio, se evaluó el potencial de las actividades seleccionadas para identificar creencias de los estudiantes frente al azar y apoyar la comprensión de conceptos asociados con la probabilidad. Los aspectos a tener en cuenta fueron:

- Identificar los contenidos matemáticos asociados potencialmente con probabilidad involucrados en la solución.
- Anticipar el uso de heurísticas utilizadas por los estudiantes al enfrentar los problemas.
- Inferir posibles dificultades de los estudiantes en el proceso de resolución.
- Establecer relaciones entre las creencias de los estudiantes y las heurísticas utilizadas en la resolución de los problemas.
- Identificar extensiones del problema a partir de un problema original.

c. ***Análisis de las cualidades matemáticas de las soluciones.*** Cada una de las soluciones a los problemas se analizaron con el fin de:

- Identificar los posibles procesos de pensamiento matemático que ponen en juego los estudiantes, como modelar fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y comparar procedimientos y algoritmos.
- Inferir cuales eran las dificultades y habilidades que se podían evidenciar en los estudiantes, al resolver problemas en donde se involucraba el concepto de probabilidad y cómo estas podían estar relacionadas con sus creencias sobre el azar.

3.3.2.2 Uso de la herramienta digital GeoGebra.

Se identificó el conjunto de herramientas que ofrece el software GeoGebra para facilitar la comprensión de conceptos asociados con la probabilidad. Aunque no existió un interés particular en el aprendizaje del manejo de GeoGebra por parte de los estudiantes, el investigador presentó algunos comandos asociados con la generación aleatoria, la elaboración de listas y las representaciones gráficas de datos.

Se entregaron hojas de trabajo con actividades diseñadas para la interacción de los estudiantes con la interfaz gráfica del software GeoGebra y se resolvieron problemas que involucraban conceptos asociados con la probabilidad a través del uso de las herramientas provistas por el software.

3.3.3 Fase 3. Validación de la investigación

En esta fase se destacaron tres elementos: la recolección de la información, el análisis de datos y los criterios que garantizarán la validez y confiabilidad de la investigación.

3.3.3.1 Recolección de datos

La fase de recolección de información se realizó en un ambiente de resolución de problemas, en donde se buscaba que los estudiantes participaran en actividades que les permitan poner en juego elementos propios del pensamiento matemático como: conjeturar, representar argumentar y comunicar dichos argumentos. Los registros del estudio, se recolectarán por medios impresos y digitales: hojas de trabajo y videograbaciones.

Las hojas de trabajo. Con este instrumento se buscó documentar el trabajo individual de los participantes en el estudio. Los documentos favorecieron la obtención de información sobre las creencias de los estudiantes frente a eventos asociados con el concepto de probabilidad, además apoyaron el seguimiento en fases posteriores respecto a posibles modificaciones de dichas creencias. Por otra parte, las hojas de trabajo permitieron observar la forma en que los estudiantes se enfrentaban a la solución de un problema, los recursos que utilizaban, el tipo de conjeturas que se generaron y las estrategias para probar tales conjeturas.

Videograbaciones. Este instrumento permitió analizar las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas. Se registró en grabaciones de video: el trabajo grupal de los estudiantes y la interacción entre los participantes y el investigador. Los videos permitieron identificar procedimientos y estrategias utilizadas por los estudiantes

al abordar los problemas, el tipo de razonamiento utilizado y las habilidades y dificultades que presentaban al discutir y resolver las situaciones propuestas.

Archivos digitales. Los archivos digitales utilizados en el estudio fueron diseñados por el investigador en el software GeoGebra, algunas aplicaciones libres de GeoGebra.org fueron utilizadas por los participantes, previa recomendación del investigador.

El análisis de la interacción de los estudiantes con las configuraciones dinámicas que ofrecen las herramientas digitales permitió obtener información acerca de cómo los diferentes registros de representación pueden incidir en las creencias de los estudiantes y en nuevas maneras de explorar y resolver problemas.

3.3.3.2 Análisis de la información

El análisis de la información obtenida fue de tipo cualitativo y cuantitativo.

Análisis de datos cualitativos. Se definieron como categorías de análisis cualitativas los niveles de razonamiento probabilístico de los estudiantes, a partir de lo propuesto por Sánchez y Benítez (1997).

Tabla 2. Dimensiones de la variable razonamiento probabilístico

Variable	Dimensiones
Razonamiento probabilístico	Nivel Impredicción
	Nivel Determinístico
	Nivel Mecánico
	Nivel de Pre-rigor
	Nivel de Rigor

El análisis de contenido de la recopilación de datos cualitativos, se realizó a partir de tres conceptos generales: las creencias, las estrategias de resolución de problemas y las formas de uso de la herramienta digital GeoGebra (ver Tabla 2).

Tabla 3. Conceptos generales para obtención de datos cualitativos

Concepto	Objeto de análisis
1. Creencias	Creencias socioculturales de los estudiantes, asociadas con el azar y la aleatoriedad. Creencias matemáticas de los estudiantes sobre el aprendizaje de la probabilidad.
2. Estrategias de resolución de problemas	Estrategias cognitivas utilizadas por los estudiantes al abordar problemas donde se involucra el concepto de probabilidad. Estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes al abordar problemas donde se involucra el concepto de probabilidad.
3. Formas de uso de la herramienta digital GeoGebra.	Uso de la herramienta GeoGebra como un amplificador-no modificador del pensamiento del estudiante. Uso de la herramienta GeoGebra como un reorganizador cognitivo.

Para dar cuenta de los objetivos de la investigación se analizaron:

1. Las respuestas de los estudiantes al cuestionario de exploración de creencias sobre el azar y la aleatoriedad.
2. Las estrategias de razonamiento utilizadas por los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas.
3. Las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a problemas que involucran el concepto de probabilidad.
4. Las dificultades observadas en el desarrollo de las actividades propuestas.
5. Transformaciones en las estrategias de resolución de problemas a partir de las diferentes representaciones que ofrece GeoGebra.

Para realizar el análisis cualitativo, los datos obtenidos a partir de los cuestionarios y video grabaciones de las actividades en las que intervinieron los estudiantes, se organizaron y

transcribieron con el fin de crear categorías de análisis a partir de las unidades de contenido. Se hizo uso del programa de análisis cualitativo Atlas. ti.

Análisis de datos cuantitativos. En la búsqueda de enriquecer el análisis y la interpretación de los datos, y en la tarea de corroborar el supuesto de que “las actividades de aprendizaje centradas en el uso de la tecnología permiten movilizar las creencias que tienen los estudiantes de grado sexto al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad”, se asumieron los indicadores de desempeño que se presentan en la siguiente matriz:

Valoración	Tipo de respuesta	Criterios de evaluación	
2	Respuesta correcta	Selecciona la respuesta correcta en el cuestionario.	Justifica adecuadamente su respuesta.
1	Respuesta parcialmente correcta	Selecciona la respuesta correcta en el cuestionario.	No justifica la respuesta dada o justifica de manera inadecuada.
1	Respuesta parcialmente correcta	No da respuesta a la pregunta o la respuesta es incorrecta.	Justifica adecuadamente su respuesta.
0	Respuesta incorrecta	No da respuesta a la pregunta o la respuesta dada es incorrecta	No justifica la respuesta dada o justifica de manera inadecuada.

Se hizo uso de elementos de estadística descriptiva con el fin de explicar los datos y obtener información que permitiera describir la tasa de estudiantes que se ubica en cada uno de los niveles de razonamiento probabilístico.

3.3.3.3 Criterios de validez y confiabilidad de la investigación

De acuerdo a los planteamientos de Cohen et al. (2007) la validez es una clave importante para una investigación eficaz, y por lo tanto es un requisito indispensable para la investigación tanto cualitativa como cuantitativa, “una investigación tendrá un alto nivel de

validez en la medida en que sus resultados reflejen una imagen lo más completa posible, clara y representativa de la realidad o situación estudiada” (Martínez, 2006).

Desde esta perspectiva, los criterios de validez de esta investigación se apoyaron en la propuesta de Lincoln y Guba (1985) entre los que se destacan la credibilidad y transferibilidad.

1. La credibilidad. Permite revisar la validez de los elementos de investigación, la recolección, organización, procesamiento e interpretación de datos. Castillo y Vásquez (2003), sostienen que la credibilidad se logra cuando el investigador recolecta información que produce hallazgos que son reconocidos por los informantes como una verdadera aproximación sobre lo que ellos piensan y sienten. Para evaluar la credibilidad en esta investigación se tendrán en cuenta los siguientes componentes:

a. Triangulación. Esta hace referencia al uso de una variedad de métodos y fuentes de información que permitan contrastar los datos y sus representaciones, la triangulación “intenta trazar, o explicar más completamente, la riqueza y complejidad del comportamiento humano estudiándolo desde más de un punto de vista y, al hacerlo, hace uso de datos tanto cuantitativos como cualitativos” (Cohen et al., 2007). Una característica clave de las investigaciones de métodos mixtos es el uso sistemático de la triangulación.

La credibilidad en este estudio estuvo basada en la triangulación de los datos que se obtuvieron de distintas fuentes, con variedad de técnicas e instrumentos (encuestas tipo cuestionario, grabaciones de video, transcripciones de las sesiones de trabajo de los estudiantes, archivos de GeoGebra).

b. Observación persistente. El proceso de observar durante el desarrollo del estudio, permite al investigador obtener información que responda a los objetivos de la investigación para poder identificar en los participantes cualidades constantes y atípicas, “la interacción prolongada con una situación o contexto, permite a los investigadores comprender lo que es esencial o característico en él” (Guba, 1989).

En este estudio el investigador participó directamente en la actividad y desempeñó tareas de observación sistemática.

2. La transferencia o transferibilidad. Hace referencia a la posibilidad de aplicar los resultados de una investigación en otras poblaciones o contextos, para Lincoln y Guba (1985) todo fenómeno social o de conducta dependen del contexto, por lo que

consideran que no es posible desarrollar enunciados o conclusiones que tengan aplicabilidad general, por lo que es necesario proporcionar información descriptiva del lugar y del trabajo de los participantes, con el fin de que otros investigadores puedan replicar el estudio.

3.3.4 Fase 4. Análisis y evaluación de resultados

En esta fase se documentaron las reflexiones relacionadas con el estudio, se presentó un informe sobre las conclusiones que dieron cuenta de los objetivos de investigación propuestos, así como de las fortalezas y debilidades de la experimentación e implementación de la experiencia de formación diseñada. Se propondrán algunos principios de diseño que faciliten direccionar investigaciones futuras en la línea didáctica de la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad.

Capítulo 4

Desarrollo del Experimento de Enseñanza y Análisis de Datos

El desarrollo del experimento de enseñanza se llevó a cabo durante las clases regulares de la asignatura de matemáticas durante un período de cinco meses transcurridos a partir de septiembre de 2022 a febrero de 2023, tiempo en el que se diseñaron, validaron e implementaron las siguientes acciones investigativas:

1. Encuesta de diagnóstico
2. Intervención didáctica.
 - Actividad 1
 - Actividad 2
 - Actividad 3

A continuación, se presenta la descripción, los propósitos, los criterios de diseño, los criterios de implementación y el análisis tanto cualitativo, como cuantitativo de cada una de estas actividades.

4.1 Encuesta de diagnóstico

4.1.1 Descripción de la actividad

Se diseñó un cuestionario de diez preguntas de selección múltiple asociadas con las nociones de experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos equiprobables y no equiprobables, cálculo y comparaciones de probabilidad. (Ver anexo 1).

Los problemas y las situaciones planteadas como ítems del cuestionario fueron seleccionadas de investigaciones previas examinadas durante la fase de análisis de la literatura (Watson et al., 2004; Ang y Shahrill, 2014; Fischbein y Schnarch, 2016; Sharma, 2016; García y Sánchez, 2013). Cada una de las respuestas dadas por los estudiantes debían ir acompañadas por su respectiva justificación.

Con el fin de evaluar el potencial del cuestionario para identificar creencias y evidenciar posibles niveles de razonamiento probabilístico, se analizaron las soluciones anticipadas a las preguntas y los contenidos matemáticos involucrados en cada una de ellas. El ejercicio de análisis y revisión estuvo a cargo del investigador con el apoyo de un equipo de

seis profesores de matemáticas de la institución educativa en donde se aplicó el cuestionario diagnóstico. En la tabla 4 se observan las relaciones establecidas para cada pregunta.

Tabla 4. Soluciones anticipadas y contenidos matemáticos involucradas en el cuestionario

Pregunta	Soluciones anticipadas:	Contenidos matemáticos
	Se espera que el estudiante...	
P1	Piense que cada número del sorteo es un evento independiente y aleatorio. Intuya que sin importar los números que seleccione tendrá la misma probabilidad de ganar, ya sea con los números propuestos o con un conjunto diferente de números.	-Concepto de probabilidad, -Espacio muestral -Independencia de eventos
P2	Reconozca que todas las secuencias tienen la misma probabilidad de ocurrir. Identifique que además de las secuencias propuestas existen posibilidades diferentes.	-Espacio muestral -Independencia de eventos -permutaciones -Tipos de representación (conjuntos/diagrama de árbol)
P3	Reconozca la situación planteada como un fenómeno aleatorio, que para el caso de la pregunta puede suceder a cualquier individuo.	-diferenciación entre fenómenos aleatorios y determinísticos.
P4	Concluya que cada número del sorteo es un evento independiente y aleatorio. Qué condiciones como “ser consecutivo”, no influyen en el resultado del experimento aleatorio, que	-Concepto de probabilidad -Espacio muestral

Pregunta	Soluciones anticipadas: Se espera que el estudiante...	Contenidos matemáticos
	intuya que sin importar los números que seleccione tendrá la misma probabilidad de ganar, ya sea con los números propuestos o con un conjunto diferente de números.	-Independencia de eventos
P5	Prediga el resultado de la probabilidad teniendo en cuenta los casos favorables y no favorables con respecto al espacio muestral del experimento.	-Probabilidad clásica -Identificación de eventos favorables/eventos no favorables. -Espacio muestral.
P6	Compare el conjunto total de cada urna con un subconjunto, es decir que establezca la relación parte-todo. Qué compare los casos favorables en cada una de las dos urnas y determine que los eventos son igualmente probables. El estudiante podrá utilizar la regla de Laplace para realizar una comparación entre fracciones y poder determinar que los eventos son igualmente probables.	-Probabilidad clásica -Espacio muestral -Comparación de probabilidades.
P7	Identifique todos los elementos del espacio muestral finito. Que identifique los casos favorables para obtener cinco y los casos favorables para obtener siete y determine cuál de los dos casos tiene mayor probabilidad de ocurrencia. El estudiante podrá utilizar la regla de Laplace para realizar una comparación entre fracciones y poder determinar qué es más	-Espacio muestral -Identificación de eventos favorables/eventos no favorables. -Espacio muestral. -Permutaciones -Probabilidad clásica

Pregunta	Soluciones anticipadas: Se espera que el estudiante...	Contenidos matemáticos
	probable.	-Comparación de probabilidades
P8	Identifique todos los elementos del espacio muestral. Diferencie entre las permutaciones (5, 6) de (6,5). Aplique la regla de Laplace y realice una comparación entre fracciones para poder determinar qué es más probable.	-Espacio muestral. -Permutaciones -Probabilidad clásica -Comparación de probabilidades
P9	Identifique que, dado que ya se extrajo una bola roja, se ha realizado una modificación del espacio muestral y que este nuevo espacio muestral debe ser considerado al sacar una segunda bola. Se espera que el estudiante utilice la regla de Laplace al realizar el cálculo de la probabilidad.	-Espacio muestral. -Noción de probabilidad condicional -Probabilidad clásica
P10	Obtenga a partir de la información dada el valor numérico del espacio muestral, que identifique los casos favorables y no favorables y aplique la regla de Laplace para calcular la probabilidad solicitada.	-Espacio muestral. -Noción de probabilidad condicional -Probabilidad clásica

4.1.2 Objetivos de la encuesta de diagnóstico

Con el diseño de la encuesta de diagnóstico, se buscó definir una línea base para el estudio y dar respuesta a la primera pregunta de investigación, por lo que se propusieron como objetivos de esta actividad:

1. Indagar sobre las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad.
2. Identificar a partir de las argumentaciones de los estudiantes posibles niveles de razonamiento probabilístico.
3. Reconocer estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad.

4.1.3 Condiciones de aplicación

Previo a la aplicación del cuestionario diagnóstico, se realizó una reunión con los padres de familia de un grupo de estudiantes de grado sexto de la institución educativa, con el fin de comunicar los objetivos del proyecto, motivar su participación en el estudio y hacer entrega de los consentimientos informados. Posteriormente se realizó una reunión similar con los estudiantes y el docente encargado, en ella se recogieron los consentimientos debidamente firmados por los acudientes. De los 32 consentimientos enviados a los acudientes, sólo 18 de ellos fueron entregados debidamente diligenciados para aprobar la participación de sus hijos en el estudio.

El cuestionario de diagnóstico fue aplicado por el docente de la asignatura de matemáticas a 15 estudiantes durante la jornada escolar como actividad regular en el aula de clase, tres de los estudiantes autorizados para participar en la actividad a través de los consentimientos informados no asistieron.

El tiempo estimado para la realización de la prueba fue de 60 minutos, los estudiantes respondieron las preguntas y escribieron sus justificaciones con bolígrafo. Se solicitó que las operaciones y representaciones necesarias se escribieran sobre la misma hoja de papel en la que se entregó el cuestionario. La actividad fue realizada de manera individual.

4.1.4 Análisis de la información

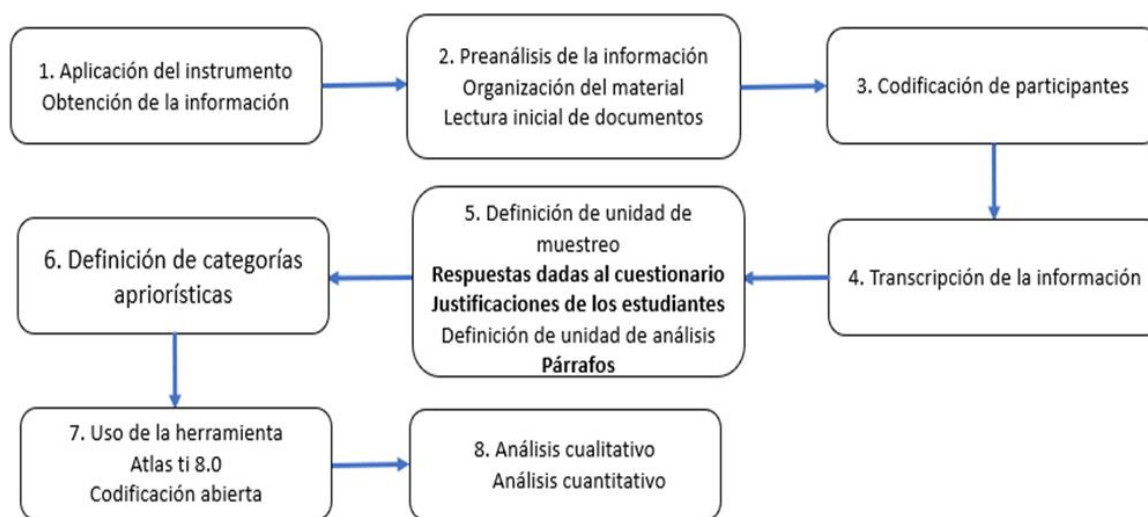
Una vez aplicado el cuestionario de diagnóstico, se procedió a realizar la organización y depuración de la información obtenida a partir de las respuestas y las justificaciones dadas por los estudiantes a cada una de las preguntas del cuestionario.

Se identificaron las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas y se procedió a realizar la correspondiente transcripción de las justificaciones para utilizar el método de análisis de contenido.

En palabras de Krippendorff (2018), el análisis de contenido es “una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto” (p. 28). (Cabrera, 2009) argumenta que la esencia de esta técnica consiste “en partir de datos textuales y tratar de ir descomponiendo el texto en unidades para, posteriormente, proceder a su agrupamiento en categorías” (p. 79) donde se consideran las similitudes que existan entre éstas en función de criterios preestablecidos según los objetivos de investigación.

En la figura 3 se observan las etapas y procedimientos utilizados para la organización, evaluación y análisis de contenido de la información recabada a partir de la encuesta de diagnóstico.

Figura 3. Proceso establecido para el análisis de contenido de la encuesta de diagnóstico.



4.1.4.1 Análisis cuantitativo de la encuesta de diagnóstico

Para dar inicio al análisis cuantitativo de los datos obtenidos a partir de la aplicación del instrumento, se asignaron valores dependiendo del tipo de respuesta de los estudiantes; 0 si la respuesta era incorrecta, 1 si la respuesta era parcialmente correcta y 2 si la respuesta era correcta.

Los criterios de evaluación de los diferentes tipos de respuesta se muestran en la tabla 5. Como se observa, se ha establecido una relación entre la respuesta seleccionada en el cuestionario y su respectiva justificación.

Tabla 5. Valoraciones y criterios de evaluación dependiendo el tipo de respuesta dada por los estudiantes.

Valoración	Tipo de respuesta	Criterios de evaluación	
2	Respuesta correcta	Selecciona la respuesta correcta en el cuestionario.	Justifica adecuadamente su respuesta.
1	Respuesta parcialmente correcta	Selecciona la respuesta correcta en el cuestionario.	No justifica la respuesta dada o justifica de manera inadecuada.
1	Respuesta parcialmente correcta	No da respuesta a la pregunta o la respuesta es incorrecta.	Justifica adecuadamente su respuesta.
0	Respuesta incorrecta	No da respuesta a la pregunta o la respuesta dada es incorrecta	No justifica la respuesta dada o justifica de manera inadecuada.

Teniendo en cuenta que el cuestionario está constituido por 10 preguntas, el puntaje mínimo que puede obtener un estudiante es de cero puntos y el máximo de 20.

Con el fin de obtener una mirada global de la distribución de frecuencias de la puntuación total, los datos fueron agrupados en cuatro intervalos de igual amplitud, como puede observarse en la tabla 6.

Tabla 6. Distribución de frecuencias para la puntuación total del cuestionario

Intervalo de puntuación	Frecuencia absoluta	Porcentaje
[0-5]	5	33,3%
(5-10]	9	60%
(10-15]	1	6,7%
(15-20]	0	0%

Como se muestra en la tabla 6, el 93,3% de los estudiantes obtuvo puntuaciones menores o iguales a 10, lo que indica el alto grado de dificultad de la prueba para la población encuestada, también se observa que ninguno de los estudiantes obtuvo una puntuación superior a 15.

En la tabla 7 se muestra el informe estadístico de los datos donde se observa que el mayor puntaje obtenido por un estudiante fue de 12 puntos, ningún estudiante alcanzó el puntaje máximo de 20 puntos, mientras que el promedio fue de 6,6 puntos, lo que significa que el porcentaje de logro alcanzado por los estudiantes en la prueba fue sólo del 33%.

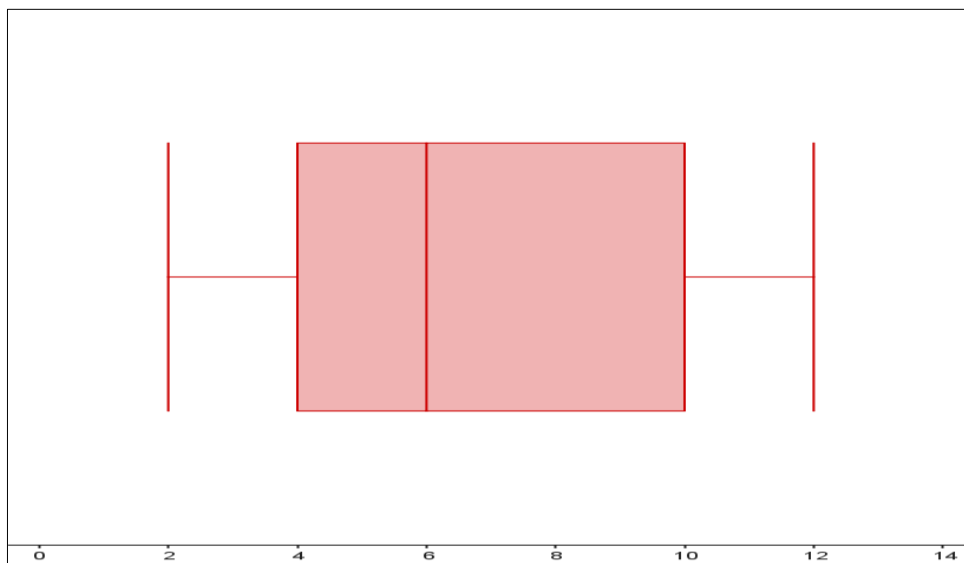
Tabla 7. Estadísticos descriptivos de los datos asociados a la prueba de diagnóstico

Número de estudiantes	15
promedio	6,6
Desviación típica	2,776
Mínimo	2
Mediana	6
Máximo	12
Rango	10

Por otra parte, se evidencia en el análisis estadístico al observar el valor de la mediana, que el 50% de las puntuaciones totales de los estudiantes están agrupadas en puntajes entre 2 y 6, lo que puede considerarse en un bajo nivel frente al puntaje total alcanzable, que para este caso es de 20 puntos.

En la figura 4 se presenta un diagrama de cajas, en la distribución de las puntuaciones obtenidas a partir de la aplicación de la prueba de diagnóstico.

Figura 4. Distribución de puntuaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba diagnóstica



4.1.4.2 Análisis cualitativo de la encuesta de diagnóstico

El análisis cualitativo de esta actividad se llevó a cabo a partir de las justificaciones que los estudiantes hicieron a cada una de las respuestas del cuestionario. Se transcribieron las justificaciones de los estudiantes en un documento de Word para finalmente alojarlo en el software de análisis de datos Atlas ti. 8.0, con el fin de organizar e interpretar la información.

Atlas.ti es un programa utilizado para organizar y gestionar datos de investigación cualitativa. El software es una herramienta eficiente para organizar, capturar y analizar datos; proporciona a los investigadores una visión general de los hallazgos durante el proceso analítico y ayuda en la optimización del tiempo (Brito et, al., 2017). En el análisis del diagnóstico, se utilizó el nivel de procesamiento textual del software, en donde se incluyeron transcripciones relacionadas con las justificaciones dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas.

Atlas.ti, posibilitó el análisis de la información al desglosarla en segmentos de texto, permitió codificar estos fragmentos, realizar búsquedas específicas mediante códigos y cadenas de texto y añadir comentarios útiles para el análisis.

Las categorías iniciales utilizadas para el análisis de los datos fueron presentadas en el Capítulo 2 de este documento, se basan en la clasificación propuesta por Sánchez y Benítez

(1997), la cual se sostiene en cinco niveles de razonamiento utilizados por los estudiantes, al momento de enfrentarse a problemas que involucran el concepto de probabilidad.

En la tabla 8, se presentan nuevamente de manera sintética las categorías, con la intención de facilitar la interpretación del lector.

Tabla 8. Sistema de categorías para el análisis cualitativo de la información diagnóstica

Categoría	Definición de la categoría
1. Nivel de Impredicción	Al estar en situaciones de azar, le es completamente imposible predecir resultados
2. Nivel Determinístico	Explica el comportamiento de los fenómenos de azar, mediante alguna causa poderosa que los rige.
3. Nivel Mecánico	Incorpora constructos de la Matemática para explicar fenómenos de azar, pero los cita fuera de contexto.
4. Nivel de Pre-rigor	Utiliza argumentos desde el punto de vista matemático, alejándose del pensamiento determinístico.
5. Nivel de Rigor	Utiliza, correctamente, diferentes representaciones para explicar el comportamiento de los sucesos.

Definidas las categorías de análisis, se procedió a clasificar las justificaciones dadas por los estudiantes considerando las similitudes y semejanzas entre sus argumentaciones y los criterios establecidos.

Nivel de impredicción: En esta categoría se agruparon las respuestas de los estudiantes que evidencian que es completamente imposible predecir resultados cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre. Este tipo de razonamiento se puede observar en las justificaciones dadas a las respuestas de las preguntas que se muestran en las figuras 5 y 6.

Figura 5. Ejemplo 1 de nivel de impredeción

Pregunta 7. En un juego de parques se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Al lanzar los dos dados y sumar los puntos ¿qué es más probable?

- a. Que la suma sea siete puntos
- b. Que la suma sea cinco puntos
- c. Que la suma sea cinco o siete puntos tiene la misma probabilidad de ocurrir
- ☒ d. Es imposible predecir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica tu respuesta: No puede mas predecir nada porque los dados se lanzan y sal cualquier numero

Algunos estudiantes no lograron diferenciar entre un suceso posible, imposible y seguro. Se observa que no cuentan con conocimientos necesarios para abordar el tratamiento del problema, desconocen el concepto de espacio muestral y no consiguen identificar las posibles combinaciones para la solución.

Figura 6. Ejemplo 2 de nivel de impredeción

Pregunta 8. ¿Sí se lanzan simultáneamente dos dados,Cuál de las siguientes opciones es la más probable?

- a. Obtener un cinco y un seis
- b. Obtener un seis dos veces
- c. las dos opciones anteriores son igualmente probables
- ☒ d. Es imposible dar una respuesta antes de lanzar los dados

Justifica tu respuesta: No puedo imaginar una respuesta es

Nivel determinístico: los estudiantes cuyas respuestas se clasificaron en esta categoría, explicaron el comportamiento de fenómenos de azar a partir de causas específicas, se impone el razonamiento fundamentado en causa y efecto.

En ocasiones los estudiantes asocian el resultado de un experimento aleatorio con propiedades físicas como la fuerza con que es lanzada una moneda, el peso de un dado o la posición de las bolas dentro de una urna. Un ejemplo de este tipo de razonamiento se registra en la figura 7.

Figura 7. Razonamiento determinístico asociado a propiedades físicas

Pregunta 5. Observa la siguiente bolsa, la cual contiene bolas blancas y negras. Si sacas al azar una bola de la bolsa. ¿Qué es más probable que ocurra?



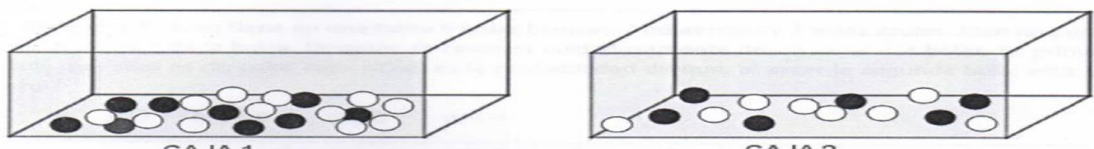
- ☒ a. Qué salga una bola blanca
- b. Qué salga una bola negra
- c. Puede salir una bola de cualquier color
- d. No se puede predecir lo que ocurrirá

Justifica tu respuesta: Porque las bolas blancas están arriba y las bolas negras están abajo

Las respuestas de otros estudiantes reflejaron un razonamiento determinístico asociado a causas para ellos inexplicables tales como la suerte, el poder de Dios, el destino, entre otras. Argumentos como los empleados en la figura 8, ya habían sido analizados por Sánchez y Benítez (1997) y fueron categorizados en el nivel de razonamiento, determinístico mítico.

Figura 8. Razonamiento determinístico mítico

Pregunta 6. Un profesor de matemáticas muestra las siguientes cajas a un grupo de estudiantes. Estas contienen bolas blancas y negras. Al azar saca una bola de cada caja. ¿Qué es más probable que ocurra?



CAJA 1 CAJA 2

- a. Que salga una bola negra de la caja 1
- b. Que salga una bola negra de la caja 2
- c. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- ☒ d. No se puede predecir cual evento tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica tu respuesta: Ha que este juego es de suerte

Para otro grupo de estudiantes, experiencias de la cotidianidad como las vividas con los juegos de azar, algunas prácticas y expresiones culturalmente aceptadas sobre sorteos y loterías se han convertido en creencias que los alejan del pensamiento crítico. Como se observa en la figura 9, este tipo de conocimiento intuitivo adquirido de manera empírica dificulta el análisis y la comprensión de fenómenos aleatorios.

Figura 9. Ejemplo de razonamiento determinístico empírico

Pregunta 4. Si sacas 4 números de una bolsa que contiene los números del 1 al 30. ¿Qué conjunto de números sería más probable?

(a) 8, 9, 10, 11
 (b) 4, 28, 17, 19
 (c) Cualquiera de los dos conjuntos de números sería igual de probable
 (d) Si consideras que hay un conjunto de número que sea más probable de sacar escríbelo:

Justifica tu respuesta: *por que sacar esos números en ordenes es muy improbable*

En la imagen anterior, el estudiante considera que la probabilidad de obtener números diferentes es mayor a la de obtener números consecutivos. Se advierten dificultades futuras en la comprensión de la noción de independencia de sucesos.

Nivel mecánico: En esta categoría se clasificaron las respuestas de los estudiantes que muestran el uso de recursos matemáticos, pero lo hacen de manera incorrecta, como lo plantea Schoenfeld (1985) sus recursos son defectuosos o incompletos y son utilizados fuera de contexto.

Figura 10. Respuesta clasificada en el nivel de razonamiento mecánico. Uso de porcentajes

Pregunta 4. Si sacas 4 números de una bolsa que contiene los números del 1 al 30. ¿Qué conjunto de números sería más probable?

(a) 8, 9, 10, 11
 (b) 4, 28, 17, 19
 (c) Cualquiera de los dos conjuntos de números sería igual de probable
 (d) Si consideras que hay un conjunto de número que sea más probable de sacar escríbelo:

Justifica tu respuesta: *cualquiera de estos 2 conjuntos podría ganarse en la loteria porque las probabilidades son 50 y 50*

En la figura 11, se presenta una justificación que ha sido categorizada en el nivel de razonamiento mecánico, se puede notar que los argumentos del estudiante son citados de manera memorística, dando pocas muestras de haber comprendido el problema.

Figura 11. Respuesta categorizada en el nivel de razonamiento mecánico. Uso de proporciones

Pregunta 10. La profesora de artística desea realizar la rifa de un juego de colores entre los estudiantes de su grupo. El grupo está conformado por 12 niños y 15 niñas, la probabilidad de que la ganadora sea una niña es:

☒ a. 15/12 b. 15/27 c. 12/15 d. 15

Justifica tu respuesta: porque hay 15 niñas y 12 niños

En el caso presentado en la figura 11, el estudiante intuye la necesidad de establecer algún tipo de relación proporcional, sin embargo, lo hace de manera incorrecta y fuera de contexto. Por lo que también evidencia un tipo de razonamiento mecánico.

Nivel de pre-rigor: Las respuestas de los estudiantes que fueron categorizadas en el nivel de pre-rigor, dan cuenta de argumentos que se fundamentan en elementos matemáticos, logran diferenciar entre un evento determinístico y un evento aleatorio, establecen algunas combinaciones entre elementos del espacio muestral, aunque no logren percibirlo en su totalidad.

Figura 12. Respuesta clasificada en el nivel de Pre-rigor

Pregunta 9. Juan tiene en una bolsa 6 bolas blancas, 4 bolas rojas y 3 bolas azules. Juan no puede ver el interior de la bolsa. Después de revolver cuidadosamente desea sacar dos bolas. La primera bola que saca es de color rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar la segunda bola, esta sea azul?

☒ a. 3/13 b. 3/10 c. 1/3 d. 1/4

Justifica tu respuesta: solo hay 3 azules y todas sumadas son 14 - 1 roja 13 que da el resultado 3/13

La justificación a la pregunta que se muestra en la figura 12, da indicios de un razonamiento probabilístico de pre-rigor, puede verse como el estudiante intuye que el número de bolas azules es un dato importante en la solución del problema. Logra comprender que, al extraer una bola roja de la bolsa, se produce una variación en el número de elementos del espacio muestral y consigue establecer una relación entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles del experimento. Sin embargo, no logra identificar de manera correcta la totalidad de elementos que constituyen el espacio muestral.

Nivel de rigor: Aquí se categorizaron las respuestas de los estudiantes que argumentaron correctamente de manera matemática, utilizaron diversos tipos de representación, y lograron establecer mecanismos para la solución de los problemas propuestos. En la figura 13, se puede observar un ejemplo de este tipo de razonamiento.

Figura 13. Respuesta clasificada en el nivel de rigor

Pregunta 7. En un juego de parques se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Al lanzar los dos dados y sumar los puntos ¿qué es más probable?

☒ a. Que la suma sea siete puntos
 b. Que la suma sea cinco puntos
 c. Que la suma sea cinco o siete puntos tiene la misma probabilidad de ocurrir
 d. Es Imposible predecir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica tu respuesta: ES ESQ POR QUE: 1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1
 + NO ES NO POR QUE: 1+4 2+3 3+2 4+1

En el caso que se presenta en la figura 13, el estudiante identifica el espacio muestral como un conjunto de parejas, reconoce los diferentes arreglos ordenados que permite el espacio muestral, representa cada uno de los eventos favorables para las situaciones planteadas, justifica la respuesta a la pregunta de manera coherente. En términos generales, da indicios de haberse alejado de algunas creencias mencionadas anteriormente que pueden afectar la comprensión de los conceptos asociados a la probabilidad.

El análisis realizado a las justificaciones de los estudiantes permitió identificar algunas de sus fortalezas y debilidades frente a conceptos asociados con la probabilidad. Por otra parte, facilitó el proceso de clasificación de sus argumentos de acuerdo con los niveles establecidos en el sistema de categorías. En la tabla 9 se presenta el número de respuestas de los estudiantes, de acuerdo con el nivel de razonamiento probabilístico para cada una de las preguntas del cuestionario.

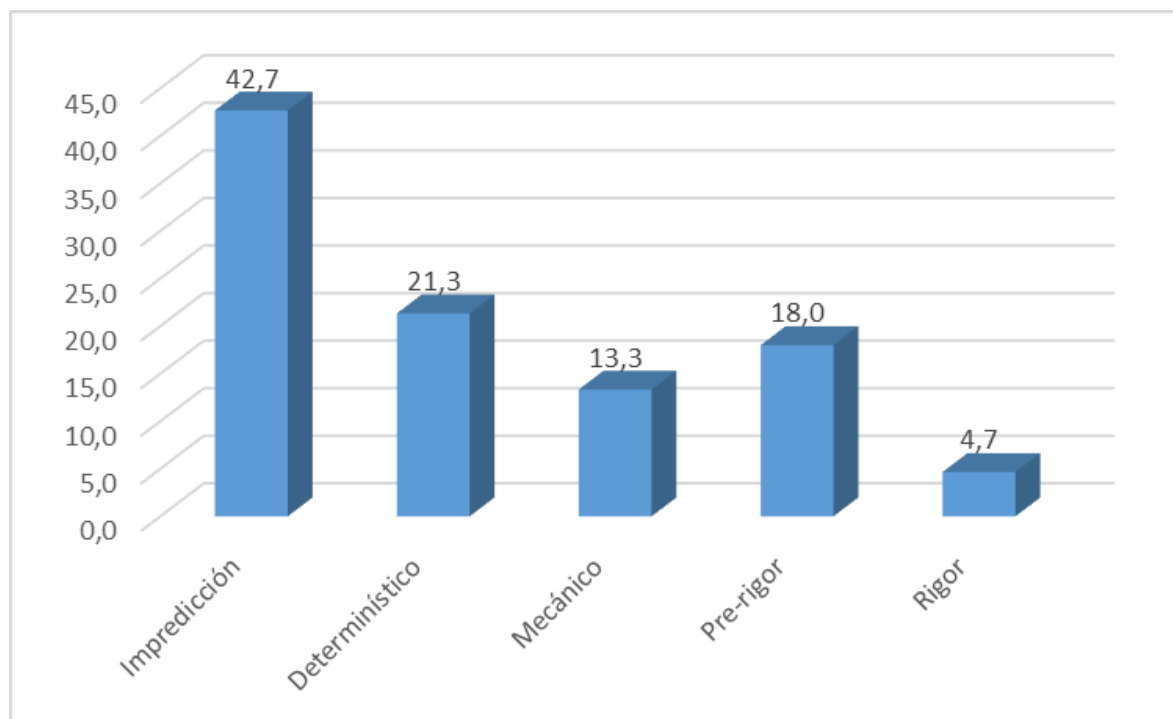
Tabla 9. Clasificación de respuestas de los estudiantes por niveles de razonamiento probabilístico

Pregunta	Nivel de	Nivel	Nivel	Nivel de	Nivel de
----------	----------	-------	-------	----------	----------

	Impredicción	Determinístico	Mecánico	Pre-rigor	Rigor
	o				
P1	1	9	2	1	2
P2	7	1	5	2	0
P3	2	5	3	5	0
P4	2	7	3	1	2
P5	2	2	2	7	2
P6	9	4	2	0	0
P7	12	1	1	1	0
P8	11	3	1	0	0
P9	12	0	1	2	0
P10	6	0	0	8	1
Total	64	32	20	27	7

Los resultados obtenidos revelan que, de acuerdo con las categorías de razonamiento probabilístico propuestas por Sánchez y Benítez (1997), la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel de impredicción o en el nivel determinístico (el 64%: ver Figura 14), primando en estos casos el pensamiento subjetivo y causal. En este grupo de estudiantes, se observó que por lo general no utilizan recursos matemáticos cuando se enfrentan a la resolución de un problema.

Figura 14. Porcentaje de respuestas de acuerdo con los niveles de razonamiento probabilístico



4.1.5 Evaluación general de la actividad de diagnóstico

El análisis cuantitativo y cualitativo del cuestionario de diagnóstico permitió evidenciar que los estudiantes presentan grandes dificultades en la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad, asociadas con la comprensión de las ideas intuitivas de experimento aleatorio, espacio muestral, posibilidades de ocurrencia de eventos, cálculo de probabilidades e independencia de sucesos.

Las justificaciones proporcionadas para las preguntas planteadas en el cuestionario revelan que algunos estudiantes no distinguen entre un experimento aleatorio y uno no aleatorio. Sus respuestas se basan únicamente en la información proporcionada en el enunciado, sin considerar posibilidades de información adicional que no se menciona explícitamente en el problema.

Se observó que en la mayoría de los casos los estudiantes no logran identificar todos los elementos que conforman el espacio muestral de un experimento. Esto se debe principalmente a que no han alcanzado el razonamiento combinatorio. Un ejemplo representativo de esta situación se presentó cuando se les preguntó a los estudiantes: Si se

lanzan simultáneamente dos dados, ¿qué es más probable, que la suma de los puntos sea 7 o que la suma de los puntos sea 5? La mayoría de los estudiantes consideraron que los dos sucesos eran igualmente probables, esto debido a que no lograron identificar las posibles combinaciones para cada uno de los casos.

Hay quienes se guiaron por sus creencias y sin considerar el espacio muestral manifestaron que el 7 es un número de la suerte y por lo tanto sería el más probable.

Otros estudiantes realizan extensiones incorrectas del espacio muestral, consideran por ejemplo que, si al lanzar un dado el espacio muestral está conformado por 6 elementos, si se lanzan simultáneamente dos dados el número de elementos del espacio muestral en este caso será 12.

Este tipo de razonamiento también genera dificultades en los estudiantes al momento de distinguir entre eventos equiprobables de no equiprobables. En general tienden a pensar que todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Cuando se solicitó a los estudiantes que calcularan probabilidades, se evidenció su falta de recursos matemáticos para hacerlo. Aunque aplicaron la regla de Laplace, no se tuvieron en cuenta números decimales ni porcentajes. Además, al comparar probabilidades no establecieron relaciones de proporcionalidad. En ocasiones sus respuestas se basaron exclusivamente en la información proporcionada en el enunciado, lo que impidió que identificaran todos los elementos del espacio muestral necesarios para dar solución a los problemas.

Como se muestra en la figura 14, el 64% de los estudiantes encuestados se ubicaron en niveles de impredeción y determinismo, primando en estos casos el pensamiento subjetivo y causal, como se puede notar en las figuras 5 a la 10, del análisis cualitativo de la encuesta de diagnóstico.

Particularmente en este grupo de estudiantes se observó que por lo general no utilizan recursos matemáticos cuando se enfrentan a la resolución de un problema.

Quienes se encuentran en el nivel de razonamiento determinístico, acuden a sus creencias personales fruto de experiencias previas y de la influencia de su entorno sociocultural. Ideas como la suerte, el destino, el poder de Dios, entre otras, dificultan el análisis que pueden realizar de la información dada para asumir una situación, una tarea o un problema que involucre la probabilidad.

Con la intención de dar respuesta a la pregunta de investigación sobre ¿Cuáles son las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad?, se pudo concluir que los resultados del análisis de la información obtenida en el cuestionario de diagnóstico coinciden con estudios previos como los realizados por Watson et al. (2004) y Sharma (2006) en donde los estudiantes asocian eventos aleatorios con creencias como la suerte, el destino, la intervención divina. Cuando se preguntó por eventos asociados con generadores aleatorios como dados o monedas, los estudiantes fundamentaron sus razonamientos en fenómenos físicos. Surgieron creencias como la influencia del viento, el peso de los cuerpos y el control humano sobre los objetos, estas ideas también han sido hallazgos anteriores en los trabajos de Ang y Shahrill (2014) y Nicolson (2005).

4.2 Intervención didáctica

La intervención didáctica desempeña un papel central en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que busca llevar a cabo estrategias efectivas para promover el desarrollo de los estudiantes.

En el contexto de esta investigación, la intervención didáctica implementada se basó en un diseño cuidadoso al adaptar recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto de probabilidad. A través de la aplicación de hojas de trabajo y el uso de GeoGebra, se promovió la exploración de conceptos probabilísticos, buscando un mayor desarrollo de las habilidades matemáticas y el mejoramiento en los procesos de resolución de problemas.

El diseño e implementación de la intervención didáctica se centró en abordar las dificultades identificadas en los estudiantes durante el estudio diagnóstico. Los temas seleccionados para las actividades realizadas fueron: experimentos aleatorios, espacio muestral, cálculo de probabilidades de sucesos equiprobables y no equiprobables, regla de Laplace, comparación de probabilidades e introducción al significado frecuencial de la probabilidad.

Se diseñaron cinco hojas de trabajo con sus correspondientes aplicaciones de GeoGebra, sin embargo, debido al tiempo permitido por la institución para el desarrollo de la actividad, sólo se aplicaron tres de ellas a los estudiantes.

4.2.1 Condiciones de aplicación de la intervención didáctica

Los estudiantes que participaron del experimento de enseñanza contaron cada uno con un computador portátil en dónde se alojaron las diferentes aplicaciones del software GeoGebra. Las aplicaciones fueron diseñadas por el investigador y estuvieron centradas en representaciones ejecutables, esto debido a que los estudiantes involucrados en el experimento no habían tenido ninguna experiencia con el uso del software.

Al momento de introducir el uso de la herramienta digital en el desarrollo de las actividades de la intervención didáctica, el profesor proyectó por medio de un video beam, las aplicaciones diseñadas en GeoGebra, con el objetivo de explicar a la clase la función que cumplían los deslizadores, las casillas de entrada y las representaciones dinámicas de la interfaz gráfica.

Esta estrategia permitió al profesor brindar una explicación detallada de la herramienta digital y asegurarse de que los estudiantes comprendieran su funcionamiento con la intención de asegurar su participación activa durante el desarrollo de la intervención y la exploración eficaz al interactuar con las aplicaciones en sus computadores portátiles.

Cada una de las sesiones de la intervención se realizó en un período de ciento diez minutos, correspondientes a dos unidades de clase regulares de la asignatura.

En la tabla 10, se presentan las actividades diseñadas para la intervención didáctica, los contenidos curriculares asociados con la actividad y las creencias relacionadas con este tipo de actividades de acuerdo con los resultados del estudio diagnóstico y al análisis de los antecedentes de investigación presentados en el capítulo 2.

Tabla 10. Actividades diseñadas para la intervención didáctica

Actividad	Contenidos asociados a la actividad
Actividad 1.	Experimento aleatorio
Gran rifa	Espacio muestral
	Independencia de sucesos
Actividad 2.	Experimento aleatorio
Lanzamiento de dados	Espacio muestral
	Cálculo de probabilidades
	Regla de Laplace
	Probabilidad frecuencial

Actividad 3.	Experimento aleatorio
Lanzamiento de monedas	Espacio muestral
	Independencia de sucesos
	Regla de Laplace
	Probabilidad frecuencial

4.2.2 Descripción de la actividad 1

En el diseño de la primera actividad de la intervención, se establecieron las siguientes etapas:

1. Introducción y contextualización de los estudiantes frente a los contenidos matemáticos a tratar. De común acuerdo con el docente se optó por el uso de material audiovisual, por lo que se realizó la búsqueda y el análisis de algunos contenidos alojados en los repositorios de recursos didácticos aportados por el Ministerio de Educación Nacional para los maestros.

Se seleccionó el video “Juegos aleatorios” perteneciente al programa “Todos a Aprender”, que se encuentra alojado En el canal de YouTube, MEN (2016), cuyo objetivo es: presentar una estrategia didáctica para diferenciar los eventos aleatorios de los no aleatorios, lo que coincide con los objetivos de aprendizaje propuestos por el investigador para esta actividad.

2. Hoja de trabajo 1. El instrumento fue diseñado en dos secciones, la primera constó de un cuestionario de cinco ítems de respuestas abiertas rediseñadas a partir de instrumentos de investigaciones previas. (Ver anexo 2)

Los ítems 1 y 3, fueron reformulados tomando como referencia el trabajo de Green (1983), otros investigadores como Vásquez (2014); Watson et al., (2004); Cañizares (1997) han utilizado reactivos similares para evaluar la comprensión de sucesos independientes, así como el significado laplaciano y frecuencial de la probabilidad tanto en estudiantes como en profesores.

El ítem 2 fue tomado del trabajo de Batanero y Díaz (2004), con él se buscaba realizar un experimento para decidir si los estudiantes tienen buenas intuiciones respecto a los sucesos aleatorios, en este caso la intención fue observar si logran diferenciar entre un experimento aleatorio y uno determinista.

El ítem 4 se reformuló a partir de los estudios realizados por Fischbein y Schnarch (2016) en dónde se plantearon problemas asociados a conceptos erróneos de probabilidad, en este caso se intentó evidenciar el sesgo de la representatividad de grupos de estudiantes en diferentes niveles de escolaridad. En el presente estudio el problema busca identificar intuiciones de los estudiantes sobre la independencia de sucesos.

El ítem 5 ha sido reformulado con base en el trabajo de Rivas (2009), en dónde se destacan ideas erróneas que tienen los estudiantes sobre probabilidad.

4. El diseño de la segunda parte de la hoja de trabajo estuvo centrado en valorar el impacto que puede tener el uso de la herramienta digital GeoGebra en el sistema de creencias que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad y por ende en la resolución de problemas.

Se diseñó una aplicación de GeoGebra, que simulaba la mecánica para obtener el número ganador de un sorteo de dos cifras; la interfaz gráfica utilizada en esta sesión de la hoja de trabajo puede observarse en la figura 15.

En esta aplicación se incluyó un deslizador que permitió a los estudiantes realizar un número variable de sorteos entre 1 y mil, y repetir la exploración hasta encontrar el número ganador. También se incorporaron cuadros de texto que mostraban de forma dinámica los resultados del último sorteo realizado, se incluyó una casilla de entrada que permitía a los estudiantes seleccionar un número específico de sorteos sin utilizar el deslizador. En la interfaz gráfica se incorporaron tablas de frecuencia que brindaban a los estudiantes la posibilidad de observar la cantidad de veces que cada cifra de cero a nueve, había resultado ganadora en algún sorteo.

Figura 15. Interfaz del applet de GeoGebra utilizado en la hoja de trabajo 1.



Con base en la interacción y la observación de las representaciones ejecutables, se propuso a los estudiantes una serie de interrogantes que permitieran evidenciar algunos procesos de pensamiento matemático tales como construcción de conjeturas, relacionar diferentes representaciones, comunicar matemáticamente entre otras.

4.2.3 Objetivos de aprendizaje de la actividad 1

Los objetivos que se pretenden alcanzar con esta actividad son:

- Diferenciar entre un experimento aleatorio y uno determinista.
- Determinar cuando los posibles resultados de un experimento aleatorio son independientes entre sí.

4.2.4 Análisis de la Información. Actividad 1

Para realizar el análisis de la información, se tuvieron en cuenta las diferentes acciones llevadas a cabo durante el desarrollo de la actividad, estas incluyeron la participación de los estudiantes durante las intervenciones del profesor, las discusiones al interior de los grupos de estudiantes, la información recabada a través de las hojas de trabajo, los momentos de interacción con las aplicaciones alojadas en el computador.

Las fuentes de información fueron las videograbaciones de las intervenciones de los estudiantes, las hojas de trabajo y los registros de observación del investigador.

Se realizó una primera etapa en donde se transcribieron las videograbaciones al igual que las respuestas dadas por los estudiantes a los diferentes reactivos propuestos en las hojas de trabajo y los registros de observación del investigador. Respecto a las unidades de análisis,

se asumieron como unidades de muestreo las respuestas de los estudiantes en los diferentes momentos del desarrollo de la actividad y como unidades de contexto los diferentes párrafos que conformaron las transcripciones.

Se caracterizaron las respuestas aportadas por los estudiantes de acuerdo con las categorías apriorísticas documentadas en la tabla 8 correspondientes a los niveles de razonamiento probabilístico definidos por Sánchez y Benítez (1997), que fueron utilizadas también en el análisis del diagnóstico. Se realizó una síntesis de las respuestas de los estudiantes para considerar posibles categorías emergentes sobre recursos y heurísticas (Shoenfeld, 1985; 1992) así como el uso de la herramienta digital GeoGebra en el rol de amplificador o en el papel de reorganizador cognitivo.

4.2.4.1 Análisis de los Niveles de Razonamiento Probabilístico de los Estudiantes.

Actividad 1

Se analizaron las respuestas y las justificaciones dadas por los estudiantes a los reactivos propuestos en la hoja de trabajo, además, se registraron en video las intervenciones en el desarrollo de la clase, las cuales posteriormente fueron registradas en video grabaciones y transcritas para ser documentadas.

De acuerdo con las categorías establecidas, algunas de las respuestas dadas por los estudiantes fueron clasificadas en el nivel de impredeción, en estos casos no justificaron su respuesta o utilizaron expresiones que no permitieron analizar o interpretar sus razonamientos sobre el problema planteado.

En la tabla 11 se presentan algunas de las justificaciones dadas por los estudiantes, clasificadas en esta categoría de razonamiento.

Tabla 11. Nivel de impredeción. Ejemplos de respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes

Problema planteado		Respuesta y justificación del estudiante
Al sacar 4 números de una bolsa que contiene los números del 1 al 30. ¿Qué conjunto de números sería más probable sacar?		Sería la b, o la a, no sabríamos bien como saldrían los números, hay treinta bolas y de esas bolas.
a.	8, 9, 10, 11	b. 4, 28, 17,

19	
Usted va a comprar una rifa y le ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número?	No tengo una respuesta, de pronto puede ser que sea el número ganador o no.
a. SÍ b. NO	
Una moneda se lanza cuatro veces y cada vez que cae, cae cara hacia arriba. ¿Cuál es el resultado más probable al lanzar la moneda por quinta vez?	CCCCS, porque hace esto...bueno, se voltea.

Como se observa, los argumentos, fueron presentados de manera incoherente e incompleta, expresiones utilizadas por los estudiantes tales como “no sabría”, “no tengo una respuesta”, “no se puede saber”, reflejan dificultades en la comprensión de los conceptos asociados con los objetivos de la actividad.

Otros estudiantes basaron sus justificaciones en asociar causas y efectos para explicar el posible resultado de un experimento aleatorio, en la mayoría de los casos las relaciones que se establecieron entre sus justificaciones y la respuesta a los interrogantes se realizaron por fuera del dominio de la probabilidad, este tipo de razonamientos se categorizaron en el nivel Determinístico.

Algunas de las respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes pueden observarse en la tabla 12.

Tabla 12. Nivel Determinístico. Ejemplos de respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes

Problema planteado	Respuesta y justificación del estudiante
Un profesor ha pedido a cuatro de sus estudiantes que realicen el experimento de lanzar seis veces una moneda al aire y presenten una lista de sus resultados. A continuación, se muestran los resultados obtenidos.	Sí. La tramposa es Ana, porque es muy poco probable que siempre caiga sello Sí. Fue Ana, porque puso todas las mismas letras Sí. Porque al lanzar la moneda y si el

	compañero puede tirar esta puede que si
Juan: CSSCSS	
María: CSCSCS	No. Puede que sea muy extraño que Ana
Pedro: CCCCCS	haya sacado sello en todas las ocasiones,
Ana: SSSSSS	pero igualmente el sello no tiene más
	posibilidades de salir por lo que sólo es una
El profesor cree que probablemente	gran suerte
uno de los estudiantes hizo trampa.	
¿Estás de acuerdo con el profesor?	

Usted va a comprar una rifa y le	Sí. Es la fecha del cumpleaños de
ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el	mi hermana, me puede dar suerte
boleto marcado con ese número?	
a. Sí b. NO	No. Porque sé que es un número de
	la suerte, pero yo no creo en eso

Las respuestas dadas por los estudiantes que se clasificaron en la categoría de razonamiento Determinístico muestran que prevalecen creencias de orden sociocultural, como es el caso de la idea de la suerte, que es utilizada como un recurso para justificar lo que no está al alcance de su comprensión conceptual.

De igual manera, cuando los estudiantes se enfrentaron a los problemas que involucraron la selección de un número de más de dos cifras para participar en un sorteo evidenciaron creencias, fruto de la cotidianidad y de sus propias experiencias.

De sus respuestas se puede inferir que ellos creen:

- Que existe el número de la suerte
- Que algunos números son de mala suerte
- Que es más fácil ganar con un número de cifras diferentes a un número en donde las cifras se repiten como el 111
- Que los resultados de un experimento aleatorio no se repiten en grandes rachas

Otros estudiantes atribuyeron el resultado del experimento aleatorio a fenómenos físicos, como en el caso del lanzamiento de una moneda.

A continuación, se transcribe un aparte del diálogo entre el Profesor y un estudiante a quien llamaremos Carlos.

Carlos argumenta que el peso de uno de los lados de la moneda ocasionará que esta caiga en cara o sello.

Carlos: Bueno, en la primera nosotros llegamos a la conclusión de que Ana fue la que hizo trampa, porque es muy poco probable que al lanzar una moneda seis veces nos salga seis veces el mismo lado.

Profesor: ¿Ustedes están diciendo que Ana es la que hizo trampa, cierto? Y ustedes manifiestan de que Ana hizo trampa porque hay una expresión muy interesante cuando usted dice, es muy poco probable que siempre le haya salido sello, pero entonces ¿A qué se refieren ustedes cuando me dicen que es muy poco probable?, ¿De qué depende eso de que sea muy poco probable?

Carlos: Yo diría que, del peso de la moneda, o sea digamos, un lado de la moneda pesa más que otro, podría variar por eso.

Sólo tres de las respuestas dadas por los estudiantes fueron clasificadas en la categoría de razonamiento mecánico, eso debido a que en las justificaciones se utilizaron argumentos asociados con recursos matemáticos que normalmente son utilizados al resolver problemas de probabilidad, como son los porcentajes y las fracciones, sin embargo, se utilizaron de forma incorrecta, de manera memorística y fuera de contexto, dando pocas muestras de haber entendido el problema o la situación planteada. En la tabla 13 se pueden observar las justificaciones mencionadas.

Tabla 13. Nivel Mecánico. Respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes

Problema planteado	Respuesta y justificación del estudiante
Una moneda se lanza cuatro veces y cada vez que cae, cae cara hacia arriba. ¿Cuál es el resultado más probable si se lanza la moneda por quinta vez?	La respuesta es cara, ya que la probabilidad sería de 50% y 50% La probabilidad de que salga sello es de 1/5, o sea poco probable y de que salga cara es 4/5, o sea muy probable
Usted va a comprar una rifa y le	Sí, porque la probabilidad es 50% y

ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número?

a. SÍ b. NO

Las respuestas que se categorizaron en el nivel de pre-rigor, muestran que los estudiantes utilizaron argumentos desde el punto de vista matemático. Cada vez sus justificaciones están más alejadas de las creencias de tipo sociocultural y soportadas en la comprensión de los fenómenos probabilísticos. En la tabla 14 se registran algunos de los argumentos dados por los estudiantes al justificar las respuestas a los problemas propuestos en la hoja de trabajo.

Tabla 14. Nivel de Pre-rigor. Ejemplos de respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes

Problema planteado	Respuesta y justificación del estudiante
Al sacar 4 números de una bolsa que contiene los números del 1 al 30. ¿Qué conjunto de números sería más probable sacar? a. 8, 9, 10, 11 b. 4, 28, 17, 19	Cualquiera de los dos resultados son probables, además si se dice que es del 1 al 30 hay más variantes de números.
Usted va a comprar una rifa y le ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número? a. SÍ b. NO	Sí, lo compraría porque el número no tiene importancia, porque no es por orden y todos los números tienen la misma probabilidad de salir.
Una moneda se lanza cuatro veces y cada vez que cae, cae cara hacia arriba. ¿Cuál es el resultado más probable si se lanza la moneda por quinta vez?	Los dos son igual de probables, no importa como haya caído antes

Puede inferirse que este grupo de estudiantes se aproxima a la noción de lo que es un experimento aleatorio, es capaz de combinar parcialmente elementos de un espacio muestral,

aunque no logra obtener todas las combinaciones, intenta encontrar soluciones acertadas a partir de sus intuiciones. Consigue diferenciar sucesos equiprobables de no equiprobables y logra identificar la independencia entre sucesos.

Respecto la categoría de razonamiento probabilístico de rigor, son pocos los estudiantes que se aproximan a este nivel, sólo el 4,4% de las preguntas se clasificaron en él.

Un ejemplo de argumentación categorizado en el nivel de rigor se presenta a partir de la transcripción del diálogo establecido entre Carla, María José y el profesor de matemáticas durante el desarrollo de la clase:

Profesor: ¿Ustedes a qué conclusiones llegaron sobre el hecho de que uno de los chicos hizo trampa?

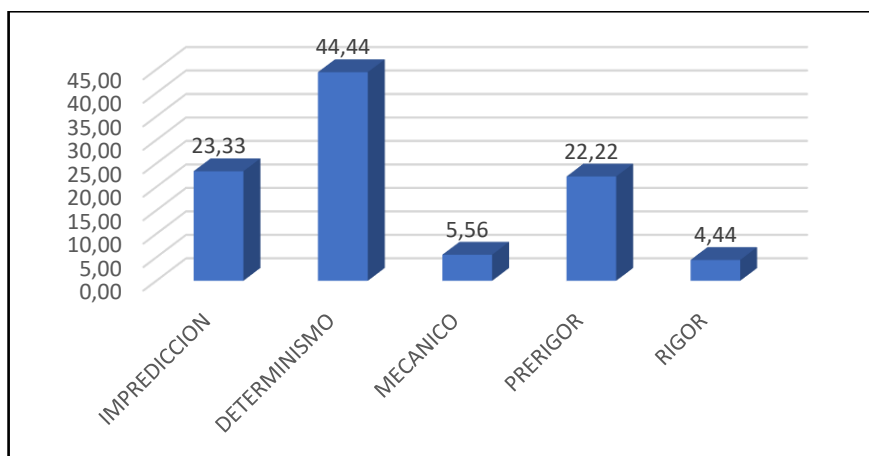
Carla: lo que pasa es que estamos en polémica, porque nosotros tres creemos que fue Ana, porque no es muy probable que todas hayan salido sello, entonces ella dice...

María José: Yo digo que el profesor no puede saber si uno de ellos hizo trampa, porque el tirar una moneda es una situación aleatoria, no se sabe de qué lado vaya a caer.

La estudiante utiliza argumentos basados en la comprensión del concepto de aleatoriedad, lo hace de manera correcta, dentro del contexto adecuado para la solución del problema.

En términos generales, en la figura 16 se observan los porcentajes de respuestas de los estudiantes de acuerdo a los diferentes niveles de razonamiento analizados a partir de la información obtenida en la primera actividad de la intervención didáctica.

Figura 16. Actividad 1. Porcentaje de respuestas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico



4.2.4.2 Análisis sobre el uso de la tecnología y su relación con los niveles de razonamiento probabilístico. Actividad 1

En esta sección se documenta la manera en que los estudiantes, a través de sus respuestas a la hoja de trabajo, su participación en la actividad y los diálogos tanto con sus compañeros como con el docente, exhiben algunas modificaciones de sus ideas, creencias y razonamientos matemáticos al utilizar simulaciones de GeoGebra.

Para iniciar la actividad, se motivó a los estudiantes a participar en un sorteo de dos cifras, se pidió que escogieran el número con el que deseaban participar y se les solicitó explicar la razón por la que había escogido dicho número. En la figura 17 se puede observar la manera en que los estudiantes realizaron sus registros en la hoja de trabajo.

Figura 17. Criterio para la selección de un número en un sorteo. Ejemplo 1.

¡Ahora a participar en la rifa!

Escoge un número de dos cifras con el que quieras participar en la rifa: 77

Explica por qué escogiste ese número

por que el numero 7 es el de la suerte
y al tener el 77 tengo el doble de suerte
de ganar

La mayoría de las justificaciones para la selección del número ganador evidencian que los estudiantes creen que el número de la suerte, la fecha de su cumpleaños, experiencias previas exitosas en rifas y sorteos pueden incidir en el resultado del experimento aleatorio. Prevalece el razonamiento determinístico en donde se tiende a explicar el fenómeno probabilístico mediante una causa poderosa, por fuera del contexto de la situación planteada.

Otras justificaciones se alejan de este tipo de creencias y presentan argumentos a través de expresiones en donde se involucran términos como azar, aleatoriedad, o simplemente se selecciona un número teniendo claro que este representa sólo una posibilidad de ganar. Se han considerado este tipo de argumentos en la línea del razonamiento de pre-rigor.

Justificaciones como las que se documentan en la figura 18, muestran argumentos que no se fundamentan en creencias, ni en conceptos asociados con la probabilidad, se realizan

fuera de contexto y carecen de coherencia en experiencias previas, estos razonamientos se han categorizado en el nivel de impredeción.

Figura 18. Criterio para la selección de un número en un sorteo. Ejemplo 2.

¡Ahora a participar en la rifa!

Escoge un número de dos cifras con el que quieras participar en la rifa: 52

Explica por qué escogiste ese número ES cogui El numero 52 porque en las rifas la mayoría de veces empieza por la mitad de la cantidad

En la tabla 15 se registra el porcentaje de justificaciones de los estudiantes de acuerdo a la clasificación por nivel de razonamiento probabilístico.

Tabla 15. Porcentajes de justificaciones de los estudiantes por nivel de razonamiento probabilístico al seleccionar un número para un sorteo de dos cifras

Nivel de razonamiento	Porcentaje de justificaciones de los estudiantes
Impredeción	13,3%
Determinístico	73,3%
Mecánico	0%
Pre-Rigor	13,3%
Rigor	0%

En un segundo momento se indicó a los estudiantes que haciendo uso del deslizador que aparece en la aplicación de GeoGebra, como se visualiza en la figura 19, realizará todos los sorteos posibles en un tiempo de tres minutos e intentará ganar con el número que había seleccionado.

Figura 19. Uso de deslizador para realizar entre 1 y 1000 sorteos.



De los quince estudiantes que participaron de la actividad, dos nunca obtuvieron un número ganador, diez informaron en sus hojas de trabajo haber obtenido el número ganador una vez, dos ganaron en dos ocasiones y uno en tres.

Se pidió a los estudiantes que explicaran la razón por la que habían ganado en pocas ocasiones o porque no habían podido ganar. Tres de los estudiantes no lograron dar ninguna explicación, mientras que otros tres justificaron sus resultados basados en su creencia sobre la buena o la mala suerte.

Los nueve estudiantes restantes justificaron el éxito o el fracaso del resultado del sorteo con argumentos que involucran términos o expresiones propias del estudio de la probabilidad tales como el alto número de resultados, el azar, la aleatoriedad, entre otras. Algunas de sus respuestas a las preguntas ¿Cuántas veces ganaste? Y ¿Por qué crees que sucedió? esto fueron:

E11: Gané 1 de 987 sorteos, porque un sorteo es un juego aleatorio.

E13: Gané 3 veces, porque lo hice al azar

E15: Gané 1, porque es muy aleatorio.

E18: Gané 1, porque hay demasiados números y hay muy poca probabilidad de que salga.

La inclusión de este tipo de vocabulario en las respuestas de los estudiantes se ha comenzado a observar aún en aquellos donde que muestran dificultades para expresar sus argumentos. En la figura 20 se observa que el estudiante, aunque se fundamenta en la creencia

de la suerte, incluye los términos probabilidad y aleatoriedad, aunque lo hace fuera de contexto.

Figura 20. Uso de expresiones propias de la probabilidad fuera de contexto

¿Cuántas veces ganaste? 1

¿Por qué crees que sucedió esto?

Creo que fue suerte e la probabilidad aleatoria

En el tercer momento de la interacción con el software GeoGebra, se les solicitó a los estudiantes que, utilizando las herramientas ofrecidas por la aplicación, diligenciaran la tabla que se presenta en la figura 21, con el fin de confrontar los resultados de un alto número de sorteos con el número inicial que ellos habían seleccionado para participar.

Se les pidió además que a partir de sus registros escribieran una conclusión de la actividad en las hojas de trabajo. Las conclusiones fueron discutidas en grupos de cuatro estudiantes y socializadas con toda la clase.

Figura 21. Registros de los datos de los estudiantes, de acuerdo a la simulación sorteos en GeoGebra

Selecciona un número de sorteos entre los propuestos en la siguiente tabla, realiza el experimento y consigna los resultados obtenidos en la aplicación.				
Selecciona un número de sorteo	Número seleccionado de sorteos	Número ganador	Cuántas veces cayó el primer número que habías elegido	Cuántas veces cayó el segundo número que habías elegido
Entre 1 y 50				
Entre 5 y 100				
Entre 100 y 200				
Entre 200 y 500				
Entre 500 y 800				
Entre 800 y 900				
Entre 900 y 1000				

Las conclusiones de los estudiantes después de realizada la actividad con el uso de la herramienta digital GeoGebra fueron categorizadas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico (Sánchez y Benítez, 1997), obteniendo los resultados que se informan en la tabla 16.

Tabla 16. Porcentajes de conclusiones de los estudiantes por nivel de razonamiento probabilístico después de realizada la actividad con el uso de la herramienta digital GeoGebra

Nivel de razonamiento	Porcentaje de las conclusiones de los estudiantes
Impredicción	20%
Determinístico	20%
Mecánico	0%
Pre-Rigor	60%
Rigor	0%

Al revisar las conclusiones se encontró que el 86, 6% de los estudiantes involucraron en sus redacciones términos como: aleatorio, juego aleatorio, azar, posibilidad, probabilidad.

Algunos de ellos evidencian con claridad haber comprendido el concepto de aleatoriedad y utilizarlo de manera contextualizada frente al interrogante que se les plantea, como se observa en las siguientes conclusiones:

E1: En una rifa podrías sacar un número aleatorio, aun si quisieras sacar ese número no sabrías si el número que escogiste va a salir.

E4: No es posible saber cuál es el número ganador, porque como son 1000 intentos las probabilidades bajarían bastante.

E15: Que, si yo escojo un número del 00 al 99, va a tener la misma probabilidad de ganar que los otros números.

Otros estudiantes, aunque intentan incluir en sus argumentos los conceptos mencionados durante la actividad, no logran separarse aún de sus creencias iniciales, como es el caso de los estudiantes E3 y E5, cuyas conclusiones fueron:

E3: Que mi conclusión en este caso no es del número sino de la suerte, que la probabilidad en este caso sería aleatoria.

E5: No tuve suerte de que me tocara el número ganador.

En sus intervenciones en esta etapa de la clase algunos estudiantes utilizaron expresiones como:

- Los juegos de azar no tienen una forma específica de ganar

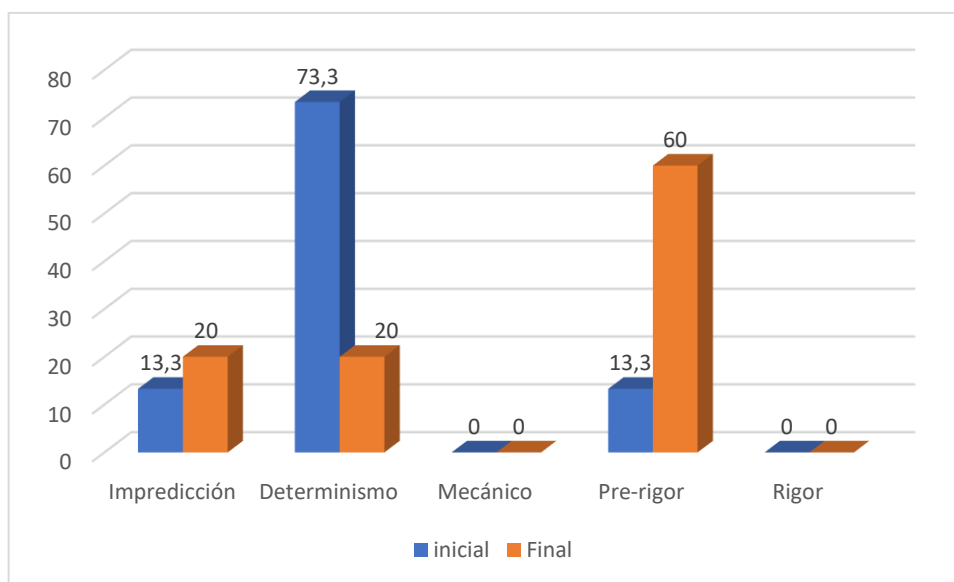
- Cualquier cosa puede pasar en un sorteo ya que es aleatorio
- Hay infinidad de posibilidades por lo que es difícil ganar
- Con tantos sorteos no hay probabilidades de ganar
- El número ganador se puede obtener algunas veces

Puede inferirse que estas afirmaciones muestran un tránsito de niveles de impredeción y determinismo al menos al nivel de razonamiento de pre-rigor probabilístico de acuerdo a las categorías propuestas.

Aunque conceptos como la aleatoriedad y la probabilidad clásica, aún pueden considerarse como recursos defectuosos desde la perspectiva de Schoenfeld (1985), es decir conceptos que aún no han sido interiorizados de manera correcta, para este caso se han categorizado en el nivel de pre-rigor.

En la figura 22 se muestra como ha variado la clasificación de los niveles de razonamiento probabilístico desde el momento que los estudiantes propusieron bajo su criterio un número ganador, con respecto a las conclusiones obtenidas después de desarrollar sus hojas de trabajo apoyados en el uso de la herramienta digital GeoGebra.

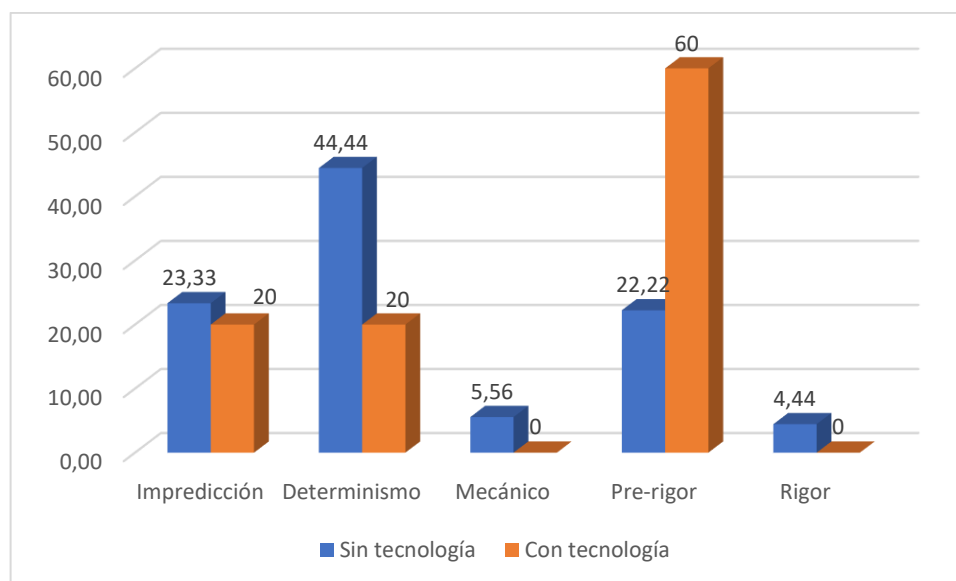
Figura 22. Variación de los niveles de razonamiento durante el desarrollo de la actividad 1.



Se puede observar en la representación gráfica de la figura 20, que durante el desarrollo de la actividad ninguna de las justificaciones de los estudiantes fue categorizadas en el nivel de razonamiento mecánico ni en el nivel de rigor probabilístico.

Al comparar los resultados de la clasificación de las justificaciones dadas por los estudiantes en la hoja de trabajo en el primer momento de la actividad, sin el uso de herramientas digitales y en el segundo momento después de la interacción con GeoGebra, se observó que la variación en el nivel de impredeción es leve, sin embargo el nivel de razonamiento determinístico disminuyó del 44,44% al 20%, se observa también que el nivel de razonamiento mecánico desaparece mientras que se ha incrementado significativamente el porcentaje de justificaciones en la categoría de pre-rigor, donde se pasa de un 22,22% al 60%, como se indica en la figura 23.

Figura 23. Registro de niveles de razonamiento de los estudiantes previos y posteriores al uso de la herramienta digital GeoGebra. Actividad 1



4.2.5 Descripción de la actividad 2

El diseño de la segunda actividad de la intervención didáctica se realizó de manera similar a la actividad anterior. En un primer momento los estudiantes desarrollaron los interrogantes planteados en la hoja de trabajo a partir de las explicaciones dadas por el docente y apoyados en el inventario de recursos matemáticos construidos en los procesos de formación previos, en esta sección de la actividad no se utilizó una herramienta digital para aproximar a los estudiantes a la solución de las situaciones planteadas.

Esta primera parte de la hoja de trabajo (Ver anexo 3) estuvo conformada por cinco preguntas abiertas diseñadas a partir de algunos libros de texto de educación secundaria y de informes de investigaciones sobre didáctica de la probabilidad.

El ítem 1 fue tomado de un libro de texto de educación secundaria, en dónde se busca que los estudiantes identifiquen los elementos de un espacio muestral discreto y finito a partir de experimentos asociados con el lanzamiento de dados. En el libro el objetivo de la actividad apunta a construir y comparar los espacios muestrales identificando los posibles resultados que pueden obtenerse al lanzar un dado y posteriormente dos dados de diferente color.

El ítem 2 fue rediseñado a partir del trabajo de Sharma (2006) quien en su investigación utilizó la pregunta “para obtener las ideas de los alumnos sobre probabilidades teóricas incluidas en los dispositivos generadores de azar, al explicar sus respuestas los alumnos podían considerar el espacio muestral o las posibilidades simétricas del dado” Sharma (2006, p. 42).

El ítem 3 fue tomado del trabajo de tesis doctoral de Vásquez (2014) en dónde se plantea que el conocimiento matemático para la solución de esta situación problemática es “la comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace” Vásquez (2014, p. 191).

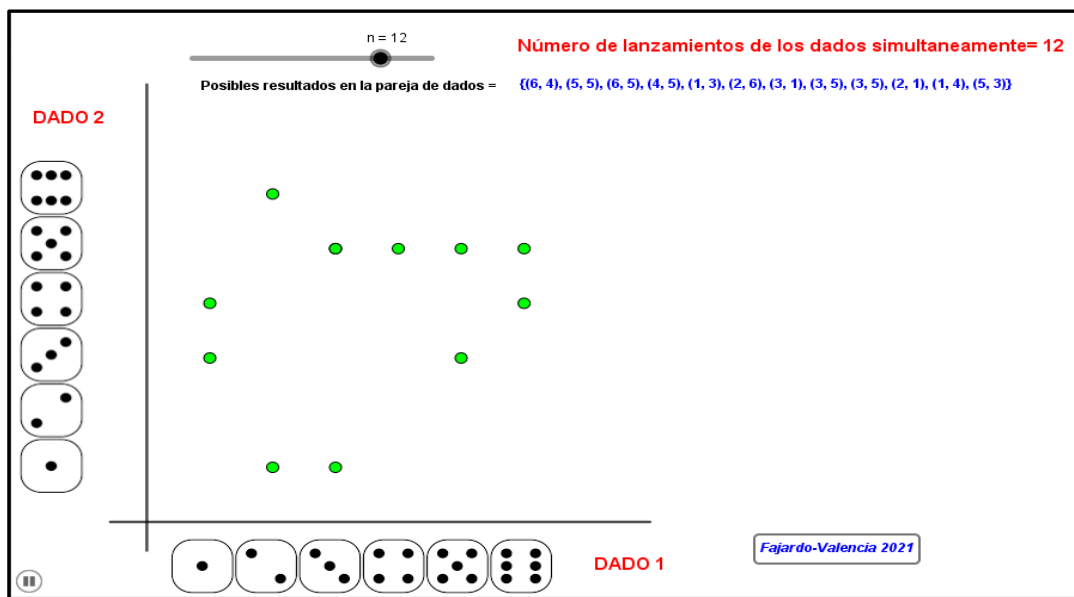
El ítem 4 fue seleccionado del trabajo de Lecoutre (1992), en dónde se plantea que la solución de este problema está relacionada con la comprensión de la noción de independencia de sucesos y la fundamentación del cálculo combinatorio.

El ítem 5 se rediseñó con base en el trabajo de investigación de Jiménez y Jiménez (2005), en donde se proponen este tipo de problemas con el fin de conjeturar posibilidades de éxito en sucesos aleatorios asociados con espacios muestrales no equiprobables y se introduce el cálculo de probabilidades de variables aleatorias discretas.

Para la segunda parte de la actividad, se diseñaron dos aplicaciones en el software GeoGebra, la primera en la que se simulaban los posibles resultados que pueden obtenerse al lanzar dos dados diferentes de manera simultánea, se buscaba que los estudiantes pudieran construir conjeturas sobre el número de elementos del espacio muestral, identificar las diferentes combinaciones que se dan dentro de este conjunto de sucesos, reconocer simetrías dentro del espacio muestral y aproximarse al cálculo de probabilidades a través de la regla de Laplace.

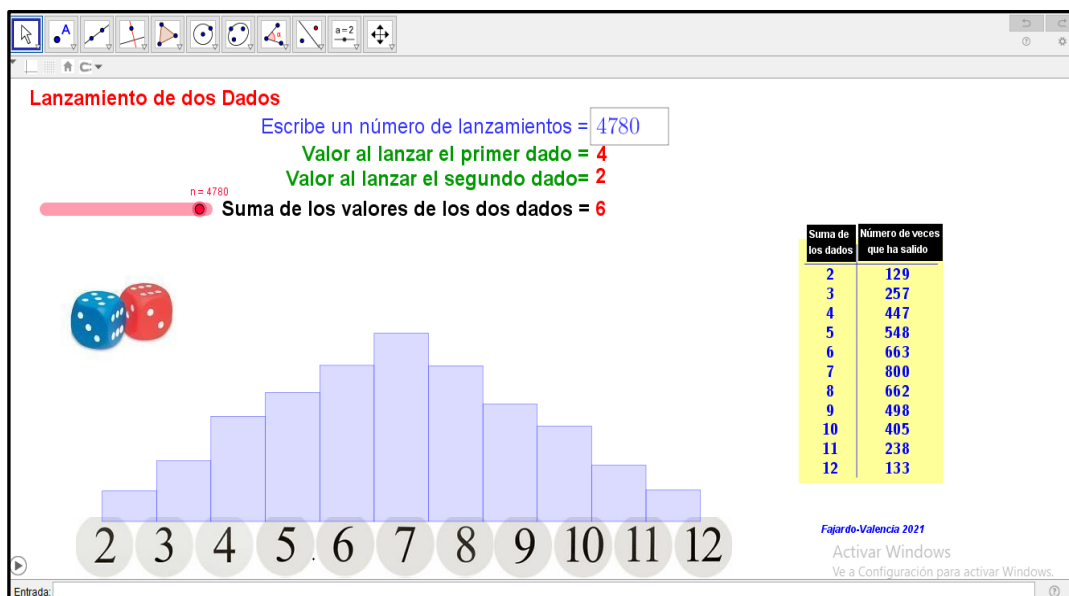
En la figura 24 se observa la interfaz gráfica de esta primera aplicación. En ella, se incluyó un deslizador que permitía a los estudiantes realizar el lanzamiento de dos dados de manera simultánea de una a quince veces y repetir la exploración hasta identificar todos los posibles resultados del espacio muestral del experimento. Se incorporaron dos cuadros de texto, uno de ellos donde se informaba sobre el número de lanzamientos realizado y el otro donde se podían observar las parejas ordenadas que se obtenían a partir del resultado en cada uno de los dados.

Figura 24. Simulación del lanzamiento de dos dados en GeoGebra



La segunda aplicación diseñada en GeoGebra se muestra en la figura 25. Esta permitió a los estudiantes observar diferentes tipos de representaciones del experimento del lanzamiento simultáneo de dos dados, como es el caso del diagrama dinámico de barras y la tabla dinámica de frecuencias absolutas de la suma de resultados obtenidos. A través del uso del deslizador los estudiantes pudieron simular el número de lanzamientos deseados entre 1 y 5000 diferenciando el valor obtenido en cada uno de los dados para cada experimento y su correspondiente suma.

Figura 25. Diagrama dinámico de barras y tablas de frecuencia para el lanzamiento de dos dados



4.2.6 Objetivos de aprendizaje de la actividad 2

Los objetivos de aprendizaje propuestos para la segunda actividad de la intervención didáctica fueron:

- Identificar los elementos de un espacio muestral finito.
- Diferenciar entre un espacio muestral equiprobable y no equiprobable
- Comparar las probabilidades de ocurrencia de dos o más eventos dentro de un mismo espacio muestral sin calcular dichas probabilidades.

4.2.7 Análisis de la Información. Actividad 2

Como se propuso desde el inicio de la intervención didáctica, el análisis de esta actividad se ha realizado en dos momentos, un primer momento en donde se analiza la información obtenida previo a la utilización de la herramienta digital Geogebra y un segundo momento en donde los estudiantes hacen uso de dicha herramienta.

4.2.7.1 Análisis de los Niveles de Razonamiento Probabilístico de los Estudiantes.

Actividad 2

En la medida que se abordaron los contenidos matemáticos asociados con los objetivos planteados para la actividad 2, se evidenció que persistían los diferentes niveles de razonamiento probabilístico adoptados para este análisis, a continuación, se exponen algunos ejemplos de cada uno de ellos:

Nivel de impredeción

En relación con la noción de espacio muestral, algunos estudiantes aún se encuentran en el nivel de impredeción, como se puede notar en la justificación que se muestra en la figura 26. El estudiante no logra dar una explicación coherente a su respuesta, no acude a los posibles resultados de la suma de los valores de las caras de los dados, ni hace uso de combinaciones.

Figura 26. Respuesta categorizada en el nivel de impredeción relacionada con la idea de espacio muestral

Si en lugar de lanzar un dado, lanzas dos, ¿crees que el número de todos los posibles resultados (Espacio muestral) será el mismo que cuando lanzas un solo dado?

*Respuesta: NO. Justifica tu respuesta: Porque los dos tienen 1, 2, 3, 4, 5, 6. y la probabilidad puede ser cualquiera pero no siempre va a caer NO A VESES puede que el dado, los dos dados saquen lo mismo.

Este tipo de razonamiento también está presente en algunos estudiantes cuando abordan problemas en donde se busca diferenciar espacios muestrales equiprobables de no equiprobables. En las siguientes respuestas dadas por algunos de los estudiantes a la pregunta: “Al lanzar dos dados y sumar sus resultados ¿qué es más probable de sacar 5 o 6?” se puede advertir este fenómeno.

Algunas justificaciones fueron:

E1: Puede sacar cualquiera de los dos porque no se puede predecir cuál va a salir.

E6: la probabilidad de que salga cualquier suma es infinita o sea hasta el 12, no puedo saber que suma es más probable.

E16: por ser números que están cerca puede salir tanto el 5 como el 6

Los estudiantes E1, E6 y E16, coinciden en la idea, que, por tratarse de un experimento aleatorio, no existen condiciones que les permitan predecir un resultado, y terminan por aceptar que todos los sucesos que se presentan dentro de un mismo espacio muestral son equiprobables.

En la figura 27, se muestra como al comparar las probabilidades de ocurrencia de dos o más eventos dentro de un mismo espacio muestral, también algunos estudiantes se encuentran en situaciones de impredeción.

Figura 27. Comparación de probabilidades sin el uso de GeoGebra

6. Hay dos jugadores que tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Si el total de la suma de los dos dados es un número del cartón, el jugador lo tacha y continúa el otro jugador. Gana quien tache primero todos los números del cartón.

Jugador Uno							
4	10	6	8	7	9	5	3

Jugador Dos							
5	4	2	3	11	9	12	10

¿Quién crees que va a ganar, el jugador Uno, o el jugador Dos?

*Respuesta: cualquiera. Justifica tu respuesta: puede ganar cualquiera porque no puedes PREDECIR cual va a salir primero o cual va a ganar

En este caso en particular, el estudiante desconoce los elementos del espacio muestral, sus posibles combinaciones y las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos, por lo que le es imposible obtener de manera correcta la solución al problema.

Nivel Determinístico

Algunas de las justificaciones dadas por los estudiantes a sus respuestas también fueron categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico, en la figura 28 se presenta el caso en el que el estudiante no logra identificar los elementos que conforman el conjunto del espacio muestral, esto debido a la creencia de que, al duplicar los dispositivos de aleatoriedad durante el experimento, el número de elementos del espacio muestral se duplicara de la misma manera. Esta idea incide no solo en que el estudiante no logre diferenciar entre sucesos equiprobables de no equiprobables sino también en la forma en que el estudiante enfrente la solución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.

Figura 28. Comparación de espacios muestrales

Si en lugar de lanzar un dado, lanzas dos, ¿crees que el número de todos los posibles resultados (Espacio muestral) será el mismo que cuando lanzas un solo dado?

*Respuesta: NO será el mismo. Justifica tu respuesta: porque al haber el doble de dados hay el doble de posibilidades

Al preguntar a los estudiantes “Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores 2, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿Qué número es más probable que salga?”

Algunas de las justificaciones de los estudiantes a su respuesta fueron:

E4: Cualquiera, esto depende de la suerte de la persona porque en el dado no hay ningún número que se repita.

E9: El 2, porque el 2 ha salido más veces que los demás.

E16: El cinco, porque es el que no ha salido en las 10 lanzadas.

Este tipo de razonamientos evidencian la ausencia de recursos matemáticos (Schoenfeld, 1992), lo que hace que los estudiantes recurran a creencias como la suerte o a la creencia de que, en una secuencia aleatoria, el siguiente resultado esperado tendrá más probabilidad cuando no se ha dado anteriormente o cuando se ha repetido más que los demás elementos del espacio muestral.

Nivel mecánico

Otros estudiantes utilizaron dentro de sus justificaciones argumentos matemáticos que estaban fuera del contexto del problema planteado, en el caso de la pregunta 5 (P5) por ejemplo, algunas respuestas fueron:

P5. *“Al lanzar dos dados y sumar sus resultados ¿qué es más probable de sacar 5 o 6?”*

E5: Sacar 5. Pero la probabilidad es de 50 y 50 por lo tanto puede ser igual

E18: Es 50 y 50. Porque los dos dados tienen el mismo número de caras.

Este tipo de respuestas muestran que los estudiantes utilizan una serie de recursos que podrían denominarse defectuosos, según Schoenfeld (1985) los recursos defectuosos pueden ser alguna fórmula, algún procedimiento o concepto mal aprendido que el estudiante cree que se usa en alguna situación, pero resulta que no es así. Esto coincide con lo que plantean Sánchez y Benítez (1997) quienes aseveran que “los estudiantes que incorporan constructos matemáticos para explicar los fenómenos de azar, pero los citan fuera de contexto” (p. 160) se encuentran en el nivel mecánico en un marco de razonamiento probabilístico.

Nivel de pre-rigor

En esta segunda actividad de la intervención didáctica, se observó un incremento significativo de respuestas de los estudiantes en este nivel, algunos identifican de manera correcta los elementos que componen el conjunto del espacio muestral, usan combinaciones para definir casos favorables y realizan comparaciones adecuadas entre posibilidades de ocurrencia de eventos. En la figura 29 se observa un caso en el que el estudiante toma una

decisión correcta frente al interrogante, y en su justificación refleja que tiene claridad en que el contexto del problema se ubica en un espacio muestral equiprobable.

Figura 29. Nivel de pre-rigor respecto a eventos equiprobables

3. Juan siente que un seis es más difícil de lanzar que cualquier otro puntaje cuando se lanza un solo dado. ¿Estarías de acuerdo o en desacuerdo con Juan?

*Respuesta: estaría en desacuerdo Justifica tu respuesta: Por que todos tienen la misma Probabilidad de salir

Otros estudiantes han utilizado argumentos desde el punto de vista matemático, algunos dan claros rasgos de pensamiento combinatorio, identifica que hay más de una posibilidad de que el fenómeno suceda, aunque sus respuestas y justificaciones no logren apuntar de manera correcta en la ruta de una solución correcta del problema.

Un caso particular de este tipo de situación se presenta en la figura 30, en dónde el estudiante identifica el espacio muestral donde suceden los eventos, realiza las posibles combinaciones para cada evento y logra comparar las posibilidades de ocurrencia, sin embargo, no tiene en cuenta la combinación (3,3), por lo que su solución al problema es incorrecta.

Figura 30. Comparación de probabilidades

5. Al lanzar dos dados y sumar sus resultados, ¿qué es más probable, sacar cinco o sacar seis?

*Respuesta: Sacar cinco es Justifica tu respuesta: Es así por que los combinaciones de 5 son 1 4, 2 3, 3 2, 4 1, y los de

Nivel de Rigor

En esta actividad se categorizó sólo una de las respuestas de los estudiantes en el nivel de rigor, al responder la pregunta. “Juan siente que un seis es más difícil de lanzar que cualquier otro puntaje cuando se lanza un solo dado. ¿Estarías de acuerdo o en desacuerdo con Juan?”, la respuesta a la pregunta fue:

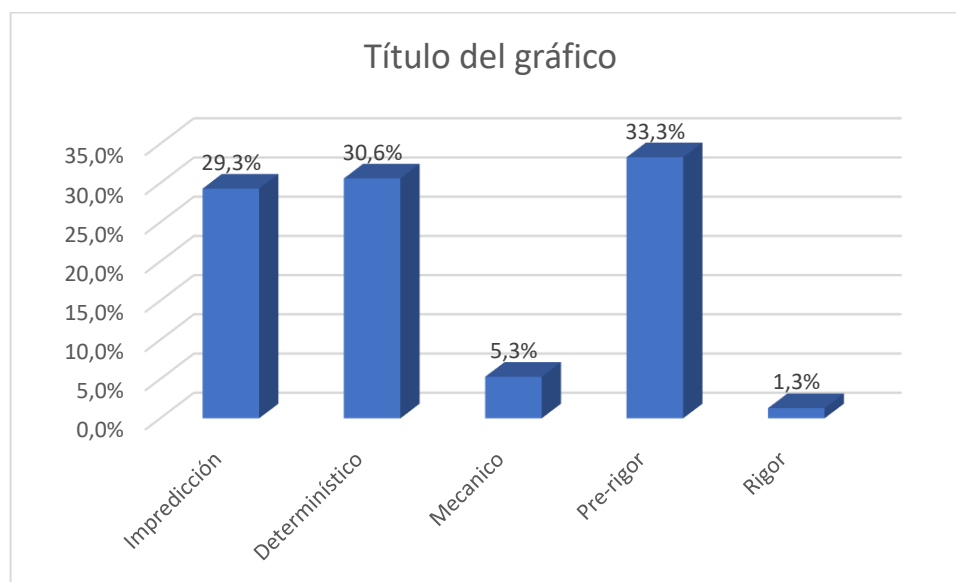
E18: Estaría en desacuerdo. Porque hay otras posibilidades, hay posibilidades de que salga 1,2,3,4,5,6.

En la respuesta se infiere que el estudiante identifica con claridad el espacio muestral al cual acudir, reconoce el espacio muestral como equiprobable y por otra parte utiliza una representación de tipo numérico, aunque no haya sido solicitada en la consigna del problema es decir que ha argumentado desde el punto de vista matemático.

Es claro que algunos estudiantes no acceden al nivel de rigor, debido a que el análisis de la información no es completo y en algunos casos por la dificultad de argumentar a raíz de un vocabulario en general pobre que no les permite expresar con claridad algunas de sus ideas.

En la Figura 31 se pueden observar los porcentajes de las justificaciones dadas por los estudiantes de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico establecidos como categorías de análisis para la actividad 2.

Figura 31. Actividad 2. Porcentaje de respuestas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico



4.2.7.2 Análisis sobre el uso de la tecnología y su relación con los niveles de razonamiento probabilístico. Actividad 2

Para iniciar la actividad con el uso del recurso digital GeoGebra, se planteó un dialogo entre el docente y los miembros del grupo con el fin de afianzar la noción de espacio muestral.

El profesor solicito a los estudiantes dar algunos ejemplos de espacios muestrales conocidos como es el caso del lanzamiento de un dado y el lanzamiento de una moneda.

Se promovió la discusión con base al primer interrogante de la hoja de trabajo en dónde se planteó la pregunta: “Si en lugar de lanzar un dado, lanzas dos, ¿Crees que el número de todos los posibles resultados será el mismo que cuando lanzas un sólo dado? A pesar de que el 88,8 % de los estudiantes respondieron que no, sólo uno de los estudiantes presento algunas combinaciones para justificar su respuesta y ninguno de ellos se aproximó a la cardinalidad del conjunto muestral correspondiente al lanzamiento de dos dados.

Se solicito a los estudiantes que haciendo uso de la aplicación de GeoGebra, que se observa en la figura 32, realizarán “lanzamientos” de los dados y observaran las diferentes representaciones que ofrece la interfaz gráfica.

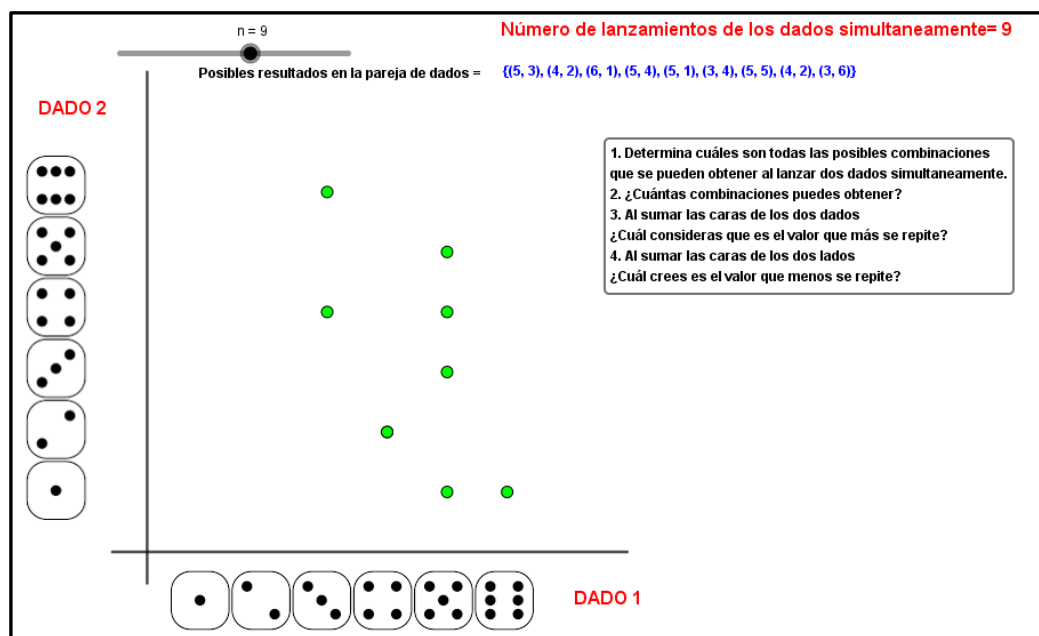
En este ejercicio se esperaba que interpretaran el significado de cada uno de los puntos, realizando asociaciones con el conjunto de parejas ordenadas que se generaban de forma dinámica en la aplicación. Posteriormente los estudiantes de manera espontánea expresaron sus opiniones sobre las preguntas que se plantearon en el cuadro de texto.

Finalmente utilizando la herramienta “rastros” sobre los puntos se pudo obtener la totalidad de las parejas ordenadas que conforman el espacio muestral del experimento del lanzamiento de dos dados.

De esta manera los estudiantes pudieron confirmar sus conjeturas sobre el número de elementos del espacio muestral y observar las posibles combinaciones del mismo.

Con la intervención del profesor se insistió además en las simetrías que se presentan dentro de la representación geométrica del conjunto de puntos y se observaron los casos favorables para algunos eventos definidos dentro del mismo espacio muestral.

Figura 32. Representación geométrica de combinaciones del lanzamiento de dos dados



A continuación, se solicitó a los estudiantes que hicieran uso de la aplicación de GeoGebra

a la que se denominó “Lanzamiento de Dados” y se pidió que observarían con atención sus componentes. En ella encontrarían un botón de lanzamiento (Deslizador), una casilla en dónde podría escribir el número de lanzamiento de dados que deseara observar entre 1 y 5000, un diagrama de barras dinámico y cuadros de frecuencia en dónde podría observar el valor del primer dado y el valor del segundo dado del último lanzamiento, así como la suma total de los puntajes de los dados.

Teniendo en cuenta que los estudiantes no estaban familiarizados con el uso de GeoGebra, el docente explico de manera general las instrucciones para el manejo de la aplicación.

Se pidió a los estudiantes que, de forma individual, realizaran 2000, 3000, 4000 y 5000 lanzamientos de los dados y apoyándose en las diferentes representaciones ofrecidas por la aplicación, resolvieran los problemas propuestos en la correspondiente hoja de trabajo. En la figura 33, se observa un ejemplo de la simulación de 2000 lanzamientos de dos dados realizada por un estudiante.

Figura 33. Simulación de 2000 lanzamientos de los dados realizada en GeoGebra



Las justificaciones dadas por los estudiantes a las respuestas presentadas en la hoja de trabajo, posterior a la intervención con el uso de GeoGebra, se clasificaron de igual forma que en el apartado anterior, es decir de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico adoptados como categorías de análisis para este estudio.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de esta categorización.

Nivel de impredeción

En el caso de la figura 34, el estudiante parece haber comprendido que el experimento aleatorio de lanzar dos dados se enmarca en un espacio muestral no equiprobable, aparentemente ha identificado que para obtener el número 7 existen más combinaciones en el espacio muestral que para cualquier otro valor, sin embargo, este recurso matemático no es utilizado para solucionar el problema de manera correcta, ante la pregunta: *¿Estos números tiene la misma probabilidad de salir?* La respuesta de “Si y no” evidencia su incapacidad de predecir el resultado del experimento.

Figura 34. Impredicción al comparar probabilidades

5. En un juego se lanzan los dos dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

*Respuesta: Si y no. Justifica tu respuesta: Si porque algunos son muy probable y no tiene más probabilidades porque el 7

Nivel Determinístico

Algunos estudiantes mantienen de manera persistente creencias que se convierten en un obstáculo para el aprendizaje de los conceptos relacionados con la probabilidad, en la figura 35 por ejemplo, en el primer caso se evidencia una creencia de tipo matemático donde el estudiante considera que cualquier evento de un experimento aleatorio tiene la misma posibilidad de ocurrencia, mientras que en el segundo caso se aferra a la creencia de la suerte, lo que lo lleva a concluir que no es posible predecir el resultado de la situación planteada.

Figura 35. Determinismo al comparar probabilidades

4. En el juego de parkés se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras expuestas hacia arriba. En una partida de parkés hay dos fichas expuestas para ir a la cárcel, la ficha roja está a siete puntos y la ficha verde está a 5 puntos. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

- Las dos fichas tienen la misma probabilidad de ir a la cárcel
- La ficha que está a siete puntos tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- La ficha que está a siete puntos tiene menor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- No se puede predecir cuál de las dos fichas tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel.
- No sé.

*Respuesta: Cualquiera. Justifica tu respuesta: por tener la misma probabilidad

6. Luís y Marcos tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Si el total de la suma de los dos dados es un número del cartón, el jugador lo tacha y continúa el otro jugador. Gana quien tache primero todos los números del cartón.

Cartón de Luís							
5	4	2	3	11	9	12	10

Cartón de Marcos							
6	7	8	5	3	4	11	6

7. ¿Quién crees que va a ganar, Luís, o Marcos?

*Respuesta: no se puede predecir. Justifica tu respuesta: porque es como suerte

Nivel Mecánico

También durante el desarrollo de esta actividad se identificaron, aunque en menor escala justificaciones de los estudiantes, sustentadas en argumentos fuera de contexto, en algunos casos recursos matemáticos que traían de su “almacén de recursos” (Shoenfeld, 1985), considerando que era posible su uso, sin embargo, no fueron de utilidad para solucionar el problema.

En la figura 36, se observa que el estudiante acude a la cardinalidad del espacio muestral del experimento, además menciona el término “combinaciones” y asocia el valor 7 representativo para este experimento como el evento de mayor posibilidad de ocurrencia, sin embargo, no toma en cuenta los elementos conceptuales que el mismo enuncia para dar solución al problema, por lo que su respuesta es incorrecta.

Figura 36. Nivel mecánico al comparar probabilidades

5. En un juego se lanzan los dos dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir? *Respuesta: <u>si</u>. Justifica tu respuesta: <u>porque el que tenga mas combinaciones que son 36 puede salir el 7 por las combinaciones.</u>

Nivel de pre-rigor

Al presentar a los estudiantes la pregunta:

“Al lanzar dos dados simultáneamente ¿si tuvieras que apostar, por cual número No lo harías?”

Algunas de las respuestas y justificaciones de los estudiantes fueron:

E1: Por el 2, porque solo tiene una combinación.

E3: Por el doce, porque es el número que menos saldría si tomamos la gráfica

E4: Por el 2, el 2 porque sólo tiene una combinación, 1 y 1.

E7: Con el 2 y el 12, porque tienen menos combinaciones

E18: dos y doce, porque los dos tienen solamente una pareja

Argumentos de este tipo muestran que los estudiantes intentan abordar los problemas desde el punto de vista matemático, combinan parcialmente resultados y aunque no logran

identificar todas las posibles combinaciones, ven las posibilidades reales de ocurrencia del fenómeno. Logran dar soluciones al menos parcialmente correctas al problema, se observa que tienen una capacidad más elevada en su argumentación, aunque el uso de diferentes representaciones es escaso.

Estas respuestas y justificaciones han sido clasificadas en el nivel de pre-rigor, esto debido a que los estudiantes que logran razonar y comunicar matemáticamente de esta manera parecen haberse alejado de la impredeción y del razonamiento determinístico, buscan dar solución al problema de manera coherente y no acuden a expresiones como “la suerte”, “la buena fortuna”, “la casualidad”, es decir que se alejan de creencias socioculturales.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento se evidencia en la transcripción de uno de los diálogos registrados en video durante el desarrollo de la intervención, en el que participan el profesor y dos estudiantes, Sebastián y Salomé (Los nombres de los estudiantes no son reales, se han asignado sólo para el orden de la transcripción).

Profesor: ¿Si tuvieras que escoger un número al lanzar dos dados a cuál le apostarías?

Sebastián: depende de los números variables que tiene de suma, porque por ejemplo el siete tiene más variables de suma, por lo que por eso sale más seguido.

Profesor: ¿Más variables? Explícanos eso.

Sebastián: Por ejemplo 6 y 1, 5 y 2, 2 y 5, 1 y 6.

Profesor: ¿y otro valor diferente, por ejemplo, el 4?

Sebastián: 4 y 3.

Profesor: Pero el 4, ¿Qué combinaciones te darían 4?

Sebastián: ¿Cómo así?

Salomé: 2 y 2, 3 y 1.

Sebastián: ah ya, el valor 4. Pues sí, 2,2; 1 y 3, 3 y 1.

Profesor: O sea, ¿Cuál es el que más combinaciones tiene?

Sebastián: el 7, por eso siempre sale más veces.

Desde la perspectiva de Schoenfeld (1985,1992) los recursos matemáticos que utilizan estos estudiantes son incompletos, pero no defectuosos, por lo que son usados dentro del contexto de la situación planteada, de esta manera su razonamiento tampoco puede considerarse mecánico (Sánchez y Benítez, 1997).

Nivel de rigor

En este nivel se ubicó una minoría de los argumentos de los estudiantes, en el caso que se presenta en la figura 37, se observa que el estudiante identifica los elementos que conforman el espacio muestral, lo reconoce como no equiprobable y tiene claridad en el número de posibilidades de éxito de cada uno de los sucesos, lo que le permite comparar de manera correcta las probabilidades y dar una respuesta correcta a la situación planteada.

Figura 37. Nivel de rigor al comparar probabilidades

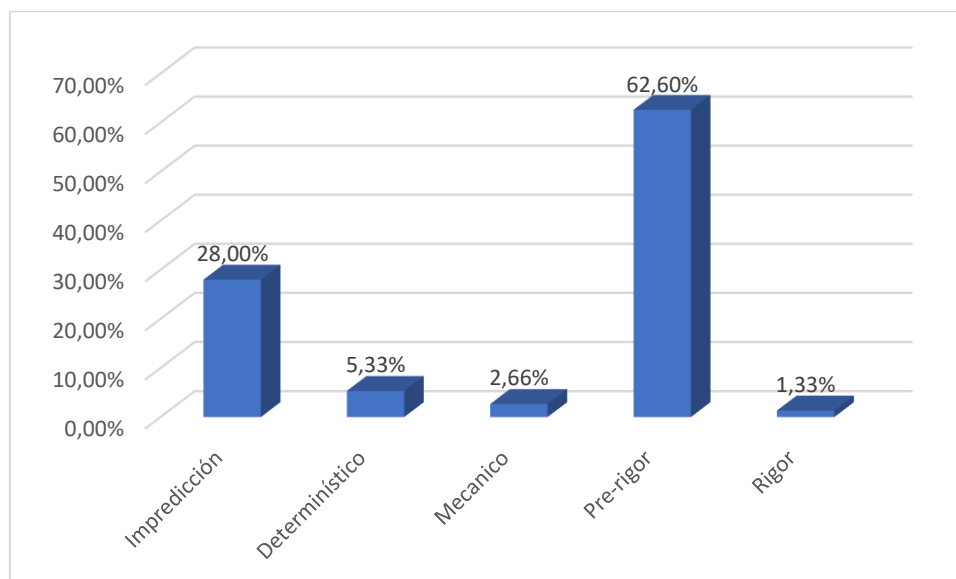
5. En un juego se lanzan los dos dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

*Respuesta: No. Justifica tu respuesta: Porque hay números como el 2 y el 12 que solo se obtienen por una combinación, pero el siete se obtiene con 6 combinaciones

Aunque no se ha utilizado algún tipo de representación adicional, se explica de forma clara el proceso empleado en la solución del problema, se utilizan términos del lenguaje acordes a la situación probabilística y la respuesta esta soportada en argumentos de tipo matemático que el estudiante comunica con relativa facilidad.

Finalizada la clasificación de las justificaciones dadas por los estudiantes durante la segunda parte de la actividad 2, con el apoyo del software GeoGebra, en la figura 38 se pueden observar los porcentajes de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico.

Figura 38. Porcentaje de justificaciones de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico durante la intervención con el uso de GeoGebra



Al contrastar los porcentajes de las justificaciones dadas por los estudiantes antes y durante la intervención del uso de la herramienta digital GeoGebra en la actividad 2, se observa que algunos de ellos han comenzado un tránsito de los niveles de impredicción y determinismo al nivel de pre-rigor probabilístico, lo que se refleja en la calidad de sus argumentos, el uso de recursos matemáticos y el vocabulario apropiado para comunicar matemáticamente sus resultados. En la tabla 17 se muestran las respuestas dadas por algunos estudiantes a problemas similares propuestos en los dos momentos del desarrollo de la hoja de trabajo.

Tabla 17. Actividad 2. Comparativo de algunas respuestas de los estudiantes a problemas similares antes y durante el uso de la herramienta digital GeoGebra

Problema resuelto antes del uso de GeoGebra	Problema resuelto con el apoyo de GeoGebra
6. Hay dos jugadores que tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Sí el total de la suma de los dos dados es un número del cartón, el jugador lo tacha y continúa el otro jugador. Gana quien tache	6. Luís y Marcos tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Sí el total de la suma de los dos dados es un número del cartón, el jugador lo tacha y continúa el otro jugador.

primero todos los números del cartón.

Jugador Uno							
4	10	6	8	7	9	5	3

Jugador Dos							
5	4	2	3	11	9	12	10

Gana quien tache primero todos los números del cartón.

Cartón de Luís							
5	4	2	3	11	9	12	10

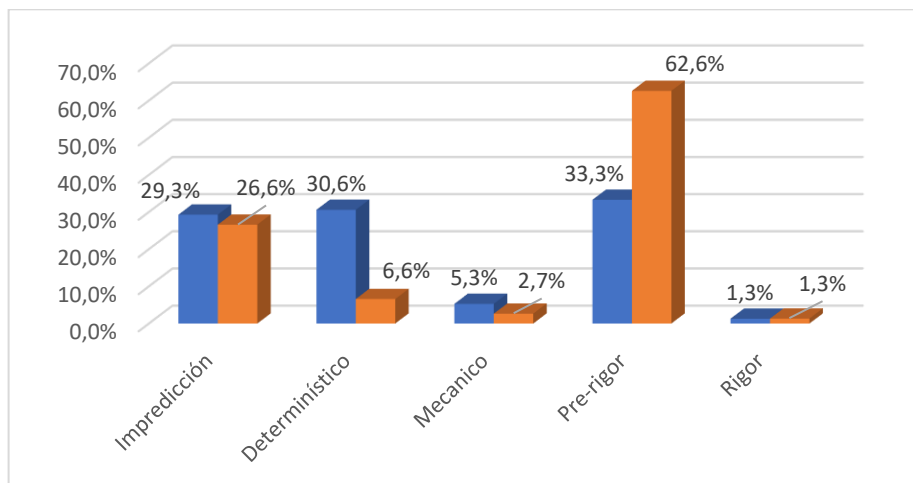
Cartón de Marcos							
6	7	8	5	3	4	11	6

Respuestas de los estudiantes		Respuestas de los estudiantes	
E1	Cualquiera. Porque no se puede predecir cual va a salir primero o cual va a ganar	Marcos, porque tiene números que tienen más combinaciones	
E6	Cualquiera. Porque es igual de probable que salgan los resultados del 1 que del 2	Marcos, porque marcos tiene números que tiene más combinaciones	
E7	El 1, gana el primero que los tache todos si tiene suerte	Gana Marcos porque tiene números que tienen más posibilidades de salir	
E15	Los dos porque ambos tienen el mismo espacio muestral	Marcos porque tiene el 6,7 y 8 y no tiene el 12 o el 2	

Este fenómeno también puede percibirse al comparar los porcentajes registrados en los diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes en los dos momentos del desarrollo de la actividad 2 como se registra en la figura 39, en donde se observa que el nivel de impredeción disminuyó sólo en un 2,7%, mientras que el nivel determinístico lo hizo en un 24%.

El incremento en el porcentaje de justificaciones clasificadas en el nivel de pre-rigor fue del 29,3%, mientras que el nivel de rigor no presentó alteración alguna.

Figura 39. Registro de niveles de razonamiento de los estudiantes previos y posteriores al uso de la herramienta digital GeoGebra. Actividad 2



4.2.8 Descripción de la actividad 3

El diseño de la tercera actividad de la intervención didáctica al igual que las actividades previas se dividió en dos momentos. Una primera parte en dónde el profesor retomó los conceptos de experimentos aleatorios, experimentos no aleatorios y espacio muestral finito, abordados en las sesiones anteriores, con el fin de que los estudiantes pudieran hacer uso de estos recursos matemáticos al realizar el cálculo de probabilidades haciendo uso de la regla de Laplace y una segunda parte en dónde se buscó aproximar a los estudiantes a la probabilidad frecuencial a partir de múltiples repeticiones de experimentos aleatorios simulados por medio del software GeoGebra.

Los estudiantes desarrollaron la primera parte de la hoja de trabajo (Ver anexo 4) sin la intervención de la herramienta digital. Los reactivos incluidos en la hoja de trabajo fueron tomados a partir del análisis de investigaciones previas identificadas durante el proceso de análisis de la literatura asociada al problema de estudio.

El primer problema propuesto en la hoja de trabajo fue tomado de la investigación de Rubel (2007) en donde fue utilizado “como un elemento de referencia para proporcionar evidencia sobre la capacidad de los estudiantes para encontrar la probabilidad de un evento simple dado un espacio muestral listado” (Rubel, 2007; p. 537), esta intención es la misma que este problema cumple en esta intervención.

El segundo problema fue rediseñado a partir del trabajo de Zawojewski y Shaugnessy (2000) en donde se busca que los estudiantes logren diferenciar un espacio muestral equiprobable de uno que no lo es con el fin de que no cometan errores al evaluar o comparar probabilidades de eventos compuestos.

El tercer problema fue propuesto por Watson et al. (2004) quién lo incluye en su investigación para observar el desempeño de los estudiantes en situaciones relacionadas con la medición del azar.

Los ítems 4 y 5 que se presentan en la hoja de trabajo, fueron seleccionados de libros de texto de educación secundaria.

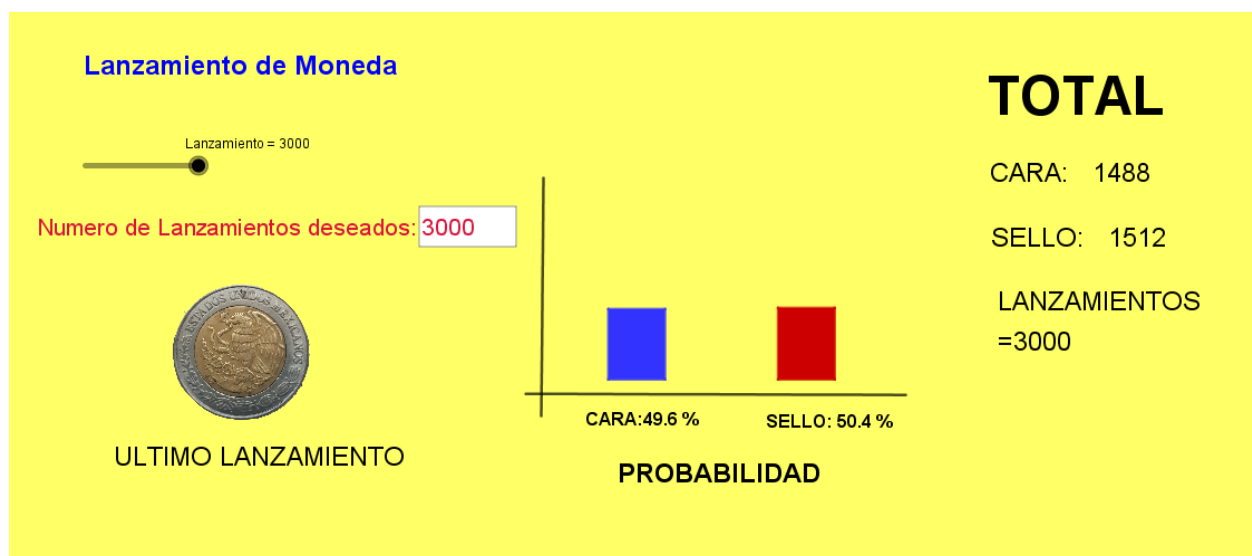
La segunda parte de la actividad permitió a los estudiantes interactuar con dos aplicaciones diseñadas en GeoGebra, en ellas se buscó que los estudiantes identificaran características de un espacio muestral equiprobable y uno no equiprobable, reconocieran cada uno de los elementos que conforman el conjunto y concluyeran su cardinalidad con el fin de robustecer su inventario de recursos al enfrentarse al cálculo y comparación de probabilidades.

En la figura 40 se muestra la interfaz gráfica de la primera aplicación utilizada, en ella los estudiantes acceden a diferentes representaciones a partir del experimento de lanzar una moneda. Pueden interactuar desplazando el deslizador y simulando hasta 3000 veces el experimento.

En esta aplicación, se incluyó un deslizador que permitía a los estudiantes simular el lanzamiento de una moneda, entre una y tres mil veces. Se incorporó una casilla de entrada que permitía a los estudiantes seleccionar un número específico de lanzamientos sin utilizar el deslizador. Se incluyeron tres cuadros de texto que permitían a los estudiantes observar el número de veces que la moneda había caído en cara, el número de veces que la moneda había caído en sello y el número total de lanzamientos que se habían realizado hasta ese momento.

En la interfaz de la aplicación se insertaron diagramas de barras dinámicos y cuadros de texto donde se registraban los porcentajes de éxito de la obtención tanto de caras, como de sellos de acuerdo al número de lanzamientos de la moneda. Se insertaron las imágenes de la cara y el sello de una moneda y se programó la animación de la moneda asociando la imagen con el resultado de caras y sellos.

Figura 40. Interfaz del applet de GeoGebra utilizado en la hoja de trabajo 3

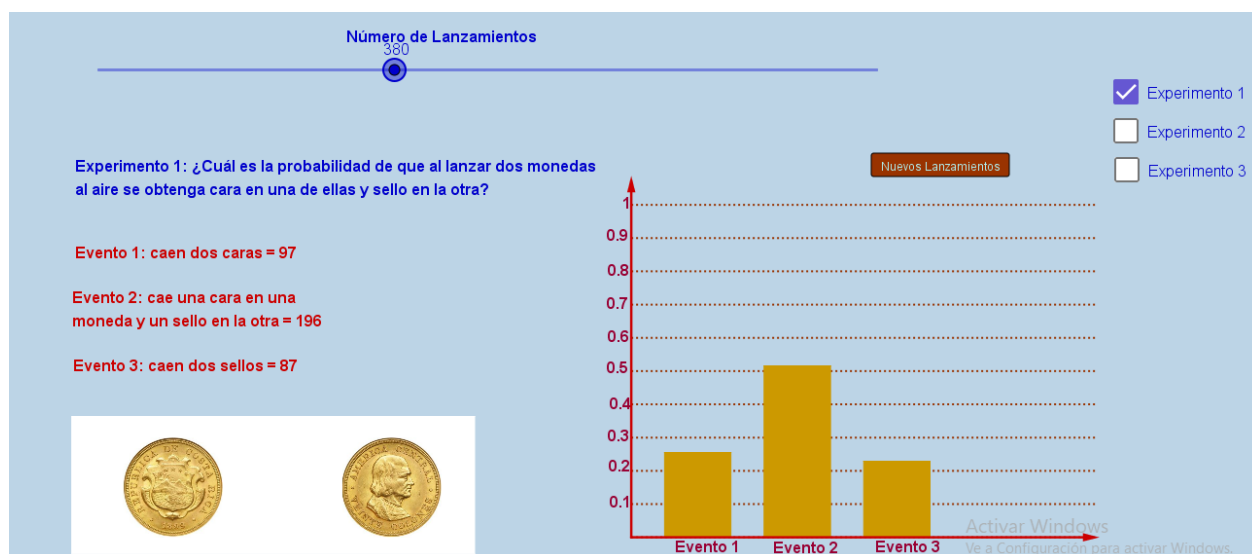


La segunda aplicación simuló el experimento aleatorio de lanzar dos monedas simultáneamente, esta interfaz puede observarse en la figura 41, en ella se planteaban diferentes eventos dentro del mismo espacio muestral.

Con base en la información obtenida a partir de las representaciones que ofrecía la aplicación los estudiantes pudieron calcular y comparar diferentes probabilidades, discutir sus resultados en grupos de cuatro estudiantes y comunicar sus soluciones con la clase en general.

El profesor enfatizó en que los estudiantes identificaran diferentes notaciones para comunicar los resultados obtenidos al resolver los diferentes ítems presentados en la hoja de trabajo.

Figura 41. Interfaz del segundo applet de GeoGebra utilizado en la hoja de trabajo 3



4.2.9 Objetivos de aprendizaje de la actividad 3

Los objetivos de aprendizaje propuestos para la tercera actividad de la intervención didáctica fueron:

- Aplicar la regla de Laplace para calcular probabilidades en experimentos aleatorios simples.
- Calcular probabilidades con base en información de tipo frecuencial.

4.2.10 Análisis de la Información. Actividad 3

Al igual que cómo se ha desarrollado el análisis de los datos en las actividades 1 y 2, en esta tercera actividad se diferenciaron dos momentos, el primero caracterizado por la intervención del docente, la discusión de los argumentos de los estudiantes y la recolección de la información a través de las hojas de trabajo y videgrabaciones, sin tener como instrumento didáctico la intervención de herramientas digitales. Un segundo momento en donde los estudiantes además de los recursos utilizados previamente contaron con la posibilidad de la herramienta digital GeoGebra para realizar interacciones y apoyarse en diferentes tipos de representaciones aportadas por la interfaz gráfica de las aplicaciones diseñadas por el investigador.

4.2.10.1 Análisis de los Niveles de Razonamiento Probabilístico de los Estudiantes.

Actividad 3

Como se planteó en los objetivos de aprendizaje presentados para esta actividad, los problemas que se propusieron apuntaron a que los estudiantes lograran evaluar las probabilidades de ocurrencia de un evento aleatorio en un espacio muestral discreto y finito, identificando los casos favorables y los casos posibles de ocurrencia de un suceso (Regal de Laplace) y se aproximaran de manera al menos intuitiva a la probabilidad frecuencial.

A continuación, se presenta el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a los reactivos de la hoja de trabajo 3, sus justificaciones, así como los argumentos presentados por los estudiantes en los espacios de interacción con compañeros y el docente, los cuales fueron registrados en videograbaciones. La clasificación de la información responde a las categorías propuestas por Sánchez y Benítez (1997) que ha sido utilizada a lo largo de este estudio.

Nivel de Impredicción

Después de la intervención del docente y las discusiones de los estudiantes en los grupos de trabajo establecidos para esta actividad, se entró a revisar y clasificar las respuestas dadas a los reactivos de las hojas de trabajo. Se encontró que a pesar de que se ha evidenciado en la literatura de investigación que es en el cálculo de probabilidades y el uso de algoritmos para resolver problemas de probabilidad en lo que más se ha insistido en los desarrollos curriculares en las aulas de clase los estudiantes aún presentan un alto grado de impredicción, para este momento de la intervención didáctica fue del 21,25%.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento se pudo observar en las soluciones que algunos estudiantes dieron al enfrentarse a problemas como el que se presenta a continuación:

Problema 2: Se está jugando un juego que implica lanzar dos monedas simultáneamente. Para ganar el juego debes obtener "cara" en ambas monedas. ¿Cuál es tu probabilidad de ganar el juego?

E1: 2 de 4, porque en cada moneda hay cara y sello, en total serían 4 y sólo hay una cara por moneda.

E3: $\frac{1}{2}$, porque hay dos monedas y en las dos debe dar cara y como es cara y son dos monedas.

E5: $\frac{2}{8}$, porque hay ocho elementos y dos caras.

E14: $\frac{2}{4}$ Porque de cuatro resultados son dos los que se necesitan.

En la mayoría de los casos se observan dificultades al identificar los elementos que componen el conjunto del espacio muestral, así como su cardinalidad.

Se destaca que algunos estudiantes no cuentan con recursos matemáticos que faciliten el proceso de resolución del problema, en este caso por ejemplo no utilizaron dibujos, diagramas o algún tipo de representación, no implementaron estrategias diferentes al enfrentarse al problema por lo que evaluar y comparar probabilidades de diferentes sucesos dentro de un mismo espacio muestral resultó de gran dificultad.

Nivel Determinístico

Al analizar las intervenciones de los estudiantes y clasificar sus respuestas y justificaciones presentadas en la hoja de trabajo, sólo el 2,5% de ellas se categorizaron en este nivel de razonamiento.

En general se observa que los estudiantes se han alejado de algunas creencias de orden sociocultural como la suerte, el número favorito entre otras. Tampoco recurrieron a argumentos físicos como el peso del generador de aleatoriedad, la gravedad o el viento, ni basaron sus decisiones en creencias míticas como el destino o el poder de Dios.

Quienes permanecen en el nivel de razonamiento probabilístico han fundamentado sus justificaciones en experiencias previas asociadas con su participación en juegos de azar y en consideraciones comunes a los grupos humanos que participan de ellos.

Algunas respuestas de estudiantes que constatan este análisis se muestran a continuación:

Problema 4. *Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número menor que 5?*

E13: Alta, porque de cinco para arriba en el dado es difícil que salga 5 o 6, entonces la probabilidad es alta.

Problema 5. *¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 puntos en el lanzamiento de dos dados?*

E12: Es alta porque el 7 es un número que sale casi todas las veces.

Nivel Mecánico

Al realizar cálculos de probabilidades algunos estudiantes lo hicieron de forma incorrecta, sus justificaciones evidenciaron el uso de recursos matemáticos incompletos o

defectuosos (Schoenfeld, 1985), utilizaron expresiones matemáticas fuera de contexto. Estas expresiones han sido usadas comúnmente por sus docentes en sus dinámicas de clase o se relacionan con problemas resueltos anteriormente en talleres y tareas y son traídas por el estudiante en su esfuerzo por dar solución a un problema que no logra comprender en toda su dimensión.

En la figura 42 se muestra un caso en dónde el estudiante hace uso de fracciones y porcentajes, utiliza el término “posibilidades” y establece la relación menor qué, todos estos recursos son de carácter matemático y son usados dentro del dominio de la probabilidad, sin embargo, no le han sido de utilidad al momento de dar solución al problema planteado.

Figura 42. Nivel mecánico en donde se utilizan recursos defectuosos

4.	Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número menor que 5?
Respuesta:	<u>3/6</u> Justifica tu respuesta: Porque en un solo
	dado salen muchas posibilidades por lo que
	hay un 50% que salga menor que 5

Este tipo de razonamiento también queda reflejado en las respuestas dadas por algunos estudiantes a quienes se les preguntó:

¿Cuál es la probabilidad de obtener de obtener 7 puntos en el lanzamiento de dos dados?

E7: $\frac{6}{12}$ porque el 7 tiene más probabilidades

E14: $\frac{8}{12}$ porque tiene varias combinaciones.

E17: el 100%, porque si se hace un cálculo el número que sale más veces es el siete.

En estos casos, los estudiantes han identificado el valor siete como el suceso aleatorio con mayor número de casos favorables en el experimento de lanzar dos dados, sin embargo, no se observa la comprensión general de la noción de espacio muestral, por lo que no es posible dar solución correcta al problema.

Nivel de pre-rigor

En este nivel de razonamiento se clasificaron el mayor número de justificaciones dadas por los estudiantes a los reactivos propuestos en la actividad, alcanzando un 58,75%.

Debe tenerse en cuenta que en las actividades 1 y 2 se enfatizó en los conceptos de experimento aleatorio, independencia de eventos, elementos de un espacio muestral finito y número de elementos del espacio muestral, lo que fortaleció el inventario de recursos matemáticos (Schoenfeld, 1985) de los estudiantes para enfrentarse a los problemas de cálculo y comparación de probabilidades.

Se observó que los estudiantes lograron comprender el concepto de espacio muestral, identificaron la existencia de posibles combinaciones entre sus elementos, lograron diferenciar los casos favorables para diferentes sucesos dentro del mismo experimento aleatorio, establecieron relaciones entre los casos favorables y los casos posibles de ocurrencia de un evento.

En la figura 43 se presenta un ejemplo en dónde se evidencian las características mencionadas en el párrafo anterior.

Figura 43. Nivel de pre-rigor. aproximación al lenguaje probabilístico

5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 puntos en el lanzamiento de dos dados?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

$\frac{6}{36}$ porque ese es el número de combinaciones del 7

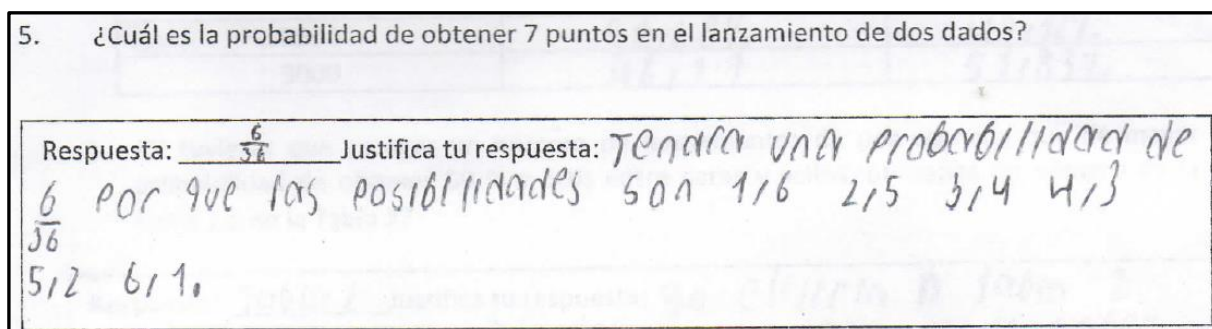
El estudiante ha utilizado de manera adecuada algunos recursos para dar solución al interrogante, sin embargo, no se muestran las posibles combinaciones ni se utilizan otro tipo de representaciones que podrían robustecer sus argumentos a un nivel de rigor probabilístico.

Nivel de rigor

El 3,75% de las justificaciones dadas por los estudiantes se categorizaron en el nivel de rigor, esto teniendo en cuenta que de acuerdo a lo propuesto por Sánchez y Benítez (1997), puede considerarse que una persona se encuentra en nivel de rigor probabilístico cuando utiliza, correctamente, diferentes representaciones para explicar el comportamiento del suceso y, dependiendo de la naturaleza del problema, pueden apoyarse en tablas, gráficas, diagramas, ecuaciones y otros recursos matemáticos.

Este tipo de logros se pueden observar en respuestas como la que se muestra en la figura 44. En ella el estudiante enuncia todas las posibles combinaciones favorables del suceso en cuestión, las representa como un grupo de parejas, identifica el número de elementos que componen del espacio muestral, establece una relación entre casos favorables y casos posibles y la representa en forma de fracción.

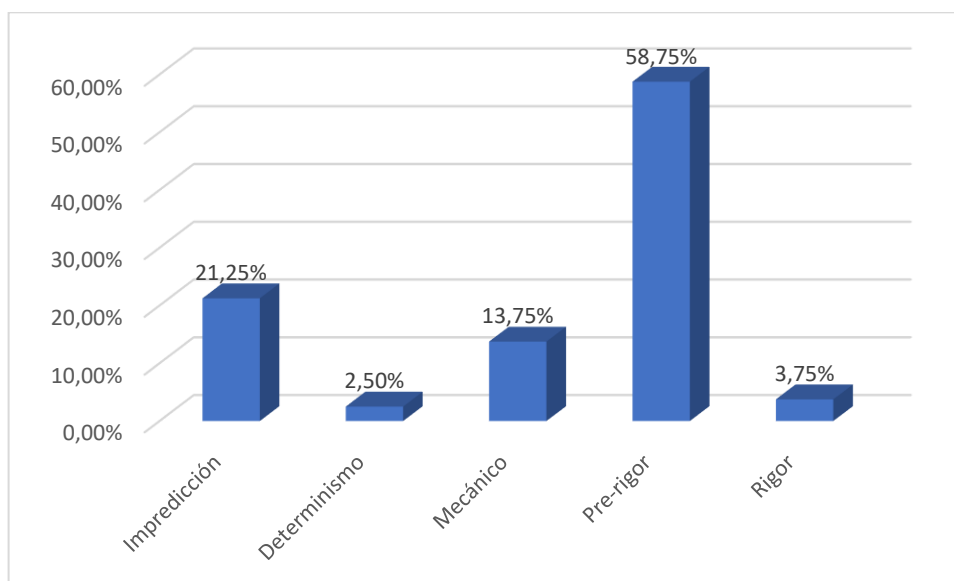
Figura 44. Nivel de rigor en donde se evidencian argumentos de tipo matemático



Aunque este tipo de argumentos son escasos, se observa que al menos algunos estudiantes han realizado un tránsito de niveles inferiores hacia el nivel de razonamiento probabilístico de rigor, lo que evidencia una mejor comprensión de algunos conceptos asociados con la probabilidad, para este nivel educativo.

En la figura 45, se muestra el consolidado del porcentaje de respuestas y justificaciones de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico de la actividad 3.

Figura 45. Actividad 3. Porcentaje de respuestas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico



4.2.10.2 Análisis sobre el uso de la tecnología y su relación con los niveles de razonamiento probabilístico. Actividad 3

En el segundo momento de la actividad 3, los estudiantes interactuaron con dos aplicaciones de GeoGebra diseñadas con la intención de apoyarlos en el proceso de comprensión del cálculo de probabilidades, procurando una aproximación a la probabilidad frecuencial a partir de simulaciones donde se pudiera observar la variabilidad de las frecuencias en un número menor de experimentos y la estabilidad de las frecuencias en un número mayor de experimentos (ley de los grandes números).

La interfaz gráfica de cada una de las aplicaciones se observa en las figuras 40 y 41 presentadas en la descripción de esta actividad.

Teniendo en cuenta que los estudiantes no se encontraban familiarizados con el uso de GeoGebra, el profesor realizó una explicación de cada uno de los componentes de las aplicaciones, enfatizando en el uso de deslizadores, las casillas de registro y las representaciones que ofrecía la interfaz gráfica; para este caso los diagramas de barras, las tablas de frecuencias absolutas y los porcentajes de éxito de cada uno de los eventos analizados.

Inicialmente se solicitó a los estudiantes que haciendo uso del deslizador simularan el lanzamiento de una moneda en la aplicación 1. Con el fin de que familiarizaran con el uso del software.

Se pidió a los estudiantes que haciendo uso de la casilla número de lanzamientos deseados, registraran en una tabla los porcentajes de caras y sellos obtenidos cuando se realizan 5, 7, 9, 11, 18 lanzamientos.

Posteriormente se solicitó que realizaran una tabla similar en donde se registraran los porcentajes de caras y sellos obtenidos cuando se realizan 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000 lanzamientos.

Con el fin de analizar las conjeturas y discusiones de los estudiantes, se propuso a grupos de cuatro miembros la siguiente pregunta:

¿Si tuvieras que escoger un número de lanzamientos de una moneda que dé mayor probabilidad de obtener 50 % y 50% entre caras y sellos, utilizarías un número de la tabla 1 o de la tabla 2?

Cada estudiante presentó de forma individual su respuesta, seguida de una discusión grupal en la que compartieron y argumentaron sus puntos de vista. A continuación, se presentan algunas respuestas y justificaciones realizadas por los estudiantes durante la actividad:

E1: De la tabla 2. Porque al ser mayor el número de lanzamientos hay más probabilidad.

E2: De ambas, pero más de la tabla 2.

E11: De la tabla 1, porque en esa tabla me salió un resultado de 50 % y 50%.

E12: Ninguna, ya que hay porcentajes distintos. No hay ninguno de 50 % y 50%, todos son distintos. Pero si tuviera que elegir, elegiría la 2 ya que es la que más se acerca a 50 y 50.

E15: De la tabla 2 porque son los que más se aproximan.

El 87, 5% de los estudiantes estuvo de acuerdo en que utilizaría un número de lanzamientos de la tabla 2, mientras que el 12,5% restante utilizaría un número de lanzamientos de la tabla 1.

En las discusiones generales, los grupos llegaron a un consenso en que utilizarían los números de la tabla 2, concluyendo que entre mayor número lanzamientos realizados mayor sería probabilidad de obtener 50 % y 50% entre caras y sellos.

Las justificaciones a esta y otras preguntas relacionadas con la experiencia que se propusieron en la hoja de trabajo, fueron categorizadas de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico (Sánchez y Benítez, 1997) que se han utilizado a lo largo de este estudio.

Por su parte con la segunda aplicación se buscó que los estudiantes observaran la variabilidad y la estabilización de las frecuencias al analizar el espacio muestral del lanzamiento de dos monedas diferentes de manera simultánea.

Se pidió a los estudiantes que con la ayuda del deslizador simularan 50, 100, 150, 500, 1000 lanzamientos de las dos monedas. Se les invito a observar las representaciones en la interfaz gráfica y se les pidió que comentarán lo que observaron y establecieran relaciones con los eventos que aparecían registrados en la aplicación.

Evento 1: Caen dos caras

Evento 2: Cae una cara y un sello

Evento 3: Caen dos sellos

Algunas conjeturas de los estudiantes fueron:

E4: Obtener cara y sello tiene mayor probabilidad que obtener cara, cara y sello, sello.

E6: mientras mayor sea el número de lanzamientos más se van a acercar al 50% y al 25% de probabilidades.

E13: Cara y sello es el que más probabilidades tiene de ganar porque es el que más sale.

E16: cuando hay pocos lanzamientos gana sello y sello, pero al aumentar el número de lanzamientos empieza a ganar cara y sello.

Como se observa los estudiantes comenzaron a asociar de manera intuitiva que la probabilidad es el valor en dónde la frecuencia tiende a estabilizarse, identificaron de manera correcta los elementos del espacio muestral del experimento aleatorio y realizaron comparaciones entre los diferentes eventos propuestos en la aplicación de Geogebra.

Además de los episodios descritos anteriormente con el uso de GeoGebra, los estudiantes desarrollaron la hoja de trabajo diseñada para la actividad 3 haciendo, recurriendo a las aplicaciones cuando lo consideraban necesario.

Es de anotar que cada estudiante contó con un computador portátil y podían hacer uso del dispositivo del docente que proyectaba las aplicaciones en el tablero para toda la clase.

Las respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes durante el desarrollo de la hoja de trabajo se clasificaron de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico, a continuación, se presentan algunos ejemplos de dicha categorización.

Nivel de impredeción

Frente al cálculo y comparación de probabilidades, algunos estudiantes aún se mantienen en este nivel. Sus argumentos permitieron observar que existen dificultades para identificar los elementos del conjunto del espacio muestral, lo que les impide percibir los casos favorables de un suceso y establecer una relación con los casos posibles, por lo que no logran calcular probabilidades aplicando la fórmula de Laplace.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento se puede observar en las respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes al abordar la siguiente pregunta:

Crees que el número de todos los posibles resultados de lanzar una moneda ¿es igual cuándo lanzas dos monedas?

E11: No, porque hay más resultados en una moneda que en dos.

E16: No, porque son dos y es muy probable que no salgan iguales.

E17: Sí, porque es más posible sacar cara y sello en dos monedas.

Como se muestra en estos casos, los estudiantes no utilizan ningún tipo de estrategia para abordar la pregunta, no hacen uso de dibujos o representaciones que lo aproximen a la solución.

Nivel determinístico

De las respuestas y justificaciones de esta sesión, ninguna fue considerada en este nivel, para este momento de la intervención didáctica los estudiantes parecen haber abandonado argumentos basados en creencias socioculturales y buscan dar solución a los problemas que se plantean desde los recursos matemáticos.

Nivel Mecánico

El 12,5% de las justificaciones de los estudiantes se categorizó en este nivel de razonamiento, se evidencia el uso de recursos defectuosos, que, aunque se introducen dentro del procedimiento para dar solución al problema no han sido fruto de un aprendizaje con comprensión.

En la figura 46 por ejemplo, el estudiante ha dado una respuesta al parecer correcta, sin embargo, el denominador de la expresión $\frac{1}{4}$ no es el resultado de las posibles combinaciones que pueden presentarse cuando el experimento consiste en lanzar dos monedas.

Figura 46. Nivel mecánico. Expresiones fuera de contexto

5. De acuerdo a lo observado ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras cuando lanzas dos monedas?

Respuesta: $\frac{1}{4}$ Justifica tu respuesta: Las 2 monedas tienen 4 caras y 1 vez se puede salir cara y cara

Frente a la misma pregunta, otro estudiante respondió de la siguiente manera:

E17: Hay un 50%, porque es la mitad de probabilidad de sacar cara.

En esta ocasión el estudiante utiliza la expresión 50% fuera de contexto, no tiene en cuenta el número de elementos del espacio muestral para el lanzamiento de dos monedas y pareciera homologar los resultados del experimento con resultados de lanzar sólo una moneda.

Nivel de pre-rigor

En esta sesión de la actividad 3, la mayoría de las respuestas y justificaciones de los estudiantes se ubicaron en este nivel de razonamiento.

Los estudiantes han logrado identificar diferentes espacios muestrales, posibles combinaciones entre sus elementos dependiendo del evento objeto de análisis, logran establecer comparaciones entre probabilidades y utilizan la regla de Laplace de manera acertada.

Sus argumentaciones al comunicar matemáticamente aún son pobres, al igual que el uso de estrategias para abordar un problema, no utilizan diferentes tipos de representación, sin embargo, se observa un tránsito hacia el nivel de rigor, pues se han alejado de creencias que pueden convertirse en un obstáculo para el desarrollo de su razonamiento probabilístico.

Figura 47. Nivel de pre-rigor. Compara diferentes espacios muestrales

3. Escribe el espacio muestral (todos los posibles resultados) de lanzar una moneda.
cara, sello 1/2

Crees que el número de todos los posibles resultados de lanzar una moneda ¿es igual cuando

Respuesta: no Justifica tu respuesta: porque hay mas espacio muestral que cuando lanzas solo 1

En la figura 47, se muestra que el estudiante establece diferencias entre espacios muestrales, aunque no logra comunicar correctamente que el número de elementos del espacio muestral para el lanzamiento de dos dados es mayor que para el lanzamiento de un solo dado.

Nivel de rigor

Las justificaciones de los estudiantes en este nivel alcanzaron el 5%, este tipo de respuestas mostraron que algunos estudiantes utilizaron diferentes representaciones en la explicación del fenómeno que se analiza.

En el caso de la figura 48, se evidencia que el estudiante identificó con claridad dos espacios muestrales diferentes, enunció los elementos de cada uno de ellos, representó el espacio muestral como un conjunto de parejas, lo que le permitió identificar el número de casos favorables de los eventos que se definen dentro del experimento aleatorio y calcular de manera correcta la probabilidad de ocurrencia del mismo.

Figura 48. Nivel de rigor. Uso de argumentos de tipo matemático.

3. Escribe el espacio muestral (todos los posibles resultados) de lanzar una moneda.

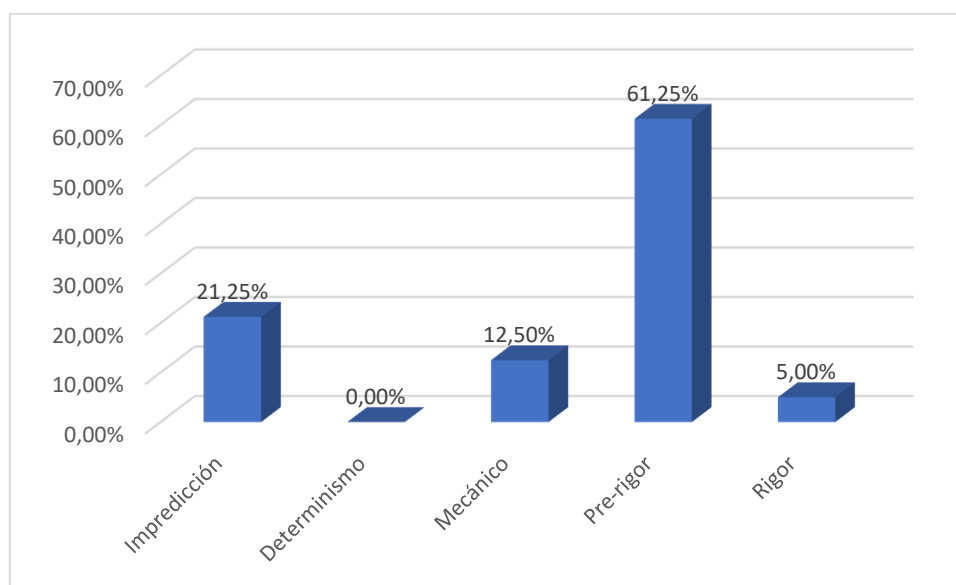
cara y sello

¿Crees que el número de todos los posibles resultados de lanzar una moneda es igual cuando

Respuesta: NO Justifica tu respuesta: NO por que hay 2 resultados
4 (cara, cara) (sello, sello) (cara, sello) (sello, cara)

Terminada la clasificación de las justificaciones dadas por los estudiantes de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico, se obtuvieron los resultados que se registran en la figura 49.

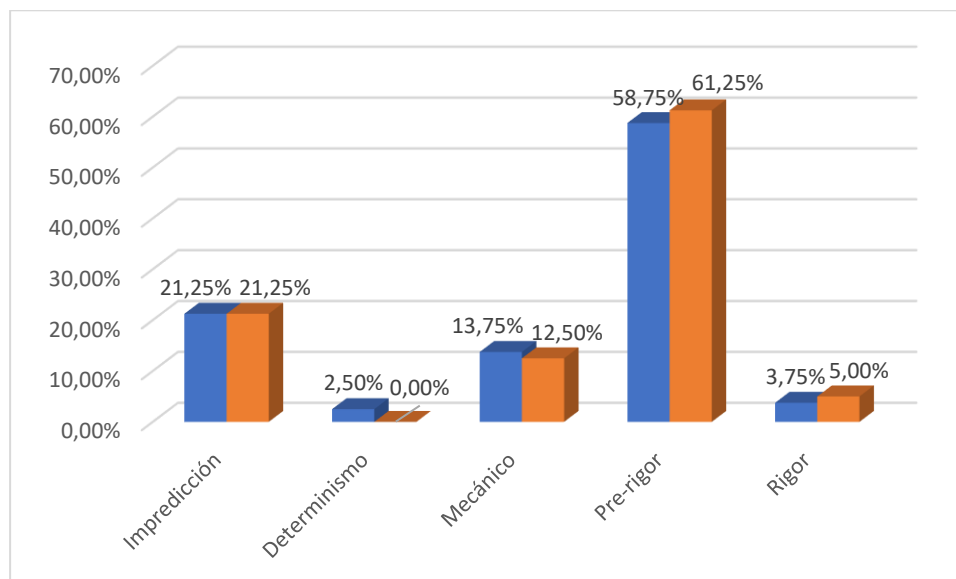
Figura 49. Actividad 3. Porcentaje de justificaciones de acuerdo a los niveles de razonamiento probabilístico durante la intervención con el uso de GeoGebra



Al igual que en las actividades 1 y 2 de la intervención didáctica, se realizó un comparativo entre los resultados obtenidos antes y después del uso de la herramienta digital

GeoGebra. En la gráfica que se observa en la figura 50 se muestra que el nivel de impredeción no ha variado, mientras que se ha presentado una disminución en los niveles de razonamiento determinístico y mecánico, y un crecimiento en los porcentajes que corresponden a los niveles de pre-rigor y de rigor.

Figura 50. Registro de niveles de razonamiento de los estudiantes previos y posteriores al uso de la herramienta digital GeoGebra. Actividad 3



4.2.11 Evaluación general del experimento de enseñanza

Las actividades planeadas durante el experimento de enseñanza para la intervención didáctica permitieron el uso de diferentes estrategias para potenciar la comprensión de conceptos básicos de probabilidad.

La metodología utilizada durante el desarrollo de las actividades sumada a la participación de un docente con experiencia, conocedor de los contenidos curriculares de grado sexto y la mediación de la herramienta digital GeoGebra, promovieron en los estudiantes una transformación en sus formas de razonamiento cuando se enfrentaron a problemas que involucran la probabilidad.

Durante el diagnóstico y la actividad 1 los estudiantes decidieron explicar el comportamiento de fenómenos aleatorios a partir de sus creencias. Algunos creían en causas poderosas que regían los resultados de experimentos aleatorio tales como la suerte, la voluntad de Dios, el destino. Otros asociaron estos resultados a fenómenos físicos, tales como el peso del cuerpo, el viento, la fuerza. Hubo quienes argumentaron que la forma en que se

lanzaba un dado o una moneda y en general la manera como se utilizaba un dispositivo de aleatoriedad podría incidir en el resultado final.

Cuando se abordaron actividades que involucraban sorteos, los estudiantes asociaron sus posibilidades de éxito con creencias tales como el número de la suerte, la fecha de su cumpleaños, la edad de un ser querido, entre otras. Cuando se trataba de problemas asociados con secuencias numéricas, como loterías, por ejemplo; los estudiantes manifestaron que preferían no apostar a números que se repetían como el 2222, tampoco creían en que un número con cifras consecutivas como 1234 pudiera ser el ganador, evidenciaron creencias fruto de la cultura popular como es el caso de no apostar nunca al número 1111 o al número 6666, o manifestaban que un número era feo o bonito para ganar un sorteo. Es de anotar que investigaciones como las de Ang y Shahrill (2014); Nicolson (2005); Watson et al. (2004); Sánchez y Benítez (1997), Sharma (2006) y Groth et al. (2021), se habían aproximado a resultados similares, sin embargo, es importante destacar que ninguno de estos estudios se llevó a cabo dentro del contexto de la investigación basada en diseño mediante un experimento de enseñanza en el aula, ni contaron con la incorporación de la tecnología mediante el uso de herramientas digitales.

Durante las actividades 2 y 3, los estudiantes intentaron abordar los problemas asociados con fenómenos aleatorios utilizando recursos matemáticos y haciendo uso de una terminología más cercana al dominio de la probabilidad.

El experimento de enseñanza reveló que confrontar a los estudiantes con sus creencias no normativas sobre probabilidad con pruebas empíricas que contradicen esas ideas resultan un estímulo para guiarlos hacia un pensamiento matemático.

Capítulo 5

Conclusiones y sugerencias

La estrategia metodológica utilizada en este estudio fue un experimento de enseñanza enmarcado en el paradigma de la investigación basada en diseño, lo que permitió a partir del análisis de la literatura definir el problema y los objetivos de investigación, evaluar el conocimiento previo de los estudiantes, diseñar de manera minuciosa la intervención en el aula e identificar una metodología de enseñanza adecuada de acuerdo a los contenidos y objetivos instruccionales definidos.

El desarrollo de esta investigación inicio a partir de un estudio diagnóstico tenido como línea de base para la planeación, diseño e implementación de una intervención didáctica compuesta por tres actividades; cada una constituida en dos momentos. Uno inicial sin el uso de herramientas digitales y otro en el que se implementó el uso de tecnología a través de aplicaciones diseñadas en el software de matemática dinámica GeoGebra.

Durante el proceso de investigación, fueron tenidas en cuenta las declaraciones de los estudiantes, la interacción entre pares, sus reacciones ante las intervenciones del profesor involucrado en la experimentación, así como la organización del aula de clase y el uso de instrumentos utilizados para la recolección de la información.

A continuación, se presentan conclusiones y sugerencias que están fundamentadas en el estudio documental y experimental reportado en el capítulo 4 de este documento.

5.1 Respuesta a las preguntas de investigación

En esta sección se dan respuestas a las preguntas que dieron origen a la presente investigación. La estrategia utilizada para responder la pregunta central de investigación es construir respuestas a cada una de las preguntas auxiliares utilizando como base el diseño del experimento de enseñanza y las evidencias empíricas de la intervención didáctica, analizadas con fundamento en el marco teórico referencial.

Pregunta central de investigación

¿Cuáles son las características que debe tener el diseño de actividades de aprendizaje, centradas en el uso de herramientas digitales que permitan movilizar las creencias que tienen los estudiantes de grado sexto al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad?

- **Respuesta a la pregunta auxiliar número 1.** ¿Cuáles son las creencias iniciales que tienen los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de probabilidad?

Con base en el análisis de la información obtenida mediante la encuesta de diagnóstico y las diferentes actividades programadas durante el desarrollo de la intervención didáctica se evidencia que los estudiantes tienen diferentes creencias sobre la probabilidad dependiendo del nivel de razonamiento en el que se encuentren. En la tabla 18 se presentan las creencias iniciales sobre probabilidad que se han registrado durante el desarrollo de la investigación.

Tabla 18. Creencias asociadas a los niveles de razonamiento probabilístico de los estudiantes

Nivel	Descripción del nivel	Creencias asociadas
Impredicción	Al estar en situaciones de azar, les es completamente imposible predecir resultados	El estudiante cree que no es posible predecir la probabilidad de la ocurrencia de un evento
Determinístico	explican el comportamiento de los fenómenos de azar, mediante alguna causa poderosa que los rige.	<u>Creencias físicas:</u> El peso del cuerpo, el viento, la fuerza, la cara por la que se lance una moneda. <u>Creencias míticas:</u> Dios, el destino, bendecir el dispositivo, hacer la señal de la cruz, no apostar nunca al número 666.
Físicas		
Mítico/Mágicas		<u>Creencias mágicas:</u> Suerte, soplar los dispositivos generadores de aleatoria
Empíricas		(Lanzamiento de dados, monedas), asociar el resultado de la probabilidad de un suceso con una fecha relevante (fecha de nacimiento, cumpleaños, muerte de un personaje famoso). <u>Empíricas:</u> no apostar a números que se repiten como el 2222, ni a números con cifras consecutivas como 1234, considerar que un número es feo o bonito para ganar un sorteo.

Mecánico	incorporan constructos de la Matemática para explicar fenómenos de azar, pero la cita se hace fuera de contexto.	Las creencias de los estudiantes se alejan de los niveles de impredeción y determinismo e incorporan recursos matemáticos defectuosos (Schoenfeld, 1985). Por ejemplo: trasladar de manera mecánica los resultados de la probabilidad de eventos de un contexto a otro (monedas a dados, de un dado a dos dados), se utiliza de manera incorrecta una definición o una fórmula, no comprende el problema por lo que utiliza los datos de manera incorrecta.
Pre-rigor	utilizan argumentos desde el punto de vista matemático, alejándose del pensamiento determinístico. Tienen, por lo menos, un terreno abonado para iniciar la discusión de fenómenos probabilísticos. Se notan rasgos de pensamiento combinatorio, son capases de avizorar resultados, su mente tiene la capacidad de combinar parcialmente resultados, ve más de una posibilidad de que el fenómeno suceda, pero no encuentra todos los resultados posibles o ve	creen que las matemáticas son una herramienta para resolver problemas de probabilidad. Por este motivo incorporan recursos y estrategias heurísticas adecuadas, sin embargo, comenten algunos errores y no le dan importancia al uso de estrategias metacognitivas o de control o no son conscientes de ellas.

más de los que son
realmente a causa de las
falacias que rondan su
pensamiento.

Rigor	utilizan, correctamente, diferentes representaciones para explicar el comportamiento del suceso y, dependiendo de la naturaleza del problema, pueden apoyarse en tablas, gráficas, diagramas, ecuaciones y otros recursos matemáticos	Creer que las matemáticas son una herramienta para resolver problemas de probabilidad. Incorporan recursos y estrategias heurísticas adecuadas, cuando cometen algunos errores, los identifican, los corrigen teniendo en cuenta sus estrategias metacognitivas o de control.
-------	---	---

Como se puede observar, existe una fuerte influencia de creencias de tipo sociocultural que afectan principalmente el razonamiento determinístico de los estudiantes.

El análisis de la literatura, sumado a los hallazgos fruto de la encuesta de diagnóstico, sirvió como base para el diseño de actividades de aprendizaje en la fase de intervención didáctica, con el propósito de propiciar la movilidad entre diferentes niveles de razonamiento probabilístico.

- **Respuesta a la pregunta auxiliar número 2.** ¿Qué impacto tiene el uso de la herramienta digital GeoGebra en el sistema de creencias de los estudiantes sobre el concepto de probabilidad?

Impacto cuantitativo

- En las tablas 19, 20 y 21 se muestra el desempeño cuantitativo del grupo experimental en el diagnóstico y en las actividades de la intervención didáctica.

Tabla 19. informe estadístico del diagnóstico

Actividad	Media	Desviación típica	Coefficiente de Variabilidad
-----------	-------	-------------------	------------------------------

Diagnóstico	6,60 (33%)	2,77	42%
-------------	------------	------	-----

Las actividades 1, 2 y 3 se implementaron en dos momentos, el primero sin la intervención de la tecnología y el segundo utilizando como recurso el software GeoGebra.

Tabla 20. Informe estadístico de las actividades sin uso de GeoGebra

Actividad	Media	Desviación típica	Coefficiente de Variabilidad
Actividad 1 sin uso de tecnología	5,06 (50%)	2,05	40%
Actividad 2 sin uso de tecnología	4,67 (47%)	1,73	37%
Actividad 3 sin uso de tecnología	6,80 (62%)	2,10	31%

Tabla 21. Informe estadístico de las actividades con uso de GeoGebra

Actividad	Media	Desviación típica	Coefficiente de Variabilidad
Actividad 1 con tecnología	5,33 (53%)	1,58	30%
Actividad 2 con tecnología	7,20 (72%)	2,59	35%
Actividad 3 con tecnología	7,2 (72%)	1,72	24%

A partir de los resultados de las tablas anteriores se puede concluir que hay impacto de orden cuantitativo a partir de la intervención didáctica: la media aritmética del grupo pasó del 33% al 72%; el grupo se hizo más homogéneo en su rendimiento porque el coeficiente de variabilidad pasó de 42% al 24% lo que indica que hay un impacto positivo.

Este impacto positivo en los resultados de la media aritmética y el coeficiente de variabilidad es el resultado del efecto combinado de un conjunto de factores: Un profesor con formación matemática y didáctica, actividades de aprendizaje diseñadas para propiciar la movilidad en las creencias sobre probabilidad y por ende en los niveles de razonamiento, y una metodología que propicie la participación activa de los estudiantes mediante la exploración, comunicación y argumentación de ideas con la ayuda de tecnología.

b. Impacto Cualitativo

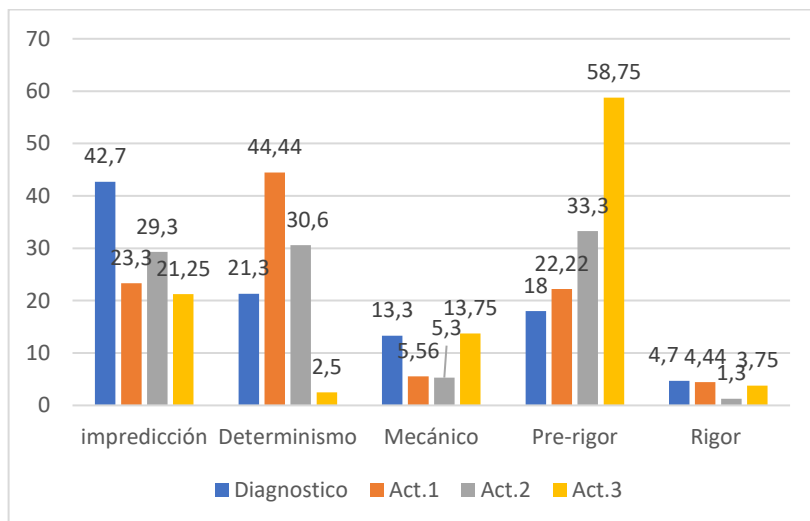
Como ya se mencionó en la respuesta a la pregunta auxiliar número 1, los estudiantes del grupo experimental al resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad,

utilizan los siguientes niveles de razonamiento probabilístico: Impredicción, determinístico, mecánico, pre-rigor y rigor.

En el análisis de resultados del estudio, se encontró evidencia para afirmar que la intervención didáctica generó movilidad entre los niveles de razonamiento pasando de la impredicción y el determinismo al pre-rigor y al rigor. Se propició el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático como la particularización, la visualización, la búsqueda de patrones, la generalización y la construcción de conjeturas.

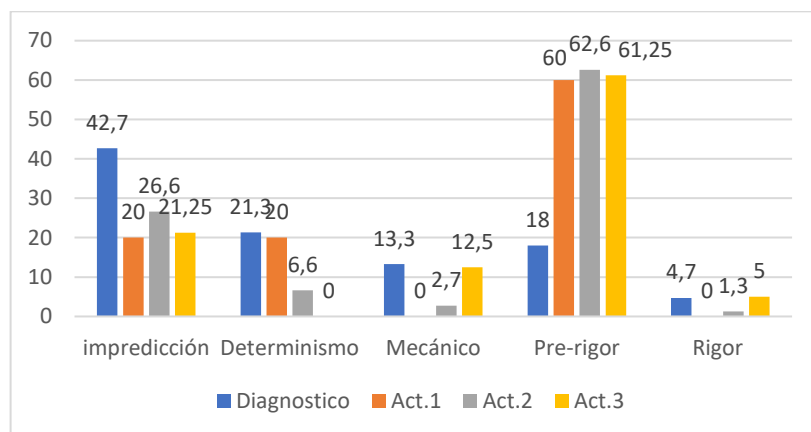
En la figura 51, se observa el diagrama de barras que muestra los cambios que se fueron presentando en cada uno de los niveles de razonamiento a medida que se desarrollaron las actividades programadas. La gráfica corresponde a los momentos de las actividades, donde según la metodología de trabajo establecida no se hizo uso de tecnología.

Figura 51. Diagrama de barras de los niveles de razonamiento durante el desarrollo de las actividades de la intervención didáctica sin el uso de GeoGebra.



Mientras que en la figura 52, se reportan los cambios en los niveles de razonamiento cuando se utilizó el software GeoGebra.

Figura 52. Diagrama de barras de los niveles de razonamiento durante el desarrollo de las actividades de la intervención didáctica con la mediación de GeoGebra.



Como se muestra en las figuras 51 y 52, a medida que se desarrollaron las actividades, los niveles de impredicción y determinismo disminuyeron, mientras que el nivel de pre-rigor tuvo un crecimiento respecto al diagnóstico, de 41 puntos porcentuales en actividades sin uso de GeoGebra y de 43 puntos porcentuales cuando se hizo uso de esta herramienta digital. Los niveles de razonamiento mecánico y de rigor, además de ser los de menor frecuencia, prácticamente se mantuvieron constantes durante el desarrollo de la intervención.

Por otra parte, se observó que, al finalizar las actividades, el nivel de Impredicción disminuyó, sin embargo, alcanza un porcentaje del 21,25% en la última sesión, lo que evidencia que es más compleja su movilidad hacia otros niveles de razonamiento.

Respecto al nivel determinístico, se presentó una disminución porcentual en la medida que se desarrollaron las diferentes actividades de la intervención didáctica, esto se puede ver con claridad en la figura 52.

El uso de la herramienta digital GeoGebra permitió realizar simulaciones de eventos aleatorios, la capacidad de cálculo del computador facilitó a los estudiantes efectuar un amplio número de experimentos que con dificultad podrían realizarse en un aula de clase con material manipulativo.

Desde esta perspectiva, se ve la dimensión de la ampliación propuesta por Moreno (2002) quién argumenta que el instrumento utilizado, en este caso GeoGebra, deja ver amplificado aquello que puede ser visto a simple vista, sin embargo, este es el primer paso para que se produzca una nueva actividad matemática que finalmente genere una reorganización del conocimiento de los estudiantes. El uso de la herramienta digital implica

que los estudiantes pueden visualizar, encontrar regularidades y construir argumentos de tipo matemático, construyen contraejemplos que permiten transformar las creencias iniciales sobre probabilidad y elaboran conjeturas.

La interacción de los estudiantes con la interfaz gráfica de las aplicaciones despertó su interés por la resolución de problemas de probabilidad, esto debido a que las situaciones de aprendizaje contenían objetos y fenómenos cercanos a la realidad, un ambiente amigable, dinámico, colorido, el cual permitió un amplio número de simulaciones y el uso de múltiples representaciones. Este tipo de ambiente generó una oportunidad para mejorar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y promovió los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área, más aún si tenemos en cuenta que la mayoría de los jóvenes estarán rodeados de dispositivos electrónicos e inmersos, como lo presenta Goos (2014), en un mundo donde las tecnologías digitales se han vuelto imprescindibles para gestionar el trabajo y las actividades de ocio.

En el estudio diagnóstico y en la solución de problemas de probabilidad con lápiz y papel, se encontró que los estudiantes hacen uso de creencias erróneas y recursos defectuosos que los llevan a cometer errores en la solución de problemas de probabilidad. La interacción con el problema, la exploración con la ayuda de tecnología los condujo a identificar y superar dichos errores. Lo que permitió concluir que el uso de la tecnología potencia las estrategias metacognitivas de los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas de probabilidad.

En la tabla 50, se puede observar que el uso de la tecnología disminuye significativamente el razonamiento mecánico. Recordemos que el estudiante usa el razonamiento mecánico cuando incorpora recursos defectuosos (Schoenfeld, 1985) o propiedades de la probabilidad extendiéndolas de manera mecánica de un contexto a otro que los induce a cometer errores. En la investigación se encontraron casos como: (i) al pedir a un estudiante la cardinalidad del espacio muestral del lanzamiento de un dado afirma de forma correcta que es 6 y considera de manera mecánica que el cardinal del espacio muestral en el lanzamiento de dos dados es 12, (ii) si en un dado existe equiprobabilidad, entonces en dos dados también la habrá, (iii) la probabilidad de obtener cara o sello en el lanzamiento de una moneda es del 50% en cada caso, existen estudiantes que de manera mecánica extienden este resultado cuando se trata del lanzamiento de dos o más monedas. Sin embargo, cuando el estudiante interactúa con un entorno digital debe hacer uso de las representaciones que le

ofrece la interfaz gráfica, lo cual activa mecanismos de control o estrategias metacognitivas para identificar los errores y corregirlos.

- **Respuesta a la pregunta auxiliar número 3.** ¿Cuáles son las características que deben tener las actividades de aprendizaje para promover la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad?

Con base en los resultados obtenidos en el presente estudio de investigación, se puede concluir que las actividades de aprendizaje que fomenten la resolución de problemas relacionados con el concepto de probabilidad, deben tener las siguientes características:

1. Permitir que emerjan las creencias iniciales de los estudiantes, una forma de que ello suceda es proponer el uso de cuestionarios en los que se involucren diferentes tipos de preguntas, entre ellas preguntas abiertas con justificaciones tal como se utilizaron en el estudio diagnóstico, preguntas de selección múltiple que permitan identificar diversos niveles de razonamiento y donde se identifique la existencia de creencias tanto matemáticas como socioculturales (Ver anexo 1).

2. Estar diseñadas a partir del análisis de los resultados que se obtengan en encuestas de diagnóstico, con el propósito de movilizar las formas de razonamiento desde la impredeción y el determinismo hasta el pre-rigor y el rigor.

3. Enfrentar al estudiante a situaciones problema en contextos cercanos a su cotidianidad, juegos de dados, lanzamiento de monedas, acertijo, rifas, loterías, barajas, el clima, movimiento de divisas, entre otros.

4. Resolver problemas inicialmente sin el uso de tecnología y posteriormente con el apoyo de una herramienta digital.

5. realizar simulaciones de los fenómenos de azar, a través de algunos experimentos aleatorios con el uso de tecnología.

6. Buscar que el estudiante procese la información haciendo uso de diferentes representaciones, tales como el dinamismo en el generador de aleatoriedad, el uso de diagramas (Barras, pastel), tablas de frecuencia, lenguaje natural.

7. Contribuir en el desarrollo de los procesos de comunicación utilizando la vía escrita y oral para la solución de problemas. Inicialmente de manera individual, luego en pequeños grupos y finalmente con la supervisión y coordinación del profesor, comunique sus resultados a toda la clase.

8. Potenciar el trabajo colaborativo en pequeños grupos, que les permita socializar procesos de resolución de problemas, compartir recursos, heurísticas, comparar procesos, generar estrategias metacognitivas o de control.

- ***Respuesta a la pregunta auxiliar número 4.*** ¿Qué importancia tiene el uso de los diferentes tipos de representación en la resolución de problemas que involucran el concepto de probabilidad con la mediación de GeoGebra?

Las representaciones utilizadas en el presente estudio fueron accesibles al nivel del dominio de conocimientos y habilidades de los estudiantes, lo que permitió interactuar con el software en un ambiente amigable.

A través de la información que se obtuvo a partir del experimento de enseñanza, se encontró que el uso de tecnología permitió a los estudiantes la interacción con: imágenes realistas de los objetos, tablas en donde se organiza la información de las secuencias, gráficas de barras y lenguaje natural. Asimismo, pasaron de una representación a otra, establecieron relaciones, conjeturaron y comunicaron matemáticamente sus ideas.

El estudiante puede visualizar un gran número de experimentos, los cuales pueden repetirse una y otra vez. A partir de la exploración de las diferentes representaciones, identifican la existencia de tendencias lo que facilita la construcción de conjeturas.

Las diferentes representaciones hacen que el estudiante vea el fenómeno de azar, lo sistematice y este elemento impacta en la ampliación del dominio expresivo, lo que le permite comunicar sus ideas con mayor fluidez y menor ambigüedad. Como lo argumentan Vásquez y Alsina (2017), se observa un fuerte predominio del lenguaje verbal y cotidiano en la introducción de las primeras nociones y conceptos básicos sobre azar y probabilidad, a medida que se van desarrollando actividades que permiten involucrar desde sus representaciones el lenguaje numérico, simbólico, tabular y gráfico, se observa que los estudiantes adquieren un verdadero lenguaje probabilístico que les permite comunicar matemáticamente sus razonamientos.

En la resolución de problemas de probabilidad se identificó que no todos los estudiantes acceden con igual facilidad a las mismas representaciones, el hecho de que las actividades de aprendizaje incluyeran en sí mismas varias de ellas, facilitó el proceso de comprensión de un número mayor de estudiantes.

El uso de las representaciones se convirtió en el puente que permitió a los estudiantes transitar de creencias sobre probabilidad en ocasiones erróneas, hacía las argumentaciones de tipo matemático, lo que se puede constatar en la disminución de los niveles de impredeción y determinismo y el incremento en los niveles de pre-rigor y de rigor.

5.2 Sugerencias

5.2.1 Sugerencias para la docencia

Se sugiere a los profesores de matemáticas:

- a. Utilizar las secuencias didácticas validadas en la presente investigación para la enseñanza de la probabilidad.
- b. Seleccionar, migrar, adaptar o diseñar actividades con el uso de tecnología para el aprendizaje de la probabilidad en diferentes niveles escolares.
- c. Capturar las creencias de los estudiantes y con base en ellas implementar secuencias didácticas para el desarrollo de los diferentes tipos de pensamiento matemático (Numérico, geométrico, métrico y variacional).

5.2.2 Sugerencias para la investigación

A lo largo de este estudio, surgen variantes de nuevas oportunidades de investigación entre las que se destacan:

Desarrollar estudios comparativos entre diferentes niveles escolares que permitan observar las creencias de los estudiantes, para contrastar el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Continuar con la exploración de las creencias e intervenciones didácticas sobre conceptos y leyes o propiedades más allá del concepto de probabilidad.

Indagar a profundidad sobre el proceso de resolución de problemas de probabilidad en profesores de matemáticas de diferentes niveles escolares.

Identificar los sistemas de creencias en diferentes grupos étnicos como afrodescendientes e indígenas y cómo estas inciden en la comprensión de conceptos relacionados con el estudio de la probabilidad.

Investigar si las causas que generan la impredeción y el determinismo se constituyen en un obstáculo epistemológico para construir el concepto de probabilidad.

5.2.3 Sugerencias para el diseño curricular

Explorar estructuras curriculares que permitan el abordaje del pensamiento probabilístico en diferentes momentos del año escolar en lugar de relegarlo al final del proceso.

Diseñar estructuras curriculares integradoras que den estatus al estudio de la probabilidad por su importancia frente a la toma de decisiones.

5.2.4 Sugerencias para la formación de profesores.

En el proceso de formación de profesores de matemáticas se hace necesario que se socialicen los resultados obtenidos en esta investigación y en investigaciones similares.

Se requiere formar a los futuros maestros en el diseño de estrategias didácticas con la intervención de tecnologías.

Se sugiere que además de incluir contextos puramente matemáticos y realistas, también sean incluidos contextos reales, a través de la materialización de proyectos que involucren la resolución de problemas de probabilidad.

5.3 Producciones

En esta sección se reportan las publicaciones y participaciones académicas producto de esta tesis doctoral. Estos productos académicos se construyeron con los fundamentos teóricos y los diseños metodológicos reportados en la presente Tesis.

El proceso de escritura, evaluación y revisión editorial contribuyó en la formación investigativa del autor de la tesis y aporta a la visibilidad local, nacional e internacional del programa de Doctorado Interinstitucional en Educación en particular y de la Universidad del Valle en general.

Artículos:

Fajardo-Valencia, A. (2020). Tecnología y educación matemática en tiempos de pandemia. *Olhar de professor*, 23, 1-4.

Fajardo-Valencia, A., y Benítez, D. (2020). Influencia de las creencias de los estudiantes en la resolución de problemas en educación matemática. *Revista de Educación Matemática (RevEM)*, 35(3),

Fajardo-Valencia, A., y Benítez, D. (2022). Formas de razonamiento probabilístico de estudiantes de sexto grado de educación secundaria. *Eco Matemático*, 13(1).

Fajardo-Valencia, A. (2023). Creencias iniciales de los estudiantes sobre probabilidad. *Praxis, Educación Y Pedagogía*, (8). https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i8.12424

Monroy, L., Fajardo-Valencia, A., Fernández, E. (2022). Investigación basada en el diseño: Cerrando la brecha entre la investigación y la práctica. *Praxis, Unimagdalena (aprobada por editor, en evaluación)*.

Martínez-Padrón, O., Fajardo-Valencia, A., Benítez, D. (2022). Sistemas de creencias en la resolución de problemas probabilísticos.

Capítulo de libro:

Fajardo-Valencia, A. (2023). *Una aproximación al estado del arte sobre la relación entre creencias, resolución de problemas de probabilidad y el uso de la tecnología digital en el aula. (En proceso de edición). Sello editorial Universidad ICESI, Resolución de Problemas de Matemáticas con Medios Digitales.*

Ponencias internacionales:

Fajardo-Valencia, A. (2021, 16 de noviembre). Conferencia inaugural [Séptima conferencia del encuentro internacional de matemáticas. EIMAT]. La importancia del sistema de creencias en la resolución de problemas de probabilidad. Universidad del Atlántico. Barranquilla. Colombia.

Fajardo-Valencia, A. (2022, 1 de diciembre). Ponencia [I seminario internacional “El uso de los tics en la enseñanza-aprendizaje. Desarrollo del pensamiento estocástico en educación matemática]. Análisis del sistema de creencias sobre probabilidad con la mediación de GeoGebra. Universidad Icesi. Cali. Colombia.

Referencias Bibliográficas

- Abelson, R. P. (1979). Differences between belief and knowledge systems. *Cognitive science*, 3(4), 355-366.
- Aizikovitch-Udi, E., & Radakovic, N. (2012). Teaching Probability by Using Geogebra Dynamic Tool and Implementing Critical Thinking Skills. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46(Galotti 1989), 4943–4947.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.364>
- Alabau, J., Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2020). Relación entre creencias sobre resolución de problemas, creencias epistemológicas, nivel académico, sexo y desempeño en resolución de problemas: un estudio en educación secundaria. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, 17, 103–115.
- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79–96.
- Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). La heurística en la creación y resolución de enunciados de problemas de probabilidad. *Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Alqahtani, M. M., & Powell, A. B. (2017). Teachers' Instrumental Genesis and Their Geometrical Understanding in a Dynamic Geometry Environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3(1), 9–38. <https://doi.org/10.1007/s40751-016-0025-5>
- Alsina, A. (2012). La Estadística Y La Probabilidad En Educación Infantil: Conocimientos Disciplinarios, Didácticos Y Experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*, 7, 4–22.
- Alsina, Á., & Salgado, M. (2019). Ampliando los conocimientos matemáticos en Educación Infantil: la incorporación de la probabilidad. *Revista de Estudios y Experiencias En Educación*, 18(36), 225–240. <https://doi.org/10.21703/rexe.20191836alsina6>
- Amir, G. S., & Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 85–107. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(99\)00018-8](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)00018-8)
- Ang, L. H., & Shahrill, M. (2014). Identifying Students' Specific Misconceptions in Learning Probability. *International Journal of Probability and Statistics*, 3(2), 23–29.
<https://doi.org/10.5923/j.ijps.20140302.01>
- Armella, L. M. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de La Educación Media de Colombia*, 81–98.
- Artigue, M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies Michèle Artigue Abstract. In Hoyles;Lagrange (Ed.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (2010th ed., pp. 463–475).
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

- Awuah, F. K., & Ogbonnaya, U. I. (2020). Grade 12 students' proficiency in solving probability problems involving contingency tables and tree diagrams. *International Journal of Instruction*, 13(2), 819–834. <https://doi.org/10.29333/iji.2020.13255a>
- Bakar, S. A., Ayub, A. F. M., Gopal, K., & Salim, N. R. (2019). The influence of students' beliefs on mathematical problem solving towards mathematics achievement among Malaysian matriculation students. *Universal Journal of Educational Research*, 7(10), 2243–2247. <https://doi.org/10.13189/ujer.2019.071025>
- Ball, L., Drijvers, P. (Paulus H. M., Ladel, S., Siller, H.-S., Tabach, M., & Vale, C. (n.d.). *Uses of technology in primary and secondary mathematics education : tools, topics and trends*.
- Ball, L., Ladel, S., & Siller, H.-S. (2018). *Introduction* (pp. 1–7). https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_1
- Barragues y Guisasola. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. *Educación Matemática*, 21(3), 127–162.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 8(3), 247–263.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola, 9-21.
- Batanero, C. (2016). *Retos en la investigación sobre didáctica de la probabilidad*. 844–851.
- Batanero, C. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO*, 44(1), 7–16.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1
- Batanero, C., y Sánchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability? *Exploring Probability in School*, 241–266. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_11
- Batanero, C., y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Aspectos didácticos de las matemáticas, 125-164.
- Baumanns, L., y Rott, B. (2022). Identifying Metacognitive Behavior in Problem-Posing Processes: Development of a Framework and a Proof of Concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10297-z>
- Beghetto, R. A., & Baxter, J. A. (2012). Exploring student beliefs and understanding in elementary science and mathematics. *Journal of Research in Science Teaching*, 49(7), 942–960. <https://doi.org/10.1002/tea.21018>

- Beitzel, B. D., Staley, R. K., & DuBois, N. F. (2011). The (in)effectiveness of visual representations as an aid to solving probability word problems. *Effective Education*, 3(1), 11–22. <https://doi.org/10.1080/19415532.2011.604256>
- Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en la resolución de problemas con apoyo de la tecnología computacional. Tesis Doctoral*. Cinvestav.México.
- Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 44(7), 913–925. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), 103–123. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 1–21.
- Boaler, J. (2009). ¿Pueden los problemas matemáticos ayudar con las desigualdades en el mundo?: Discusión de la Parte II: Factores socioculturales. En *Palabras y mundos* (pp. 131-139). Rodaballo.
- Bonne, L., & Johnston, M. (2016). Students' beliefs about themselves as mathematics learners. *Thinking Skills and Creativity*, 20, 17–28. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2016.02.001>
- Borg, S. (2015). *Teacher cognition and language education: Research and practice*. New York, NY: Bloomsbury Publishing.
- Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2010). Research and Developments in Probability Education Internationally Manfred Borovcnik and Ramesh Kapadia. *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education, April*, 41–48.
- Brito, MJM, da Silva Caram, C., Montenegro, LC, Rezende, LC, Renno, HMS y Ramos, FRS (2017). Potenciales del Atlas. ti para el análisis de datos en investigaciones cualitativas en enfermería. *Investigación cualitativa asistida por computadora* , 75-84.
- Budgett, S., & Pfannkuch, M. (2019). Visualizing Chance: Tackling Conditional Probability Misconceptions. In G. Burrill & Ben-Zvi (Eds.), *Topics and Trends in Current Statistics Education Research, Monographs ICME-13* (pp. 3–25). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6_1
- Burrus, J., & Moore, R. (2016). The incremental validity of beliefs and attitudes for predicting mathematics achievement. *Learning and Individual Differences*, 50, 246–251. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.08.019>

- Busadee, N., & Laosinchai, P. (2013). Authentic Problems in High School Probability Lesson: Putting Research into Practice. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 93, 2043–2047. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.10.162>
- Cabrera. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. In *Revista Pedagogía Universitaria* (Issue 3).
- Callejo, M. L., & Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 173–194.
- Callejo, M. L., & Vila, A. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas* (Vol. 100) (Narcea, Ed.).
- Callingham, R., Watson, J., & Oates, G. (2021). Learning progressions and the Australian curriculum mathematics: The case of statistics and probability. *Australian Journal of Education*, 65(3), 329–342. <https://doi.org/10.1177/000494412111036521>
- Camargo, L. (2021). *Estrategias Cualitativas de investigación en educación matemática* (1st ed.). Ed. Universidad de Antioquia-Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.
- Castillo, E., & Vásquez, M. (2003). El rigor metodológico en la investigación cualitativa. *Colombia Médica*, 2003, Vol. 34, n(ISSN: 0120-8322), 164–167.
- Castro Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación En Educación Matemática*, XII, 113–140.
- Castro, W., & Godino, J. (2011). Metodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). *Investigación En Educación Matemática*, XV(2011), 99–116.
- Cerda, G., Ruiz, R. O., Casas, J. A., del Rey, R., & Pérez, C. (2016). Predisposición desfavorable hacia el aprendizaje de las Matemáticas: Una propuesta para su medición. *Estudios Pedagogicos*, 42(1), 53–63. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000100004>
- Charles, R. y Lester, F. (1982). *Teaching problem solving. What, why, how.*
- Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (2014). *Introduction* (pp. 1–10). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_1
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2015). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. *Statewide Agricultural Land Use Baseline 2015*, 1, 1–72.
- Coenen, T., Hof, F., & Verhoef, N. (2018). *Combinatorial Reasoning to Solve Problems*. 69–79. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4_5

- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Routledge / Taylor & Francis Group.
- Coutinho, S., & Caberlim, L. (2015). SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA A APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE. In M. A. S. (Ed.) (Ed.), *Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASSE)* (M.A. Sorto, Issue July).
- De Benito Crosetti, B., & Salinas Ibáñez, J. M. (2016). La Investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación En Tecnología Educativa*, 0, 44–59. <https://doi.org/10.6018/riite2016/260631>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 471–482. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6>
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1243–1267.
- Drijvers, P. (2018). *Empirical Evidence for Benefit? Reviewing Quantitative Research on the Use of Digital Tools in Mathematics Education* (pp. 161–175). https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_9
- Drijvers, P. (2020). *Digital Tools in Dutch Mathematics Education: A Dialectic Relationship* (pp. 177–195). https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_10
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4_1
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In *New ICMI Study Series* (Vol. 13). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7
- Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J., & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0150-2>

- English, L. D., & Gainsburg, J. (2015). PProblem solving in a 21st-century mathematics curriculum. *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition*, 313–335. <https://doi.org/10.4324/9780203448946>
- English, L. D., & Watson, J. M. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 28–62. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.1.0028>
- English, L., & Sriraman, B. (2010). Theories of Mathematics Education. In L. English & B. Sriraman (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (Springer-V, pp. 263–289). Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2>
- Erazo, J. D., & Aldana, E. (2015). Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. *Praxis*, 11(1), 163–169.
- Ernst, H., & Morton, A. (2019). *Connecting Probability*. December.
- Fajardo & Benítez, D. (2020). influencia de las creencias de los estudiantes en la resolución de problemas en educación matemática. *Revista de Educación Matemática*, 35(3).
- Fiallo Leal, J.E. & Gutiérrez Rodríguez, A. (2007). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. In P. B. M. C. P. F. B. G. J. M. M. T. González (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación* (pp. 41–62). X Simposio de la SEIEM. Huesca.
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (2016). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions Published by: National Council of Teachers of Mathematics Linked references are available on JSTOR for this article: The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based M. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96–105.
- Francisco, J. M. (2013). The mathematical beliefs and behavior of high school students: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 481–493. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.012>
- Galende, N., Rojo, V., & Arrivillaga, A. (2019). Teaching-Learning Mathematics. *Journal of Psychological and Educational Research*, 27(2), 88–110.
- García, J., & Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución. *Actas de Las Jornadas Virtuales de Didáctica de La Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 417–424.
- García-García, J. I., Arredondo, E.-H., & Torres, M. M. (2018). Desarrollo de la noción de distribución binomial en estudiantes de bachillerato con apoyo de tecnología. *Revista Paradigma*, 39(December 2018), 92–106.

- Garófalo, J. (1989). Creencias y su influencia en el rendimiento matemático. El profesor de matemáticas, 82 (7), 502-505.
- Gökçe, S., & Güner, P. (2022). Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies*, 27(4), 5301–5323. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10836-1>
- Gómez Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias.
- Gómez Torres, E. (2016). Estadística Y Probabilidad En El Currículo Colombiano Para Educación Básica Y Media. *XXVI Simposio Internacional de Estadística 2016*, 1–5.
- Goos, M. (2010). Using technology to support effective mathematics teaching and learning: What counts? *Research Conference*, 67–70.
- Goos, M. (2014). The Mathematics Teacher in the Digital Era. *The Mathematics Teacher in the Digital Era*, 2, 139–161. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1>
- Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Perspective on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 73–89. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00005-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00005-1)
- Groth, R. E., Austin, J. W., Naumann, M., & Rickards, M. (2021). Toward a theoretical structure to characterize early probabilistic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 33(2), 241–261. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00287-w>
- Guba, E. G. (1989). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista En Gimeno Sacristán, J. y Pérez Gómez, A. *La Enseñanza: Su Teoría y Su Práctica*, 148–165.
- Gürbüz, R., & Birgin, O. (2012). The effect of computer-assisted teaching on remedying misconceptions: The case of the subject “probability.” *Computers and Education*, 58(3), 931–941. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.11.005>
- Gurer, M. D., y Akkaya, R. (2022). The influence of pedagogical beliefs on technology acceptance: a structural equation modeling study of pre-service mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(4), 479–495. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09504-5>
- Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524. <https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995081>
- Hannula, MM, Räsänen, P. y Lehtinen, E. (2007). Desarrollo de habilidades de conteo: papel del enfoque espontáneo en la numerosidad y la enumeración basada en subitización. *Pensamiento y aprendizaje matemático*, 9 (1), 51-57.
- Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 26–31.

- Heid, M. K. (2018). *Digital Tools in Lower Secondary School Mathematics Education: A Review of Qualitative Research on Mathematics Learning of Lower Secondary School Students* (pp. 177–201). https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_10
- Hensberry, K. K. R., & Jacobbe, T. (2012). The effects of Polya's heuristic and diary writing on children's problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 24(1), 59–85. <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0034-7>
- Henschel, S., & Roick, T. (2017). Relationships of mathematics performance, control and value beliefs with cognitive and affective math anxiety. *Learning and Individual Differences*, 55, 97–107. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.009>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, L. (2010). *Metodología de la Investigación* (5th ed.). México D.F. McGraw-Hil.
- Heyvaert, M., Deleye, M., Saenen, L., Van Dooren, W., & Onghena, P. (2018). How do high school students solve probability problems? A mixed methods study on probabilistic reasoning. *International Journal of Research and Method in Education*, 41(2), 184–206. <https://doi.org/10.1080/1743727X.2017.1279138>
- Hohenwarter, M. (2007). GeoGebra — didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 28(1), 76–77. <https://doi.org/10.1007/bf03339335>
- Huang, C. K. (2023). Coaching for change: preparing mathematics teachers for technology integration in differentiated classrooms. *Education and Information Technologies*. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-11684-x>
- Huerta, M. P. (2014). *Researching Conditional Probability Problem Solving*. 613–639. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_33
- Huerta, P., & Bresó, A. (2013). *Fases en la resolución de problemas de probabilidad condicional y variables de investigación*. 1–8.
- Huerta, P. M. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de Las Ciencias*, 20(1), 75–86.
- Huerta Palau, M. Pedro y Arnau Bresó, J. (2013). *Fases en la resolución de problemas de probabilidad condicional y variables de investigación*. 1–8.
- Inzunza, S. (2014). Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 1–11.
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: The Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1115–1136. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8>

- Jäder, J., Sidenvall, J., & Sumpter, L. (2017). Students' Mathematical Reasoning and Beliefs in Non-routine Task Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 759–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3>
- Jankvist, U. T. (2015). Changing students' images of "mathematics as a discipline." *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 41–56. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.02.002>
- Jiménez, L., y Jiménez, J. R. (2005). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? *Revista digital: matemática, educación e internet*, 6(1).
- Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14–26. <https://doi.org/10.3102/0013189X033007014>
- Jones, G. A., & Thornton, C. A. (2005). An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. In *Exploring Probability in School* (pp. 65–92). https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_4
- Jones, I., & Inglis, M. (2015). The problem of assessing problem solving: can comparative judgement help? *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 337–355. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9607-1>
- Jurdak, M. (2016). Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics. In *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08204-2>
- Kele, A. (2018). Factors impacting on students' beliefs and attitudes toward learning mathematics: Some findings from the Solomon Islands. *Waikato Journal of Education*, 18(1), 85–92. <https://doi.org/10.15663/wje.v23i1>
- Kleiner, I. (1986). Famous Problems in Mathematics: An Outline of a Course. *For the Learning of Mathematics*, 6(1), 31–38.
- Kleitman, S., & Gibson, J. (2011). Metacognitive beliefs, self-confidence and primary learning environment of sixth grade students. *Learning and Individual Differences*, 21(6), 728–735. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2011.08.003>
- Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 139–156. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_7
- Krippendorff, K. (2018). Content analysis: An introduction to its methodology. Sage publications.
- Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(1), 20–40.

- Langrall, C. W. (2018). The Status of Probability in the Elementary and Lower Secondary School Mathematics Curriculum: The Rise and Fall of Probability in School Mathematics in the United States. In C. E. Batanero C. (Ed.), *Teaching and Learning Stochastics. Monografías ICME-13* (pp. 39–50). https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_3
- Leavy, A., & Hourigan, M. (2015). Motivating inquiry in statistics and probability in the primary classroom. *Teaching Statistics*, 37(2), 41–47. <https://doi.org/10.1111/test.12062>
- Lee, H. S., Angotti, R. L., & Tarr, J. E. (2010). Making Comparisons Between Observed Data and Expected Outcomes: Students' Informal Hypothesis Testing with Probability Simulation Tools. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 68–96.
- Lee, S. Y. (2016). Students' Use of "Look Back" Strategies in Multiple Solution Methods. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(4), 701–717. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9599-9>
- Lemus, M., & Ursini, S. (2016). Creencias y actitudes hacia las matemáticas. Un estudio con alumnos de Bachillerato. en A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 315–323).
- Leong, Y. H., & Janjaruporn, R. (2015). The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 645–648. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Lester, & Cai, J. (2016). Posing and Solving Mathematical Problems. *Posing and Solving Mathematical Problems*, 117–135. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3>
- Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 325–336. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2>
- Leung, A. (2017). *Exploring Techno-Pedagogic Task Design in the Mathematics Classroom* (pp. 3–16). https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_1
- Li, Y., & Moschkovich, J. N. (2013). Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics: Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner. In *Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics: Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner*. <https://doi.org/10.1007/978-94-6209-299-0>
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM - Mathematics Education*, 53(4), 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem Solving in Mathematics Education. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2>

- Lincoln, Y., & Guba, E. (1985). Establishing trustworthiness. *Naturalistic Inquiry*, 289(331), 289–327.
- Lindfors, M., Winberg, M., & Bodin, M. (2019). The Role of Students' Scientific Epistemic Beliefs in Computer-Simulated Problem Solving. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 63(1), 124–144. <https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1324907>
- Lonjedo, M., Huerta, P., & Carles, M. (2012). Conditional Probability Problems in textbooks, an example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 153, 319–337.
- Lopes, J. B., & Costa, C. (2019). Digital resources in science, mathematics and technology teaching – How to convert them into tools to learn. *Communications in Computer and Information Science*, 993, 243–255. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20954-4_18
- Markovits, Z., & Forgasz, H. (2017). “Mathematics is like a lion”: Elementary students' beliefs about mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 49–64. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9759-2>
- Martin, V., Oliveira, I., & Theis, L. (2018). *Teaching Probability in Junior High School Through Problem Solving: Construction and Analysis of a Probabilistic Problem*. 325–338. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92390-1_31
- Martin, V., & Theis, L. (2012). La résolution d'une situation-problème probabiliste en équipe hétérogène : le cas d'une élève à risque du primaire. *Nouveaux Cahiers de La Recherche En Éducation*, 14(1), 49–69. <https://doi.org/10.7202/1008843ar>
- Martin, V., Thibault, M., & Homier, M. (2022). Convergence and Divergence in Probability Teaching in Elementary and Secondary School in Québec: a Closer Look at Eight Teachers' Self-reported Practices. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 659–678. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00241-2>
- Martínez Miguélez, M. (2006). Validez y confiabilidad en la Metodología Cualitativa. *Paradigma*, 27(2), 07–33.
- Martínez-Padrón, O. (2021). El afecto en la resolución de problemas de matemática. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, 5(1), 86–100.
- Martínez-Padrón, O. J. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, 17(57), 234–244.
- McDonough, A., & Sullivan, P. (2014). Seeking insights into young children's beliefs about mathematics and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 279–296. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9565-z>
- McKenney, S., & Reeves, T. (2014). Educational design research. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, & M. J. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology: Fourth Edition* (pp. 1–1005). <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5>

- McLeod, D. B. (1988). Affective Issues in Mathematical Problem Solving: Some Theoretical Considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 134–141. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.19.2.0134>
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.
- Misfeldt, M., Jankvist, U. T., & Aguilar, M. S. (2016). Teachers' beliefs about the discipline of mathematics and the use of technology in the classroom. *Mathematics Education*, 11(2), 395–419.
- Molera Botella, J. (2012). ¿Existe relación en la Educación Primaria entre los factores afectivos en las Matemáticas y el rendimiento académico? *ESE: Estudios Sobre Educación*, 23(23), 141–155.
- Molina, M., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*, 29(1) (January 2015), 75–88.
- Moreno Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de La Educación Media de Colombia*, 81–98.
- Moreno-Armella, L. (2017). Enfoques Emergentes en la Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, 0(17), 179–192.
- Moreno-armella, L., & Sriraman, B. (2010). Theories of Mathematics Education. *Theories of Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2>
- NCTM. (2000). *Principles, N. C. T. M. (2000). Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.
- NCTM. (2014). *Principles to actions. Executive summary*.
- Nicolson, C. (2005). Is chance fair? A student's thoughts on probability. *Teach Kids Math*, 12(2), 83–89.
- Niepel, C., Burrus, J., Greiff, S., Lipnevich, A. A., Brenneman, M. W., & Roberts, R. D. (2018). Students' beliefs and attitudes toward mathematics across time: A longitudinal examination of the theory of planned behavior. *Learning and Individual Differences*, 63(February), 24–33. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.010>
- Obersteiner, A., Bernhard, M., & Reiss, K. (2015). Primary school children's strategies in solving contingency table problems: the role of intuition and inhibition. *ZDM - Mathematics Education*, 47(5), 825–836. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0681-8>
- Olsson, J. (2018). The Contribution of Reasoning to the Utilization of Feedback from Software When Solving Mathematical Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 715–735. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9795-x>

- Olsson, J., & Granberg, C. (2019). Dynamic Software, Task Solving With or Without Guidelines, and Learning Outcomes. *Technology, Knowledge and Learning*, 24(3), 419–436. <https://doi.org/10.1007/s10758-018-9352-5>
- Onuchic, L. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In Bicudo (Ed.), *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*.
- Ozgen, K. (2013). An Analysis of High School Students' Mathematical Literacy Self-Efficacy Beliefs in Relation to Their Learning Styles. *Asia-Pacific Education Researcher*, 22(1), 91–100. <https://doi.org/10.1007/s40299-012-0030-4>
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332. <https://doi.org/10.3102/00346543062003307>
- Parzysz, B. (2009). Simulating random experiments with computers in the classroom: indispensable but not so simple. In & A. O. C. Bardini, D. Vagost (Ed.), *Proceedings of the ICTMT 9 conference. Metz: University of Metz*.
- Parzysz, B. (2018). Solving Probabilistic Problems with Technologies in Middle and High School: The French Case. In *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 387–397). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9>
- Penalva, M., Posadas, J., & Roig, A.-I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, 22(3), 23–54.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (2016). *Psicología del niño* (ed. renovada). Ediciones Morata.
- Pitsia, V., Biggart, A., & Karakolidis, A. (2017). The role of students' self-beliefs, motivation and attitudes in predicting mathematics achievement a multilevel analysis of the Programme for International Student Assessment data. *Learning and Individual Differences*, 55, 163–173. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.014>
- Polaki, M. V (2002). Uso de la instrucción para identificar prácticas matemáticas asociadas con el crecimiento del pensamiento probabilístico de los estudiantes de primaria basotho. *Revista Canadiense de Educación en Ciencias, Matemáticas y Tecnología*, 2, 357-370.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery: On Understanding. Learning*.
- Pongsakdi, N., Laakkonen, E., Laine, T., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2019). The Role of Beliefs and Motivational Variables in Enhancing Word Problem Solving. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 63(2), 179–197. <https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1336475>
- Portari, D., Chapman, O., & Sullivan, P. (2008). *The Handbook of mathematics teacher education: Volume 1: knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Brill, Ed.).

- Pratt, C. (2005). Is chance fair? One student's on probability. *Teaching Children Mathematics*, 12(2), 83–89.
- Pratt, D., & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. In Ben-Zvi et al. (Ed.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 193–227). Springer International Handbooks of Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6
- Prendergast, M., Breen, C., Bray, A., Faulkner, F., Carroll, B., Quinn, D., & Carr, M. (2018). Investigating secondary student's beliefs about mathematical problem-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(8), 1203–1218. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1440325>
- Prodromou, T. (2012). *The Classicist and the Frequentist Approach to Probability within a TinkerPlots 2 Combinatorial Problem*. 2.
- Rabardel, P. (2002). *people and technology to cite this version: HAL Id: hal-01020705 Pierre Rabardel Translated by Heidi Wood*.
- Raya, R. (2020). *The Strategy of High School Students in Solving Probability Problems*. 5(8).
- Rinaudo, M. C., & Donolo, D. (2010). Una perspectiva prometedora en la investigación educativa Design Studies. A promising Outlook on educational research. *RED – Revista de Educación a Distancia*. Número 22. 15 de mayo de 2010, 29.
- Rivas, A. (2009). Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundaria. '[Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma de Coahuila.
- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., & Vásquez-Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 44(1), 135–156. <https://doi.org/10.4067/s0718-07052018000100135>
- Roesken, B., Hannula, M. S., & Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 497–506. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0315-8>
- Rokeach, M. (1973). *The nature of human values*. New York: Free Press.
- Romero Lopez, D., & De Benito Crosetti, B. (2020). Diseño de una propuesta didáctica para el uso de simuladores virtuales en la rama sanitaria de Formación Profesional. *Revista Interuniversitaria de Investigación En Tecnología Educativa*, 1–16. <https://doi.org/10.6018/riite.383431>
- Ross, C. (2004). *Belief system awareness at UW-Stout*. , A Research Paper Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master of Science Degree in Training and Development Approved, Research Advisor. University of Wisconsin-Stout.

- Rott, B., Törner, G., & Möller, J. P. A. (2018). Views and Beliefs in Mathematics Education. In *Views and Beliefs in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-01273-1>
- Rubel, L. (2007). *Middle school and high school students' probabilistic reasoning on coin tasks*. <https://doi.org/10.2307/30034964>
- Rubel, L. H. (2007). Probabilistic Reasoning on Coin Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 531–556. <https://doi.org/10.2307/30034964>
- Ruiz-Reyes, K., Contreras, J. M., Ruz, F., & Molina-Portillo, E. (2019). Recursos virtuales para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria. *Actas Del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*, 1–10.
- Saldanha, L., & Liu, Y. (2014). *Challenges of Developing Coherent Probabilistic Reasoning: Rethinking Randomness and Probability from a Stochastic Perspective* (pp. 367–396). https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_20
- Sánchez y Benítez, D. (1997). Algunos acercamientos al pensamiento probabilista de los alumnos. *Actas de La Undécima Reunión de Matemática Educativa. Relme*, 157–161.
- Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática*, 21(2), 39–77.
- Sánchez, E., y Landín, P. R. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives*, 581–597.
- Sánchez, E., y Valdés, J. (2013). La cuantificación del azar: Una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. *Probabilidad Condicionada: Revista de Didáctica de La Estadística*, ISSN-e 2255-5854, N°. 1, 2013, Págs. 39-46, 1, 39–46.
- Sánchez-Acevedo, N. A. (2017). Análisis de problemas en Estadística y Probabilidad en libros de texto de segundo año de Educación Secundaria. *Revista Científica*, 3(30), 167. <https://doi.org/10.14483/23448350.12289>
- Santos-Trigo, M. (2014). Problem Solving in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496–501). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_129
- Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' Use of Technology Affordances to Contextualize and Dynamically Enrich and Extend Mathematical Problem-Solving Strategies. *Mathematics*, 9(8), 793. <https://doi.org/10.3390/math9080793>
- Santos-Trigo, M., & Machín, M. C. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *Mathematics Enthusiast*, 10(1–2), 279–302.

- Santos-trigo, M., & Moreno-Armella, L. (2016). Posing and Solving Mathematical Problems. *Posing and Solving Mathematical Problems*, 189–207. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3>
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), 827–842. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0>
- Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2014). The Coordinated Use of Digital Technologies in Learning Environments. *Communications in Computer and Information Science*, 446 CCIS, 61–71. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10671-7_6
- Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 182–201. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489075>
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint) Alan h. Schoenfeld, the university of California, Berkeley. 1.* <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Sharma, S. (2006). *Personal Experiences and Beliefs in Early Probabilistic Reasoning: Implications for Research. 1*(1), 177–184.
- Sharma, S. (2012). Cultural Influences in Probabilistic Thinking. *Journal of Mathematics Research*, 4(5), 657–681. <https://doi.org/10.5539/jmr.v4n5p63>
- Sharma, S. (2016). Probability from a socio-cultural perspective. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 126–144.
- Son, J. W., & Lee, M. Y. (2021). Exploring the Relationship Between Preservice Teachers' Conceptions of Problem Solving and Their Problem-Solving Performances. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(1), 129–150. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10045-w>
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3–4), 341–350. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.004>
- Stack, S., & Watson, J. (2013). *Imagination and Metacognition. 69*(4), 23–31.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2014). Impacting positively on students' mathematical problem-solving beliefs: An instructional intervention of short duration. *Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 8–29. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.005>
- Sumirattana, S., Mekanong, A., & Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the DAPIC problem-solving process to enhance secondary school students'

- mathematical literacy. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, 38(3), 307–315.
<https://doi.org/10.1016/j.kjss.2016.06.001>
- Tarmizi, R. A., & Tarmizi, M. A. A. (2010). Analysis of mathematical beliefs of Malaysian secondary school students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 4702–4706.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.753>
- Thompson, A.G. (1992): Teacher' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. in: Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning. MacMillan-NCTM, New York, pp. 127-146.
- Thurm, D., y Barzel, B. (2020). Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM - Mathematics Education*, 52(7), 1411–1422. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01158-6>
- Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2013). Exploring young children's self-efficacy beliefs related to mathematical and nonmathematical tasks performed in kindergarten: Abused and neglected children and their peers. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 309–322. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9458-y>
- Tjoe, H. (2019). *“Looking Back” to Solve Differently: Familiarity, Fluency, and Flexibility* (Liljedahl; & M. Santos-Trigo, Ed.; pp. 3–20). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_1
- Turşucu, S.; Spandawa, J.; Flipse, S.; Jongbloedb, G., & de Vries, M. (2018). Teachers' beliefs systems about improving transfer of algebraic skills from mathematics into physics in senior pre-university education. *International Journal of Science Education*, 40(12), 1493–1519. <https://doi.org/>, <https://doi.org/10.1080/09500693.2018.1486520>
- van Zanten, M., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM - Mathematics Education*, 50(5), 827–838. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x>
- Vásquez, C., & Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 85, 5–23.
- Vásquez, C., & Alsina, A. (2015). Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria. *Investigación En Educación Matemática XIX*, 511–520.
- Vásquez, C., & Alsina, A. (2017). *Lenguaje probabilístico: Un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de educación primaria*. 454–478.
- Vesga-Bravo, G. J., & Escobar-Sánchez, R. E. (2018). Trabajo en solución de problemas matemáticos y su efecto sobre las creencias de estudiantes de básica secundaria. *Revista*

- De Investigación, Desarrollo E Innovación*, 9(1), 103–114.
<https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n1.2018.8270>
- Vizcaino Escobar, A. E., & Manzano Mier, M. (2017). Análisis de las relaciones entre creencias epistemológicas sobre la matemática y rendimiento académico. *Psychology, Society and Education*, 9(1), 105–119. <https://doi.org/10.25115/psyse.v9i1.469>
- Walsch, N. (2003). *Las nuevas revelaciones. Conversaciones con Dios*. México: Editorial Grijalbo, S.A.
- Wang, G., Zhang, S., & Cai, J. (2019). Chinese high school students' mathematics-related beliefs and their perceived mathematics achievement: A focus on teachers' praise. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(7).
<https://doi.org/10.29333/ejmste/105875>
- Watson, J., Caney, A., & Kelly, B. (2009). Development of student understanding of outcomes involving two or more dice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 25–54.
- Watson, J. M. (2014). *Section IV Commentary: The perspective of Mathematics Education*. 709–720. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_37
- Watson, J. M., Caney, A., y Kelly, B. A. (2004). Beliefs about Chance in the Middle Years : Longitudinal Change. In *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 581–588.
- Yáñez, G., y Jaimes, É. (2013). Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números. *Integración: Temas de Matemáticas*, 31(1), 69–86.
- Yuanita, P., Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2018). The effectiveness of Realistic Mathematics Education approach: The role of mathematical representation as mediator between mathematical belief and problem solving. *PLoS ONE*, 13(9), 1–21.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0204847>
- Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 177–204.
<https://doi.org/10.1080/10986061003654240>
- Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, 24(3), 2175–2194.
<https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x>

Anexos**Anexo 1****Cuestionario de Diagnóstico**

Nombre del estudiante: _____

Edad: _____ **Fecha:** _____ **Grado:** _____.

Nombre de la institución educativa: _____

RECOMENDACIONES: Este cuestionario hace parte de un proyecto de investigación educativa, por lo que la seriedad y responsabilidad con la que lo abordes es muy importante.

Por favor ten en cuenta las siguientes recomendaciones para responder este cuestionario

1. Lee detenidamente cada pregunta. Una vez que comprendas la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
2. En cada pregunta existe un espacio para que justifiques detalladamente tu respuesta. Si deseas construir dibujos u operaciones de apoyo, escríbelas al lado de la pregunta correspondiente.
3. Responde este cuestionario con bolígrafo.

Pregunta 1. Un día, Clara ganó la lotería baloto con los números 1; 7; 13; 21; 22; 36. Entonces dijo que siempre jugaría el mismo grupo de números.

- a. Estoy de acuerdo con clara en que debería seguir jugando ese mismo grupo de números
- b. Clara debería cambiar por un grupo donde todos los números fueran diferentes
- c. Clara podría utilizar algunos de esos números y combinarlos con otros que no haya utilizado
- d. No importa los números que seleccione. Clara tendría la misma posibilidad de ganar la lotería con esos o con otros números

Justifica tu respuesta:

Pregunta 2. Si se lanza una moneda cuatro veces, ¿cuál de las siguientes secuencias ordenadas de caras (C) y sellos (S), si es que hay alguna, es la más probable que pueda ocurrir?

- a. CSCS
- b. CCSC
- c. SCCS

Justifica tu respuesta:

- d. CCCC
- e. Todas las secuencias anteriores son igualmente probables.

Pregunta 3. Juan tuvo muchas dificultades esta semana: sufrió un accidente de automovilístico, extravió los documentos de identidad, perdió el trabajo y se peleó con la novia. ¿Por qué ocurrió esto? Escoja la opción que mejor se ajuste a su respuesta.

- a. Juan tiene mala suerte.
- b. Esto podría sucederle a cualquier persona
- c. Las cosas pueden haberle sucedido a Juan por voluntad de Dios
- d. El destino de cada persona puede llevar a que esto suceda, como en el caso de Juan
- e. Podría suceder por alguna brujería o las malas energías de otras personas hacía Juan.

Justifica tu respuesta:

Pregunta 4. Si sacas 4 números de una bolsa que contiene los números del 1 al 30. ¿Qué conjunto de números sería más probable?

- (a) 8, 9, 10, 11
- (b) 4, 28, 17, 19
- (c) Cualquiera de los dos conjuntos de números sería igual de probable
- (d) Si consideras que hay un conjunto de número que sea más probable de sacar escríbelo:

Justifica tu respuesta:

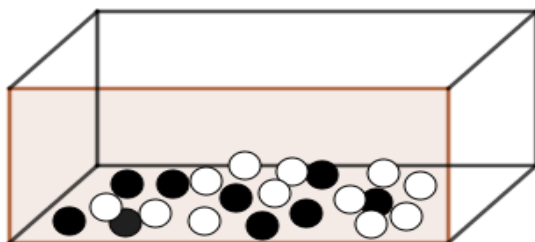
Pregunta 5. Observa la siguiente bolsa, la cual contiene bolas blancas y negras. Si revuelves y sacas al azar una bola de la bolsa. ¿Qué es más probable que ocurra?

- a. Qué salga una bola blanca
- b. Qué salga una bola negra
- c. Puede salir una bola de cualquier color
- d. No se puede predecir lo que ocurrirá

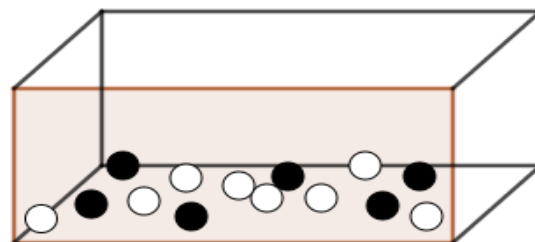
Justifica tu respuesta:



Pregunta 6. Un profesor de matemáticas muestra las siguientes cajas a un grupo de estudiantes. Estas contienen bolas blancas y negras. Al azar saca una bola de cada caja. ¿Qué es más probable que ocurra?



CAJA 1



CAJA 2

- a. Que salga una bola negra de la caja 1
- b. Que salga una bola negra de la caja 2
- c. Los dos eventos anteriores son igualmente probables

- d. No se puede predecir cual evento tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica tu respuesta:

Pregunta 7. En un juego de parqués se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Al lanzar los dos dados y sumar los puntos ¿qué es más probable?

- a. Que la suma sea siete puntos
- b. Que la suma sea cinco puntos
- c. Que la suma sea cinco o siete puntos tiene la misma probabilidad de ocurrir
- d. Es Imposible predecir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica tu respuesta:

Pregunta 8. ¿Sí se lanzan simultáneamente dos dados de diferente color, Cuál de las siguientes opciones es la más probable?

- a. Obtener un cinco y un seis
- b. Obtener un seis y seis
- c. las dos opciones anteriores son igualmente probables

Justifica tu respuesta:

- d. Es imposible dar una respuesta antes de lanzar los dados

Pregunta 9. Juan tiene en una bolsa 6 bolas blancas, 4 bolas rojas y 3 bolas azules. Juan no puede ver el interior de la bolsa. Después de revolver cuidadosamente desea sacar dos bolas. La primera bola que saca es de color rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar la segunda bola, esta sea azul?

Justifica tu respuesta:

- a. $\frac{3}{13}$ b. $\frac{3}{10}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{4}$

Pregunta 10. La profesora de artística desea realizar la rifa de un juego de colores entre los estudiantes de su grupo. El grupo está conformado por 12 niños y 15 niñas, la probabilidad de que la ganadora sea una niña es:

Justifica tu respuesta:

- a. $\frac{15}{12}$ b. $\frac{15}{27}$ c. $\frac{12}{15}$ d. 15

Anexo 2
Hoja de trabajo 1

Hoja de trabajo N° 1
Institución educativa José María Carbonell
Área de matemáticas Grado Sexto

Estudiante:

Edad: _____ **Grupo:** _____ **Fecha:** _____

Instrucciones:

Ten en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo.

- 1. Lee atentamente la actividad que se te propone, así como las preguntas que se hacen.**
- 2. Sigue puntualmente las indicaciones mencionadas en cada actividad.**
- 3. Justifica cada una de tus respuestas**

Pensando en monedas

1. Lanzamiento de monedas

- a. ¿Cuáles crees que pueden ser los posibles resultados del lanzamiento de una moneda?

- a. De acuerdo al video presentado por el profesor al iniciar la clase, ¿consideras que el lanzamiento de una moneda es un experimento aleatorio, o determinístico?

Marca con una X la respuesta que consideres correcta: Aleatorio____, Determinístico____

Justifica tu respuesta:

- b. Un profesor a pedido a cuatro de sus estudiantes que realicen el experimento de lanzar seis veces una moneda al aire y presenten una lista de sus resultados.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos.

Juan: CSSCSS

María: CSCSCS

Pedro: CCCCCS

Ana: SSSSSS

El profesor cree que probablemente uno de los estudiantes hizo trampa.

¿Estás de acuerdo con el profesor?

Marca con una X la respuesta que consideres correcta: SI ____ NO ____
Justifica tu respuesta:

- c. ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad?

Justifica tu respuesta:

- d. Una moneda se lanza cuatro veces y cada vez que cae, cae cara hacia arriba. ¿Cuál es el resultado más probable si se lanza la moneda por quinta vez?

Explica tu respuesta:

Comparte con tus compañeros (grupos de 3 estudiantes) las respuestas que diste a las preguntas 1, 2 y 3. Si consideras algunas ideas interesantes después de la discusión, redáctalas en la parte de atrás de esta hoja de trabajo.

¡Muchas gracias por tu valiosa colaboración!

Anexo 3

Hoja de trabajo N° 2 Institución educativa José María Carbonell Área de matemáticas Grado Sexto

Estudiante: _____

Edad: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

Instrucciones:

Ten en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo.

1. Lee atentamente la actividad que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
2. Sigue puntualmente las indicaciones mencionadas en cada actividad.
3. Justifica cada una de tus respuestas
Aplicación de GeoGebra 2.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, se denomina:

ESPACIO MUESTRAL

1. ¿Cuáles consideras que son todos los posibles resultados del lanzamiento de un dado?

2. Si en lugar de lanzar un dado, lanzas dos, ¿crees que el número de todos los posibles resultados (Espacio muestral) será el mismo que cuando lanzas un solo dado?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

3. Juan siente que un seis es más difícil de lanzar que cualquier otro puntaje cuando se lanza un solo dado. ¿Estarías de acuerdo o en desacuerdo con Juan?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

4. Al lanzar un dado 10 veces, han salido los siguientes valores: 2,6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6,
2. Si se lanza el dado otra vez, ¿Qué número es más probable que salga?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

5. Al lanzar dos dados y sumar sus resultados, ¿qué es más probable, sacar cinco o sacar seis?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

6. Hay dos jugadores que tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Si el total de la suma de los dos dados es un número del cartón, el jugador lo tacha y continúa el otro jugador. Gana quien tache primero todos los números del cartón.

Jugador Uno							
4	10	6	8	7	9	5	3

Jugador Dos							
5	4	2	3	11	9	12	10

- ¿Quién crees que va a ganar, el jugador Uno, o el jugador Dos?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

Abre el applet de GeoGebra que encontraras en el escritorio de tu computadora cuyo nombre es “Lanzamiento de Dados”.
Observa con atención los componentes de la aplicación.
Allí encontraras:

- a. Un botón de lanzamiento de dados (Deslizador). Arrastrándolo con el mouse podrás lanzar los dados de manera virtual desde una hasta cinco mil veces si lo deseas.
- b. Una casilla en dónde podrás escribir el número de lanzamiento de dados que quieras observar entre 1 y 5000. Debes dar clic en la tecla enter para ver sus resultados
- c. Podrás observar el valor del primer dado y el valor del segundo dado del último lanzamiento, así como la suma total de los puntajes de los dados.
- d. También encontrarás un diagrama de barras dinámico, en el podrás observar el comportamiento de los resultados de las diferentes sumas de los puntajes de los dados.
- e. Encontrarás una tabla que mostrará con qué frecuencia a caído cada una de las sumas de los puntajes de los dados, es decir el número de veces que ha salido tal o cuál resultado.

Utiliza el botón deslizante para observar como varían las diferentes representaciones de la aplicación.

1. Realiza 2000, 3000, 4000, 5000 lanzamientos de los dados, en cada caso observa la zona grafica de barras y responde las siguientes preguntas:

- a. Las barras que tienen mayor altura son: _____
- b. Las barras que tienen menor altura son: _____

Explica con tus propias palabras, por qué hay barras que tienen más altura que otras

2. ¿si tuvieras que apostar, por cual número No lo harías?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

3. ¿si tuvieras que apostar, por cual número SI lo harías?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

4. En el juego de parkés se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras expuestas hacia arriba. En una partida de parkés hay dos fichas expuestas para ir a la cárcel, la ficha roja está a siete puntos y la ficha verde está a 5 puntos. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

- Las dos fichas tienen la misma probabilidad de ir a la cárcel
- La ficha que está a siete puntos tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- La ficha que está a siete puntos tiene menor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- No se puede predecir cuál de las dos fichas tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel.
- No sé.

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

5. En un juego se lanzan los dos dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

6. Luís y Marcos tienen un cartón con números y lanzan según su turno dos dados. Si el total de la suma de los dos dados es un número del cartón, el jugador lo tacha y continúa el otro jugador. Gana quien tache primero todos los números del cartón.

Cartón de Luís							
5	4	2	3	11	9	12	10

Cartón de Marcos							
6	7	8	5	3	4	11	6

7. ¿Quién crees que va a ganar, Luís, o Marcos?

*Respuesta: _____. Justifica tu respuesta:

8. ¿Consideras que ha sido positivo o negativo utilizar la tecnología (GeoGebra, el VideoBeam, los computadores) en este aprendizaje?

***Respuesta: _____ . Justifica tu respuesta:**

Anexo 4

Hoja de trabajo N° 3.
Institución educativa José María Carbonell
Área de matemáticas Grado Sexto

Estudiante:

Edad: _____ **Grupo:** _____ **Fecha:** _____

Instrucciones:

4. Lee atentamente la actividad que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
5. Sigue puntualmente las indicaciones mencionadas en cada actividad.
6. Justifica cada una de tus respuestas

Ahora que sabemos que es un experimento aleatorio, y qué es el espacio muestral, vamos a calcular probabilidades de eventos aleatorios

En grados anteriores aprendimos que las probabilidades de un evento podían calcularse dividiendo el número de casos favorables de un evento entre el número de casos posibles del experimento.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorable}}{\text{casos posibles}}$$

1. Supongamos que tomamos pelotas de ping-pong y pintamos cada uno de estos números en una pelota diferente: 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 9, 10. Luego mezclamos bien las pelotas en una bolsa. Si una persona con los ojos vendados saca una pelota de ping-pong de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que la pelota tenga un 4?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

2. Se está jugando un juego que implica lanzar dos monedas simultáneamente. Para ganar el juego debes obtener "cara" en ambas monedas. ¿Cuál es tu probabilidad de ganar el juego?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

3. Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. El nombre de cada alumno está escrito en una hoja de papel. Todos los nombres se ponen en un sombrero. El maestro elige un nombre sin mirar. ¿Es más probable que el maestro elija, un niño o una niña?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

4. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número menor que 5?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 puntos en el lanzamiento de dos dados?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

Aplicación de GeoGebra.

En el escritorio de tu computadora encontrarás dos aplicaciones de GeoGebra, una cuyo nombre es “Lanzamiento de una moneda” y otra llamada “Lanzamiento de dos monedas”. Observa con atención los componentes de las aplicaciones.

Allí encontrarás:

- Un botón de lanzamiento (De monedas, llamado Deslizador). Arrastrándolo con el mouse podrás lanzar la moneda virtual desde una hasta tres mil veces si lo deseas.

b. En la casilla número de lanzamientos. Podrás escribir el número de lanzamientos que quieras observar y debes dar clic en la tecla enter para ver sus resultados

Comencemos: Entra a la aplicación “Lanzamiento de monedas”

- Utilizando el botón de lanzamiento de monedas (deslizador), realiza algunos desplazamientos y observa los diferentes tipos de representación que ofrece la aplicación.
- Haciendo uso de la casilla número de lanzamientos deseados, registra en la siguiente tabla los porcentajes de caras y sellos obtenidos cuando se realizan 5, 7, 9, 11, 18 lanzamientos.

Tabla 1.

Número de lanzamientos	Porcentaje de caras obtenido	Porcentaje de sellos obtenido
5		
7		
9		
11		
18		

- Haciendo uso de la casilla número de lanzamientos deseados, registra en la siguiente tabla los porcentajes de caras y sellos obtenidos cuando se realizan 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000 lanzamientos.

Tabla 2

Número de lanzamientos	Porcentaje de caras obtenido	Porcentaje de Sellos obtenido
1000		
1500		
2000		
2500		
3000		

1. ¿Si tuvieras que escoger un número de lanzamientos de una moneda que dé mayor probabilidad de obtener 50 % y 50% entre caras y sellos, utilizarías un número de la Tabla 1 o de la Tabla 2?
2. S

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

iza un experimento con una máquina que arroja monedas sobre un escritorio y se observan dos casos.

Caso 1. La máquina arroja 10 monedas

Caso2. La máquina arroja 2000 monedas.

¿En cuál de los dos casos es más factible que al revisar las monedas que caen sobre el escritorio, el número de caras sea igual que el número de sellos?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

3. Escribe el espacio muestral (todos los posibles resultados) de lanzar una moneda.

Crees que el número de todos los posibles resultados de lanzar una moneda ¿es igual cuando lanzas dos monedas?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

Ahora

Vamos a realizar lanzamientos en la aplicación “lanzamiento de dos monedas”.

Realiza 50, 100, 150, 500, 1000 lanzamientos de las dos monedas.

4. A partir de lo que observas en el diagrama de barras, que podrías concluir sobre el espacio muestral al lanzar dos monedas

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

5. De acuerdo a lo observado ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras cuando lanzas dos monedas?

Respuesta: _____ Justifica tu respuesta:

6. ¿Crees que el resultado que obtengas al lanzar una moneda puede incidir en el resultado de la segunda moneda?

