

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE STURMFELS EN LA FAMILIA DE IDEALES DE GRAFOS

CATALINA QUINCOSIS MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS (3147)
SANTIAGO DE CALI

2024

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE STURMFELS EN LA FAMILIA DE IDEALES DE GRAFOS

CATALINA QUINCOSIS MARTINEZ

*Proyecto de grado presentado como requisito para optar al título
de Matemática*

Directora:

LARA BOSSINGER, Dra. C.

Co-Director:

JUAN MIGUEL VELÁSQUEZ SOTO, Dr. C.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS (3147)

SANTIAGO DE CALI

2024

Índice general

Agradecimientos	3
Abstract	4
Resumen	5
Introducción	6
1. Preliminares	9
1.1. Combinatoria y Álgebra Conmutativa	9
1.1.1. Conceptos Combinatorios	9
1.1.2. Conceptos Algebraicos	12
1.1.3. Teorema de Sturmfels	14
2. Bases de Gröbner	16
2.1. Álgebra conmutativa computacional	16
2.1.1. Teorema de la base de Hilbert	19
2.1.2. Algoritmo de Buchberger	24
3. Geometría Poliedral	25
4. Programas y resultados	27
4.0.1. Ideales tóricos de grafos K_n completos	27
4.0.2. Complejos simpliciales de K_4 y K_5	29
4.0.3. Vectores de peso	32
4.1. Resultados	35
Bibliografía	37

Índice de figuras

1.	Grafo del problema de los puentes de Königsberg.	6
1.1.	Ejemplo de complejo simplicial.	10
1.2.	Simplejos hasta la dimensión 3.	10
1.3.	Dos subdivisiones de $\mathcal{A}_0$	11
1.4.	Grafos K_2, K_3, K_4, K_5	12
2.1.	Generadores mínimos de I	22
4.1.	Ciclos Γ_1 y Γ_2 en K_4	29
4.2.	Matriz cuyas columnas generan el kernel de la matriz con filas $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. . .	32
4.3.	Triangulación regular A^{ω_1}	33

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Sandra Patricia y Luis Arturo por todo el esfuerzo que hicieron y el apoyo incondicional que recibí durante los momentos difíciles y amenos. A mis hermanas y hermano, Leidy Johana, Lina Isabel y Arturo José, por el amor, la comprensión y el fuerte abrazo de la hermandad que me ha acompañado toda la vida. A mi pareja Nicolas, por su paciencia, amor y compañía en esta etapa tan importante y enriquecedora.

Agradezco profundamente a mis amigos, Jheronimo, Natalia, Alejandro David y Juan David, por darle siempre alegría a mi vida, por comprender y apoyar cada una de mis ideas y pasiones. A mis compañeros y colegas, Johan Sebastian, Camilo, Samir, Jose y Daniel, por enseñarme a aprender, por todas y cada una esas tardes de estudio y vivencias que nos unieron de una forma fraternal.

Le agradezco a mis maestros, el Dr. Jaime Arango por elevar a un nivel exponencial mi amor por las matemáticas y la ciencia cuando más lo necesitaba, gracias por revivir esa niña curiosa que yace en mí e impulsarme a hacer las cosas con o sin miedo a La Dra. Lara Bossinger por su acogida y guianza, gracias por ser esa luz que me ha permitido crecer como matemática y como persona. Al Dr. Juan Miguel Velásquez, La Dra. Heliana y demás profesores que hicieron parte de mi camino académico y profesional.

-Dedicado a mi abuela Bertha.

Abstract

In this project an application of the Sturmfels theorem 3.1 (look at 1.1) in the article [9] “*Gröbner Bases of Toric Varieties*” was made. This theorem characterizes the radicals of the initial ideals of a toric variety as the Stanley-Reisner ideals of a certain triangulation induced by a weight vector. The author uses this result taking the configuration of points as the vertices of the k -complete graphs K_4 and K_5 . Through a computational implementation with the algebraic software Macaulay2 calculates combinatorial invariants such as f-vectors, simplicial complexes, and orbitals of the initial ideals resulting from the action of symmetric groups S_4 and S_5 respectively, finding that for the case of the initial ideal toric ideal associated with K_4 , have a single f-vector and all the initial ideals that result from the of the symmetric group are in a single orbit. In the case of the computational configuration of K_5 , it finds that three f-vectors are distinct from the complex of the initial ideals concerning the action of the symmetric group S_5 .

Key words: Simplicial complex, regular triangulations, k -complete graph, toric ideals.

Resumen

En este trabajo se realiza una aplicación del teorema 3.1 (véase en 1.1) de Brend Sturmfels, en su artículo [9] “*Gröbner Bases of Toric Varieties*” (Bases de Groebner de variedades tóricas), donde estudia las variedades tóricas proyectivas desde una perspectiva combinatoria. Este teorema caracteriza los radicales de los ideales iniciales de una variedad tórica como los ideales de Stanley-Reisner de cierta triangulación inducida por un vector de pesos. La autora utiliza dicho resultado tomando la configuración de puntos como los vértices de los grafos K - completos K_4 y K_5 . Por medio de una implementación computacional con el software algebraico Macaulay2 calcula invariantes combinatorias como los f-vectores, complejos simpliciales y órbitas de los ideales iniciales resultantes de la acción de los grupos simétricos S_4 y S_5 respectivamente, encontrando que para el caso de los ideales iniciales del ideal tórico asociado a K_4 , tienen un único f-vector y todos los ideales iniciales que resultan de la acción del grupo simétrico se encuentran en una única órbita. Para el caso de la aplicación computacional de la configuración de K_5 , encuentra tres f-vectores distintos de los complejos iniciales, y además, tres tipos de órbitas de los ideales iniciales con respecto a la acción del grupo simétrico S_5 .

Palabras clave: Complejos simpliciales, triangulación regular, grafos K -completos, ideales tóricos.

Introducción

Entre la gran variedad de ramas de la matemática podemos destacar tres columnas fundamentales de lo que conocemos como matemáticas modernas: el álgebra, el cálculo y la geometría analítica; todas ellas fundamentadas en los pilares de la aritmética y la geometría. El álgebra cuyas primeras ideas teóricas se encuentran en el escrito “*Hisab Al-jabr wa’l muqabalah*” (“ciencia de la transposición y cancelación”) [8] de Al-Khwarizmi, ha tenido una evolución a través del tiempo que no solo ha permitido engendrar nuevas áreas como el álgebra moderna, sino también encontrar conexiones con otras vertientes como la combinatoria. Esta última tiene sus orígenes en el siglo XVII durante una etapa más reciente de las matemáticas, con destacados exponentes como Blaise Pascal y Pierre de Fermat. Aunque se habían tratado problemas combinatorios desde mucho antes, el concepto que se conoce actualmente, fue usado por el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz en sus “*Dissertatio de Arte Combinatoria*” (“Disertación sobre las artes combinacionales”) [6]; Leibniz observó un panorama bastante amplio en las aplicaciones de esta nueva rama, sin embargo, no fue sino hasta el siglo XVIII donde se desarrolla una auténtica escuela combinatoria gracias a Leonhard Euler; a quien se le atribuye el nombre del padre de la teoría de grafos por su solución al problema de los puentes de Königsberg.

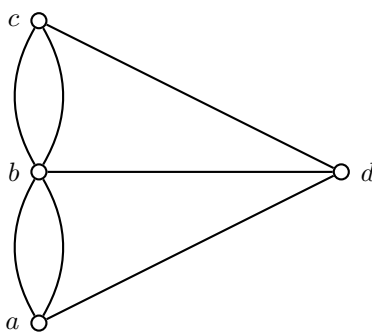


Figura 1: Grafo del problema de los puentes de Königsberg.

El término grafo se menciona en la literatura desde el siglo XIX gracias al matemático inglés James Sylvester (1814-1897) cuyo interés estaba en clasificar diagramas especiales que representaran las moléculas. Formalmente hablando un grafo es una abstracción denotada por $G = (V, A)$ donde V es el conjunto de puntos v_i con V distinto de vacío y A un conjunto

de líneas que unen dos puntos de V ; A puede ser vacío y es denominado como el conjunto de aristas que están relacionadas mediante la aplicación T .

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \\ A &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_6), \dots, (v_i, v_n)\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \\ T &: V \rightarrow A \end{aligned}$$

La importancia de este concepto en la combinatoria reside en su capacidad de representar modelos abstractos para muchos tipos de esquemas de relaciones entre conjuntos de objetos. Una de la representaciones que utilizaremos en este trabajo es la de los politopos y los complejos simpliciales junto con las relaciones de sus partes.

Existe un punto de encuentro en el estudio de los complejos simpliciales y ciertos objetos algebraicos llamados ideales libres de cuadrados, más aún, existe una biyección que conecta estos dos objetos y permite observar propiedades algebraicas por medio de las herramientas combinatorias y viceversa. Esta conexión es un resultado importante de la teoría de Stanley-Reisner, en donde se exploran problemas del álgebra conmutativa con algunas herramientas combinatorias.

Sobre la Teoría de Stanley-Reisner

La teoría de Stanley-Reisner nace en las décadas de 1970, cuando se introduce el concepto de complejo simplicial en la teoría de la topología algebraica, esto con el fin de definir grupos de homología en espacios que permitan encontrar invariantes topológicas [7] entre ellos. La correspondencia entre estos objetos e ideales libres de cuadrados ha contribuido a numerosos progresos tanto en la combinatoria como en el álgebra conmutativa; algunos de los más conocidos son: el criterio de Reisner para anillos Cohen-Macaulay, la fórmula de Hochster, la prueba de la conjetura de la cota superior para esferas simpliciales, entre otras. Algunas de estas aplicaciones involucran la dualidad de Alexander, los números de Betti y los primos asociados como se muestra en [3].

La conexión de esta teoría con el resultado que se aplica en este trabajo son los ideales de Stanley-Reisner, definidos formalmente en 1.16 que equivalen a ciertos arreglos llamados, triangulaciones, mencionadas en el teorema.

Teorema (Sturmfels, 1991). Dado un ideal tórico asociado a un conjunto $\mathcal{A}$ y un vector de pesos ω en un espacio real de n dimensiones, el complejo inicial de este ideal tórico con respecto al vector de pesos ω corresponde a la triangulación regular de $\mathcal{A}$. De manera equivalente, el radical del ideal inicial generado por ω en el ideal tórico es igual al ideal de Stanley-Reisner asociado a la triangulación regular de $\mathcal{A}$.

El teorema del Sturmfels que usamos en este trabajo es presentado como el teorema 1.1 después de haber introducido los objetos que concierne en los capítulos previos.

La aplicación que se presenta en la sección 4, es una implementación computacional con ayuda del software Macaulay2 que aporta las herramientas necesarias para la creación de los ejemplos que allí se proponen.

Macaulay2

El sistema de software algebraico, Macaulay2, es una herramienta computacional enfocada especialmente en las áreas del álgebra computacional, así como la geometría algebraica. Con un lenguaje de programación propio, Macaulay2 incluye algoritmos clave como Bases de Gröbner, Anillos de polinomios graduado y multigraduados, entre otros. Dentro de las capacidades computacionales que el software nos ofrece, podemos calcular números de Betti, cohomología de haces coherentes en variedades proyectivas, descomposición primaria de ideales, clausura entera de anillos y más.

Fundada en el año 1992 por la Fundación Nacional de Ciencia, Macaulay2 ha crecido como instrumento colaborativo en múltiples investigaciones del álgebra y sus conexiones con la geometría y ahora, la combinatoria. En este trabajo se usa el software para hacer un estudio de los objetos combinatorios a través de las herramientas algebraicas que este ofrece.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Combinatoria y Álgebra Conmutativa

En esta sección se definirán algunos conceptos básicos de combinatoria y álgebra para abordar el contexto de lo que implica el teorema de Sturmfels. Para un análisis más detallado y una comprensión más profunda de dichos conceptos, se recomienda consultar [2], [5] y [10] de donde son tomadas las definiciones.

1.1.1. Conceptos Combinatorios

Podemos partir desde la noción de una configuración de puntos como un conjunto finito de puntos $\mathcal{A}$ en el espacio $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.1. Un **politopo convexo** es la envolvente conexas de una cantidad finita de puntos

$$\text{conv}(p_1, \dots, p_n) := \left\{ \sum \alpha_i p_i : \alpha_i \geq 0 \ \forall i \in [n], \ \sum \alpha_i = 1 \right\}.$$

Definición 1.2. Un **complejo simplicial** Γ_n de un conjunto de puntos $[n] = \{1, \dots, n\}$ es una colección de subconjuntos llamados caras o simplejos que satisfacen las siguiente propiedades:

- Si $\sigma \in \Gamma_n$ es una cara y $\tau \subseteq \sigma$ entonces $\tau \in \Gamma_n$.
- La intersección de dos simplejos en Γ_n es una cara de ambos simplejos (o puede ser vacío).

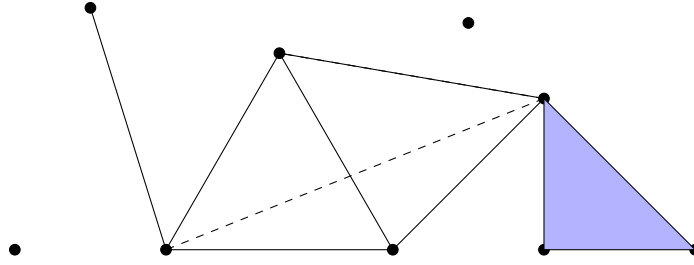


Figura 1.1: Ejemplo de complejo simplicial.

Un simplejo Δ es una generalización de la noción de un triángulo para dimensiones arbitrarias. Por ejemplo:

- Un simplejo 0-dimensional, Δ_0 es un punto.
- Un simplejo 1-dimensional, Δ_1 es un segmento de línea.
- Un simplejo 2-dimensional, Δ_2 es un triángulo.
- Un simplejo 3-dimensional, Δ_3 es un tetraedro. Ver figura 1.2.

Formalmente, tenemos lo siguiente.

Definición 1.3. Decimos que un simplejo k -dimensional es un politopo k -dimensional, cuyas caras son simplejos, en otras palabras, es la envolvente conexas de sus $k + 1$ vértices.

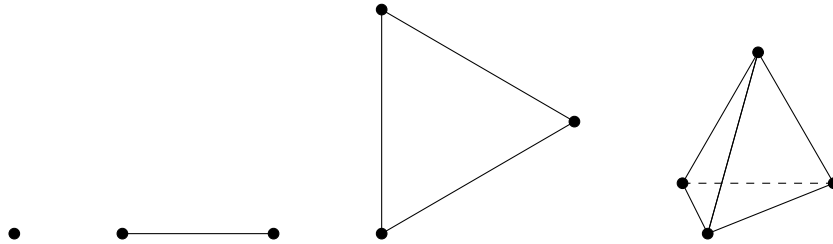


Figura 1.2: Simplejos hasta la dimensión 3.

Definición 1.4. Sea P un **politopo convexo**, definimos una subdivisión politopal de P como el complejo poliedral con soporte P en el cual todos los poliedros son politopos. Si todos los politopos maximales de la subdivisión son simplejos, la subdivisión recibe el nombre de **triangulación** de P .

Definición 1.5. Una **subdivisión**, $\Delta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$ de una configuración de puntos $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos $\sigma_i \subseteq [n]$, $i = 1, \dots, t$ tal que:

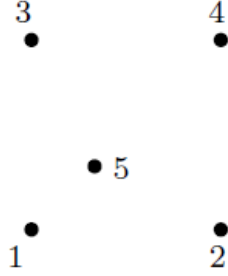
- (1) $\dim(\sigma_i) = d - 1$ para todo $i = 1, \dots, t$,
- (2) $\bigcup_{\sigma_i \in \Delta} \text{conv}(\mathcal{A}_{\sigma_i}) = \text{conv}(\mathcal{A})$,
- (3) para $i \neq j$, $\text{conv}(\mathcal{A}_{\sigma_i}) \cap \text{conv}(\mathcal{A}_{\sigma_j}) = \text{conv}(\mathcal{A}_{\tau})$ donde $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$ es una cara común de σ_i y σ_j .

Un complejo simplicial Γ con vértices en una configuración de puntos $\mathcal{A}$ es regular si existe una triangulación regular Δ_ω de $\mathcal{A}$, esta triangulación es obtenida gracias a las caras que se producen debido al levantamiento dado por el vector de peso ω , y cada elemento $\sigma \in \Delta_\omega$ es una k -cara de un simplejo d -dimensional $\tau \in \Delta_\omega$.

Para una triangulación fija Δ de una configuración de puntos $\mathcal{A}$, cada vector $\omega \in \mathbb{R}^d$ induce una única función lineal por partes $g_{\omega,\Delta}(a_i)$ en el politopo $\text{conv}(\mathcal{A})$. Esta función se define por los valores $g_{\omega,\Delta} = \omega_i$ en los puntos a_i de Δ .

Definición 1.6. Una **triangulación** Δ de $\mathcal{A}$ es regular si existe un vector $\omega \in \mathbb{R}^d$ tal que $g_{\omega,\Delta}$ es estrictamente convexa sobre Δ .

Ejemplo 1.1. Considere la configuración de puntos $\mathcal{A}_0 : p_1 = (0,0)$, $p_2 = (3,0)$, $p_3 = (0,3)$, $p_4 = (3,3)$, $p_5 = (1,1)$.



sean $\{1245, 1345\}$ y $\{124, 134\}$ dos subdivisiones diferentes.

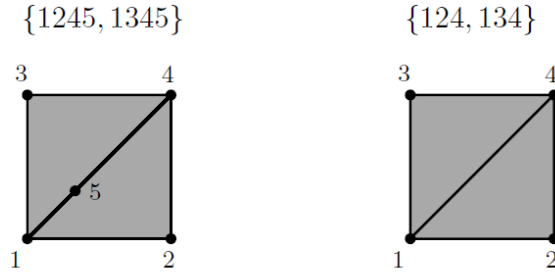


Figura 1.3: Dos subdivisiones de $\mathcal{A}_0$

Observe que la segunda subdivisión no usa el punto 5, pero no hay problema. En $\mathbb{A}_0$, el politopo $\text{conv}(1245)$ es un 2-simplejo, pero el conjunto 1245 no lo es. Por lo tanto, $\{124, 134\}$ es una triangulación de $\mathcal{A}_0$ pero $\{1245, 1345\}$ no.

Sin embargo, $\{1245, 134\}$ no es una subdivisión: mientras que los triángulos politopales $\text{conv}(1245)$ y $\text{conv}(134)$ se intersecan en una cara común (el segmento $\text{conv}(14)$), los conjuntos 1245 y 134 no: su intersección es 14, quien no es una cara de 1245.

Para otro ejemplo, considérese la figura 4.3.

Definición 1.7. Un **camino cerrado** W de un grafo G es un camino cuyo vértice inicial coincide con el final.

Un ejemplo es dado por los caminos cerrados encontrados en 4.1 de los grafos que se presentan a continuación.

Consideremos una clase de grafos de interés para el estudio de la aplicación.

Definición 1.8. Un **grafo completo** es un grafo en el cual cada par de vértices está conectado por una arista. El grafo completo de n vértices se denota K_n .

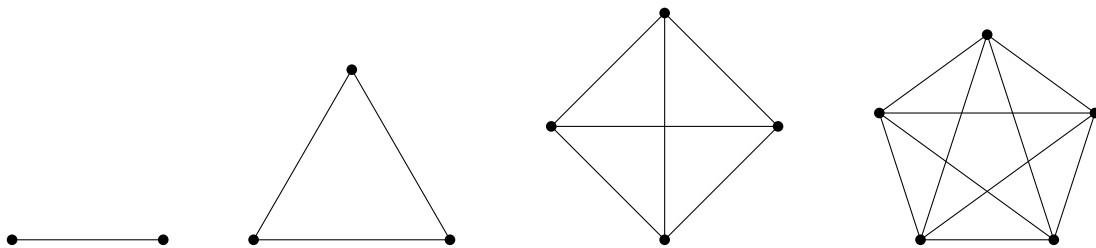


Figura 1.4: Grafos K_2, K_3, K_4, K_5 .

1.1.2. Conceptos Algebraicos

A partir de aquí consideraremos el anillo de polinomios $F[x_1, x_2, \dots, x_n] = S$, con F un campo.

Definición 1.9. Sea S el **anillo de polinomios** junto con las operaciones $+$ y $\times$. S cumple las siguientes propiedades:

- (1) $(S, +)$ es un grupo abeliano.
- (2) Se tienen las leyes distributiva para cualesquiera $a, b, c \in S$

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \quad \text{y} \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

- (3) El anillo S tiene como identidad el polinomio constante 1.

Definición 1.10. El **grupo simétrico** S_n de grado n es el grupo de todas las permutaciones en n símbolos. S_n es por lo tanto, un grupo de permutación de orden $n!$ y contiene como subgrupos todo grupo de orden n .

Definición 1.11. Sea A cualquier subconjunto de S (anillo de polinomios en varias indeterminadas). Denote como $I = \langle A \rangle$ el ideal más pequeño de S que contiene a A , llamado el **ideal generado por A** .

Ejemplo 1.2. Considere el anillo $F[x_1, x_2, x_3]$ con F un campo y sea $\langle x_1x_2, x_3x_1 \rangle$ el ideal generado por dichos monomios. Una forma de definir este ideal es la siguiente:

$$\langle x_1x_2, x_3x_1 \rangle = \{f(x_1, x_2, x_3) \cdot x_1x_2 + g(x_1, x_2, x_3) \cdot x_3x_1 \mid f(x_1, x_2, x_3), g(x_1, x_2, x_3) \in F[x_1, x_2, x_3]\}.$$

Definición 1.12. Sea A un conjunto no vacío. Un buen orden sobre A es un orden total sobre A tal que cada subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo (o más pequeño), esto es, para cada subconjunto no vacío $B \subseteq A$ existe un $s \in B$ tal que $s \leq b$, para todo $b \in B$.

Ejemplo 1.3. Un ejemplo simple de un orden de términos en S es el orden lexicográfico, el cual es similar al orden lexicográfico de las palabras en un diccionario, dicha regla está dada por:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \prec_{lex} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$$

(Con $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ un monomio), si y solo si el primer término distinto de cero de $(a_1 - b_1, \dots, a_i - b_i)$ es positivo.

Otro ejemplo es el *orden lexicográfico inverso graduado*, donde $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \succ_{grelex} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ si $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) > \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$, o si $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) = \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$ y el último término distinto de cero de $(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ es negativo.

Definición 1.13. Un **orden monomial** es un buen orden $\geq$ sobre el conjunto de todos los monomios en el anillo de polinomios que satisfacen $mm_1 \geq mm_2$ siempre que $m_1 \geq m_2$ para los monomios m, m_1, m_2 . Equivalentemente, un orden monomial debe ser especificado por un buen orden en las n -uplas $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}$ de monomios multigraduados $Ax_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ que satisfacen $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$ si $\alpha \geq \beta$.

Definición 1.14. El **ideal inicial** de un ideal $I \subset S$ con respecto a un orden monomial $\succ$ es el ideal monomial:

$$\text{in}_{\succ}(I) := \langle \text{in}_{\succ}(f) : f \in I \rangle \subseteq S$$

Donde $\text{in}_{\succ}(f) = \max\{\mathbf{x}^n \mid a_n \neq 0\}$ es el monomio inicial del polinomio homogéneo $f = \sum a_n x^n$.

Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ una configuración de vectores y A la matriz $d \times n$ cuyas columnas son los elementos de $\mathcal{A}$. Asumiremos que $\text{rank}(A) = d$ y que $(1, 1, \dots, 1)$ vive en el espacio fila de A . Sea

$$\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n : A\mathbf{u} = 0\}.$$

Note que $\ker_{\mathbb{Z}}(A)$ es un subgrupo abeliano de $\mathbb{Z}^n$. Podemos escribir el vector $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ de forma única como $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ donde $\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^- \in \mathbb{N}^n$ y

$$(\mathbf{u}^+)_j = \begin{cases} u_j & \text{si } u_j \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$(\mathbf{u}^-)_j = \begin{cases} -u_j & \text{si } u_j \leq 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Definición 1.15. El **ideal tórico** de $\mathcal{A}$ es el ideal polinomial

$$I_{\mathcal{A}} := \langle x^{\mathbf{u}^+} - x^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u} \in \ker_{\mathbb{Z}}(A) \rangle \subset S.$$

Observe que esta definición de ideal tórico considera un conjunto de binomios generadores infinito, sin embargo, por el teorema de la base de Hilbert sabemos que existe un subconjunto finito de binomios que también genera al ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$.

Observación 1.1. Los ideales tóricos también son llamados **ideales binomiales**, los cuales son generados por binomios.

Definición 1.16. El ideal de **Stanley-Reisner** de un complejo simplicial Γ es el ideal libre de cuadrados

$$I_{\Gamma} = \langle \mathbf{x}^{\tau} \mid \tau \notin \Gamma \rangle$$

generado por monomios que representan las no-caras τ de Δ . El anillo de **Stanley-Reisner** de Γ es el anillo cociente S/I_{Γ} .

Observación 1.2. Un ideal I es llamado **libre de cuadrados** si es generado por monomios libres de cuadrados, es decir, cuando sus indeterminadas tienen exponente 1.

Definición 1.17. El complejo inicial $\Gamma_{\succ}(I)$ de un ideal polinomial $I \subseteq S$ con respecto al orden monomial $\succ$, es el complejo simplicial $\Gamma(\sqrt{\text{in}_{\succ}(I)})$.

El estudio de los ideales de aristas binomiales es un campo activo del álgebra conmutativa, donde destacan autores como Takayuki Hibi, Hidefumi Ohsugi y Jürgen Herzog [5]

1.1.3. Teorema de Sturmfels

El matemático alemán Bernd Sturmfels enuncia este teorema en su artículo “Gröbner Bases of Toric Varieties” (Bases de Gröbner de variedades tóricas)[9], en donde estudia las variedades tóricas proyectivas desde una perspectiva combinatoria relacionada con la teoría de Gröbner. Dentro de sus resultados logra caracterizar los radicales de los ideales iniciales de la variedad, como los ideales de Stanley-Reisner de cierta triangulación inducida por un conjunto de pesos.

Observación 1.3. Los órdenes monomiales pueden ser especificados en términos de vectores de peso (véase en 4.0.3): un vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ con entradas no negativas es llamado un vector de peso ya que levanta un monomio $s \in S$ por el producto $s \cdot \omega$ (definido como el producto interno del vector exponente de s con ω); cualquier secuencia de n vectores de peso linealmente independiente determina un orden monomial en S .

Para la demostración del teorema haremos uso del siguiente lema, su demostración se puede encontrar en [10], pág. 122. Aquí $\text{relint}(\text{conv}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}))$ denota el interior relativo y es el conjunto de puntos que no se encuentran en ninguna cara del politopo.

Lema 1.1. (Lema 13.11, [10]) Sea Δ_{ω} una triangulación regular de $\mathcal{A}$, $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\}$ una cara de Δ_{ω} y $\tau = \{j_1, \dots, j_l\}$ una no-cara de Δ_{ω} tal que los interiores relativos (relint) de sus

envolventes convexas se intersecan. Escoja números racionales positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y $\mu_1, \dots, \mu_l$ tales que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_{i_1} + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_{i_k} = \mu_1 \mathbf{a}_{j_1} + \dots + \mu_l \mathbf{a}_{j_l}$$

y $\sum \lambda_i = \sum \mu_i = 1$. Entonces $\sum_{i=1}^n \omega_i \omega_i < \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i$.

Teorema 1.1. (Sturmfels, [10]) Sea $I_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico de $\mathcal{A}$ y $\omega \in \mathbb{R}^n$ un vector de pesos. Entonces el complejo inicial $\Gamma_{\omega}(I_{\mathcal{A}})$ es la triangulación regular Δ_{ω} de $\mathcal{A}$ o equivalentemente $\sqrt{\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})}$ es el ideal de Stanley-Reisner $I_{\Delta_{\omega}}$ de la triangulación regular Δ_{ω} de $\mathcal{A}$.

Demostración. Suponga Δ_{ω} es una triangulación regular de $\mathcal{A}$. Argumentamos que el ideal de Stanley-Reisner $I_{\Delta_{\omega}}$ está contenido en $\sqrt{\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})}$. Sea $\tau = j_1, \dots, j_l$ una no-cara de Δ_{ω} o equivalentemente $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_l} \in I_{\Delta_{\omega}}$. Entonces existe una cara $\sigma = i_1, \dots, i_k$ de Δ_{ω} tal que

$$\text{relint}(\text{conv}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})) \cup \text{relint}(\text{conv}(a_{j_1}, \dots, a_{j_l})) \neq \emptyset.$$

Tome números racionales positivos $\lambda'_1, \dots, \lambda'_k$ y $\mu'_1, \dots, \mu'_l$ con $\sum \lambda'_i = \sum \mu'_i = 1$ tal que

$$\lambda'_1 a_{i_1} + \dots + \lambda'_k a_{i_k} = \mu'_1 a_{j_1} + \dots + \mu'_l a_{j_l}.$$

Despejando denominadores, se obtienen los vectores $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$ tales que.

$$A\lambda = \lambda_{i_1} a_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} a_{i_k} = \mu_{j_1} a_{j_1} + \dots + \mu_{j_l} a_{j_l} = A\mu.$$

Entonces el vector $\pm(\lambda - \mu) \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$ lo que significa que $\pm(\mathbf{x}^{\lambda} - \mathbf{x}^{\mu})$ vive en el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$. Como σ es una cara de Δ_{ω} mientras que τ es una no-cara, por el lema 1.1, tenemos que $\omega \cdot \lambda < \omega \cdot \mu$ lo cual implica que $\text{in}_{\omega}(\mathbf{x}^{\lambda} - \mathbf{x}^{\mu}) = \mathbf{x}^{\mu}$. Esto significa que $\mathbf{x}^{\mu} \in \text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})$ y subsecuentemente, $x_{j_1}, \dots, x_{j_l} \in \sqrt{\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})}$. Esto prueba que $I_{\Delta_{\omega}} \subseteq \sqrt{\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})}$.

Por otro lado, suponga $\sqrt{\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})}$ no está contenido en $I_{\Delta_{\omega}}$. Esto implica que hay un ideal monomial $\mathbf{x}^{\mu}$ en $\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})$ cuyo soporte es una cara de Δ_{ω} . No es difícil probar que el ideal $I_{\mathcal{A}}$ es generado como un espacio $\mathbf{K}$ -vectorial de monomios de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$ donde $\mathbf{u} \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$ lo cual significa que existe un binomio $\mathbf{x}^{\mu} - \mathbf{x}^{\lambda} \in I_{\mathcal{A}}$ con $\text{in}_{\omega}(\mathbf{x}^{\mu} - \mathbf{x}^{\lambda}) = \mathbf{x}^{\mu}$ tal que $\text{supp}(\mathbf{x}^{\mu})$ es una cara de Δ_{ω} . Tenemos $\omega \cdot \mu > \omega \cdot \lambda$. También $A\lambda = A\mu$ lo que significa que $\text{supp}(\mathbf{x}^{\lambda})$ tiene que ser una no-cara de Δ_{ω} y que de otra forma tendríamos dos caras intersecándose en sus interiores relativos. Esto contradice el lema 1.1, y por lo tanto, $\sqrt{\text{in}_{\omega}(I_{\mathcal{A}})} \subseteq I_{\Delta_{\omega}}$.

□

Capítulo 2

Bases de Gröbner

2.1. Álgebra conmutativa computacional

Durante este proyecto estudiamos el software algebraico Macaulay2 por medio de la aplicación de sus paquetes en los conceptos clave del álgebra conmutativa computacional, puesto que uno de los objetivos planteados es familiarizarse con el software que usaremos en la aplicación. Con esto en mente, se procede a estudiar una parte importante de la teoría de Gröbner, más específicamente las bases de Gröbner. La siguiente introducción está basada en su mayoría en el texto *Binomial Ideals* [5], donde se introducen las bases de Gröbner y se estudia el Lema de Dickson, un resultado clásico de la combinatoria.

Un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ en las indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ es un producto de la forma:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

Donde cada a_i es un entero no negativo y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. El grado del monomio se define como $\sum_{i=1}^n a_i$. Por ejemplo el grado de $x_1^7 x_3^5 x_4^{13}$ es 25. En particular $1 = x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0$ es un monomio de grado 0. Llamaremos *término* a un monomio con coeficiente distinto de cero y un término constante será el monomio 1 junto con un coeficiente distinto de cero.

Un *polinomio* es una suma finita de términos. Por ejemplo

$$f = 3x_2^2 x_5 - 28x_3 x_5^4 + \frac{2}{5}x_1 x_7^2 + 12$$

es un polinomio de 4 términos compuesto por los monomios

$$x_2^2 x_5, x_3 x_5^4, x_1 x_7^2, 1$$

y coeficientes $3, -28, \frac{2}{5}, 12$.

El grado del polinomio se define como el grado máximo de los monomios que lo componen. Por ejemplo, el grado del polinomio anterior es 5. Para el caso de grado 0 o polinomio nulo, se dice por convención que este polinomio es de grado -1 . Si el grado de todos los monomios que aparecen en el polinomio son de grado q , se dice que el polinomio es homogéneo de grado q .

Considere $\mathcal{M}_n$ como el conjunto de monomios en las indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Con el fin de simplificar la notación, usaremos la notación v, w y z para los monomios en vez de $\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ a menos de que surja alguna confusión.

Decimos que un monomio $v = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ divide $w = \prod_{i=1}^n x_i^{b_i}$ si uno tiene $a_i \leq b_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Escribimos $v \mid w$ si v divide a w . Sea M un conjunto no vacío de $\mathcal{M}_n$. Un monomio $v \in M$ es llamado *elemento minimal* de M si la siguiente condición se satisface: si $w \in M$ y $w \mid v$, entonces $w = v$.

Teorema 2.1 (Lema de Dickson [4]). El conjunto de elementos minimales de un subconjunto no vacío M de $\mathcal{M}_n$ es finito.

Demostración. Haciendo uso del principio de inducción observamos lo siguiente:

Si $n = 1$ un elemento minimal de un conjunto no vacío M de $\mathcal{M}_1$ es único.

Sea $n = 2$ y M un conjunto no vacío de $\mathcal{M}_n$, considere $u_1 = x_1^{a_1} x_2^{b_1}, u_2 = x_1^{a_2} x_2^{b_2}, \dots$ son elementos minimales de M con $a_1 < a_2 < \dots$. Como u_i no puede dividir a u_{i+1} , tenemos que $b_i > b_{i+1}$. Esto es $b_1 > b_2 > \dots$. Por lo tanto, el número de elementos minimales es finito.

Sea $n > 2$, supóngase que el lema de Dickson es cierto para $n - 1$ y considere $y = x_n$. Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de monomios u en las indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ que satisfacen la siguiente condición: existe $b \geq 0$ con $u_i y^b \in M$. Claramente $\mathcal{N} \neq \emptyset$. La hipótesis de inducción dice que el número de elementos minimales de $\mathcal{N}$ es finito. Denote como $u_1, u_2, \dots, u_s$ dichos elementos, entonces por la definición de $\mathcal{N}$, se sigue que, para cada u_i , existe un $b_i \geq 0$ con $u_i y^{b_i} \in M$. Sea b el entero más grande entre $b_1, b_2, \dots, b_s$. Sin embargo, dado $0 \leq c < b$, definimos un subconjunto $\mathcal{N}_c$ de $\mathcal{N}$ como sigue:

$$\mathcal{N}_c = \{u \in \mathcal{N} : uy^c \in M\}.$$

Nuevamente la hipótesis de inducción dice que el número de elementos minimales de $\mathcal{N}_c$ es finito. Sean $u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, \dots, u_{s_c}^{(c)}$ los elemento minimales de $\mathcal{N}_c$. Afirmamos que un monomio que pertenece a M puede ser dividido por uno de los monomios enlistados abajo:

$$u_1 y^{b_1}, \dots, u_s y^{b_s}$$

$$\begin{aligned}
& u_1^{(0)}, \dots, u_{s_0}^{(0)} \\
& u_1^{(1)}y, \dots, u_{s_1}^{(1)}y \\
& \vdots \\
& u_1^{(b-1)}y^{b-1}, \dots, u_{s_{b-1}}^{(b-1)}y^{b-1}.
\end{aligned}$$

En efecto, para un monomio $w = uy^e \in \mathcal{M}$, donde u es un monomio en $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ se tiene que $u \in \mathcal{N}$. Por lo tanto, si $e \geq b$, entonces w es dividido por uno de $u_1y^{b_1}, \dots, u_sy^{b_s}$. Por otro lado, si $0 \leq e < b$, entonces, como $u \in N_e$, se sigue que w puede ser dividido por alguno de $u_1^{(e)}y^e, \dots, u_{s_e}^{(e)}y^e$. Así pues, cada elemento minimal de $\mathcal{M}$ debe aparecer en la lista de monomios de arriba. En particular, el número de elementos minimales de $\mathcal{M}$ es finito, como se requería. $\square$

Dado un ideal $I \in S$ y un polinomio $f \in S$, existe un problema fundamental que implica decidir ¿Cuándo el polinomio $f \in I$? Dicho problema es conocido como *El problema de membresía del ideal* [1]. Las bases de Gröbner son una herramienta fundamental para resolver este problema, puesto que de ellas se deducen algoritmos para la membresía del ideal.

El algoritmo de membresía de un ideal en la familia de los ideales de una indeterminada es de gran ilustración para la construcción de un algoritmo que implique más de una indeterminada. Considere el anillo de polinomios $S = F[x]$. Si $\deg(f)$ denota el grado de un polinomio $f \in S$, entonces f tiene la forma

$$f = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$$

donde $\deg(f) = n$, $c_n \neq 0$ y todos los $c_i \in F$.

Lema 2.1 (Lema 1.4 [5]). Todo ideal generado por monomios (ideal monomial) es finitamente generado. Más precisamente si I es un ideal monomial y si $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es el sistema de monomios generadores, entonces existe un subconjunto finito $\{u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_s}\}$ de $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $I = \langle u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_s} \rangle$.

Demostración. Se sigue del lema de Dickson que el número de elementos minimales del conjunto de monomios $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es finito. Sea $\{u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_s}\}$ el conjunto de elementos minimales. Afirmamos que $I = \langle u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_s} \rangle$. En efecto, cada $f \in I$ puede ser expresado como $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda u_\lambda$, donde $g_\lambda \in S$ es 0 excepto para un número finito de λ 's. Entonces, para cada λ con $g_\lambda \neq 0$, escogemos u_{λ_i} que divida a u_λ y establecemos $h_\lambda = g_\lambda(u_\lambda/u_{\lambda_i})$. Esto es $g_\lambda u_\lambda = h_\lambda u_{\lambda_i}$. Por tanto f puede ser expresado como $f = \sum_{i=1}^s f_i u_{\lambda_i}$ con cada $f_i \in S$. $\square$

Sea I un ideal monomial. Un sistema de generadores de I consiste en un número finito de monomios y es llamado un sistema de generadores monomiales de I .

Lema 2.2 (Lema 1.5 [5]). Sea $I = \langle u_1, u_2, \dots, u_s \rangle$ un ideal monomial, donde $u_1, u_2, \dots, u_s$ son monomios. Entonces un monomio u pertenece a I si y solo si uno de los u_i 's divide a u .

Para generalizar esta idea se necesita extender la definición de m.c.d. para más de dos polinomios.

Definición 2.1. El m.c.d. de los polinomios $f_1, f_2, \dots, f_s \in S$ es un polinomio h tal que:

- (1) h divide a $f_1, \dots, f_s$.
- (2) Si p es un polinomio que divide a $f_1, \dots, f_s$, entonces $p \mid h$.

Teorema 2.2 (Teorema 11.8 [10]). (1) El m.c.d. de $f_1, \dots, f_s$ existe en S y es único salvo la multiplicación por una constante diferente de cero.

- (2) El ideal $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ es generado por $\text{m.c.d.}(f_1, \dots, f_s)$.
- (3) Si $s \geq 3$ entonces el $\text{m.c.d.}(f_1, \dots, f_s) = \text{m.c.d.}(f_1, \text{m.c.d.}(f_2, \dots, f_s))$.

Un sistema de generadores de un ideal monomial no consiste necesariamente de monomios. Por ejemplo, $\{x_1^2 + x_2^3, x_2^2\}$ es un sistema de generadores del ideal monomial $\langle x_1^2, x_2^2 \rangle$.

Corolario 2.1. Entre todos los sistemas monomiales de generadores de un ideal monomial, existe un único sistema monomial de generadores que es minimal con respecto a la inclusión.

Definición 2.2. Fije un orden monomial en el anillo de polinomios S .

- (1) El término principal de un polinomio no nulo $f \in S$, denotado por $LT(f)$, por sus siglas en inglés *Leading term*, es el término de máximo orden en f y el término principal de $f = 0$ es 0.
- (2) Si I es un ideal en S , el ideal de términos principales, denotado por $LT(I)$, es el ideal generado por todos los términos principales de todos los elementos en el ideal, esto es, $LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle$.

Ejemplo 2.1. Si $f = 2x^3 - 5x + 3$, entonces $LT(f) = 2x^3$. Note también que si f y g son polinomios no nulos, entonces

$$\deg(f) \leq \deg(g) \iff LT(f) \text{ divide } LT(g).$$

En el caso de $S = F[x]$, los términos principales también son usados en el algoritmo de la división para reducir un polinomio g módulo otro polinomio f para así obtener un único residuo r , además, este residuo es 0 si y solo si g está contenido en el ideal $\langle f \rangle$.

Proposición 2.1. Sea $I \subseteq S$ un ideal distinto de $\{0\}$.

- (1) $LT(I)$ es un ideal monomial.
- (2) Existen $g_1, \dots, g_t \in I$ tales que $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = LT(I)$.

2.1.1. Teorema de la base de Hilbert

Teorema 2.3 (Teorema de la base de Hilbert, Teorema 21, [2]). Si R es un anillo Noetheriano, entonces el anillo de polinomios $R[x]$ también lo es.

Demostración. Sea I un ideal en $R[x]$ y sea L el conjunto de todos los coeficientes líderes de los elementos en I . Primero se muestra que L es un ideal en R como sigue. Como I contiene al polinomio cero, $0 \in L$. Sea $f = ax^d + \cdots$ y $g = bx^e + \cdots$ polinomios en I de grados d y e , con coeficientes $a, b \in R$. Entonces para cualquier $r \in R$ ya sea $ra - b$ es cero o es un coeficiente líder del polinomio $rx^e f - x^d g$. Como el último polinomio está en I tenemos que $ra - b \in L$, lo cual prueba que L es un ideal de R . Como se asumió que R era Noetheriano, el ideal L en R es finitamente generado, a decir por $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$. Para cada $i = 1, \dots, n$ sea f_i un elemento de I cuyo coeficiente líder es a_i . Sea e_i quien denote el grado de f_i y sea N el máximo de $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Para cada $d \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, sea L_d el conjunto de todos los coeficientes líderes de los polinomios en I de grado d junto con 0. Un argumento similar para L muestra que cada L_d es también un ideal de R , de nuevo finitamente generado pues R es Noetheriano. Para cada ideal diferente de cero L_d sea $b_{d,1}, b_{d,2}, \dots, b_{d,n_d} \in R$ un conjunto de generadores para L_d , y sea $f_{d,i}$ un polinomio en I de grado d con coeficiente líder $b_{d,i}$. Probamos que los polinomios $f_1, \dots, f_n$ junto con los polinomios $f_{d,i}$, para todos los ideales diferentes de cero L_d , son un conjunto de generadores para I , esto es, que

$$I = (\{f_1, \dots, f_n\} \cup \{f_{d,i} \mid 0 \leq d < N, 1 \leq i \leq n_d\})$$

.

Por construcción, el ideal I' en la parte derecha de arriba está contenido en I puesto que todos los generadores eran escogidos en I . Si $I' \neq I$, existe un polinomio $f \in I$ de grado mínimo con $f \notin I'$. Sea $d = \deg f$ y sea a el coeficiente líder de f . Primero suponga que $d \geq N$. Como $a \in L$ debemos escribir a como una combinación R -lineal de generadores de L : $a = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$. Entonces $g = r_1 x^{d-e_1} f_1 + \cdots + r_n x^{d-e_n} f_n$ es un elemento de I' con el mismo grado d y el mismo coeficiente líder a como f . Entonces $f - g \in I$ es un polinomio en I de grado menor que f . Por la minimalidad de f , debemos tener que $f - g = 0$, entonces $f = g \in I'$, una contradicción.

Luego suponga que $d < N$. En este caso $a \in L_d$ para algún $d < N$, y debemos escribir $a = r_1 b_{d,1} + \cdots + r_{n_d} b_{d,n_d}$ para algún $r_i \in R$. Entonces $g = r_1 f_{d,1} + \cdots + r_{n_d} f_{d,n_d}$ es un polinomio en I' con el mismo grado d y el mismo coeficiente líder a como f , y tenemos una contradicción como antes.

Se sigue que $I = I'$ es finitamente generado, y como I era arbitrario, esto completa la prueba que $R[x]$ es Noetheriano. $\square$

Observación 2.1. El teorema de base de Hilbert muestra cómo se pueden construir anillos Noetherianos más grandes a partir de los existentes.

Definición 2.3. Una **base de Gröbner** para un ideal I en el anillo de polinomios S es un conjunto de generadores $\{g_1, \dots, g_m\}$ para I cuyos términos principales generan el ideal de

todos los términos principales en I , esto es

$$I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle \text{ y } LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_m) \rangle.$$

Definición 2.4. Una base de Gröbner es llamada **reducida** si satisface las siguientes condiciones:

- (i) El coeficiente en $\text{in}_<(g_i)$ en g_i es 1 para todo $1 \leq i \leq s$, con $<$ un orden monomial;
- (ii) Si $i \neq j$, entonces ninguno de los monomios de $\text{supp}(g_j)$ es divisible por $\text{in}_<(g_i)$.

Entiéndase $\text{supp}(f)$, con f un polinomio, como el soporte de f . Este es el conjunto de todos los exponentes en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, y c_α son los coeficientes correspondientes al cuerpo R , son distintos de cero.

$$\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid c_\alpha \neq 0\}.$$

Observación 2.2. Dado que la existencia de estas bases es garantizada por el Teorema de la base de Hilbert, podemos entonces encontrar un conjunto finito de generadores de $LT(I)$. Suponga que dicho conjunto es $\{x^{a_1}, \dots, x^{a_r}\}$, luego para encontrar el conjunto minimal de generadores se realiza una sustitución de monomios por otros monomios del ideal.

Observación 2.3. El conjunto minimal generador de un ideal monomial en dos indeterminadas puede ser representado gráficamente haciendo uso de una malla de puntos o *lattice* $\mathbb{N}^2$ con coordenadas (r, s) que corresponden al monomio $x^r y^s$. Al trazar los puntos del conjunto generador, podremos observar todos los monomios del ideal como puntos a la derecha o por encima de un punto del conjunto generador, y los generadores mínimos son los puntos sin otros puntos generadores a su izquierda o por debajo de ellos.

Ejemplo 2.2. Considere el ideal $I = \langle x^5, x^2 y^3, x y^6, x^2 y, x^4 y^2, x^3 y^4 \rangle$, entonces los monomios que conforman a I y su conjunto minimal de generadores se muestran en el siguiente diagrama:

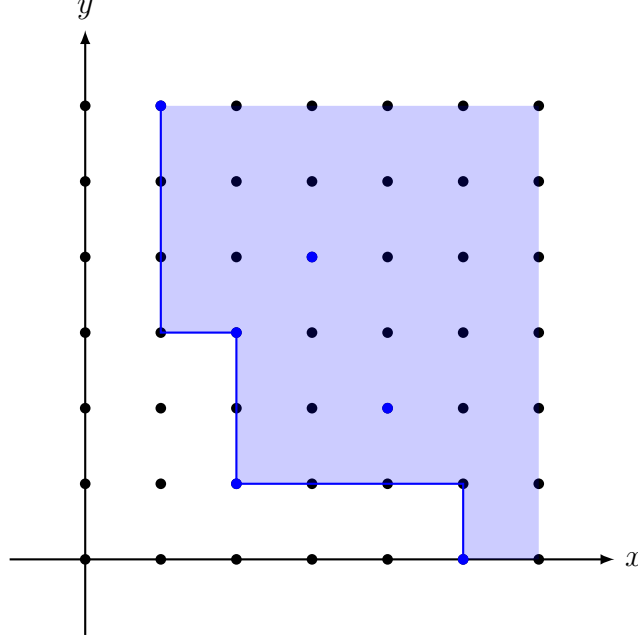


Figura 2.1: Generadores mínimos de I

Proposición 2.2. Sea I un ideal y $\{f_1, \dots, f_r\}$ una base de Gröbner para I . Entonces $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, y para todo $g \in S$, el pseudo algoritmo de la división (algoritmo 11.21, [10]) termina en

$$g = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r,$$

con $h_i \in S$, y por lo tanto $g \in I$, ó

$$g = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r + g_r$$

donde $LT(g_r)$ no está contenido en $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_r) \rangle$, entonces tanto g_r como g no pertenecen a I .

Demostración. Sabemos que siempre que el algoritmo de la división llega a un residuo cero obtenemos una expresión

$$g = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r$$

y esto implica que $g \in I$. Debemos demostrar que este algoritmo siempre da un residuo igual a cero para $g \in I$. Suponga por contradicción que este no es el caso. Entonces existe un $g \in I$ tal que $LT(g_r)$ no es divisible por alguno de los $LT(f_j)$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto implica que $LT(g_r)$ no está contenido en $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_r) \rangle$ ya que un monomio en un ideal monomial debe ser múltiplo al menos de uno de los generadores monomiales. Pero

$$\langle LT(f_1), \dots, LT(f_r) \rangle = in_{\prec}(I)$$

y en consecuencia g_r no está en I . Esto implica que g no está contenido en I , lo cual es una contradicción y por lo tanto, cada $LT(g_r)$ debe ser divisible por un $LT(f_j)$, luego por el principio del buen orden obtenemos un residuo cero siempre que $g \in I$. Como $g \in I$ si y solo si $g = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r$ para $h_i \in S$, se sigue trivialmente que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. $\square$

El software algebraico ofrece un amplio paquete de funciones y métodos para el cálculo de las bases de Gröbner como se puede ver en Gröbner bases. Teniendo en cuenta el **ejemplo 2.2** calculamos su base de Gröbner con la función `gens gb`.

```
i1 : R = ZZ[x, y]

o1 : R

o1 : PolynomialRing

i2 : I = ideal(x^5, x^2 * y^3, x * y^6, x^2 * y, x^4 * y^2, x^3 * y^4)

o2 : Ideal of R

i3 : G = gens gb I

o3 = |x2y x5 xy6|

o3 : Matrix R^1 <--- R^3
```

Como las bases de Gröbner nos ayudan a resolver el problema de la pertenencia al ideal tanto teórica como computacionalmente, una pregunta en esta última línea sería ¿Cómo podemos reducir la base generadora del ideal? Para ello el matemático Bruno Buchberger desarrolló un algoritmo que encuentra una base de Gröbner reducida de un ideal $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$ con respecto a cualquier término de orden prescrito $\succ$ en S . Antes de introducir el algoritmo es pertinente hablar de los S-polinomios. Se ha encontrado que un problema en el algoritmo de la división es el de determinar si los términos principales LT (*leading term*) de dos polinomios pueden cancelarse.

Dados dos polinomios $f_1, f_2 \in S$ y un orden monomial, podemos formar su S-polinomio el cual cancela los términos principales de ambos polinomios. Dicho polinomio puede encontrarse de forma general con ayuda de la noción del mínimo común múltiplo como se muestra en [4] y en las notas “S-Polynomials and Buchberger’s Algorithm” de J.M. Selig. El S-polinimio de un par de polinomios se define como:

$$S(f_i, f_j) = \frac{x^{\gamma(ij)}}{LT(f_i)} f_i - \frac{x^{\gamma(ij)}}{LT(f_j)} f_j,$$

donde $x^{\gamma(ij)} = LCM(LM(f_i), LM(f_j))$ es el mínimo común múltiplo de los monomios líderes de los polinomios.

2.1.2. Algoritmo de Buchberger

El algoritmo de Buchberger calcula la base de Gröbner reducida $\mathcal{G}_{\succ}(I)$ de un ideal $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \in S$ con un orden monomial $\prec$ dado. Con el S-polinomio obtenemos un miembro de I de orden menor que el mínimo común múltiplo de $LM(f_i)$ y $LM(f_j)$ (*Leading monomial*).

Algorithm 1 Algoritmo de Buchberger

Require: $F = f_1, \dots, f_t$ una base del ideal $I \subset S$ y un término de orden $\succ$ en S

Ensure: La base de Gröbner reducida $\mathcal{G}_{\succ}(I)$ de I con respecto a $\succ$

```

 $G := F$ 
repeat
  for all pair  $p, q, p \neq q$  en  $G'$  do
     $S := \text{rem}_{G'}(S - \text{par}(p, q))$ 
    if  $S \neq 0$  entonces  $G := G \cup S$  then
      end if
    end for
  until  $G = G'$   $\triangleright G$  es una base de Gröbner de  $I$  con respecto a  $\succ$  en este punto

```

Donde $\text{rem}_{G'}(S - \text{par}(p, q))$ denota el residuo obtenido al dividir el polinomio $S - \text{par}(p, q)$ por la lista ordenada de polinomios G' .

Capítulo 3

Geometría Poliedral

Con ánimos de ampliar el contexto en lo que al teorema de Sturmfels respecta, traemos algunos ejemplos de cálculos computacionales de nociones de objetos de la geometría poliedral basados en [10]. Se retomará de la breve introducción de conceptos combinatorios la definición 2.4 .

Definición 3.1. Una **combinación convexa** de $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^d$ es cualquier punto de la forma $\sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{p}_i$ donde $\lambda_i \geq 0$, para toda $i = 1, \dots, t$ y $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$. El conjunto de todas las combinaciones convexas se denota como $\text{conv}(\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_t\})$.

Sea $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^{d-1}$ una configuración de puntos cuya envolvente convexa es un politopo $(d-1)$ -dimensional $P \subset \mathbb{R}^{d-1}$. No insistiremos en que todos los puntos sean distintos o que todos ellos representen vértices de P . Encajamos $\mathcal{V}$ en $\mathbb{R}^d$ al establecer todos sus puntos en el hiperplano $x_1 = 1$ en $\mathbb{R}^d$ y consideramos la configuración de puntos

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Se dice que la configuración $\mathcal{A}$ es graduada ya que vive en el hiperplano $x_1 = 1$. Si $\mathcal{A}$ es graduada entonces el vector $(1, 1, \dots, 1)$ vive en el espacio fila de A , donde A es la matriz $d \times n$ correspondiente.

Una vez se haya fijado $\mathcal{A}$, podemos referirnos a su i -ésimo elemento a_i por su índice $i \in [n]$. Identificamos $\sigma \subseteq [n]$ con $\mathcal{A}_\sigma := \{a_i : i \in \sigma\}$. Un subconjunto $\mathcal{A}_\sigma$ de una configuración de puntos $\mathcal{A}$ es una cara de $\mathcal{A}$ si los elementos de $\mathcal{A}_\sigma$ son precisamente aquellos que viven en una cara del politopo $\text{conv}(\mathcal{A})$. Nos referimos a esta cara como γ y su dimensión está dada por la dimensión del politopo $\text{conv}(\mathcal{A}_\sigma)$.

Definición 3.2. Sea $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector de peso y $\mathcal{A}$ una configuración de

puntos en $\mathbb{R}^d$. Considere el *levantamiento* de la configuración de puntos

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ \omega_n \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Definición 3.3. Un **cono** $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^d$ tal que:

1. Para $x, y \in K$, $x + y \in K$, y
2. Para $x \in K$ y $\lambda \geq 0$, $\lambda x \in K$.

Uno de los ejemplos más comunes es el cono de helado en $\mathbb{R}^3$,

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}.$$

Estaremos interesados en los conos poliédricos que son conos con muchos lados planos finitos.

Definición 3.4. Un **cono poliédrico** $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es un poliedro de la forma

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d : Mx \geq 0\}$$

donde M es una matriz real, o equivalentemente (por el teorema principal de conos) cualquier conjunto de la forma

$$K = \{Ny : y \geq 0\}$$

donde N es una matriz real.

La segunda expresión nos dice que K es el conjunto de combinaciones no-negativas de N . Las columnas $\mathcal{N}$ de N son llamadas generadores del cono K . Esto puede ser expresado como $K = \text{cone}(\mathcal{N})$. Las desigualdades en $Mx \geq 0$ son llamadas restricciones de K .

Observación 3.1. El teorema fundamental de conos es análogo al teorema fundamental de politopos y asegura que toda restricción finita de un cono es un generador finito del cono y vice-versa. Ambos teoremas son análogos en el sentido de que describen cómo se pueden construir dos clases fundamentales de objetos convexos (conos y politopos) a partir de combinaciones de elementos más simples:

- Conos: son generados por combinaciones lineales no negativas de un conjunto finito de vectores.
- Politopos: son generados por combinaciones convexas de un conjunto finito de puntos.

Definición 3.5. Un **complejo poliedral** $\mathcal{C}$ es una colección finita de poliedros en $\mathbb{R}^d$ tales que

- (i) el poliedro vacío está en $\mathcal{C}$,
- (ii) si $P \in \mathcal{C}$ entonces todas las caras de P son también caras en $\mathcal{C}$,
- (iii) si P y Q están en $\mathcal{C}$ entonces $P \cap Q$ es una cara de ambas P y Q .

Definición 3.6. Un **complejo de conos** es un complejo poliedral en el cual todos los poliedros son conos. También son conocidos como **abanicos poliedrales**.

Si el soporte del abanico es todo el espacio en que vive, lo llamamos un abanico **completo**.

Capítulo 4

Programas y resultados

Para efectos de este trabajo, calcularemos los ideales tóricos de los grafos K_4 y K_5 para observar la relación de estos con la triangulación regular del complejo inicial según el teorema de Sturmfels.

4.0.1. Ideales tóricos de grafos K_n completos

Sea $G = K_4$ (ver en figura 1.4) en $n = [4]$. Para calcular el ideal tórico del grafo observe que: $V(G) = [4]$ y $E(G) = \{e_{1,2}, e_{2,3}, e_{3,4}, e_{1,4}, e_{2,4}, e_{1,3}\}$ son el conjunto de vértices y aristas respectivamente. Sea $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ el anillo de polinomios en 4 indeterminadas sobre el campo $\mathbb{Q}$. Por otro lado, defínase el homomorfismo $f(e_{ij}) = x_i \cdot x_j$ que asocia a cada arista con un monomio del anillo R , luego el kernel de f será el ideal tórico I_{K_4} . Obsérvese el cálculo en el software Macaulay2.

```
i1 : LoadPackage "StatePolytope"
```

```
i2 : LoadPackage "MinimalPrimes"
```

```
i3 : R = QQ[x1, x2, x3, x4]; -- Anillo de vertices
```

```
i4 : E = QQ[e(1,2), e(2,3), e(3,4), e(1,4), e(2,4), e(1,3)]; -- Anillo de aristas
```

```
i5 : L = {x1*x2, x2*x3, x3*x4, x1*x4, x2*x4, x1*x3}; -- Imagen del homomorfismo
```

```
i6 : f = map(R, E, L)
```

```

o6 : map(R, E, {x1*x2, x2*x3, x3*x4, x1*x4, x2*x4, x1*x3})

o6 : RingMap R <- - - E

i7 : I = ker f

o7 : ideal (e(2,3)e(1,4) - e(2,4)e(1,3), e(1,2)e(3,4) - e(2,4)e(1,3))

o7 : Ideal of E

i8 : K = initialIdeals(I); --Ideales iniciales

o8 = {{e(2,3)e(1,4), e(1,2)e(3,4)}, {e(1,2)e(3,4), e(1,3)e(2,4)}, {e(2,3)e(1,4), e(1,3)e(2,4)}}

o8 : List

```

Observación 4.1. El paquete StatePolitope.m2 es necesarios para la ejecución de la función initialIdeals como se muestra allí.

Teorema 4.1. (Teorema 3.2, [5]) Cualquier ideal tórico es un ideal binomial. Más precisamente, sea $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$. Entonces I_A es generada por binomios $f_{\mathbf{b}}$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ y $A\mathbf{b} = 0$.

Demostración. Afirmamos que I_A es un ideal binomial. Sea $f \in \ker \pi$ con $f = \sum_u \lambda_u u$, $\lambda_u \in K$ y cada u un monomio en S . Escribimos $f = \sum_{\mathbf{c}} f^{(\mathbf{c})}$, donde $f^{(\mathbf{c})} = \sum_{u, \pi(u)=\mathbf{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_u u$ como la suma de aquellos monomios u que aparecen en f . Se sigue que

$$0 = \pi(f) \sum_{\mathbf{c}} \pi(f^{(\mathbf{c})}) = \sum_{\mathbf{c}} \left(\sum_{u, \pi(u)=\mathbf{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_u \right) \mathbf{t}^{\mathbf{c}}$$

y por lo tanto $\sum_{u, \pi(u)=\mathbf{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_u = 0$ para toda $\mathbf{c}$. Esto es, si $f^{(\mathbf{c})} \neq 0$ y $u \in \text{supp}(f^{(\mathbf{c})})$, entonces $f^{(\mathbf{c})} = \sum_{v \in \text{supp}(f^{(\mathbf{c})})} \lambda_v (v - u)$.

Finalmente, sea $f_{\mathbf{b}} \in S$. Entonces $\pi(f_{\mathbf{b}}) = \mathbf{t}^{A\mathbf{b}^+} - \mathbf{t}^{A\mathbf{b}^-}$. Luego $f_{\mathbf{b}} \in \ker \pi$ si y sólo si $A\mathbf{b}^+ = A\mathbf{b}^-$, y este es el caso si y sólo si $A\mathbf{b} = 0$. $\square$

Teorema 4.2. (Lema 5.9 [5]) El ideal tórico I_G es generado por todos los binomios f_{Γ} , donde Γ es un camino cerrado par de G .

Demostración. Por el teorema 4.1 sabemos que todo ideal tórico es generado por binomios. Sea I'_G el ideal binomial generado por aquellos monomios f_{Γ} , donde Γ es un camino cerrado par de G . Escójase un binomio $f = \prod_{k=1}^q x_{i_k} - \prod_{k'=1}^q x_{j_{k'}} \in I_G$ con $i_k \neq j_{k'}$ para todo k y

k' . Digamos que $\pi(xi_1) = t_1t_2$. Como $\pi(\prod_{k=1}^q x_{i_k}) = \pi(\prod_{k=1}^q x_{j_k})$, se tiene $\pi(x_{j_m}) = t_2t_r$ para alguna m con $r \neq 1$. Digamos que $m = 1$ y $r = 3$. Esto es $\pi(x_{j_1}) = t_2t_3$. Entonces $\pi(x_{i_l}) = t_3t_s$ para alguna l con $s \neq 2$. Repitiendo la aplicación de este procedimiento llegamos a un camino cerrado par $\Gamma' = (ei_1, ej_1, ei_2, ej_2, \dots, ei_p, ej_p)$ con $f_{\Gamma'} = \prod_{k=1}^p x_{i_k} - \prod_{k'=1}^p x_{j_{k'}} \in I(G)$. Como $\pi(\prod_{k=1}^q x_{i_k}) = \pi(\prod_{k=1}^q x_{j_k})$ y $\pi(\prod_{k=1}^p x_{i_k}) = \pi(\prod_{k=1}^p x_{j_k})$, se tiene que $\pi(\prod_{k=p+1}^q x_{i_k}) = \pi(\prod_{k=p+1}^q x_{j_k})$. Por lo tanto, $\prod_{k=p+1}^q x_{i_k} - \prod_{k=p+1}^q x_{j_k}$ pertenecen al ideal I_G . Haciendo inducción sobre $q \geq 2$ permite asumir que $\prod_{k=p+1}^q x_{i_k} - \prod_{k=p+1}^q x_{j_k}$ pertenece a I'_G . Ahora, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f &= \prod_{k=p+1}^q x_{i_k} (\prod_{k=1}^p x_{i_k} - \prod_{k=1}^p x_{j_k}) + \prod_{k=1}^p x_{j_k} (\prod_{k=p+1}^q x_{i_k} - \prod_{k=p+1}^q x_{j_k}) \\ &= f_{\Gamma'} \prod_{k=p+1}^q x_{i_k} + \prod_{k=1}^p x_{j_k} (\prod_{k=p+1}^q x_{i_k} - \prod_{k=p+1}^q x_{j_k}). \end{aligned}$$

Se sigue que el binomio f pertenece a I'_G . Por lo tanto, $I_G = I_{G'}$ como se quería. $\square$

Según el teorema anterior, podemos identificar los ciclos pares del grafo K_4 en los subíndices del ideal tórico, es así como $\Gamma_1 = (e_{(2,3)}, e_{(1,4)}, e_{(2,4)}, e_{(1,3)})$ y $\Gamma_2 = (e_{(1,2)}, e_{(3,4)}, e_{(2,4)}, e_{(1,3)})$ son los dos ciclos pares del grafo, según la configuración de vértices escogida.

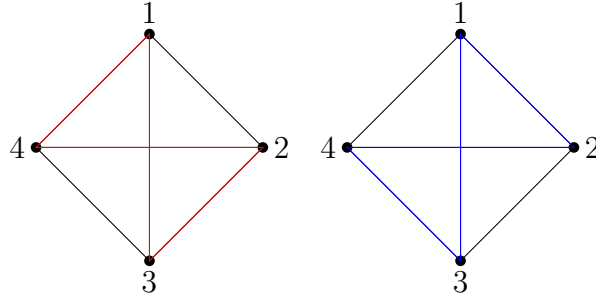


Figura 4.1: Ciclos Γ_1 y Γ_2 en K_4

4.0.2. Complejos simpliciales de K_4 y K_5

Dado que el grafo K_4 cuenta con tres ideales iniciales monomiales libres de cuadrados, cada uno de ellos define un ideal de Stanley Reisner. Cabe aclarar que el radical de dichos ideales son ellos mismos.

Tómese como M el segundo ideal inicial $M = (e_{1,2} \cdot e_{3,4}, e_{2,3} \cdot e_{1,4})$, luego.

```
i1 : LoadPackage "SimplicialComplexes"
```

```
i2 : E = QQ[e(1,2), e(2,3), e(3,4), e(1,4), e(2,4), e(1,3)]; -- Anillo de aristas
```

i3 : M = monomialIdeal (e_(2,3)e_(1,4), e_(1,2)e_(3,4))

o3 : MonomialIdeal of E

i4 : simplicialComplex(M)

o4 = |e_(3,4)e_(1,4)e_(2,4)e_(1,3) e_(1,2)e_(1,4)e_(2,4)e_(1,3) e_(2,3)e_(3,4)e_(2,4)e_(1,3) e_(1,2)e_(2,3)e_(2,4)e_(1,3)|

Encontrándose el complejo de Stanley Reisner de este primer ideal monomial libre de cuadrados.

Recuerde que un monomio $\mathbf{u}^{\mathbf{a}}$ en un anillo de polinomios S es llamado **libre de cuadrados** si el exponente del vector $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es libre de cuadrados, esto significa que $0 \leq a_i \leq 1$ para $i = 1, \dots, n$.

Análogamente se encuentran los complejos de los otros ideales, estos son:

$$|e_{(2,3)}e_{(3,4)}e_{(1,4)}e_{(1,3)}, e_{(1,2)}e_{(2,3)}e_{(1,4)}e_{(1,3)}, e_{(2,3)}e_{(3,4)}e_{(1,4)}e_{(2,4)}, e_{(1,2)}e_{(2,3)}e_{(1,4)}e_{(2,4)}|,$$

$$|e_{(1,2)}e_{(3,4)}e_{(1,4)}e_{(1,3)}, e_{(1,2)}e_{(2,3)}e_{(3,4)}e_{(1,3)}, e_{(1,2)}e_{(3,4)}e_{(1,4)}e_{(2,4)}, e_{(1,2)}e_{(2,3)}e_{(3,4)}e_{(2,4)}|.$$

Dado que cada arista del grafo ahora representa un vértice en el complejo asociado, podemos estudiar el complejo y su grafo asociado por medio de invariantes combinatorias.

Definición 4.1. El **f-vector** de un politopo d -dimensional P es una secuencia de enteros $(f_0, \dots, f_{d-i})$, donde la componente en la posición i es el número de caras i -dimensionales de P .

Llámesese entonces $fvector_1, fvector_2, fvector_3$ a los f-vectores que corresponden a cada complejo simplicial.

Usando el paquete “SimplicialComplex” junto a un loop iterativo, se calculan uno a uno dichos vectores obteniendo $fvector_1 = fvector_2 = fvector_3 = (1, 6, 13, 12, 4)$; esto quiere decir que los tres complejos simpliciales tienen una cara 0-dimensional, seis caras 1-dimensionales, trece 2-dimensionales, doce 3-dimensionales y cuatro caras 4-dimensionales. Estas últimas también son llamadas facetas o en inglés “facets”.

Para el caso de el grafo K_5 tenemos lo siguiente:

```

i1 : LoadPackage "SimplicialComplexes"

i2 : LoadPackage "StatePolytope"

i3 : E = QQ[e(1,2), e(1,3), e(1,4), e(1,5), e(2,3), e(2,4), e(2,5), e(3,4), e(3,5), e(4,5) ]; -- Anillo de aristas

i4 : R = QQ[x1, x2, x3, x4, x5]; -- Anillo de vertices

i5 : L = {x1*x2, x1*x3, x1*x4, x1*x5, x2*x3, x2*x4, x2*x5, x3*x4, x3*x5, x4*x5};
-- Imagen del homomorfismo

i6 : h = map(R, E, L)

i7 : I = ker h

i8 : In = initialIdeals(I)

i9 : for i in In list(monomialIdeal(i))

i10 : for i in oo list(simplicialComplex(i));-- Encuentra los complejos simpliciales

i11 : for i in oo list(fVector(i));-- Encuentra los f vectores

```

Como resultado se obtienen 102 ideales iniciales y complejos simpliciales. En cuanto a sus f-vectores, todos coinciden en:

$$f - vector_5 = (1, 10, 35, 55, 40, 11)$$

Por otra parte, se observa una particularidad en los ideales iniciales, pues existen ideales que cuentan con un grado mayor en el último término como el casos del ideal número 95:

```

monomialIdeal(e(1,4) · e(2,3), e(1,5) · e(2,3), e(1,5) · e(2,4), e(1,2) · e(3,4), e(1,5) · e(3,4), e(1,2) · e(3,5), e(1,4) ·
e(3,5), e(2,4) · e(3,5), e(1,2) · e(4,5), e(2,3) · e(4,5), e(1,3) · e(2,4) · e(4,5)).

```

Con este hecho surge las duda de si ¿existen más de dos clases de ideales iniciales con respecto a la acción del grupo S_5 ?

4.0.3. Vectores de peso

Dado el ideal tórico I_{k_4} y sus ideales iniciales, podemos hallar los vectores $\mathbf{u}$ como la configuración de puntos que se deducen de los generadores del ideal tórico.

$$I_{k_4} = \langle e_{2,3}e_{1,4} - e_{2,4}e_{1,3}, e_{1,2}e_{3,4} - e_{2,4}e_{1,3} \rangle$$

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, 1, -1, -1) \text{ y } \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0, -1, 1).$$

El kernel de la matriz conformada por dichos vectores en $\mathbb{R}^6$, es la configuración de puntos:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 4.2: Matriz cuyas columnas generan el kernel de la matriz con filas $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$

Teniendo en cuenta el ideal inicial $E_1 = \langle e_{(2,3)}e_{(1,4)}, e_{(1,2)}e_{(3,4)} \rangle$ podemos observar que un vector que lo induce es $\omega_1 = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$. El vector de peso está directamente relacionado con el orden de los puntos, en este caso, el orden corresponde a la organización de las aristas en el anillo $\mathbb{Q}[e_{1,2}, e_{2,3}, e_{3,4}, e_{1,4}, e_{2,4}, e_{1,3}]$. Análogamente, los vectores de peso de los ideales iniciales $E_2 = \langle e_{(1,2)}e_{(3,4)}, e_{(2,4)}e_{(1,3)} \rangle$ y $E_3 = \langle e_{(2,3)}e_{(1,4)}, e_{(2,4)}e_{(1,3)} \rangle$ son $\omega_2 = (1, 0, 1, 0, 1, 1)$ y $\omega_3 = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$ respectivamente.

Con ánimos de realizar una representación gráfica de la configuración de puntos dada por la matriz N en la figura 4.2, observemos que la suma de las dos últimas columnas (de izquierda a derecha) dan como resultado el vector unitario, de manera que podemos considerar la siguiente transformación.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c_3 + c_4 \rightarrow c_1$$

Llámesese A a la matriz traspuesta $N^T = A$. Obtenemos una configuración que vive en el subespacio $x_1 = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación agregamos cada uno de los vectores de peso para hacer el levantamiento de la configuración de puntos.

$$A^{\omega_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma análoga se obtienen las matrices A^{ω_2} y A^{ω_3} .

$$A^{\omega_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\omega_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una visualización del levantamiento en A^{ω_1} se puede ver en la figura.

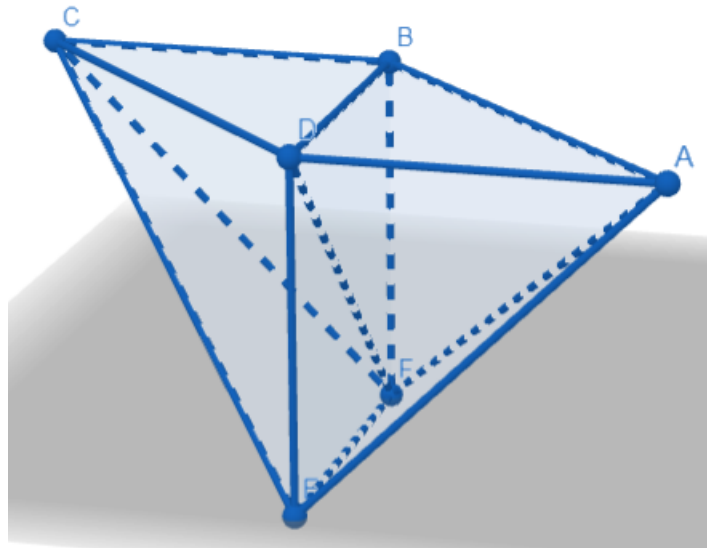


Figura 4.3: Triangulación regular A^{ω_1}

Donde se forman los 4 simplejos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1. Resultados

En esta sección, presentamos un nuevo resultado que aporta a la comprensión de los ideales tóricos que se estudian en la sección inmediatamente anterior. Este lema surge a partir de la observación del comportamiento invariante de dichos ideales y proporciona una propiedad de los ideales tóricos bajo la acción del grupo simétrico que hasta ahora no ha sido reportada en la literatura investigada para este trabajo. A continuación, enunciamos el lema y procedemos a su demostración.

Lema 4.1. Sea G un grafo con vértices en $[n]$ y sea $S_m \leq S_n$, con S_n el grupo simétrico. Si G es invariante bajo la acción del grupo S_m , entonces el ideal tórico también es invariante bajo la acción del grupo S_m .

Demostración. Si el grafo es invariante bajo la acción del grupo S_m , significa que para cualquier permutación en sus vértices, el conjunto de aristas no cambia. Si $\sigma \in S_m$ es una permutación, entonces para cada arista $e = \{i_k, i_l\}$ con $k, l \in [n]$ en $E(G)$, $\sigma(e)$ está también en $E(G)$.

Por lo tanto, cada ciclo $\Gamma = (\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{q-1}, i_0\})$, con $i_k \neq i_l$ para todo $0 \leq k < l \leq q-1$, $\sigma(\Gamma)$ también es un ciclo del grafo. Luego, la permutación σ manda el generador asociado al ciclo Γ , como se muestra en el Teorema 4.2, al generador asociado $\sigma(\Gamma)$.

Por consecuencia, el ideal tórico es invariante bajo la acción del grupo. $\square$

El estudio de los ejemplos particulares de los grafos K_4 y K_5 nos permitió encontrar características algebraicas que ponemos en detalle a continuación:

Las órbitas de los ideales iniciales de los ideales tóricos asociados a los grafos K_4 y K_5 dan cuenta de un comportamiento posiblemente dependiente de la cantidad de vértices que se toman en la configuración de puntos. Para el caso de K_4 todos los ideales obtenidos bajo la acción del grupo simétrico S_4 son combinación o pertenecen a una de las órbitas de los ideales iniciales. La particularidad del caso K_5 es que la acción del grupo simétrico S_5 sobre los ideales iniciales, genera tres tipos de ideales, de los 102 obtenidos traemos a colación uno de cada tipo.

$$ideal_2 = (e_{(1,4)} \cdot e_{(2,5)}, e_{(1,3)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(2,4)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(1,4)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(3,4)}, e_{(2,3)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,4)} \cdot e_{(2,3)}, e_{(1,5)} \cdot e_{(2,3)}),$$

$$ideal_{94} = (e_{(1,5)} \cdot e_{(3,4)}, e_{(1,3)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,3)} \cdot e_{(2,4)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(3,4)}, e_{(1,5)} \cdot e_{(2,4)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(2,4)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(2,3)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,5)} \cdot e_{(2,3)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(1,4)} \cdot e_{(2,3)} \cdot e_{(3,5)}),$$

$$ideal_{100} = (e_{(1,2)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,2)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(2,4)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(1,5)} \cdot e_{(2,4)}, e_{(1,3)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,3)} \cdot e_{(2,5)}, e_{(1,3)} \cdot e_{(2,4)}, e_{(2,3)} \cdot e_{(4,5)}, e_{(1,4)} \cdot e_{(3,5)}, e_{(1,4)} \cdot e_{(2,3)}).$$

El $ideal_2$ es un ideal de grado 2 y es generado por uno de los ideales iniciales, es decir, este ideal pertenece a la órbita, bajo la acción del grupo simétrico, de uno de ellos. El $ideal_{94}$ es un ideal de grado 3 que no puede ser generado por ninguno de los ideales iniciales ya que

estos son de grado 2. Por último, el $ideal_{100}$ es un ideal de grado dos pero no pertenece a ninguna de las órbitas de los ideales iniciales. En otras palabras, hay dos órbitas con ideales generados en grado 2 y una órbita de los ideales generados en grado dos y tres.

Observación 4.2. Entiéndase como grado de un ideal monomial la cantidad mayor de factores que tienen sus generadores. Entonces el $ideal_{94}$ es de grado 3 por el generador $e_{(1,4)} \cdot e_{(2,3)} \cdot e_{(3,5)}$.

Observación 4.3. Para el caso de K_5 hay 12 ideales en la órbita de $ideal_2$, 30 en la órbita de $ideal_{94}$ y 60 en la órbita de $ideal_{100}$. Nótese que $12 + 30 + 60 = 102$ lo que nos asegura la existencia de 3 órbitas.

	K_4	K_5
No. ideales iniciales	3	10
No. de órbitas bajo S_4 y S_5	1	3
No. de ideales bajo S_4 y S_5	24	102

Tabla 4.1: Tabla comparativa de ejemplos K_4 y K_5

En este trabajo, hemos presentado ejemplos ilustrativos para apoyar y clarificar los conceptos discutidos a lo largo del documento. Es importante señalar que los ejemplos de los grafos K-completos son de la autora. Estos ejemplos han sido cuidadosamente abordados para aplicar el Teorema de Sturmfels 1.1 de una forma computacional para así facilitar su comprensión práctica y visualizar la correspondencia en los grafos escogidos.

Para aquellos interesados en explorar estos ejemplos con mayor profundidad, así como en acceder a los cálculos y otros recursos adicionales, se ha puesto a disposición un repositorio en GitHub CataQM. Este repositorio contiene todo el material desarrollado durante la elaboración de este trabajo, incluyendo scripts, datos, y cualquier otra herramienta utilizada para generar los resultados presentados.

Finalmente, este trabajo ha presentado estos ejemplos de la aplicación en unos grafos específicos dejando la extensión de estos resultados a grafos K-completos con un mayor número de vértices como un área de investigación abierta y de gran interés.

En particular, se sugiere que futuras investigaciones aborden la generalización de las técnicas y resultados aquí presentados a familias más grandes de grafos. Un posible enfoque podría ser la caracterización exhaustiva de las órbitas en estos grafos cuando el número de vértices aumenta, explorando patrones y propiedades que emergen en estructuras más complejas.

De esta manera, el trabajo actual no solo contribuye al conocimiento existente, sino que también establece un punto de partida para el desarrollo de nuevos estudios que profundicen en la teoría de grafos y su comportamiento bajo diversas transformaciones y simetrías. Queda así abierta la puerta para que futuros trabajos continúen con la exploración y extensión de los resultados presentados.

Bibliografía

- [1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea y M. Sweedler, "Ideals, varieties, and algorithms," *American Mathematical Monthly*, vol. 101, n.º 6, págs. 582-586, 1994.
- [2] D. S. Dummit y R. M. Foote, *Abstract algebra*. Wiley Hoboken, 2004, vol. 3.
- [3] C. A. Francisco, J. Mermin y J. Schweig, "A survey of Stanley–Reisner theory," en *Connections between algebra, combinatorics, and geometry*, Springer, 2014, págs. 209-234.
- [4] J. Herzog, T. Hibi y Herzog, *Monomial ideals*. Springer, 2011.
- [5] J. Herzog, T. Hibi y H. Ohsugi, *Binomial ideals*. Springer, 2018, vol. 279.
- [6] G. W. Leibniz, "Dissertatio de arte combinatoria (1666)," *Die philosophische Schriften. Berlin*, págs. 27-102, 1880.
- [7] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.
- [8] L. Puig, "Componentes de una historia del álgebra," *El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Departament de Didáctica de la matemática*, págs. 109-131, 1998.
- [9] B. Sturmfels, "Gröbner bases of toric varieties," *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, vol. 43, n.º 2, págs. 249-261, 1991.
- [10] R. R. Thomas, *Lectures in geometric combinatorics*. American Mathematical Soc., 2006, vol. 33.