



**LOS PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y
RAZONAMIENTO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
GEOMÉTRICO: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA**

LUIS CARLOS BAHAMÓN CHARRY

YONATHAN BONELO AYALA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2015



**LOS PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y
RAZONAMIENTO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
GEOMÉTRICO: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA**

LUIS CARLOS BAHAMÓN CHARRY

YONATHAN BONELO AYALA

**Trabajo de Grado para optar el título de
LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS**

DIRECTOR

JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2015**



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

TÍTULO DEL TRABAJO:	LOS PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN, VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO:							
Se trata de:	Proyecto		Informe Final	x				
Director:	JORGE ENRIQUE GALEANO CANO							
1er Evaluador:	MYRIAM B. VEGA R.							
2do Evaluador:	MÓNICA APONTE							
Fecha y Hora	Año:	2015	Mes:	Febrero	Día:	26	Hora:	3:00 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
LUIS CARLOS BAHAMÓN CHARRY	0938051	3469
YONATHÁN BONELO AYALA	0836596	3469

EVALUACIÓN

Aprobado		Meritorio	X	Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:					
Año:		Mes:		Día:	
				Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



OBSERVACIONES	X	RECOMENDACIONES	RAZÓN DEL DESACUERDO - ALTERNATIVAS:
(si se considera necesario, usar hojas adicionales)			
El trabajo se considera aprobado y veniente. Se presentan las razones de los evaluadores para este concepto: 1. Cabe destacar la pertinencia del modelo teórico planteado, destacan un marco adecuado por parte de los evaluadores de la teoría de R. Duval, lo que les permitió delimitar mejor los análisis de la experiencia. 2. Se destaca el estudio realizado, escrito en un lenguaje fluido, muestra de una apropiación honesta y transparente de los modelos teóricos y metodológicos. 3. Lo anterior hace que el trabajo sea valioso para la educación matemática y de resultar como un resultado importante.			
Director del Trabajo de Grado		1er Evaluador	2do Evaluador



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licencia Creative Commons* con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

**AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN
DIGITAL DE OBRAS**

**PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el
Repositorio Institucional.**

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera:

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la *Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia* cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5col/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente describala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: los Procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del Pensamiento Matemático

Autores:

Nombre: Luis Carlos Bahamón Charry

Firma: [Firma]
C.C. 1444.136.576

Nombre: YONATHAN BENEZ AVALA

Firma: [Firma]
C.C. 79542289

Nombre:

Firma:
C.C.

Fecha:

(Si desea una versión digital del formulario, una vez está diligenciado utilice los programas "pdfmaker" o "Zupdi", los cuales le permitirán guardar el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

¹ Los detalles serán requeridos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Desarrollado por Grupo de Trabajo Diseño Curricular
División de Bibliotecas

Agradecimientos

Agradecemos a la vida, al sol y a la luna, al día y a la noche, por permitirnos realizar este proyecto de vida, agradecemos también a nuestras familias por llenar de gracia nuestro fugaz paso por la madre tierra y apoyarnos en todos nuestros sueños; Gracias inmensas también al profesor Jorge Enrique Galeano Cano por su grandiosa compañía, dedicación y sagacidad académica, que nos ha dado la oportunidad de creer en nosotros.

Resumen

El presente trabajo de grado tiene como fin presentar una experiencia realizada al interior del colegio Jefferson del municipio de Yumbo, Valle del Cauca; en la que se diseñó y propusieron dos situaciones guiadas bajo la metodología de los Experimentos de Enseñanza en compañía de un grupo de investigadores de la Universidad del Valle logrando formular 8 tareas que buscan en el estudiante potenciar las actividades Cognitivas de Visualización y Razonamiento en el trabajo con figuras geométricas en grado sexto.

Palabras claves: Visualización, Razonamiento, Diseño de Experimentos, Experimento de Enseñanza, Enseñanza de la Geometría, Perspectiva Cognitiva de la Geometría.

Contenido

Índice de Gráficas.....	2
Índice de Ilustraciones	4
Introducción.....	5
CAPÍTULO I	7
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	7
1.1.1 Contexto.....	7
1.1.2 Objetivos de esta Propuesta	20
Capítulo II.....	21
2.1 Un Panorama Cognitivo de la Enseñanza de las Matemáticas	21
2.1.1 consideraciones generales.....	21
2.1.2 La visualización en la Geometría de la Escuela	26
2.1.3 El lenguaje en la búsqueda del Razonamiento	29
2.1.4 Construir en Geometría	38
2.2 Sobre la Metodología de la Propuesta.....	42
2.2.1 Experimento de Enseñanza.....	42
Capítulo III	50
3.1 Diseños de Experimentos de Enseñanza.....	50
3.1.1 Tareas propuestas en las situaciones	51
3.1.2 Aspectos curriculares de las situaciones.....	74
3.1.3 Qué caracteriza a las situaciones	75
3.2 Análisis de las situaciones propuestas en el aula	77
3.2.1 Situación 1.....	78
3.2.1.1 ANÁLISIS SITUACIÓN 1 PRIMER DIA.....	85
3.2.1.2 ANÁLISIS SITUACIÓN 1 SEGUNDO DIA	98
3.2.2 Situación 2.....	107
3.2.2.1 ANALISIS SITUACIÓN 2 TERCER DIA	118
Conclusiones	124
Bibliografía	130

Índice de Gráficas

Gráfica 1. Desempeño de los estudiantes del colegio Jefferson en las pruebas de estado, año 2012.....	18
Gráfica 2. Instrumento 1: molde de cuadrado roto (i1MCR).	52
Gráfica 3. Instrumento 2 y 3: molde de triángulo escaleno roto (i2MTER) y plantilla rota (i3PR).	55
Gráfica 4. Instrumento 2 y 4, molde de triángulo escaleno roto (i2MTER) y regla no informativa (i4RNI). Actividad 3	57
Gráfica 5. Instrumentos de la actividad 4 i2MTER e i4RNI	59
Gráfica 6. Instrumentos de la Actividad 5, i4RNI y una superficie cualquiera (i5SC).....	61
Gráfica 7. Figuras implementadas en la Situación 2	67
Gráfica 8. Actividad 1, uso de la herramienta como plantilla	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 9. Actividad 1, realización de trazos individuales.....	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 10. Actividad 2, socialización de resolución por encaje .	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 11. Actividad 2, socialización resolución por relación entre ángulos	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 12. Actividad 5, resolución por encaje	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 13. Actividad 5, resolución uso de instrumentos como escuadras	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 14. Actividad 5 resolución por proyección de puntos	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 15. Actividad 5, Resolución por proyección de puntos...	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 16. Actividad 5 Resolución por sobreposición	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 17. Situación 2, Actividad 2 Dibuja el Mensaje.....	¡Error! Marcador no definido.
Gráfica 18. Situación 2, Actividad 2 Hoja de Mensajes	¡Error! Marcador no definido.

Gráfica 19. Situación 2, Actividad 2 Hoja del Dibujante.....**¡Error! Marcador no definido.**

Gráfica 20. Situación 2, Actividad 2 Estudiantes 11 y 25**¡Error! Marcador no definido.**

Gráfica 21. Situación 2, Actividad 2 Estudiante 25**¡Error! Marcador no definido.**

Gráfica 22. Situación 2 Actividad 2, Estudiantes 2 y 3.....**¡Error! Marcador no definido.**

Gráfica 23. Situación 2, Actividad 2 Estudiante 4**¡Error! Marcador no definido.**

Gráfica 24. Figura construida en la conversación AUD- 2014- WA0012 hasta AUD-2014- WA0019**¡Error! Marcador no definido.**

Gráfica 25. Reconocimiento de las propiedades del cuadrilátero**¡Error! Marcador no definido.**

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Situación 1. Actividad 1 reproducción de un cuadrado	54
Ilustración 2. Situación 1. Actividad 2 reproducción de un triángulo.....	56
Ilustración 3. Situación 1. Actividad 3 reproducción de un triángulo.....	58
Ilustración 4. Situación 1. Actividad 4 reproducción de un triángulo.....	60
Ilustración 5. Situación 1 Actividad 5 reproducción de un triángulo.....	62
Ilustración 6. Situación 2. Actividad 1 El celular	63
Ilustración 7. Situación 2. Actividad 2 dibuja el mensaje, hoja del descriptor	68
Ilustración 8. Situación 2. Actividad 2 dibuja el mensaje, hoja de mensajes.....	69
Ilustración 9. Situación 2. Actividad 2 dibuja el mensaje	70
Ilustración 10. Situación 2, Actividad 3 la última palabra del diccionario	73

Introducción

El presente trabajo presenta un arduo esfuerzo por caracterizar, reconocer y llevar a la práctica los conceptos de la teoría de Duval quien desde sus estudios de la semiosis y el pensamiento humano, genera grandes aportes a la enseñanza de las matemáticas en particular, a la enseñanza de la geometría.

Este trabajo presenta los resultados de la puesta en marcha de un experimento de enseñanza que se ha diseñado con los elementos de la teoría propuesta por Duval y sigue un modelo de metodología cualitativa propuesta por Cobb, este experimento de enseñanza muestra en detalle elementos a considerar a la hora de elaborar un diseño de experimento de enseñanza, así mismo da cuenta de los alcances y limitaciones del mismo.

Es entonces como la presente investigación enmarcada en los experimentos de enseñanza y la teoría semiótico – cognitiva de Duval, marca un nuevo referente en la búsqueda de situaciones que ayuden a los estudiantes a potenciar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, para mejorar su desempeño en matemáticas.

Los resultados y posteriores análisis de la aplicación del experimento de enseñanza, no son más que un primer intento en marcha de esta metodología y de sus alcances dentro de un amplio campo investigativo en la educación matemática.

El capítulo 1 presenta la problemática alrededor del aprendizaje de la geometría y propone estudiar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento como posibilidad de mejorar el desempeño de los estudiantes de grado sexto del colegio Jefferson.

El capítulo 2 condensa una discusión en torno a la enseñanza - aprendizaje de la geometría desde un punto de vista cognitivo, en el que se busca agrupar elementos que soporten una propuesta de intervención al interior del colegio Jefferson que permita potenciar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento; en este capítulo también se presenta la metodología de la intervención señalando con precisión cada una de las fases de la propuesta.

El capítulo 3 da cuenta de los elementos que componen la intervención realizada en el colegio Jefferson así mismo brinda detalle de las situaciones propuestas y realizadas por los estudiantes; este capítulo finaliza brindando los resultados del análisis de la intervención realizada en el grado sexto del colegio Jefferson.

CAPÍTULO I

Elementos a considerar en una propuesta que favorezcan las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el trabajo con figuras geométricas bidimensionales.

En este capítulo se presentan diferentes perspectivas alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría al mismo tiempo se presenta la teoría semiótico cognitiva de Duval en la búsqueda de elementos que den cuenta de las actividades cognitivas presentes en la geometría.

En este primer capítulo se plantea una problemática y unos objetivos que apuntan a que en el estudio de las actividades cognitivas los estudiantes de grado sexto del colegio Jefferson potencien su visualización y su razonamiento.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 Contexto

Desde un panorama general, en las dos últimas décadas de historia como nación, la educación básica secundaria y en particular la educación matemática en Colombia, ha propuesto enfrentar distintos problemas de orden académico y curricular en torno a la enseñanza y el aprendizaje, impulsando en cierta medida la necesidad de reformar, o más bien, de lograr construir una propuesta curricular que fuese capaz de soportar un cambio de ruta para lo que en ese entonces era la educación en

Colombia. Estos esfuerzos hoy se resumen en la ley 115 de 1994, una ley que reúne desde distintos puntos de vista una mirada plural, diversa y multicultural sobre la educación en Colombia.

Esta reforma busca dar una directriz clara sobre lo que se espera lograr en el ejercicio de formación, señalando aspectos curriculares como las temáticas, las metodologías, los esquemas evaluativos, entre otros más, integrando la propuesta de un currículo que favorece a la inclusión de elementos que permitan construir ambientes idóneos para potenciar y llenar de significado el aprendizaje, es decir reunir actividades, instrumentos, constructos teóricos, etc. Que faciliten a los estudiantes un pasaje al conocimiento.

[La ley 115 de 1994](#) incorpora dentro del perfil del estudiante ([Art. 5](#), [91](#) y [92](#)) la capacidad para tomar decisiones que le permitan responder a las demandas y a los cambios que las sociedades modernas demandan, preparándolos para los retos laborales, políticos y sociales que como ciudadanos van a enfrentar en la inevitable búsqueda de mejorar sus condiciones de vida. Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), producto de esta ley, brindan una orientación a docentes, directivos e instituciones en diferentes procesos enmarcados en la construcción de su Proyecto Educativo Institucional (PEI); pieza clave y constitutiva del proceso de formación y rendimiento de los estudiantes.

El Ministerio Nacional de Educación (MEN), propone un esquema de trabajo y una medida “estándar” del conocimiento, copilando una colección de metas y logros en

los que surge la figura de *Estándares Curriculares* (MEN, 2006), sin importar el cómo (metodológico) alcanzarlo; esta libertad de diseño metodológico, es uno de los elementos sobresalientes de esta orientación ministerial, la flexibilidad con la que plantea los mecanismos de búsqueda para la obtención de logros. Se desliga entonces cualquier postura estática en asuntos puntuales como la presentación de contenidos, metodologías o estrategias que se implementen para lograr las metas descritas en la ley (MEN, 1998).

En el caso puntual de la Educación matemática, la estructura curricular fija unas metas básicas y formula estrategias para lograr un acercamiento a ellas. Una mirada al alcance de estas metas se puede lograr a partir de dos tipos de pruebas, las primeras son de orden internacional, las cuales miden el logro y el desempeño de la propuesta curricular del país, y las segundas -las nacionales- miden el desempeño de los contenidos que conforman el currículo, resaltando componentes específicos que acompañan el perfil del estudiante; situación que se podría traducir en qué tan próximo está el estudiante a las metas propuestas por el currículo en comparación con el desempeño promedio a nivel nacional.

El Ministerio de Educación Nacional a través del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) ha creado entonces, una serie de pruebas llamadas pruebas Saber¹. Estas asignan un valor cuantitativo al desempeño y a las

¹ Las Pruebas de Estado SABER, son un instrumento estandarizado para la evaluación externa de la calidad de la educación. Forma parte, con otros procesos y acciones, de un conjunto de instrumentos que el Gobierno nacional dispone para evaluar la calidad del servicio público educativo y ejercer su inspección y vigilancia. El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, entidad encargada de ofrecer el servicio de evaluación en todos los niveles de escolaridad, también adelanta

competencias del estudiante, brindando un escalafón en el que se abre la oportunidad de hablar sobre la calidad de la educación, al mismo tiempo que indica, en qué estado se encuentra el *currículo enseñado* (Espínola, 1990).

Las pruebas Saber brindan un indicador de rendimiento de las fortalezas o las oportunidades de mejora que tiene cada proceso educativo en particular, ayudando a la mejora continua y a mantener un proceso de seguimiento constante para garantizar un camino a la calidad de la educación.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) conforma un cuerpo académico colegiado, que centra su interés en proporcionar una mejora continua a la educación en Colombia, además de realizar un constante seguimiento a través de los resultados de pruebas; una evidencia de esto son las publicaciones que el MEN ofrece al país, con el fin de que se estudien y se formulen nuevas estrategias que terminen en la toma de decisiones que mejoren el desempeño de los estudiantes.

Las pruebas internacionales como las pruebas del *Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes* en adelante (PISA), que de igual forma que las pruebas nacionales Saber, constituyen una fuente de información sobre la pertinencia del *currículo oficial* propuesto por el MEN y la incidencia del *currículo aprendido* por los estudiantes en el transcurso de su formación.

investigaciones sobre los factores que inciden en la calidad educativa, para ofrecer información pertinente y oportuna para contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación (ICFES, 2014).

Las evaluaciones nacionales e internacionales brindan criterios que no pueden ser ignorados ni por los investigadores en educación, ni por la comunidad educativa interesada en mejorar continuamente la calidad de la enseñanza, ya que los resultados de las pruebas brindan una posibilidad de análisis en la continua búsqueda de mejoras del currículo.

Dado entonces el lugar que ocupan y la importancia que tienen las evaluaciones nacionales e internacionales en la construcción del consenso académico para la formulación de los currículos institucionales, es pertinente hablar de los resultados que obtienen nuestros estudiantes en estas pruebas.

Según el informe presentado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) sobre la presentación de las pruebas internacionales PISA en el año 2012 (ICFES, 2012), se muestra un panorama en lo nacional, regional y local con alta oportunidad de mejora.

Los bajos desempeños académicos obtenidos por los estudiantes en las últimas pruebas PISA año 2012, definen un referente para hablar sobre la oportunidad que se abre en la educación y en la investigación, especialmente en las matemáticas, para incorporar nuevos elementos pedagógicos, didácticos, cognitivos, experimentales, socio-culturales, etc., que permitan lograr que la educación colombiana inicie una época de cambio.

En comparación con otros países de América Latina y el resto del mundo, nos ubicamos como uno de los países con mayor tasa de debilidad en lo que

corresponde a competencias básicas de lectura y matemáticas dentro de lo que evalúa PISA.

Cada estudio PISA cubre las tres áreas principales de competencia: de lectura, matemáticas y ciencias naturales; aunque en cada ocasión revisa una de éstas con mayor profundidad que las otras dos, para la aplicación del año 2012, el énfasis fue en Matemáticas. A diferencia de otros estudios, ésta evaluación se concentra en las competencias y no en los contenidos aprendidos en la escuela, situación que llama la atención en consideración de que las competencias son la base de nuestro currículo académico y una pieza transversal en la calidad de vida de las personas.

Hoy en día, PISA es un punto de referencia obligatorio para la investigación y el diseño de políticas educativas, siendo entonces pertinente ver los resultados en matemáticas, y compararlos con los 65 países que presentaron la prueba. El puntaje de Colombia fue de (376) puntos, ocupando el puesto 62 y cerrando el listado de países con Catar, Indonesia y Perú en su respectivo orden.

Estas cifras dan lugar a trabajos de indagación en donde se busca identificar elementos que den pistas sobre los factores que intervienen en los resultados en Matemáticas y cómo desde la enseñanza de las Matemáticas se puede generar una oportunidad para mejorar frente a otros países; una primera hipótesis es que los resultados pueden ser mejorados a través de actividades que se enmarcan desde la enseñanza de la geometría.

El diseño curricular colombiano contempla en el área de Matemáticas cinco procesos que definen los [Lineamientos Curriculares](#): el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Estos procesos se relacionan con el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, los cuales giran alrededor de sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos, algebraicos y analíticos. Generando así un engranaje pensado para el desarrollo de competencias en el estudiante.

Es entonces como esta propuesta de indagación busca desde los aspectos geométricos que conforman las Matemáticas, contribuir a la mejora de estos resultados apoyándose en la teoría semiótica cognitiva de Raymond Duval quien propone que la actividad cognitiva que exige la matemática es más compleja que la actividad en otras áreas del conocimiento, como en la biología, las ciencias sociales, la química, la educación física, entre otras.

Estas particularidades se pueden ver, por ejemplo, en la visualización requerida en la exploración de un problema en matemáticas. Un sencillo ejercicio como el de “ver” en matemáticas una figura, implica una distinción entre el ejercicio de percibir sensorialmente un objeto físico y el de reconocer una representación de una “idea matemática”.

Estas diferencias son aún más amplias si se habla de los elementos que componen la pieza gráfica, distinguiendo entre la visión y la visualización. Aún más cuando el

interés de los estudiantes por estudiar la geometría desde actividades prácticas que requieran de dibujar, recortar, reproducir, medir, comparar, etc., compromete al maestro con el diseño y manejo de las situaciones que se presenten en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Duval (2004) alerta respecto a que se podría caer en el error de pensar que si los estudiantes tienen previamente las propiedades matemáticas de las figuras (definiciones, teoremas, axiomas, etc.) podrán trabajar sobre las figuras, entenderlas y construir ideas sobre ellas; esta infortunada decisión marca un camino de dificultades para el estudiante, quien es el que por primera vez se relaciona con las ideas matemáticas, a diferencia del maestro quien ya tiene una experiencia y una relación distinta con estas ideas matemáticas.

En la educación colombiana, al considerar la organización curricular que manejan gran parte de las instituciones educativas, el componente geométrico en relación con el componente numérico, se distancian notablemente llegando a marcar una diferencia porcentual entre el 70% y el 80% del total del tiempo dedicado sólo a la actividad del componente numérico. Por otra parte entre ese 30% o 20 % restante se encuentran las actividades cognitivas que implica la actividad geométrica, que Duval (Duval, 2000) dice son las de construcción, visualización y razonamiento.

Los resultados de las pruebas nacionales, muestran en el departamento del Valle del Cauca una debilidad en comparación con los demás departamentos del país. El Valle del Cauca ocupa el último puesto a nivel nacional en competencias

matemáticas, situación que se relaciona y toma cercanía con lo experimentado en las pruebas internacionales, generando un contexto en el que nos ubicamos geopolíticamente para la realización de este trabajo.

Por tal razón es que en este proyecto se contempla una propuesta en la que se propone un enfoque en la enseñanza de la geometría con la intención de fortalecer las actividades cognitivas de visualización, construcción y razonamiento (VCR).

Estas tres actividades (VCR) de orden cognitivo están inmersas en la práctica geométrica de los estudiantes, como se mencionó anteriormente, además están vinculadas como mediadoras en los requerimientos de análisis propuestos en las tareas de geometría.

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que estudia las relaciones del ser humano con el mundo que lo rodea, tomando como primordial el espacio. Estas relaciones se fundamentan en la percepción a través de los sentidos y mediadas por complejos procesos cognitivos que permiten idealizar el mundo en el que vivimos, al mismo tiempo que se modelan y codifican estas relaciones lo cual permite configurar un lenguaje y una red de ideas que fundamentan un escenario posible entre la geometría y las personas, situación que origina conceptos e ideas más complejas que componen los fundamentos de la relación.

Un ejemplo de ello sería pensar en la idea de *“la medida”* y llevar esta idea a diversos objetos de nuestro entorno logrando información que nos permita entender

desde una idea matemática, una relación viva entre las personas y los objetos del espacio.

Estas ideas están fundamentadas en convenciones universales que a lo largo del desarrollo histórico de la humanidad se han documentado y discutido desde distintas perspectivas y cosmovisiones, convergiendo a un mismo origen, el de “la relación del Hombre con la Naturaleza”.

Es así como el arduo trabajo de la humanidad para darle forma y orden a los conocimientos geométricos, ha ayudado a solucionar problemas de distinto orden, al menos en la escuela secundaria, estos saberes facilitan la comprensión de la demostración y las pruebas, iniciando desde la elaboración de conjeturas y la formulación de argumentos, hasta pasar al hecho trascendental dentro de las matemáticas como estructura formal, demostrar.

Usualmente los profesores de matemáticas hacen ver la geometría como un manojo de figuras, unas distintas a otras, aislando toda idea matemática de la realidad que subyace al discurso matemático implícito en la geometría.

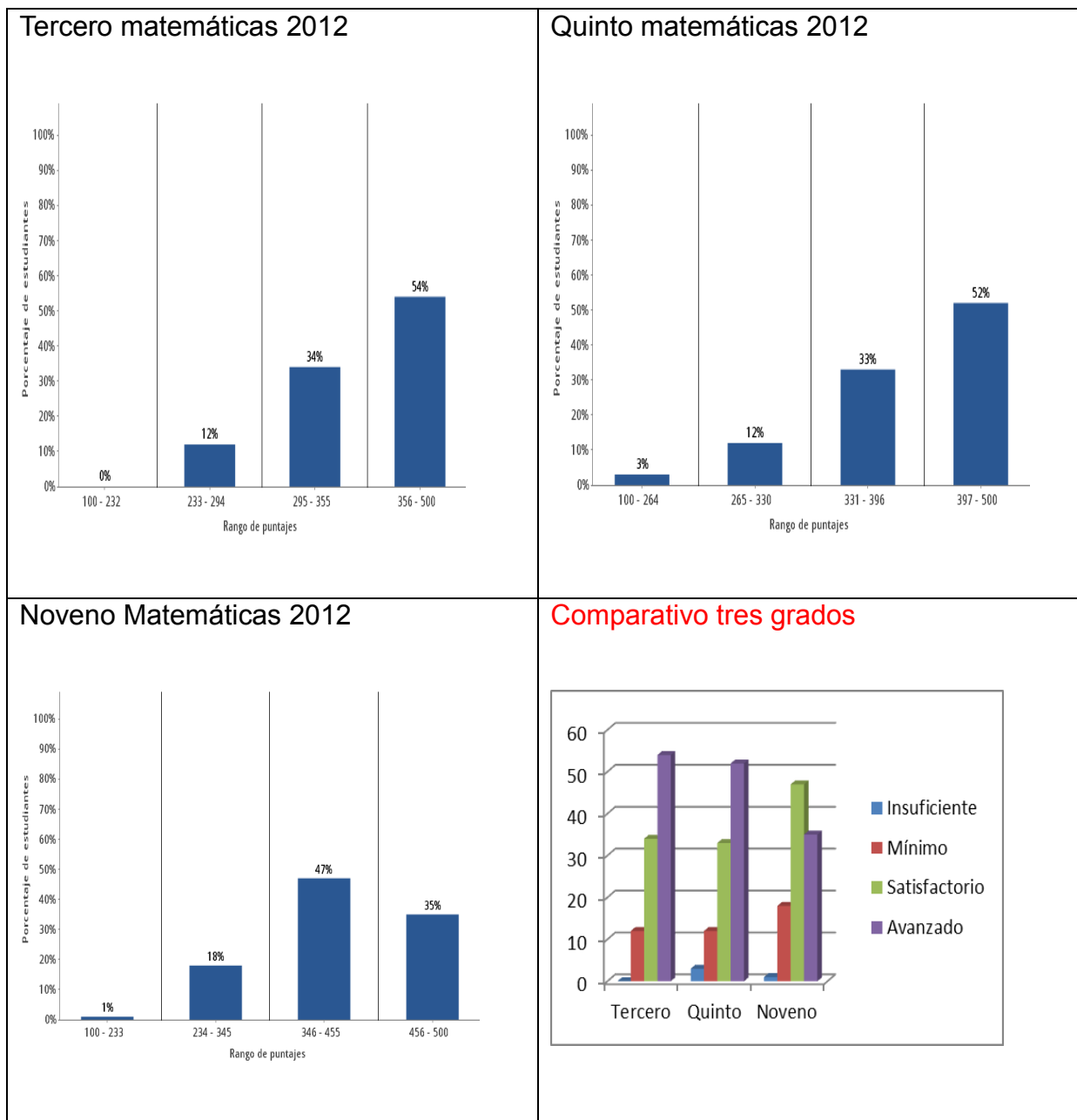
Esta cuestión abre los argumentos planteados por (Duval, 2001) como un camino lleno de elementos enriquecedores para el trabajo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos en la educación básica secundaria, en dicho camino también se tienen en cuenta las consideraciones de (Salin, 2004) sobre el conocimiento espacial y el conocimiento geométrico, en las que se plantea que los problemas espaciales y los problemas geométricos son diferentes por su naturaleza; esta

naturaleza refiere a la razón necesaria en geometría debido a que la geometría comprende un cuerpo axiomático de conocimientos, en comparación con los problemas de orden espacial donde la percepción es necesaria y suficiente en gran medida.

Para ello se ha fijado el trabajo con los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson, quienes están ubicados en el municipio de Yumbo-Valle del Cauca, el grado sexto en particular porque de acuerdo con los resultados de las PRUEBAS SABER 2012 que valoran los niveles de aprendizajes de los estudiantes, el primer grado de la secundaria es un buen objeto de estudio de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en especial de la geometría.

Esta oportunidad de estudio la podemos evidenciar al interior del colegio Jefferson al contrastar los resultados de los grados tercero y quinto, pertenecientes al ciclo de la primaria y los resultados de noveno, pertenecientes a la secundaria (Gráfica 1). Estos resultados del desempeño de los estudiantes en los distintos grados aportan evidencia sobre la hipótesis de que al inicio de la secundaria se necesita un cambio en la forma en la que aprenden matemáticas los estudiantes, dando una luz a la manera tradicional de enseñar geometría en la escuela.

Gráfica 1. Desempeño de los estudiantes del colegio Jefferson en las pruebas de estado, año 2012



Fuente: ICFES

El caso del colegio Jefferson, aporta una posibilidad de análisis al interior de una comunidad y una institución con características particulares, que se muestran desde

su Proyecto Educativo Institucional (PEI) y su desempeño en las evaluaciones estatales, creando así un interés para esta indagación.

El aprendizaje de las matemáticas y en particular el aprendizaje de la geometría constituyen un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como lo son la visualización, la construcción y el razonamiento. La particularidad del aprendizaje en geometría hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes, cuestión que centra nuestro interés en la distinción del objeto matemático y su representación para darle cuerpo a su comprensión (Duval, 2004).

La articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad geométrica, por ello preguntarse ¿qué es lo que significa ver en geometría? será una directriz para lo que se espera encontrar.

Es pertinente entonces, realizar el ejercicio de observar lo que sucede en un aula de clase cuando se enseña geometría, asociando patrones de recurrencia en la práctica de los estudiantes, reconociendo su entorno, sus relaciones como comunidad y poder proponer un diseño de experimento de clase² alrededor de la indagación empírica (Cobb, 2000) y poder responder:

²Para el desarrollo de este concepto dentro de este documento, se ha discutido en grupo la traducción del texto " *conducting teaching Experiments in Collaboration With Teachers*" y se han tomado en igual medida la traducción de Camargo et al. De la expresión "classroom teaching experiment" la cual se puede traducir como "experimento de clase" o "experimento de enseñanza" por igual.

¿De qué manera las actividades de visualización y razonamiento pueden aplicarse en la formulación de una propuesta para el trabajo con figuras bidimensionales al inicio de la educación básica secundaria del colegio Jefferson?

1.1.2 Objetivos de esta Propuesta

1.2.1 Objetivo general

Diseñar situaciones de aula que favorezcan las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el trabajo con figuras geométricas al inicio de la educación básica secundaria del colegio Jefferson.

1.2.2 Objetivos específicos

- Caracterizar e identificar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el trabajo con figuras geométricas desde un punto de vista cognitivo.
- Realizar una selección de tareas geométricas que permitan la formulación de situaciones de aprendizaje a la luz de la teoría semiótica - cognitiva que Raymond Duval propone.
- Formular una propuesta de Experimento de Enseñanza dirigida al grado sexto del colegio Jefferson.

Capítulo II

En este capítulo se profundiza en elementos claves como el instrumento, la visualización, la construcción, el razonamiento, el lenguaje, entre otros más; que configuran el camino del experimento de enseñanza.

En este segundo capítulo se presenta con mayor detalle parte de la teoría de Duval que nos permite realizar el experimento de enseñanza al mismo tiempo que se presentan las fases y la propuesta de intervención realizada en el colegio Jefferson.

2.1 Un Panorama Cognitivo de la Enseñanza de las Matemáticas

2.1.1 Consideraciones generales

En la actualidad, la investigación dirigida al estudio de lo semiótico y de los procesos cognitivos asociados al pensamiento humano, han volcado su mirada sobre diversos campos del conocimiento, entre los que sobresalen las matemáticas. En particular, la geometría se presenta como un espacio de alta exigencia cognitiva, debido principalmente al manejo de “figuras – dibujos” que representan “ideas matemáticas” o “propiedades matemáticas” llevando a que los estudiantes de forma natural deban “visualizar”, “construir” y “razonar”; en diferentes formas y momentos (Duval, 2000).

Esto ha llevado a que diferentes investigadores realicen rigurosas búsquedas y consoliden los principios de una teoría semiótica - cognitiva, al servicio de las

ciencias, específicamente en las matemáticas, identificando elementos útiles y pertinentes.

Si bien estas actividades cognitivas son diferentes, están ligadas unas a otras, conjugando un complejo ejercicio cognitivo necesario y exigido en problemas propuesto desde la geometría, habitualmente en contextos de clase; Duval propone entonces que el enfoque de los problemas que se emplean en la enseñanza, busquen dilucidar con mayor precisión un acercamiento a visualizar, construir y razonar.

Para Duval resulta ser la “figura-dibujo”, la representación del objeto matemático, mediada a través de una ilustración gráfica que referencia alguna propiedad matemática respaldada teóricamente por un cuerpo axiomático preestablecido, esto permite ir de lo cognitivo (la idea matemática) a la busque de una representación que condense el significado y se pueda interpretar a través de la percepción de los sentidos (la representación gráfica de la idea matemática) a la experiencia, es entonces gracias a que el estudiante tiene la posibilidad de participar de la validación de “lo que ve” y confrontarlo con lo que se le ha enseñado, puede reflexionar sobre su experiencia; dando paso a la relación entre la visualización y el razonamiento, un acercamiento que sugiere un cambio de mirada en la actividad geométrica en contextos de clase.

Esta experiencia es analizada desde distintos ángulos, lo cual permite avanzar en la búsqueda de respuestas a los problemas en la enseñanza de las matemáticas y en

especial de la geometría, la cual como ya se ha mencionado, constituye un escenario de múltiples situaciones en las que el estudiante es el protagonista.

Este análisis ayuda a pensar en el papel que juega la figura geométrica en el desarrollo de un proceso de enseñanza, en particular es necesario pensar en la actividad geométrica de visualizar en torno a la reconfiguración que da la posibilidad de desarrollar razonamientos en el estudiante.

La reconfiguración posibilita al estudiante un potencial discursivo en cuanto es capaz de enfrentarse a problemas de visualización en el que surge la necesidad del uso de propiedades o características matemáticas llevando esta necesidad a establecer la reconfiguración como aprehensión operativa (Torregroza & Quesada, 2007).

Duval (2004) propone una organización para las actividades llamadas geométricas que se realizan en clase, agrupándolas en cuatro categorías de acuerdo al papel que jueguen las figuras y a la manera en la que implícitamente es llevado el estudiante a generar un proceso cognitivo (Duval, 2004); se genera así un panorama de lo que se puede considerar maneras clásicas de hacer que los estudiantes entren en los conceptos geométricos.

La clasificación de estas actividades geométricas se hace con base a cuatro criterios, los tres primeros tienen que ver directamente con las figuras; en estos es necesario separar dos procesos cognitivos que habitualmente operan unidos, estos son: la identificación perceptiva de las formas visuales de una “figura- dibujo” y la identificación interpretativa de los objetos y de las situaciones representadas. El cuarto

criterio se relaciona con la manera en la que se necesita o no, la utilización de figuras y la toma en cuenta de las propiedades geométricas representadas o implícitamente manipuladas.

Es entonces de esta manera que al dar una clara caracterización sobre las formas de visualización y las formas en que se trabaja cognitivamente en geometría, Duval presenta la primera entrada clásica al estudio de la geometría en la escuela, la denomina “El Botánico”, la cual consiste principalmente en reconocer perceptivamente las formas elementales usadas en la geometría plana elemental, llevando a que las propiedades geométricas sean características visuales.

Se trata de encontrar diferencias entre formas que representan similitudes (un cuadrado y un rectángulo, por ejemplo) (Duval, 2004). Duval aclara que este tipo o clase de reconocimiento perceptivo puede dar lugar a tareas de superposición, de reproducción de un modelo, o de clasificación elemental.

Estas actividades privilegian la modalidad operatoria de la manipulación material, la producción gráfica de una representación o la designación verbal de un objeto o de sus propiedades.

La segunda entrada ha sido llamada por Duval como “El agrimensor geómetra”, en esta entrada se trata de aprender a medir las longitudes sobre un terreno en el suelo, o la distancia entre dos puntos marcados y de trasportarlas sobre un dibujo (Duval, 2004). En los ejercicios propuestos en esta entrada los estudiantes son llevados a trabajar en dos escalas de magnitud, situación que induce a la búsqueda de la

correspondencia, que finalmente lleva a los estudiantes a ir constantemente de una escala a otra.

La tercera entrada es denominada “El constructor”, esta tiene por característica la incursión de los instrumentos o herramientas en el trabajo de exploración de los estudiantes. Es decir que vincula a la actividad de exploración con un instrumento o herramienta, que guía el trazo del estudiante, esta noción le da al estudiante la oportunidad de construir una figura que represente propiedades geométricas.

Cabe entonces enunciar la tesis de Duval (2004), *“es a través de la utilización de un instrumento como los alumnos pueden verdaderamente tomar conciencia de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas”* (p.165).

La cuarta entrada es la llamada por Duval como “El inventor manitas”, aquí se proponen actividades que exigen la capacidad del estudiante para la reconstrucción visual de las formas elementales de una figura, situación que permite obtener la reconfiguración o la figura demandada (Duval, 2000). Estas actividades geométricas pueden ser presentadas en el marco de manipulaciones materiales como en el de las representaciones gráficas.

Esta entrada busca estimular la capacidad del estudiante para la utilización heurística de las figuras, es decir, estimula su capacidad de realizar hallazgos sobre la figura que le permitan deducir un procedimiento de resolución (Duval, 2004), en particular podría decirse que añadir trozos suplementarios a una figura de partida o extender rectas, permiten para algunas construcciones y para algunos problemas con figuras

geométricas, identificar propiedades a través de la percepción. Respecto a esta entrada se puede decir que las actividades incluidas en ella proponen una exigencia mayor de análisis a través de la percepción (Duval, 2004).

Estas cuatro entradas clásicas a los procesos cognitivos de las representaciones geométricas definen una perspectiva particular de ver a las figuras, al mismo tiempo, hacen una taxonomía a las maneras de aproximarnos al entendimiento de las propiedades geométricas a través de diversas tareas.

2.1.2 La visualización en la geometría de la escuela

La visualización es el primer proceso cognitivo asociado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Duval, 2004), el estudio de la visualización permitirá entender el camino de los sentidos y la percepción y la diferencia entre los problemas espaciales y los problemas geométricos.

Duval identifica dos formas en el gesto humano de “ver”, la primera es la icónica, en donde la percepción de las figuras como un todo, predomina en la forma de interactuar con la figura, esta forma de ver un “ícono” en la figura, imposibilita al estudiante a ver la composición dimensional de la figura o el confluir de las propiedades matemáticas. La segunda es la no icónica, relativa a la pertenencia o a la no pertenencia de cada una de las propiedades de la figura; forma de ver que divide en dos grupos las entradas propuestas por Duval; la primera y la segunda (botánico y agrimensor) en formas de ver icónicamente y a la tercera y la cuarta (constructor e inventor manitas) en formas no icónicas de ver en geometría, en

consecuencia, “ver” una figura en geometría no es como se ve algún otro dibujo; cuestión que incide tanto en la manera de cómo vemos y qué es lo que vemos, cuando vemos.

En la primera forma de ver los estudiantes se quedan con lo que en un primer acercamiento pueden apreciar de la figura a través de los sentidos y su experiencia sensorial. Todo aquello que no se asocie con las partes del contorno de la figura queda por fuera, pues ven las figuras solo como un ícono es decir algo estático y sin una relación de origen o cambio.

La segunda es la visualización no icónica, que reconoce las formas en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposibles ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, lo que para Duval resulta ser una realización cognitiva en virtud de deducciones efectuadas en función de las propiedades, definiciones o en teoremas que han sido enunciados en clase (Duval, 2004).

Así pues la visualización no icónica permite que se piensen las propiedades y elementos constitutivos de una figura, determinando una mirada profunda, es una combinación, un “todo” que vincula las hipótesis o propiedades, amarradas a una representación visual; se espera que de esta manera, los estudiantes vean de las figuras sus propiedades y puedan realizar tratamientos desde lo visual.

Duval identifica mediante este ejercicio de caracterización que existen rupturas cognitivas profundas entre dichas entradas, en razón de la existencia de los dos tipos diferentes de visualización que son totalmente opuestos. Los tipos de actividad

pertenecientes a cada una de las entradas en la geometría son demasiado heterogéneos como para que pueda haber una transferencia entre ellos.

Razón por la cual Duval propone una quinta entrada en la cual se incluyen actividades de deconstrucción dimensional³ y cambios de miradas necesarios sobre las figuras de las que usualmente son usadas en clase de geometría, esto pone al estudiante en una posición diferente a las cuatro entradas clásicas mencionadas anteriormente, y fija el reto de superar las barreras de la visualización icónica en la clase de geometría.

Duval resalta que el trabajo con instrumentos no estándar marca una nueva forma de llevar a los estudiantes a entender en su ejercicio geométrico otros conceptos que por lo regular no se enseña en la escuela tradicional.

Duval propone que el estudiante sea capaz de reconocer las redes dimensionales que compone una figura, es decir, que sea capaz de distinguir y reconocer contornos abiertos y cerrados de una figura en relación a sus propiedades y que a su vez el estudiante también pueda efectuar operaciones o construcciones que se relacionen con estas propiedades de la figura originando nuevas figuras o llevando a identificar la relación de diferentes figuras en la composición de otra figura.

³ Euclides coloca la deconstrucción dimensional de las figuras al comienzo de la geometría, como el umbral que hay que atravesar para entrar en la construcción o el descubrimiento de conocimientos geométricos (Duval, 2005). Así mismo para las figuras bidimensionales hay que ser capaz de reorganizar la percepción de las formas 2D, es decir una percepción centrada en los contornos cerrados, y en la percepción de un conjunto de unidades visuales 1D, pues las propiedades geométricas se refieren esencialmente a relaciones entre esas unidades 1D. Eso quiere decir que analizar una figura en función del conocimiento que se tiene de las propiedades geométricas supone la deconstrucción dimensional de las representaciones visuales que se quieren articular con las propiedades geométricas (Duval, 2005).

Este trabajo de ver y de enseñar a ver no icónicamente, compromete diferentes estrategias y debe apoyarse en todas las teorías y situaciones que ayuden al estudiante a realizar divisiones mereológicas y deconstrucciones dimensionales de las formas en miras de procesos de razonamiento.

El tipo de razonamiento que Duval caracteriza, y que interesa para este trabajo, es el razonamiento intrínsecamente vinculado con la utilización de un lenguaje, natural o formal; denotando a la actividad de razonamiento, como la posibilidad de movilizar explícitamente proposiciones.

2.1.3 El lenguaje en la búsqueda del razonamiento

Los estudios sobre el lenguaje aportan elementos para comprender los diferentes momentos del diálogo entre los estudiantes y los profesores; los intercambios comunicativos que se dan en el aula de clase, en el marco de otras interacciones, se constituyen entonces en un elemento central para comprender lo que ocurre en el salón de clase. En este estudio, se retoman los trabajos sobre funciones discursivas (Duval, 2004) y los Actos de Habla (Searle, 1977) y Austin (1962) para orientar el proceso de análisis y comprensión de dichos intercambios.

El lenguaje es usado con fines de organización y comunicación de nuestra experiencia a quienes nos rodean; ante lo desconocido o lo que presenta dificultad de comprensión, usamos el lenguaje formulando una pregunta para orientar nuestras acciones, precedido de una respuesta expresada con palabras.

Cabe decir que el lenguaje es fundamental puesto que se estructura bajo funciones discursivas que hilan un trabajo en conjunto para que sea posible un discurso. Estas funciones demarcan el papel de designar, decir, articular y transformar al objeto.

Es por ello, que para esta propuesta de investigación, crear un espacio para el análisis del discurso mediante las operaciones que se dan al interior de las funciones discursivas, será de vital importancia para el diseño de recolección de información, al igual que para la identificación y conformación de datos⁴.

Designar será la primera operación que caracterizará el uso de la lengua en función del discurso, ya que permitirá identificar un objeto asociado a una marca particular o al empleo de signos. El propósito será el poder nombrar sin importar el objeto que se nombra, ni la limitación de la lengua que se dispone (Duval, 2004), si no el de poder evocar y designar un objeto dado un conjunto de signos elementales.

Previo a la descripción de la función referencial, cabe notar que mediante la operación de designación en una primera instancia denominada “pura” dará inicio al acto cognitivamente fundamental que es el de ¡Ver! Ya que en geometría toda mirada sobre un objeto fricciona contra la comprobación perceptiva que se hace inicialmente.

⁴ Leonor Camargo hace claridad que un dato es la documentación de un suceso que permite hablar con base en las hipótesis presentadas y que resulta ser pertinente para justificar las mismas; a diferencia de la información, que es todo el resultado de la observación a través de alguna técnica (video, audio, papel) considerada en la metodología de indagación.

Posteriormente, al tener el garante de designación e identificación del objeto posibilita una necesidad de poder “decir algo” del objeto. El cumplimiento de una sola operación no es suficiente para darse la actividad discursiva como tal, es necesario que toda lengua admita decir algo del objeto que inicialmente se designó, por tanto como segunda función discursiva será el hecho de poder vincular un comentario sobre el objeto, de tal manera que pueda formarse una proposición, y que esta adquiera su sentido en relación a la designación a través de su valor; es decir, un valor lógico, epistémico o social que delimitan los interlocutores.

De esta manera se resalta lo mencionado por Duval (2004), donde la posibilidad de designar no es suficiente para permitir una actividad discursiva, y como lo que se pretende es dar un espacio al análisis del discurso, se hace énfasis en esta segunda función discursiva llamada apofántica.

La función apofántica determina lo que se dice de los objetos constituyéndose como la función que permite los enunciados completos, es decir un contenido (lo que se dice) y un “acto ilocutorio” (como se dice), situación que genera el vínculo que hay entre un hablante, un oyente y la emisión del hablante, donde es conferido un valor social (acuerdo) a la producción del enunciado que compromete al locutor o al destinatario.

Teniendo en cuenta que existen muchos géneros de actos asociados a la emisión del hablante, este trabajo de grado se apoya en los actos pertenecientes a la clase de enunciar, plantear, dar órdenes, emitir, saludar y aconsejar.

Por consiguiente se podría mencionar sobre las condiciones que gobiernan una conversación, y se detallaría que los enunciados en sí mismos implican un contenido semántico, que a su vez su interpretación adecuada no solo dependerá de este contenido sino que es requerido un contenido lingüístico para ser interpretada, por ello se tendrá en cuenta la pragmática que se interesa por el modo en que el contexto influye en la interpretación del significado.

Este significado planteado por Austin hace referencia al significado convencional en virtud de las reglas, reglas que son de carácter constitutivo, es decir que constituyen y también regulan una actividad cuya existencia es lógicamente dependiente de las reglas y no solo de la intención, puesto que los referentes a hacer énfasis por los estudiantes son objetos matemáticos en particular las figuras geométricas que hacen parte de un lenguaje formal. Por ello al hacer un intento por capturar elementos esenciales en el discurso de los estudiantes a la hora de ellos argumentar sobre las figuras en geometría, reconocer los aspectos convencionales y los intencionales y especialmente las relaciones entre ellos en función del significado, recogerá resultados valiosos a la hora de establecer elementos de lo que categoriza como un acto ilocucionario.

siendo a través del acto ilocucionario y la función discursiva de “decir algo” de los objetos (apofántica) toma sentido, puesto que la puesta en escena de un acto de habla se verifican elementos que conllevan al juicio por saber la pertinencia, la fuerza y el valor de verdad de lo que se dice.

Situación que se establece una distinción entre lo que se dice y lo que se comunica. Lo que se dice es contenido literal expresado y lo que se comunica es información que se trasmite aún más allá de su contenido.

Por lo tanto no se articulará solo alrededor de las palabras sino en el sentido de las proposiciones ya que estas son las que enmarcarán la correspondencia con la figura (objeto).

De esta manera la función del lenguaje en este proyecto no se delimitará a poner en palabras y registrar lo que se piensa y experimenta al respecto de una situación en particular, sino de poner en proposiciones ya que estas permiten construir el pensamiento sobre los objetos geométricos.

No obstante en geometría el pasaje de ver y decir constituye un plano complejo, pues para una misma imagen puede existir más de una oración que la describa, y necesariamente a ello debe existir el discurso en lengua natural acompañando a la figura, puesto que en geometría no hay figura que se represente por sí misma. De esta manera la presentación de cualquier figura u objeto en geometría tiene también un carácter discursivo.

La enseñanza de las matemáticas tiene por objeto múltiples enfoques y al hablar de lenguaje, en particular de su discurso, se referencian distintas formas que a su vez tejen un conjunto de interacciones contextualmente situadas (Duval, 1999). De esta manera se tomará en consideración para la enseñanza de las matemáticas la

argumentación, vista como una forma natural de razonamiento que se encuentra dentro de este discurso como forma expansiva del lenguaje.

Pese a que existió una restricción del uso de elementos del discurso natural en los años 70 en las clases de matemáticas, privilegiando solo actividades de orden formal, la demostración no cumplió un papel trascendental como prueba máxima en matemáticas para los estudiantes.

Esta situación radical dio un lugar a la argumentación, ya que era cada vez más notoria en los trabajos propuestos para realizar en grupo; hecho que favorecería la interacción entre los alumnos y la necesidad de “justificar” expandiendo la relación concebida tradicionalmente entre el alumno y el maestro únicamente, dando paso y fuerza a las interacciones entre los alumnos mismos, situación que da importancia al lenguaje natural, en especial a la argumentación.

Duval (1992) propone un estudio mucho más preciso para los argumentos, distinguiendo los argumentos retóricos como argumentos para convencer al interlocutor o para convencerse a sí mismo el locutor, y los argumentos heurísticos como los necesarios en matemáticas para resolver problemas; esta distinción es posible en geometría por tratarse de un dominio de saberes con una organización teórica que da lugar a los dos tipos de argumentos mencionados por Duval (1992) y tomados de la obra de Perelman.

El aprendizaje en geometría se privilegia como un campo de estudio para las actividades cognitivas y estas a su vez requieren de la utilización de sistemas de

expresión y representación distintos al del lenguaje natural, por ello es necesario poner en correspondencia a un sistema de representación semiótico como el estudio de las producciones constituidas por el empleo de signos (Duval, 2004). Estos sistemas semióticos permiten el cumplimiento de tres actividades inseparables en toda representación, estas actividades tendrán la función de dar nombre a las cosas, el de poder transformar las representaciones y el convertir representaciones en otro sistema de representación (Duval, 2004).

Como herramienta de respuesta a un proceso cuya articulación carece de vínculos directos, la argumentación hace un papel fundamental para una aproximación a la ruptura. La argumentación vista como herramienta que se utiliza para justificar o refutar proposiciones busca la adhesión de un auditorio a una tesis; esta adhesión puede generar una discusión donde se defiendan y sustenten sus ideas, obedeciendo a vínculos de pertinencia constituyendo su lógica con leyes de coherencia.

La argumentación presenta la construcción de nuevos saberes mediante el desarrollo discursivo, teniendo en cuenta que se argumenta para expresar una opinión o un punto de vista mostrando las razones que los fundamentan.

Estas formas de argumentar son comunes en las explicaciones de los procedimientos que elaboran los estudiantes en la clase de geometría, en estas explicaciones es común ver cómo el estudiante busca cambiar el valor epistémico

del auditorio mostrando su procedimiento como válido y elaborando todo un discurso persuasivo para lograr la adhesión a sus argumentos.

En la argumentación la necesidad de convencer a un auditorio de algo que se enuncia como respuesta o solución, pasa por el rigor de la producción de razones y la aceptabilidad en los argumentos, los cuales serán medidos mediante su fuerza y pertinencia teniendo en cuenta su valor epistémico, su resistencia a los contra ejemplos y su contenido semántico.

La fuerza de los argumentos principalmente dependerá del contexto y su manera de adaptarse a él, más que la fuerza de los intereses del interlocutor (Duval, 1992), es por ello que la argumentación presupone al diálogo, ya que un enunciador suele seguir otros valores epistémicos distintos al del emisor, estos valores epistémicos pueden ser o no distintos entre el locutor y el auditorio y se puede tener en cuenta puntos de vista contrarios y anticiparse a ellos, sin decir que es restrictivo, sino más bien a la discrepancia donde se fomenta la discusión a través de argumentos racionales y no en afirmaciones absolutas para la obtención de una adhesión del auditorio.

No obstante, la argumentación puede estar en función de los intereses del interlocutor; para este caso se referencia la argumentación como retórica, puesto que a la hora de convencer para la toma de decisiones es indispensable la solución de un conflicto de intereses que den sentido a las proposiciones compuestas en lo argumentado.

Cabe decir que ante la manera de expresar ideas en función de objetos geométricos podrá ser a través de una exposición o una explicación del cómo se realizó un procedimiento, o el cómo se elaboró una construcción; si fuera el caso de poder formular varias respuestas a una pregunta se tendría que vincular argumentos o razones para elegir la respuesta más adecuada.

Por tanto el razonamiento, representará la organización de proposiciones que se orienta hacia un enunciado-objetivo con el fin de modificar valores epistémicos realizados por medio de actividades cognitivas necesarias para la argumentación y la demostración en matemáticas.

Otro pilar fundamental y ángulo de esta perspectiva es el proceso de construcción; actividad presente en la geometría, para representar, justificar y explicar alguna idea matemática.

El aprendizaje de las matemáticas, en particular de la geometría, constituye un ambiente de clase dinámico y activo, dispuesto en todo momento a buscar la manera de movilizar el pensamiento de los estudiantes, a través de actividades manipulativas capaces de adaptar y preservar el sentido.

Es con base en lo anterior que se afirma que en las actividades geométricas en las que los estudiantes logran manipular objetos, resultan ser mucho más significativas en términos cognitivos que bajo el esquema tradicional, en el que el profesor intenta -pero no logran en la mayoría de los casos- que los estudiantes comprendan y acepten las explicaciones que le son presentadas.

En la enseñanza de la geometría las construcciones juegan un papel protagónico en la representación de las propiedades geométricas, además que incorporan nuevos elementos mediadores, como lo son los instrumentos que apoyan este proceso de construcción.

Esta incorporación abre entonces el espectro sobre las relaciones entre el estudiante y la geometría, estudiando la vinculación de diferentes instrumentos y todo tipo de material manipulativo en los procesos de exploración, que transfiera la idea matemática en distintas actividades geométricas.

2.1.4 Construir en Geometría

Duval señala (2004) que en la construcción es donde hay mayor interacción visual e instrumental entre el estudiante quien hace las veces de dibujante y la figura quien es el dibujo. Para el caso en el que la figura es dada por un enunciado o una descripción verbal, hay una oportunidad aun mayor de estudiar la geometría desde una perspectiva cognitiva.

El trabajo de Duval en el estudio de cómo el ser humano aprende y de cómo se le debe enseñar en geometría, dio como fruto el estudio de las red de rectas y puntos subyacentes, principalmente entre contornos abiertos y cerrados que aportan al reconocimiento de propiedades geométricas.

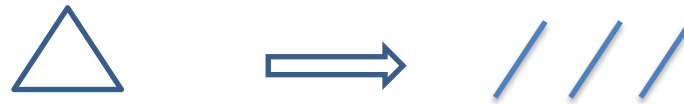
Esta red de rectas y puntos subyacentes configuran una composición dimensional, asimismo esta composición dimensional tiene la característica de permitir la deconstrucción visual de las formas, en rectas que componen la forma y en puntos que determinan la unión de esas rectas, es decir, es ir de una dimensión $(N+1)D$ a una dimensión $(N)D$, y hasta una posible $(N-1)D$; queriendo ver una relación de composición de la forma entre las dimensiones, de mayor a menor.

Así mismo esta experiencia se condiciona por instrumentos y propiedades geométricas que imponen un proceso y dan lugar a la reproducción y la construcción, un momento indispensable en el estudio de las propiedades geométricas.

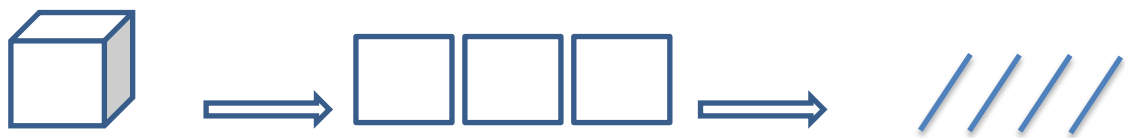
Duval (2005) precisa que en el ejercicio de ver un triángulo, el análisis se hace en función de las formas que se reconocen y de las propiedades que se pueden obtener de lo visual, Duval (2005) muestra los ensamblajes por yuxtaposición y superposición como la posibilidad de ver en las figuras tantas formas como contornos cerrados hay en ella; para el caso de la yuxtaposición, se dá espacio a la visualización icónica o figurativa debido a que es el ensamblaje entre superficies. Así mismo la sobreposición permite la visualización de red de rectas al ser un ensamblaje entre rectas; en la que se ven menos formas que contornos cerrados.

Y es entonces que a través de diferentes instrumentos, que es posible ver los puntos y las rectas “primera dimensión” $(1D)$ que componen un contorno cerrado como lo es

el triángulo “segunda dimensión” (2D), en otras palabras, es el paso dimensional de 2D a 1D.



Duval propone un camino y se centra en una claridad frente a las redes dimensionales o deconstrucciones que se puedan efectuar en una representación geométrica (figura), esto con el fin de ver las relaciones que existen entre puntos, rectas, etc., que componen espacios dimensionales distintos, es decir, cuando tenemos figuras 1D/2D (de dimensión 1 representada en dimensión 2), 2D/2D (cuadrados, triángulos, contornos cerrados, etc.) o bien 3D/2D (cubos, esferas, etc.), esta identificación se basa en leyes de organización perceptiva.



Se realiza el estudio de una figura entonces por la percepción, es decir las formas o “unidades figúrales” correspondientes a las propiedades visuales, que puedan surgir de una experiencia entre el estudiante y la figura.

De esta manera, es que desde la perspectiva del instrumento que se esté empleando, es posible un análisis dimensional, generando una relación de dominancia entre la percepción y el análisis geométrico.

La perspectiva de Duval deja entonces cuestionar cómo descomponer una figura, es decir, evaluar su forma y su composición dimensional desde un proceso cognitivo asociado.

El uso de instrumentos como ayudas para la representación de la idea matemática en la clase de geometría, es presentada por Duval en dos tipos de instrumentos, los que permiten manipulaciones de objetos materiales y los que permiten operaciones de trazado gráfico; esta categoría se amplía entre los instrumentos que producen formas 1D y 2D, dado a la importancia del discurso dimensional subyacente (Duval, 2005).

Para la Construcción Duval propone las tareas de reproducción de dibujos con instrumentos no estándar, por su previa adaptación el instrumento le permite al estudiante ver esas propiedades que un instrumento estándar no permite ver con tanta facilidad.

En la elaboración de los instrumentos se encuentra escondidas propiedades que caracterizan los moldes rotos⁵, segmentos rectos o superficies irregulares, el soporte

⁵ Para el caso de los instrumentos no estándar, Duval propone la adaptación de una serie de moldes rotos que guardan información sobre ángulos o segmentos de una figura a reproducir; estas piezas logran ser adaptadas en la precisión requerida y necesaria para la reproducción, al mismo tiempo que

para una nueva forma de ver las figuras y estudiarlas desde sus principios constitutivos, además cada instrumento impone unas restricciones específicas para el análisis visual (Duval, 2005), generalizando que existen tantas tareas como instrumentos para usar.

Es entonces necesario decir que para contribuir a una propuesta que lleve a potenciar en los estudiantes los procesos cognitivos asociados a la construcción, es pertinente la propuesta de Duval sobre las tareas de reproducción con instrumentos no estándar, pues gracias a la utilización de moldes rotos, reglas no informativas y superficies cualesquiera, el estudiante pasa de una visión perceptiva 2D a una visión 1D que se requiere para la identificación de propiedades geométricas, llevando a concluir que en la rigurosidad de la selección del instrumento, combinado con la selección de la figura, se crea la situación que llevará a los estudiantes a esta deconstrucción dimensional más fácilmente.

2.2 Sobre la Metodología de la Propuesta

2.2.1 Experimento de Enseñanza

Este trabajo se ubica en la línea de lenguaje y razonamiento matemático del área de educación matemática de la Universidad el Valle y hace parte del grupo de investigación de la misma línea que se conforma por estudiantes de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas y la maestría en educación con

permite ver esa propiedad o característica que solo el instrumento imprime en el recorrido de la trayectoria de aprendizaje.

énfasis en educación matemática, ambos grupos de estudiantes de la Universidad del Valle.

Este trabajo hace parte una propuesta mucho más amplia de investigación propuesta por un estudiante de maestría, quien es a su vez el director del presente trabajo y docente colaborador del experimento de enseñanza.

Esta investigación realiza una descripción de situaciones en función de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento con el propósito de que los estudiantes, a partir de situaciones dirigidas previamente diseñadas por el equipo de trabajo y discutidas por el grupo de investigación de la línea de lenguaje y razonamiento matemático de la Universidad del Valle, logren potenciar su desempeño en Geometría.

A través del análisis cualitativo se amplía la mirada de situaciones de clase extrayendo información con base en la observación, implicado un análisis cognitivo y social de las relaciones entre los estudiantes y sus procesos cognitivos; estas relaciones se tejen desde las normas y creencias que dan pie a construir diferentes constructos teóricos que sirven de insumo para analizar un conjunto de datos.

La propuesta del experimento de enseñanza tiene por objeto, a través de la observación, la comprensión a partir de los errores y alcances de los estudiantes.

La investigación cualitativa facilita al acompañamiento de una buena sistematización puesto que en el experimento de enseñanza el análisis es todo el tiempo, de tal

manera que la mediación entre lápiz y papel a través de la escritura del día a día permitirá comparaciones que a su vez matizará caminos más finos.

El aula de clases como escenario en este proceso continuo demarca tareas puntuales en las fases de la experimentación.

Los análisis en curso de la actividad individual y de los procesos sociales del estudiante en el aula informan a nuevos diseños de experimentos de enseñanza para favorecer la estructuración de recorrido de nuestra trayectoria de aprendizaje, es decir; poder estar en el contexto de los estudiantes y en función de sus actividades individuales y colectivas matemáticas, cabe la posibilidad de nuevos productos que llevan a cabo la modificación de metas locales y actividades de instrucción.

Para ello y frente a lo que la investigación cualitativa demanda y a la ejecución de un experimento de enseñanza se establece en el equipo de investigación intereses particulares que dan directriz y el establecimiento de un marco interpretativo emergente que pauta en las decisiones de vital importancia que se ciñen a la actividad social de la clase.

Enfocar una secuencia instruccional o enseñanza experimental que pueda favorecer a priori nuestro interés de cómo crear situaciones, ejemplos que representen y de cómo convertir elementos teóricos en situaciones de clase nos da el espacio de poder tener una perspectiva social y de cómo se expresan en lo individual y así a

partir de lo experimentado, integrar el propósito de no definir solamente a donde se quiere llegar sino por dónde se puede ir.

Para la caracterización de las actividades cognitivas (VCR), el grupo conduce un experimento de enseñanza, con el propósito de afianzar los conocimientos matemáticos de los estudiantes en un dominio específico como es el de la geometría en especial el trabajo con figuras en segunda dimensión (2D). Este experimento de enseñanza, desarrolla una situación dirigida y delimitada en primera instancia por elementos que componen la actividad geométrica, es decir, las relaciones espaciales, que están presentes y se experimentan por el estudiante a través de la situación dirigida; una segunda instancia que delimita la situación, es todo lo que subyace a las actividades cognitivas (VCR) del estudiante presentes al abordar la situación dirigida.

La presente propuesta, como experimento de enseñanza, se compone por tres niveles dentro del ciclo de diseño. El primer nivel se denomina “fase de indagación y diseño”, llamado también “micro nivel”, en este nivel se plantean múltiples ideas y propuestas de ejercicios, tareas y/o problemas que darán forma a una situación dirigida y acotada por un dominio teórico específico, en esta fase o nivel, se piensa el experimento (día a día), gestando la idea y todo lo relacionado con la planeación y diseño de la situación dirigida. Esta planeación tiene como fin crear una situación que reúna elementos que le permitan al estudiante una aproximación a un saber en particular.

El segundo nivel es llamado “fase de desarrollo”. En esta fase, la situación dirigida diseñada por el grupo de investigadores es llevada al colegio Jefferson y realizada por el grado sexto de básica secundaria; el grupo de investigación ha seleccionado este curso en particular, porque el profesor de geometría del grado sexto del colegio Jefferson es miembro del grupo de investigadores, quien apoya desde el diseño y desde la planificación curricular del grado sexto del colegio Jefferson la realización de las fases de este experimento.

Es fundamental para los diseños de experimentos de enseñanza, contar con la cooperación del profesor encargado del proceso de formación de dicho curso, pues él es la persona más cercana a los estudiantes en sus fortalezas y debilidades cognitivas, además de conocer otras aptitudes y actitudes en el contexto de la clase de geometría, lugar que interesa conocer y analizar.

Es importante entonces mencionar que dentro del experimento de enseñanza, la fase 1 y 2, componen un esquema circular, en donde se origina el espacio para los ajustes y la retroalimentación del diseño del experimento de enseñanza, cada uno de estos ajustes, vendrá de la mano de nueva información sobre el grupo.

El experimento de enseñanza, tiene por última fase, la fase 3 esta consta del análisis retrospectivo en el cual se estudia la información acumulada en cada una de las retroalimentaciones elaboradas durante la aplicación del experimento. Esta fase, será abordada en el proyecto de maestría al cual se articula este trabajo por ser la fase de mayor complejidad de análisis.

2.2.1.1 Primer momento:

Planeación del experimento de enseñanza

Los elementos teóricos que orientan este diseño, son los propuestos por Duval quien ha identificado rasgos generales de la semiosis y del pensamiento humano, dando origen a nuevos criterios en la educación matemática, en particular en la enseñanza de la geometría.

De igual manera, se tomaron todas las discusiones de Duval alrededor de estas tres actividades, para posteriormente, seleccionar una serie de situaciones que conduzcan al estudiante a un manejo de conceptos y procedimientos dentro de su quehacer geométrico, logrando así, proponer un par de situaciones en el primer ciclo de la educación básica secundaria, que permita al estudiante mejorar sus desempeño en geometría.

Una vez se logren caracterizar estas tres actividades y se tengan filtrados los elementos claves de la teoría de Duval, se realizará la aplicación de las situaciones con los estudiantes de primer ciclo de Educación Básica secundaria del colegio Jefferson, situación que se vincula al trabajo de investigación de la línea de lenguaje y razonamiento.

Las fases de diseño del experimento de enseñanza son discutidas al interior del seminario de saberes matemáticas II, gracias a las temáticas que son abordadas y

discutidas; facilitando aún más el reconocimiento de elementos claves que contribuyen a la mejora del experimento de enseñanza.

Este seminario es un primer espacio de cocción para las ideas que aparecen en la preparación y diseño del experimento de enseñanza, permitiendo no sólo llegar al colegio Jefferson con algunas expectativas, sino con una guía de lo que posiblemente se va a encontrar y hasta en algunos casos, el cómo evitar situaciones que hagan perder el foco de las situaciones.

2.2.1.2 Segundo Momento

Ejecución y puesta a prueba del experimento

En esta fase del experimento de enseñanza se realiza una visita semanal periódica al grado sexto del colegio Jefferson, en las que se hacen reuniones para explicar a los estudiantes en qué constará el experimento de clase, se les entregarán las fichas que contienen las “situaciones”, se tomará registro fílmico y se realizarán algunas entrevistas seleccionadas por el grupo de investigación que orienta el experimento.

Esta segunda parte finaliza con gran cantidad de información de cada una de las visitas planificadas y da paso a la discusión del grupo de investigación para que estudie lo ocurrido en cada una de las visitas, en aspectos críticos y puntuales, momento en el que se toman nuevas decisiones en la reformulación de la “situación” presentada.

De esta manera se reinicia la primera fase del experimento, pero con un elemento nuevo, el cual es la retroalimentación de la primera visita realizada y así en cada una de las visitas nuevas; se contará con la retroalimentación de la visita anteriormente realizada.

De este modo es que a través de la metodología cualitativa, se contribuye con información que permite avanzar en la investigación del aprendizaje de las matemáticas, a enfrentar sus problemas y a generar opciones para mejorar cada vez más el rendimiento de los estudiantes.

Finalmente, los aportes que esta investigación ofrecen a la educación matemática en las constantes y continuas búsqueda para mejorar el desempeño en geometría, un cambio de mirada sobre las figuras y un giro en la manera en que se ve en geometría.

Capítulo III

En este capítulo se realiza una presentación del experimento de enseñanza diseñado, de su puesta en marcha y de los hallazgos identificados en el transcurso de su aplicación, así mismo se hace un énfasis en los datos que apoyan las hipótesis iniciales que han sido tomadas de la teoría de Duval, en las que se evidencian momentos en el desarrollo del experimento y que permiten hablar de la posibilidad de potenciar en los estudiantes las actividades cognitivas de visualización y razonamiento.

Es entonces, como en este capítulo se centran los intereses de esta investigación y se ven reflejadas en los elementos teóricos en cuanto al uso de instrumentos para generar situaciones de aula que potencien en los estudiantes su desempeño en matemáticas.

3.1 Diseños de Experimentos de Enseñanza

Esta propuesta se realizó siguiendo la teoría propuesta por Cobb (2000) y la interpretación de Camargo et al. sobre lo que se considera es un experimento de clase o enseñanza; el grupo de investigación realizó una lectura del texto original de Cobb “Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers”, cuestión que facilitó la discusión alrededor de los elementos que definen a los Experimentos de Enseñanza.

Este experimento tuvo la oportunidad de proponer, realizar y aplicar tres diseños durante un periodo⁶ lectivo escolar, lo cual dio la oportunidad de poner en acto una trayectoria de aprendizaje, acorde con los objetivos específicos y general de esta propuesta investigativa.

Las tareas son el producto de la indagación realizada en distintas fuentes bibliográficas; la principal característica en ellas es la estrecha relación con las actividades cognitivas de visualización y razonamiento.

Las tareas propuestas son pensadas desde los Estándares y Lineamientos Curriculares propuestos por el MEN al inicio de la Educación Básica Secundaria; pues el contenido propuesto en las tareas corresponde a vínculos estrechos entre el trabajo con figuras geométricas y actividades cognitivas (Visualización, Construcción y Razonamiento –VCR-), estos vínculos vienen dados por los instrumentos empleados en las construcciones que son los que dan sentido y lugar a las situaciones.

3.1.1 Tareas propuestas en las situaciones

Las diseños aplicados en este experimento de enseñanza que hacen parte de las actividades propuestas en la clase de geometría del grado sexto del colegio Jefferson, son fruto de las discusiones al interior del grupo de investigación de la Línea de Lenguaje, Razonamiento y Comunicación del Área de Educación

⁶ Se trabajó con los estudiantes en la primera parte del año escolar.

matemática de la Universidad del Valle. Fueron obtenidos a partir del estudio de los trabajos de Duval (2005) y de Camargo, Samper, & Leguizamón, (2003), posibilitó el trabajo con figuras geométricas caracterizando dos situaciones dentro del ejercicio del Experimento de Enseñanza.

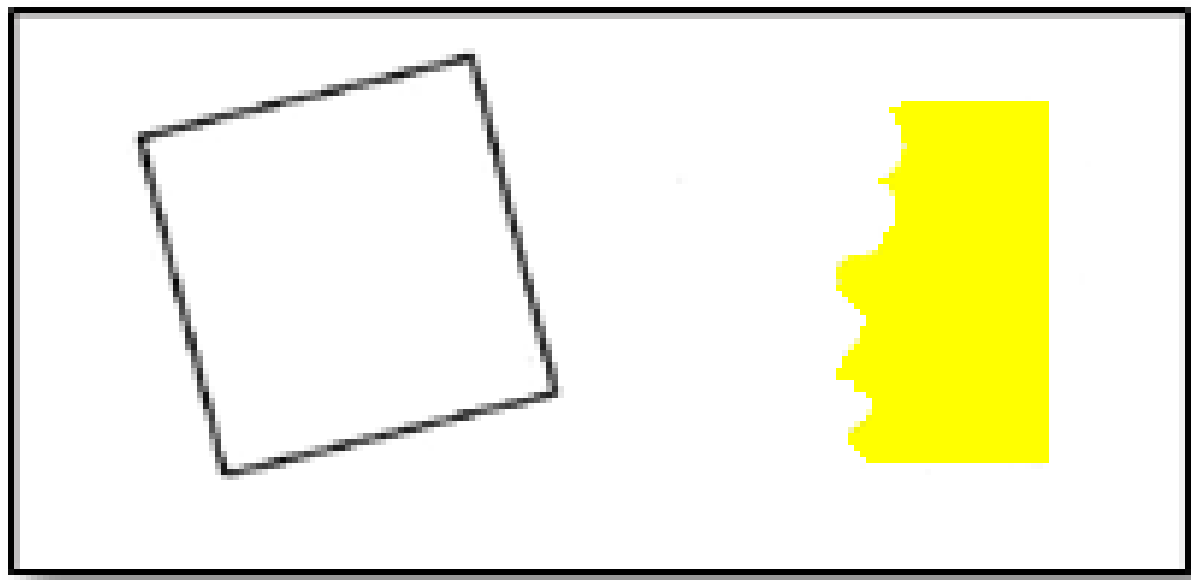
Las tareas han sido propuestas como escenario de situaciones que involucran actividades que el estudiante debe estudiar y resolver; en todas las tareas el estudiante es llevado a que por medio de la visualización, el razonamiento y la construcción, transforme la forma en que ve comúnmente en geometría y genere un nuevo referente de mayor potencia a la hora de enfrentarse a problemas, especialmente en el trabajo con figuras geométricas en grado sexto.

SITUACIÓN 1

La primera situación propuesta para el grupo fue una de reproducción de figuras con instrumentos no estándar (Duval, 2005), esta situación estuvo conformada por tres actividades, en las que los estudiantes intentaban reproducir dos figuras geométricas: un cuadrado y un triángulo.

En la primera actividad “la reproducción de un cuadrado” se propuso usar un molde del cuadrado roto (i1MCR, Gráfica 2), el cual es un instrumento diseñado para conservar el lado y el ángulo recto.

Gráfica 2. Instrumento 1: molde de cuadrado roto (i1MCR).



Fuente: Los cambios de miradas necesarios sobre las figuras, Duval (2005)

Por ser el primer encuentro con los estudiantes en este proyecto, el profesor presenta las características del trabajo, en particular se explica la presencia de los observadores de la Universidad la necesidad de hacer explícitos los procedimientos que se realicen en la solución de la actividad; estos se recogen por medio de entrevistas individuales en el transcurso de la clase. Se entrega una hoja de block con la consigna y con suficiente espacio para la solución. La Ilustración 1 presenta un modelo de la situación.

Ilustración 1. Situación 1. Actividad 1: reproducción de un cuadrado



Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.

Geometría

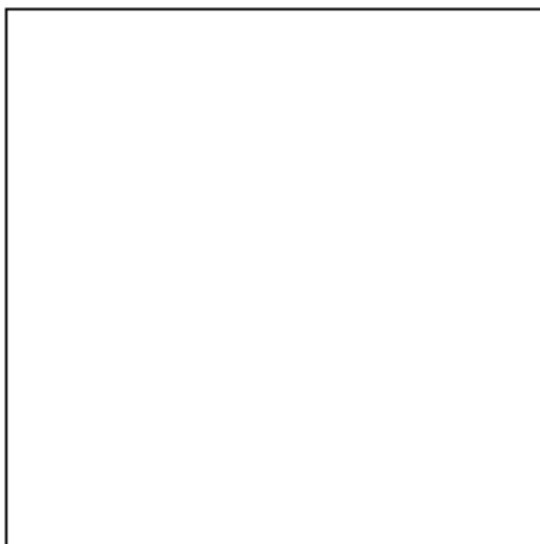
*Respeto y responsabilidad,
la clave para mi crecimiento
en Junior.*

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 1

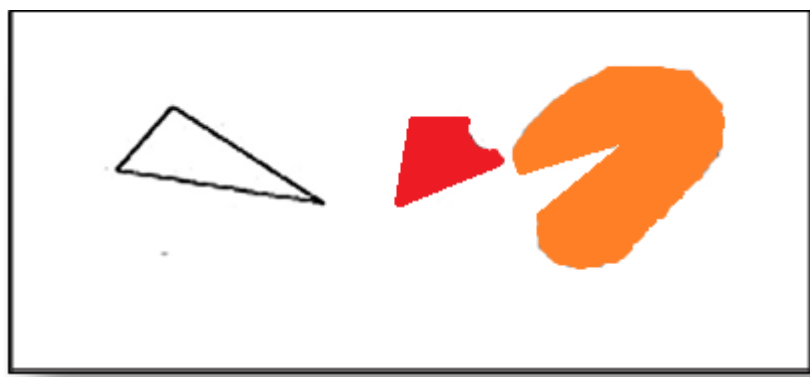
ACTIVIDAD 1

Usando el instrumento que se te entregó construye el cuadrado que se muestra:



La segunda actividad busca realizar la reproducción de un triángulo escaleno con la ayuda de dos instrumentos: un molde roto del triángulo escaleno dado (i2MTER, gráfica 3) y una plantilla rota (i3PR, gráfica 3). Estos instrumentos, al ser encajados, permiten trazar una figura congruente al triángulo escaleno dado. cada instrumento señala una deconstrucción dimensional en red de rectas alrededor del triángulo escaleno dado.

Gráfica 3. Instrumento 2 y 3: molde de triángulo escaleno roto (i2MTER) y plantilla rota (i3PR).



Fuente: Los cambios de miradas necesarios sobre las figuras, Duval (2005)

El molde del triángulo escaleno roto (i2MTER), salva la información de uno de sus tres lados, y los ángulos entre éste y los otros dos lados del triángulo; se complementa con la plantilla rota (i3PR), la cual permite prolongar los lados inconclusos del molde roto y define el tercer ángulo congruente con el del triángulo escaleno dado (Ilustración 2).

Ilustración 2. Situación 1. Actividad 2: reproducción de un triángulo



Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

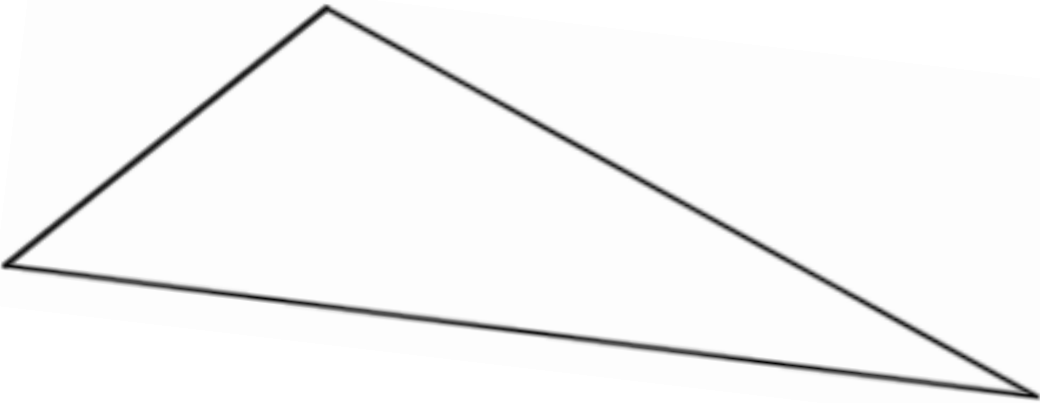
*Respeto y responsabilidad,
la clave para mi crecimiento
en Junior.*

Profesor: Jorge Galeano

SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 2

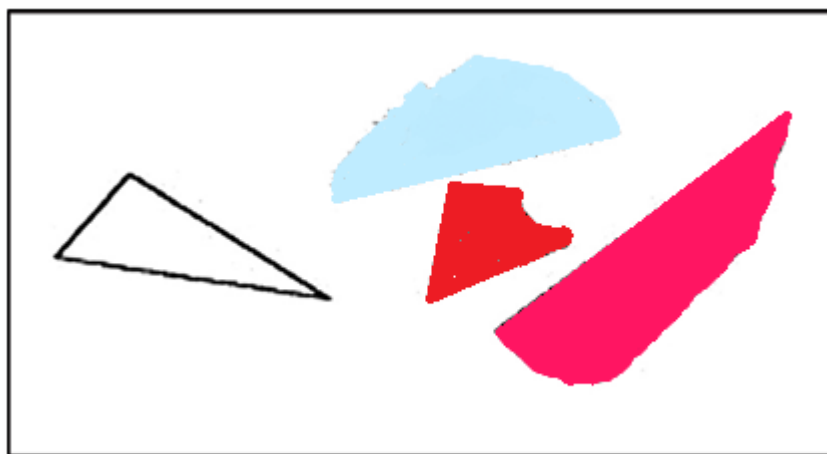
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:



La actividad 3 propone el uso de un nuevo instrumento, el cual se ha definido como regla no informativa (i4RNI). Este instrumento tiene solo de un lado totalmente recto en el cual se pueden realizar trazos suaves semejantes a segmentos de recta. Dos de estos instrumentos reemplazan en esta actividad a la plantilla rota (i3PR).

El uso de estos instrumentos permite una deconstrucción dimensional al mostrar como parte constitutiva del triángulo escaleno, propuesto en 2D, un par de rectas 1D (esto en relación con el ángulo que antes se construía con la plantilla rota). En esta tarea se intenta que el estudiante adquiera como estrategia la deconstrucción dimensional, una estrategia cognitivamente compleja (Duval, 2005).

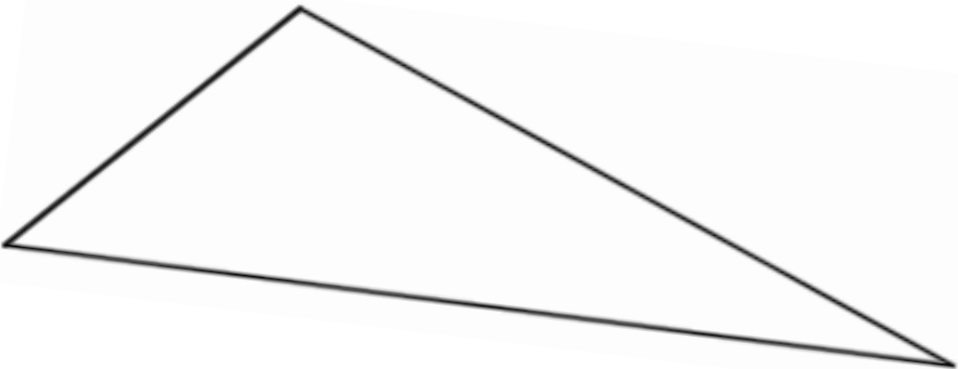
Gráfica 4. Instrumento 2 y 4, molde de triángulo escaleno roto (i2MTER) y regla no informativa (i4RNI). Actividad 3



Fuente: Los cambios de miradas necesarios sobre las figuras, Duval (2005)

Dos i4RNI son usadas junto al instrumento i2MTER, pues tras dibujar el contorno de i2MTER, con las i4RNI se pueden prolongar los lados incompletos de i2MTER, dichos lados al prolongarse lo suficiente generan un punto de corte que se constituirá en el vértice buscado del triángulo.

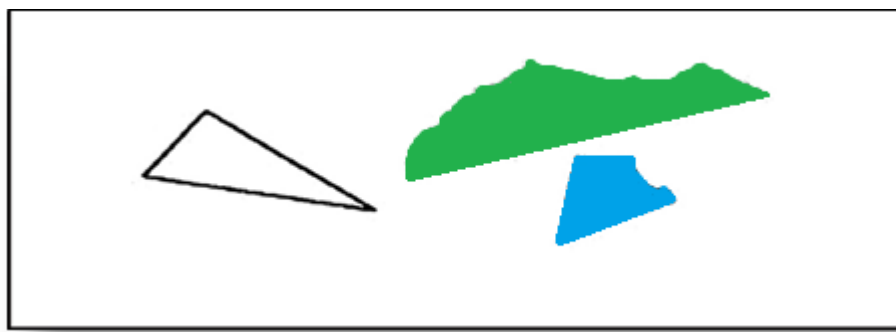
Ilustración 3. Situación 1. Actividad 3: reproducción de un triángulo

	Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°. Geometría	<i>Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.</i>
Profesor: Jorge Galeano			
SITUACIÓN 1			
ACTIVIDAD 3			
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:			
			

En la actividad 4 se propuso trabajar con un i2MTER y solo un i4RNI (Gráfica 5), esta actividad generó el preámbulo para la actividad 5. El funcionamiento de esta actividad es similar al anterior, solo que la prolongación de los lados debe hacerse uno a la vez, y no con los dos al tiempo como si lo permitía la actividad 3, esto

introduce una diferencia en relación con la posibilidad de visualizar el tercer ángulo del triángulo buscado.

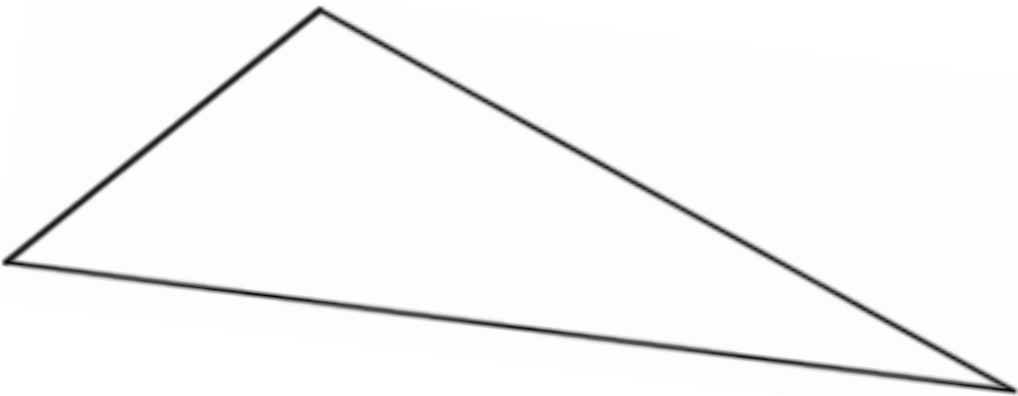
Gráfica 5. Instrumentos de la actividad 4 i2MTER e i4RNI



Fuente: Los cambios de miradas necesarios sobre las figuras, Duval (2005)

Así mismo, la actividad 4 ofrece, a diferencia de la actividad 3, mayor posibilidad de visualizar la red de rectas, así mismo fomenta en el estudiante la cercanía al uso e implementación del instrumento en la actividad.

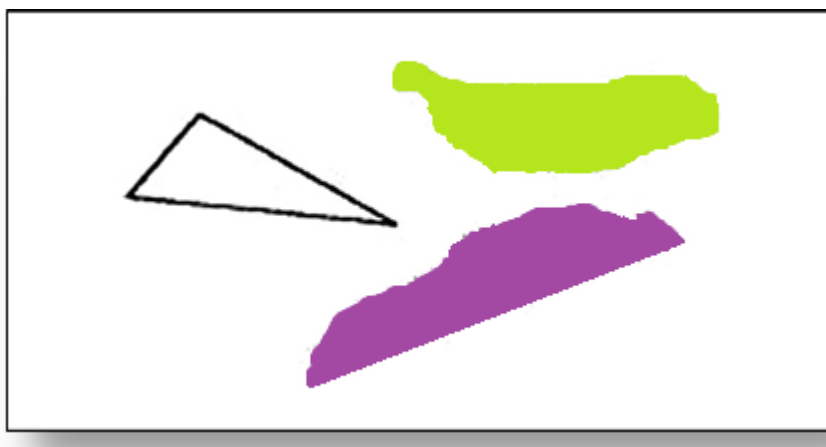
Ilustración 4. Situación 1. Actividad 4: reproducción de un triángulo

	Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°.	<i>Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.</i>
		Geometría	
Profesor: Jorge Galeano			
SITUACIÓN 1			
ACTIVIDAD 4			
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:			
			

La actividad 5 cierra el grupo de actividades de la situación 1, esta actividad agrupa y asocia las particularidades que caracterizan la situación. Fueron propuestos los instrumentos i4RNI y un molde irregular (i5MI) (Gráfica 6).

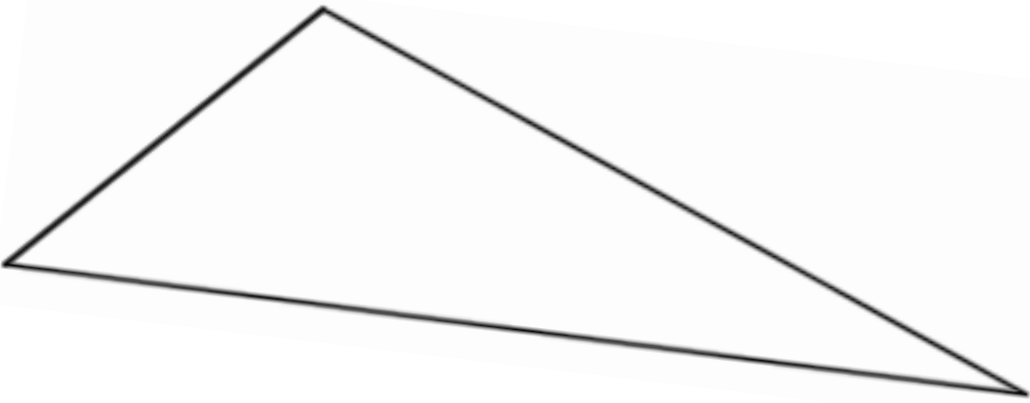
Esta actividad hace fuerte énfasis en la toma de información a través de los instrumentos, realizando marcas auxiliares para tener una guía para el nuevo trazo; esta toma de información se hace con la ayuda de un ensamblaje por sobreposición o un ensamblaje por yuxtaposición.

Gráfica 6. Instrumentos de la Actividad 5, i4RNI y una superficie cualquiera (i5SC)



Fuente: Los cambios de miradas necesarios sobre las figuras, Duval (2005)

Ilustración 5. Situación 1 Actividad 5: reproducción de un triángulo

	Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°.	<i>Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.</i>
		Geometría	
Profesor: Jorge Galeano			
SITUACIÓN 1			
ACTIVIDAD 5			
Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:			
			

SITUACIÓN 2

La segunda situación involucró tres actividades, estas a diferencia de las de la primera situación, no se caracterizan por el uso de instrumentos, sino por el uso del lenguaje natural y de la visualización. Su objetivo fue potenciar en los estudiantes la capacidad cognitiva de visualización y razonamiento respecto a la concepción de las figuras geométricas. Para esta actividad se trabajaron cuadriláteros a través de distintas actividades.

Esta situación consta de tres actividades: *“el celular”*, *“dibuja el mensaje”* y *“la última palabra del diccionario”*. Se emplean instrumentos convencionales como la regla y la escuadra graduada, el lápiz y el papel.

La actividad 1 consistió en plantear una tarea en la que los estudiante a través del uso de celulares y de la aplicación “Whatsapp” conformaran parejas en las que se definieran dos roles, uno de narrador y otro de dibujante.

En esta actividad el estudiante narrador, a través de notas de voz, realizaba una descripción al dibujante de la figura: tamaño, orientación, magnitud de los lados que la conforman, etc., con el fin de que el dibujante fuera capaz de reproducir una figura semejante visualmente.

La actividad inicia dándole una construcción al narrador (una figura) quien a su vez deberá comprenderla y elaborar un plan para narrar las características geométricas

(propiedades) impresas en dicha figura al dibujante, el dibujante debe ilustrar los mensajes recibidos por el narrador y aproximarse a la representación dada al inicio.

La actividad se realiza a través de la aplicación “WhatsApp” con la opción “mensaje de voz”. El narrador y el dibujante deben estar en lugares distantes (sin contacto visual) y podrán verse en cuanto el dibujante crea haber terminado (Ilustración 6). No se podrán enviar fotografías ni videos de los dibujos, y no se puede usar el nombre de la figura (no se puede decir “cuadrado” o “rombo”, por ejemplo).

Ilustración 6. Situación 2. Actividad 1: El celular



Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.

Geometría

*Respeto y responsabilidad, la
clave para mi crecimiento en
Junior.*

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 1 *El celular*

Objetivo: Debes enviarle únicamente mensajes de voz al dibujante por WhatsApp, para que él pueda hacer un dibujo igual (mismo tamaño y misma forma) a cada una de las figuras que ves abajo.

Reglas:

- No está permitido hacer una descripción global, es decir, no puedes describir “es como una pizza” o “es como una ventana”.
- No se puede decir el nombre de la figura, ni usar una palabra semejante.
- No se puede enviar dibujos, solo palabras en español.
- Todos los mensajes deben ser de voz en WhatsApp.
- Antes de empezar a enviar los mensajes, hazle a la figura lo que consideres necesario como una ayuda para describirla. (por ejemplo, trazar líneas, nombrar las partes de la figura, etc.)

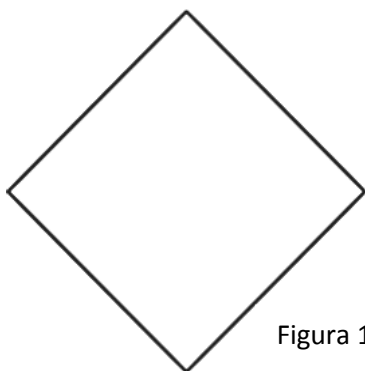


Figura 1

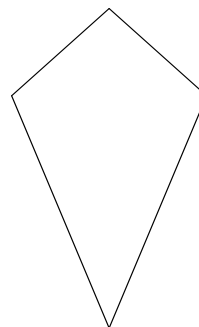


Figura 2

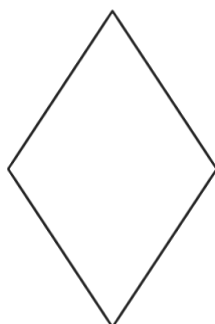


Figura 3

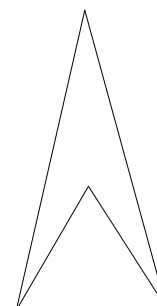


Figura 4

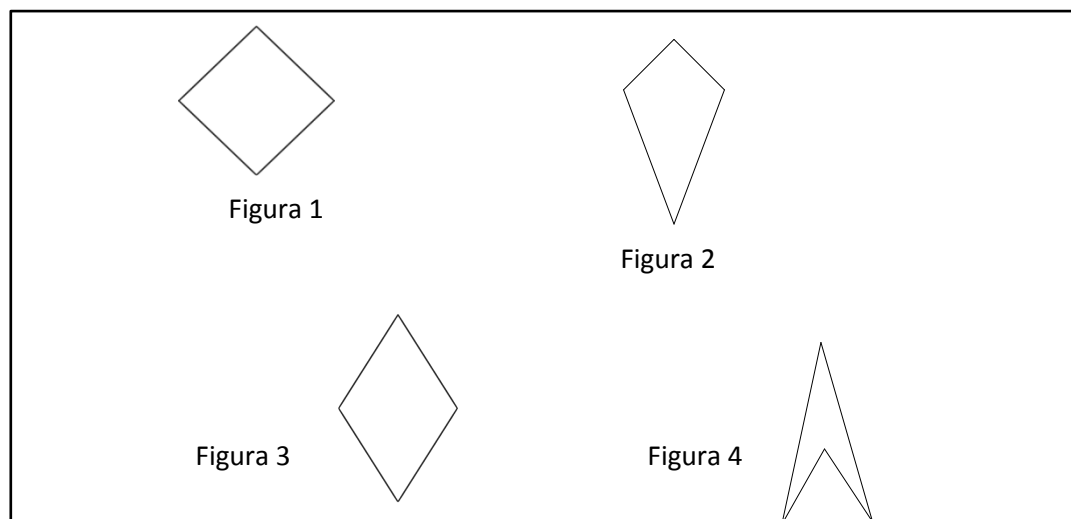
En esta actividad se restringió el uso de descripciones generales, el uso del nombre de la figura y el uso de nombres de figuras u objetos que tuvieran semejanza o cercanía con la figura en reproducción.

Las figuras seleccionadas para esta actividad fueron un grupo de Kuid⁷ tomados de la propuesta de Camargo, Samper y Leguisamón (Gráfica 7), en el módulo 6 de ASOCOLME titulado “tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría”.

El criterio para tomar estos kuid, fue el hecho de ser un trabajo que involucra figuras planas y requieren un nivel de visualización y razonamiento adecuado para los estudiantes de grado sexto; es decir que a través del kuid el estudiante debe hacer un esfuerzo extra en las actividades propuestas por la situación 2, principalmente en las que debe describir el kuid sin hacer una descripción global de la figura.

⁷ Un kuid es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes. Un kuid es un cuadrilátero en el cual cada lado tiene un lado adyacente congruente (Camargo, Samper, & leguizamón, 2003).

Gráfica 7. Figuras implementadas en la Situación 2



Fuente: tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría, (Camargo, Samper, & Ileguizamón, 2003)

La actividad 2 consistió en conformar parejas y definir roles de descriptor y dibujante con el fin de que el descriptor únicamente a través de registro escrito, realizara textos en los que indicaba al dibujante cómo hacer el dibujo de la figura que solo veía el narrador.

Ilustración 7. Situación 2. Actividad 2: dibuja el mensaje, hoja del descriptor



Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.
Geometría

*Respeto y responsabilidad, la
clave para mi crecimiento en
Junior.*

SITUACIÓN 2: CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Actividad 2 Dibuja el mensaje

Hoja del Descriptor

Objetivo: Debes enviarle mensajes al dibujante, en la hoja de mensajes, para que él pueda hacer un dibujo igual (mismo tamaño y misma forma) a cada una de las figuras que ves abajo.

Reglas:

- No está permitido hacer una descripción global, es decir, no puedes escribir “es como una pizza” o “es como una ventana”.
- No se puede escribir el nombre de la figura, ni usar una palabra semejante.
- No se puede dibujar, solo frases en español.
- Todos los mensajes deben ser escritos en la hoja de mensajes.
- Antes de empezar a enviar los mensajes, hazle a la figura lo que consideres necesario como una ayuda para describirla. (por ejemplo, trazar líneas, nombrar las partes de la figura, etc.)

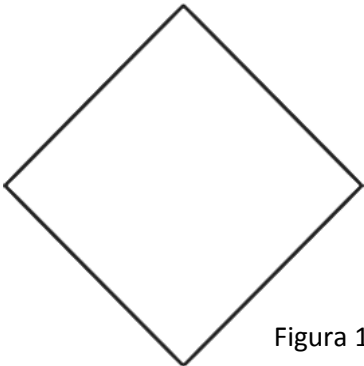


Figura 1

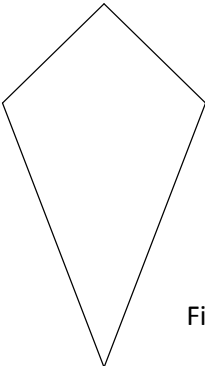


Figura 2

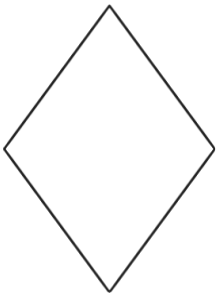


Figura 3

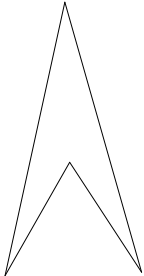


Figura 4

Este ejercicio restringía la posibilidad de que el descriptor realizara dibujos o marcas en la hoja, sólo se permitió el uso del lenguaje natural para realizar notas textuales con las características, también se restringió el uso de nombre o parecidos con formas u objetos.

Ilustración 8. Situación 2. Actividad 2: dibuja el mensaje, hoja de mensajes

	Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°. Geometría	<i>Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.</i>
SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS			
Actividad 2 <i>Dibuja el mensaje</i>			
Hoja de Mensajes			
Descriptor (escribir color) _____			
Dibujante (escribir color) _____			
-			

En ésta situación se conformaran 4 parejas (ocho personas) los escritores deben usar lapicero azul y los dibujantes rojo.

En la pareja se definen dos roles, el primero es el de escritor y el segundo es el de dibujante. La actividad consiste en escribir a lápiz y papel un mensaje en lengua natural (sólo texto) en el que se logren dar las instrucciones de construcción de una (figura) al dibujante, estas instrucciones deben cumplir las reglas de la actividad de no escribir el nombre de la figura ni dibujar en el mensaje.

El escritor cuenta con una hoja de papel en blanco en donde debe escribir el mensaje cumpliendo las reglas de la actividad, el mensaje debe contener sólo texto y no tiene límite de tamaño, el dibujante para comunicarse con el escritor sólo contará con la hoja del escritor en donde él le dice cómo realizar la ilustración de la figura en cuestión. No se podrán enviar dibujos, y no se puede usar el nombre de la figura (no se puede escribir “cuadrado” o “rombo”, por ejemplo).

Ilustración 9. Situación 2. Actividad 2: dibuja el mensaje

	Colegio Jefferson Fundado en 1963	MATEMÁTICAS 6°.	<i>Respeto y responsabilidad, la clave para mi crecimiento en Junior.</i>
Geometría			
SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS			
Actividad 2 <i>Dibuja el mensaje</i>			
Hoja del Dibujante			
Objetivo: usar las indicaciones que te da tu compañero para construir la figura que te describe.			
Reglas:			
- Dibuja con un lápiz. - Procura no borrar los intentos realizados, sino hacer un nuevo dibujo. - Usa tu escuadra y tu regla. - Puedes pedir aclaración y preguntar lo que necesites, pero sólo a través de la hoja de mensajes.			

La actividad 3 fue propuesta para dos grupos de 6 personas, estos grupos tuvieron una hoja con dos figuras diferentes, cada grupo define un integrante del otro grupo para mostrarle una figura para que este a su vez, en el menor tiempo posible, realizara una descripción a su grupo, dicho grupo debe dibujar una figura similar y cercana a la figura inicial.

Ilustración 10. Situación 2, Actividad 3 la última palabra del diccionario



Colegio Jefferson
Fundado en 1963

MATEMÁTICAS 6°.

Geometría

*Respeto y responsabilidad, la
clave para mi crecimiento en
Junior.*

SITUACIÓN: 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

ACTIVIDAD 3 la última palabra del diccionario (Grupo 1)

OBJETIVO: Dibujar la Figura que se describe en el menor tiempo posible sin preguntar su nombre o parecido con algún otro objeto (ventana o pizza por ejemplo)

REGLAS:

- Cada grupo debe elegir un descriptor
- Los descriptores no podrán hacer una descripción global de la figura
- El descriptor puede hablar con su grupo interpretador libremente sin decir el nombre de la figura
- el descriptor no puede realizar dibujos
- hágale a la figura lo que considere necesario para describirla.

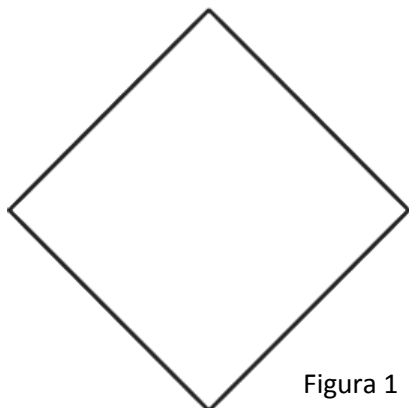


Figura 1

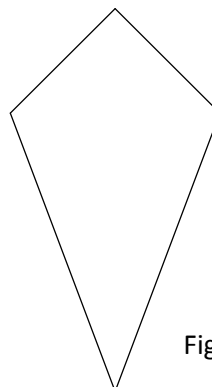


Figura 2

Cada grupo tuvo un descriptor por cada figura a dibujar, así mismo, los estudiantes restantes conformaron el grupo de dibujo, quienes elaboraron un plan para interpretar las indicaciones del descriptor y lograron dibujar la figura descrita únicamente en palabras.

Se entregaron dos figuras en papel a cada grupo, se realizó un sorteo de piedra, papel y tijera, para definir el grupo que inicia, el grupo que mayor acierto tenga ganará. El descriptor puede hablar con su grupo libremente sin decir el nombre de la figura, el descriptor no puede realizar dibujos. Esta actividad al igual que las dos anteriores permitían el uso e implementación de instrumentos (convencionales o no) con total libertad y sin restricción alguna.

3.1.2 Aspectos curriculares de las situaciones

Estas situaciones hicieron parte de las actividades de clase del grado sexto del colegio Jefferson, fueron pensadas y diseñadas acorde a los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional en los estándares curriculares para grado sexto.

En el pensamiento espacial y sistemas geométricos, se propone en el estándar tres de este pensamiento que el estudiante pueda: “clasificar polígonos en relación a sus propiedades”, el estándar 5 que el estudiante logre: “resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales” y el estándar 7, que el estudiante sea capaz de

“identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica”.

Estos estándares constituyeron los insumos curriculares para formular esta propuesta al grado sexto del colegio Jefferson, al mismo tiempo que lo hizo la rigurosa planificación de los contenidos dados por el profesor y el acierto de presentar temas y otras actividades que promueven y potencian la compleja actividad cognitiva de los estudiantes.

El proyecto educativo institucional del colegio Jefferson permitió el desarrollo de esta investigación y facilitó las indagaciones y elementos que aportaron mejoras en los experimentos de enseñanza.

3.1.3 Qué caracteriza a las situaciones

Cada una de las dos situaciones posee características diferentes; la primera situación está compuesta por 5 actividades, cada actividad condicionada por un instrumento; esta condición especial en cada actividad hace que el estudiante trabaje con las restricciones que el instrumento interponga, así mismo, es el instrumento el que desde sus límites llena de significado cada actividad de reproducción. En la situación 2 se proponen 3 actividades que a diferencia de la situación 1, contiene un trabajo con instrumentos estándar (Regla graduada, compas, escuadra, etc.) con los que los estudiantes ya están familiarizados; el significado de esta situación no se contiene principalmente en los instrumentos usados, como si lo es en la situación 1. En estas actividades buscan en los

estudiantes identificar elementos constitutivos en sus formas de explicación y descripción, principalmente en la producción de enunciados que comunican a un auditorio sobre las características de una figura geométrica en cuestión.

Esto, desde una perspectiva cognitiva, remite a las propiedades que cada instrumento le permite identificar al estudiante y cómo puede él ir entrenando su forma de ver las figuras, identificando para el caso de las figuras en 2D propuestas en estas actividades una red de rectas 1D que conforman cada una de las figuras.

Es esto último lo que caracteriza la situación 1, pues el grupo de actividades conforman una situación en la que ver propiedades y otras formas en las figuras, remite al uso y a la selección del instrumento a usar, algunos con mayor o menor alcance.

La situación 2 por su parte, se caracteriza por las formas que los estudiantes usan como estrategia para describir y nombrar las partes de una figura, con ayuda de lo que la situación 1 les pudo aportar (en términos de las propiedades que se reconocen o no gracias al papel de los instrumentos de construcción).

En la situación 2 todas las actividades buscan el estudio y posterior análisis del vínculo entre la visualización y el razonamiento en los estudiantes, pues en las tres actividades quien describía era quien visualizaba la figura y era quien diseñaba una estrategia para comunicar a su compañero, que no ha visto la figura, cómo realizar una reproducción cercana a dicha figura.

3.2 Análisis de las situaciones propuestas en el aula

La situación de aula se propuso como un ejercicio de las clases de geometría del grado sexto del colegio Jefferson. Para este trabajo de grado y en función de un experimento de enseñanza, se detallaron dos situaciones compuestas de sus actividades respectivas. Estas dos situaciones se dividen en situación 1, para las actividades 1, 2, 3, 4, y 5; y la situación 2 que cuenta con actividades 1, 2 y 3. Siendo así un grupo de actividades que comprenden una situación diferente bajo una misma búsqueda; situaciones que contribuyen a potenciar las actividades cognitivas del estudiante en el trabajo con geometría, en particular en el trabajo con figuras geométricas planas, para un aprendizaje significativo en los estudiantes y a un acercamiento semiótico cognitivo a través del razonamiento y la visualización.

Se tienen como referentes para el análisis: el análisis visual en función de las figuras y el reconocimiento perceptible, el discurso en geometría a través del uso de proposiciones y la argumentación en geometría. Se detallan, en esta apartado del trabajo, algunos momentos claves en el desarrollo de la actividad, y todas aquellas regularidades y dificultades que se presentaron en la actividad de construcción y en el registro de lo dicho por los estudiantes.

Se considera de vital importancia la caracterización de la actividad de los estudiantes al razonar sobre conceptos geométricos, mediante el análisis informal de las partes constitutivas y de atributos de las figuras.

El razonamiento sobre las figuras es de tipo experimental, puesto que las figuras se darán a través de actividades de observación, medición, dibujo y elaboración de modelos (Camargo, Samper, & leguizamón, 2003). Para este trabajo se privilegia la elaboración de modelos a través de instrumentos no usuales como los moldes rotos y las reglas no informativas (Duval, 2005).

3.2.1 Situación 1

La situación 1 está comprendida por 5 actividades de las cuales se presenta una descripción⁸ y un luego un análisis. Para esta situación se programaron dos visitas al grado sexto del colegio Jefferson, en las que se filmó para el primer día 19 videos⁹ correspondientes a las actividades 1, 2 y 3, y para el segundo día 34 videos correspondientes a las actividades 4 y 5.

Como estructura base en la recolección de información y la posterior obtención de datos y material de análisis, se construyó un rejilla de análisis que tomara en cuenta parámetros como los elementos explícitos e implícitos sobre la percepción global de las figuras, las partes y elementos de los componentes de las figuras y sus relaciones teniendo en cuenta las propiedades de las figuras; es decir, se categorizan estos componentes para dar espacios a elementos icónicos, elementos semi-icónicos y a elementos no icónicos.

⁸ La descripción narra lo ocurrido en algunas de las escenas relevantes para este trabajo. Dicha descripción y selección de escenas son la base con la cual se desarrollan los análisis que se presentan más adelante.

⁹ Los videos recogen escenas de clase o entrevistas a los estudiantes.

A esta rejilla se vincularon 10 de los 53 videos¹⁰, los cuales fueron seleccionados porque mostraron elementos importantes para la investigación, elementos de percepción global de la figura y percepción de las partes constitutivas de la figura, además el uso del lenguaje natural como medio de razonamiento y la construcción de argumentos para decir lo que ven de las figuras.

DESCRIPCIÓN VIDEOS SITUACIÓN 1. PRIMER DÍA

Para el primer día de la situación 1 se registraron inicialmente videos que detallaran elementos importantes para la visualización y el razonamiento. A continuación se presentan los videos seleccionados del primer día.

La siguiente imagen es de uno de los videos grabados el primer día, en la actividad 2 donde el estudiante 6 recurrió al uso de la herramienta i2MTER y i3PR como plantilla.

¹⁰ Los videos se identifican, en la descripción que sigue, por alguna de sus imágenes; por eso serán referenciados como “gráfica” y según un número en la secuencia que les corresponda.

Gráfica 8. Actividad 2, uso de la herramienta como plantilla



Fuente: video HDV_0253

En esta actividad se registra la conversación del profesor de geometría con un estudiante del curso. Para el tratamiento de las conversaciones se usan símbolos de convención como (P) para referirnos al profesor de la clase y (E) para un estudiante del curso.

E: lo puse aquí para hacer la primera parte y me quedara igual, luego cogí esta cosita para medir el tamaño, como se necesitaba, luego lo medí y ya.

P: ¿hiciste el mismo trazo y el otro lo mediste y pusiste la marca en el que estabas dibujando?

E: sí

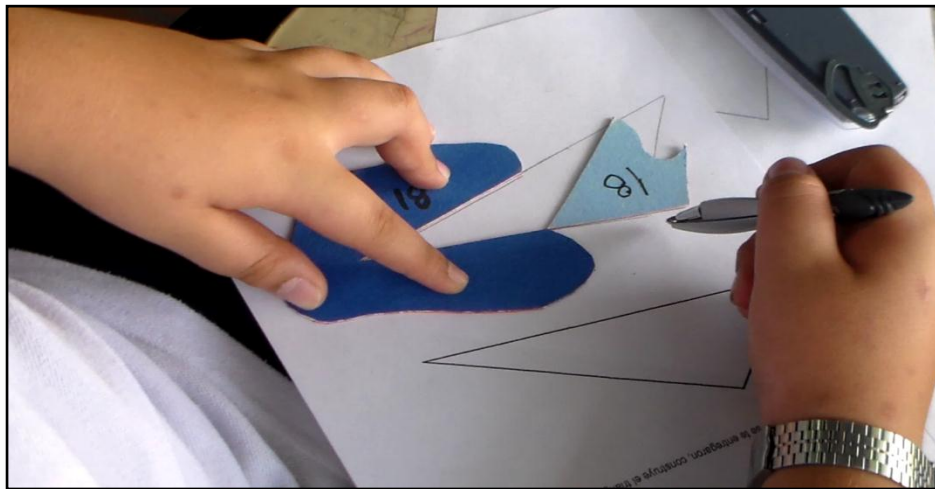
P: pero te quedó el ángulo más pequeño ¿sabes por qué?

E: no

P: porque no tomaste en cuenta el ángulo de la figura, te fijaste solo en la línea y no en el ángulo. Esa es la razón por la cual te queda más pequeño el ángulo de tu dibujo.

El estudiante número 6 en este video (Gráfica 8) muestra cómo construir un triángulo utilizando como plantilla el molde roto del triángulo, para ello, ubica los dos instrumentos sobre la figura, primero el molde i3PR que contiene un ángulo y luego i2MTER, que contiene dos ángulos y un lado completo dado e intenta reproducirla idénticamente. Se presenta la segunda imagen del video seleccionado que evidencia la construcción de trazos en 1D para apoyarse en la reproducción.

Gráfica 9. Actividad 2, realización de trazos individuales



Fuente: video HDV_0258

Mientras el experimento sigue en curso, son entrevistados algunos estudiantes que ya han construido una reproducción de la figura con los instrumentos entregados; se les pide que frente a la cámara expliquen cómo lo han hecho.

P: ¿qué hiciste?

E: cogí las dos figuras y las medí al otro lado y la tracé

P: explícame cómo lo hiciste, vuélvelo hacer yo lo miro

E: esta la medí aquí y la trace y la otra aquí... no me da ya la figura!!!

P: piénsalo un rato cómo lo hiciste.

El estudiante número 18 en esta actividad manifiesta elaborar la construcción tomando cada molde roto y haciendo los trazos individuales (Gráfica 9), de esta manera muestra cómo superpone los moldes sobre la figura inicial; cuando dialoga con el profesor y debe reelaborar la figura que hizo manifestó que ya no le “cuadraba”.

Para el tercer video seleccionado, se detalla la imagen de un estudiante que muestra en plenaria con sus compañeros la construcción realizada, explicando desde el tablero de clase con un molde y una plantilla lo suficientemente grandes para realizar la construcción en el tablero, este ejercicio proporciona una alta producción discursiva por parte de los estudiantes quienes articulan diferentes formas argumentativas para convencer a la clase sobre sus procedimientos y validar sus construcciones.

La mayoría de argumentos en esta actividad, son del tipo retórico y unas pocas del tipo heurístico (Duval, 1992).

Gráfica 10. Actividad 2, socialización de resolución por encaje



Fuente: video HDV_0259

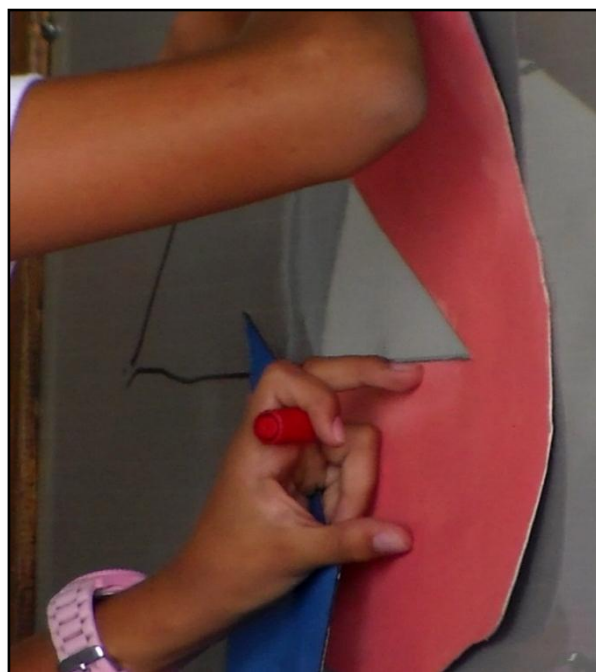
P: explica en el tablero ¿cómo lo hiciste?

E: junte las dos fichas y trace las líneas para dar con la figura.

El estudiante en este video presenta su construcción en el tablero a petición del profesor de clase (Gráfica 10), posterior a ello el estudiante realiza los trazos con las moldes explicando su proceso de llegar a la figura imagen del triángulo dado.

El cuarto video seleccionado muestra la imagen de una estudiante que presenta su explicación en plenaria con los compañeros también desde el tablero de clases, con el uso de la plantilla i3PR y el molde roto i2MTER.

Gráfica 11. Actividad 2, socialización resolución por relación entre ángulos



Fuente: video HDV_0260

P: Muestra en el tablero cómo lo hiciste

E: medí las dos figuras juntas, luego las separé y las dibujé

La estudiante para esta actividad de reproducción de un triángulo dado, argumenta en el tablero cómo fue su proceso y manejo de moldes rotos para llegar a la figura imagen del triángulo dado (Gráfica 11), posterior a ello menciona una relación entre ángulos que se pueden copiar de los moldes.

3.2.1.1 ANÁLISIS SITUACIÓN 1 PRIMER DIA

Con las escenas que se acaban de describir, y que hacen parte de una selección que se realizó de todo lo ocurrido en la implementación, se elabora un análisis que pretende vincular lo ocurrido con lo esperado según la trayectoria de aprendizaje propuesta y las discusiones que en relación al diseño se dieron.

Fruto de dicho análisis se logran identificar tres grandes temas sobre los cuales centrar la discusión de esta parte del trabajo, éstos se presentan a continuación.

VISUALIZACIÓN: Reconocimiento perceptible

En la percepción de las figuras existen diferentes criterios e indicadores que permiten reconocer y visualizar las partes que la componen y las relaciones que pueden existir con otras figuras, así mismo el reconocimiento de las figuras geométricas también puede darse por sus elementos y propiedades matemáticas.

En los videos correspondientes a la Gráfica 12 de la actividad 1, los estudiantes números 6 y número 18, registraron procesos similares en cuanto a la construcción del triángulo dado con el molde roto i2MTER del triángulo y la plantilla i3PR correspondiente al ángulo del triángulo dado.

Pese a que ambos llegan a la producción de la figura dada, se observa claramente en las imágenes que se muestran en la descripción (gráfica 8 y gráfica 18) que, al hacer la prueba de superposición con el molde roto se encuentra que los lados del molde no coinciden con los de la figura imagen. Por tanto se puede inferir que el uso

de los instrumentos i2MTER y i3PR en la construcción no fue el adecuado pese a que los estudiantes pudieron ver el mismo número de formas como de contornos cerrados, obedeciendo a un proceso de yuxtaposición; es decir, se privilegia el contorno cerrado vinculado a trazos de 2D.

Los estudiantes no toman en cuenta el ángulo sino la medida de un lado (línea) y por ello la abertura del ángulo es distinta a la dada inicialmente, recurriendo a trazos individuales 1D que hacen fallar el proceso de reproducción del ángulo, puesto que la naturaleza de la actividad y de los instrumentos está vinculada a trazos para contornos cerrados.

Para los videos correspondientes a la gráfica 13 y gráfica 11 de la actividad 2 (de los estudiantes con un proceso similar en la construcción del triángulo), se pueden identificar elementos importantes para el análisis de la visualización.

En la elaboración de modelos de figuras se debe tener en cuenta dos procesos fundamentales, uno que se hace por ensamblaje de superficies (yuxtaposición) y otro por ensamblaje de líneas (superposición); teniendo en cuenta que los instrumentos que se emplean para reproducir una figura dada dirigen la manera de mirar, y que a su vez, algunos de estos instrumentos conservan la prioridad perceptiva en 2D a menos que se pueda llegar a una deconstrucción dimensional o una red de rectas y poder ver trazos en 1D.

Dado que se entregaron dos instrumentos, un molde roto y una plantilla del ángulo del triángulo dado, se esperaba que se privilegiara un proceso por yuxtaposición en

consecuencia a la naturaleza del instrumento, ya que este privilegiaba el contorno cerrado.

Lo encontrado en estos dos estudiantes (6 y 18) fue un argumento de construcción que consistía en trazar con un lápiz el borde de uno de los dos instrumentos primero para luego ensamblar el otro instrumento, buscando cerrar el contorno de la figura, el estudiante registrado en la (gráfica 10), junta los dos moldes y traza las líneas para dar con la figura, mientras que el estudiante registrado en la (gráfica 11) mide las dos moldes juntos, luego las separa para dar con la figura imagen del triángulo dado.

Este uso del instrumento da evidencia de que a los estudiantes les cuesta trabajo ver la red dimensional inmersa en la figura, por lo que no son capaces de realizar adecuadamente el uso de los instrumentos.

DISCURSO EN GEOMETRÍA

Articulación proposicional

En los videos correspondientes a la Gráfica 14 de la actividad 2, los estudiantes números 6 y número 18, a la hora de expresar sus representaciones mentales en función de la actividad propuesta, infieren una articulación proposicional en la que se busca un patrón lógico geométrico como el de armar una figura con trazos independientes (rompecabezas) de la congruencia de sus elementos, puesto que se sienten con seguridad por parte de los estudiantes de haber realizado los trazos de forma adecuada y haber construido una figura igual a la figura imagen dada.

Esta situación evidencia la importancia del sentido de la proposición, que en función de un status ya sea por contenido o lógica, dará más soporte en la vinculación de ideas, llevando el plan de elaboración, a un plan de coherencia entre la forma de decir lo que se ve y lo que se hace.

Aunque su intento de reproducción es fallido por no vincular los elementos exigidos por las propiedades como lo es la igualdad del ángulo, se puede mencionar que el rol de enunciar su trabajo pone en evidencia su relación con el tratar de objetivar representaciones mentales.

Para los videos correspondientes a la gráfica 15 y gráfica 11 de actividad 2, en cuanto a su proceder en la exteriorización de sus representaciones mentales se alcanza un valor significativo, puesto que el sentido de su articulación es direccionado asertivamente por la percepción global de la figura geométrica en el reconocimiento de sus elementos y las relaciones con sus propiedades matemáticas.

Es entonces como los estudiantes 6, 18 y 14, realizan un trabajo en el que se pueden identificar dos maneras de visualización, icónica y no icónica. Así mismo identificar estas dos formas de visualización aporta al ejercicio de investigación de los elementos que ayuden a potenciar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el trabajo con figuras en grado sexto.

ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA

Razonamiento natural

Como indicador esencial para el razonamiento tipo visualización, la identificación de formas geométricas en objetos físicos es indispensable para reconocer las características de las figuras y poder hacer procesos de comparación y una posterior determinación de la figura.

En los videos seleccionados en las tres primeras actividades de la situación 1 se muestra el uso de un vocabulario cotidiano para detallar informalmente los componentes de una figura, pero sus argumentaciones carecen de fuerza y pertinencia puesto que no se da una relación entre los contenidos semánticos y los valores epistémicos (videos: HDV_0259, HDV_0253 y HDV_0258).

Por otra parte se rescata el hecho de que el argumento depende principalmente de su adaptación a la situación y no tanto a la resonancia en el universo del interlocutor; es decir, el hecho de que ellos vean que su experimento acertó con el propósito de la actividad en cuanto estimula una visualización en las percepciones globales y particulares geométricas, al mismo tiempo que el uso de los instrumentos para la construcción es válido. El argumento no dependerá exclusivamente de un dominio de conocimiento, sino del contexto que estimula y motiva el defender su idea, su propósito (Duval, 1999).

Para los videos correspondientes a la gráfica 16 y 11 de la actividad 2, al momento de socializar el proceso de construcción al resto de los compañeros, por el hecho de

intentar convencer que lo que hicieron detalla procedimientos correctos, no garantiza o no da cuenta de un razonamiento como tal, pero sí cabe decir que puede consistir en explicaciones, puesto que se dan una o más razones para clarificar lo que se hizo o lo que se está haciendo. Evidencia del hecho de que sí hay un vínculo, quizás no muy explícito, con elementos constitutivos del lenguaje y las funciones discursivas.

Las enunciaciones de los estudiantes en la primera situación, son dadas por sus explicaciones, cuando se les realiza la pregunta ¿cómo lo hiciste?, los estudiantes buscan dar argumentos para soportar lo que han hecho; estos soportes que hacen parte de argumentos retóricos (Duval, 1992), son los más formulados por los estudiantes a lo largo del experimento de enseñanza.

Las funciones del discurso hilan un gran conjunto de referentes con las tareas propias, como por ejemplo lo es designar, decir algo de lo que se designa, articular y transformar al objeto que puedan estar inmersos en cualquier situación de aula.

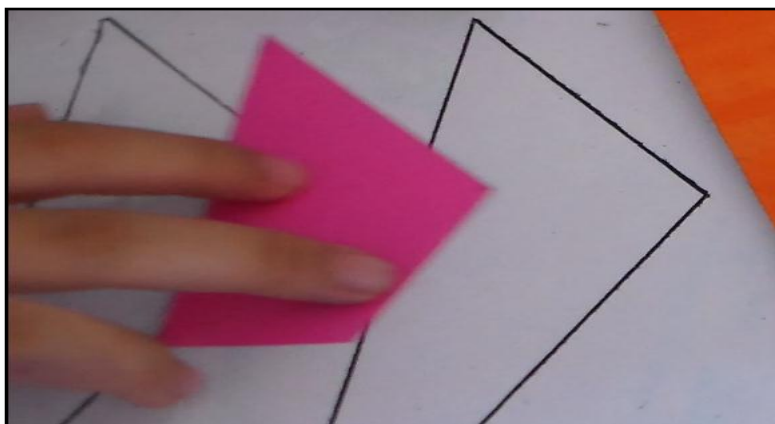
Es entonces como desde un análisis del discurso, es posible identificar elementos que aportan en la construcción de mejores situaciones de aula que potencien la actividad cognitivas de Razonamiento.

3.2.1.2 SITUACION 1 SEGUNDO DIA

Para el segundo día de la situación 1 se realizaron las actividades 4 y 5. En estas situaciones de aula como pregunta introductoria se utilizó en todos los casos ¿Cómo hiciste la figura? Las actividades de este día se enfatizaron en el uso de plantillas y el uso de reglas informativas y no informativas como superficies cualquiera.

En el primer video seleccionado en el día 2, se muestra la imagen en la que en este momento de construcción de la figura (triángulo) el estudiante manifiesta poder encajar las plantillas que se dieron para el uso de la construcción del triángulo dado.

Gráfica 17. Actividad 5, resolución por encaje



Fuente: Video: 345v (7)

E: Yo ví que éste cabía acá, yo hice las medidas. (Coloca la plantilla sobre la figura y pone marcas sobre ella)

P: ¿Cuáles medidas?

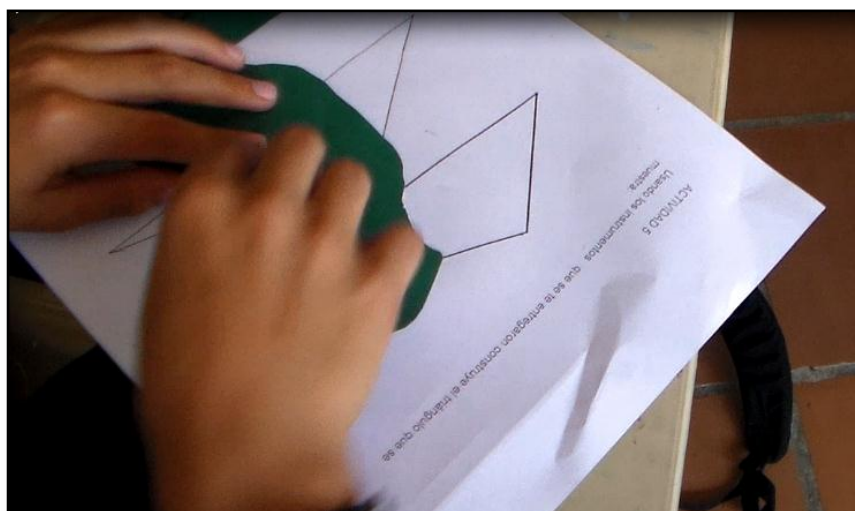
E: [los puntos, luego tracé las líneas]

Para esta actividad el estudiante manifiesta ver las plantillas con la función de encajar para hacer una copia de la figura inicial (Gráfica 12), posterior a ello toma los puntos, que en este caso son los vértices del triángulo, de tal manera que al proyectarlos pueda generar la figura dada.

El estudiante traza las líneas desde cada punto de tal manera que quedan tres líneas paralelas entre sí. Al tener los puntos vértice del triángulo el estudiante crea para sí, la seguridad de copiar los lados y ángulos del triángulo.

En el segundo video seleccionado el uso de instrumentos no usuales como las plantillas permiten el reconocimiento de elementos implícitos de la figura que sobresalen en el ejercicio de reproducción. En la siguiente gráfica se presenta la actividad 5 y el uso de la plantilla como escuadra convencional.

Gráfica 18. Actividad 5, resolución uso de instrumentos como escuadras



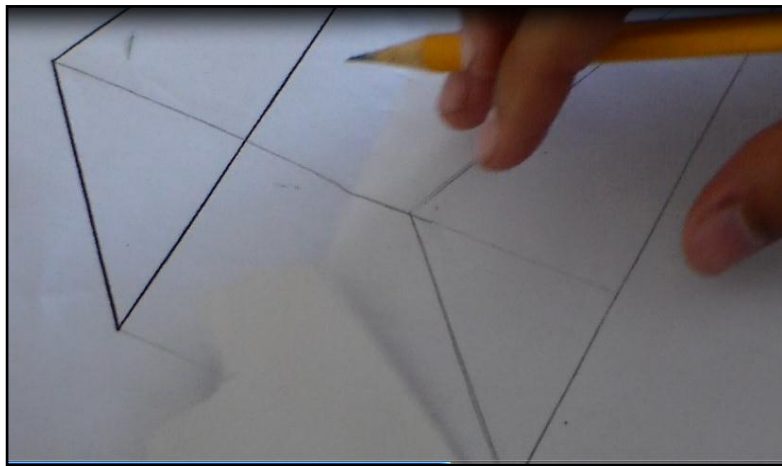
Fuente: Video A345V (20)

E: [Primero la calcule acá, luego vi la altura poniéndola así poniéndole los puntos, entonces la calculaba así y aquí, luego la bajaba y luego la ponía así y la ponía así y me quedó].

El estudiante para esta situación utiliza las plantillas entregadas como escuadras, toma la altura del triángulo inicial con la plantilla como insumo para generar la figura imagen (Gráfica 13).

un tercer video seleccionado de la actividad 5 se presenta la imagen de un estudiante donde prolonga segmentos para proyectar los puntos vértices del triángulo.

Gráfica 19. Actividad 5 resolución por proyección de puntos



Fuente: video A345V (30)

El estudiante da explicación de su proceso de construcción y menciona que traslada los puntos (vértices) (Gráfica 14) del triángulo para trazar las líneas de tal manera que hace coincidir los ángulos y garantiza la igualdad entre las dos figuras; realizando dos acciones juntas, la de reproducción y la de prueba que da garantía de la congruencia entre la figura inicial y la construida gracias a las líneas de proyección de los vértices.

E: Hice estas líneas así, que me dicen que es como la distancia del triángulo, y luego puse esta donde el espacioso del ángulo, y con esto hice que la línea me cupiera de aquí hasta acá.

P: ¿Y cómo mediste este ángulo?

E: [Medí aquí, desde aquí acá, y luego fui buscándole como de aquí si me daba y me cuadro acá].

P: ¿Y cómo mediste este ángulo de acá?

E: [No pues, baje del puntico de acá un poquito y luego lo uní con la medida de acá].

El estudiante N° 16 argumenta que para la construcción de la figura imagen hace proyección de los vértices, menciona que hace coincidir los ángulos con los trazos hechos por los puntos proyectados. Muestra que los ángulos se forman después de haber marcado el punto y un trazo con la regla no informativa evidenciando la unión de trazos para la formación de la amplitud angular.

El cuarto video seleccionado presenta la imagen de una estudiante que toma elementos de la superficie de construcción, para construir los ángulos del triángulo dado.

Gráfica 20. Actividad 5, Resolución por proyección de puntos



Fuente: Video: 20141001_132204

En este video la estudiante utiliza una entrada de la figura que corresponde a una parte irregular de la superficie cualquiera que se entregó para la construcción de la figura inicial (Triángulo) (Gráfica 15) nuevamente usando el instrumento como un juego de escuadras convencionales.

E: [eh yo cogí, y cogí esta cosita de aquí, lo medí]

P: ¿Cual cosito?

E: [esta entrada, lo puse así, lo acomodé]

P: ¿hiciste alguna marca?

E: No. Lo baje así, lo dibuje igualito, después como me di cuenta que este lado era recto y comenzaba desde acá, la dibuje hasta arriba la deje así y después medí y ya

P: ¿Y este trazo cómo lo hiciste?

E: Lo medí

P: Y ahí sí hiciste marca

E: ajá

La estudiante en esta situación manifiesta utilizar el ángulo para el inicio de la construcción utilizando las dos plantillas entregadas, valiéndose de la seguridad que al bajar las plantillas copia el ángulo que tiene la figura inicial, posterior a ello hace los trazos de los lados haciéndoles marcas a las plantilla.

El quinto video seleccionado, es el video que muestra a un estudiante utilizando la superficie y la regla con el proceso correcto de superposición.

Gráfica 21. Actividad 5 Resolución por superposición



Fuente: Video: 2141001_133912

El estudiante en este video manifiesta “poner acá” la superficie cualquiera sobre la imagen del triángulo dado que hay que construir (Gráfica 16), de manera que a la superficie le hace marcas para posterior a ello sobre esas marcas hacer otras marcas y realizar los trazos que permitirán la construcción del triángulo dado.

P: ¿Cómo hiciste la figura?

E: [eh la puse acá y marque acá, acá y acá y en la otra lo dibujamos y así lo hice]

El estudiante en esta situación manifiesta realizar marcas sobre las plantillas de tal forma que con las marcas trasporta la información de la figura inicial a un espacio en blanco, en donde podrá con base a la información registrada en el instrumento, realizar una reproducción fidedigna a la inicial. El recorrido entre las marcas

realizadas por el estudiante es trazado por rectas que conforman los lados de la figura.

3.2.1.2 ANÁLISIS SITUACIÓN 1 SEGUNDO DIA

Con las escenas que se acaban de describir, y que hacen parte de una selección que se realizó de todo lo ocurrido en la implementación, se elabora un análisis que pretende vincular lo ocurrido con lo esperado según la trayectoria de aprendizaje propuesta y las discusiones que en relación al diseño se dieron.

Fruto de dicho análisis se logran identificar tres grandes temas sobre los cuales centrar la discusión de esta parte del trabajo, éstos se presentan a continuación.

VISUALIZACIÓN: Análisis visual en términos de las figuras

El análisis se centra en detallar elementos explícitos e implícitos sobre la percepción global de la figura, en las partes y características de los componentes de la figura y en las relaciones teniendo en cuenta las propiedades de la figura, de tal manera que se pueda identificar en el estudiante un tipo de visualización en cuanto a lo icónico y lo no icónico, para que a través de su registro de habla se juzgue la aproximación desde la imagen visual a la conceptualización de la misma.

Para ello se tiene en cuenta la referencia de indicadores propuesta por Camargo, Samper y Leguizamón (2003), que mostraran el tipo de elementos que se tiene a la hora de abordar geometría desde perspectivas de visualización y razonamiento de las figuras. Dichos indicadores constataran lo siguiente: la percepción global de la

figura, el reconocimiento y el no reconocimiento de las partes o elementos de la figura detallados de propiedades matemáticas, la inclusión de atributos para la figura, la identificación de formas geométricas en objetos físicos, el uso preciso y no preciso del lenguaje en la descripción y comparación de las figuras, el buen y mal uso de propiedades que determinan las figuras geométricas y la utilización de las herramientas para la construcción (Camargo, Samper, & leguizamón, 2003).

Partiendo del hecho que se usa lo que se ve para plantear respuestas, al inicio de la situación de aula se sugiere una construcción y para ello al estudiante se le pregunta ¿Cómo hiciste la construcción? De lo cual se conjeturan elementos importantes para este trabajo de grado.

Sin un cambio en la forma habitual de mirar las figuras en geometría, no se podrán identificar maneras de ver a la deconstrucción dimensional como un camino para llegar a la visualización geométrica (no icónica) y contar con la posibilidad de ver el paso de 2D a 1D, no facilita la coordinación de usar lo que se ve para representar mejor una respuesta.

La utilización de moldes rotos conduce a trazos incompletos, y para completarlos es necesario utilizar reglas no informativas en lugar de una plantilla como se ilustró en las situaciones 1,2 y 3. Para la situación 4 al ofrecer solo una regla, se lleva a que el estudiante fije la atención en el trazo de un lado y de su prolongación de tal manera que se evidencie el primer elemento en 1D de la figura que se muestra en 2D.

Es entonces como las actividades cognitivas para visualizar y razonar del estudiante marca una ruta transversal en el ejercicio geométrico elaborado en el aula, centrando el interés en las decisiones del maestro a la hora de plantear ejercicios o actividades a los estudiantes.

VISUALIZACIÓN: Reconocimiento Perceptible

El estudiante 17 (Gráfica 12), al empezar a hacer la construcción de su figura imagen (triángulo) argumenta inicialmente colocar el molde i2MRTE y bordearla de tal manera que copia sus lados y posteriormente los prolonga haciéndoles coincidir en un punto, de manera que incurre a un ensamblaje por superposición puesto que se privilegia visualmente la prolongación de los trazados pertenecientes a la figura.

Se justifica el hecho de que el estudiante 17 a través de la naturaleza de la actividad y sus instrumentos puede visualizar el contorno cerrado (2D) de la figura y hablar para expresar en palabras su construcción, lo hace en base a las rectas (1D) que componen la figura.

Para este caso el indicador que da cuenta del proceso cognitivo asociado es el del reconocer la figura geométrica conformada por partes (VIDEO A345 V (7) GRÁFICA 22. ACTIVIDAD 5), mostrando, que la identificación de un trazo inicial, una prolongación de rectas y un punto de intersección, define el cierre del contorno de la figura.

La estudiante número 11 argumenta que la plantilla cabe perfectamente en la figura dada (triángulo), entonces lo que hace es copiar los puntos como una proyección, en la cual lo que pretende es trasladar puntos (vértices), con la ayuda de la regla no informativa; luego de tener ya los puntos imagen menciona que traza las líneas, que para este caso son los lados del triángulo.

No se puede inferir con certeza que el estudiante puede pasar de un análisis visual de las figuras en términos de ensamblajes de superficies (formas 2D) a un análisis visual en términos de ensamblajes de líneas (formas 1D), por el hecho de hacer trazos individuales enmarcando los lados del triángulo, pero sí se puede decir que hay un acercamiento a un cambio de mirada. Posiblemente se pueda decir, a manera de contraargumento, que la estudiante no toma en cuenta los ángulos, pero sí posee una visualización de 2D a 1D, pues identifica el contorno cerrado a reproducir, y busca reproducirlo con rectas que tienen en común los vértices que ha trasladado de la figura inicial al espacio en blanco de la hoja de trabajo.

El estudiante número 26 para la actividad 5 (Gráfica 23), toma la superficie cualquiera y la regla no informativa como escuadras graduadas, argumentando que con ellas calcula la altura, es decir, hace una transferencia de medidas a la regla con una marca para así trazar los lados y justificar ángulos.

Aunque el procedimiento es fallido puesto que no hay garantía que conserve los ángulos, se puede apreciar que el estudiante ve la necesidad de realizar un trazo suplementario sobre la figura simple del triángulo, es decir, trazar una altura del

triángulo recurriendo a elementos que hacen parte de las propiedades del triángulo. Con ello se puede decir que el estudiante podría acercarse a la idea intuitiva de transformar la figura simple inicial en una figura ensamblada por yuxtaposición, de dos triángulos rectángulos desplazables y reproducibles, debido al uso escuadras, que en este caso las simuló con la regla no informativa y la superficie cualquiera.

La estudiante número 16 en la actividad 5 (Gráfica 24), para esta actividad argumenta trazar líneas desde todos los puntos del triángulo dado, posterior a ello hace una marca en la regla de tal manera que hace transferencia de medida en uno de los lados del triángulo imagen, los otros dos lados los hace con trazos dirigidos desde los puntos que inicialmente traslado. Los ángulos los justifica con dichos puntos y acomodando la regla de tal forma que encaje entre las marcas hechas en la regla no informativa.

Una vez más, como en casos anteriores este procedimiento no garantiza los ángulos del triángulo, pero su proceso muestra independencia de utilizar los instrumentos que conserven una prioridad perceptiva en la unidad contorno para verla en trazos en 1D de tal manera que muestra una primera etapa en el paso complejo de 1D a 2D.

La estudiante número 17 en la actividad 5 (Gráfica 25) para esta actividad argumenta en su proceso de construcción, copiar un ángulo en (entrada) la regla no informativa para elaborar su reproducción, llenando de significado el uso del instrumento para realizar marcas que guarden la información para dibujar el ángulo dado en la figura imagen. Posterior a ello y con los puntos copiados por las marcas en la regla, hace

los lados del triángulo imagen con transferencia de medidas, la cual hace con marcas en la regla tomando las medidas del triángulo dado y realizando trazos que tengan la medida o distancia registrada.

Es un caso donde nuevamente el proceso no es garante para la medida de los ángulos e incluso los lados, pero la estudiante visualiza elementos de la figura dada, como es el caso de empezar por tratar de copiar el ángulo para posterior a ello realizar el trazo, se puede decir que estará en una categoría de visualización semi-iconica puesto que explora elementos que pueden relacionar propiedades de la figura como tal.

El estudiante número 3 en la actividad 5 (Gráfica 26) explica que para esta actividad coloca encima de la figura dada la superficie cualquiera (i5SC) de tal manera que se puedan marcar puntos que referencien el recorrido de las rectas de los lados de la figura. El estudiante una vez tiene esa información en i5SC, la copia en su espacio de trabajo en el papel; y con la regla no informativa i4RNI, une los puntos conservando el sentido de los mismos apoyándose de la figura dada. De esta manera, una vez logra unir los puntos y prolongar las rectas, halla los vértices y completa el proceso de reproducción por superposición.

Finalmente en este caso se logra ver lo que en inicio se requería para la actividad, puesto que la capacidad de superponer una superficie cualquiera sobre la figura que se ha de reproducir, y la de inscribir un pedazo de cada lado de esta figura, de manera que se pueda reproducirla de una sola vez por la prolongación de esos pedazos, son indicadores de una visualización geométrica avanzada.

Con ello se logra garantizar tanto los lados como los ángulos del triángulo debido a una visualización no icónica, situación que contempla las propiedades de la figura y ratifica el paso de ver el contorno en 2D de la figura por una deconstrucción, en una red de rectas que atañen trazos en 1D. Además que a lo mencionado se añade que el estudiante muestra habilidad y uso de argumentos informales para justificar el proceso de construcción.

RAZONAMIENTO: Discurso en Geometría

Articulación Proposicional

Partiendo del hecho de que nuestro registro de habla en geometría debe tener coordinación con lo que se ve, el análisis en función del razonamiento de este trabajo de grado atañe elementos implícitos y explícitos de las figuras geométricas, con base en su apariencia (contorno) y en posibles transformaciones visuales.

Por esta razón, la manera de concebir el concepto de figura en forma y contenido por parte de los estudiantes es de vital importancia, puesto que lo que permite la organización y coherencia en función de los objetivos parte del interrogante. ¿qué es lo que significa ver en geometría?

En este trabajo de grado la mirada hacia el razonamiento en geometría en función de las figuras involucra inicialmente el interés por las explicaciones espontáneas de los estudiantes, en donde lo que explican con palabras dan un espacio fundamental para la articulación proposicional en función del sentido.

Teniendo los siguientes comentarios:

E: [Yo puse ésta y le tracé todos los lados, y a base de esto le tracé las dos líneas para terminar acá].

E: [Primero la calcule acá, luego vi la altura poniéndola así poniéndole los puntos].

E: [Hice estas líneas así, que me dicen que es como la distancia del triángulo, y luego puse esta donde el espacioso del ángulo, y con esto hice que la línea me cupiera de aquí hasta acá].

Se puede inferir que aunque las explicaciones del estudiante carecen de formalismos en cuanto a la manera técnica de organizar las proposiciones, los estudiantes van más allá de acciones de comunicación que exteriorizan sus ideas, puesto que las proposiciones están vinculadas con lo que están viendo, usan lo que ven para representar una respuesta. Y es a través de ejemplos con sentido lógico que intenten acercarse a esa coordinación proposicional que se requiere para dar cuerpo a la construcción de un pensamiento sobre estos objetos (figuras) del dominio de las matemáticas.

ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA:

Razonamiento natural

La argumentación implica la puesta en escena del funcionamiento de la lengua natural, por tanto es de gran interés identificar el uso de argumentos en las explicaciones de los estudiantes, evidencia de razonamientos naturales y formas de

argumentar o dar a entender el por qué de una decisión en su hacer geométrico. Estas explicaciones son enunciadas por los estudiantes en lenguaje geométrico a través de apoyos gráficos dado a la precariedad de formalismos.

Tan importante es lo que perciben los estudiantes de cada actividad y la manera como expresan lo que perciben, que se detalla el uso del lenguaje cotidiano como indicador como lo indica Camargo et al. (2003), para ubicar qué tan bien describen, comparan o identifican los estudiantes las propiedades geométricas de la figura; al mismo tiempo en que enuncia un contenido que contiene una fuerza ilocutiva (Searle, 1977).

En los videos del día 2 se registraron palabras como: raya, trazo, marca, entrada, encajar, caber, medida y distancia, cuyo uso en un primer momento puede hacer pensar que no hay comprensión en lo que se dice, pero más allá del formalismo para argumentar, el estudiante hace un esfuerzo por construir un lenguaje geométrico que defienda lo que está diciendo; la elaboración de un argumento retórico da pistas del proceso cognitivo de razonamiento por parte de los estudiantes (Duval, 1992) este ejercicio de elaboración de un discurso, usa una lógica que depende de la coherencia determinada por el contexto, es decir, del acuerdo que exista y llene de sentido las elaboraciones discursivas enunciadas por los estudiantes.

P: ¿Y cómo mediste este ángulo?

E: Medí aquí, desde aquí a acá, y luego fui buscándole como de aquí si me daba y me cuadro acá.

P: ¿Y cómo mediste este ángulo de acá?

E: No pues, baje del puntico de acá un poquito y luego lo uní con la medida de acá. *Video 345 V (30) Gráfica 27*

En este ejemplo, se puede ver las palabras pertenecientes a un lenguaje natural, que se vale desde un contexto, lo cual implica que una razón no siempre justifica una afirmación dado que depende del contexto.

Por otra parte y haciendo alusión a las funciones del lenguaje, se puede apreciar en los videos señalados en la primer parte del análisis, que la función referencial aparece en todo ejercicio de los estudiantes a pesar de que no es una referencia matemática.

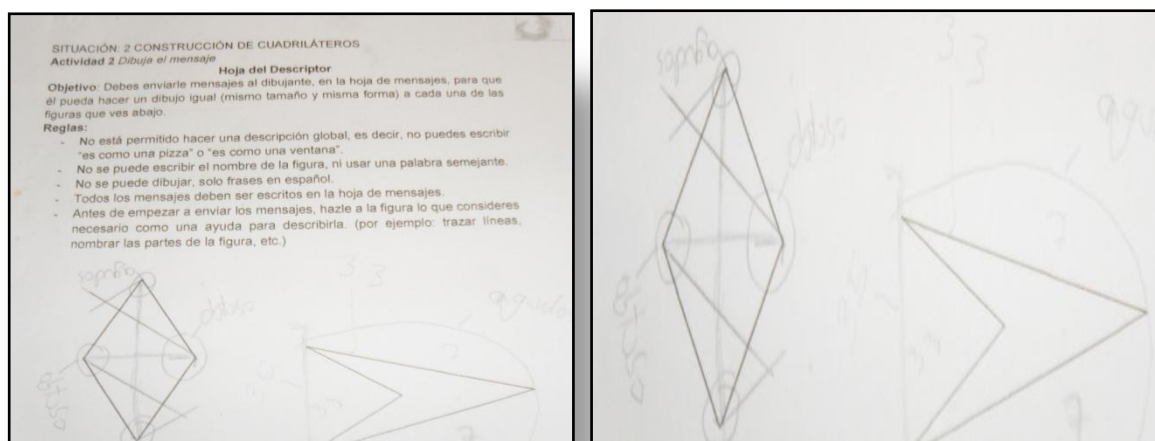
Los nombres designados para las figuras y sus elementos, parten de las cualidades que los estudiantes ven en un todo; en palabras de los estudiantes se encontraron nombres como: palito, rayita, lado, recta, segmento, diagonal, ángulo, abertura, entre otros más que dan cuenta de esta función referencial en los estudiantes en su ejercicio de explicar.

3.2.2 Situación 2

La situación 2 aborda tres momentos importantes (actividades), de las cuales se detallarán aspectos relevantes en cuanto a la percepción global de la figura y a la

percepción con reconocimiento de elementos y propiedades de la figura. Esta situación se elabora en la tercera visita al grado sexto del colegio Jefferson.

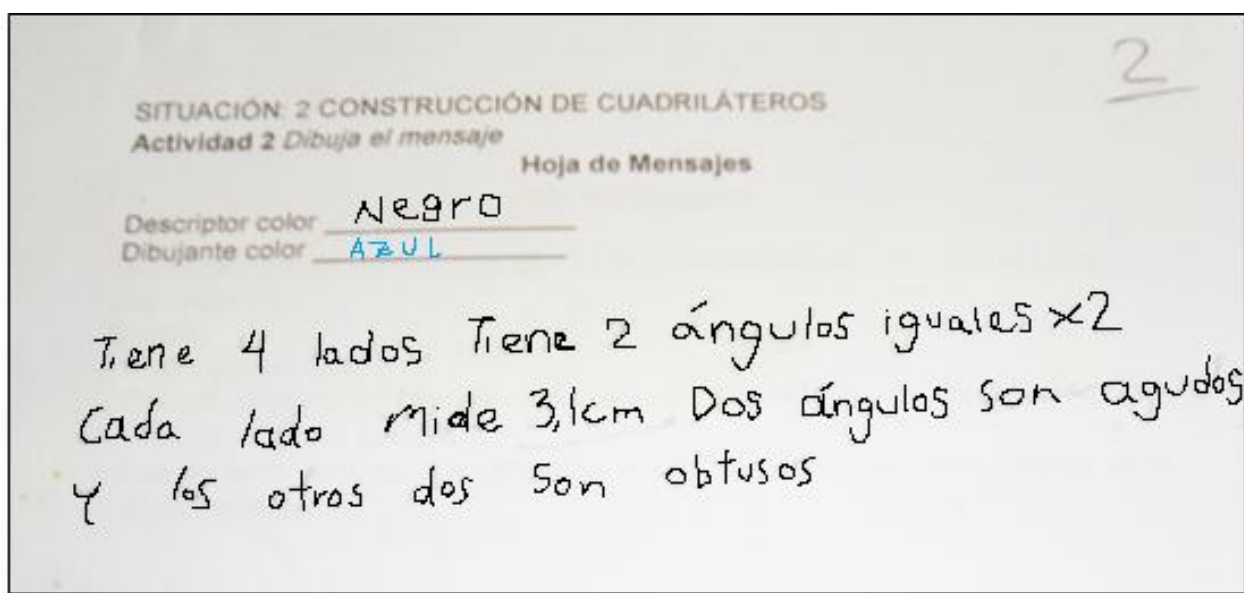
Gráfica 28. Situación 2, Actividad 2 Dibuja el Mensaje



Fuente: Propia

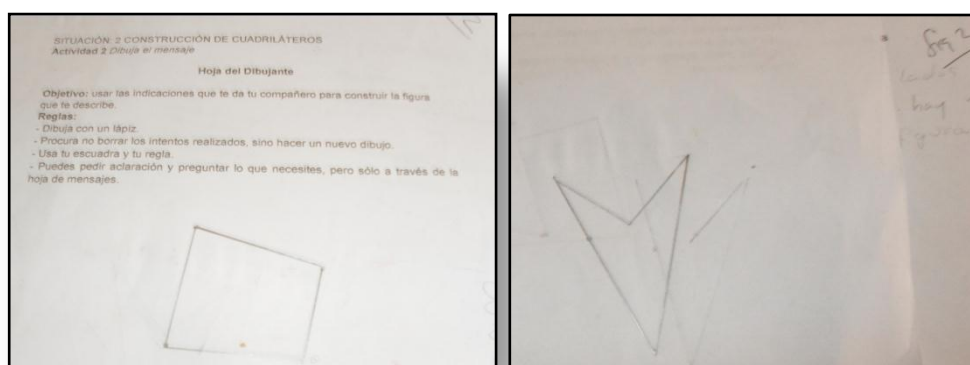
Para esta actividad el estudiante número 2 debe describir con palabras – en papel- las figuras indicadas. Para este caso se observa que el estudiante hace trazos suplementarios en las figuras dadas como insumo para su descripción. El estudiante en la hoja de mensajes escribe lo siguiente:

Gráfica 29. Situación 2, Actividad 2 Hoja de Mensajes



Fuente: Propia

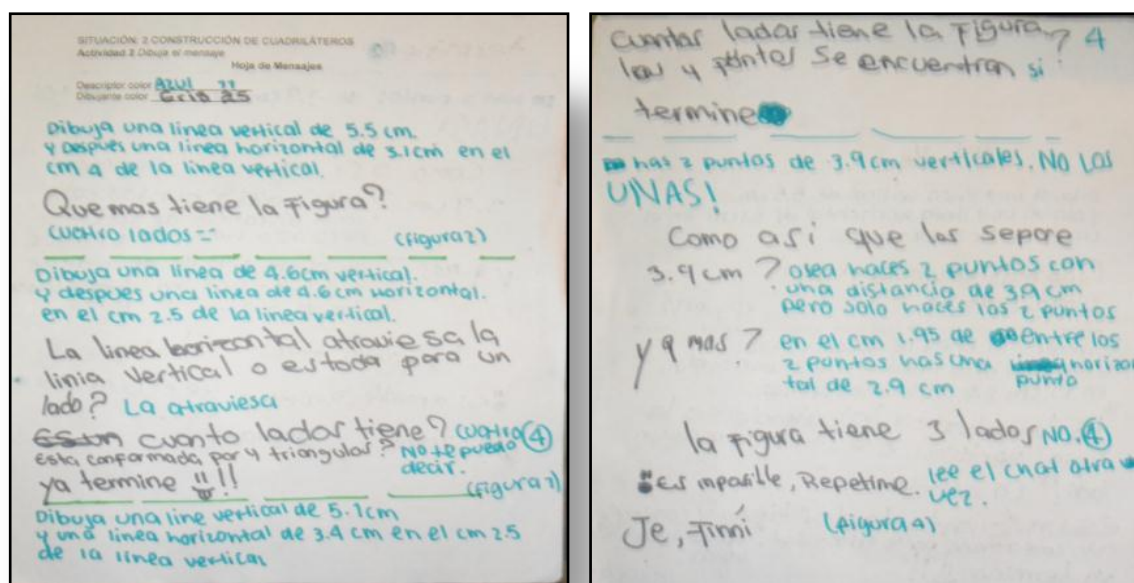
Gráfica 30. Situación 2, Actividad 2 Hoja del Dibujante



Fuente: Propia

El estudiante 12 hace el rol de dibujante, realiza las dos figuras descritas por el estudiante número 2, mostrando más uniformidad y coherencia con la figura 2.

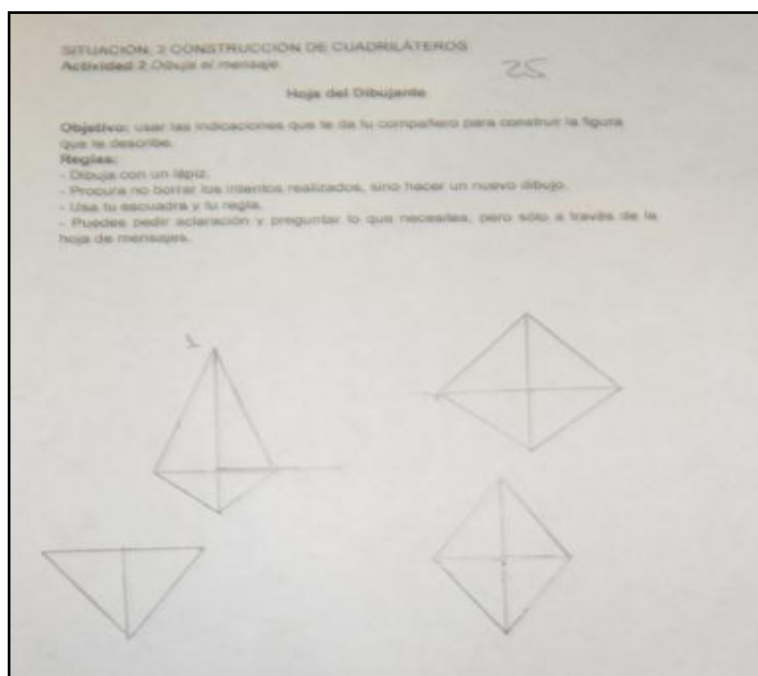
Gráfica 31. Situación 2, Actividad 2 Estudiantes 11 y 25



Fuente: Propia

Para esta actividad el estudiante 11 describe las figuras, con color azul es el descriptor y con color gris el dibujante. Se establece la conversación siguiendo los parámetros indicados para el ejercicio de la actividad.

Gráfica 32. Situación 2, Actividad 2 Estudiante 25



Fuente: Propia

El estudiante número 25 realiza el diseño de la descripción hecha, y traza varias veces las figuras mencionadas de tal manera que intenta mejorar cada vez más sus trazos. Utiliza con regla graduada trazos perpendiculares.

Gráfica 33. Situación 2 Actividad 2, Estudiantes Valeria y Mateo

SITUACIÓN 2 CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS
Actividad 2 Dibuja el mensaje

Hoja de Mensajes

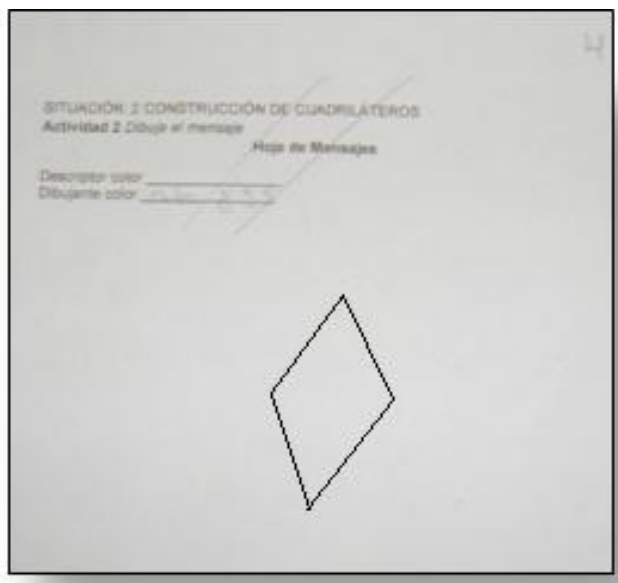
Descriptor color Negro
Dibujante color rojo ○

- Tiene 4 lados iguales
- los lados son de 3.3cm
- tiene 4 puntas
- se sostiene en una punta

Fuente: Propia

Para esta actividad la estudiante detalla cuatro características de las figuras dadas, donde toma en consideración la cantidad de lados, la medida de los lados, los puntos vértice y la manera como se ubica la figura con el entorno.

Gráfica 34. Situación 2, Actividad 2 Estudiante 4



Fuente: Propia

En el registro de dibujo se encuentra que el estudiante en todo el proceso de la actividad solo realizó una figura alusiva a la figura 1. Realizó los trazos con regla graduada y no reportó más índices del proceso figural.

Gráfica 35. Figura construida en la conversación AUD- 2014- WA0012 hasta AUD-2014-WA0019



Fuente: Propia

E: Estudiante explicando la figura

D: Dibujantes

Conversación:

E: Los dos de abajo los juntas con los de la mitad y ya.

E: si ve, no lo juntan y hagan un punto adentro en la mitad de todo.

D: entonces solo juntamos los puntos de abajo con el de arriba, pero no juntamos, ósea el de abajo y el de abajo, ¿no lo juntamos?

E: junta el de la izquierda con el de arriba, el de la derecha con el de arriba, por abajo no los juntas.

E: ve, hacé tres puntos, dos abajo en línea recta y uno en la mitad de esos dos pero arriba.

E: mira, hace dos puntos uno arriba y uno abajo en línea recta pero con distancia como de larguita y los de al lado, eh pues como siempre pero no tan larga como el segundo.

D: no entendimos, explícanosla otra vez

E: mirá ve, ésta también tiene cuatro puntos, pues uno arriba y uno abajo larguitos y los de los lados, eh pues normal como el primero.

E: ve mirá, hacé cuatro puntos uno pues arriba y el de abajo como larguito más para abajo y dos a los lados. (Descripción conversación por WhatsApp, Estudiantes 3 y 17, Actividad 1: el celular)

En esta conversación los estudiantes interactúan en función de una figura (kuid) de tal manera que detallan la figura teniendo en cuenta el contorno de la misma, con elementos discursivos solo de forma; es decir, mencionan puntos, lados, arriba, abajo y largo.

Descripción Videos situación 2 tercer día

Para la situación 2 se pueden apreciar componentes que divergen y convergen con lo programado en los objetivos de este trabajo de grado, lo cual llevara a plasmar la expectativa que se tiene en cuanto a las actividades, lo logrado y lo que quedó como

oportunidad de mejora, tanto para los estudiantes como para el diseño de las actividades.

Una de las expectativas que condujo a la realización de las actividades, parte de lo mencionado por Duval acerca de que la actividad geométrica implica tres actividades diferentes (visualización, razonamiento y la construcción) pero íntimamente relacionadas.

Partiendo de los actos de habla como unidad mínima del lenguaje, determinamos lo que es un tipo de razonamiento ligado al uso del lenguaje natural y por ende no se halla sin relación a la explicación para poder justificar lo que se dice.

En cuanto a los argumentos presentados por los estudiantes a la hora de dar sus explicaciones, se encontró gran debilidad para justificar sus respuestas.

Es entendido que la costumbre a la hora de hablar matemáticas se privilegia el uso de la demostración formal, con todas los elementos que de rigor propone, pero la historia ha venido mostrando el aumento de la argumentación como medio para convencer lo que se dice o se representa, dicho de esta manera este trabajo de grado privilegia esta actividad cognitiva subyacente de la actividad geométrica para dar salida a una comprensión genuina que brinda elementos de reconocimiento , de descripción y determinación del objeto matemático como tal.

Es importante siempre mencionar que los argumentos siempre serán parte esencial en todo discurso. Por lo tanto el contexto de producción de un argumento estará sujeto o determinado por la situación o problema a resolver, de esta manera es

importante saber que la posición del interlocutor, el motivo de la argumentación y el objetivo en mira serán elementos garantes para la cooperación o conflicto en el discurso, la toma de decisiones o la disminución de índices de error en cuanto a lo que se dice como sustentación a la situación o al problema.

En la actividad 2, descrita por el estudiante 2 y los estudiantes 11 y 25 denotan elementos importantes para la visualización y el razonamiento.

3.2.2.1 ANALISIS SITUACIÓN 2 TERCER DIA

Con las escenas que se acaban de describir, y que hacen parte de una selección que se realizó de todo lo ocurrido en la implementación, se elabora un análisis que pretende vincular lo ocurrido con lo esperado según la trayectoria de aprendizaje propuesta y las discusiones que en relación al diseño se dieron.

Fruto de dicho análisis se logran identificar tres grandes temas sobre los cuales centrar la discusión de esta parte del trabajo, éstos se presentan a continuación.

Reconocimiento Perceptible y Razonamiento

En estas dos situaciones el estudiante descriptor de las figuras debe seguir las indicaciones, y una de ellas era que de necesitarse, se podían hacer trazos adicionales o complementarios para la descripción. El estudiante 2 para la figura 1 el rombo, hace trazos donde se evidencia una construcción de trazo de líneas perpendiculares donde muestra y argumenta ángulos 2×2 agudos y obtusos. Y de una manera particular dibuja dentro del rombo dos triángulos rectángulos donde se puede visualizar la superposición de dos paralelogramos con sus respectivas diagonales, dicho de esta manera el estudiante descriptor de la actividad muestra elementos de visualización relevantes para la comprensión de la percepción global de la figura y la de sus elementos en relación con sus propiedades matemáticas.

Producto de ello se observan las figuras imagen realizadas por el estudiante dibujante, un tanto regulares a lo descrito por el estudiante descriptor, en secuencia de lo trabajado en la situación 1 y el énfasis en la visualización de las figuras, es notorio percibir la carencia y falencia de los elementos de argumentación a la hora de hablar o decir de lo que se ve, la importancia de la pertinencia y la fuerza que deben adquirir los razonamientos en función del contexto que se plantea , para nuestro caso las figuras en geometría. Es posible pensar que en este trabajo de grado la puesta en escena de la argumentación como razonamiento natural fue un faltante para la minimización de rupturas en la coherencia de hablar de lo que se ve.

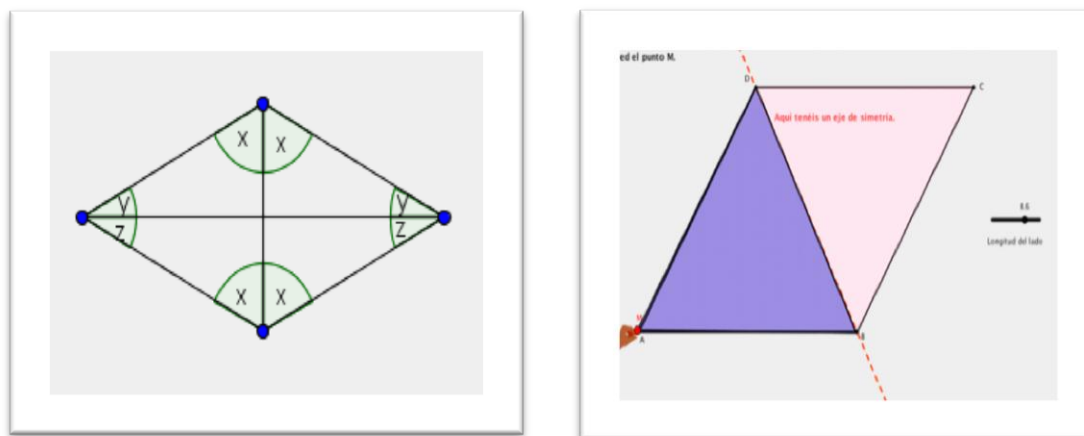
De igual manera para la situación de los estudiantes 11 y 25, se puede apreciar el esfuerzo en la escritura por parte del estudiante número 11, de tal manera que nombra elementos relevantes para la construcción del rombo como lo son las líneas perpendiculares, específicamente menciona que la línea horizontal atraviesa una vertical de tal forma que trabajando un poco más se puede empezar a dar cabida al concepto de ángulo que lleva implícito la figura del rombo, es decir el estudiante alcanza a visualizar elementos que llevan a la construcción pero que en esencia para un grado de argumentación carece de elementos puesto que no logra transmitir al estudiante compañero una idea construida de la figura.

No obstante con la verificación de elementos importantes para el razonamiento también se puede mencionar dificultad en la descripción de tipos de formas mediante el uso explícito de sus propiedades en lugar de los nombres respectivos, puesto que aunque se puede trabajar, el estudiante debió mencionar ángulos y la congruencia

entre sus lados previo a la definición de rombo como un polígono que tiene los cuatro lados iguales y los ángulos son iguales dos a dos (dos ángulos son agudos y los otros dos obtusos). También faltó la identificación de formas geométricas en objetos físicos y la clasificación de figuras a través de atributos sencillos en donde a través de las propiedades de los lados de una figura sin tener en cuenta ángulos o simetrías permita de igual manera el reconocimiento de figuras concretas como representantes de familias para la identificación de una figura como tal.

Es decir, si el estudiante recuerda la definición de la figura o reconoce sus características, mencionando elementos de congruencia o elementos de comparación, se puede detallar una buena descripción.

Gráfica 36. Reconocimiento de las propiedades del cuadrilátero



Fuente: <http://matebrucol.blogspot.com/2011/07/cuadrilateros-clasificacion.html>

Y por ende reconocer el grupo de familias que abarcan las características para dichas figuras, por tanto el estudiante tendrá cantidad de argumentos que describir y argumentos por representar, dando lugar a un plazo más o menos corto al reconocimiento de como la combinación de propiedades puede dar lugar a una determinada figura.

Para la actividad 2 cuyo descriptor es la estudiante 5 y el dibujante el estudiante 6, se detalló una muy pobre descripción de la figura y aparte de eso su argumentación para la explicación careció de conectores y de elementos que dieran cuenta sustancialmente su contorno. Este caso se evidenció en una gran mayoría que no pasó de mencionar solo que tenía cuatro lados, cuatro puntos, que median 3.3 cm cada lado, de tal manera que indican que hay falencias en la percepción global de la figura donde no se reconocen explícitamente las partes o elementos que la componen, la inclusión de atributos como la orientación y el tamaño solo se refieren a la figura misma, es decir existe una carencia en poder combinar propiedades y conjeturar otros elementos para una mejor descripción. Otra dificultad, es que si conocen algunos elementos de las propiedades hacen omisión de condiciones necesarias que permitirán un buen argumento tanto para descripción figural como la descripción a través del discurso.

Para la actividad de conversación de descripción por WhatsApp, los audios AUD-2014- WA0012 hasta AUD-2014-WA0019, contienen la conversación que se usó para describir la figura, esta conversación consistió en que un estudiante por audio

intenta describir la figura mientras el otro compañero la dibuja, esta actividad generó diversos inconvenientes, puesto que los estudiantes descriptores no podían mencionar el nombre de la figura ni algún parecido con algo del entorno, lo que requirió para ellos, enfocarse en elementos internos de la gráfica como sus propiedades o elementos de la misma.

La figura de la gráfica 24 está categorizada como un kuido, término que hace referencia a un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes. Un kuido es un cuadrilátero en el cual cada lado tiene un lado adyacente congruente (Camargo, Samper, & Iguizamón, 2003).

Una de las expectativas en el transcurso del experimento, es que los estudiantes logren progresivamente descomponer las figuras con el fin de poder reconocer sus partes constitutivas y así efectuar una comparación entre las figuras, de tal manera que el estudiante aun pueda construir una posible definición sin tener el nombre formal de la figura, para ello el estudiante debe estar en ejercicio de centrar su atención de tal manera que pudiese hacer una lista de propiedades donde pueda ir vinculando las que atañen a la figura dada. De ser posible este logro el estudiante tendrá argumentos para describir lo que ve en la figura y razonar la figura.

Si hablamos de conceptos previos el estudiante debe conocer el concepto de ángulos rectos, segmentos congruentes, rectas paralelas, para adquirir la habilidad de descomponer figuras y reconocer sus partes constituyentes. Para esta conversación los elementos fueron mínimos, solo hablaron de contorno donde solo

mencionan puntos y las distancias someramente entre ellos. Lo cual muestra una pobre visualización y una carente descripción de argumentos maximizando el pasaje entre visualización y razonamiento.

Conclusiones

En la búsqueda por caracterizar actividades que promuevan en los estudiantes el razonamiento y visualización el uso del lenguaje desempeña un papel importante, puesto que en las situaciones de aula, preguntar con intención de búsqueda exige que el estudiante en sus explicaciones espontáneas de lo que hace, pueda a través de enunciados - guiados por un ejemplo o una situación del contexto- dar cuenta de lo que ve y de las formas en que eso interviene en sus actuaciones.

- Los estudiantes lograron parcialmente construir un lenguaje matemático en sus explicaciones, para el caso de la situación 2, las actividades propusieron un mayor esfuerzo a los estudiantes para elaborar sus explicaciones; específicamente en la actividad 2 llamada “dibuja el mensaje”, los estudiantes 11 y 25 que a través de textos escritos en papel elaboraban descripciones de las figuras dando cuenta de una deconstrucción dimensional (Duval, 2005); es decir, un paso de 2D (contorno cerrado) a 1D (Rectas). Esta descomposición lograda por la estudiante 11 da cuenta del cambio de mirada sobre la figura, identificando una red de rectas –recta vertical y recta horizontal- (Gráfica 20).

En el desarrollo de este trabajo de grado se encontró que, en general, las argumentaciones de los estudiantes para sustentar o defender una idea carecen de fuerza y pertinencia, ya que no lo logran expresar claramente con palabras todo lo que visualizan; esto evidencia una dificultad y una oportunidad de mejora, para darle énfasis al uso del lenguaje en situaciones de aula que requieran la visualización en

la actividad geométrica. Por lo tanto, para el diseño de la situación cada pregunta debe apuntar a un objetivo claro para el estudiante.

- Las explicaciones que daban los estudiantes de la manera que hacían sus construcciones eran de uso de lenguaje cotidiano y vocabulario impreciso en las descripciones para hacer comparación e identificación de las figuras, tanto en la situación 1 del primer y segundo día utilizaban términos como, raya, encajar, cosito, entrada y expresiones como: está más largo ,está torcido, está para arriba o está para abajo, cuestiones que en términos del análisis del razonamiento se dirigen a la descripción de las características globales de la figura, es decir de una manera icónica, así mismo carecen de exactitud y por ende hay lugar a una ruptura en la comprensión; en el caso en que un estudiante debe comunicarle a otro cómo realizar la construcción esta ruptura generó una barrera para realizar el ejercicio.
- Previo a estos resultados se vio que se puede proponer como alternativa un proceso de conceptualización ya que se recurre a algunas de las formas de razonamiento, donde se estudia la percepción global de las figuras, las partes y características de las figuras (Camargo, Samper, & Ileguizamón, 2003) y el establecimiento de relaciones entre las partes o componentes de la figura de tal forma que el razonamiento en el estudiante y lo que este expresa se centrara en consideraciones visuales icónicas y no icónicas.

El procedimiento de percepción en las figuras logra que las situaciones, expuestas como material de trabajo en el colegio Jefferson, fomentaran en los estudiantes ver más allá de la figura; es decir, poder ver e interactuar con las partes constituyentes de la figura. Trabajar a la luz de la propuesta por Duval como punto de partida de este experimento de enseñanza aportó resultados significativos a la hora de poder ver una figura a través de la deconstrucción dimensional.

En el análisis de la situación 1 en el segundo día, vemos a través de la gráfica 16 correspondiente a la actividad 5, el estudiante 12 infiere que la capacidad de superponer una superficie cualquiera sobre la figura permitirá tomar la información necesaria para reproducirla.

La manera en que el estudiante 12 busca trabajar con esta superficie y la regla no informativa, da indicios de una visualización geométrica apropiada capaz de trabajar con red de rectas, tomando el contorno en 2D de la figura y llevándolo por una deconstrucción en una red de rectas que atañen trazos en 1D.

La visualización por superposición da cuenta de procesos de deconstrucción dimensional que vinculan el paso complejo de ver contornos cerrados (2D) a ver trazos independientes (1D).

El uso de instrumentos no convencionales en la clase de geometría, determina todo un universo de posibilidades para potenciar la visualización, en cuanto que el instrumento facilita al estudiante el paso del gesto humano de ver al gesto matemático de visualizar; identificar esos rasgos en el instrumento puede determinar

un nuevo rumbo de la enseñanza de la geometría, generando un cambio necesario para el desempeño de los estudiantes.

- Lo que permitió el molde del triángulo escaleno roto (i2MTER) en los estudiantes fue, el poder identificar la orientación del ángulo. A pesar de que el i2MTER facilita la reproducción del ángulo del triángulo escaleno dado, algunos estudiantes no lograban fijar su atención en el correcto uso del instrumento, esto pudo haberse dado por la diferencia en color en cada cara del i2MTER como se manifiesta en la gráfica 9 (Rojo y Azul), el estudiante 18 que no logra explicar cómo lo hizo a pesar de que la reproducción la realizó por el lado correcto, cuando se le pide que realice la reproducción de nuevo toma por el otro lado la herramienta y no logra determinar correctamente la abertura del ángulo.
- Lo que se ve con la plantilla rota (i3PR), es que la mayoría de los estudiante logra el manejo adecuado, más sin embargo algunos no logran identificar la necesidad de extender los trazos de las rectas que se logran al trazar con un lápiz el borde interior de la plantilla, esta falla hace de que la reproducción pierda la forma como se puede ver en la Gráfica 10 correspondiente al video HDV_0259.
- Lo que se facilitó la regla no informativa (i4RNI) en los estudiantes fue el uso del trazo recto, esencial para la unión de puntos y prolongación de segmentos,

este instrumento se propuso en 4 actividades y se usó de múltiples formas (Gráfica 13, 14 y 15).

- Lo que permitió una superficie cualquiera (i5SC) fue identificar uno de los instrumento más complejos de usar por la mayor parte del grupo; sólo algunos cuantos estudiantes lograron identificar el uso de una superficie e intuitivamente realizar una reproducción por superposición (gráfica 16) como se esperaba que lo hicieran.

Posibilitar al estudiante una manera más de pensar y realizar las cosas siempre generará el riesgo de perder o ganar, es por ello que en este experimento de enseñanza se ganó la experiencia de poder compartir actividades a través de instrumentos no convencionales, como la exploración y un sin número de inquietudes por los instrumentos, a tal punto de escuchar en uno de los estudiantes del grado sexto, que los instrumentos no convencionales ayudan a pensar mejor y más del cómo construir una figura.

Los diseños de experimentos de enseñanza, determinan una metodología de análisis fuerte y amplia en la que se ven involucrados múltiples actores del proceso educativo; esta metodología permitió estudiar desde la teoría una propuesta en práctica, lo cual permitió identificar fortalezas y debilidades en la búsqueda de potenciar las actividades cognitivas de razonamiento y visualización, al mismo tiempo que deja un camino abierto para futuras indagaciones.

La puesta en escena de este experimento de enseñanza a la luz de la actividad geométrica y las actividades semiótico cognitivas que le subyacen, deja como precedente la importancia de poder abordar la geometría desde un punto de vista cognitivo y poder dejar en los estudiantes la magnitud de entender qué es lo que se debe ver en geometría, llenando de significado el ejercicio geométrico que realizan.

Por otra parte el hecho de que al carecer las explicaciones de los estudiantes de formalismos, se las ingenian para lograr ese lenguaje geométrico, que intermedia la producción discursiva que se usa para explicar y justificar distintas formas de resolver las actividades propuestas en las situaciones, la elaboración de argumentos retóricos dan evidencia del potenciamiento en las actividades cognitivas (VCR) a través de las situaciones propuestas.

Lo que permitió una socialización fue identificar elementos del discurso que los estudiantes emplearon para la elaboración de sus explicaciones, la mayor parte del grupo a través de sus enunciaciones busca convencer al auditorio de que su procedimiento fue correcto; sólo algunos cuantos estudiantes no lograron articular un discurso que permitiera validar sus procedimientos; en las socializaciones (gráfica 10 y 11) los estudiantes a través de argumentos retóricos explicaron sus procedimientos a la clase.

Bibliografía

- Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). LA DEMOSTRACIÓN EN LA CLASE DE GEOMETRIA: ¿PUEDE TENER UN PAPEL PROTAGÓNICO? *santillana*, 53-76.
- Camargo, L., Samper, C., & leguizamón, C. (2003). tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. En ASOCOLME, *cuadernos de matemática educativa*. Bogotá: Gaia.
- Cobb, P. (2000). conducting teaching Experiments in Collaboration With Teachers. In a. Kelly, & r. Iesh, *Handbook of Research Desigh in mathematics and science education* (pp. 307-333). Vanderbilt.
- Duval, R. (1992). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? *petit X*, 37-61.
- Duval, R. (2000). La Geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la red en educación matemática* (págs. 1-7). cali: síntesis.
- Duval, R. (2001). Voir En Mathématiques. *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación Actual*, 41-76.
- Duval, R. (2004). Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. En M. d. ciencia, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 159 - 188). Madrid: secretaria general técnica.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2005). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. *Grand*, 7 - 27.
- Espínola, V. (1990). Principios y prácticas de la Adecuación Curricular. *Temps d'Educació*.
- Grows, D., & Cebulla, K. (2000). Utilización de objetos. *Mejoramiento del desempeño en matemáticas*, 31-32.
- ICFES. (2012). *Colombia en PISA 2012 Informe nacional de resultados*. Bogotá, D.C.
- ICFES. (02 de Mayo de 2014). *icfes*. Recuperado el 03 de Mayo de 2014, de <http://www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/objetivos>
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.
- Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En M. d. Ciencia, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 37-81). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del Espacio y la Geometría en la enseñanza Elemental. En M. d. Ciencia, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 37 - 80). Madrid: Secretaría General Técnica.

Salin, M. H. (s.f.). La enseñanza del Espacio y la Geometría en la enseñanza Elemental.

Searle, J. R. (1977). En J. R. Searle, *¿Qué es un acto de habla?* (pág. 17). Valencia: Publicaciones Universidad de Valencia.

Torregroza, G., & Quesada, H. (2007). COORDINACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 276 - 300.