



Diseño y análisis didáctico de una propuesta de formación de profesores de matemáticas
para la implementación de un curso preicfes comunitario

Maria Camila Castillo Arango

Universidad del Valle
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2025



Diseño y análisis didáctico de una propuesta de formación de profesores de matemáticas
para la implementación de un curso preicfes comunitario

Maria Camila Castillo Arango

Dr. Evelio Bedoya Moreno

Director Trabajo de Grado

Universidad del Valle
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemática

2025

Dedicatoria

Este trabajo representa el comienzo de un camino que deseo recorrer junto a mis estudiantes, con la esperanza de aportar un pequeño grano de arena en la construcción de una educación más justa y accesible.

Es, además, un llamado a los docentes de los Preicfes populares y comunitarios a seguir creciendo y formándonos para brindar una enseñanza comprometida y transformadora.

Tabla de Contenido

Introducción.....	7
Capítulo 1	9
El problema de investigación	9
1.1 Objetivos	11
1.2 Justificación del problema de investigación.....	12
1.3 Antecedentes	13
Capítulo 2	16
Referentes teórico - conceptual y curricular.....	16
2.1 Conocimiento Didáctico y Análisis Didáctico en la formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas.....	18
2.1.1 Análisis Curricular	19
2.1.2 Análisis de Proposición de Problemas y Resolución de Problemas	28
2.1.3 Análisis Didáctico Semiótico: Uso de representaciones múltiples y la visualización	35
2.1.4 Análisis Didáctico de Contenido	38
Capítulo 3	47
Metodología.....	47
3.1 Marco Metodológico	47
3.2 Diseño Metodológico	50
3.2.1 Contexto	53
Capítulo 4	56
Resultados	56
4.1 Selección y análisis de actividades (UDG) fundamentada por el modelo local.....	56
4.2 Análisis de resultados de la UDG en el marco de la recuperación de la experiencia para el fortalecimiento de la propuesta.....	76
Capítulo 5	90
Conclusiones	90
5.1. Conclusiones generales	90
5.2. Recomendaciones	93
Referencias.....	94

Índice de Figura

Figura 1. Problema matemático tomado de las pruebas Saber 11°	10
Figura 2. Diagrama del desarrollo del ML-CAD que fundamenta la formación y desarrollo profesional de un docente de matemáticas preicfes.	17
Figura 3. Caracterización de las pruebas saber 11	20
Figura 4. Las competencias evaluadas en las pruebas saber 11, surgimiento de los procesos generales del libro de los estándares.	22
Figura 5. Los contenidos evaluados en las pruebas saber 11, surgen de los conocimientos básicos del libro de los estándares.	24
Figura 6. Contextos evaluados en las pruebas saber 11, surgen de los contextos del libro de los estándares.	26
Figura 7. Proposición de problemas como heurística en la resolución de problemas.....	29
Figura 8. Registros de representación semiótica.....	36
Figura 9. La visualización y la proposición de problemas actúan como mediadores clave en la resolución de problemas dentro del marco de la FDPPM.	39
Figura 10. Figuras geométricas que requieren el uso de múltiples representaciones para resolver el problema matemático planteado.	41
Figura 11. Esquema metodológico de la investigación sistematizada con enfoque cualitativo	50
Figura 12. Pregunta 0 tipo Icfes.	57
Figura 13. Pregunta 1 tipo Icfes.	60
Figura 14. Pregunta 2 tipo Icfes.	65
Figura 15. Pregunta 3 tipo Icfes.	68
Figura 16. Pregunta 4 tipo Icfes.	71
Figura 17. Pregunta 5 tipo Icfes.	73
Figura 18. Pregunta 6 tipo Icfes.	74

Resumen

El Programa ***Preicfes Popular María Cano*** ha sido creado en el municipio de Candelaria, con el propósito de ayudar a estudiantes de bajos recursos económicos para presentar la Prueba Saber 11, lo cual es un requisito en Colombia para ingresar a las instituciones universitarias públicas y a algunas privadas. Adicionalmente, los estudiantes que obtienen relativamente buenos resultados pueden tener la opción de recibir apoyos económicos de algunas entidades públicas y/o privadas para realizar estudios universitarios. Sin embargo, históricamente a pesar de los esfuerzos, la mayoría de los estudiantes que han participado en este Programa no obtienen el puntaje requerido (especialmente en matemáticas) que les permita acceder a realizar estudios en la educación superior. Al respecto, se han hecho diferentes tipos de análisis y diagnósticos empíricos sobre posibles causas de esta problemática, incluyendo la desin-formación de los docentes encargados de realizar las actividades de formación de los estudiantes para presentar la prueba saber 11, así como la falta de articulación de los referentes curriculares, conceptuales y procedimentales que permean esta problemática. El propósito general de este trabajo de grado consiste en sistematizar la experiencia de la autora, que ha venido trabajando como profesora en el Programa ***Preicfes*** durante los tres años de funcionamiento del mismo. La Sistematización de Experiencias constituye una estrategia investigativa en la acción, que propone reflexionar sistemáticamente sobre las prácticas docentes con propósitos formativos de todos los y las participantes, en torno a las problemáticas identificadas, en relación especialmente con la formación docente y la articulación o alineación curricular. Se propone **rediseñar y sistematizar un modelo local de Análisis Didácticos** que fundamenta y permite sistematizar la práctica (experiencia) de la docente en el contexto curricular del ***Preicfes Popular María Cano***.

Palabras Claves: Formación docente, análisis didáctico, conocimiento didáctico, resolución de problemas, múltiples representaciones.

Abstract

The Preicfes Popular Program María Cano has been created in the municipality of Candelaria, with the purpose of helping low-income students to present the Saber 11 Test, this is a requirement in Colombia to enter public university institutions, as well as some private ones. In addition, students who achieve relatively good results may have the option of receiving financial support from some public and/or private entities to pursue university studies. However, historically despite efforts, most students who have participated in this programme do not achieve the required score (especially in mathematics) to be able to pursue higher education. In this context, different types of analysis and empirical diagnoses have been made on the possible causes of this problem, including the disqualification of teachers responsible for carrying out the training activities of students to present the Test, the disarticulation of curricular, conceptual and procedural references which frame or permeate this problem. The overall purpose of this thesis is to systematize the author's experience, having worked as a teacher in the Pre-Icfes Programme during its three years of operation. The systematization of experiences is a research strategy in action, which proposes to reflect systematically on teaching practices for training purposes of all participants, around the problems identified, In relation to teacher training and the articulation or alignment of curricula. More specifically, it is proposed to redesign and systematize a local model of knowledge and didactic analysis that bases the teaching practice (experience) in the curricular context of the Pre-Icfes Popular Program María Cano.

Keywords: Mathematics teacher training, didactic analysis, didactic knowledge, problem solving, multiple representations

Introducción

En el municipio de Candelaria - Valle del Cauca, se creó el Preicfes Popular María Cano como una iniciativa comunitaria dirigida a estudiantes de 11.º grado de escasos recursos, con el propósito de brindarles una preparación que les permita enfrentar con mayores posibilidades la Prueba Saber 11 y acceder a beneficios como becas e ingreso a la educación superior pública. Sin embargo, los análisis realizados muestran que son pocos los estudiantes que logran ingresar a la universidad, lo cual puede estar relacionado con limitaciones en la preparación académica y en la articulación entre referentes conceptuales, curriculares y procedimentales.

Ante este panorama, la autora plantea la necesidad de sistematizar su práctica docente apoyándose en referentes teóricos y metodológicos que permitan fortalecer la enseñanza de las matemáticas en este contexto. Una de las vías para ello es el modelo local de análisis didáctico, el cual promueve la reflexión sobre la práctica y favorece la construcción de conocimiento profesional docente mediante el análisis de contenido, curricular y didáctico. Este marco servirá de base para diseñar e implementar una unidad didáctica en el año 2025, centrada en el uso de figuras geométricas como apoyo visual en la resolución de problemas.

En el segundo se desarrollan los referentes conceptuales y curriculares que fundamentan el modelo local de análisis didáctico, haciendo énfasis en la visualización, el uso de diferentes registros de representación semiótica y la proposición de problemas como mediadores en la enseñanza y el aprendizaje. El tercer capítulo presenta la metodología, basada en la sistematización de experiencias desde un enfoque de investigación-acción participativa y estudio de casos, considerando la trayectoria de la autora como docente del Preicfes durante cuatro años.

En el cuarto capítulo se analizan siete actividades seleccionadas de materiales del Ministerio de Educación y de libros especializados, aplicando los criterios de análisis de contenido propuestos en los referentes teóricos. Se examina cómo las representaciones implícitas y explícitas en los problemas pueden generar dificultades, errores y obstáculos para los estudiantes,

así como estrategias para anticipar y atender dichas situaciones en el aula. Se presta especial atención a los problemas que demandan el uso de múltiples representaciones y geométricos (o gráficos), dado que constituyen un reto frecuente para los estudiantes en contextos de evaluación.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones, en las que se responden las preguntas problema orientadoras del trabajo. Se destacan los conocimientos y habilidades docentes que resultan fundamentales para el fortalecimiento de la práctica en programas comunitarios de preparación para el Icfes, así como recomendaciones para el diseño de futuras actividades tipo prueba Saber 11.

Capítulo 1

El problema de investigación

La Prueba Saber 11, antes conocida como ICFES (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación), evalúa las competencias de los estudiantes al finalizar el bachillerato. Sus resultados sirven para múltiples propósitos: orientar la mejora de los currículos educativos (MEN, 2015; Icfes, 2024), influir en los procesos de admisión universitaria (Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2024; Icfes, 2024) y otorgar becas a los estudiantes con los mejores puntajes (ICETEX, 2025).

Dado que obtener buenos resultados en las Pruebas Saber 11 ofrece oportunidades para el ingreso y sostenimiento, se han creado los Preicfes para mejorar el desempeño de los estudiantes. En respuesta a estas oportunidades, y para disminuir las desigualdades existentes en el acceso a las IES han sido creados los programas Pre-Icfes Populares (PIP), por parte de algunos movimientos y organizaciones sociales preocupadas por "la exclusión que el sistema educativo superior ejerce sobre el grueso de la población perteneciente, principalmente, a sectores populares de la sociedad" (Picón *et al.*, 2016, p. 156), con el propósito de brindar oportunidades a estudiantes de escasos recursos, y enfrentar la desigualdad (disminuir brechas) que suelen presentarse en diversas regiones de Colombia.

En Colombia, los jóvenes de escasos recursos son pocos los que pueden ingresar a las Instituciones de Educación Superior (IES). Según Mora (2019), sólo el 55% de los estudiantes de los estratos 1 y 2 consiguen ingresar a la Educación Superior (p. 23). Aunque esta cifra ha mejorado ligeramente, el Ministerio de Educación Superior (MEN, 2023) reporta que el 60% de personas de bajos recursos acceden actualmente a la IES. Además, solo el 19% de los hijos de madres con educación primaria lograron alcanzar el nivel de educación media (MEN, 2019). Por tanto, las características que determinan los niveles de rendimiento académico están

influenciadas por factores familiares, socioeconómicos... (Guaman-Gualan *et al.*, 2021).

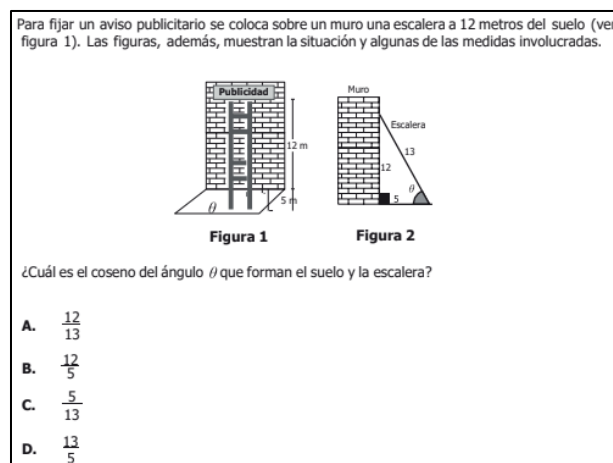
El Preicfes Popular María Cano se originó en el año 2022 en el municipio de Candelaria-Valle del Cauca, tiene como propósito formar a los estudiantes de escasos recursos para la presentación de las Pruebas Saber 11, con el fin de facilitar su ingreso a universidades públicas que requieren puntaje superior. Esta iniciativa surge como respuesta a la limitada oferta de educación superior en la región y a los altos índices de pobreza juvenil.

La docente de Matemáticas del Preicfes Popular María Cano, estudiante de Licenciatura en Matemáticas quien es la autora de este trabajo de grado, enfrenta el desafío de enseñar en un contexto para el cual no cuenta con una formación específica. Esta limitación podría afectar la eficacia de su enseñanza y el desempeño de sus estudiantes. Ante esta situación, resulta clave entender la formación docente como un proceso continuo y en constante transformación, que permite construir mejores prácticas a partir de la reflexión crítica (Díaz, 2006).

Durante los tres años de experiencia en el **Preicfes Popular María Cano**, la autora ha observado que los estudiantes enfrentan grandes dificultades para resolver problemas que implican interpretar enunciados y extraer información de figuras geométricas, imágenes, gráficos y diagramas, especialmente cuando es necesario transitar del enfoque geométrico al algebraico. Por ejemplo:

En la siguiente figura (Figura 1) se ilustran algunas de estas situaciones, tomadas de la Prueba Icfes de Matemáticas (Icfes, 2021).

Figura 1. Problema matemático tomado de las pruebas Saber 11°



Nota. El anterior problema matemático requiere utilizar múltiples representaciones y la visualización para solucionarlo. Fuente: Icfes, 2021.

De acuerdo con algunos autores como Gutiérrez (1991), Bishop (1989, citado por Gutiérrez), Duval (2017), entre otros, la comprensión de determinados conceptos geométricos, así como de algunos registros de representación (como el gráfico y geométrico), y la habilidad para la visualización de estos objetos y procesos son clave para la comprensión de otros conceptos y procesos matemáticos, así como para la comprensión de los enunciados y la resolución de problemas. Para estos autores, el proceso (cognitivo) de visualización se refiere a dos aspectos fundamentales:

- El procesamiento visual de la información: el cual consiste en convertir la información externa en imágenes mentales que ayuden a comprender el objeto o problema.
- La interpretación de la información figurativa: lo cual implica extraer información relevante de las imágenes mentales para solucionar el problema.

En este trabajo, se considera que fortalecer estos procesos podría contribuir en los estudiantes a una mejor comprensión de los enunciados, ejercicios y problemas propuestos en las cartillas de las pruebas ICFES y Preicfes, mejorando así sus capacidades o competencias para trabajar más eficazmente con múltiples representaciones y resolver los desafíos planteados en este tipo de preguntas, ejercicios y problemas.

A partir de las reflexiones anteriores y del análisis didáctico de las propuestas curriculares que enmarcan los procesos de formación en el Programa Preicfes María Cano, se formula la siguiente pregunta guía del proceso de investigación y sistematización:

¿Qué conocimientos y habilidades matemáticas y didácticas relacionadas con el uso de múltiples representaciones y la visualización (en situaciones de resolución de problemas), permiten fundamentar una propuesta didáctica para la formación y desarrollo profesional de una docente comprometida con la preparación de estudiantes del programa Preicfes Popular María Cano?

1.1 Objetivos

Objetivo general

Identificar y describir los contenidos matemáticos y las habilidades didácticas relacionadas con el uso de múltiples representaciones y la visualización en situaciones de resolución de problemas, que permiten desarrollar una propuesta didáctica por parte de una docente comprometida con la preparación de estudiantes del programa Preicfes María Cano.

Objetivos Específicos (O.E.)

O.E. 1 Identificar los contenidos matemáticos y elementos de un modelo de análisis que permitan fundamentar una propuesta didáctica basada en estrategias de resolución de problemas y el uso de múltiples representaciones.

O.E. 2 Seleccionar, implementar y analizar algunas actividades didácticas (UDG) basada en el uso de múltiples representaciones y de resolución de problemas, en el contexto de desarrollo de la experiencia de la docente.

O.E. 3 Realizar un análisis retrospectivo de los procesos anteriores con el propósito de establecer ajustes y mejoras de la propuesta de la UDG basada en el modelo local de conocimientos y análisis didácticos.

1.2 Justificación del problema de investigación

De acuerdo con Rico (1997) y Bedoya (2024), el currículo se concibe como un campo o escenario de prácticas, problemas y conocimientos en el que se organiza y desarrolla un proceso sistemático de formación de los docentes de matemáticas alrededor de las necesidades, intereses y posibilidades educativas de unos estudiantes. Una mirada al contexto (sistema) curricular y didáctico del aula de matemáticas del programa Preicfes María Cano, nos plantea considerar sistémicamente, además de los aspectos subjetivos referidos a los profesores y estudiantes, los aspectos objetivos relacionados con los contenidos curriculares (disciplinares y didácticos) que se requieren trabajar, y los medios (recursos didácticos de mediación) que faciliten desarrollar las actividades propuestas con propósitos de mejorar la eficacia de los resultados esperados en el desarrollo del programa. Para ello, naturalmente se requieren ciertos conocimientos matemáticos y didácticos de las matemáticas, que faciliten a los profesores enfrentar los desafíos de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, para el desarrollo de una propuesta didáctica que favorezca la formación y desarrollo profesional de la docente del **Preicfes**, se elaborará un modelo local de conocimientos didácticos de las matemáticas, bases para realizar un análisis didáctico en torno a los contenidos matemáticos, curriculares y didácticos, conceptuales (teóricos) y procedimentales (prácticos), que se requieren movilizar en el contexto del aula del preicfes. De manera general, este modelo local de conocimientos y análisis didácticos (ML-CAD), que consideramos puede permitir organizar, comprender y fundamentar los elementos necesarios en la intervención del aula y el desarrollo de actividades (unidades) didácticas, comprende una selección situada de conocimientos y actividades de análisis-síntesis, relacionados con los aspectos histórico-epistemológicos, fenomenológicos, semióticos, cognitivos, curriculares e instruccionales (didácticos) referidos a los contenidos matemáticos escolares en cuestión.

De una manera más concreta y teniendo en cuenta algunas prácticas, reflexiones y resultados en el contexto del Preicfes que nos ocupa, para el diseño, selección de contenidos y elaboración del ML-CAD, nos centraremos fundamentalmente en tres tipos de marcos de referencia desde la Educación Matemática (DM y FDPPM), la resolución de problemas, el uso de múltiples registros de representación y la visualización en educación matemática, como competencias didácticas y recursos “organizadores” curriculares y didácticos de las prácticas y formación de los docentes de matemáticas (Rico *et al.*, 2013; Orozco, 2024; Bedoya, 2024).

Con estos criterios, a continuación, se procede a realizar una selección y revisión de algunos antecedentes del problema de investigación y de sistematización de la experiencia docente.

1.3 Antecedentes

El análisis preliminar de los requerimientos y propósitos del modelo local en el contexto del programa preicfes que nos ocupa e interesa, permite determinar criterios de selección y revisión de algunos antecedentes relacionados con los objetivos que guían el desarrollo y Sistematización de esta Experiencia docente.

En un primer momento, se mencionan algunas investigaciones previas que han explorado estrategias para mejorar el desempeño de los estudiantes en las Pruebas Saber 11, con enfoque en

el área de matemáticas. También se mencionan trabajos en los que se desarrolla un modelo local de análisis didáctico como marco teórico-metodológico de propuestas de formación docente.

En un trabajo titulado *Diseño e implementación de un ambiente virtual de aprendizaje para el entrenamiento de estudiantes en pruebas ICFES Saber 11 de matemáticas*, Estrada y Guerrero (2022) propone actividades en una plataforma virtual orientadas a preparar estudiantes de educación media de dos instituciones educativas en Nariño para presentar las pruebas Icfes. Teniendo en cuenta los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas presentadas durante los últimos cinco años, desarrolla una propuesta con el objetivo de “fortalecer habilidades matemáticas y de resolución de problemas típicos” propuestos en las pruebas.

Por otro lado, en la tesis de maestría *Las pruebas saber 11° y la enseñanza de las matemáticas en una escuela de secundaria de Bucaramanga-Colombia: un estudio de caso* se analizó de qué manera la prueba saber se articula con el proceso formativo de los maestros de la institución. Para ello, se analizó la normatividad de las pruebas saber 11y las prácticas docentes en el aula (Pérez, 2018).

Además, en la tesis de maestría *El conocimiento didáctico y la visualización en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la pendiente de la recta pendiente de la recta tangente a una cuerda* se sistematiza la experiencia de un docente en un curso de matemáticas impartido en la Universidad del Valle en Cali. Se propone la propuesta de la formación docente en la enseñanza del concepto de la pendiente mediante el desarrollo de un modelo local de análisis didáctico (Orozco, 2024).

En un segundo momento, los estudios revisados resaltan que, aunque las imágenes son clave para la resolución de problemas, la visualización juega un papel importante al escoger las heurísticas para encontrar soluciones.

En el artículo, *How can procedural flowcharts support the development of mathematics problem-solving skills?* investigan los desafíos que enfrentan los docentes al utilizar diagramas de flujo procedimentales en matemáticas para explicar los procesos de resolución de problemas. El estudio analiza cómo estas representaciones contribuyen a que los estudiantes planifiquen, integren procedimientos y comuniquen soluciones de manera lógica en la asignatura de Cálculo en escuelas secundarias de Queensland (Chinofunga *et al.*, 2024). Los resultados muestran que

las representaciones visuales apoyan los procesos cognitivos y que la interconexión entre la representación visual y la representación mental influye en la toma de decisiones, aspecto fundamental en la resolución de problemas (Chinofunga *et al.*, 2024).

Por otro lado, En el artículo *Analysis of problem-solving strategies flor the development of geometric imagination using eye-trackin*, se evalúa e evalúa la visualización de los estudiantes mediante técnicas de seguimiento ocular (Chvátal *et al.*, 2024). El objetivo principal es analizar la relación entre la estrategia elegida y la tasa de éxito en la resolución de un problema geométrico sin recurrir a cálculos (Chvátal *et al.*, 2024). Los autores destacan que las imágenes, gráficos y diagramas son fundamentales para el desarrollo de la imaginación e intuición, indispensables en la resolución de problemas (Chvátal *et al.*, 2024). Sin embargo, también evidencian que los estudiantes presentan dificultades al aplicar diferentes heurísticas, ya que deben interactuar con la imagen y con sus propias representaciones mentales para decidir cómo proceder. De igual manera, cuando una figura geométrica se presenta sin ninguna descripción, los estudiantes encuentran mayores obstáculos para avanzar en la resolución, lo que se interpreta como una limitación en su capacidad de imaginación (Chvátal *et al.*, 2024).

Para finalizar, se puede evidenciar la importancia de desarrollar propuestas de formación docente innovadora por medio del ML-CAD, que permita mejorar el desempeño de los estudiantes en las pruebas saber 11, particularmente en el área de matemáticas del uso de múltiples representaciones, visualización y resolución de problemas.

Capítulo 2

Referentes teórico - conceptual y curricular

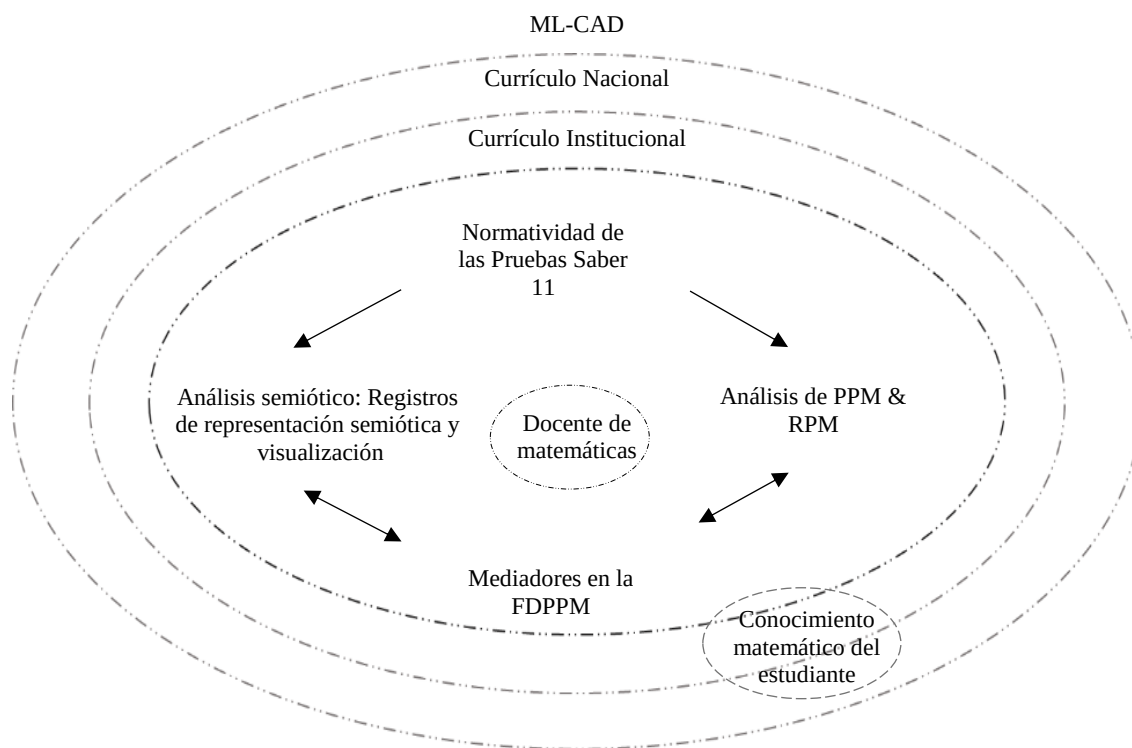
De acuerdo con autores y desarrollos del PNA (grupo internacional de investigación de didáctica de las matemáticas) el conocimiento y el análisis didácticos (CAD) de las matemáticas constituyen bases fundamentales de la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemática (Rico, Lupiáñez & Molina, 2013; Bedoya, 2025); para estos autores, desde una perspectiva sociocultural, esta formación y por tanto sus conocimientos base tienen o deben tener un carácter local, esto es, situados tanto el espacio y el tiempo, como curricularmente. Es por esta razón que en este trabajo, cuyo objeto central de estudio es la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas (FDPPM), se propone como primer objetivo específico (O.E.1) el diseño o desarrollo de un modelo local de conocimientos y de análisis didácticos (ML-CAD), el cual constituye por una parte el conocimiento base de la FDPPM, y por otra parte el fundamento (referente) teórico - conceptual y contextual (curricular) de este proyecto de formación, de investigación y de innovación curricular y didáctica. De acuerdo con esto, se debe entender el ML-CAD que se ha elaborado y se va a presentar en este capítulo como referente conceptual, constituye a la vez uno de los productos o resultados principales de este trabajo de investigación.

En el siguiente diagrama (Figura 2) se mencionan los principales referentes teóricos que orientan y fundamentan el ML-CAD, como propuesta general para la formación de los profesores de matemáticas del Preicfes Popular María Cano.

En la figura (Figura 2) se presenta el Modelo Local de Conocimiento y Análisis Didáctico (ML-CAD), el cual integra componentes teóricos, conceptuales y prácticos del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) y del Análisis Didáctico de las Matemáticas (ADM), en relación con el conocimiento didáctico curricular situado en el contexto del Preicfes. Asimismo, el modelo incorpora referentes teóricos sobre la formulación y resolución de problemas, así como

sobre los procesos de coordinación de los registros de representación semiótica y la visualización; Los cuales son mediadores en la FDPPM en las Pruebas Saber 11. En la implementación de este modelo intervienen tanto los conocimientos de la docente como la participación de los estudiantes, lo que permitirá realizar un análisis de los resultados obtenidos. El objetivo es que, al presentar las pruebas Saber 11, una parte de los estudiantes logre alcanzar un puntaje favorable que contribuya a disminuir las brechas de acceso a la educación superior pública. Si bien este modelo constituye únicamente un primer acercamiento, se configura como un paso inicial en la búsqueda de dicho propósito. El diagrama, se explicará mas adelante.

Figura 2. Diagrama del desarrollo del ML-CAD que fundamenta la formación y desarrollo profesional de un docente de matemáticas preicfes.



Fuente: Elaboración propia.

Los principales referentes teórico-conceptuales en que se basa este trabajo son en términos generales, la proposición y la resolución de problemas (Santos Trigo, 2024; Polya, 1965, citado por Santos-Trigo, 2020), aspectos teóricos sobre la coordinación de diferentes registros de representación y la visualización (Duval, 2017), propuestas sobre conocimiento y análisis didáctico (Bedoya, 2025; Cotrado *et al.*, 2024; Rico, 2004). En particular, se prioriza el análisis

de problemas (tipo Icfes) con contenido geométrico y que involucren diferentes registros de representación gráfica, mediante tablas e imágenes, que para su comprensión requiera la coordinación de múltiples representaciones semióticas y visualización. Estos problemas son seleccionados de las propias propuestas del Icfes y de las cartillas curriculares de matemáticas del Preicfes María Cano. Con este marco curricular (contextual) y teórico, se organiza o estructura un modelo local de conocimiento y de análisis didáctico (ML-CAD, Bedoya, 2025) en torno al contenido matemático explícito e implícito en los problemas seleccionados. En la siguiente figura (Figura 2) se presenta esquemáticamente la composición de los diferentes contenidos que estructuran el ML-CAD de esta propuesta de formación de profesores de matemáticas preicfes.

2.1 Conocimiento Didáctico y Análisis Didáctico en la formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas

Algunos autores en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (Rico *et al.*, 2013; Bedoya, 2025) consideran el conocimiento y el análisis didácticos, como los fundamentos teóricos y prácticos que sostienen la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Para estos autores, desde un punto de vista sociocultural, estos conocimientos son de carácter situado (local) en relación con los distintos contenidos curriculares, matemáticos y didácticos que se supone requiere un profesor de matemáticas para su formación y el ejercicio de la profesión. ...

De acuerdo con algunos autores del campo de la formación docente (Lagla-Chicaiza, Martínez-Guerrero, González-Albarracín & Cerna-Sandoval, 2023; Gutiérrez *et al.*, 2019), la formación docente puede limitar el impacto de sus enseñanzas en el rendimiento de los estudiantes. Para estos autores, la formación docente, entendida como un proceso continuo, es un factor clave para enfrentar estos desafíos. Las prácticas no pueden concebirse como una actividad estática, sino como un proceso en constante transformación, en el que el docente se construye a partir de la reflexión sobre su propia práctica. Para Jara (2018; Citado por Bedoya, 2024), una estrategia significativa para realizar estos procesos de reflexión sistemática, formación y desarrollo profesional docente integra aspectos metodológicos de la IAP (Investigación Acción Participativa), la Sistematización de Experiencias Docentes y el Análisis

Didáctico, estrategias que integran procesos y conocimientos teóricos y prácticos relacionados con el desarrollo de la formación profesional docente, la investigación educativa y la innovación curricular, tal como lo propones Rico *et al* (2013).

Siguiendo a Bedoya (2024), a través de modelos locales de conocimiento didáctico y de análisis didáctico, los docentes desarrollan y promueven su formación, el aprendizaje y fortalecen competencias profesionales propias y de sus estudiantes. Por **Competencia**, estamos entendiendo, la capacidad de aplicar, en diferentes contextos, un conjunto de *conocimientos* (curriculares, didácticos y matemáticos), *habilidades* (estrategias de acción cognitivas y metacognitivas, para proponer y resolver problemas) y actitudes que las personas desarrollan en ambientes, en un primer momento, cercanos a la vida escolar o familiar (Ramírez *et al.*, 2006; Castellano *et al.*, 2013; Benítez *et al.*, 2023).

Los modelos locales de conocimientos y análisis didácticos, permite organizar y adaptar un currículo situado, utilizando los conocimientos didácticos sobre los contenidos trabajados. La sistematización de estos procesos se concreta en el desarrollo de una unidad didáctica guía (UDG) vinculada a un contenido matemático escolar específico (CME), que facilita la recuperación de la experiencia para fomentar la reflexión y mejorar la práctica de la docente en formación (Bedoya, 2024, 2025).

Asimismo, no son suficientes las acciones individuales del docente; resulta esencial la colaboración articulada de diversos actores que trabajen conjuntamente hacia un objetivo común.

En conclusión, se resalta la necesidad de una formación docente continua donde la reflexión sobre la práctica sea clave para mejorar la enseñanza. La sistematización de experiencias y el análisis didáctico fortalecen este proceso, permitiendo desarrollar propuestas pedagógicas relevantes, como la Unidad Didáctica Guía. Asumir el aula como un espacio complejo exige una mirada crítica e integral del acto educativo, así como la colaboración entre actores comprometidos con una educación más justa y transformadora.

2.1.1 Análisis Curricular

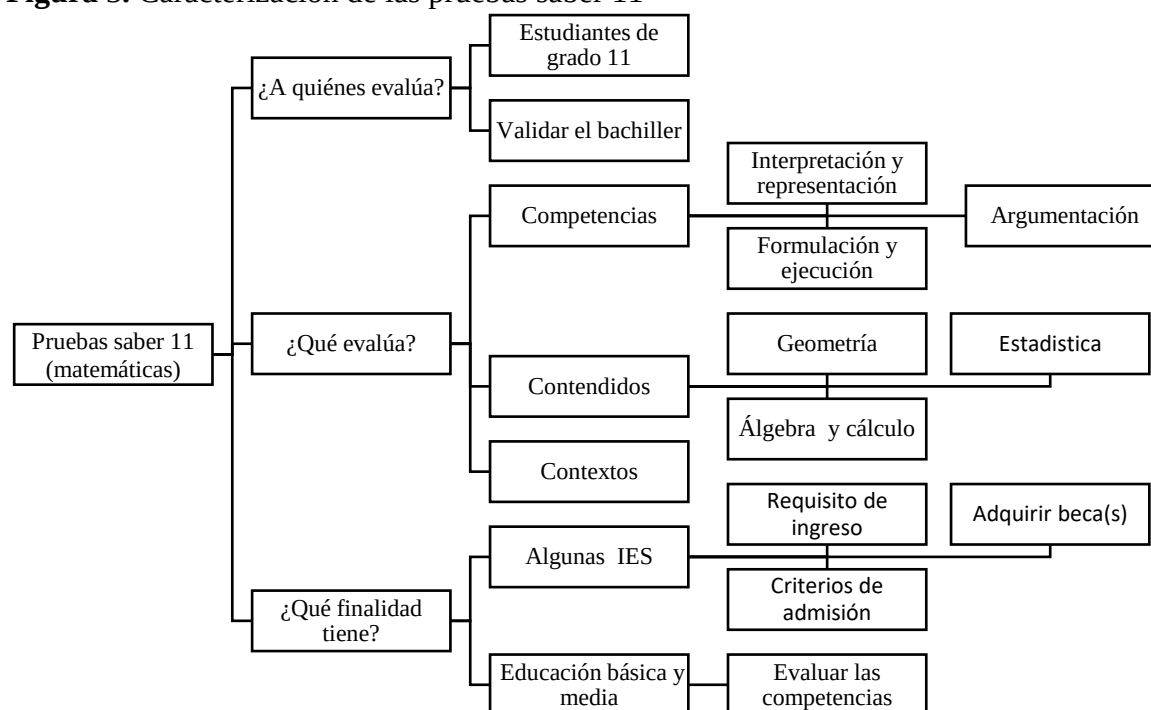
En Colombia, los estudiantes que finalizan el grado 11 deben presentar las Pruebas Saber 11, requisito indispensable para el ingreso a la educación superior. Estas pruebas, basadas en los

Estándares Básicos de Competencias, permiten evaluar las habilidades adquiridas durante la formación académica, así como identificar logros y debilidades que retroalimentan el currículo y las prácticas pedagógicas (MEN, 2015; Icfes, 2023). Desde su implementación en 1968, han servido como criterio de admisión en algunas universidades y, actualmente, ofrecen información clave sobre las competencias de los aspirantes. Además, permiten acceder a becas a quienes obtienen buenos resultados (ICETEX, 2025; Grupo de Investigación sobre Pruebas Masivas, 2008).

• **Contexto nacional (macro curricular):**

En el diagrama (Figura 3) se sintetiza la normatividad relacionada con las Pruebas Saber 11 (o prueba Icfes) en el área de matemáticas, destacando a quiénes están dirigidas, qué aspectos evalúan y con qué propósito fueron implementadas. El diagrama, se explicará más adelante.

Figura 3. Caracterización de las pruebas saber 11



Fuente: Elaboración propia

En Colombia, los estudiantes que finalizan el grado 11 son evaluados mediante las Pruebas Saber 11, un requisito esencial para ingresar a las IES. Estas pruebas fueron implementadas con el objetivo de evaluar las competencias establecidas en el documento de Estándares Básicos de

Competencias, el cual también define las habilidades que los estudiantes de último grado de secundaria deben desarrollar a lo largo de su formación académica (MEN, 2015; Icfes, 2023). Anteriormente conocidas como ICFES (Instituto Colombiano para la Educación Superior) permiten identificar los logros, habilidades y debilidades de los estudiantes. Esta información se utiliza para retroalimentar aspectos institucionales, lo que facilita ajustes en el currículo y en las estrategias pedagógicas, contribuyendo así a mejorar el rendimiento estudiantil (MEN, 2015; ICFES, 2023; ICFES, 2025). Por último, las Pruebas Saber 11 son muy parecidas a las pruebas de validación del bachillerato (ICFES, 2025).

Por otra parte, las Pruebas Saber 11 se implementó en 1968 como criterio de admisión en algunas universidades, en respuesta a la necesidad de los aspirantes de trasladarse para inscribirse y presentar exámenes diseñados por las propias universidades (Grupo de Investigación sobre Pruebas Masivas en Colombia, 2008; Restrepo, 1998). Estas pruebas brindan a las universidades información clave sobre las competencias de los aspirantes y de aquellos que son admitidos en los programas de educación superior (MEN, 2015; ICFES, 2023; ICFES, 2025). Finalmente, estas pruebas permiten a los estudiantes destacados acceder a becas, fomentando el reconocimiento y apoyo a su desempeño académico (ICFES, 2012).

Por último, las Pruebas Saber 11 se llevan a cabo en un único día, dividido en dos sesiones: una en la mañana y otra en la tarde. En el cuadernillo estándar, los estudiantes deben responder 131 preguntas en la primera sesión y 147 en la segunda, con un tiempo límite de 4 horas y 30 minutos por sesión (MEN, 2023; ICFES, 2025). De estas, 50 preguntas corresponden a matemáticas, repartidas entre ambas sesiones, y el tiempo asignado para esta área es de 1 hora y 37 minutos (MEN, 2023; ICFES, 2025). Por otro lado, en el cuadernillo con ajustes razonables para población con discapacidad cognitiva o visual, el número de preguntas de matemáticas se reduce a 38 en total (MEN, 2023; ICFES, 2025). Además, los estudiantes con discapacidad visual reciben un kit de apoyo que incluye materiales como ábaco, pizarra Braille, regla, compás y escuadra, entre otros, para facilitar su desarrollo en la prueba.

Dado a que los jóvenes deben de responder a un gran número de preguntas en un solo día, y tener conocimientos previos, es fundamental proponer una propuesta de formación docente que permita a los maestros de matemáticas desarrollar estrategias que ayuden a los estudiantes a

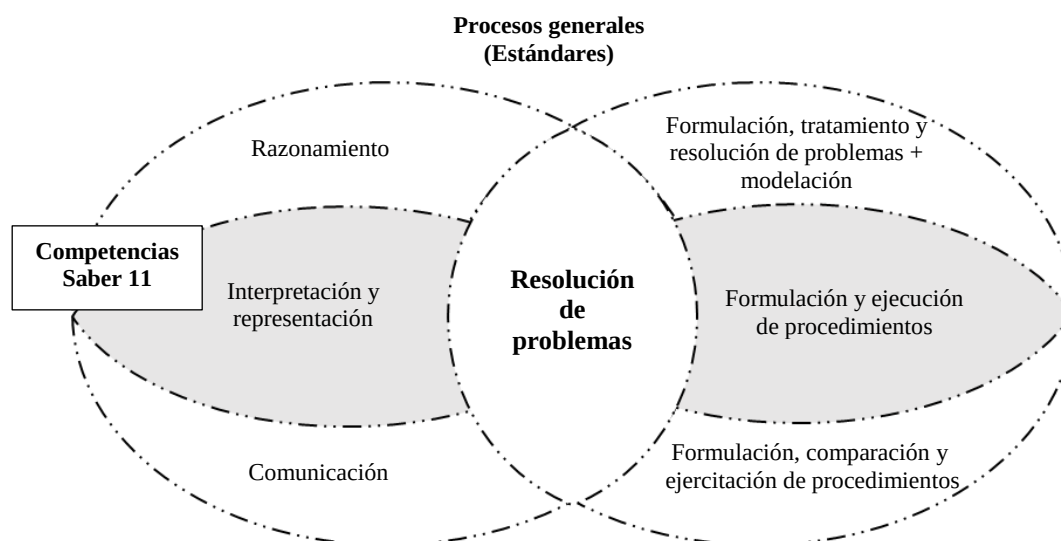
agilizar tiempo de respuesta y mejorar su desempeño en estas pruebas.

I. Surgimiento de las competencias evaluadas en las Pruebas Saber 11

En el presente diagrama (Figura 4) se muestra cómo la intersección de los procesos generales establecidos en los Estándares Básicos de Matemáticas se relaciona con las competencias evaluadas en las Pruebas Saber 11. En particular, los procesos de “comunicación” y “razonamiento” se vinculan con la competencia de *interpretación y representación*. Por otro lado, la convergencia entre los procesos de “formulación, tratamiento y resolución de problemas”; “modelación”; y “formulación, comparación y ejercitación de procedimientos”, dan lugar a la competencia de *formulación y ejecución de procedimientos*.

La resolución de problemas es una macro competencia que surge de las competencias de “interpretación y representación” y la “formulación y ejecución de procedimientos”. La primera competencia se enfoca principalmente en la fase inicial propuesta por Polya, que implica comprender el problema e identificar la información clave. En cambio, la segunda competencia se centra en la aplicación de diversas estrategias heurísticas para resolverlos.

Figura 4. Las competencias evaluadas en las pruebas saber 11, surgimiento de los procesos generales del libro de los estándares.



Fuente: Elaboración propia.

En el presente diagrama (figura 4) se puede identificar el proceso general de “razonamiento” promueve la formulación, comprobación y evaluación de conjeturas, así como la interpretación

de relaciones matemáticas, con el fin de validar o refutar conclusiones; Esta competencia resulta especialmente útil en el análisis de gráficas, ya que permite identificar patrones, hacer inferencias y justificar resultados a partir de la información visual presentada (MEN, 2006). Así como, el proceso general de “comunicación” reconoce que, aunque las matemáticas no constituyen un lenguaje natural, pueden expresarse y compartirse a través de múltiples representaciones: símbolos, gráficas, expresiones verbales, entre otros; Comunicar en matemáticas implica transmitir conceptos, procedimientos y razonamientos; para intercambiar ideas, validar resultados y construir conocimiento colectivo (MEN, 2006). Los anteriores procesos generales, dan cuenta de la competencia *Interpretación y representación*, la cual consiste en comprender, organizar y traducir la información matemática presente en diferentes formas de representación semiótica, reconociendo las relaciones entre ellas y realizando conversiones adecuadas según el contexto del problema.

Por otro lado, los procesos generales de “formulación, tratamiento y resolución de problemas” promueven la exploración de diferentes estrategias, verificación de resultados y reflexión sobre los procesos utilizados, lo que a su vez facilita la formulación de nuevos problemas y enfoques. (2006). Así como, la “modelación” que consiste en resolver problemas matemáticos en contextos reales permitiendo la exploración de soluciones prácticas. Por otro lado, el proceso general “formulación, comparación y ejercitación de procedimientos” es diferente a los anteriores, debido a que se sale de la exploración y se centra más en resolver problemas aplicando procedimientos correctos y prácticos (repetitivos). Mas, sin embargo, a partir de los anteriores procesos surgen la competencia de las pruebas saber 11 *formulación y ejecución de procedimientos* (Icfes2025; Icfes, 2023); que consiste en aplicar diversos métodos para resolver problemas. (2023), lo que abarca las etapas de diseño, ejecución y solución (Icfes, 2023). En este sentido, también se incluyen las fases de Polya en la resolución de problemas.

De la anterior, se puede inferir que la competencia “formulación, comparación y ejercitación de procedimientos” (del libro de los estándares) contradice las competencias de “modelación” y “formulación, tratamiento y resolución de problemas”. Esto se debe a que “formulación, comparación y ejercitación de procedimientos” se centra en la memorización de procedimientos, lo que limita la exploración activa y la resolución creativa de problemas que promueven las otras dos competencias.

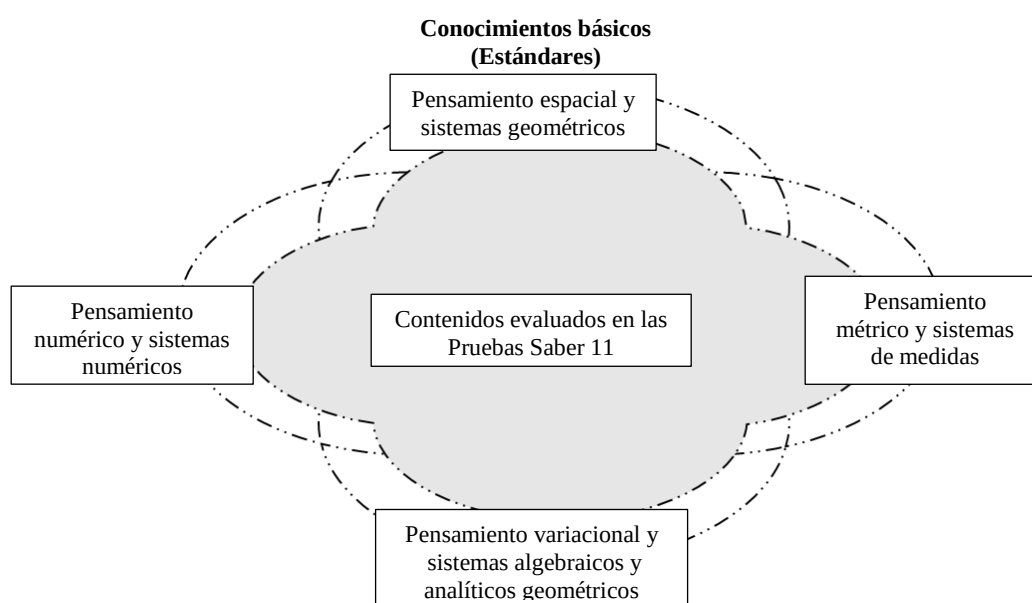
A partir de estos procesos, surge la competencia evaluada en las Pruebas Saber 11:

Interpretación y representación se centra en analizar la información matemática transformarla entre diversas representaciones semióticas. Esta competencia permite al estudiante comprender el problema, identificar los datos relevantes y establecer relaciones entre ellos. Por tanto, se asocia principalmente con la fase inicial de la resolución de problemas de la comprensión. Además, la competencia de formulación y ejecución de procedimientos (Icfes, 2023) implica aplicar estrategias y métodos para resolver un problema matemático. Esta competencia abarca tres momentos clave: diseñar un plan de solución, ejecutar los procedimientos adecuados y validar los resultados obtenidos. Están directamente relacionada con las etapas centrales y finales del modelo de resolución de problemas propuesto por Polya.

II. Surgimiento de los contenidos evaluados en las Pruebas Saber 11.

Los conocimientos evaluados incluyen álgebra y cálculo, geometría y estadística, los cuales se extraen de los cinco pensamientos: numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio, también descritos en el libro de los estándares (Icfes, 2025). A continuación, se presenta en el diagrama (Figura 5) en donde se encuentran los contenidos matemáticos geometría, álgebra y cálculo consecuencia de los conocimientos básicos de los estándares.

Figura 5. Los contenidos evaluados en las pruebas saber 11, surgen de los conocimientos básicos del libro de los estándares.



Fuente: Elaboración propia.

Nota: Los contenidos evaluados en las pruebas Saber 11 se derivan de los enfoques y sistemas conceptuales establecidos en el libro de estándares.

Los conocimientos básicos evaluados en las pruebas Saber 11 corresponden a saberes conceptuales y procedimentales que se desarrollan a lo largo del proceso educativo, en función de los diferentes tipos de pensamiento matemático y sus respectivos sistemas. Según el propósito del problema matemático, estos pueden centrarse en un solo tipo de conocimiento o en varios de manera integrada (MEN, 2006).

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos se enfocan en la comprensión del espacio a través de herramientas geométricas. Este tipo de pensamiento es esencial para el desarrollo del pensamiento científico, y resulta útil en la resolución de problemas relacionados con la ubicación, la orientación y otras situaciones espaciales (MEN, 2006). Por otro lado, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos se orientan a modelar problemas mediante el uso del álgebra y otras herramientas matemáticas. Este pensamiento permite analizar variaciones y cambios en diferentes contextos. En la educación básica, se trabaja a través de funciones, cálculo numérico y álgebra; en la educación media, se profundiza con el cálculo diferencial e integral. Este proceso requiere la articulación con otros tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico y aleatorio), lo cual lo convierte en un aprendizaje complejo pero esencial (MEN, 2006). Por tanto, los contenidos evaluados en las pruebas saber 11 son:

Geometría: Los contenidos matemáticos en contextos reales incluyen el estudio de sólidos y figuras geométricas, congruencia y semejanza, teoremas de Pitágoras y Tales, coordenadas polares y tridimensionales, y transformaciones en el plano. Por otro lado, los contenidos en contextos meramente matemáticos son: triángulos, círculos, paralelogramos, esferas, paralelepípedos rectos, cilindros y sus medidas, paralelismo y ortogonalidad entre rectas, desigualdad triangular y sistemas de coordenadas cartesianas. (Icfes, 2023).

Álgebra y Cálculo: Los contenidos en contextos reales incluyen fracciones, razones, números decimales o porcentajes, propiedades básicas de las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, y potenciación, incluida la notación científica), y relaciones lineales y afines, como tasas de interés, tipos de cambio, velocidad y aceleración. En cuanto el contenido

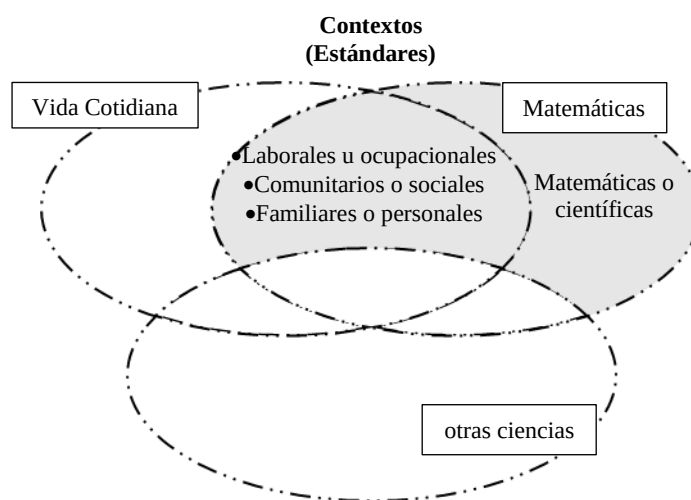
meramente matemático es: expresiones algebraicas, sus propiedades y operaciones, la representación gráfica y algebraica de funciones (rationales, trigonométricas, polinomiales, exponenciales y logarítmicas), y sus propiedades básicas, como periodicidad, dominios, rangos y crecimiento, además de las sucesiones y sus límites. (Icfes, 2023).

El contenido geométrico, algebraico y de cálculo se articula de los pensamientos y sistemas matemáticos; ya sea el espacial, que consiste en comprender y representar el espacio mediante el uso de sistemas geométricos o el variacional, que se enfoca en encontrar soluciones a problemas relacionados con la variación en diversos contextos, desarrollándose a través del uso de sistemas algebraicos y analíticos.

III. Surgimiento de los contextos de las pruebas saber 11.

Los contextos en los que se presentan las preguntas matemáticas en las Pruebas Saber 11 subyacen del libro de los estándares (MEN, 2006; MEN, 2023), veamos la siguiente tabla (Tabla 4).

Figura 6. Contextos evaluados en las pruebas saber 11, surgen de los contextos del libro de los estándares.



Fuente: Elaboración propia

Los contextos evaluados en las pruebas Saber 11 se basan en lo establecido en el libro de los Estándares Básicos de Competencias, donde se identifican varios tipos de contextos, incluyendo los de la vida cotidiana (MEN, 2006). Estos abarcan situaciones familiares o personales, laborales u ocupacionales, así como problemáticas sociales o comunitarias relacionadas con la

política, la economía, la convivencia y el medio ambiente (Icfes, 2025). En general, los contextos no exigen conocimientos especializados, ya que las preguntas suelen presentar información suficiente para comprender la situación planteada.

Además, se encuentra el contexto matemático o científico (Icfes, 2025), centrado específicamente en situaciones propias de las matemáticas (MEN, 2006). Estos contextos también están definidos en el libro de los estándares y hacen parte del enfoque netamente disciplinar.

•Contexto institucional (meso curricular) y del aula (micro curricular):

El proyecto se desarrolla en el Preicfes Popular María Cano, que tiene aproximadamente 40 estudiantes. Las clases de cada módulo se imparten durante 4 o 5 sábados, con sesiones intensivas de 4 horas cada una. Este tiempo es limitado, por tanto, exige una planificación estratégica para abordar los contenidos.

En el aula se centra en fortalecer tres competencias matemáticas clave establecidas por el MEN (2023): *interpretación y representación; formulación y ejecución; y argumentación*. Sin embargo, dada la restricción de tiempo, se ha priorizado el desarrollo de las dos primeras competencias en el presente trabajo. Estas competencias se trabajan en diferentes sistemas de representación, que exige la visualización para resolverlos como: gráficas, tablas y diagramas. Se aborda aplicando las fases de Polya, con énfasis en la identificación de información relevante y el uso de heurísticas como la proposición de problemas por parte del maestro para que los estudiantes resuelvan los problemas.

Debido a la amplia variedad de temas evaluados en las Pruebas Saber 11°, se han seleccionado problemáticas que permitan integrar diferentes procesos matemáticos. Por ejemplo, se trabajan situaciones de geometría que involucran simultáneamente pensamiento numérico (cálculo de medidas) y variacional (relaciones entre variables). Este enfoque interdisciplinar busca optimizar el tiempo disponible, permitiendo abordar múltiples competencias y contenidos a través de un mismo problema.

El desarrollo de las clases en el programa Preicfes se estructura mediante una metodología organizada que permite aprovechar el tiempo disponible. Cada sesión inicia con actividades de

recordar conocimientos previos, donde los estudiantes recuperan conceptos fundamentales a través de ejercicios prácticos. Este enfoque facilita la conexión entre los saberes adquiridos y los nuevos contenidos por aprender.

La segunda fase de la sesión se centra en el trabajo con material educativo oficial, proporcionado tanto por el Ministerio de Educación Nacional como por Los Tres Editores. Durante este proceso, la docente realiza un análisis comparativo de los contenidos, seleccionando los ejercicios más pertinentes. Además, los estudiantes resuelven los problemas, comparten y discuten sus argumentos y la maestra identifica los errores y habilidades de los estudiantes.

Como parte del proceso de evaluación, Los Tres Editores proporcionan dos pruebas diagnósticas que permiten establecer el nivel de preparación de los estudiantes al ingresar al programa. Estas herramientas de evaluación cumplen una función fundamental en la identificación de fortalezas y áreas de mejora, facilitando la adecuación de las estrategias pedagógicas a las necesidades específicas del grupo.

2.1.2 Análisis de Proposición de Problemas y Resolución de Problemas

En el Preicfes, la docente de matemáticas suele formular preguntas mientras trabaja con problemas tipo icfes, lo que permite a los estudiantes identificar la información relevante presente en cada pregunta. A través de este proceso, la resolución de problemas se convierte en una guía que orienta al estudiante hacia la respuesta, sin que necesariamente perciba de forma explícita la teoría subyacente. En este contexto, el presente análisis sobre las teorías de la proposición de problemas y resolución de problemas matemáticos tiene como propósito fundamentar la propuesta del ML-CAD:

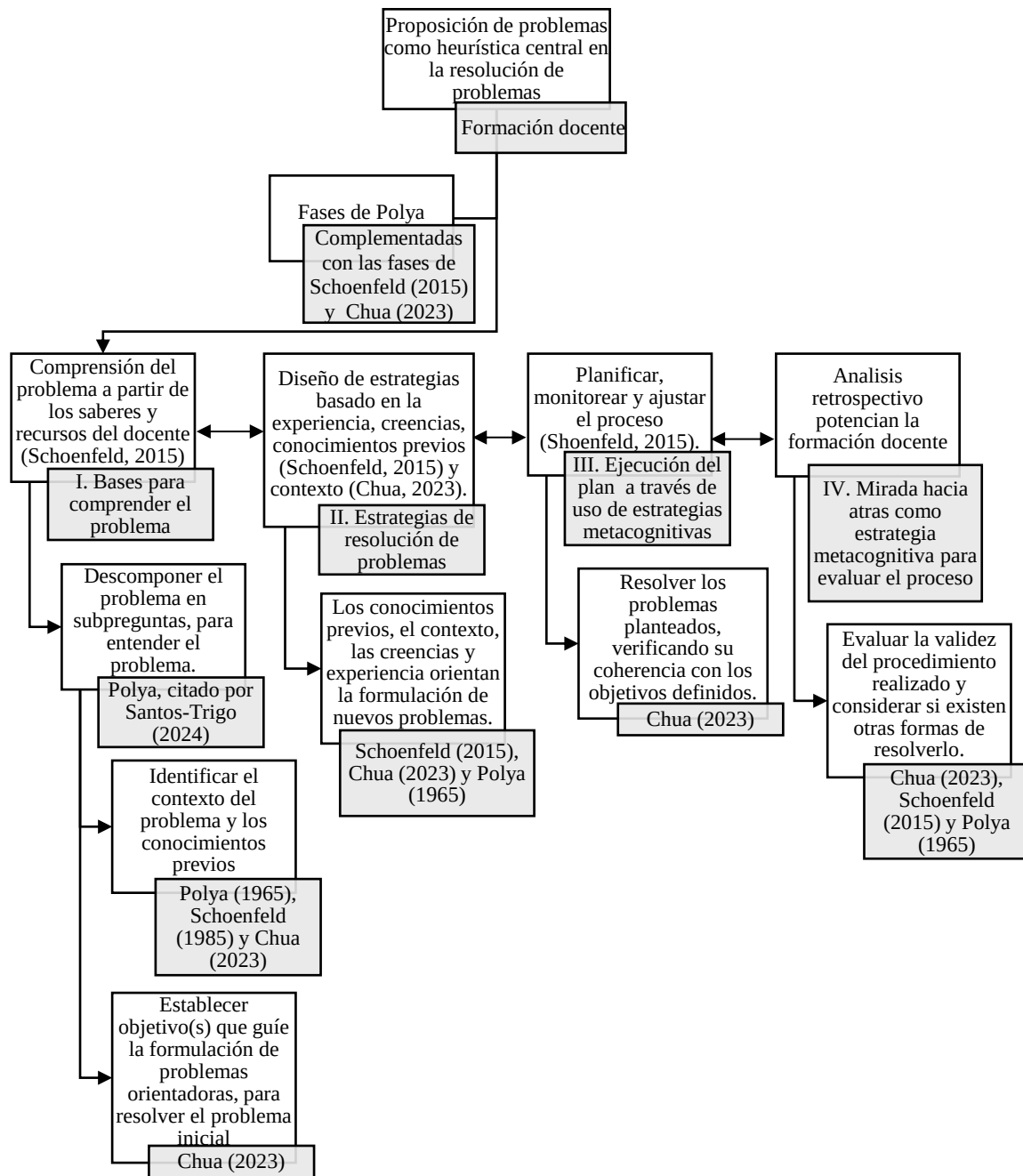
Esta sección aborda la proposición de problemas como una heurística en la resolución, en línea con Polya (1973; citado por Santos-Trigo, 2024), quien sostiene que un problema puede descomponerse para facilitar su comprensión y solución. Santos-Trigo (2024) complementa esta idea al resaltar la importancia de que el docente guíe al estudiante mediante la formulación de nuevos problemas relacionados con el problema inicial. Asimismo, Silver (1994; citado por Baumanns y Rott, 2022) señala que la formulación de nuevos problemas ocurre con frecuencia

antes, durante o después de un proceso de RPM. Por último, Algunos investigadores consideran fundamental que los docentes, incluso cuando llevan sus propios problemas matemáticos para trabajar en clase, reformulen dichos problemas (Cai y Hwang, 2021). Esta reformulación es necesaria para comprender el pensamiento matemático de los estudiantes (Cai y Hwang, 2021), ya que contribuye a potenciar tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas.

Por consiguiente, en el siguiente diagrama (Figura 7) se presenta una estructura de la proposición de problemas como heurística orientadora para el docente en formación en el proceso de resolución de problemas. Esta se fundamenta en las fases propuestas por Polya (1965; Citado por Santos-Trigo, 2020) y Schoenfeld (1992; Citado por Santos-Trigo, 2020): La primera fase, comprender el problema, parte de los saberes y recursos del docente. Implica descomponer el problema en subproblemas, con el fin de identificar conocimientos previos, el contexto y el/los objetivo(s) que son la base para la formulación de problemas nuevos (Chua, 2023) que más adelante permitirán resolver el problema inicial; En la segunda fase, se desarrollan preguntas orientadoras con base en los objetivos establecidos, que permiten avanzar hacia la solución del problema (Chua, 2023; Polya, 1965; citado por Santos-Trigo, 2024), considerando tanto los conocimientos previos como la experiencia y creencias del docente (Schoenfeld, 2015); La tercera fase corresponde a la resolución del o los problemas (Chua, 2023), verificando si las soluciones obtenidas se articulan con los objetivos propuestos inicialmente (Chua, 2023) y al mismo tiempo siendo conscientes de la decisión que se toma en cada paso conocido como la “metacognición” (Schoenfeld, 1985); Finalmente, la cuarta fase se centra en el análisis y reflexión sobre el proceso; se revisa la validez de la solución, se exploran posibles alternativas y se identifican dudas o aspectos que podrían mejorarse (Chua, 2023; Schoenfeld, 2015; Polya, 1965; citado por Santos-Trigo, 2024).

La reformulación y generación de problemas pueden darse en todas las fases del proceso de RPM (Silver; 1994, citado por Baumanns y Rott, 2022). Aquí se detalla su relación con cada etapa de la RPM:

Figura 7. Proposición de problemas como heurística en la resolución de problemas



Fuente: Elaboración propia.

Los procesos de proposición de problemas matemáticos (PPM) y resolución de problemas matemáticos (RPM) son esenciales para el desarrollo tanto del pensamiento como el conocimiento matemático (Polya, 1945; Hadamard, 1945; Halmos, 1980; citados por Santos-

Trigo, 2020). La RPM ve como problema matemático aquel que no tiene una solución inmediata y requiere un proceso de reflexión y acción para llegar a una respuesta (Gascón, 2011; Polya, 1981; Krulik *et al.*, 1987, como se cita en Rodríguez, 2012). Dentro de este enfoque, la PPM desempeña un papel central, ya que permite generar situaciones que motivan la exploración, el cuestionamiento y el análisis profundo de conceptos, representaciones, operaciones y procedimientos matemáticos (Santos-Trigo, 2020, 2024). De igual modo, la autora de este trabajo, con base en su formación en la Licenciatura en Matemáticas, considera necesaria la implementación de la PPM, ya que en las clases de matemáticas del preicfes se abordan preguntas tipo saber 11. En este contexto, la docente debe orientar a los estudiantes en la resolución de dichas preguntas mediante la formulación de problemas, lo cual facilita su comprensión y, en consecuencia, su solución.

Según Benítez *et al.* (2021), Polya (1965) fue uno de los primeros en compartir métodos para abordar problemas matemáticos complejos. Este enfoque inspiró a otros investigadores a profundizar en el estudio de la resolución de problemas; entre ellos, Schoenfeld (1985) (citado por Benítez *et al.*, 2021) quien se centró en cómo los estudiantes emplean recursos y estrategias para enfrentar desafíos matemáticos. Asimismo, Polya fue pionero en destacar que la formulación de problemas facilita la comprensión y la aplicación de conceptos matemáticos en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2024).

Autores como Polya (1965; Citado por Benítez *et al.*, 2021) Schoenfeld (1985; Citado por Benítez *et al.*, 2021) y Rodríguez (2012), las heurísticas son estrategias que guían la búsqueda de soluciones a problemas matemáticos, estas permiten explorar diversos caminos y enfoques. Entre las más comunes se encuentran la descomposición del problema en partes más pequeñas, la identificación de patrones, la formulación de problemas, y el uso de analogías con situaciones similares ya resueltas. El empleo de una u otra heurística ayuda en la búsqueda de opciones para resolver un problema; sin embargo, esto no garantiza que la solución obtenida sea correcta. Lo verdaderamente valioso es analizar el proceso que se utiliza para comprender y resolver el problema, ya que ello permite identificar tanto las metodologías utilizadas como los errores cometidos en la aplicación de los conocimientos matemáticos.

Por consiguiente, se identifican las etapas propuestas por Polya (1971, 1973, como se citó en Chua, 2011; Rodríguez, 2012), que destacan la importancia de la proposición de problemas como estrategia para plantear y resolver problemas matemáticos (Polya, 1945, citado por Santo-Trigo, 2020, 2024). Estas cuatro fases se articulan con los aportes teóricos de Schoenfeld (1992; citado en Benítez et al., 2021), lo cual enriquece el proceso de resolución de problemas en los docentes (Schoenfeld, 2015). Asimismo, se integra la propuesta de Santos-Trigo (2020), quien sugiere que los maestros formulen preguntas durante cada fase con el fin de guiar a los estudiantes en la resolución de problemas. Es importante destacar que dichas fases no siguen un orden y se puede recorrer de manera repetitiva (Rodríguez, 2012)

I. Comprensión del problema (bases para comprender el problema):

Esta fase consiste en identificar y entender claramente los elementos clave del problema, así como el contexto y los objetivos. Polya (1965; citado por Benítez et al., 2021) lo define como el primer paso esencial, asegurándose de comprender tanto lo que se pregunta como lo que se conoce del problema por medio de patrones, fórmulas conocidas, entre otros. Asimismo, Schoenfeld (1985; citado por Benítez et al., 2021) subraya la importancia de comprender y desglosar problemas complejos para ayudar a organizar la información relevante. En este sentido, el reconocimiento de los recursos y conocimientos del maestro resulta esencial para potenciar la resolución de problemas (Schoenfeld, 2015).

Según Chua (2024), esta fase se denomina “Observación de la propiedad” y consiste en la identificación de la información de los datos presentes, la selección de conocimientos previos y en definir el objetivo que se pretende alcanzar, de modo que permita la formulación de problemas. Sin embargo, con fines de formación docente, la formulación de problemas cumple un rol fundamental al servir como estrategia para que el profesor guíe a los estudiantes en la exploración y resolución de problemas en cada una de sus fases (Santos-Trigo, 2024). Este enfoque se alinea con la propuesta de Polya (1945; Citado en Santos-Trigo, 2024), quien sugiere que, en esta etapa, se planteen preguntas clave como: ¿de qué se trata el problema?, ¿qué datos se proporcionan?, ¿qué se pide encontrar

En este sentido, la PPM es una heurística (o recurso) esencial en la labor docente, al reestructurar el problema inicial en subproblemas contribuyen al análisis y comprensión del

problema matemático por parte de los estudiantes. Este proceso implica identificar el contexto, los conocimientos previos y el objetivo del problema planteado.

II. Concebir un plan (estrategias de resolución de problemas o heurísticas):

Elaborar un plan implica definir una serie de estrategias para abordar el problema y organizar los recursos necesarios para llegar a una solución. Polya (1965; citado por Benítez *et al.*, 2021) destaca la importancia de pensar en un enfoque claro antes de proceder. Por consiguiente, Schoenfeld (1985; citado por Benítez *et al.*, 2021), enfatiza que el plan debe basarse en los conocimientos previos, lo cual les permite explorar diversas formas de resolver el problema. Además, Schoenfeld (2015) enfatiza que los docentes adquieren estrategias a través de la experiencia, lo que fortalece su capacidad para analizar y descomponer problemas complejos, facilitando la organización de la información relevante. Así, como las creencias que influye en cada una de las decisiones tomadas (Schoenfeld, 1985; Citado en Schoenfeld., 2025).

Chua (2024) denomina esta fase “construcción del problema”, la cual implica formar el problema al considerar tanto el contexto matemático (real, hipotético y matemático) como los conocimientos previos y el objetivo establecido desde el inicio. Según Polya (1965; Citado en Santos-Trigo, 2024; Rodríguez, 2012), en esta fase, es fundamental plantearse preguntas como: ¿cómo puede abordarse el problema?, ¿es similar a otro que se haya resuelto antes?, ¿se ha enfrentado a una situación semejante?, ¿conoce algún teorema que pueda aplicarse?...

Por consiguiente, los docentes guían al estudiante a identificar los conocimientos previos implicados, el contexto del problema y establecer un objetivo claro, para formular preguntas orientadoras para solucionar el problema planteado inicialmente.

III. Ejecución del plan (uso de estrategias metacognitivas o de autosupervisión y control):

Esta fase consiste en implementar el plan previamente diseñado. Según Polya (1965; citado por Benítez *et al.*, 2021), hace énfasis en la acción de seguir el plan y ajustar las acciones según sea necesario, si se presentan dificultades en el camino. Mientras que Schoenfeld (1985; citado por Benítez *et al.*, 2021), pone énfasis en la metacognición, resaltando que la resolución de problemas no solo depende de los conocimientos y estrategias disponibles, sino de cómo se reflexiona sobre el proceso. Desde esta perspectiva, Según Schoenfeld (2015), los docentes

quienes resuelven problemas de manera eficaz tienden a planificar, monitorear su avance y realizar ajustes cuando es necesario. En contraste, quienes no aplican estos mecanismos de control, como ocurre con frecuencia entre los estudiantes, suelen tener dificultades para resolver problemas que, en condiciones adecuadas, sí podrían resolver. La capacidad de evaluar continuamente el progreso, identificar errores y replantear estrategias es clave para lograr una solución efectiva.

Durante esta fase, Chua (2024) la denomina “Verificación de la solución”, la cual consiste en resolver el problema con el fin de analizar si el problema guarda relación con el/los objetivo(s) planteado(s) y con los conocimientos requeridos. En caso de no cumplirse estas condiciones, se debe regresar a la primera fase para replantear el problema. Por consiguiente, en esta etapa, Polya (1965; Citado en Santos-Trigo, 2024; Rodríguez, 2012) menciona que surgen preguntas orientadoras como: ¿los pasos ejecutados conducen a la solución del problema?, ¿es posible reconocer si el procedimiento elegido es el adecuado?...

En este sentido, la PPM permite avanzar hacia la solución mediante cada acción ejecutada, proceso que se ve fortalecido por la metacognición. Al ser consciente de las decisiones tomadas, el docente puede reformular el o los problemas, o bien, orientar el proceso hacia rutas que faciliten la identificación de diversas estrategias empleadas por los estudiantes para resolverlos.

IV. Mirada hacia atrás (creencias sobre las matemáticas y la resolución de problemas):

Según Polya (1965; citado por Benítez *et al.*, 2021), esta fase consiste en revisar los pasos realizados y explorar diferentes enfoques para resolver el problema (Schoenfeld, 1992; citado por Benítez *et al.*, 2021; Santos-Trigo, 2024) complementa que son las creencias y concepciones que influyen a la hora de resolver problemas, ya sea utilizando métodos formales o informales, generalizando métodos de solución y plantear nuevos problemas. En este contexto, la metacognición cumple un papel central, ya que permite que el estudiante o docente no actúe de forma mecánica, sino que regule su pensamiento para la comprensión del problema y la toma de decisiones.

Chua (2023) denomina esta fase “observación de la propiedad”, destacando que en ella se reflexiona sobre su validez y en caso tal, realizar los ajustes necesarios hasta alcanzar el objetivo esperado. Polya (1965; Citado en Santos-Trigo, 2024; Rodríguez, 2012) propone una serie de

preguntas orientadoras que pueden formularse en esta etapa para facilitar la comprensión del problema: ¿se puede verificar el resultado?, ¿puede obtener el mismo resultado de diferentes maneras?, ¿puede emplearse el mismo método en otro problema?...

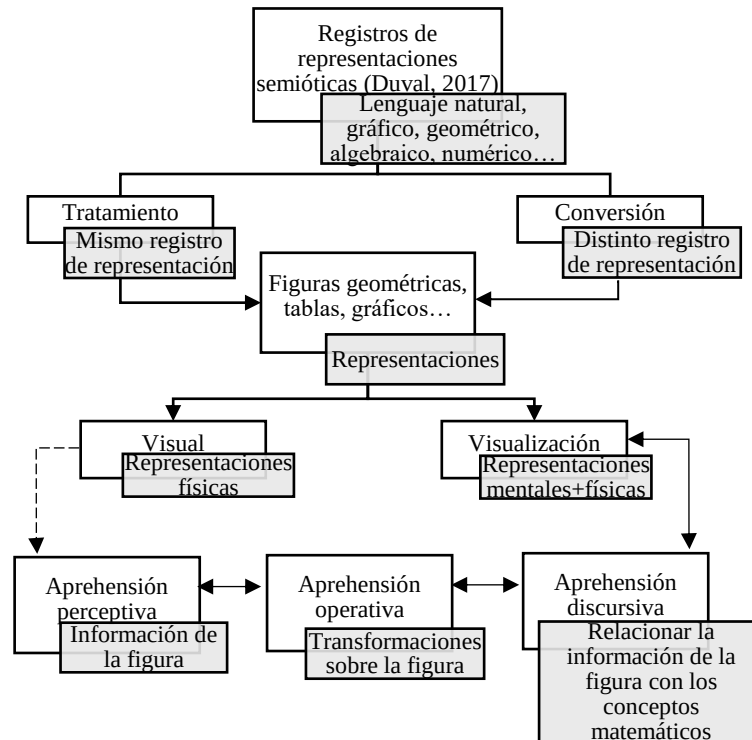
En este sentido, el análisis de la solución del problema, tanto por parte del docente como de los estudiantes, permite cuestionar la veracidad de la respuesta obtenida y reflexionar sobre la posibilidad de emplear otras estrategias para resolver este tipo de problemas.

De lo mencionado en este apartado, se destaca la importancia de emplear heurísticas como la formulación de problemas, que orientan el proceso de resolución. Estas estrategias intervienen en cada etapa: desde la comprensión del enunciado y la ejecución del plan, hasta la reflexión sobre las decisiones tomadas y la exploración de distintas formas de llegar a la solución. Aunque docente y estudiante asumen roles distintos, es el docente quien guía el proceso, ayudando a interpretar el problema, anticipar errores y movilizar los conocimientos previos. A su vez, sus creencias influyen en la forma en que interviene y acompaña la construcción del pensamiento matemático del estudiante.

2.1.3 Análisis Semiótico: Uso de representaciones múltiples y la visualización

En la clase del módulo de matemáticas en el preicfes, se ha identificado que los estudiantes tienen dificultad para representar en diferentes registros de representación semiótica las preguntas que contienen figuras geométricas (o graficas). Para abordar este tipo de problemas, no solo se requiere la capacidad de coordinar entre registros, además el desarrollo de habilidades vinculadas a la visualización y a lo visual (Duval, 2017).

Lo visual hace referencia a aquello que puede percibirse directamente de la figura, y se relaciona con la aprehensión perceptiva, la cual permite identificar los elementos básicos presentes en una representación geométrica (Duval, 2017). Sin embargo, también intervienen otras formas de aprehensión más profundas en la visualización, como la aprehensión operativa, que se refiere a la capacidad de realizar transformaciones, ya sea directamente sobre la figura o mental (Duval, 2017). Asimismo, es relevante la aprehensión discursiva, que implica establecer relaciones entre la información contenida en la figura y los conceptos matemáticos previamente aprendidos (Duval, 2017).

Figura 8. Registros de representación semiótica.

Fuente: Elaboración propia.

Las representaciones semióticas son sistemas simbólicos (lenguaje natural, algebraico, gráfico, numérico y figurativo), que hacen visibles y manipulables los objetos matemáticos, ya que no se puede acceder directamente a estos (Duval, 2017). Existen transformaciones dentro del mismo registro (tratamiento) de representación, pero se presentan dificultades durante este proceso, por falta de conocimiento y congruencia entre los procesos que se están realizando. Además, al trabajar con representaciones de diferentes registros (conversión), las dificultades suelen ser aún mayores; debido a que se necesita establecer congruencia entre los diferentes registros de representación (heurísticas) utilizados para resolver problemas matemáticos, esto implica asegurar que las representaciones mantengan coherencia desde el inicio hasta la solución final del problema (Duval, 2017).

Los problemas matemáticos representados mediante gráficos, tablas o figuras geométricas requieren un análisis de la información visual que presentan. Según Bishop (1989), la visualización es una habilidad clave en el aprendizaje y comprensión de las matemáticas, implica

transformar informaciones externas en imágenes mentales que permiten comprender el concepto u objeto matemático para resolver problemas. Además, Arcavi (2003) amplía el concepto de visualización al describirla como una capacidad, un proceso y un producto. Según el autor, la visualización consiste en crear, interpretar, usar y reflexionar sobre imágenes, diagramas y representaciones, ya sea en la mente, en papel o mediante herramientas tecnológicas. Su propósito es representar y comunicar información, reflexionar sobre ideas previamente desconocidas y fomentar el desarrollo del entendimiento matemático.

En geometría, según Duval (1998,1995; citados en Torregrosa, 2017 y Torregrosa *et al.*, 2010), se identifican dos componentes fundamentales en la resolución de problemas: la perspectiva visual y la visualización. Este autor enuncia que la componente visual nos ofrece un acceso directo a las figuras, permitiendo una aprehensión limitada de sus propiedades. Por otro lado, la visualización amplía la comprensión al tener acceso a elementos no evidentes a simple vista, como los teoremas asociados a las figuras geométricas y las construcciones necesarias para resolver problemas, lo que conlleva una aprehensión más profunda. Asimismo, Polya (citado en Santos-Trigo, 2020) sugiere el uso de heurísticas como dibujo de figuras o construcciones auxiliares para explorar y resolver problemas.

En cuanto la aprehensión, se distinguen tres tipos principales:

- **Aprehensión perceptiva:** Identificar las características básicas de una figura sin hacer juicio de ellas, es la primera que aparece en el proceso cognitivo (Duval, 2006: citado por Martínez, 2020).
- **Aprehensión operativa:** Realizar transformaciones físicas o mentales sobre la figura inicial (Duval, 2006; citado por Martínez, 2020).
- **Aprehensión discursiva:** Relaciona la información presente en las figuras geométricas (o graficas) con las propiedades matemáticas (Duval, 2006; citado por Martínez, 2020).

Por consiguiente, al resolver problemas matemáticos, se emplean diversas heurísticas, las cuales pueden manifestarse a través de diferentes representaciones. La visualización juega un papel fundamental en este proceso, ya que permean en la comprensión de conceptos abstractos, especialmente en geometría.

2.1.4 Análisis Didáctico de Contenido

En el Preicfes María Cano, se ha observado que los estudiantes tienen dificultades para plasmar la información visual de las figuras geométricas en diferentes registros de representación semiótica. Lo que afecta la aplicación de teoremas y la comprensión de relaciones entre figuras ... (Mudhefi *et al.*, 2024). Además, los estudiantes presentan problemas para visualizar y clasificar figuras, lo que limita su capacidad de resolución (Mudhefi *et al.*, 2024). También, la falta de un vocabulario adecuado y de razonamiento lógico dificulta la comprensión y aplicación de los conceptos geométricos. (Mudhefi *et al.*, 2024). Según Duval (2017), las dificultades mencionadas anteriormente se deben a la incapacidad de identificar cuándo y cómo realizar las transformaciones entre registros.

Según Duval, los registros permiten comprender el problema coordinando distintos registros de representación semiótico (Duval, 2017). Por consiguiente, en el caso específico de problemas geométricos o gráficos, intervienen componentes cognitivos vinculados con lo visual, lo cual facilita la identificación de las características superficiales del problema, así como con la visualización, que implica la coordinación de representaciones físicas y mentales entre distintos registros semióticos.

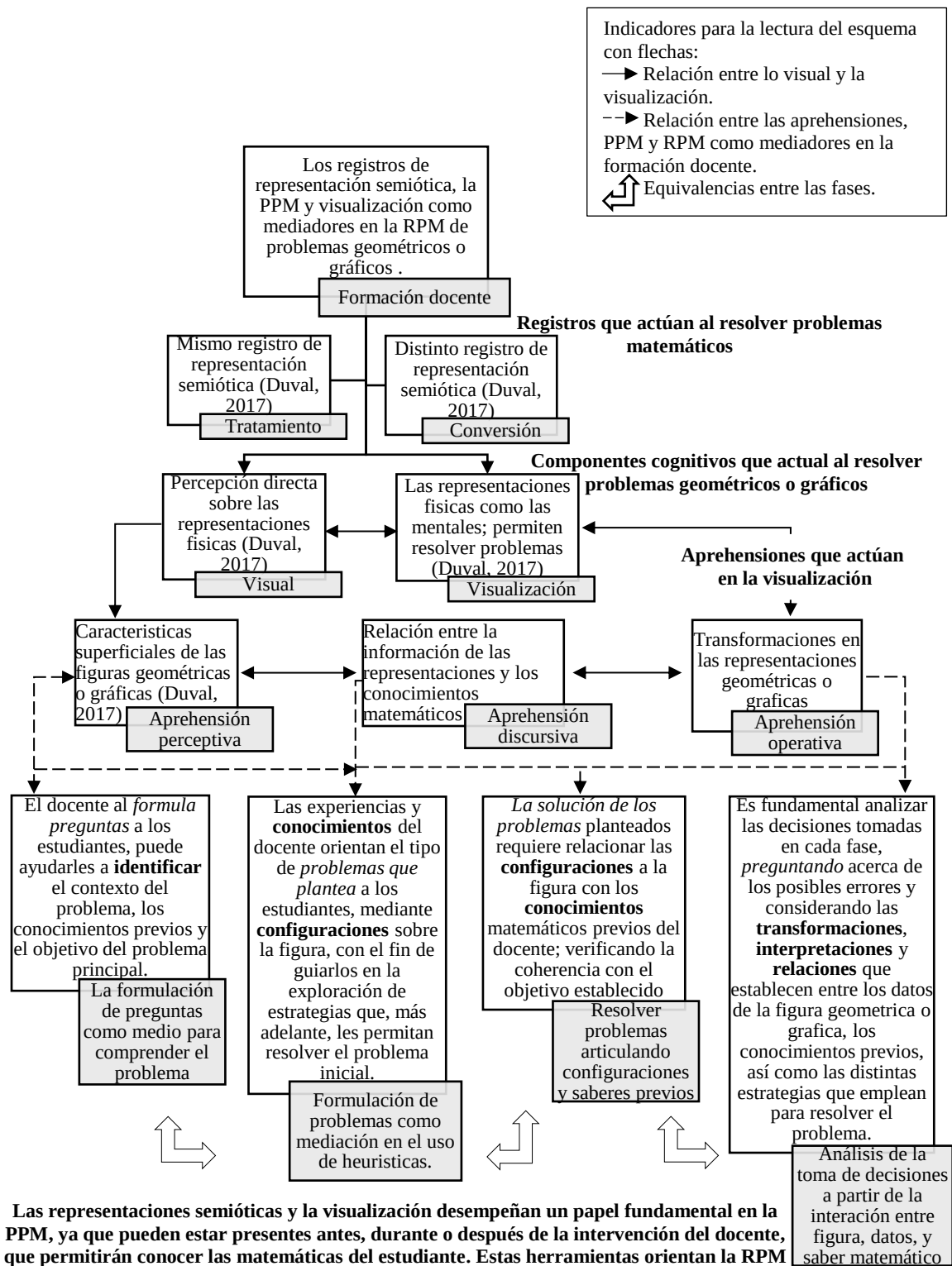
La visualización permite evidenciar distintas aprehensiones que intervienen durante la resolución del problema. En primer lugar, se encuentra la aprehensión perceptiva, relacionada con la identificación de características visuales presentes en la representación gráfica o geométrica. Luego, se manifiesta la aprehensión discursiva, que consiste en vincular los conocimientos matemáticos con la información contenida en dichas representaciones e información del problema (Duval, 2006; citado por Martínez, 2020; Duval, 2017). Es importante señalar que estas aprehensiones no se presentan de forma lineal ni jerárquica, sino que interactúan de manera dinámica durante la resolución del problema.

En este contexto, el docente actúa como mediador en la RPM a través de la PPM, los registros semióticos y la visualización; Estos elementos cumplen un rol fundamental en la comprensión y resolución de problemas por parte del estudiante. Desde la perspectiva sociocultural, la mediación forma parte esencial de los procesos de enseñanza y aprendizaje, e involucra todas aquellas acciones, intervenciones y recursos didácticos que se implementan con

el fin de promover el desarrollo del pensamiento matemático (Vygotsky; citado por Espinosa-Ríos, 2016). Este proceso suele iniciar con lo visual y la aprehensión perceptiva, que ayuda a identificar el contexto, los conocimientos previos y el objetivo del problema. A partir de allí, es clave diseñar problemas complementarios que, desglosados del problema principal, el docente orienta al estudiante a resolver el problema inicial, mediante configuraciones físicas o imaginarias de las representaciones geométricas, favoreciendo su articulación con los conceptos matemáticos (Duval, 2006; citado por Martínez, 2020; Duval, 2017).

Dichos problemas auxiliares que se generan antes, durante o después de orientar el camino hacia la solución, identificando el contexto, conocimientos previos y objetivo del problema (Chua, 2023; Polya, 1973; citado en Santos-Trigo, 2020) y, asimismo, permite conocer las matemáticas del estudiante (Caí y Hwang, 2021). Por ello, el docente debe prever posibles dificultades que puedan surgir en el aula y establecer estrategias de intervención (Schoenfeld, 2015). Finalmente, al considerar distintas formas de abordar el problema, aplicar transformaciones, emplear diversos recursos y recordar múltiples conocimientos, es posible llegar a una o varias soluciones (Chua, 2023; Schoenfeld, 2015; Polya, 1965; citado por Santos-Trigo, 2020). Lo ideal sería converger en una misma solución; sin embargo, en caso de que esto no ocurra, se debe analizar las distintas heurísticas.

Figura 9. La visualización y la proposición de problemas actúan como mediadores clave en la resolución de problemas dentro del marco de la FDPPM.



Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, en el cuadernillo del Icfes se presenta el siguiente ejemplo (Figura 2), que será analizado de acuerdo con las fases de Polya y el uso de múltiples representaciones:

Figura 10. Figuras geométricas que requieren el uso de múltiples representaciones para resolver el problema matemático planteado.

Alfonso tiene tres empaques para almacenar dulces. Los empaques y las medidas de estos se muestran en la figura.

1. Un cilindro cuya altura es $h = 2$, y el radio de la base mide $r = \left(\frac{3}{2}\right)$.	2. Una caja de base cuadrada, cuya altura es $h = 2$ y el lado de la base mide $L = \left(\frac{3}{2}\right)$.	3. Una esfera con radio $r = \left(\frac{3}{2}\right)$.
		

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto al volumen de los tres empaques?

- El volumen del cilindro es mayor que el volumen de la caja; además, el volumen de la esfera es igual que el volumen del cilindro.
- El volumen del cilindro es igual que el volumen de la caja; además, el volumen de la esfera es mayor que el volumen del cilindro.
- El volumen del cilindro es menor que el volumen de la caja; además, el volumen de la esfera es igual que el volumen del cilindro.
- El volumen del cilindro es mayor que el volumen de la caja; además, el volumen de la esfera es mayor que el volumen del cilindro.

Nota. El anterior problema matemático requiere utilizar múltiples representaciones y la visualización para solucionarlo (p. 15). Fuente: Icfes, 2021.

Cuando se desconoce el volumen de figuras geométricas, surge un problema matemático que no puede resolverse de manera inmediata. En tales casos, resulta pertinente aplicar las fases de resolución de problemas propuestas por Polya (1965; Citado por Santos-Trigo, 2020) complementada con las de Schoenfeld (1985; citado por Santos-Trigo, 2024; Schoenfeld, 2015), complementadas con el uso de representaciones semióticas y visualización (Duval, 2017). Este enfoque es relevante porque permite establecer una relación entre la percepción de las representaciones gráficas y los conocimientos previos necesarios para resolver el problema.

Además, la formulación de problemas desempeña un papel fundamental en el proceso del maestro, ya que ayuda a comprender la situación inicial y a generar nuevas preguntas relacionadas con el problema principal (Silver, 1994; Citado por Baumanns y Rott, 2022). Esta estrategia no solo guía a los estudiantes en la resolución del problema original, sino que también permite conocer su conocimiento matemático (Caí y Hwang, 2021). Cabe destacar que la

formulación de problemas está presente en todas las etapas del proceso (Silver, 1994; Citado Baumanns y Rott, 2021) de RPM, lo que enriquece el análisis desde múltiples perspectivas y facilita tanto la comprensión como la solución. Además, es importante tener en cuenta que las fases no siguen un orden rígido (Santos-Trigo, 2024; Chua, 2023; Rodríguez, 2012). Si bien generalmente se inicia con la fase de comprender el problema, es posible transitar entre ellas de manera flexible, a veces sin percatarse, avanzando y retrocediendo según lo requiera el proceso de resolución.

• **Entender el problema:** Comprender un problema matemático implica identificar la información dada, considerar el contexto, los conocimientos previos y los objetivos a alcanzar (Chua, 2023; Polya, 1965; citado por Benítez *et al.*, 2021; Schoenfeld, 2015). También requiere analizar de qué manera se van a replantear en subproblemas que faciliten su comprensión y solución (Schoenfeld, 1985; citado por Benítez *et al.*, 2021). Por otro lado, en problemas con representaciones geométricas, la visualización es esencial para interpretar la información (Bishop, 1989; Arcavi, 2003; Duval, 1998, citado por Torregrosa, 2017). Durante esta fase, se emplean la aprehensión perceptiva, para reconocer la información relevante, y la aprehensión discursiva, que articula los datos suministrados por el problema matemático y conocimientos previos mediante un discurso teórico o natural (Duval, 1998, citado por Torregrosa *et al.*, 2007), orientando así la formulación de problemas que llevará a la resolución formal o intuitiva del problema.

Por consiguiente, para resolver el problema (Figura 2), es importante que el maestro identifique la información presente en el problema y los conocimientos previos (Schoenfeld, 2015) para la reformulación de problemas que le permitirán al estudiante comprender y resolver el problema inicial (Chua, 2023; Cai, 2021). Sin embargo, pueden surgir los siguientes subproblemas, que sirven de apoyo para que el maestro comprenda mejor la información presente en problema (Polya, 1971; citado por Santos-Trigo, 2024):

¿Qué figuras geométricas se tienen y qué se quiere calcular?; ¿qué información tienen las figuras presentes?; ¿cuáles son las dimensiones conocidas y cómo afectan a cada figura?; ¿existe alguna fórmula del volumen de todas las figuras o de cada una de ellas?; teniendo en cuenta la

información del enunciado y las figuras presente ¿cómo puedo hallar el volumen? ¿el volumen tiene que ver con el área?; Si el volumen se calcula como base por altura por ancho, ¿cuáles serían estas dimensiones en el caso de una esfera y de un cilindro?

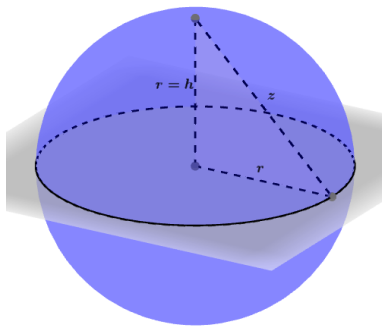
• **Concebir un plan:** Concebir un plan implica el uso de heurísticas, como planteamiento de subpreguntas a partir de los conocimientos previos, el contexto y la información suministrada por el problema (Polya, 1965; Schoenfeld, 1992; citados por Benítez *et al.*, 2021; Rodríguez, 2012). En problemas matemáticos donde se encuentran tablas, figuras geométricas, representación de funciones..., la visualización, las manipulaciones y las transformaciones de estas son fundamentales (Bishop, 1989; Arcavi, 2003). Para ello, se recurre a la aprehensión perceptiva, discursiva y operativa, de tal manera que se articulan, es indispensable tener en cuenta los datos del problema, la relación entre los datos presentados y el conocimiento matemático (formal o informal), así como las transformaciones que se hagan a las representaciones geométricas (Duval, 1998 citado por Torregrosa *et al.*, 2010), con el fin de concebir un plan por medio de la formulación de problemas que permita comprender y abordar la solución del problema planteado (Polya, 1965; Santos-Trigo, 2024).

En esta fase, es indispensable que el maestro resuelva el problema a partir de su experiencia previa y mediante el uso de diversas heurísticas (Schoenfeld, 2015), que le permitan formular preguntas estratégicas y analizar el problema desde distintas perspectivas para facilitar su resolución. Algunas preguntas orientadoras que puede plantearse son:

¿Existe algún problema similar que haya resuelto anteriormente?; ¿es posible hallar el volumen de la esfera a partir del área de la circunferencia?; Al observar la figura de la esfera (Figura 2), se identifica un radio y una circunferencia, ¿el radio de la esfera será el mismo que el de la circunferencia?; sabemos que el área se calcula como base por altura ¿cuál sería la base y la altura en el caso de la circunferencia?, al hallar el área de la circunferencia ¿cómo se puede hallar el volumen de la circunferencia?. Por otro lado, en el caso del cilindro, ¿qué figura compone la base de la circunferencia?, si la base es una circunferencia ¿el área de la circunferencia de la esfera es igual al hallar el área de la circunferencia del cilindro?, que representa la altura del cilindro?, si la base es una circunferencia, ¿qué sucede al “extender” esa base a lo largo de una altura? Finalmente, con relación en el rectángulo prisma surgen las siguientes preguntas: ¿Cuál

es la forma de la base del prisma?; ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?; ¿Qué sucede si extendiendo ese rectángulo a través de una tercera dimensión?; ¿Cuáles son las medidas de la base, la altura del rectángulo y la profundidad (o ancho) del prisma?, ¿cuál es el volumen rectángulo prisma?

• **Ejecutar el plan:** Se ejecuta el plan establecido para resolver los problemas en la anterior fase. Esta fase es crucial para que el docente analice sus conocimientos, habilidades, detecte errores ... (Schoenfeld, 2015). Durante esta fase, se transforma o construye sobre las figuras geométricas para identificar los conocimientos previos que ayuden a resolver (Duval, 1998 citado por Torregrosa *et al.*, 2010) los subproblemas. Este proceso no solo permite entender los datos presentes, sino que también guía hacia la solución mediante la exploración. Además, estas configuraciones permiten hacer relaciones entre los procesos de configuraciones sobre las figuras y discursos teóricos, usando conceptos matemáticos (Torregrosa, 2007, 2010, 2017). Al mismo tiempo, el lenguaje natural interviene para ayudar a comprender como se conectan las ideas en cada paso de la solución (Torregrosa, 2007, 2010, 2017).



ser negativos.

Por consiguiente, Para hallar el volumen de una esfera, se pueden formar infinitos triángulos isósceles, todos de igual medida, ya que comparten el mismo vértice y los radios de una circunferencia son congruentes. Sin embargo, no se conoce directamente el valor de la hipotenusa, por lo que se recurre al teorema de Pitágoras para calcularla. Además, es necesario considerar el valor absoluto, dado que los volúmenes no pueden

$$V = |z^2| = |r^2 - h^2|\pi \text{ Donde } r = h$$

Integrar a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} V &= \left| \int_{-r}^r z^2 dr \right| \pi = \left| \int_{-r}^r (r^2 - h^2) dr \right| \pi \\ &= \left| \left[\frac{r^3}{3} - h^2 \cdot r \right]_{-r}^r \right| \pi \end{aligned}$$

Utilizar el teorema de integral definida

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{r^3}{3} - h^2 \cdot r - \left[\frac{(-r)^3}{3} - h^2 \cdot (-r) \right] \right| \pi \\
 &= \left| \frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} - h^2 \cdot r - h^2 \cdot r \right| \pi \\
 &= \left| \frac{2r^3}{3} - 2h^2 \cdot r \right| \pi
 \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $r = h$, se reemplaza r en h .

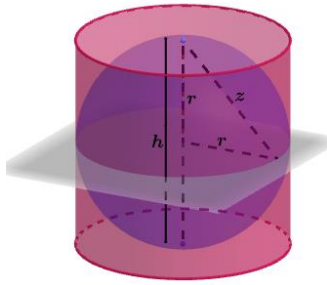
$$V = \left| \frac{2r^3}{3} - 2r^2 \cdot r \right| \pi$$

$$\text{Por tanto, } V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Ahora, hallado el volumen de la esfera, se reemplaza el valor del radio, $r = \frac{3}{2}$

$$\text{Veamos, } V = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 \pi = \frac{9}{2} \pi$$

Por otro lado, para hallar el volumen del cilindro es necesario hallar:



$$V = \text{Area}_{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Donde el } \text{Area}_{base} = \text{base} \cdot \text{altura} \cdot \pi$$

$$\text{Area}_{base} = r \cdot r \cdot \pi = r^2 \pi$$

Por tanto,

$$V = r^2 \pi \cdot \text{altura} = r^2 \pi \cdot h$$

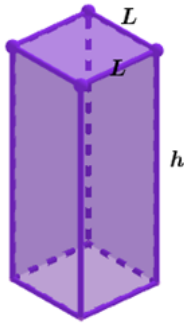
Ahora, hallado el volumen del cilindro, se reemplaza el valor del radio $r = \frac{3}{2}$ y la altura

$$h = 2$$

$$\text{Veamos, } V = r^2 \pi \cdot h = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \pi \cdot (2) = \frac{9}{2} \pi$$

Finalmente, para hallar el volumen del cilindro es necesario hallar el área de la base y el volumen, veamos:

$$V = \text{Area}_{base} \cdot \text{altura}$$



Donde el $Area_{base} = base \cdot altura$

$$Area_{base} = L \cdot L = L^2$$

$$\text{Por tanto, } V = L^2 \cdot altura = L^2 \cdot h$$

Ahora, hallado el volumen del rectángulo prisma, se reemplaza el valor lado de la base

$$L = \frac{3}{2} \text{ y la altura } h = 2.$$

$$\text{Veamos, } V = L^2 \cdot h = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (2) = \frac{9}{2}$$

Por lo anterior, se puede observar que el volumen del cilindro y el del cuerpo con base circular (posiblemente referido como “circunferencia”) son iguales. No obstante, el volumen del prisma rectangular resulta ser menor que los anteriores. A partir de esta comparación surgen algunas inquietudes, especialmente si se tiene en cuenta que Santos-Trigo (2020) resalta la importancia de proponer problemas en cada una de las fases del proceso, con el fin de apoyar al docente en su rol como resolutor de problemas: ¿Tienen validez matemática los argumentos expuestos en esta fase? ¿Existe alguna interpretación errónea de los conceptos? ¿Se han seguido los pasos adecuados para llegar a estas conclusiones?

• **Mirar hacia atrás:** Esta fase consiste en el análisis de la solución obtenida, con el objetivo de validar tanto el resultado final como la coherencia de cada decisión tomada durante el proceso y, asimismo, ver la posibilidad de encontrar otras maneras de resolver el problema (Chua, 2024; Schoenfeld, 2015; Polya, 1965, citado en Santos-Trigo, 2024). Siendo la formulación de problemas como ayuda para la resolución de problemas (Schoenfeld, 2015), surgen las siguientes dudas: ¿se puede verificar el resultado?, ¿existen otras maneras de resolver el problema?, entre otros. Durante este proceso actúan todas las aprehensiones que permitieron de una manera u otra resolver el problema principal.

En conclusión, la formulación de problemas con representaciones semióticas (figuras geométricas, gráficos o tablas de datos) como ayuda al docente para resolver problemas. Al descomponer el problema en partes más simples, permite tanto el entendimiento como la resolución del problema principal.

Capítulo 3

Metodología

Se propone como estrategia metodológica sistematizar las prácticas docentes con miras de cualificar dichas prácticas y la formación de los docentes con las ideas de mejorar los resultados por parte de los estudiantes (Molina *et al.*, 2011, citado en Bedoya, 2024; Jara, 2018). La Sistematización de Experiencia como estrategia de formación (y desarrollo profesional) Docente SED.

Asimismo, metodológicamente, la SED se concibe en este trabajo (de acuerdo con Bedoya, 2024) como una estrategia de Investigación Acción Participativa (IAP) con propósitos de formación y desarrollo profesional docente. Este enfoque se basa en la metodología de investigación de diseño (Camargo, 2021; Molina *et al.*, 2011, citado en Bedoya, 2024) concretado en el diseño de experimentos didácticos (Simón, 2000; citado en Bedoya, 2024), un estudio de caso (Stake, 1998, citado por Orozco, 2024; Martínez, 2011, citado por Orozco, 2024) y una evaluación permanente de la práctica didáctica del docente (Rico, 2013).

3.1 Marco Metodológico

En el presente trabajo se desarrollará una Investigación Acción Participativa (IAP), según Camargo (2021), se fundamenta en la colaboración entre el investigador y la comunidad involucrada para mejorar las prácticas sociales. Este enfoque busca comprender, innovar y transformar la práctica educativa de la docente en el del Preicfes a partir de la participación de los actores implicados en el proceso, es decir, la docente y los estudiantes.

La *Sistematización de Experiencias* es una estrategia investigativa propia de la acción educativa que busca comprender, reflexionar y transformar las prácticas a partir de su análisis

crítico y colectivo. Según Camargo (2021), este proceso consiste en reconstruir y analizar de manera ordenada lo que se ha vivido en la práctica, identificando los aciertos, las dificultades y los aprendizajes que surgen de la experiencia. En el caso del Pre-Icfes Popular María Cano, la sistematización permite reconocer las fortalezas y debilidades en la enseñanza de las matemáticas, y con ello proponer estrategias que contribuyan a mejorar los resultados de los estudiantes en la Prueba Saber 11°. Así, se convierte en un componente esencial dentro de la IAP, al promover la reflexión crítica, la formación docente y la mejora continua de las prácticas pedagógicas.

Según Bedoya (2024):

La sistematización de experiencias docentes integrada con el conocimiento y el análisis didácticos permite a los docentes reflexionar sistemáticamente sobre problemas de sus prácticas, de su propia formación y desarrollo profesional. ... La Didáctica de las Matemáticas es la disciplina que se ocupa de estudiar e investigar los problemas de la práctica en la educación matemática y proponer marcos explicativos para abordarlos e intentar su resolución. (p.7).

Además, la *investigación de diseño* permite analizar de manera sistemática el diseño e implementación de nuevas estrategias de enseñanza, con el objetivo de innovar y optimizar los procesos de aprendizaje. Iivari y Venable (2009, citados por Molina *et al.*, 2011) plantean que este tipo de investigación busca resolver problemas que se presentan en la educación y generar conocimiento mediante fases, algunas de estas son propuestas por algunos autores (Cobb *et al.*, 2000, citado en Bedoya, 2024; 2000; Cobb *et al.*, 2008, citado en Bedoya, 2024; Confrey, 2006, citado en Molina *et al.*, 2011):

FASE I: Preparación del experimento (Diseño)

FASE II: Recuperación de la experiencia por medio de la Experimentación (Intervención en el aula y recogida de datos)

FASE III: Ejecución del Análisis retrospectivo de los datos (Análisis de los datos y revisión y reformulación de hipótesis)

La *investigación de diseño* puede articularse con otras teorías pedagógicas (Iivary *et al.*, 2009, citado en Molina *et. al.*, 2011), como los *experimentos de enseñanza*; estos determinan el “...diseño, implementación y evaluación de secuencias de enseñanza” (Camargo, 2021; Molina *et al.*, 2011)., con el objetivo de elaborar un modelo de enseñanza y mejorar la práctica docente. La *investigación de diseño* y el *experimento de enseñanza* se concreta en el *diseño de un experimento didáctico* que se desarrolla mediante el modelo local (Bedoya, 2024).

Los *experimentos didácticos*, según Bedoya (2024) y Valverde (2014), son una herramienta esencial para la formación continua de docentes de matemáticas. A través de un riguroso *Análisis Didáctico*, los profesores diseñan propuestas de enseñanza innovadoras y desarrollar sus competencias profesionales (Rico, 1997; Gómez, 2007, citado por Bedoya, 2024; Valverde 2014, citado por Bedoya 2024). Este proceso implica un estudio profundo de los aspectos curriculares, conceptuales y procedimentales de la enseñanza, considerando los *Conocimientos Didácticos* (CD), de los contenidos que se están trabajando como el análisis de contenido, el conceptual, cognitivo, de instrucción y evaluativo (Rico 2013, citado por Bedoya 2024). De esta manera, los docentes no solo mejoran su práctica, sino que también contribuyen a la renovación curricular y pedagógica, tal como lo plantean autores como Rico (1997), y Bedoya (2024, 2025). Por consiguiente, el experimento didáctico se implementa mediante el desarrollo del modelo local.

Por otro lado, el *estudio de caso* consiste en registrar y analizar las acciones de los participantes de la investigación con aras de mejorar prácticas sociales, en este caso del Preicfes Popular María Cano. La información se obtiene a partir de diversas fuentes como: audios, videos, observaciones directas y toma de datos (Orozco, 2024); estas permiten el registro de los datos mediante transcripciones. Este enfoque permitió comprender en profundidad los procesos desarrollados durante la implementación de la Unidad Didáctica Guía (UDG) y valorar el papel de la docente-investigadora en la mediación de las actividades propuestas.

Finalmente, Según Orozco (2024), la *evaluación de programas de formación* se entiende como un proceso sistemático y continuo que permite analizar la coherencia, pertinencia y resultados de una intervención educativa. En el caso del presente proyecto, esta evaluación se aplica a la implementación del experimento didáctico desarrollado a partir del modelo local de análisis didáctico, con el propósito de valorar su funcionamiento en cada una de sus fases. De

este modo, la evaluación no se concibe como una etapa final, sino como un proceso continuo que posibilita identificar fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora, orientando el rediseño del experimento y aportando a la construcción teórica sobre la didáctica de la visualización.

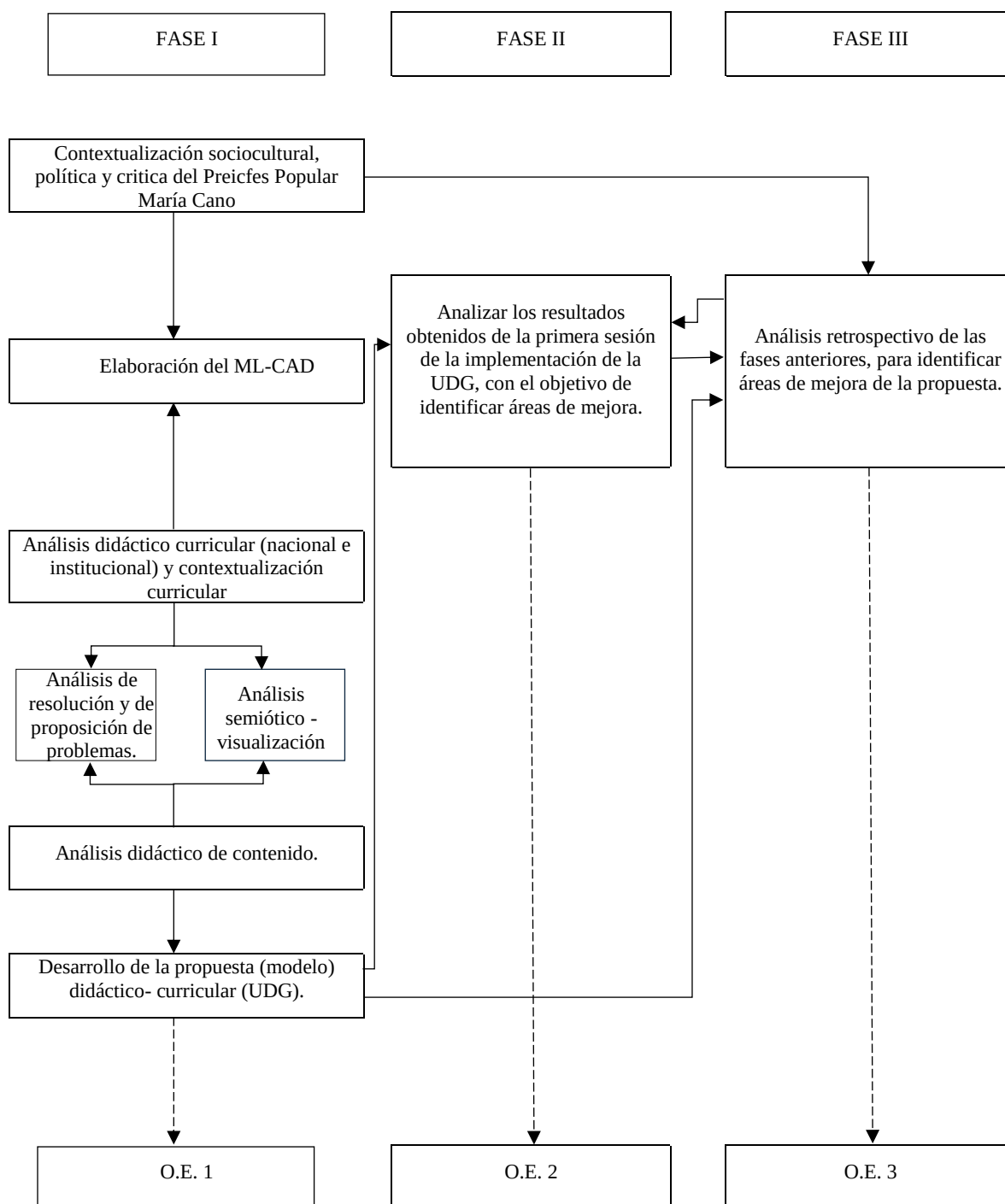
En conclusión, la presente investigación articula la Investigación Acción Participativa (IAP), la Sistematización de Experiencias y el experimento didáctico como estrategias complementarias para comprender y transformar la práctica docente. Este enfoque favorece un análisis reflexivo y sistemático de la enseñanza de las matemáticas, orientado al diseño, implementación y valoración de propuestas innovadoras que fortalezcan el aprendizaje. En el contexto del Pre-Icfes Popular María Cano, dichas estrategias conforman un proceso continuo de acción, reflexión y mejora, en el que la docente-investigadora y los estudiantes participan activamente en la construcción de conocimiento y en el desarrollo de competencias clave para la Prueba Saber 11°. Asimismo, el estudio de caso permite recolectar información desde la experiencia concreta, mientras que la evaluación del programa de formación valora el progreso profesional de la docente-investigadora y retroalimenta el proceso investigativo.

3.2 Diseño Metodológico

En este apartado se explica cómo se observa la información desde un enfoque de sistematización de experiencias, con el objetivo de responder a la pregunta problema y dar cuenta del cumplimiento de los objetivos planteados. Para ello, se presenta un esquema que muestra las relaciones entre las fases y los objetivos, detallando de qué manera se desarrollarán y alcanzarán estos últimos. Por consiguiente, se estructura el análisis de forma coherente y alineada con los propósitos de la investigación.

En el presente esquema se muestra cómo se llevará a cabo la presente investigación sistemática.

Figura 11. Esquema metodológico de la investigación sistematizada con enfoque cualitativo



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se explica en el diagrama anterior (figura 11) las fases del experimento de enseñanza. Veamos:

- FASE I:** Para el diseño del ML-CAD fue necesario realizar una contextualización

sociocultural, política y crítica del Preicfes Popular María Cano. Comprender el lugar donde se implementa la propuesta, su trayectoria y las problemáticas (en matemáticas) que lo atraviesan, resulta fundamental para orientar el desarrollo del modelo.

En el segundo capítulo del presente proyecto, al revisar la normatividad de la Prueba Saber 11, se identificó que las competencias evaluadas por el Icfes de “interpretación y representación” y “formulación y ejecución de procedimientos”; surge la subcompetencia de resolución de problemas. Desde los referentes conceptuales y teóricos revisados, se destaca la proposición de problemas como una heurística clave en la enseñanza de las matemáticas, al guiar la intervención docente hacia la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2024) tipo Icfes.

Asimismo, al tratarse de problemas de naturaleza geométrica o gráfica, la visualización se convierte en un componente fundamental. En este tipo de problemas, no basta con interpretar el enunciado, sino que es necesario analizar la información contenida en la representación gráfica o geométrica y articularla con los conocimientos matemáticos. Debido a esta complejidad, se requiere considerar los distintos tipos de visualización y los sistemas de representación semiótica que intervienen en el proceso.

Todo lo anterior fundamenta el desarrollo del análisis didáctico de contenido, el cual sustenta la construcción del Modelo Local de UDG.

Por tanto, al comprender todos los elementos necesarios en la intervención del aula y permitirá el desarrollo de actividades o unidad didáctica. (Rico, 2013).

•**FASE II:** La implementación de la propuesta didáctica se llevará a cabo en 2025, mediante una Unidad Didáctica Guía (UDG) en el Preicfes de Candelaria, que constará de dos sesiones de cuatro horas cada una. En la que se resolverán problemas tipo Icfes que involucran situaciones con representaciones gráficas y geométricas, y así identificar dificultades. Los resultados de esta sesión orientarán las estrategias de la segunda, centrada en fortalecer la interpretación y resolución de problemas matemáticos.

Además, en las sesiones se trabajará en grupos de máximo tres integrantes, con el fin de fomentar el debate y el intercambio de conocimientos. Una vez la docente pase por los

grupos fomentara la participación de todos los estudiantes. El aprendizaje cooperativo, que se estructura en subgrupos con habilidades diversas, favorece un mejor rendimiento que el trabajo individual o competitivo, y su éxito depende de la participación de los miembros (de Haro, 2010).

Lo anterior constituye la base para el desarrollo del análisis didáctico de contenido, el cual sustenta la construcción del Modelo Local que, a su vez, será fundamental en la selección y análisis de las actividades que darán soporte a la UDG.

Para la recuperación de la experiencia, en un primer momento se parte de la descripción interpretativa de la docente; que consiste en relatar lo ocurrido (Viramontes, 2024) durante la clase; y dar cuenta de los hechos observados (Viramontes, 2024) o de la información obtenida sobre la implementación de la UDG. Esta descripción se puede complementar con las grabaciones de audio y video (Viramontes, 2024), que aportan detalles adicionales sobre lo sucedido en clase. Una vez transcrita la información, se desarrollarán códigos o categorías emergentes de la transcripción, los cuales se relacionarán con la teoría presente (Viramontes, 2024) en el capítulo 2.

•**FASE III: Análisis Retrospectivo:** En esta última fase se analizarán los resultados obtenidos en las fases anteriores, especialmente en la Fase II. Para ello, se llevará a cabo un análisis didáctico del proceso, utilizando las grabaciones y transcripciones de las sesiones. Esto permitirá identificar patrones, dificultades y avances en el desarrollo de las competencias trabajadas.

Propuesta de una formación docente basada en la teoría sistemática de ML-CAD para desarrollar habilidades en la resolución de problemas geométricos que requieran visualización, representaciones semióticas y PPM, en el Preicfes.

3.2.1 Contexto

El contexto local en el que se desarrolla este trabajo de grado es la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle; y por otra parte se desarrolla en el contexto del Programa Preicfes Popular María Cano, en el cual la autora participa como docente.

El *Preicfes Popular María Cano*, situado en el municipio de Candelaria - Valle del Cauca, es impulsado por jóvenes Candelareños, ha venido funcionando continuamente desde hace tres años y tiene como objetivo, ofrecer a jóvenes de grado 11 de escasos recursos de la región la oportunidad de prepararse para las *Pruebas Saber 11*. Así, buscan que los jóvenes accedan a las IES, especialmente a las Universidades Públicas, ya que en estas instituciones tienen matrícula gratuita para estudiantes de estrato 1, 2 y 3 (MEN, 2024). Esta iniciativa responde a la baja accesibilidad a la educación superior en la región; afectada por un índice de pobreza juvenil del 87,54 % y la ausencia de universidades en funcionamiento (DNP, 2024).

El Programa inició en 2022 con sesiones de un mes antes de las Pruebas Saber 11, utilizando cartillas del Icfes y ofreciendo dos clases por docente los fines de semana en un espacio limitado en Villagorgona. De los 12 participantes, tres ingresaron a la educación superior. Mientras que en el 2023 y 2024, el programa se extendió a cinco meses, con clases sabatinas en el Colegio Ana Julia Holguín de Hurtado, donde cada módulo se trabajó durante un mes. El espacio era más amplio y mejor equipado, contando con cuadernillos del Icfes (Evaluar para avanzar) y pruebas diagnósticas proporcionadas por la editorial Los Tres Editores para medir el progreso estudiantil, quienes evalúan las mismas competencias de las pruebas saber 11.

Además, el Preicfes contó con la participación de estudiantes provenientes de diversas instituciones educativas, tanto públicas como privadas, ubicadas en la cabecera municipal de Candelaria y sus corregimientos. Entre ellas, la Institución Educativa Sagrada Familia (2024) destacó por su proyecto 'Tic para el mejoramiento de Prueba Saber', que incluye simulacros y fortalecimiento de lecturas para las Pruebas Saber 11. Por otra parte, la Institución Educativa Marino Rengifo Salcedo (2019), realiza esfuerzos para actualizar su currículo y alinearlos con los estándares del ICFES, aunque aún enfrenta desafíos en la implementación de evaluaciones basadas en competencias.

Según en los resultados de la cohorte anterior (LTE, 2024), conformada por 36 estudiantes, los resultados de las Pruebas Saber 11 evidenciando un promedio 244 en el desempeño global y en el área específica de matemáticas de 46. A nivel general, solo 4 estudiantes (11.1%) superaron o igualaron los 300 puntos. Además, 25 estudiantes (69.4%) se ubicó en un rango intermedio

(200–292 puntos), mientras que 7 (19.4%) obtuvieron menos de 200 puntos, lo que refleja dificultades significativas. En matemáticas, 3 estudiantes (8.3%) alcanzaron un nivel avanzado (65–74 puntos). Por otro lado, 5 (13.9%) lograron un puntaje satisfactorio (53–57 puntos). Sin embargo, ninguno de los estudiantes con resultados globales inferiores a 200 puntos alcanzó un nivel mínimo o insuficiente en esta área, lo que sugiere una correlación entre el bajo rendimiento general y las limitaciones en competencias matemáticas. De los cuales ingresaron 10 a ingresar a la IES de los cuales 3 estudian ingeniería en la Universidad del Valle y 3 en Universidad Nacional de Palmira.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Selección y análisis de actividades (UDG) fundamentada por el modelo local

En el presente trabajo se plantea un modelo local que da continuidad al O.E. 2, la selección y análisis de las actividades de la UDG a partir de lo expuesto en el capítulo 2, donde se aborda los referentes teórico – conceptual y curricular. Este modelo integra las competencias de interpretación y representación, así como de formulación y ejecución de procedimientos, que incluyen la subcategoría de resolución de problemas. Desde esta perspectiva, se propone que el docente oriente al estudiante en la resolución de problemas matemáticos siguiendo las fases de Polya, complementadas con los aportes de Schoenfeld. Asimismo, se incorpora la proposición de problemas como estrategia para descomponer el enunciado inicial, facilitar su comprensión y orientar la solución, reconociendo la relevancia de las representaciones y la visualización en problemas con componentes geométricos o gráficos.

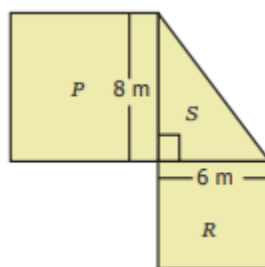
Para la selección de las preguntas se tomaron como referencia las cartillas de la Editorial LTE (2018) y las del programa Evaluar para Avanzar del Ministerio de Educación (2023). Se eligieron siete actividades que plantean problemas tipo Icfes con representaciones geométricas, gráficas y tabulares, entre otras, que exigen el uso de la visualización para realizar transformaciones entre distintos registros de representación semiótica durante su resolución. La selección respondió al propósito de abarcar diversas temáticas y niveles de dificultad, en coherencia con el enfoque de las Pruebas Saber 11, las cuales evalúan las competencias desarrolladas por los estudiantes a lo largo de su trayectoria escolar. Además, se retoman del libro de Estándares (MEN, 2006) las habilidades que se deben desarrollar para dar respuesta a los problemas propuestos.

Estas actividades se analizan desde el enfoque de resolución de problemas, con el propósito de que el docente pueda anticipar las posibles estrategias, soluciones o dificultades que los estudiantes pueden presentar durante su desarrollo (Schoenfeld, 2015). Al mismo tiempo, este enfoque permite que los estudiantes exploren diversas maneras de abordar y resolver los problemas propuestos (Shoenfeld, 2015). Asimismo, se trabaja con la proposición de problemas como mediador en la comprensión y resolución de las situaciones planteadas, entendida como una herramienta que le permite al docente comprender cómo los estudiantes construyen y significan las matemáticas (Caí & Hwang, 2021).

Figura 12. Pregunta 0 tipo Icfes.

ACTIVIDAD 0

La siguiente figura está compuesta por los cuadrados P y R y el triángulo rectángulo S .



Si el área del cuadrado R es 36 m^2 y el área del cuadrado P es 64 m^2 , ¿cuál es el área total de la figura?

A. 48 m^2

B. 100 m^2

C. 124 m^2

D. 148 m^2

Fuente: Icfes, 2023

<i>Referente curricular</i>		
	Pensamiento métrico y sistema de medidas	Grado 5°

Competencia(s) de los estándares	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos) (MEN, 2006). Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos (MEN, 2006). Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas (MEN, 2006).
Análisis Didáctico de Contenido	
Para resolver este problema geométrico, es fundamental visualizar la figura y analizar la información disponible. El uso de distintos registros de representación semiótica ya sea mediante tratamientos o conversiones, funciona como una heurística. Según Duval, la configuración de las figuras desempeña un papel crucial en la comprensión y resolución de problemas geométricos, pues permite identificar estrategias relevantes. Además, el proceso se implementará siguiendo las cuatro fases propuestas por Polya, teniendo en cuenta los conocimientos previos. •Comprender el problema: En esta fase, se analiza la información proporcionada, el contexto del problema y el objetivo a alcanzar. Dado que se trata de un problema matemático cuyo propósito es hallar el área de un triángulo, es esencial responder a preguntas clave: ¿Qué datos se proporcionan? y ¿Qué se debe determinar? Este paso permite identificar claramente los elementos necesarios para su resolución. •Concebir un plan: En esta fase, el docente debe recurrir a su experiencia previa con problemas similares para diseñar una estrategia de solución. Dado que se trata de un problema geométrico, es fundamental integrar la visualización y el análisis de los registros de representación semiótica (tratamiento o conversión) como parte del proceso. Para guiar la resolución, se proponen las siguientes subpreguntas, alineadas con el objetivo de hallar el área del triángulo: ¿Es posible descomponer la figura en elementos más simples?; ¿Qué figuras geométricas se identifican en el planteamiento?; ¿Cómo se determinaron las áreas de los cuadrados R y P?; ¿Qué información específica permite calcular el área del triángulo: las áreas de R y P o los lados que las conforman?; ¿Qué relaciones matemáticas (geométricas o algebraicas) pueden aplicarse?; ¿Es necesario hacer conversiones entre registros (gráfico, numérico, algebraico) para facilitar el proceso? •Ejecutar el plan: En esta fase, se aplican las estrategias diseñadas para resolver el problema, utilizando heurísticas como tratamientos y conversiones entre registros de representación semiótica. Esto permite reconfigurar la figura, facilitando una mejor comprensión de la	

información y estableciendo conexiones entre el lenguaje natural y los conceptos matemáticos formales e informales. Durante la ejecución del plan, es fundamental realizar una evaluación constante mediante preguntas clave que verifiquen el avance hacia la solución, como: ¿las estrategias aplicadas están produciendo resultados coherentes con el objetivo de hallar el área del triángulo? ¿Los cálculos y relaciones geométricas establecidas son matemáticamente válidas? Si en este proceso de verificación se detectan inconsistencias o dificultades para alcanzar la solución, será necesario volver a la fase inicial de comprensión del problema para revisar los supuestos, reanalizar la información disponible y replantear las estrategias, garantizando así que todo el proceso mantenga coherencia con el objetivo geométrico establecido. Veamos:

En este caso, se reconocen dos cuadrados y un triángulo rectángulo, lo que implica la necesidad de identificar conocimientos base sobre estas figuras.

$$\text{Lado de } P = 8 \text{ m}$$

$$\text{Lado de } R = 6 \text{ m}$$

A partir de los datos sobre las figuras, se identifica la longitud de los lados de los cuadrados. Se identifica que la hipotenusa del triángulo rectángulo corresponde a la diagonal del rectángulo formado por los dos cuadrados, pero no se conoce su longitud. Durante este proceso, se evidencia la visualización, ya que más allá de observar la figura, se reconocen características de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras, un conocimiento fundamental, también forma parte de la visualización y razonamiento como un proceso discursivo teórico, ya que su aplicación permite calcular la longitud de la hipotenusa.

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{Lado } P)^2 + (\text{Lado } R)^2$$

$$(\text{hipotenusa})^2 = (8\text{m})^2 + (6\text{m})^2$$

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{64\text{m}^2 + 36\text{m}^2}$$

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{100\text{m}^2}$$

$$\text{hipotenusa} = 10\text{m}$$

Sin embargo, **no es necesario conocer el teorema de Pitágoras**. Pues, de nada sirve hallar la hipotenusa para resolver el problema.

Una vez conocidas las dimensiones del triángulo, se determina su área.

$$\text{Área de } S = \frac{\text{base} * \text{altura}}{2} ; \text{base} = \text{lado de } R = 6m \text{ y altura} = \text{lado de } P = 8m$$

$$\text{Área de } S = \frac{6m * 8m}{2} = 24m^2$$

Finalmente, al sumar las áreas de los cuadrados y el triángulo, se obtiene el área total de la figura, completando así el proceso de resolución. Este último paso también implica visualización, ya que se buscan estrategias (en este caso, la suma de áreas) basadas en conocimientos básicos para hallar el área total.

$$\text{Área de } P = 64m^2; \text{Área de } R = 36m^2; \text{Área de } S = 24m^2$$

$$\text{Área total} = \text{Área de } P + \text{Área de } R + \text{Área de } S$$

$$\text{Área total} = 64m^2 + 36m^2 + 24m^2$$

$$\text{Área total} = 124m^2$$

Mirar hacia atrás: Revisar si lo anterior tiene sentido y buscar otras maneras de resolverlo. En este caso, se pudo evidenciar que no era necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

Figura 13. Pregunta 1 tipo Icfes.

ACTIVIDAD 1

Responde las preguntas de acuerdo con la siguiente información.

Una empresa comercializa termos con las características que muestra la imagen:



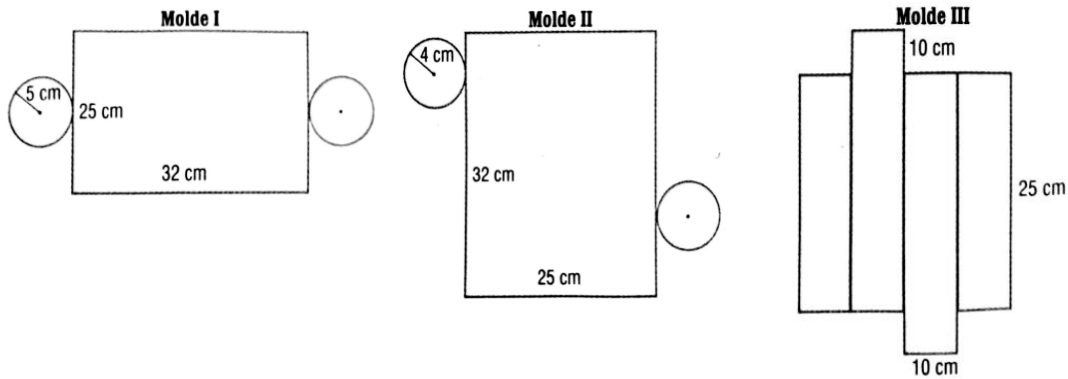
Nombre del producto: Termo 1/2 litro

Perímetro de la base: 31,415 cm

Radio de la base: 5 cm

Altura: 25 cm

La empresa tiene los siguientes modelos de caja para empacar sus productos.



1.El o los moldes de cajas en que se puede empacar el termo es o son:

- A.** Solamente I
- B.** II y III
- C.** Solamente III
- D.** I y II

2.Si se desea construir 1.000 cajas, como el molde III para empacar los termos ¿Qué cantidad de material es necesario para dicho trabajo?

- A.** Una lámina de cartón de $40m$ de largo por $3m$ de ancho.
- B.** Una lámina de cartón de $400m$ de largo por $30m$ de ancho
- C.** Una lámina de cartón de $40m$ de largo por $30m$ de ancho.
- D.** Una lámina de cartón de $400m$ de largo por $30m$ de largo.

Fuente: LTE, 2018

	<i>Pensamiento métrico y sistemas de medidas</i>	<i>Grado 5°</i>
--	--	-----------------

Competencia(s) de los estándares básicos.	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos) (MEN, 2006).	
	Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos (MEN, 2006).	
	Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas (MEN, 2006).	
	Pensamiento métrico y sistema de medidas	Grado 7°
	Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos (MEN,2006).	
Análisis Didáctico de Contenido		
Para resolver el siguiente problema, se identifica que los moldes I y II tienen un radio igual o menor al del termo. Por tanto, estos quedan descartados, ya que no encajarían los moldes para empacar el termo. El molde debe ser lo suficientemente grande para albergar el termo sin restricciones de espacio. Por consiguiente, el molde III es el único que cumple esta condición, entonces es la única opción válida. En esta problemática solo implica analizar características básicas de una figura, es conocida como aprehensión perceptiva. Para el segundo problema, se resolverá con reconfiguraciones de la figura dada. Además, se utilizará la formulación de problemas como estrategia de apoyo en el proceso de resolución. También se emplearán distintos registros de representación semiótica y se tomarán en cuenta los conocimientos e información disponibles. Para finalizar, los anteriores aspectos se complementarán con las fases de Polya. El objetivo principal es determinar el área de la lámina necesaria para fabricar 1000 cajas. •Comprender el problema: Para comprender el problema es necesario hacer preguntas orientadoras como ¿qué información se tiene?, ¿Qué conocimientos previos se pueden abordar?, ¿qué objetivo se tiene para resolver el problema? Encontrar el área de la lámina para hacer 1000 cajas. • Concebir un plan: Para concebir el plan se considera los conocimientos previos, la información dada del problema, el objetivo establecido que nos permitirá desarrollar los subproblemas y resolver el problema dado. Para ello, surgen las siguientes preguntas: ¿cómo hallo el ancho y largo de la lámina para empacar 100 termos?, ¿se hallará con el área?, ¿cómo se halla el área del molde III?, ¿se puede reconfigurar la figura?, ¿puede ser un rectángulo y dos cuadrados?, ¿cuál es el área del rectángulo y el cuadrado?, ¿cómo cambiar las unidades de		

medida de *cm* a *m*?

•**Ejecución del plan:** Para solucionar el problema, se analiza la información proporcionada sobre el molde III. Este molde permite ensamblar una caja en la que se empacará el termo. Se identifica que posee cuatro caras y dos tapas (bases), las cuales se interceptan en sus aristas. En este proceso, se lleva a cabo una aprehensión tanto perceptiva como discursiva, ya que se reconoce la teoría subyacente en la representación gráfica. De esta manera, se establecen las bases para comprender el problema, lo que corresponde a una de las etapas mencionadas por Schoenfeld en la resolución de problemas.

Una vez identificada la información, es posible aplicar una estrategia (heurística) para abordar la solución. Como se mencionó previamente, el molde III cuenta con cuatro caras, a partir de las cuales se puede identificar:

$$cara = base * altura; base = 10\text{ cm}; altura = 25\text{ cm}$$

$$cara = 10\text{ cm} * 25\text{ cm}$$

$$cara = 250\text{ cm}^2$$

Pero, el molde III dispone de 4 caras. Por tanto,

$$4cara = 4 * 250\text{ cm}^2$$

$$4cara = 1000\text{ cm}^2$$



Sin embargo, falta otra parte del molde III que son las bases

$$tapa = base * altura; base = 10\text{ cm}; altura = 10\text{ cm}$$

$$tapa = 10\text{ cm} * 10\text{ cm}$$

$$tapa = 100\text{ cm}^2$$



Son dos tapas que tienen la caja

$$2tapa = 2 * 100\text{ cm}^2$$

$$2\text{ tapa} = 200\text{ cm}^2$$

Ahora, sumamos el total de caras y tapas para formar una caja.

$$Total\ del\ \acute{a}rea\ del\ molde\ III = 1000\text{ cm}^2 + 200\text{ cm}^2 = 1200\text{ cm}^2$$

Ahora, queda hacer una regla de 3

$$1 \text{ caja} \rightarrow 1200\text{cm}^2$$

$$1000 \text{ cajas} \rightarrow x$$

$$1\text{caja} * x = 1200\text{cm}^2 * 1000\text{caja}$$

$$x = \frac{1200\text{cm}^2 * 1000\text{caja}}{1 \text{ caja}}$$

$$x = 1200\text{cm}^2 * 1000$$

$$x = 1'200.000\text{cm}^2$$

Por tanto, se tiene que la lámina tiene un área de $1'200.000\text{cm}^2$, pero la respuesta esta en metro.

$$1\text{m}^2 \rightarrow 10.000\text{cm}^2$$

$$x \rightarrow 1'200.000\text{cm}^2$$

$$1\text{m}^2 * 1'200.000\text{cm}^2 = x * 10.000\text{cm}^2$$

$$x = \frac{1\text{m}^2 * 1'200.000\text{cm}^2}{10.000\text{cm}^2}$$

$$x = \text{m}^2 * 120$$

$$x = 120\text{m}^2$$

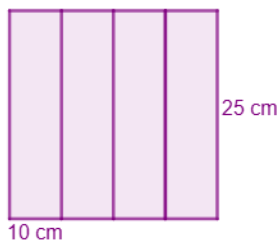
Por tanto, la opción correcta es la A ya que tenemos la base y la altura, y al hallar el total de la lámina nos da 1200m^2

•**Mirada hacia atrás:** Esta fase consiste en examinar cada uno de los pasos desarrollados para determinar si se cumplió el objetivo planteado desde el inicio: hallar el área de las láminas.

Asimismo, permitió encontrar la solución al problema mediante la reconfiguración de la figura de una forma diferente a la utilizada anteriormente. Además, existen otras maneras de resolverla.

Veamos, que hay otra manera de resolver el problema:

Para determinar el área de la caja del termo, es necesario analizar la configuración geométrica presentada en el problema. La figura muestra una base dividida en cuatro secciones iguales, cada una con medidas de 10 cm y la altura de 25 cm . Esta información permite calcular:



$$Area_{cara} = base \cdot altura$$

Donde,

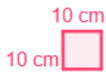
$$base = 4 * 10 \text{ cm} = 40 \text{ cm} \text{ y la } altura = 25 \text{ cm}$$

Por tanto,

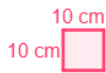
$$Cara = base \cdot altura = 40 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}^2$$

Sin embargo, se desconocen el área de la base y tapa de la caja

$$Area_{base} = base \cdot altura = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$



Ahora, como son dos partes (área de la base y la tapa) que nos falta por hallar. Entonces



$$2 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$$

En total, una lámina de la caja del termo nos da

$$Area_{cara} + Area_{base} = 1000 \text{ cm}^2 + 200 \text{ cm}^2 = 1200 \text{ cm}^2$$

En los siguientes pasos serán iguales a los planteados anteriormente. En el que se halla cuanto mide la lámina en cm^2 . Para finalizar, se hace el cambio de cm^2 a m^2 . Se puede preguntar: ¿abra una manera de resolverlo más corto de tal manera que no consuma tanto tiempo en las pruebas?

Figura 14. Pregunta 2 tipo Icfes.

ACTIVIDAD 2

Dado un segmento PQ, se puede construir un nuevo segmento que tenga cuatro veces la longitud de PQ. Para esto, se debe realizar el procedimiento que se muestra en la figura:

central del proceso.

• **Comprender el problema** consiste en analizar la información dada, reflexionar sobre los conocimientos matemáticos presentes, establecer objetivos, preguntas que orienten a resolver el problema como ¿qué información se da?, ¿qué conocimientos previos tengo en relación con lo planteado? Por consiguiente, se establece el objetivo de cuántos círculos me puede formar 16 veces el segmento PQ .

• **Concebir un plan:** En esta fase se tendrá en cuenta los conocimientos previos, la experiencia resolviendo este problema, el objetivo. Por consiguiente, se plantean los siguientes problemas: ¿cuál es el segmento inicial?, ¿qué relación tiene el segmento con el semicírculo?, ¿al formar el semicírculo se tiene en cuenta PQ o $2PQ$?, ¿qué relación hay entre el segmento y los círculos que se forman?, ¿se puede hallar con regla de 3?, ¿se puede establecer relación entre segmento PQ y el semicírculo?

• **Ejecutar el plan:** Al llevar a cabo el plan consiste en contestar todas las preguntas presentes en la anterior fase con miras de dar cuenta del objetivo presente en la anterior fase. Veamos: En el presente problema se puede identificar la siguiente relación entre los segmentos y la cantidad de semicírculos.

$$\text{Sea } PR = 2PQ \rightarrow 1 \text{ círculo}$$

$$PS = 4PQ \rightarrow 2 \text{ círculos}$$

Por consiguiente, en un primer momento se descarta la opción **A** y **B**, ya que ni uno ni dos círculos permitirán construir un segmento 16 veces más grande que PQ .

Por tanto, de lo anterior podemos inferir que:

$$24PQ \rightarrow 3 \text{ círculos}$$

$$8PQ \rightarrow 3 \text{ círculos}$$

Ahora, para construir un segmento 16 veces más grande que PQ , se tiene:

$$2(8PQ) \rightarrow 4 \text{ círculos}$$

$$16PQ \rightarrow 4 \text{ círculos}$$

Por tanto, 4 círculos permiten construir un segmento 16 veces más grande que PQ .

• **Mirada hacia atrás:**

Sin embargo, que pasaría si se resuelve por regla de tres. Veamos:

$$2PQ \rightarrow 1 \text{ círculo}$$

$$4PQ \rightarrow 2 \text{ círculos}$$

$$16PQ \rightarrow x$$

$$4PQ * x = 16PQ * 2 \text{ círculos}$$

$$x = 16PQ * 2 \text{ círculos} / 4PQ$$

$$x = 8 \text{ círculos}$$

Pero, se obtiene que se necesiten 8 círculos para obtener 16 veces PQ .

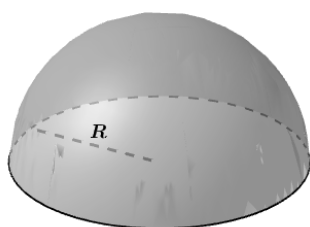
Se observa que las dos heurísticas aplicadas arrojan resultados diferentes. Según Polya y Schoenfeld, es fundamental **mirar hacia atrás** para revisar y validar cada paso del proceso, asegurando que la lógica utilizada sea consistente y correcta. Anteriormente, se puede evidenciar que al utilizar las heurísticas nos dio resultados diferentes, por tal motivo, es necesario regresar a la primera fase, para analizar qué fue lo que sucedió.

Por consiguiente, no es posible llevar a cabo la solución del problema con regla de tres debido a que hay que analizar una secuencia que va aumentando de $n+1$, de acuerdo con los pasos dados. Por tanto, nos podemos preguntar: ¿cuándo se puede utilizar regla de tres?, ¿cuándo se debe generalizar por secuencia?

Figura 15. Pregunta 3 tipo Icfes.

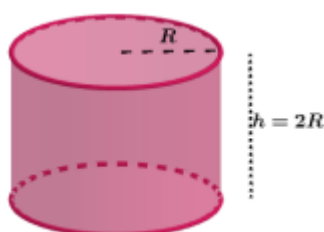
Actividad 3

Se tienen los siguientes recipientes, uno de forma semiesférica, uno cilíndrico y otro de forma cónica de radio R y altura h



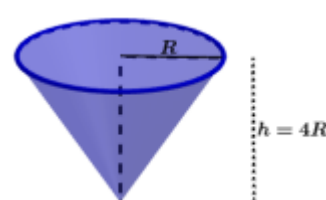
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Figura 1



$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Figura 2



$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Figura 3

Respeto a la capacidad de los recipientes, No es correcto afirmar que:

- A.** La capacidad de la figura 2 es el triple de la figura 1.
- B.** La capacidad de la figura 3 es el doble de la figura 1.
- C.** La capacidad de la figura 3 es la mitad de la figura 1.
- D.** La capacidad de la figura 1 es la tercera parte de la figura 2.

Fuente: LTE, 2025.

	Pensamiento métrico y sistema de medidas	Grado 3°
--	---	-----------------

Competencia(s) del libro de los estándares	Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir (longitud, áreas, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.	
	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Grado 5°
	Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos (MEN, 2006).	
	Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas (MEN, 2006).	
	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Grado 7°
	Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos (MEN, 2006).	
Análisis Didáctico de Contenido		
Para resolver el presente problema, se requiere identificar la información contenida tanto en las figuras como en el texto proporcionado. Asimismo, es necesario contar con conocimientos previos relacionados con el concepto de volumen, la sustitución en fórmulas dadas y el análisis de figuras geométricas. Además, se requiere los conocimientos teóricos previamente mencionados, así como habilidades en la formulación y resolución de problemas. •Comprender el problema: Consiste en analizar la información presente tanto en el contexto dado del problema como en la información presente en las figuras tridimensionales con el objetivo de mencionar cual información es incorrecta. Para ello, se plantean las siguientes preguntas, ¿Qué información se da?, ¿cuál es el radio de en las figuras?, ¿cuál es la altura en las figuras? •Concebir un plan: En esta fase se emplean diversas heurísticas para abordar la resolución del problema, basadas tanto en la experiencia como en los conocimientos previos del docente. A partir de este enfoque, surgen los siguientes interrogantes: ¿De acuerdo con las figuras y sus respectivos volúmenes, es necesario realizar algún ajuste en los valores presentados? En el caso de la figura que representa una semicircunferencia, ¿su volumen equivale al de una circunferencia completa? ¿Cómo se puede comprobar que los recipientes tienen la misma capacidad volumétrica? •Ejecutar el plan: De acuerdo con la fase anterior, se procederá a responder las preguntas formuladas, las cuales orientan la resolución del problema matemático y permiten verificar el cumplimiento del objetivo establecido desde el inicio. Asimismo, estas preguntas facilitarán el		

análisis sobre su pertinencia como guía en el proceso de resolución del problema.

Por consiguiente, se verifica cada una de las opciones para identificar cuál ítem no se cumple.

A. Verificar la capacidad de la figura 2 es el triple de la figura 1.

Para este punto, se debe tener en cuenta que no se calculará el volumen de toda la circunferencia, sino únicamente la mitad. Por lo tanto, la fórmula que se aplicará corresponde al volumen de la figura completa dividido entre dos:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Por consiguiente:

$$\frac{V_2}{3V_1} = \frac{\pi r^2 h}{3 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{\pi R^2 2R}{3 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{2\pi R^3}{1}}{3 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{2\pi R^3}{1} \cdot \frac{1}{2\pi R^3} = 1$$

B. Verificar la capacidad de la figura 3 es el doble de la figura 1.

$$\frac{V_3}{2V_1} = \frac{\frac{\pi r^2 h}{3}}{2 \cdot \frac{2\pi r^3}{3}} = \frac{\frac{\pi R^2 4R}{3}}{2 \cdot \frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = 1$$

C. Verificar la capacidad de la figura 3 es la mitad de la figura 1.

$$\frac{V_3}{\frac{1}{2}V_2} = \frac{\frac{\pi r^2 h}{3}}{\frac{\pi r^2 h}{2}} = \frac{\frac{\pi R^2 4R}{3}}{\frac{\pi R^2 2R}{2}} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{2}{2\pi R^3} = \frac{4}{3}$$

D. Verificar la capacidad de la figura 1 es la tercera parte de la figura 2.

$$\frac{V_1}{\frac{1}{3}V_2} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{\pi R^2 2R}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{3}{2\pi R^3} = 1$$

•**Mirada hacia atrás:** A partir de las verificaciones realizadas, se evidenció que, si el resultado es igual a 1, significa que las capacidades de las figuras son equivalentes. En cambio, si el resultado difiere de 1, indica que los volúmenes de las figuras son distintos. Por lo tanto, se puede concluir que se cumplió el objetivo de verificar si los volúmenes eran diferentes en el punto C. Además, este análisis permite identificar que existen otras formas posibles de resolver el problema.

Veamos para cada uno de los pasos anteriores, en la que se establecen igualdades entre los volúmenes:

A. capacidad de la figura 2 es el triple de la figura 1.

$$V_2 = 3V_1 \rightarrow \pi r^2 h = 3 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \rightarrow 2\pi R^3 = 3 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3 \rightarrow 2\pi R^3 = 2\pi R^3$$

B. capacidad de la figura 3 es el doble de la figura 1.

$$V_3 = 2V_1 \rightarrow \frac{\pi r^2 h}{3} = 2 \frac{2\pi r^3}{3} \rightarrow \frac{\pi R^2 4R}{3} = 2 \frac{2\pi R^3}{3} \rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

C. capacidad de la figura 3 es la mitad de la figura 1.

$$V_3 = \frac{1}{2} V_2 \rightarrow \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{2} \rightarrow \frac{\pi R^2 4R}{3} = \frac{\pi R^2 2R}{2} \rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{2} \rightarrow \frac{4}{3} \neq 1$$

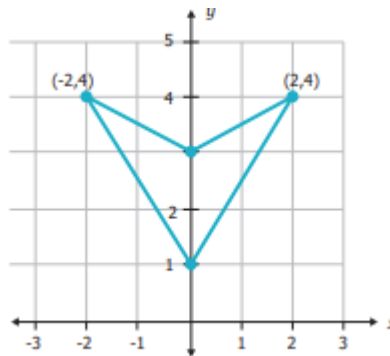
D. capacidad de la figura 1 es la tercera parte de la figura 2.

$$V_1 = \frac{1}{3} V_2 \rightarrow \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{\pi r^2 h}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Figura 16. Pregunta 4 tipo Icfes.

ACTIVIDAD 4 (Icfes, 2021)

Cada uno de los lados del cuadrilátero de la figura se traslada una unidad hacia la izquierda; luego se amplía esta al doble de su tamaño, manteniéndose fijo el vértice inferior. Dos de los vértices del cuadrilátero ampliado son (-5,7) y (-1,1).



¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices?

A. (-1,5) y (3,7).

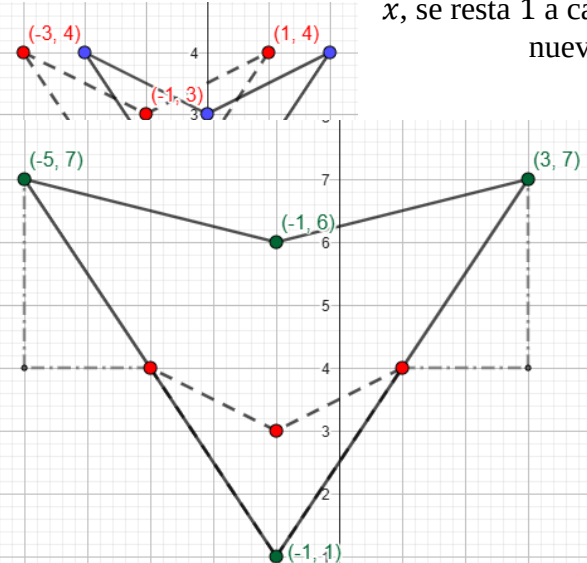
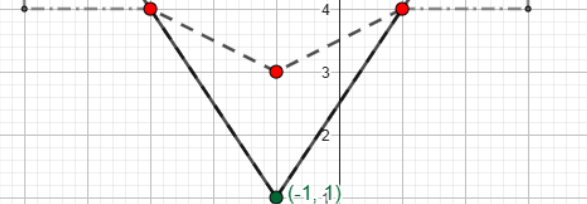
B. (5,-1) y (7,3).

C. (5,7) y (1,1).

D. (1,5) y (-5,-7)

Fuente: Icfes, 2021

	<i>Pensamiento espacial y sistemas geométricos</i>	<i>Grado 7°</i>
--	--	-----------------

Competencia(s) del libro de los estándares	Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geométrica (MEN, 2006).
Análisis Didáctico de Contenido	
Para resolver el problema, se aplican transformaciones en el plano cartesiano con base en los conocimientos sobre ubicación de puntos. Aunque parece sencillo, el enunciado presenta desafíos que requieren una comprensión. Siguiendo la propuesta de Chua (2023), se plantea el objetivo de encontrar las coordenadas dada la presente transformación y se utilizan preguntas orientadoras para guiar la resolución del problema.	
•Comprender el problema: En esta fase, el objetivo es determinar las coordenadas de los vértices a partir de la información presentada en el gráfico. Para ello, se deben identificar los conocimientos matemáticos necesarios que permitan obtener las nuevas coordenadas de la figura al ampliarla. Se plantean preguntas como: ¿Qué figura se presenta?, ¿qué es un cuadrilátero?, dadas las coordenadas iniciales, ¿cuáles serán las nuevas al trasladar la figura hacia la izquierda?, ¿cómo se duplica una figura? y ¿qué busca resolver el problema?...	
•Concebir un plan: Una vez comprendido el problema, identificada los conocimientos previos y el objetivo del problema, es posible descomponer el problema inicial en subproblemas más simples considerando los datos proporcionados. Veamos: Si al duplicar la figura se tienen dos puntos fijos, surgen preguntas que orientan al docente para guiar al estudiante en la resolución y, a su vez, permiten reconocer sus conocimientos matemáticos: ¿Cuáles serían los otros dos puntos faltantes?, ¿al ampliar la figura esta conserva su forma o cambia?, ¿Qué implica duplicar la figura?, ¿qué puntos corresponden a la coordenada x y cuáles a la coordenada y?	
•Ejecutar el plan: En esta fase se analizan las soluciones propuestas por los estudiantes y las dificultades que puedan presentarse. Al trasladar la figura una unidad hacia la izquierda en el eje x, se resta 1 a cada coordenada x, obteniendo así los vértices de la nueva representación gráfica en color rojo.  $(-2, 4) \rightarrow (-2 - 1, 4) = (-3, 4)$ $(2, 4) \rightarrow (2 - 1, 4) = (1, 4)$ $(0, 1) \rightarrow (0 - 1, 1) = (-1, 1)$ $(0, 3) \rightarrow (0 - 1, 3) = (-1, 3)$ Al duplicar el cuadrilátero, se multiplican por 2 las coordenadas de cada punto. Veamos:  $(-3, 4) \rightarrow 2(-3, 4) = (-6, 8)$ $(1, 4) \rightarrow 2(1, 4) = (2, 8)$ $(-1, 4) \rightarrow 2(-1, 4) = (-2, 8)$ $(-1, 3) \rightarrow 2(-1, 3) = (-2, 6)$ •Mirada hacia atrás: Según las opciones de respuesta de la pregunta principal, ninguna coincide con la solución obtenida. Por ello, se	

retoman las fases anteriores. En la ejecución del plan, solo se considera correcta la etapa en la que la figura se desplaza una unidad hacia la izquierda. Surge entonces la necesidad de precisar qué implica duplicar una figura. A partir de los datos proporcionados, se identifican dos puntos fijos: $(-5,7)$ y $(-1,1)$. Se plantea si duplicar significa conservar la misma figura, pero en mayor escala, y si este proceso puede generar simetría. En caso de existir, se analizan los vértices tras el desplazamiento y los movimientos realizados en los puntos dados, con el fin de determinar los vértices faltantes.

Figura 17. Pregunta 5 tipo Icfes.

ACTIVIDAD 5

Un jardinero siembra varios árboles en el parque y monitorea su crecimiento. Cada mes registró en una tabla la cantidad de árboles que tenían más de 10 cm de altura.

Mes	Cantidad de árboles
1	17
2	29
3	41
4	53

Si x representa el mes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la cantidad de árboles que tenían más de 10 cm de altura en dicho mes?

A. $12x + 5$

B. $x + 17$

C. $12x + 17$

D. $x + 12$

Fuente: Icfes, 2023.

Competencia(s) del libro de los estándares	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	Grado 7°
	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas) (MEN, 2006).	
Análisis Didáctico de Contenido		
En este problema es necesario pasar del pensamiento numérico al variacional, lo cual es posible mediante el uso de diferentes representaciones semióticas que transmiten la misma información. Para ello, es fundamental aplicar las fases de trabajo previamente establecidas. ●Comprender el problema: En esta fase se formulan preguntas que permitan entender el enunciado, identificar los conocimientos previos y precisar el objetivo, el cual consiste en generalizar patrones numéricos representados en una tabla. Para ello, es necesario realizar conversiones. Surgen así interrogantes como: ¿Qué se solicita?, ¿cuántos árboles hay por mes? y		

¿qué relación existe entre el mes y la cantidad de árboles?

•**Concebir un plan:** Una vez comprendido el problema, el docente debe desglosarlo en subproblemas que orienten a los estudiantes en su resolución. Entre las preguntas que pueden guiar este proceso se encuentran: ¿Cuál es la relación entre el mes y la cantidad de árboles?, ¿cuál es la diferencia de árboles por mes? y ¿a qué hace referencia dicha diferencia?, ¿cómo se generaliza dicha información?

•**Ejecutar el plan:** La relación entre los meses y los árboles muestra que, por cada mes, una cantidad determinada de ellos supera los 10 *cm* de crecimiento.

Se observa que esta cantidad aumenta en 12 árboles cada mes.

Por ello, la función que modela la situación es:

$$f(x) = 12x.$$

Sin embargo, como en el primer mes ya hay 17 árboles que superan los 10 *cm*, por tanto, la función se ajusta a:

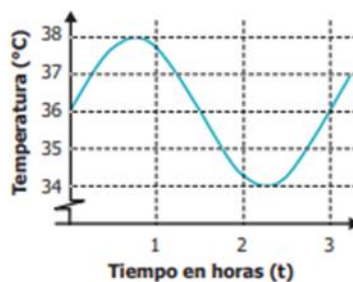
$$f(x) = 12x + 17.$$

•**Mirada hacia atrás:** Es posible desarrollar las siguientes preguntas, para conocer las matemáticas de los estudiantes: ¿Existen otras maneras de resolver el problema? ¿Qué pasaría si en el primer mes ningún árbol hubiese crecido más de 10 *cm* de altura? ¿Cómo cambiarían los resultados si nos dieran la cantidad total de árboles que crecieron cada mes y nos dijeran que, en el primer mes, 5 árboles crecieron 10 *cm*? ¿Tiene sentido que un crecimiento sea negativo? ¿En qué situación real podría ocurrir?

Figura 18. Pregunta 6 tipo Icfes.

ACTIVIDAD 6

Para observar los efectos de un medicamento, este se inyecta en un animal y se registra el comportamiento de la temperatura ($^{\circ}\text{C}$) en función del tiempo (horas), como lo muestra la gráfica.



¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la curva que describe la temperatura del animal en función del tiempo?

A. $f(t) = 2\cos(\frac{2\pi}{3}t) + 36$

B. $f(t) = 3\cos(\frac{2\pi}{3}t) + 38$

C. $f(t) = 2\sin(\frac{2\pi}{3}t) + 36$

D. $f(t) = 3\sin(\frac{2\pi}{3}t) + 38$

Fuente: Icfes, 2023.

	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Grado 9°
Competencia(s) del libro de los estándares	Análisis en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (MEN, 2006).	
Análisis Didáctico de Contenido		
En este problema se debe analizar la información de la gráfica y, a partir de ella, seleccionar otra forma de representarla. El objetivo es utilizar un registro distinto que permita percibir con mayor claridad los efectos del medicamento, registrado a través del comportamiento de la temperatura del animal durante las primeras tres horas posteriores a la inyección. ●Comprender el problema: Para que el estudiante entienda el problema, el docente puede guiar con preguntas como: ¿Qué información proporciona el problema? ¿Qué se puede identificar de la función? ¿Qué representa la coordenada x? ¿Qué representa la coordenada y? ¿Qué tipo de función es?; El propósito es que el estudiante reconozca que se busca utilizar un registro de representación semiótica diferente que exprese la misma información que la gráfica original de la función. ●Concebir un plan: Una vez comprendido el problema, se formularán preguntas para guiar a los estudiantes hacia su resolución, partiendo de sus conocimientos previos y del objetivo planteado. Algunas de estas preguntas pueden ser: ¿Qué tipo de función es? ¿Qué representa la temperatura con respecto al tiempo? ¿Qué valor representa π? ¿Cuál es la temperatura máxima registrada? ¿Cuál es la temperatura mínima registrada? ¿Cómo se calcula la amplitud de la onda a partir de esos valores?; En $t = 0$, ¿la gráfica está en un punto máximo, mínimo o en el valor medio?; Si comienza en un máximo, ¿qué función trigonométrica resulta más conveniente: <i>seno</i> o <i>coseno</i>? ●Ejecución del plan: Para esta etapa es fundamental reconocer que se trata de una función seno que crece cuando: $x = 0$ (donde $x = t$) y $y = 0$ Por lo tanto, corresponde a la función trigonométrica <i>seno</i>.		

Según la gráfica, la amplitud es de 2, lo que permite identificar que, de las opciones dadas, la función es:

$$f(t) = 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right).$$

Cuando $t = 0$, se cumple que $f(0) = 0$. Sin embargo, la temperatura inicial en $t = 0$ es de 36°C , por lo que la función final es:

$$f(t) = 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 36.$$

Mirada hacia atrás: A partir de lo anterior, es pertinente reflexionar sobre el origen del valor $\frac{2\pi}{3}$: ¿a cuánto equivale π ?; Si π está presente en el círculo unitario o en una circunferencia, ¿por qué aparece también en la función presente? ¿Cuál es la relación entre ambos contextos?

4.2 Análisis de resultados de la UDG en el marco de la recuperación de la experiencia para el fortalecimiento de la propuesta

En el presente apartado se da continuidad al O.E. 2, referido a la recuperación de la experiencia mediante la implementación de la UDG, y se aborda el O.E. 3, orientado al análisis de las fases anteriores. El propósito es caracterizar los conocimientos y habilidades matemáticas y didácticas asociados con la coordinación entre los registros de representación semiótica, la visualización y la proposición de problemas matemáticos (PPM) en situaciones de resolución de problemas matemáticos (RPM).

En este sentido, la propuesta responde a las necesidades identificadas en el contexto del Preicfes, con el fin de diseñar una estrategia de formación docente en matemáticas. Parte del reconocimiento de las condiciones socioeconómicas de los estudiantes, quienes en su mayoría provienen de colegios públicos, pertenecen a los estratos 1 y 2 y son hijos de trabajadores del sector obrero. Estas circunstancias limitan sus oportunidades de acceso a recursos educativos complementarios, lo que acentúa la necesidad de fortalecer las competencias docentes. El objetivo central es mejorar los puntajes de los estudiantes en las Pruebas Saber 11, lo cual no solo incrementaría sus posibilidades de ingreso a instituciones de educación superior públicas, sino que también contribuiría a consolidar sus conocimientos matemáticos, fundamentales para un adecuado desempeño en áreas afines.

Esta propuesta se sustenta en la experiencia de la autora como docente de matemáticas en el Preicfes Popular María Cano, en los procesos de preparación para la Prueba Saber 11. Asimismo,

se fundamenta en la comunicación con otros docentes, quienes han compartido percepciones y retos asociados a la enseñanza de las matemáticas en este contexto:

Se reconoce que los conocimientos matemáticos son fundamentales no solo en el módulo específico de matemáticas, sino también en el de ciencias naturales, donde resultan necesarios para la resolución de problemas que resalta la importancia de desarrollar habilidades para interpretar adecuadamente la información presente en enunciados, gráficos, imágenes y tablas, lo cual exige tanto pensamiento lógico-matemático como competencias de comprensión lectora.

La docente este año hizo parte del Preicfes Popular Comunitario Paulo Freire. En esta experiencia se ha identificado que, en las anteriores promociones, si bien una parte significativa de los estudiantes logra ingresar a la educación superior pública tras presentar las Pruebas Saber 11, son pocos quienes logran permanecer hasta culminar programas de formación en áreas afines con las matemáticas. Además, los análisis realizados a partir de pruebas diagnósticas evidencian que los estudiantes presentan mayores dificultades en problemas que involucran representaciones geométricas, entre otras ..., razón por la cual esta competencia ha sido priorizada en el desarrollo de la propuesta.

A continuación, se presenta la transcripción de la propuesta hipotética guía: En el presente análisis de las transcripciones de la implementación se consideran las grabaciones de audio y video, así como las notas tomadas (Viramontes, 2024) por la docente, con el fin de reconstruir la experiencia. Se seleccionaron por su potencial para aportar información significativa. Para desarrollar el análisis, primero se examinaron las transcripciones y, posteriormente, se estableció una relación con la teoría presentada en el capítulo 2, en la que se abordan las representaciones semióticas, la visualización y la formulación de problemas como mediadores en la resolución de problemas matemáticos, elementos indispensables en la FDPPM.

En las transcripciones se tendrán en cuenta los siguientes ítems:

- **Li:** hace referencia a las intervenciones de la docente y de los estudiantes. Además, resulta útil en el análisis, ya que permite identificar las líneas en las que se sustentan los análisis.

- **D:** identifica las intervenciones de la docente.
- **E_i:** hace referencia a los estudiantes. Cuando intervenga un estudiante específico, se registrará como E_i (donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$) para señalar a cuál corresponde.
- **E:** indica que la intervención fue realizada de manera simultánea por dos o más estudiantes.
- Puntos suspensivos (...): indican que el estudiante tardó en responder o que hubo intervención de otras personas durante su participación.

Es importante señalar que, para abordar las actividades del cuadernillo, fue necesario considerar ciertos conocimientos previos que permitieran a los estudiantes comprender los problemas propuestos. Antes de responder las preguntas, la docente dedicó un espacio inicial para revisar los conceptos base requeridos en cada caso. Durante el desarrollo de las actividades, en un primer momento se otorgaron entre cinco y quince minutos para que los grupos de estudiantes intentaran resolver los problemas. Posteriormente, se acercó a algunos grupos con el propósito de identificar posibles errores, reconocer las estrategias empleadas y orientar el proceso de reflexión (metacognición). Finalmente, cada problema fue resuelto de forma colectiva, favoreciendo las diferentes estrategias utilizadas para resolver.

Además, al finalizar cada actividad se realizaron modificaciones en las preguntas con el propósito de analizar cómo los estudiantes responderían ante una pregunta diferente utilizando los mismos datos iniciales. Este ejercicio permitió valorar si los estudiantes habían comprendido la noción matemática involucrada. En este sentido, la docente formuló preguntas hipotéticas, como, por ejemplo: ¿qué ocurriría si, en lugar de calcular el área, se solicitara el perímetro?, con el fin de profundizar en la comprensión del problema.

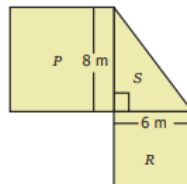
A continuación, se presentan las transcripciones con sus respectivos análisis:

- En el presente problema (Actividad 0 de la UDG), inicialmente se repasaron los conceptos de área y perímetro, así como la diferencia entre ambos en determinadas figuras geométricas. Posteriormente, se retomó la discusión previa sobre el problema planteado para calcular el

área de los cuadrados, verificando que los resultados coincidieran con lo representado en la figura.

ACTIVIDAD 0 (Guía-1 Icfes 2023)

La siguiente figura está compuesta por los cuadrados P y R y el triángulo rectángulo S .



Si el área del cuadrado R es 36 m^2 y el área del cuadrado P es 64 m^2 , ¿cuál es el área total de la figura?

A. 48 m^2

B. 100 m^2

C. 124 m^2

D. 148 m^2

Línea	Transcripción
L1	D: ¿Qué debemos hallar?
L2	E2: El área total de la figura.
L3	D: ¿Qué información nos dan?
L4	E2: El área de P y R .
L5	D: ¿Cómo podemos hallar el área total de la figura?
L6	E2: Sumando las áreas dadas.
L7	D: Muy bien, pero nos falta algo. ¿Qué área es la de P y R ?
L8	E2: Es el área de la figura que está aquí.
L9	D: ¿Cuáles son esas figuras?
L10	E2: Son como cuadrados.
L11	D: Muy bien. Entonces, ¿qué área de toda la figura nos faltaría?
L12	E2: Creo que el triángulo, pero los lados del triángulo corresponden a los cuadrados.
L13	D: Ahora, según lo que vimos al inicio de la clase, ¿cómo se halla el área y el perímetro de las figuras?
L14	E2: Depende.
L15	D: ¿De qué depende?
L16	E2: Del cuadrado... tenemos la base y la altura de la figura, por eso sabemos cuál es el área de los cuadrados.
L17	D: Señálame cuál es el área de los cuadrados, de acuerdo con la figura.
L18	E2: Pues es esto de acá adentro. <i>(Señala lo que está relleno en los cuadrados).</i>

L19	D: Ahora, ¿cuál es la base y la altura del triángulo?
L20	E2: No tiene... Por tanto, el área de la figura es la suma del área de los cuadrados.
L21	D: ¿Por qué? ¿Y los lados del triángulo qué valores tienen?
L22	E2: No le corresponden al triángulo.
L23	D: Dame un momento. <i>Dado que la estudiante no comprendía completamente, se preguntó a la clase y algunos estudiantes respondieron:</i>
L24	D: ¿Qué información nos dan en el problema 3?
L25	E: El área de los cuadrados.
L26	D: ¿Qué nos preguntan?
L27	E: El área total de la figura.
L28	D: ¿Cómo hacemos para hallar el área total?
L29	E3: Sumamos las áreas dadas... y hallamos el área del triángulo rectángulo.
L30	D: Pero, ¿cómo hallamos el área de la figura?, ¿es el borde o es lo que se encuentra dentro de la figura?
L31	E1: Aún no la hemos hallado. Estamos encontrando el lado faltante del triángulo utilizando el teorema de Pitágoras.
L32	D: ¿Por qué estás hallando ese lado?
L33	E1: Porque necesito calcular el área del triángulo para poder encontrar el área total.
L34	D: Ahora, ¿cómo hallamos el área de una figura?, ¿es el borde o es lo que se encuentra dentro de la figura?
L35	E1: Es la suma de los lados.
L36	D: Según el ejercicio que realizamos en clase, ¿cuál era el área?
L37	E: ... Es lo que está dentro de la figura.
L38	D: Según el área que hallamos anteriormente del rectángulo, ¿cómo la calculamos?
L39	E: Multiplicamos la base con la altura...Entonces, para hallar el área del triángulo se debe multiplicar la base por la altura y dividir entre dos... Lo que está dentro de la figura.
L40	D: Exacto. Entonces ¿cuánto da el área?
L41	E1: El área nos dio $24 m^2$.
L42	D: Entonces, ¿qué nos preguntaron?
L43	E: Cuál es el área total de la figura.
L44	D: ¿Cómo se halla?
L45	E1: Solo sumamos las áreas que nos dieron de los cuadrados con el área del triángulo. Eso me dio 124
L46	D: Exacto... ¿Entendiste?
L47	E2: ...Sí.

En el presente análisis se identifican distintas fases de la resolución de problemas, en las que la docente formula preguntas para orientar la comprensión del enunciado (Santos-Trigo, 2024; Schoenfeld, 2015) identificación de los datos, los conocimientos previos, el objetivo del problema (Chua, 2023). Asimismo, las preguntas que median en las intervenciones se relacionan con la fase de concebir un plan (Santos-Trigo, 2024; Chua, 2023; Schoenfeld, 2015), pues guía a los estudiantes hacia la solución utilizando distintos registros de representación semiótica (Torregrosa, 2010, 2017). Durante este proceso, las respuestas de los estudiantes reflejan tanto sus conocimientos como sus dificultades (Cai *et al.*, 2021); en el caso de **E1**, los errores se vinculan con la forma en que la docente plantea las preguntas, mientras que en **E2** se evidencia la importancia de recurrir a los conocimientos matemáticos previamente trabajados para reconocer y corregir errores. A continuación, se presenta el análisis de la transcripción:

Las preguntas orientadoras de la docente buscan que los estudiantes reconozcan la información proporcionada por el problema, sin necesidad de la información de la figura (L1-L4; L24-L27), identificando que se pretende hallar el área total de la figura y las áreas parciales indicadas en el enunciado. Esta estrategia se relaciona con comprender el problema planteado (Schoenfeld, 2015; Schoenfeld, 1985; Polya, 1973), ya que permite comprender el problema y el objetivo de la actividad. Por tanto, el enunciado escrito de un problema geométrico es el punto de partida que permite comprender y seleccionar la información relevante en la representación, lo que es crucial para resolver problemas (Rincón *et al.*, 2017).

Por otro lado, cuando la docente pregunta cómo se puede hallar el área total de la figura, algunos estudiantes responden que deben “sumar las áreas de las figuras dadas” (L5-L12; L28-L29; L33). Esto muestra que, para ciertos estudiantes como E2 (L6), este tipo de problema tipo Icfes pareciera no representa una dificultad, pues menciona de manera inmediata un procedimiento adecuado para hallar el área total de la figura. En términos de Silver (1994; citado por Baumanns & Rott, 2021), el planteamiento de problemas por parte de los docentes permite identificar los conocimientos de los estudiantes; en este sentido, para algunos estudiantes, el enunciado de la actividad 0 no es un problema para el estudiante, ya que disponen de una estrategia inmediata para resolver (Polya, 1981; citado por Rodríguez, 2012).

En consecuencia, al preguntar por las áreas de P, Q y S, la docente impulsa a los estudiantes a interactuar con la figura geométrica y a concebir y ejecutar un plan de resolución. En este proceso, surgen diferentes estrategias y dificultades. **E2** sostiene que no es necesario calcular el área del triángulo porque “no tiene lados” (L7-L12) y, en consecuencia, propone sumar únicamente las áreas de los rectángulos (L17-L22). Esta interpretación refleja una dificultad en la aprehensión operativa (Duval, 2017), al considerar que, tras la descomposición de la figura, los cuadrados “heredan” los lados del triángulo (L12-L13; L16-L20), lo que evidencia limitaciones en el manejo de distintos registros de representación. Por otro lado, **E1** plantea el uso del teorema de Pitágoras para hallar un lado faltante (L31), lo que muestra un error en la selección de la estrategia o heurísticas. Por tanto, es necesario que el docente establezca preguntas que permita la interacción de los estudiantes con las representaciones geométricas; estas preguntas actúan como estrategias que guían y motivan a los estudiantes a comprender, analizar y explorar los objetos geométricos en distintos contextos (Rincón *et al.*, 2017).

Ante estas dificultades, la docente interviene para que **E1** reconozca su error, retomando los conceptos previos sobre áreas y perímetros trabajados en clases anteriores (L34-L39). En este proceso se evidencian distintas formas de aprehensión (Duval, 1998): la perceptiva, al identificar en la figura sus lados y las medidas; la discursiva, al relacionar la situación con los conocimientos matemáticos previos sobre área y perímetro, lo que implica un cambio de registro; y la operativa, al realizar mentalmente las transformaciones necesarias para reconocer el área y el perímetro de las figuras de cuadrados y del triángulo presentes en el problema. En consecuencia, la proposición de problemas por parte del docente es una estrategia fundamental para abordar dificultades, estas dificultades pueden estar relacionadas con decidir las heurísticas que se aplica en un momento dado (Rincón *et al.*, 2017). Asimismo, las aprehensiones visuales que tienen los estudiantes no garantizan necesariamente la solución correcta del problema (Rincón *et al.*, 2017), como se evidencia con el caso de **E1**.

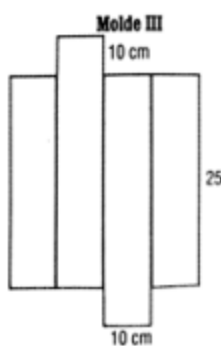
Por otra parte, la dificultad de **E2** persiste, posiblemente porque la docente insiste en preguntar por la diferencia entre área y perímetro, aludiendo a lo que corresponde a lo “dentro” o lo “fuera” de la figura (L30; L34). En consecuencia, según Rincón, Montes y Mola (2017), la formulación de problemas por parte del docente no sólo sirve para guiar y apoyar a los

estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, sino que también funciona como una estrategia para identificar los conocimientos previos y posibles errores que este cometiendo el estudiante durante el proceso; Sin embargo, es importante destacar que la manera en cómo el docente expresa y plantea estos problemas influye en la forma en la que el estudiante abordan y comprende el problema matemático.

Por otra parte, la estrategia de trabajo grupal permitió abordar estos errores y evidenciar otras dificultades, como la confusión de **E1** entre área y perímetro (L34-L35). Al ser guiado por la docente, **E1** reconoce su error y resolver el problema correctamente junto con el grupo (L35-L39). Así mismo, la dificultad que presentaba **E2** cuando se descomponía la figura, pero no consta que esté haya superado esa dificultad.

Se concluye que el trabajo colaborativo media en la comprensión de la información del problema y la resolución (Rincón *et al.*, 2017) de las actividades (L39-L44), permitiendo identificar vacíos en el conocimiento de algunos estudiantes que inicialmente parecían no tener dificultades, como se evidenció en los casos de **E1** y **E2**.

- En el presente problema (Actividad 1 de la UDG), a partir de la sesión anterior realizada ocho días antes, algunos conocimientos fundamentales para la solución, tales como las conversiones, unidades de medida y los procedimientos de multiplicación con números grandes. Estos saberes resultan especialmente relevantes dado que en la prueba Icfes no se permite el uso de calculadora, lo que exige del estudiante precisión y agilidad en el manejo de estos procesos matemáticos básicos.



2. Si se desea construir 1.000 cajas, como el molde III para empaquetar los termos ¿Qué cantidad de material es necesario para dicho trabajo?

- | | |
|--|---|
| A. Una lámina de cartón de 40m de largo por 3m de ancho. | B. Una lámina de cartón de 400m de largo por 30m de ancho |
| C. Una lámina de cartón de 40m de largo por 30m de ancho. | D. Una lámina de cartón de 400m de largo por 30m de largo. |

Línea	Transcripción
L1	E4: Profe, estoy confundida.
L2	D: ¿Por qué?
L3	E4: Si lo veo así... ¿cómo va a ser el largo? (<i>señala, tomando el largo como el ancho del molde III</i>). ¿Y cómo va a ser el ancho? (<i>señala, tomando el ancho como el largo del molde III</i>). La idea es tener la lámina que cumpla con las condiciones...
L4	E5: Para hallar el área de la lámina del molde III, ¿cuál sería el largo y el ancho?
L5	D: Según la imagen, ¿para ti cuál sería?
L6	E5: Pues este, profe, es el ancho (<i>señala la base de la figura</i>) y este es el largo (<i>señala otra parte de la figura</i>).
L7	D: Exacto.
L8	E5: Está bien... pero según las opciones de respuesta, están confundiendo el largo con el ancho.
L9	D: Ahhh, ya entiendo la duda de ustedes. En este caso podemos tomar cualquiera como base o altura; lo importante es que coincida con lo que se está enunciando. Según la información de la imagen... ¿ya hallaste el área de la figura?
L10	E6: Ya casi, el área de la caja es 10×25 .
L11	D: Pero, ¿los 10 <i>cm</i> dónde están ubicados en la figura?
L12	E6: Es la base.
L13	D: Según la imagen, ¿10 <i>cm</i> es la base de toda la figura?
L14	E5: Mmm... ¿entonces cómo se halla la base?
L15	D: Según la corrección que se hizo en el tablero, ¿los 10 <i>cm</i> a qué corresponden?
L16	E6: ...A una parte de la figura. Nosotros debemos hallar la base de toda la figura.
L17	D: ¡Siii!... Pero, ¿cómo lo hallaron?
L18	E6: Pues, parece que los anchos de la figura miden lo mismo que la base dada.
L19	D: Explícame.
L20	E6: Tenemos 4 bases que van a medir lo mismo (<i>señala los rectángulos que forman la base</i>). Entonces, sumamos 4 veces 10.
L21	E5: Esto suma 40.
L22	D: Muy bien, entonces la base es de 40 <i>cm</i> ... Ahora, ¿cuál es el área de la figura?
L23	E7: 1000 cm^2 , porque se multiplican los 40 <i>cm</i> de la base por los 25 <i>cm</i> de la figura.
L24	D: Muy bien, ¿será que ya encontramos toda el área de la figura?
L25	E6: ¡Siii!
L26	E7: ...No, no le hemos hallado el área a las tapas de la caja... que serían $10 * 10$, y al final eso da 100.
L27	D: Muy bien, 100 cm^2 ... Entonces, ¿ya hallamos el área total de la figura?
L28	E: No, falta la otra tapa de la caja.

L29	D: ¿Cómo hacemos para hallar el área de la otra tapa? E6: La podemos hallar, así como hallamos la primera tapa.
L30	D: Muy bien. Entonces... según la información de la imagen y como hallamos la
L31	anterior tapa, ¿cómo hallamos esta? E6: Si son dos tapas que tienen las mismas medidas... podemos sumar 100 más 100
L32	y eso nos daría 200 ... cm^2 D: Entonces... ¿Cuál es el área de la caja? ¿Cómo se halla?
L33	E: Sumamos las áreas dadas.
L34	D: ¿Cuáles áreas hallamos?
L35	E: La de 1.000 y la de 200.
L36	D: Ahora, ¿cuál es el área total de la figura?
L37	E: 1.200 cm^2 .
L38	E8: Profe, entonces ya tenemos la respuesta.
L39	E7: No, porque hallamos el área de una sola lámina de la caja.
L40	D: Entonces, ¿cómo hacemos para hallar el área de la lámina de las 1.000 cajas?... si
L41	con 1 caja se tiene que el área de la figura es de 1.200 cm^2 . ¿Cómo se halla el área de dos láminas? E6: Sumamos dos veces 1.200.
L42	E7: O multiplicamos 2 por 1.200 cm^2 . El resultado sale más rápido.
L43	D: Exacto. Ahora, ¿cómo hallamos el área de las mil cajas?
L44	E6: Multiplicamos 1.200 cm^2 por 1.000.
L45	E: El resultado da 1'200.000 cm^2 (sin hacer uso de la calculadora).
L46	E10: No entiendo, ¿por qué se multiplica por 1.000?
L47	D: De acuerdo con la información del problema, ¿cuántas cajas se van a armar?
L48	E10: 1.000 cajas.
L49	D: Exacto... ahora, ¿el área que hallamos de cuántas cajas es?
L50	E: De una... el área es de 1.200.
L51	D: Muy bien. Entonces, ¿cómo debemos hallar el área de las 1.000 cajas?
L52	E9: Tocaría sumar 1.200, pero mil veces.
L53	E7: Por eso queda más fácil multiplicarlo por 1.000.
L54	D: Muy bien, entonces ¿ya tenemos la respuesta correcta, de acuerdo con las opciones
L55	dadas por el problema? E: No profe, hay que pasar de centímetros cuadrados a metros cuadrados... Según lo
L56	que se hizo la vez pasada (conversiones), nos dio 120 m^2 ... Por tanto, la respuesta correcta es la que, al multiplicar la base por la altura nos dé 120 m^2 .
L57	E6: Pues la opción A. (Después, la estudiante se acerca y comenta)

L58	E6: Profe, lo que dije no estuvo mal al comienzo.
L59	D: ¿Qué dijiste?
L60	E6: Para hallar el área de la figura dije que se multiplica $10 * 25$.
L61	D: Ahh ya... Entonces ¿cómo hallarías el área de la caja?
L62	E6: Profe, yo podía haber hallado el área de la figura tomando una parte (señala un rectángulo pequeño que forma la figura) y al final, para hallar toda el área del rectángulo grande, solo multiplicaría esa área por 4, que son las partes que faltaban. Así mismo, hallamos una parte de una lámina.

En el análisis se evidencia; que el docente plantea preguntas orientadas para que los estudiantes comprendan el problema y reconozcan su objetivo (Santos-Trigo, 2024; Chua, 2023), promoviendo la participación (Rincón *et al.*, 2017). Además, propone situaciones que permitan identificar los conocimientos previos y guíen la elaboración de un plan de resolución (Santos-Trigo, 2020; Schoenfeld, 2015). Durante el proceso, se retoman los contenidos trabajados en clases anteriores; son conocidos como heurísticas (Santos-Trigo, 2020), como el cálculo de áreas, perímetros, conversiones de medida y transformaciones geométricas. Además, el trabajo en equipo favorece el intercambio de estrategias heurísticas y el aprendizaje colaborativo (Rincón *et al.*, 2017). Asimismo, se observa que un estudiante analiza el procedimiento realizado y reflexiona sobre la manera de resolver el problema, relacionando la configuración de la figura, la visualización y sus conocimientos matemáticos para avanzar en la solución (Schoenfeld, 2015). A continuación, se presenta el análisis de la transcripción:

Se presenta una dificultad que no recae en la comprensión del estudiante (**E4** y **E5**), sino de la representación gráfica utilizada en el enunciado. Debido a la posición de la figura, se genera ambigüedad en la identificación de las dimensiones; la base representada como la altura y el alto se interpreta como el ancho, lo que genera una contradicción en la lectura de los datos (L1-L9). Esta confusión constituye un obstáculo para el estudiante; pues en el proceso de aprehensión discursiva intenta relacionar lo que visualiza con sus conocimientos previos (Duval, 2017). Pero, al percibir que dicha relación no coincide, se le dificulta resolver el problema.

El estudiante E6 da un primer paso para resolver el ejercicio (L10). Sin embargo, al considerar que la base corresponde a 10 cm, el docente interviene para analizar dicha suposición y aclara que no se está teniendo en cuenta la base total del rectángulo grande (L11; L13; L15). A

partir de lo trabajado previamente en el tablero, el docente formula preguntas orientadoras que permiten precisar cuál es la base que realmente debe considerarse (L15-L19). Ante esta retroalimentación, el estudiante **E6**, con la colaboración de **E5**, reconoce el procedimiento correcto para determinar la base del rectángulo grande (L16-L21). Esto refleja que la intervención docente, apoyada en el uso de preguntas y en el trabajo colaborativo, favorece la corrección de interpretaciones erróneas y el avance en la resolución del problema. La intervención del docente resulta fundamental, dado que el estudiante, en un primer momento, solo reconoció una parte de la medida correspondiente a la base del rectángulo. Ante esta dificultad, fue necesario orientar el análisis hacia la identificación de la base total. Este proceso evidencia la importancia de coordinar distintos registros de representación, ya que la comprensión de una figura geométrica no se limita a un único registro, sino que exige articular las informaciones disponibles para dar sentido al problema (Duval, 2017).

Una vez encontrada la base de la figura, la docente recuerda que la medida está en centímetros (L22). Posteriormente, el estudiante **E7** calcula el área del rectángulo mayor (L23) y menciona que aún falta hallar el área de las tapas (L26). A partir de esta observación, el grupo procede a calcular el área de una de ellas, aunque advierte que todavía no se han identificado todas las tapas de la caja (L28; L30). Más adelante, el estudiante **E6** completa el procedimiento y obtiene el área correspondiente a las tapas (L32). En este proceso se ponen en juego distintas aprehensiones de la figura. Por un lado, la aprehensión operativa permite descomponer la figura (Duval, 2017) en un rectángulo y cuadrado para organizar el procedimiento de cálculo. Por otro lado, la aprehensión discursiva posibilita relacionar esta configuración con los conocimientos matemáticos previos (Duval, 2017), justificando la pertinencia de los cálculos realizados. La articulación de ambas aprehensiones facilita que los estudiantes avancen en la resolución de una parte significativa del problema.

La docente pregunta por el área total de la caja (L33), y los estudiantes responden que se obtiene sumando todas las áreas (L36). Con esta estrategia, mencionan las áreas que deben calcular y hallan el área de una lámina (L38). A partir de este resultado, la docente pregunta cómo calcular el área de mil cajas (L40) y señala que una lámina corresponde a 1.200 cm^2 (L41). Luego, pregunta cuánto sería el área de dos láminas. En este punto, los estudiantes

proponen distintos procedimientos: E6 plantea sumar 1.200 cm^2 mil veces (L42), mientras que E7 propone multiplicar 1.200 cm^2 por mil (L43). Finalmente, la docente amplía la situación y pregunta cómo calcular el área de mil cajas (L44). Los estudiantes concluyen que se debe multiplicar 1.200 cm^2 por mil para obtener el área total de las láminas correspondientes a las mil cajas, sin recurrir a la calculadora (L45). El texto explica que la labor del docente es fundamental en la orientación del proceso de resolución de problemas mediante la formulación de estos y la utilización de sus conocimientos, tal como señala Santos-Trigo (2024). Esto implica que el profesor guía a los estudiantes para que utilicen sus conocimientos matemáticos específicos dentro de un mismo registro de representación, facilitando así la comprensión y la resolución efectiva de los problemas, promoviendo un trabajo coordinado y coherente en torno a un mismo sistema de símbolos y lenguaje matemático (Rincón *et al.*, 2017).

Por otro lado, el estudiante **E10** no comprende la razón por la cual se multiplica por mil para hallar el área total de las láminas correspondientes a las 1.000 cajas (L47). Ante esto, la docente formula preguntas que lo llevan a recordar la información de la pregunta principal: “¿cuál es el área de las cajas que se hallará?” (L47-L48). Luego, se retoma la idea del área total de una caja ya calculada y se pregunta a cuántas cajas corresponde ese valor (L50). Gracias a esta orientación, el estudiante recuerda el dato de que una caja tiene un área de 1.200 cm^2 y la docente retoma la pregunta central del problema: ¿cómo se debe hallar el área de las mil cajas? (L51). En su respuesta, explica que sería necesario sumar mil veces el área de una de las cajas, que corresponde a 1.200 cm^2 (L52). Ante esto, **E7** interviene y señala que resulta más sencillo multiplicar por mil (L53). Por tanto, según Polya (1965, citado por Benítez *et al.*, 2021) para que se comprenda el problema, es necesario el planteamiento de problemas, como un paso fundamental en la resolución. Además, el trabajo en equipo favorece el aprendizaje de heurísticas, ya que, al compartir y contrastar distintos procedimientos, los estudiantes enriquecen sus estrategias y fortalecen la coordinación en el uso de registros de representación semiótica en un mismo registro (Rincón *et al.*, 2017).

Anteriormente, se había calculado que el área de la lámina para diseñar las 1.000 cajas correspondía a $1'200.000 \text{ cm}^2$ (L45). Sin embargo, los estudiantes reconocen que es necesario

convertir de cm^2 a m^2 , lo cual da como resultado $120 m^2$ al multiplicar la base por la altura (L56). De esta manera, el estudiante E6 concluye que la respuesta correcta es la opción A (L57). El trabajo colaborativo y los temas abordados durante la clase son fundamentales para facilitar la resolución del problema matemático, ya que a través del intercambio de ideas y la discusión en grupo los estudiantes podrán construir un entendimiento más profundo, compartir estrategias y fortalecer su proceso de resolución (Rincón *et al.*, 2017).

Por último, el estudiante E6 se acerca donde la docente, para explicar que la manera en la que pretendía resolver el problema no era incorrecta (L58). Señala que había considerado calcular el área a partir de un rectángulo pequeño de $10 cm \times 25 cm$ ubicado dentro del rectángulo mayor (L62). Explica que este cálculo corresponde al área de un rectángulo pequeño, y que luego pensaba multiplicar el resultado por 4, ya que son cuatro los rectángulos pequeños que conforman el rectángulo grande. El estudiante reflexiona sobre la manera en que resolvió el problema matemático, analizando su proceso y valorando la viabilidad de la estrategia utilizada. Según Polya (1965; citado por Benítez *et al.*, 2021; Santos-Trigo, 2024), esta revisión es fundamental, pues permite identificar diferentes formas de abordar la tarea. En la misma línea, Schoenfeld (1992; citado por Benítez *et al.*, 2021) destaca la importancia de tomar conciencia de cada decisión adoptada durante la resolución, lo que permite ajustar las estrategias de acuerdo con las necesidades del proceso y fortalece la metacognición y la autorregulación en el trabajo matemático. Este ejercicio de reflexión evidencia la aprehensión operativa, dado que el estudiante transforma la representación geométrica del rectángulo grande y de los rectángulos pequeños en contenido, facilitando la comprensión y la organización conceptual. Asimismo, se manifiesta un aspecto discursivo cuando el estudiante interactúa con sus conocimientos y los expresa, integrando recursos visuales y verbales en su razonamiento, lo que potencia la comprensión (Rincón *et al.*, 2017).

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones generales

La propuesta busca que la autora de este trabajo, docente en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, fortalezca sus competencias para la enseñanza en el Preicfes Popular María Cano. Se parte de la idea de que una formación docente puede generar cambios significativos en la manera de enseñar y, por ende, en los resultados de los estudiantes en matemáticas. Por consiguiente, el propósito central es aportar a la disminución de las brechas en el acceso a la educación superior, teniendo en cuenta que la mayoría de los estudiantes pertenecen a estratos 1 y 2 y cuentan con recursos educativos muy limitados. En este marco, el objetivo principal es identificar y describir los contenidos matemáticos y las habilidades didácticas relacionadas con el uso de múltiples representaciones y la visualización en la resolución de problemas, como base para construir una propuesta didáctica que apoye la preparación de los estudiantes del curso de preicfes.

Además, la propuesta se fundamenta en la experiencia docente de la autora y en el diálogo con otros profesores, lo que ha permitido reconocer la importancia de trabajar con representaciones geométricas, gráficas e imágenes. Estas suelen generar dificultades en los estudiantes al momento de interpretar la información, lo que evidencia la necesidad de fortalecer dichas competencias. En este sentido, las matemáticas resultan indispensables no solo en su módulo específico, sino también en ciencias naturales, donde se requiere interpretar enunciados, gráficos y tablas. Asimismo, la autora, en calidad de docente en formación, ha participado en el Preicfes Popular Comunitario Paulo Freire, donde junto con otros docentes se identificó, a partir de diagnósticos de la Prueba Saber 11, que las principales dificultades de los estudiantes se encuentran en el manejo de representaciones geométricas. Por esta razón, dicha competencia se

ha priorizado en la propuesta, y los avances en los resultados han mostrado mejoras progresivas en este aspecto.

En relación con el Objetivo Específico 1, se identifican los contenidos matemáticos y los elementos de análisis que sustentan ML-CAD para FDPPM, aplicable a contextos de Preicfes comunitarios. Dicho modelo articula los contenidos curriculares de la Prueba Saber 11 vinculados con la “interpretación y representación” y “la formulación y ejecución de procedimientos”, asociados a la subcompetencia de *resolución de problemas*. Sin embargo, en la competencia “formulación y ejecución de procedimientos” del Icfes se evidencian enfoques contradictorios: mientras se plantea que la resolución de problemas debe partir de la exploración, también se promueve la aplicación mecánica de procedimientos que en la práctica se reducen a la memorización y repetición de ejercicios. En este marco, se evidencia la necesidad de fortalecer enfoques didácticos alternativos, como la proposición de problemas, la coordinación entre distintos registros de representación semiótica y el desarrollo de la visualización, los cuales permiten potenciar la resolución de problemas geométrico (o gráfico).

En relación con el Objetivo Específico 2, la selección y aplicación de actividades didácticas se realizó a partir de siete preguntas tipo Icfes, tomadas del libro de los Tres Editores (2018) y del programa Evaluar para Avanzar del Ministerio de Educación (2023a). El análisis de estas actividades evidencia que las estrategias fundamentadas en la visualización, la coordinación de múltiples representaciones y la proposición de problemas median en la resolución de problemas matemáticas con representaciones gráficas. Asimismo, permitieron identificar la amplitud temática abordada, reconocer diversas formas de resolver un mismo problema y anticipar posibles errores, dificultades u obstáculos que pueden surgir en el aula (Schoenfeld, 2015).

En relación con el Objetivo Específico 3, el análisis retrospectivo permite dar respuesta a la pregunta problema: ¿Qué conocimientos y habilidades matemáticas y didácticas relacionadas con el uso de múltiples representaciones y la visualización, en situaciones de resolución de problemas, permiten fundamentar una propuesta didáctica para la formación y desarrollo profesional de una docente comprometida con la preparación de estudiantes del programa Preicfes Popular María Cano?...

Los resultados muestran que la docente-investigadora logra avances significativos en el desarrollo de conocimientos y habilidades didácticas relacionadas con la visualización, el uso de múltiples representaciones y la proposición de problemas como mediadores en la resolución de problemas. Estas estrategias le permiten analizar los procesos de pensamiento de los estudiantes, anticipar posibles errores y diseñar intervenciones pedagógicas más pertinentes. Sin embargo, se identifican aspectos que requieren fortalecerse, especialmente la selección de actividades didácticas, el manejo del lenguaje geométrico y la coherencia entre las representaciones y el contexto de las preguntas.

La proposición de problemas se consolida como una herramienta heurística que amplía el conocimiento didáctico del contenido de la docente, al permitirle explorar cómo los estudiantes comprenden, argumentan y construyen significados matemáticos (Santos-Trigo, 2024). A través de este enfoque, la docente-investigadora desarrolla la capacidad de analizar las estrategias de sus estudiantes y de ajustar sus decisiones pedagógicas para favorecer la comprensión conceptual.

Además, la visualización emerge como heurística fundamental tanto para la interpretación de representaciones geométricas, gráficas y tabulares, como para la articulación entre distintos registros de representación semiótica que median para resolver este tipo de problemas (Duval, 2017). Este proceso no solo potencia el razonamiento matemático de los estudiantes, sino que también fortalece el conocimiento profesional de la docente sobre cómo mediar la comprensión a partir de imágenes, esquemas o gráficos. De igual manera, la coordinación de múltiples representaciones permite a la docente reflexionar sobre la forma en que las diferentes representaciones contribuyen a la construcción del significado matemático y sobre la necesidad de seleccionar aquellas que favorezcan según Rincón, Montes y mola (2017) el articular y coordinar entre lo visual, lo simbólico, lo algebraico...

No obstante, se reconoce la importancia de seleccionar cuidadosamente las actividades, en especial aquellas relacionadas con problemas geométricos, de modo que la información presentada en la representación tenga coherencia con el contexto de la pregunta (Rincón *et al.*, 2017). Además, el lenguaje empleado por la docente tiene un papel crucial en la percepción y

comprensión del estudiante. Según Rincón, Montes y Mola (2017), el uso adecuado del lenguaje geométrico y la comunicación clara son fundamentales para que los estudiantes puedan interpretar correctamente las representaciones geométricas, minimizar obstáculos y establecer conexiones entre sus conocimientos previos y las nuevas representaciones.

En conclusión, los resultados muestran que el fortalecimiento de la visualización, la proposición de problemas y el uso de múltiples representaciones como mediadores en situaciones de resolución de problemas no solo mejoran los aprendizajes de los estudiantes, sino que consolidan la formación profesional de la docente en preparación. Estos elementos se convierten en recursos clave para enriquecer su práctica, anticipar dificultades y proponer estrategias más flexibles, con lo cual se sientan bases sólidas para seguir transformando la enseñanza de las matemáticas en el Preicfes Popular María Cano.

5.2. Recomendaciones

Para futuras investigaciones, se sugiere continuar con el desarrollo y validación de la propuesta mediante el diseño de actividades tipo Icfes que integren distintos registros de representación semiótica como geométrico, gráfico, tabular, etc., que fortalezcan la visualización como mediadora en la resolución de problemas. Estas acciones permitirán evaluar su incidencia en el desempeño de los estudiantes del Preicfes Popular María Cano y en el fortalecimiento del conocimiento didáctico de los docentes en formación, aportando a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos comunitarios. Así mismo como le ayudara a aquellos estudiante qye ingresen a estuair carreras en la educación superior

Referencias

- Arcavi, (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 251–269. b
- Bedoya Moreno, E. (2024). Didáctica de las matemáticas - conocimiento y análisis didáctico: formación de profesores, innovación curricular e investigación en educación matemática. En E. Bedoya (Ed.), *Tópicos de DdM* (pp. 1-35). Universidad del Valle.
- Bedoya Moreno, E. (2025). Modelo didáctico – curricular en EM & FPM. En E. Bedoya (Ed.), *Investigación y sistematización de experiencias EM & FPM* (pp. 1-23). Universidad del Valle.
- Benítez Mojica, D., Yaker Agudelo, H., & Taquez, H. A. (2021). Experiencias significativas en educación matemática. *Editorial Universidad Icesi*. <https://doi.org/10.18046/EUI/disc.4.2023>
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11(1), 14-20.
- Cai, J., & Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: Conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1403–1416. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3>
- Camargo Uribe, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Universidad de Antioquia.

- Castellano Torres, N., Morga Rodríguez, L. E., & Castellano Torres, A. (2013). *Educación por competencias: hacia la excelencia en la formación superior*. Red Tercer Milenio.
- Chinofunga, M.D., Chigeza, P. & Taylor, S. (2025). How can procedural flowcharts support the development of mathematics problem-solving skills?. *Math Ed Res J* 37, 85–123. <https://doi.org/10.1007/s13394-024-00483-3>
- Chua, P.H. (2011). Characteristics of problem posing of grade 9 students on geometric tasks [Tesis doctoral, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore]. Repositorio institucional NIE. <https://repository.nie.edu.sg/handle/10497/4500>
- Chua, P.H. (2023). Regulation of Cognition During Problem Posing: A Case Study. In: Toh, T.L., Santos-Trigo, M., Chua, P.H., Abdullah, N.A., Zhang, D. (eds) *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education*. Springer, Singapore. https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/978-981-99-7205-0_12
- Chvátal, R., Slezáková, J. & Popelka, S (2024). Analysis of problem-solving strategies for the development of geometric imagination using eye-tracking. *Educ Inf Technol* 29, 12969–12987. <https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/s10639-023-12395-z>
- Cotrado, B., Burgos, M & Beltrán-Pellicer, P. (2024). Análisis Didáctico Curricular: una experiencia con futuros profesores. *Educação e Realidade*, 49, e132399. <https://doi.org/10.1590/2175-6236132399vs01>
- de Haro, E. F. (2010). El trabajo en equipo mediante aprendizaje cooperativo. *Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación*. 1-15.
- Departamento Nacional de Planeación [DNP]. (2024, 19 de abril). Pobreza y desigualdad. Pobreza multidimensional. <https://www.dane.gov.co/index.php/servicios-alciudadano/tramites/cultura-estadistica>
- Díaz Quero, V., (2006). Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico. *Laurus*,

12(Ext), 88-103.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega Restrepo, Trad.; 2.^a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.

Estrada Paz, A & Guerrero Alvarado, M. C . (2022). *Diseño e implementación de un ambiente virtual de aprendizaje para el entrenamiento de estudiantes en Pruebas Icfes Saber 11 de matemáticas*. [Tesis de pregrado], Universidad Nacional Abierta y a Distancia.

Grupo de Investigación sobre Pruebas Masivas en Colombia. (2008). El surgimiento del Servicio Nacional de Pruebas del ICFES en las voces de sus protagonistas. *Revista Colombiana de Educación*, 2(3), 115-134.

Guaman-Gualan, J., Luján-Caiza, K., Caiza-Ortiz, D., y Varguillas-Carmona, C., (2024). Los Factores Sociales Relacionados con el Rendimiento Académico: Un Análisis en la Educación Superior. *Reincisol*, 3(6), pp. 7069-7089. [https://doi.org/10.59282/reincisol.V3\(6\)7069-7089](https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(6)7069-7089)

Gutiérrez, M. C. C., & Sandoval, P. A. G. (2019). La práctica pedagógica, un espacio de reflexión en la formación docente. *Gaceta Académica de La Licenciatura En Educación Básica*, 2(1), 13. <https://ciencialatina.org/index.php/cienciala/article/view/6156/9342>

ICETEX. (2025, 3 de julio). *Subsidios Mejores Resultados Saber 11 - Distinción Andrés Bello*. (Colombia, potencia mundial de la vida). <https://web.icetex.gov.co/es/-/subsidios-mejores-resultados-saber-11>

Institución Educativa Marino Renjifo Salcedo. (2019). Rendición de Cuentas año 2019. <https://www.valledelcauca.gov.co/loader.php?lServicio=Tools2&lTipo=viewpdf&id=41739>

Institución Educativa Nuestra Señora de la Candelaria. (2024). Proyecto Educativo Institucional (PEI) Comunitario Intercultural. <https://iensecan.edu.co/wp-content/uploads/2025/05/PEI-REVISION-Y-AJUSTE-OCT-2024-WEB.pdf>

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [Icfes]. (2021). *Pruebas Matemáticas, Cuadernillo de preguntas. Saber 11°*. Bogotá: Dirección de Evaluación, Icfes.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [Icfes]. (2023). *Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2023*. (Colombia, potencia mundial de la vida).
https://www.icfes.gov.co/wp-content/uploads/2025/04/Informe_Saber11_2023.pdf

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [Icfes]. (2025). *Guía de orientación del Examen Saber 11.º 2025-2*. Bogotá, Colombia. [30-abril-guia-orientacion-saber-11o-2025-2.pdf](#)

Jara, O. H. (2018). Para qué sirve la sistematización de experiencias características, utilidades y condiciones. *La sistematización de experiencias: prácticas y teoría para otros mundos posibles*. CINDE. 75-114.

Lagla-Chicaiza, R. X., Martínez-Guerrero, L. P., González-Albarracín, E. E., & Cerna-Sandoval, A. V. (2023). Las estrategias pedagógicas innovadoras: un análisis crítico en la formación docente. *Polo del Conocimiento*. Pol. (Edición núm. 85) 8(11), 320-337.
10.23857/pc.v8i11.6211

Los Tres Editores S.A.S [LTE]. (2018). Estándares y competencias en razonamiento cuantitativo y matemáticas.

Los Tres Editores S.A.S (LTE). (2024). Informe de resultados. Análisis del rendimiento académico por áreas y por estudiantes.

Martínez-Miraval, M. A., & García-Cuéllar, D. J. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. *Formación universitaria*, 13(5), 177-190. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177>

McGowan, MM y Boscia, MW (2016). Abrir más que una simple bolsa: descubrir el diagrama de flujo como una herramienta eficaz para la resolución de problemas. *The Journal of Health*

Administration Education, 33 (1), 211–219.

Ministerio de Educación Nacional [MEN].(2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015, Diciembre 17). Pruebas Saber. [Página WEB]. <https://www.mineduacion.gov.co/1621/w3-article-244735.html#:~:text=Pruebas%20Saber%2011%C2%B0&text=Comprobar%20el%20grado%20de%20desarrollo,de%20su%20proyecto%20de%20vida>

Ministerio de Educación Nacional. (2019). *Informe de gestión 2019*. https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-385377_recurso_13.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2023). *IV. Educación Superior en Colombia [Informe]*. (Colombia, potencia mundial de la vida). https://www.mineduacion.gov.co/1780/articles-416059_recurso_13.pdf

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2023). Evaluar para avanzar 3° a 11°. Google Sites. <https://sites.google.com/view/evaluar-para-avanzar-2021/inicio>

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2024, 01 de abril). Requisitos para ingresar a la educación superior. [Página web]. <https://www.mineduacion.gov.co/portal/Educacion-superior/Sistema-de-Educacion-Superior/235581:Requisitos-para-ingresar-a-la-educacion-superior>

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Mora, A. y Múnera, L. (2019). “Ser pilo no paga”: privatización, desigualdad y desfinanciamiento de la universidad pública en Colombia. *Ciencia Política*, 14(27), 115-142.

- Mudhefi, F., Mabotja, K., & Muthelo, D. (2024). The use of Van Hiele's geometric thinking model to interpret Grade 12 learners' learning difficulties in Euclidean Geometry. *Perspectives in Education*, 42(2), 162-175.
- Orozco García, J. (2024). *El conocimiento didáctico y la visualización en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la pendiente de la recta tangente a una curva*. (Tesis Maestría en Educación). Universidad del Valle.
- Perez Lizarazo, J. K. (2018). *Las pruebas saber 11y la enseñanza de las matemáticas en una escuela secundaria de Bucaramanga-Colombia: un estudio de casos*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de la Plata]. Repositorio Institucional- Universidad Nacional de la plata.
- Picón, P. & Mariño, J. (2016). Pre Icfes y preuniversitarios populares en Colombia Educación popular. *Aportes*, 60, 153-175.
- Restrepo, G. (1998). Un sistema nacional de evaluación para una educación en la democracia y una democracia en la educación.
<http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/educacion/educar1/indice.htm>
- Ramírez, M. y Rocha, M. (2006). Guía para el desarrollo de competencias docentes. Trillas.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: ice - Horsori.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Colección Digital Eudoxus*, 1(5).
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

- Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 153-174). Ediciones UNGS y EDUVIM.
- Rincón Santana, E., Montes de Oca Recio, N., y Mola Reyes, C. (2017). Estrategia para la comprensión de los objetos geométricos, en la carrera de Educación, mención Matemática. *Didasc@ lia: Didáctica y Educación*, 8(4), 179-198.
- Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686–693). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM Mathematics Education* 56, 211–222.
<https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>
- Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 229-243). Springer International Publishing.
10.1007/978-3-319-12688-3
- Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 275-300.
https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005
- Torregrosa, G., Quesada, H. & Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327- 340.
<https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.187>
- Torregrosa. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (12), 1-17.

Viramontes Anaya, E. (2024). Análisis cualitativo en la investigación. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 15, e2074-e2074.
https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.2074