



Cadenas de Markov en una analogía uno dimensional de las figuras de Chladni

Cristian Felipe Correa Rozo

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Cali, Colombia
Año 2017

Cadenas de Markov en una analogía uno dimensional de las figuras de Chladni

Cristian Felipe Correa Roza

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director:
Dr.rer.nat Jaime Arango

Universidad del Valle
Facultad Ciencias, Departamento de Matemáticas
Cali, Colombia
2017

Dedicatoria

Esto va dedicado a ti, que me enseñaste a amar, a valorar cada momento de mi vida, irónicamente te convertiste en mi motor para continuar mi camino, hoy eres la fuerza que me ayuda a levantarme cada día, gracias mi hermosa hermana por cada momento, por cada instante de tenerte a mi lado, porque sin ti nada sería posible, espero pronto volverte a ver y estar a tu lado, por esta razón esto va en tú honor Sandra Julieth Correa.

El Amor vive por siempre.

Agradecimientos

Presento mi gratitud al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por el apoyo institucional.

Igualmente doy gracias al profesor JAIME ARANGO por el apoyo y acompañamiento en el desarrollo de este proyecto.

Presento mi gratitud a mi familia por estar siempre presente, a mis padres, hermanos y especialmente a mi novia KATERIN SEMANATE, que estuvo presente en todo este proceso.

Doy Gracias a Dios por darme fuerzas para seguir a pesar de todas las adversidades.

Agradezco de ante mano a mi evaluador y a los jurados por tomarse el tiempo de leer este documento. Agradezco a mis compañeros y amigos que siempre me animaron a continuar y a todos aquellos que se tomen la molestia de leer este proyecto.

Resumen

En este documento se presentará un modelo estocástico que corresponde a una analogía unidimensional de las figuras de Chladni. La analogía consiste en asociar los puntos nodales de una cuerda con las líneas nodales formadas por la placa en vibración. Los nodos dependerán de los modos de vibración de la cuerda. El modelo está basado en cadenas de Markov homogéneas de tiempo discreto que modelan las posiciones de las partículas en movimiento. Estas posiciones están dadas por la discretización de un intervalo que representa la cuerda en reposo. Se mostrarán experimentos numéricos que sugieren la convergencia de las partículas a los puntos nodales de la cuerda. Es decir, la trayectoria de las partículas tenderá a los puntos nodales. Precisamente, en los puntos nodales no hay movimiento de la cuerda. Los resultados experimentales y la simulación estocástica se tendrán en cuenta en este modelo con el fin de que sirva como base para proponer un modelo estocástico dos dimensional para las figuras de Chladni, el cual se planteará en este documento.

Palabras clave: Figuras de Chladni, procesos estocásticos, cadenas de Markov, líneas nodales, puntos nodales, modos de vibración, modelo, placa, cuerda.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1 Introducción	2
2 Figuras de Chladni	5
2.1 Antecedentes	5
2.2 Formación de las figuras	7
2.3 Problema a resolver	9
3 Preliminares	12
3.1 Procesos estocásticos	12
3.2 Cadenas de Markov	14
3.3 Matriz de transición	16
3.4 Ecuación de Chapman-Kolmogorov	17
3.5 Distribución inicial	18
3.6 Comunicación de estados	20
3.7 Período	21
3.8 Recurrencia y transitoriedad	22
3.9 Evolución de distribuciones	23
3.10 Distribuciones estacionarias	24
3.11 Distribución límite	24
4 Un modelo con cadenas de Markov	27
4.1 Planteamiento del problema	27
4.2 Modelo	28
4.2.1 Supuestos del modelo	29
4.2.2 Resultados obtenidos	33
5 Modelo para las figuras de Chladni	43
5.1 Planteamiento del Modelo dos dimensional	43

6 Conclusiones y Perspectivas	46
6.1 Conclusiones	46
6.2 Perspectivas	48
Bibliografía	49

1 Introducción

Es sorprendente pensar que muchos sonidos que escuchamos siguen un patrón geométrico definido, como si fueran representados por figuras. Se preguntarán ¿Cómo sucede? Pues bien, pensemos en patrones geométricos formados por una fina capa de granos de arena depositados sobre una placa de metal cuadrada, vibrando con frecuencias diferentes. Si se obtiene esto, obtendremos en cierto sentido, una representación de los sonidos emitidos.

En el siglo XIX, Ernst Chladni fascinó la comunidad científica al mostrar un singular experimento. Este consistió en frotar con el arco de un violín una placa metálica cuadrada de unos 15 cm de lado, la cual se sostenía horizontalmente con las yemas de los dedos y en la que previamente se había esparcido arena finamente granulada.

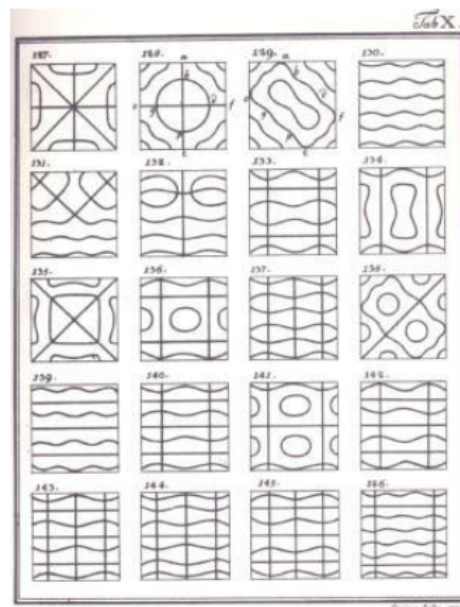


Figura 1-1: Figuras de Chladni en una placa con borde libre tal cual las dibujó el mismo Chladni en 1802 para su libro Die Akustik [4]

Dependiendo del ángulo que formaba el arco con la placa y de la posición de los dedos para sostenerla, la arena saltaba sobre la placa, debido a la vibraciones provocadas por el arco,

formando así figuras geométricas definidas. El lector puede darse cuenta del experimento mirando la ilustración que se muestran en la figura 1-1, hecha por el mismo Chladni en su libro *Die Akustik* [4], publicado en 1802.

El experimento de Chladni logro cierto reconocimiento debido al interés que mostró el emperador Napoleón Bonaparte, quien posiblemente fue motivado por Laplace, ofreció un premio de tres mil francos al que fuera capaz de explicar el fenómeno (véase [11] y [13]). En 1817 la matemática francesa Sophie Germain (ayudada por Lagrange) encontró la ecuación diferencial que explica el fenómeno, ganando así el premio otorgado por Napoleón. Sin embargo, su trabajo tenía errores en lo referente a las condiciones de contorno. En 1850 Gustav Kirchoff señaló este hecho y resolvió el problema para un disco con borde libre utilizando valores propios. La ecuación diferencial para una placa rectangular no fue planteada hasta 1909 por Walter Ritz.

Actualmente, son muchos los modelos que explican la formación de las figuras e incluso se ha replicado varios experimentos para recrear este fenómeno, los cuales van desde el uso de un arco de violín y una placa cuadrada de acero hasta la utilización de equipos electrónicos como generadores de frecuencia complementado con amplificadores, parlantes y una delgada placa de metal. Lo más importante es ser capaz de modelar el comportamiento de cada grano de arena; como su caminata por toda la placa, el lugar al que puede desplazarse, entre otros, el cual depende explícitamente de la frecuencia del sonido (perturbación) aplicada sobre la placa.

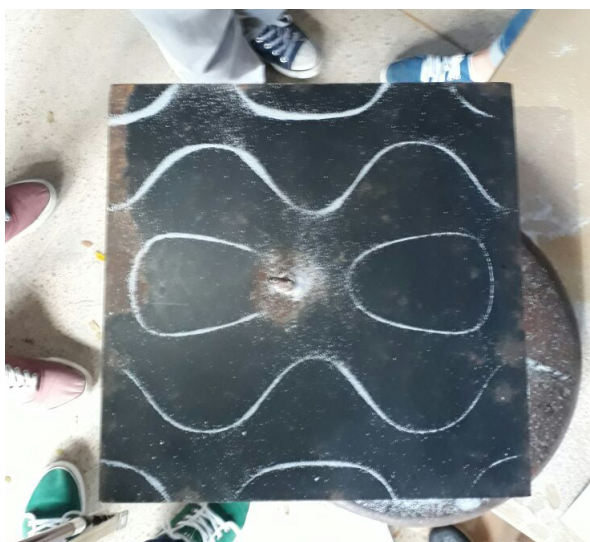


Figura 1-2: Figuras de Chladni en una placa con borde libre. Esta fotografía se tomó en el evento Carpa de Melquiades, llevado a cabo el trece de febrero de 2017 en el edificio de 342 de la Universidad del Valle.

Como se observa en la figura **1-2**, podemos ver el reacomodamiento de la arena al excitar la placa con el arco de un violín. La observación de Chladni nos muestra que las partículas de arena se mueven (con saltos) en todas las direcciones posibles.

El experimento de Chladni corresponde principalmente al fenómeno de la resonancia, pues cuando la frecuencia de la fuerza de excitación producida por el arco de violín coincide con una de las frecuencias naturales de la placa, esta comienza a vibrar y así provoca los saltos de los granos de arena. Esencialmente, los patrones formados por los granos de arena, son conocidos como las figuras de Chladni, estas corresponden al conjunto nodal del modo de vibración de la placa. Denotaremos a C_φ como el conjunto de los modos de vibración φ de la superficie de la placa en contacto Ω , tal que:

$$C_\varphi = \{x \in \overline{\Omega} : \varphi(x) = 0\}$$

En este documento se planteará un modelo estocástico que tiene en cuenta el movimiento de las partículas cuando la fuerza de excitación coincide con una de las frecuencias naturales de la placa. Para ello, se considerará una analogía unidimensional del problema, esta analogía consiste en el experimento mental de hacer vibrar una varilla muy delgada (cuerda), con extremos fijos, sobre la cual se esparce uniformemente una capa fina de arena. A la postre, las partículas de arena tienden a agruparse en ciertos puntos conocidos como nodos; la ubicación de estos nodos dependen de la frecuencia de vibración. En el trabajo se propone una cadena de Markov homogénea de tiempo discreto, con un número finito de estados, para modelar el movimiento de una tal partícula. No obstante, el movimiento de cada partícula converge (en algún sentido) a una configuración determinista que coincide precisamente con las figuras de Chladni en la placa y a los puntos nodales en la varilla muy delgada (cuerda). Se obtendrá simulaciones numéricas que se expondrán en este trabajo, estas fueron hechas con el software *Mathematica* ([16]). Así el principal resultado de este trabajo establece que:

Dada una cadena de Markov homogénea de tiempo discreto $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cual corresponde a la posición de las partículas a tiempo n , converge cuando n tiende a infinito a los puntos nodales de la cuerda, es decir, la trayectoria de las partículas tenderán a irse a cualquiera de los puntos donde la cuerda no vibre. En este documento se considerará que las partículas puedan salirse del sistema, teniendo esta consideración en cuenta, se podrá calcular la proporción de partículas que salen del sistema y las que convergen a los puntos nodales. En resumen, el principal objetivo será proponer un modelo estocástico en una dimensión usando cadenas de Markov homogéneas de tiempo discreto, el cual corresponde a una analogía de las figuras de Chladni. Ésta analogía estará representada por una varilla muy delgada (cuerda) en vibración. Este modelo será desarrollado por medio de la experimentación numérica, gracias al software *Mathematica* [16], con el fin de poder entender el fenómeno y así poder plantear este modelo en dos dimensiones, el cual corresponderá a las figuras de Chladni.

2 Figuras de Chladni

Este capítulo, se centrará en los conceptos principales para la formación de las figuras de Chladni, desde los inicios hasta las ecuaciones que gobiernan a este fenómeno. El interés principal de este capítulo será mostrar el comportamiento de cada partícula al ser perturbada por las vibraciones de la placa. Para ello necesitaremos entender de la manera más precisa posible como se forman las figuras, lo cual será explicado en la siguiente sección.

2.1. Antecedentes

Uno de los conceptos más importantes, para poder entender la formación de las figuras de Chladni, son los modos de vibración. Estos modos los adopta la placa cuando se genera la perturbación con el arco de violín. Las vibraciones de la placa se modelan gracias a la superposición de un número infinito, pero numerable, de funciones que se llaman modos de vibración. Para efectos prácticos de este documento serán denotadas por

$$\varphi_m = \varphi_m(x, y), \text{ con } m = 1, 2, 3, \dots$$

Los modos dependen de la geometría de la placa así como de las condiciones de contorno de la vibración. Las figuras de Chladni resultan ser las curvas nodales (líneas nodales) de los modos. Es decir, las curvas descritas por $\varphi_m(x, y) = 0$.

Como el lector puede apreciar que, se acaba de dar una pequeña introducción sobre la formación figuras de Chladni, es decir, nos adelantamos un poco a los hechos. A continuación se hablará de la historia sobre las soluciones planteadas por varios científicos de la época a dicho fenómeno.

El experimento de Chladni llamó la atención de los científicos en su momento. Pronto fue claro que si $u(t, x, y)$ representaba la deflexión vertical en el tiempo t del punto de la superficie media Ω de la placa, (identificado con abscisa y ordenada x y y respectivamente), y si denotamos con

$$C(t) = \{(x, y) \in \Omega : u(t, x, y) = 0\} \quad (2-1)$$

entonces, ajustando de manera correcta los movimientos del arco de violín, las figuras corresponderían a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$$

La pregunta natural que surge es ¿Qué ecuación representa la función u ? Esta misma pregunta se la hicieron muchos científicos del momento, incluso como se dijo anteriormente Napoleón Bonaparte ofreció un premio a quien explicará este fenómeno, lo más probable es que estuviera influenciado por el Conde de Laplace, pero aún así, este era uno de los problemas más interesantes de la época.

Aunque Sophie Germain en 1817 (con la ayuda de Lagrange) fue la que se ganó el premio, su trabajo tenía problemas de contorno. Los científicos para ese momento aún no tenían las explicaciones de las figuras de Chladni de manera exacta, hasta que Gustav Kirchhoff publicara en 1850 uno de los artículos más influyentes en la teoría de la elasticidad (véase [6]). En este trabajo Kirchhoff, no solo señala los errores y las contradicciones del trabajo de Sophie Germain, sino que deduce también las ecuaciones generales, con las debidas condiciones de contorno, que gobiernan la deformación de placas elásticas.

Supongamos que la placa es homogénea con densidad (masa por unidad de área) ρ y que la placa se encuentra bajo el influjo de una fuerza externa F . El desplazamiento vertical en el tiempo t , $u(t, x, y)$, de un punto $(x, y) \in \Omega$, está gobernado por la solución de

$$\begin{aligned} \rho h u_{tt} + D \Delta^2 u &= F(t, x, y), \quad \text{en } \mathbb{R} \times \Omega, \\ u &= p, \quad \text{en } \{t = 0\} \times \Omega, \\ u_t &= v, \quad \text{en } \{t = 0\} \times \Omega, \end{aligned} \tag{2-2}$$

donde Δ es el operador de Laplace, Δ^2 es el operador biarmónico (la composición del operador de Laplace consigo mismos), D (rigidez flexural de la placa) es una constante positiva que depende del material de la placa y de su espesor h . $p = p(x, y)$ y $v = v(x, y)$ representan la posición y velocidad inicial respectivamente. El lector puede consultar el texto de S. Chkraverty, Capítulo 3, ecuaciones 3.117 y siguientes (véase [3]), para más detalles sobre los modelos matemáticos para placas.

La ecuación 2-2 debe perfeccionarse con las condiciones de contorno que dependen principalmente de la parte del borde que vibra libremente y la parte que está sujeta. Por esta razón tendremos dos casos posible que se presentarán a continuación.

Para el primer caso se considerará una placa con bordes firmemente sujetos, digamos que a una caja de resonancia con rigidez infinita, para estas condiciones de contorno las ecuaciones están dadas por

$$u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \partial\Omega \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \partial\Omega \tag{2-3}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección normal exterior al borde $\partial\Omega$. Como segundo caso se considerará una placa con borde libre, las condiciones de contorno se complican un poco.

Para el caso se tomará el experimento de Chladni en una placa cuadrada $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ con los bordes vibrando libremente, así se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x = \{-1, 1\}, \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad y = \{-1, 1\}. \quad (2-5)$$

donde μ es la razón de Poisson, que depende del material de la placa. Se supondrá que la zona de contacto entre el experimentador (las yemas de los dedos) y la placa es mínima de tal manera que la vibración sea libre.

2.2. Formación de las figuras

En esta sección se estudiará la solución de la ecuación 2-2, teniendo en cuenta la relación entre la teoría espectral y el método de separación de variables. Claramente, la variable temporal t puede separarse de las variables espaciales x y y con ayuda del problema de valores propios

$$\Delta^2 \varphi - \lambda \varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (2-6)$$

donde φ cumple con las condiciones de contorno tipo 2-3. El argumento siguiente también se pueden aplicar a condiciones de contorno del tipo 2-4. Pero hay problemas que no se pueden solucionar sin entrar en un que otro tecnicismos, gracias a que el problema 2-2 con la condición de contorno 2-4 no siempre tiene solución; y cuando la solución existe no es única. Para esta solución necesitamos el siguiente teorema, si el lector desea profundizar más en el problema de los valores propios puede consultar por ejemplo a ([1]).

Teorema 1. *Los valores propios λ de la ecuación 2-4 con la condición de borde 2-3 forman un subconjunto discreto de números reales positivos. Cada valor propio tiene multiplicidad geométrica finita y repitiéndolos de acuerdo con su multiplicidad se tiene*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \infty.$$

Más aún, existe una base orto-normal en $L^2(\Omega)$ de funciones propias $(\varphi_n)_n$, en donde cada φ_n satisface la ecuación 2-6 con $\lambda = \lambda_n$.

Las funciones propias $(\varphi_n)_n$ son justamente los modos de vibración que fueron mencionados en la sección anterior y además de esto forman una base orto-normal en $L^2(\Omega)$. Lo que viene a continuación es adaptado del artículo (ARANGO-ESCOBAR-REYES [5])

Si la fuerza externa F es una función lo suficientemente suave, se puede suponer que F admite la siguiente representación uniformemente convergente en $\mathbb{R} \times \overline{\Omega}$:

$$F(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n(x, y) \quad (2-7)$$

donde $(\varphi_n)_n$ es una de base de $L^2(\Omega)$ y los coeficientes $f_n = f_n(t)$ se suponen conocidos para todo $n = 1, \dots$. Ahora, para varias condiciones iniciales sobre p y v , el problema 2-2 y 2-3 tiene una única solución $u = u(t, x, y)$ cuya representación uniformemente convergente en $\mathbb{R} \times \overline{\Omega}$ es de la forma

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n(x, y) \quad (2-8)$$

Ahora las funciones coeficientes $a_n = a_n(t)$ se determinan de la siguiente manera. Reemplazando la ecuación 2-8 en el problema 2-2, se obtiene después de algunos cálculos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n}{dt^2} + c^2 \lambda_n a_n - f_n(t) \right) \varphi_n(x, y), \quad (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

por lo tanto podemos inferir que

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n = f_n(t), \quad \omega_n^2 = c^2 \lambda_n, \quad (2-9)$$

junto con las condiciones iniciales

$$a(0) = \langle p, \varphi_n \rangle, \quad a'(0) = \langle v, \varphi_n \rangle \quad (2-10)$$

donde $\langle, \rangle$ me representan el producto interno en $L^2(\Omega)$.

Gracias a todo lo anterior, se está en la capacidad de explicar a grandes rasgos las figuras de Chladni. Para esto supongamos que el forzamiento externo es de la siguiente manera

$$F(t, x, y) = \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n(x, y)$$

donde los coeficientes f_n se tomarán como constantes conocidas. Supondremos también que las condiciones iniciales p y v de 2-2 son nulas, por consiguiente se tiene que $a(0) = 0$ y $a'(0) = 0$ en 2-10. Esos supuestos adicionales simplifican 2-9 y 2-10. Todo consiste en resolver con condiciones iniciales nulas el problema

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n = f_n \cos \omega t, \quad (2-11)$$

observe que el crecimiento en el tiempo de la solución a_n de 2-11 dependerá de si la frecuencia externa ω entra en resonancia con la frecuencia interna ω_n . Realizando un pequeño cálculo se tendrá que

$$a_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n \cos \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2} & \text{si } \omega_n^2 \neq \omega^2 \\ \frac{f_n t \sen \omega t}{2\omega} & \text{si } \omega_n^2 = \omega^2, \end{cases} \quad (2-12)$$

de 2-9 y del teorema 1 se deduce que existe a lo más una frecuencia interna, sea ω_m esa frecuencia, esta entrará en resonancia con la frecuencia externa ω . Por lo tanto, la solución $u(t, x, y)$ dada por la serie 2-8 será periódica con período $2\pi/\omega$. Más aún, esta serie tendrá como término dominante el coeficiente $c_m(t)$. Gracias a esto se obtiene lo siguiente

$$\frac{u(t, x, y)}{t} = \frac{f_n}{2\omega} \sen \omega t \varphi_n(x, y) + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

observe que, salvo valores del tiempo cercanos a $2n\pi/\omega$, $n = 1, \dots$, las curvas $C(t)$, para valores grandes de t , no son más que las curvas nodales de las soluciones φ del problema de valores propios 2-6.

2.3. Problema a resolver

Debido a que el lector ya posee cierto conocimiento sobre la formación de las figuras de Chladni entonces ya se puede abordar el objetivo principal de este documento. El objetivo principal es modelar el desplazamiento (por medio de saltos) de las partículas que interactúan con las vibraciones de una cuerda, con el fin de plantear un modelo dos dimensional para las figuras de Chladni y conjeturar el desplazamiento de las partículas que interactúan en este caso con la vibraciones de una placa cuadrada, provocadas por la perturbación de un arco de violín. Gracias a los preámbulos anteriores se conoce que las figuras se forman debido a que hay lugares de la placa donde no se produce vibración y justo es ahí donde se acumularán todas las partículas. El fundamento físico consiste en un fenómeno de resonancia.

Ahora bien para poder interpretar y entender mejor que es una línea nodal y las figuras de Chladni es necesario tratar una analogía unidimensional. Si tomamos una cuerda, la sujetamos por sus dos extremos (esta condición de contorno hace que las ondas sean estacionarias) y se da una sacudida en uno de los extremos de la cuerda, se verá cómo el movimiento se propaga de un extremo hasta el otro. Si en lugar de dar una sacudida se produce un movimiento de oscilación con una frecuencia constante adecuada en un extremo de la cuerda, conseguimos que se produzcan ondas viajeras en los dos sentidos posibles, estas interfieren

entre sí dando lugar a vientres, puntos de máxima interferencia constructiva; y a nodos, puntos de interferencia destructiva y vibración nula.

En la figura 2-1 se puede observar como se generan las ondas en una cuerda con distintos modos de vibración, esto muestra un fenómeno similar a la vibración de la placa para las figuras de Chladni, que es consecuente.

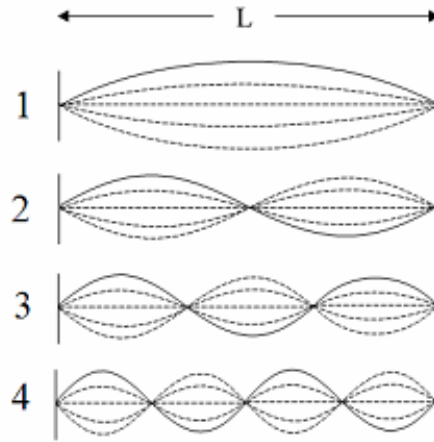


Figura 2-1: Ondas estacionarias en una cuerda para distintas frecuencias (tomada de <http://fisicanet2bach.es.tl/Ondas-estacionarias.htm>)

Este fenómeno es una perturbación propagándose en un medio unidimensional, por ende debe estar descrita por la siguiente ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-13)$$

cuya solución de 2-13 es:

$$u(t, x) = \text{sen } \omega t \text{ sen } m \pi x \quad (2-14)$$

Se considerará las funciones $\varphi_m = \text{sen } m \pi x$ como los modos de vibración del modelo análogo unidimensional.

En el caso de una placa se puede pensar que se tiene ondas que viajan en dos direcciones que corresponden con dos de los lados perpendiculares de la placa, si las ondas fueran por completo independientes tendríamos una serie de vientres y nodos en cada dirección de la placa. No obstante, la combinación de las ondas produce que se formen líneas nodales de vibración nula (en las que se acumula la sal) y zonas de máxima vibración (aquellas que están limpias). Al igual que en el caso de la cuerda tenemos ondas estacionarias, por estar confinadas entre los extremos de la placa, esta vez en dos dimensiones.

Debido a que idealizamos el sistema de estudio con el que interaccionan las ondas considerándolo bidimensional, las fórmulas que rigen el movimiento de éstas deberán escribirse

para dos dimensiones. Estas fórmulas pueden obtenerse a partir de la ecuación de onda, que es la misma para placas tanto rectangulares como circulares, por ejemplo, al ser las dos superficies bidimensionales.

La ecuación de onda en dos dimensiones corresponde a la expresión:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2-15)$$

cuya solución de 2-15 es:

$$u(t, x) = \cos \omega t \sin n \pi x \sin m \pi y, \quad (2-16)$$

mientras en la cuerda se tiene puntos nodales, en la placa se tienen lineal nodales y gracias a estas es que se forman las figuras. Por esta razón, dado que los fenómenos son similares se considerará el caso análogo unidimensional para este proyecto, observando que en ambos casos los nodos corresponden a $\varphi_m = 0$.

En este documento se busca presentar un modelo muy similar al fenómeno de las figuras de Chladni, el cual corresponde como se ha citado anteriormente al movimiento de una partícula por medio de una varilla muy delgada (cuerda) en vibración. Se espera que los puntos donde la cuerda no vibre o permanezca estática es donde se acumulen las partículas. Se supondrá para este modelo, que el movimiento de cada partícula es independiente entre sí, es decir, cuando se genere una perturbación en la cuerda el movimiento de una partícula no dependa de la otra entonces basta con conocer la probabilidad con la que una partícula cambia de estado para saber las del resto, así, se realizará una discretización de la cuerda para conocer los posibles estados de transición de las partículas.

Para poder desarrollar de manera adecuada lo antes visto, el lector debe tener ciertos conocimientos sobre las cadenas de Markov y los procesos estocásticos. Por esta razón necesitamos de unos preliminares que se tratarán en el siguiente capítulo.

3 Preliminares

Sin lugar a dudas el concepto central de este documento serán las cadenas de Markov, las cuales son de gran aplicabilidad en muchas disciplinas, pero para hablar de ellas y la aplicabilidad en las figuras de Chladni, se necesita un poco más de teoría y esta será la de los procesos estocástico. Este desarrollo teórico esta basado en el siguiente material bibliográfico ([9], [10], [12], [8], [7], [14] , [15]) ; si el lector desea profundizar más sobre lo presentado, puede consultar los libros antes citados.

3.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico puede interpretarse como la evolución de un fenómeno a través del tiempo, un ejemplo de ello son las cadenas de Markov. Para ser más precisos, considere un sistema que puede caracterizarse por estar en cualquier conjunto de estados previamente especificado. Suponga que el sistema el cual está estudiando, cambia de un estado a otro durante cierto periodo de tiempo de acuerdo con una cierta ley de movimiento, y sea X_t el estado del sistema a tiempo t . Si se considera que la evolución del sistema no es determinista, sino provocada por un cierto mecanismo aleatorio, entonces puede considerarse que X_t es una variable aleatoria para cada subíndice t . Esta conjunto de variables aleatorias se definen como un proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. Concretamente, la definición de proceso estocásticos tiene como base un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y puede enunciarse de las siguiente manera.

Definición 1. *Un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T llamado espacio paramétrico, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Un proceso estocástico, puede considerarse como una función de dos variables

$$X : T \times \Omega \rightarrow S$$

tal que a la pareja (t, ω) se le asigna el estado $X(t, \omega)$, también puede escribirse como $X_t(\omega)$. Para cada valor de $t \in T$, la función $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, de otro lado para cada $\omega \in \Omega$, el mapeo $t \rightarrow X_t(\omega)$ es llamado trayectoria. Es decir, a cada ω del espacio muestral le corresponde una trayectoria del proceso.

En resumen, para cada instante t tendremos una variable aleatoria distinta representada por $X_t(\omega)$, con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo. A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominarán estados, por lo que se puede tener un espacio de estados discreto y un espacio de estados continuo. Por otro lado, la variable tiempo puede ser de tipo discreto o de tipo continuo. En el caso del tiempo discreto se podría tomar como ejemplo, los cambios de estado que ocurren cada día, cada mes, cada año, etc.. En el caso del tiempo continuo, los cambios de estado se podrían realizar en cualquier instante de tiempo.

Por tanto, dependiendo de cómo sea el conjunto de subíndices T y el tipo de variable aleatoria dado por X_t se puede establecer la siguiente clasificación de los procesos estocásticos:

- Si el conjunto T es continuo, por ejemplo $\mathbb{R}^+$, se dirá que X_t es un proceso estocástico de parámetro continuo.
- Si por el contrario T es discreto, por ejemplo $\mathbb{N}$, se dirá que se encuentra frente a un proceso estocástico de parámetro discreto.
- Si para cada instante t la variable aleatoria X_t es de tipo continuo, se dirá que el proceso estocástico es de estado continuo.
- Si para cada instante t la variable aleatoria X_t es de tipo discreto, se dirá que el proceso estocástico es de estado discreto.

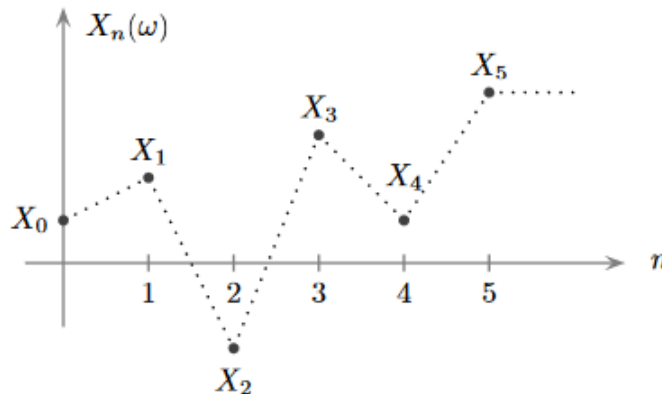


Figura 3-1: Proceso estocástico discreto

Observación 1. Cuando $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ corresponde a un espacio discreto el proceso estocástico puede ser denotado por $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Definición 2. Un proceso estocástico en el cual el tiempo se mueve en forma discreta y la variable aleatoria solo toma valores discretos en el espacio de estados lo denominaremos proceso estocástico discreto, como se muestra en la figura 3-1.

Definición 3. Un proceso estocástico en el cual los cambios de estado se producen en cualquier instante y la variable aleatoria toma valores dentro de un espacio continuo de estados lo denominaremos proceso estocástico continuo, como se muestra en la figura 3-2.

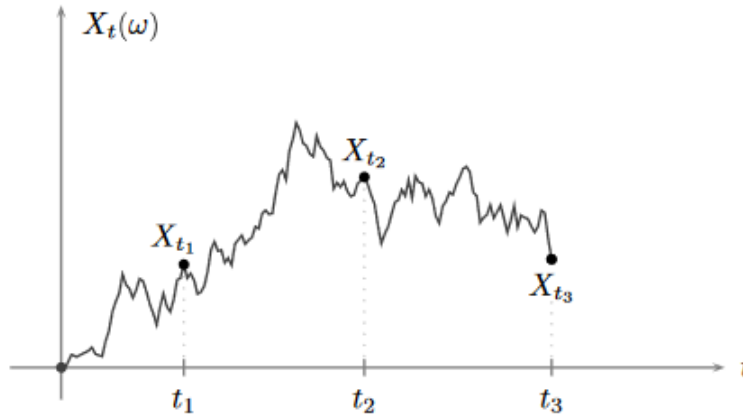


Figura 3-2: Proceso estocástico continuos

Ahora bien, con los anteriores preliminares se podrá definir lo que son las cadenas de Markov de tiempo discreto, debido a que se tomarán procesos estocásticos discretos. Se debe tener en cuenta que existen cadenas de Markov de tiempo continuo, pero para el objetivo de este documento solo se estudiarán las cadenas de Markov de tiempo discreto.

3.2. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov fueron introducidas por el matemático ruso Andrey Markov alrededor de 1905. Su intención era crear un modelo probabilístico para analizar la frecuencia con la que aparecen las vocales en poemas y textos literarios. El éxito del modelo propuesto por Markov radica en que es lo suficientemente complejo como para describir ciertas características no triviales de algunos sistemas, pero al mismo tiempo es lo suficientemente sencillo para ser analizado matemáticamente. Por esta razón forman una parte muy importante en los procesos estocásticos y la teoría de probabilidad, ya que poseen un sin número de aplicaciones tanto en fenómenos físicos como sociales. Existen diferentes tipos de cadenas

de Markov y este documento se enfocará sólo en el estudio de las cadenas homogéneas, ya que estas no dependen del tiempo y son las de interés para este modelo.

Existen diferentes procesos que se pueden modelar mediante una cadena de Markov y gracias a éstas se puede ver como cambia el modelo conforme avanza el tiempo, para esto primero se definirá lo que es un estado, así como un espacio de estados y posteriormente se dará la definición de cadena de Markov.

Definición 4. Sea X una variable aleatoria discreta y S un subconjunto de $\mathbb{R}$, sea $i \in S$ decimos que i es un estado, si la variable aleatoria X toma el valor de i , es decir, $P(X = i) > 0$ entonces el conjunto S es llamado el espacio de estados.

De la anterior definición se puede concluir que un estado es el posible valor que puede tomar la variable aleatoria X . Ahora bien, el espacio de estados son todos los posibles valores que tomará la variable aleatoria, en este caso se considerará un espacio de estados numerable, con el fin de que las variables aleatorias sean discretas. De esta manera se analizará la idea principal de este capítulo. La siguiente definición es de gran importancia y es una base fundamental para este documento.

Definición 5. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias y S un espacio de estados discreto tal que $i_0, i_1, i_2, \dots, i, j, \dots, i_k \in S$, si

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (3-1)$$

para todo $n \geq 0$ y para cualquier $i, j \in S$ entonces se dice que la sucesión $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, es una cadena de Markov.

Es importante resaltar que la ecuación 3-1 es conocida como la *propiedad Markoviana*, esta dice que la probabilidad de un evento futuro depende exclusivamente del evento presente más no del evento pasado, en pocas palabras, una cadena de Markov es un proceso sin memoria. Ahora que ya tenemos claro lo que es una cadena de Markov, podemos centrarnos en cadenas que serán objeto de nuestro estudio, los cual induce a la siguiente definición.

Definición 6. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados discreto S , decimos que esta sucesión, es una cadena de Markov homogénea, si

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \quad (i, j \in S) \quad (3-2)$$

En otras palabras, la definición 6-1 se refiere al hecho de que la cadena de Markov no dependa del tiempo, es decir, no depende de n . Una vez ya tenemos definido nuestro objeto de estudio, surge la necesidad de definir una función, la cual permita estudiar las cadenas de Markov de una manera más sencilla, esta es la llamada función de transición, que permite ver como evoluciona la cadena de Markov en el tiempo para diferentes estados.

Definición 7. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados S . Definimos la función p_{ij} como:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (i, j \in S) \quad (3-3)$$

donde p_{ij} es la función de transición del estado i al j .

Proposición 1. La función de transición $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ cumple con las siguientes propiedades:

1. $p_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in S$
2. $\sum_j p_{ij} = 1$

Se debe tener en cuenta que p_{ij} representa la probabilidad de transición de la cadena del estado i al estado j en un solo paso, además de esto, podemos anexar todas estas probabilidades en una matriz, la cual se denominará como, *la matriz de transición*, esta será denotada por $(p_{ij}) = \mathbf{P}$, en la siguiente sección se profundizará más en el tema.

3.3. Matriz de transición

Ahora que se tiene el concepto de lo que es la función de transición, buscaremos una forma aún más sencilla en la cual podamos interactuar con los estados, así se utilizarán conceptos del álgebra lineal para hacer esto posible.

Definición 8. Sean p_{ij} la función de transición de una cadena de Markov, diremos que p_{ij} será la ij -ésima entrada de la matriz $\mathbf{P}$, la cual llamaremos matriz de transición de la cadena de Markov.

Ejemplo 1. Ésta es la construcción de una matriz de transición $\mathbf{P}$ para una cierta cadena de Markov de $n + 1$ estados.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Observación 2. Como $\mathbf{P}$ está formada por cada una de las transiciones de la cadena, se puede afirmar que $\mathbf{P}$ es una matriz no negativa, y la suma de todas las entradas de una fila de la matriz es uno, esto es cierto por (1) y (2), respectivamente, de la Proposición 1.

Todo lo que se ha visto en esta parte de la teoría, habla de la probabilidad de transición de la cadena en un sólo paso, es normal preguntarse ¿Qué pasa con la cadena después de varios pasos? ó ¿Qué pasa con la cadena después de un largo periodo de tiempo? así esto motiva el desarrollo de la siguiente sección, con el fin de analizar la cadena después de un número determinado de pasos.

3.4. Ecuación de Chapman-Kolmogorov

En esta sección se observará que si desea conocer que pasa con la cadena después de un periodo de tiempo, bastará con tener la matriz de transición de un sólo paso y calcular las potencias de esta, ésto es posible gracias a las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov lo cual lleva a la siguiente definición

Definición 9. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, una cadena de Markov con p_{ij} la probabilidad de ir del estado i al estado j en un solo paso, se define la probabilidad de ir del estado i al j en m pasos, con $m > 1$, como:

$$p_{ij}^m = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

Es necesario aprender a calcular este tipo de probabilidades, es de gran utilidad y nos servirá para analizar de manera más precisa los cálculos después de un periodo largo de tiempo. Así por ejemplo, si deseamos saber que le ha pasado a la cadena después de dos pasos tendríamos que calcular $p_{ij}^2 = P(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$ de lo que se deriva el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Para calcular $p_{ij}^2 = P(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$, debemos llegar a que $X_{n+2} = j$ pero antes de eso X_{n+1} debe pasar por algún estado k por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{ij}^2 &= P(X_{n+2} = j \mid X_n = i) \\ &= \sum_k P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k \mid X_n = i) \\ &= \sum_k P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k, X_n = i) P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) \\ &= \sum_k p_{ik} p_{kj} \end{aligned}$$

Se puede observar que la última línea corresponde a la componte ij -ésima entrada de la matriz P^2 , de este tipo de observaciones nacen las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov* que estan representadas en la siguiente proposición

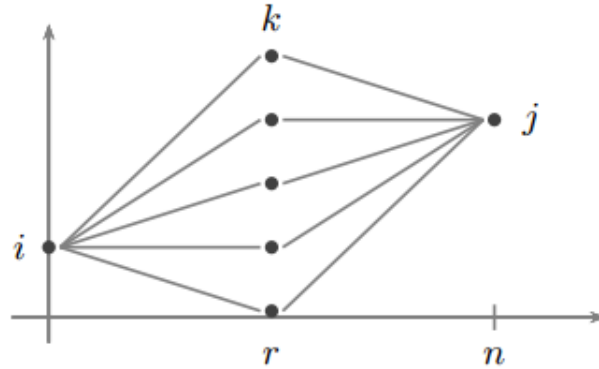


Figura 3-3: Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Proposición 2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ entonces la probabilidad de ir de i a j en $m + n$ pasos es

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_k p_{ik}^n p_{kj}^m \quad (3-4)$$

Para tener una idea más clara de esta demostración, se debe tener en cuenta la Figura 3-3 que básicamente ilustra el por qué es necesario ir de i a k y de k a j en cierta cantidad de pasos, esto da lugar al siguiente teorema.

Teorema 2. La probabilidad de transición de m pasos:

$$p_{ij}^m = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

es la m -ésima potencia de la matriz de transición P , es decir, $P^m = \underbrace{P \cdot \dots \cdot P}_{m \text{ veces}}$

En la siguiente sección se hablará de un concepto muy importante, el cual ayudará en gran medida a conocer más sobre la cadena de Markov, es decir, la cadena debe tener un punto de partida, un estado inicial, el cual será aleatorio, este concepto motiva la siguiente sección .

3.5. Distribución inicial

Puesto que ya se conoce en gran medida lo son las cadenas de Markov y sus estados, es normal preguntarse ¿Qué sucedería si el primer estado es aleatorio? Es decir, considerar la posibilidad de que el primer estado sea cualquier elemento del espacio de estados S , pero

primero se tendrá en cuenta lo siguiente:

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i, X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i) P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad (3-5)$$

en la ecuación 3-5 se puede ver que $p_{ij}^n = P(X_n = j \mid X_0 = i)$, si $P(X_0 = i) = q_i$ entonces

$$P(X_n = j) = \sum_i q_i p_{ij}^n. \quad (3-6)$$

en otras palabras, la ecuación 3-6 indica que multipliquemos por la izquierda la matriz de transición por las probabilidades iniciales, de aquí surge la siguiente definición

Definición 10. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov, se llamará *distribución inicial* al vector fila, cuyas entradas son las probabilidades de que la variable aleatoria comience en un estado y será denotada por π^0 , es decir:

$$\pi^0 = (q_0, q_1, \dots, q_k) \quad (3-7)$$

donde $0, 1, 2, \dots, k \in S$, $q_i = P(X_0 = i)$ y $\sum_i q_i = 1$.

Observación 3. Se debemos tener en cuenta, para que la operación de la ecuación 3-6 este bien definida, si el vector fila de distribución inicial tiene $k + 1$ entradas entonces la matriz de transición debe ser $k + 1 \times k + 1$, es decir, tenemos $k + 1$ estados en nuestra cadena, además consideraremos por comodidad que $q_i = \pi_i^0$.

Teniendo en cuenta la observación 3 se puede reescribir la ecuación 3-7 de la siguiente manera:

$$\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \dots, \pi_k^0)$$

así :

$$\pi^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \dots, \pi_k^n) \quad (3-8)$$

con $\pi_k^n \geq 0$, $\sum_k \pi_k^n = 1$. Lo que lleva a la siguiente relación:

$$\pi_j^n = P(X_n = j) = \sum_i \pi_i^0 p_{ij}^n \quad (3-9)$$

Es muy importante conocer el vector de distribución inicial de la cadena de Markov pero también lo es conocer muy bien todos los estados de la cadenas, es decir, saber a que estados se puede acceder partiendo de otro o a cuales no, cuales estados la cadena se visita más, esto será explicado en la siguiente sección.

3.6. Comunicación de estados

Las cadenas de Markov pueden estar compuestas por gran cantidad de estados, nos será de mucha utilidad poder clasificar estos estados, por esta razón, necesitamos la siguiente definición:

Definición 11. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov y S su conjunto de estados tal que $i, j \in S$, se dirá que j es accesible desde el estado i si $p_{ij}^n > 0$ para algún $n \geq 0$, de lo contrario se dirá que j no es accesible desde i .

Se dice que dos estados i y j se *comunican* si son accesibles entre sí, esto se denotará como $i \leftrightarrow j$. Tenga en cuenta que cualquier estado se comunica con sí mismo, ya que, por definición,

$$p_{ii}^0 = P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1$$

La relación de comunicación satisface las tres propiedades siguientes:

1. El estado i se comunica con el mismo para todo $i \geq 0$.
2. Si el estado i se comunica con j entonces el estado j se comunica con i .
3. Si el estado i se comunica con el estado j y el estado j se comunica con el estado k , entonces el estado i se comunica con el estado k .

Las propiedades (1) y (2) siguen inmediatamente a la definición de comunicación. Para probar (3) supongamos que i se comunica con j , y j se comunica con k . Así, existen enteros n y m tales que $p_{ij}^n > 0$ y $p_{jk}^m > 0$. Ahora por las ecuaciones de *ChapmanKolmogorov*, tenemos

$$p_{ik}^{n+m} = \sum_r p_{ir}^n p_{rk}^m \geq p_{ij}^n p_{jk}^m > 0,$$

por lo tanto, el estado k es accesible desde el estado i . De manera similar, podemos mostrar que el estado i es accesible desde el estado k . Así, los estados i y k se comunican.

Claramente la relación *comunicación* determina clases de equivalencia. Así dos estados que se comunican están en la misma clase. Es una consecuencia de (1), (2), y (3) que cualquier dos clases de estados son idénticas o disjuntas. En otras palabras, el concepto de comunicación divide el espacio de estado en una serie de clases de equivalencia, esto induce la siguiente definición:

Definición 12. Se dice que una cadena de Markov es *irreducible* si sólo hay una clase, es decir, si todos los estados se comunican entre sí.

Ejemplo 3. Consideremos la cadena de Markov que contenga tres estados 0, 1, 2 y que tenga la siguiente matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que es una cadena de Markov irreducible. Por ejemplo, es posible ir del estado 0 al estado 2 desde que

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

es decir, una forma de pasar del estado 0 al estado 2 es pasar del estado 0 al estado 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y luego pasar del estado 1 al estado 2 con probabilidad $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 4. Consideremos una cadena de Markov de cuatro estados 0, 1, 2, 3 y tenemos la siguiente matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las clases de esta cadena de Markov son $\{0, 1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$. Tengamos en cuenta que mientras estado 0 o 1 es accesible desde el estado 2, el inverso no es cierto. Dado que si llegamos al estado 3 no podremos salir de él, es decir, $p_{33} = 1$, puesto que esta cadena tiene varias clases de estado, no es irreducible. El estado 3 induce a la siguiente definición

Definición 13. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov y S su conjunto de estados discreto tal que $i, j \in S$, diremos que i es un estado absorbente, cuando una vez que se entra en él no se puede salir del mismo, es decir, $p_{ii} = 1$ y $p_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

En resumen, una cadena de Markov es irreducible si sólo existe una clase de comunicación, es decir, si la partición generada por la relación de comunicación es trivial.

3.7. Período

El período es un número entero no negativo que se calcula para cada estado de una cadena. Una interpretación de este número será mencionada más adelante y aparecerá también dentro de los enunciados generales sobre el comportamiento límite de cadenas de Markov.

Definición 14. El período de un estado i es un número entero no negativo denotado por $d(i)$, y definido de la siguiente manera:

$$d(i) = m.c.d.\{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\}$$

en donde *m.c.d.* significa máximo común divisor. Cuando $p_{ii}^n = 0$ para todo $n \geq 1$, se define $d(i) = 0$. En particular, se dice que un estado i es aperiódico si $d(i) = 1$. Cuando $d(i) = k$ con $k \geq 2$ se dice que i es periódico de período k .

En otras palabras, para calcular el periodo período de un estado i se considera el conjunto de números naturales n tales que $p_{ii}^n > 0$, se obtiene el entero más grande que divide a todos los elementos de este conjunto. Tal divisor máximo es el periodo del estado i .

3.8. Recurrencia y transitoriedad

Para cualquier estado i definamos a f_i como la probabilidad de que, comenzando en el estado i , el proceso volverá a entrar en el estado i . Con esto tenemos dos definiciones muy importantes para la clasificación de estados.

Definición 15. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov y S su conjunto de estados tal que $i \in S$, diremos que el estado i es recurrente si $f_i = 1$ y transitorio si $f_i < 1$.

Supongamos que el proceso comienza en el estado i e i es recurrente. Por lo tanto, con probabilidad 1, el proceso volverá a entrar en el estado i . Sin embargo, según la definición de una cadena de Markov, se deduce que el proceso comenzará de nuevo cuando entremos otra vez al estado i y por lo tanto, el estado i eventualmente será visitado nuevamente. Continuando con este argumento nos lleva a la conclusión de que si el estado i es recurrente, entonces cuando comencemos en el estado i , el proceso volverá a introducir el estado i una y otra vez y otra vez, infinitamente. otra forma de ver esto, nos la da la siguiente proposición.

Proposición 3. El estado i es :

- recurrente si, y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$
- transitorio si, y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$

Se demostrará en seguida que la recurrencia y la transitoriedad son propiedades de clase, es decir, si dos estados están en una misma clase de comunicación, entonces ambos estados son recurrentes o ambos son transitorios.

Proposición 4. *La recurrencia es una propiedad de clase, es decir,*

- *Si i es recurrente e $i \leftrightarrow j$, entonces j es recurrente*
- *Si i es transitorio e $i \leftrightarrow j$, entonces j es transitorio*

Esta proposición nos facilita en gran medida la clasificación de las cadenas de Markov, pues, cuando una cadena es irreducible y algún estado es recurrente, todos los estados lo son, y se dice que la *cadena es recurrente*. De otro lado, una cadena es transitoria si todos los estados lo son. Sin embargo, se demostrará más adelante que si el espacio de estados es finito, existe por lo menos un estado recurrente, y por lo tanto no existen cadenas finitas transitorias. Así pues, el espacio de estados de una cadena de Markov puede dividirse en dos subconjuntos disyuntos de estados, los que son transitorios y los que son recurrentes.

Proposición 5. *Sea j un estado transitorio. Para cualquier estado inicial i , se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^n < \infty$. En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^n = 0$*

Proposición 6. *Toda cadena de Markov finita tiene por lo menos un estado recurrente.*

El lector ya tiene ciertos conocimiento sobre las cadenas de Markov y la ecuación de Chapman-Kolmogorov, ahora se puede estudiar con más detalle lo que le ocurrirá a la cadena en el infinito, es decir, que le pasaría al modelo cuando haya pasado una gran cantidad de tiempo, esta razón motiva nuestra siguiente sección .

3.9. Evolución de distribuciones

Una matriz estocástica es de vital importancia en la dinámica de las distribuciones de probabilidad. Para ser un poco más claros, considere un espacio de estados finito $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ con una distribución inicial $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \dots, \pi_n^0)$. Luego de transcurrida la primera unidad de tiempo, la cadena se encuentre en cualquiera de sus posibles estados de acuerdo a la distribución $\pi^1 = (\pi_0^1, \pi_1^1, \dots, \pi_n^1)$ en donde la k -ésima entrada del vector es:

$$\begin{aligned} \pi_k^1 &= P(X_1 = k) \\ &= \sum_{i=0}^n P(X_1 = k \mid X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^n \pi_i^0 p_{ij} \end{aligned}$$

observe que el vector π^1 se obtiene a partir del vector π^0 y la matriz de transición $\mathbf{P}$, así $\pi^1 = \pi^0 \mathbf{P}$, si se aplica el mismo razonamiento para π^2 , se tendría que $\pi^2 = \pi^1 \mathbf{P} = \pi^0 \mathbf{P}^2$, y

si lo seguimos aplicando m -veces se obtiene

$$\pi^m = \pi^{m-1} \mathbf{P} = \pi^0 \mathbf{P}^m, \quad (3-10)$$

de esta manera se obtiene una sucesión de distribuciones de probabilidad $\pi^0, \pi^1, \pi^2, \dots$ donde cada una de ellas se obtiene de la anterior y la matriz de transición, a excepción de la distribución inicial. Es normal preguntarse si existe límite para esta sucesión. En las siguientes secciones se estudiará tal problema y se encontrará condiciones para la existencia de dicho límite.

Antes de encontrar condiciones bajo las cuales la sucesión de distribuciones converge, se estudiará a continuación el caso particular cuando la distribución inicial no cambia al ser multiplicada por la matriz $\mathbf{P}$. A tales distribuciones se les llama estacionarias o invariantes en el tiempo.

3.10. Distribuciones estacionarias

Definición 16. Una distribución de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ es estacionaria o invariante para una cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición $\mathbf{P} = (p_{ij})$ si

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

En otras palabras la distribución π es estacionaria si $\pi = \pi \mathbf{P}$. El lector puede darse cuenta que para cualquier n natural se tiene que $\pi = \pi \mathbf{P}^n$, es decir, π también es una distribución estacionaria para $\mathbf{P}^n$. En resumen si la variable aleatoria X_0 tiene distribución de probabilidad π entonces X_n también tiene como distribución a π , en pocas palabras esta distribución no cambia con el tiempo.

El concepto de distribución estacionaria es fundamental para el desarrollo de este documento, pues ayudará a comprender mejor el concepto de la distribución límite. Esta distribución es de gran interés en muchos modelos físicos, pues como se a mencionado antes, permite conocer como evoluciona el modelo que se desea desarrollar. Esta es la motivación de la siguiente sección.

3.11. Distribución límite

Como se ha mencionado antes, toda matriz de transición $\mathbf{P}$ determina una sucesión de distribuciones de probabilidad $\pi^0, \pi^1, \pi^2, \dots$ sobre el espacio de estados S , estas están de-

terminadas por

$$\pi^n = \pi^{n-1} \mathbf{P} = \pi^0 \mathbf{P}^n \quad (3-11)$$

bajo ciertas condiciones tal sucesión es convergente a una distribución de probabilidad límite π . Supongamos que este es el caso, así

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n \quad (3-12)$$

analicemos un poco más las propiedades de la distribución límite. Teniendo en cuenta las dos igualdades de 3-11, se tiene que:

$$\pi = \pi \mathbf{P} \quad (3-13)$$

$$\pi = \pi^0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n \quad (3-14)$$

estas dos últimas ecuaciones revelan muchas cosas. Primero, la distribución límite es una distribución estacionaria, ver 3-13. Segundo, la distribución límite no depende de la distribución inicial, ver 3-14. Tercero, la distribución límite esta dada por las potencias de $\mathbf{P}$, ver 3-14. En esta sección se establecen condiciones para obtener estos resultados.

Definición 17. *Considere una cadena de Markov con matriz de transición $\mathbf{P} = (p_{ij})$ y distribución inicial π^0 . Se le llama distribución límite de esta cadena al vector fila*

$$\pi = \pi^0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \pi_i^0 p_{ij}^n$$

El lector puede observar que el vector límite π en la definición anterior sera fundamental para la evolución en el tiempo de la cadena de Markov, además π podría no ser una distribución de probabilidad verdadera.

El siguiente resultado será de gran ayuda para nuestro objetivo y es válido para espacios de estados finitos o infinitos, además establece que si el límite de las probabilidades existen y no dependen de i , entonces la distribución límite podría ser una distribución estacionaria.. En el caso finito, sin embargo, se mostrará que tales límites conforman una distribución de probabilidad verdadera.

Proposición 7. *Considere una cadena de Markov con probabilidades de transición p_{ij} tales que los límites $\pi^j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n$ existen para cada j , y no dependen del estado i . Entonces*

$$\blacksquare \sum_j \pi_j \leq 1$$

$$\blacksquare \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

cuando el espacio de estados es finito se cumple la igualdad en el primer resultado obteniéndose una distribución de probabilidad verdadera

Ahora se establecen condiciones suficientes para que exista el límite de las probabilidades de transición cuando el número de pasos n crece a infinito. Este resultado es una especie de recíproco del resultado anterior, pues supone la existencia de una distribución estacionaria para concluir que los límites de las probabilidades existen.

Teorema 3. (*Convergencia a la distribución estacionaria*) *si una cadena de Markov es irreducible, aperiódica y con distribución estacionaria π , entonces para cualesquiera estados i y j , $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n$*

El mundo de las cadenas de Markov es inmenso, por esta razón, este documento solo recopila los teoremas, proposiciones y definiciones necesarias para el desarrollo del modelo propuesto. Las demostraciones fueron omitidas, si el lector desea puede consultarlas en el material bibliográfico citado al principio de este documento. Estos eran los preliminares necesarios para continuar con el desarrollo de este documento, así, en el siguiente capítulo se desarrollará el modelo propuesto.

4 Un modelo con cadenas de Markov

En el capítulo 2 (sección 2.3), se planteo la presentación del problema que se debe resolver, también se aclaro que el lector debía tener ciertos conocimientos sobre los procesos estocásticos y cadenas de Markov, esa fue la razón de ser del capítulo anterior. En este capítulo profundizaremos más sobre el planteamiento del problema, el modelo propuesto, las simulaciones numéricas y los resultados obtenidos.

4.1. Planteamiento del problema

Retomando lo escrito en el capítulo 2 , (sección 2.3), teníamos que el movimiento de cada partícula era aleatorio, además de eso, los modos de vibración para el modelo propuesto estarían descritos por las funciones $\varphi_m = \sin m \pi x$, donde la formación de las líneas nodales o puntos nodales corresponderían a los lugares donde la placa o la cuerda no vibren, es decir, para $\varphi_m = 0$. Teniendo en cuenta lo anterior, si denotamos a X_n como la posición de la partícula a tiempo n se tiene que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ se puede modelar como una cadena de Markov, pues el movimiento de la partícula solo depende del estado presente para pasar a un estado futuro, es decir,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad (4-1)$$

donde la probabilidad condicional del estado futuro j a tiempo $n+1$, solo dependen del estado presente i a tiempo n . Observe que los cambios de estado dependen de la perturbación de la cuerda.

El conjunto de estados de la cadena de Markov es una discretización de la cuerda más dos estados llamados Left(L) y Right(R) que corresponden a la salida de la partícula del sistema, a este conjunto lo llamaremos $S = \bar{S} \cup \{L, R\}$, donde $\bar{S}$ será una discretización de la cuerda tal que $\bar{S} = \{j/k : j = 0, 1, 2, \dots, k\}$. El conjunto S constará de todas las posibles posiciones de la partícula al ser perturbada por la vibración de la cuerda. Con los supuestos anteriores se tendrán varios tipos de estados, entre ellos, los estados absorbentes, estos son de gran importancia para nuestro modelo, pues, coincidirán con los nodos de los modos de vibración.

Lo que se busca es encontrar una familia de distribuciones $F(m/k, \sigma)$ donde $m \in \mathbb{N}$, tal que F sea simétrica y que se tenga

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = F(j/k - i/k, \sigma) \quad (4-2)$$

donde $\sigma \approx \varphi_m^2(i/k)$ con $\varphi_m(i/k)$ el modo de vibración de la cuerda evaluada en el estado.

El resultado esperado es tener una distribución de probabilidad π^* con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^0 P^n = \pi^*, \quad (4-3)$$

donde π^0 representa la distribución inicial de la variable aleatoria X_0 y $\mathbf{P}^n$ la matriz de transición de la cadena en n -pasos, así

$$\pi^*(j/k) = \begin{cases} 0 & j/k \neq \xi_i \\ \frac{1-q}{\xi-2} & j/k = \xi_i \end{cases} \quad (4-4)$$

donde q representa la "proporción de partículas que salen del sistema", es decir, q es la probabilidad con la que la partícula sale del sistema, $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ son los ceros de las funciones de vibración $\{\varphi_m\}$ y ξ el número de nodos, es decir, los puntos donde no hay vibración en la cuerda. Es necesario resaltar que el conjunto $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ se encuentra contenido en el espacio de estados S .

Teniendo en cuenta lo anterior se tratará de ver que:

- Con probabilidad alta la partícula siempre tenderá a los nodos de la cuerda (esto depende del tipo de vibración).
- Con una probabilidad más baja la partícula tenderá a salirse del sistema.
- Con probabilidad nula la partícula se quedara en los estados que no son nodos.

En la siguiente sección se mostrarán todos los resultados obtenidos con los anteriores supuesto. Estos resultados corresponden a simulaciones numéricas hechas en el *software Mathematica* (véase en [16])

4.2. Modelo

Como todo modelo matemático el cual intenta explicar un fenómeno físico, necesita ciertos supuestos, los cuales ayudarán a resolver el problema. Muchos de estos supuestos fueron

escritos en las secciones anteriores, pero en esta sección se profundizará más en ellos y se presentaran de manera más precisa. Cabe resaltar que el modelo propuesto en este documento es estocástico con desarrollo en las cadenas de Markov de tiempo discreto.

4.2.1. Supuestos del modelo

Se supondrá que en el modelo ocurre el fenómeno de la resonancia en una cuerda (la cuerda se considerará de longitud 1, es decir, si tomamos el plano cartesiano tendremos un cuerda que se ubica en el intervalo $\Omega = [0, 1]$), con esta suposición las partículas se moverán por medio de saltos en direcciones y desplazamientos horizontales aleatorios. La magnitud del desplazamiento horizontal del salto que da la partícula en un punto x parece estar relacionada con el desplazamiento vertical $\varphi_m(x)$. Gracias a esto se puede dar una explicación estocástica al modelo, si se supone que las partículas se mueven saltando de la siguiente forma

- El desplazamiento de cada partícula es independiente de la otra.
- La dirección de cada salto es aleatoria.
- El desplazamiento horizontal del salto que inicia en la posición x es una variable aleatoria con distribución normal. La media se relaciona con la posición de la partícula y la varianza es proporcional a $\varphi_m(x)$.
- Si una partícula sale de Ω , no podrá volver al sistema, para ello se considerarán dos estados de salida, (Left(L) y Right (R)) los cuales estarán después de los extremos de la cuerda.

El lector debe tener en cuenta que los modos de vibración están dados por las funciones $\varphi_m(x)$ y además de eso se debe considerar a un $\alpha > 0$ como el factor que se utilizará para escalar la varianza. La media de las variables aleatorias estará relacionada con la posición de cada partícula, estas se definirán a continuación.

Observación 4. *La variable aleatoria X_n se denotará como la posición de la partícula en el sistema a tiempo n .*

Para poder comprender mejor el desplazamiento que hará la partícula, se debe pensar en una forma de discretizar la cuerda, con tal de que todos los posibles valores que tomen las variable aleatoria sean discretos. Se tendrá un número finito pero lo suficientemente grande de estados, con el fin de modelar lo más preciso posible el desplazamiento de la partícula por medio de la cuerda en vibración. Si tomamos a $\bar{S} = \{j/k : j = 0, 1, 2, \dots, k\}$ como una discretización de Ω , se tiene que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumple con la Definición 2.

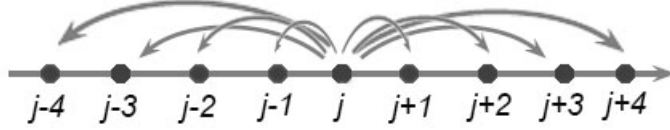


Figura 4-1: Movimiento horizontal de la partícula, a los posibles estados de transición, recuerde que estos estados pertenecen al conjunto S por lo tanto son de la forma j/k o corresponde a Left(L) o a Right(R)

Observación 5. Los movimientos de la partícula están representados en la figura 4-1, como se puede observar cada salto de la partícula depende exclusivamente del lugar donde está situada actualmente, no depende de los estados anteriores, es decir, el siguiente movimiento depende únicamente del estado actual y no el anterior, recuerde que los estados planteados en esta imagen pertenecen al conjunto S .

Gracias a que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ se puede modelar con una cadena de Markov, es normal preguntarse por p_{ij} , que son las probabilidades de transición. Sin embargo, antes de ello debemos tener en cuenta del tipo de estado que partimos, es decir, si el estado i corresponde o no a un nodo de la cuerda para cierto modo de vibración, así

$$p_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i = \xi_i \\ \gamma_{ij} & \text{si } i \neq \xi_i \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= P(X_{n+1} = j/k \mid X_n = i/k) \\ &= P(j - 1/k \leq x \leq j/k) \\ &= \int_{j-1/k}^{j/k} \mathcal{N}(t, \mu = i/k, \sigma_{i/k}^2) dt, \end{aligned}$$

para los estados de salida Right (R) y Left (L) se tendría

$$\begin{aligned} \gamma_{iL} &= \int_{-\infty}^0 \mathcal{N}(t, \mu = i/k, \sigma_{i/k}^2) dt, \\ \gamma_{iR} &= \int_1^{\infty} \mathcal{N}(t, \mu = i/k, \sigma_{i/k}^2) dt, \end{aligned}$$

analicemos un poco cada termino definido en esta función. Recordemos que $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ corresponde a los nodos de el modo de vibración de la cuerda, es decir, $\varphi_m(\xi_k) = 0$. De otro lado, $\mathcal{N}(\mu = i/k, \sigma_{i/k}^2)$ corresponde a la distribución normal. En otras palabras se tiene que, para cada estado $i \in S$, si el estado es un nodo de cierto modo de vibración φ_m , para calcular p_{ij} se debe aplicar la función δ_{ij} de tal manera que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

de otro lado si se desea calcular p_{ij} cuando $i \in S$ no es un nodo de cierto modo de vibración φ_m , se debe utilizar la distribución normal, de manera que $\mu = i/k$ y $\sigma_{i/k}^2 = \alpha\varphi_m^2(i/k)$, es decir, centraremos la distribución normal en nuestro estado i/k y la dispersión tendrá relación con los modos de vibración de la siguiente forma

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(j - 1/k \leq x \leq j/k)$$

donde x tiene una distribución normal con $\mu = i/k$ y $\sigma_{i/k}^2 = \alpha\varphi_m^2(i/k)$ y el espacio de estados discretos $\bar{S} = \{j/k : j = 0, 1, 2, \dots, k\}$ sea la discretización del intervalo $[0, 1]$. Un ejemplo de esto se ilustra la figura 4-2, donde para calcular la probabilidad de ir del estado i al estado $i + 2$, debemos calcular el área bajo la curva de la distribución normal en $[i + 1, i + 2]$, cabe resaltar que todos los estados presentados anteriormente pertenecen al conjunto S .

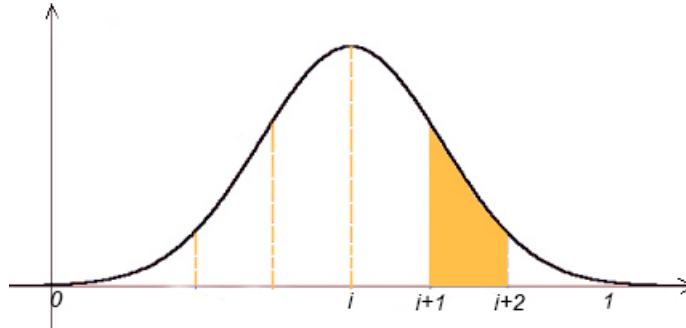


Figura 4-2: Discretización del intervalo $[0, 1]$ y aplicación de la distribución normal para calcular la probabilidad de ir del estado i al estado $i + 2$

Después de tener claro como se calcularán las probabilidades de transición debemos tener en cuenta los siguientes parámetros:

- Se tomará a la constante de proporcionalidad $\alpha = 0,4$, esta elección resulta de varios cálculos realizados en el *software Mathematica* (véase en [16]), así $\sigma_{i/k}^2 = 0,4 \varphi_m^2(x)$
- Si i/k es un estado el cual no coincide con un nodo de cierto modo de vibración, este tendrá una distribución normal $\mathcal{N}(i/k, 0,4 \varphi_m^2(i/k))$ tal que $p_{ii} = 0$, debido a que i/k corresponde a un estado transitorio.

Con los anteriores supuestos, definiciones y proposiciones, ya se podrá mostrar los resultados obtenidos y entender de la forma más exacta posible la cadena de Markov que gobierna este modelo, debido a que se tiene todas las herramientas disponibles para desarrollar lo propuesto en este documento, pero antes de esto se mostrara el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov que describe el modelo y S su conjunto de estados, con modo de vibración $\sin 2\pi x$, construiremos la matriz de transición para un número finito de estados, en este caso para $k = 4$ con lo que tendremos un total de 7 estados contando a $Left(L)$ y $Right(R)$, así la matriz de transición sería

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,10565 & 0,39435 & 0 & 0,39435 & 0,0994401 & 0,00612125 & 0,0000884173 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0000884173 & 0,00612125 & 0,0994401 & 0,39435 & 0 & 0,39435 & 0,10565 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el conjunto de estados sería $S = \{L, 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, R\}$ con $\{0, 2/4, 1\}$ como nodos.

El lector puede observar que los estados $Left(L)$ y $Right(R)$ se comportan como estados absorbentes del sistema, un comportamiento similar a los nodos, dicho lo anterior se podrá analizar la siguiente gráfico.

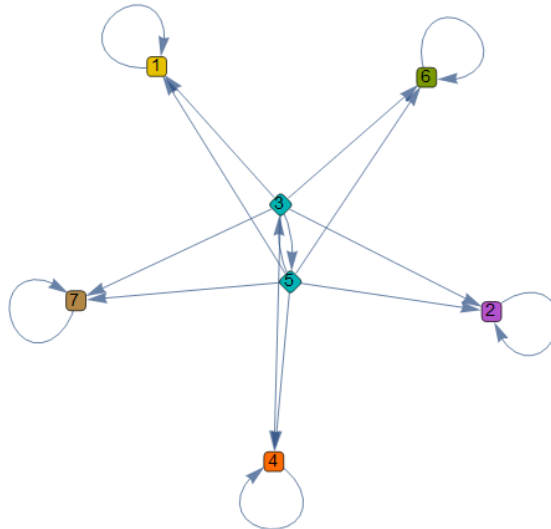


Figura 4-3:

El gráfico 4-3 muestra los estados numerados correspondientemente a la posición descrita en el conjunto S , es decir, a L le corresponde el número 1 como a $2/4$ le corresponde el 4 y así sucesivamente. En este gráfico se pudo observar con mayor claridad los estados que son nodos y los transitorios, teniendo todo lo anterior en cuenta se presentará a continuación los resultados obtenidos.

Observación 6. *Como se muestra en el ejemplo anterior los estados de salida $Left(L)$ y $Right(R)$ se comportan de manera similar que los nodos de los modos de vibración, debido a que si la partícula sale del sistema no regresa. Más adelante se mostrará que tanto los nodos como los estados de salida corresponden a estados absorbentes de la cadena de Markov, por lo tanto, los estados de salida se trataran como nodos por cuestiones practicas.*

4.2.2. Resultados obtenidos

Uno de los objetivos principales de este trabajo era poder hallar una familia de distribuciones de probabilidad, de tal manera que estas pudieran modelar de la forma más precisa posible el desplazamiento horizontal de las partículas. Ésta familia de distribuciones debe ser simétrica, pues el desplazamiento de la partícula no tiene preferencia si es a la izquierda o derecha. Teniendo lo anterior en cuenta se optó por tomar una familia de distribuciones normales, debido a su simetría y su fácil manejo. Ésta familia de distribuciones fue presentada en la sección anterior y será retomada ahora

Definición 18. *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov que gobierna nuestro fenómeno y sea S su conjunto de estados, se define la familia de distribución de probabilidad como*

$$F_m(i, \sigma) = p_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i = \xi_i \\ \gamma_{ij} & \text{si } i \neq \xi_i \end{cases}$$

donde γ_{ij} es la función de densidad de probabilidad de una distribución normal con $\mu = i/k$ y $\sigma_{i/k}^2 = \alpha \varphi_m^2(i/k)$

Esta definición surge de la necesidad de obtener las probabilidades de transición p_{ij} del sistema. Observe que la familia de distribuciones depende explícitamente de los modos de vibración, es decir, para cada modo de vibración tenemos nuestra distribución de probabilidad.

Continuando con los objetivos del trabajo, necesitamos nuestra matriz de transición, que estará compuesta por las probabilidades de transición p_{ij} , ésta matriz al igual que la función $F_m(i, \sigma)$ depende de los modos de vibración, así que, mostraremos algunas de estas, las cuales fueron calculadas en el *software Mathematica* (véase en [16]).

Supongamos que tenemos un modo de vibración trivial, es decir, tomemos a $\varphi_1(x) = \sin x$, si tomamos este modo de vibración los únicos nodos serían los extremos de la cuerda, así, las matrices de transición estarían dadas por la siguiente imagen.

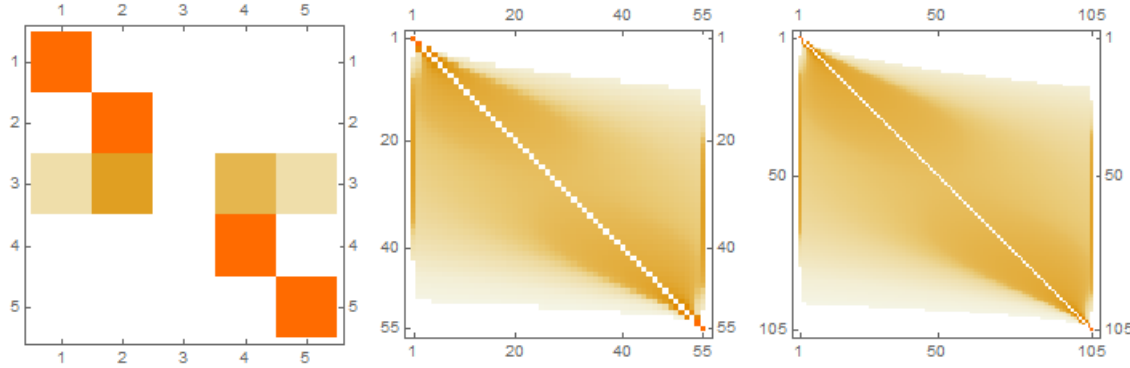


Figura 4-4: Matriz de transición para el modo de vibración con 2 nodos. La ilustración de estas matrices está basada en la técnica conocida como *heat map*

Los gráficos se siguen muy fácil de la construcción de la matriz, ya que, el gráfico 1 muestra la matriz de transición para cinco estados con el modo de vibración trivial, el gráfico 2 muestra la construcción de una matriz de cincuenta y cinco estados y el gráfico 3 de ciento cinco. Observe que los píxeles en blanco corresponden a las entradas de la matriz que son nulas, cada píxel naranja corresponde a los estados que son nodos y a las salidas del sistema y por último cada píxel marrón corresponde a las entradas de la matriz que no son nulas. El lector puede observar que en cada gráfico se genera una línea oblicua de color blanco, cada píxel que la conforma corresponde a los estados de partida del sistema, es decir, que la probabilidad de que la partícula se quede quieta partiendo de un estado de transición que no es nodo es cero.

Dependiendo de los modos de vibración tendremos matrices de transición diferentes. Como se observan en los gráficos 4-5 y 4-6 a medida que tenemos más nodos se generan líneas horizontales de color blanco cuyo centro es de color naranja, ya que, si la partícula parte desde un nodo, no podrá salir de este. La matriz de transición es de vital importancia para conocer la naturaleza de la cadena de Markov, gracias a ella podremos clasificar la cadena y cada uno de sus estados.

Proposición 8. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov que gobierna nuestro fenómeno y sea S su conjunto de estados, entonces si $i \in S$ es nodo de cierto modo de vibración $\varphi_m(x)$, i corresponde a un estado absorbente de la cadena de Markov.

Demostración. Ésta proposición se sigue fácilmente de la definición 13, pues, debido a que i es un nodo de cierto modo de vibración $\varphi_m(x)$, tenemos que $p_{ii} = 1$ y $p_{ij} = 0$ para $i \neq j$. $\square$

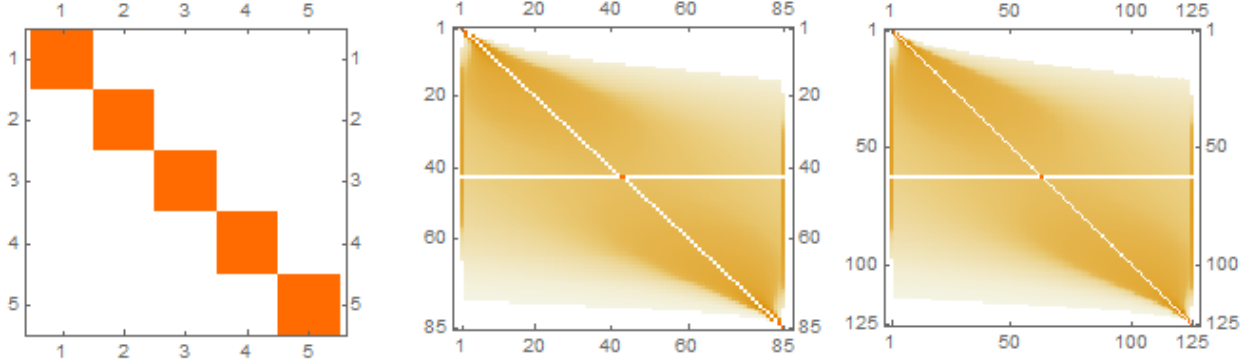


Figura 4-5: Matriz de transición para el modo de vibración con 3 nodos

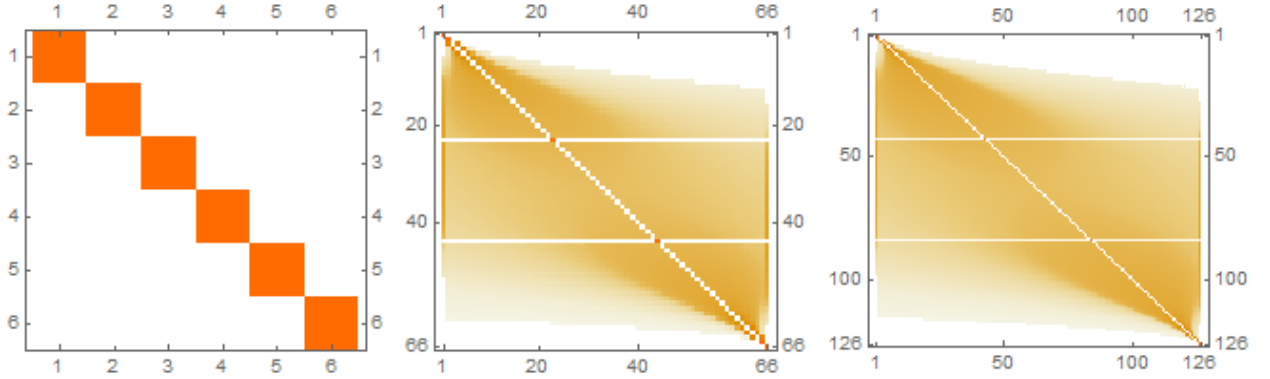


Figura 4-6: Matriz de transición para el modo de vibración con 4 nodos

Proposición 9. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov del modelo propuesto y sea S su conjunto de estados, entonces esta cadena de Markov no es irreducible.

Demostración. Esto se sigue de la proposición 8, debido a que en la cadena de Markov se tiene estados absorbentes, los cuales corresponde a los nodos de los modos de vibración $\varphi_m(x)$, así tenemos dos clases de comunicacion de estados y por lo tanto la cadena no es irreducible. $\square$

Gracias a las proposiciones anteriores sabemos que nuestro objeto de estudio será una cadena de Markov que no es irreducible. Nuestro siguiente paso a seguir es poder analizar la evolución de la cadena de Markov, para ello se necesita precisar la distribución inicial, ésta será presentada a continuación.

Definición 19. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov anterior, se define el vector de distribución inicial $\pi^0 = (0, 1/k, 1/k, \dots, 1/k, 0)$ donde k representa el número de estados.

El lector puede observar que la definición del vector de distribución inicial π^0 surge debido a que, al poner la partícula en la cuerda, cualquier estado es igual de probable. Teniendo el vector de distribución inicial y la construcción de la matriz de transición se puede analizar la evolución de la cadena de Markov e incluso su distribución limite. Sin embargo se tendrán varias distribuciones limites debido a los modos de vibración que se consideran.

Se debe tener en cuenta que para calcular la distribución limite π^* se debe resolver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^0 P^n = \pi^*$$

claramente este limite no depende de la distribución inicial como se dijo anteriormente. Ésta distribución depende únicamente de la matriz limite, así, basta calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$$

Estos cálculos fueron obtenidos gracias al *software Mathematica* [16], además se precisará cuales serán los estados transitorios de la cadena, y cuantas clases de estados se tienen. Esto será presentado a continuación, de tal forma que se mostraran las matrices limites para varios modos de vibración y diferentes discretizaciones de la cuerda en el intervalo Ω . Supongamos que tenemos una cadena de Markov discreta que modela el fenómeno con modo de vibración trivial $\varphi_1(x)$, entonces se mostrará a continuación las matrices limites obtenidas para 100, 200 y 300 estados



Figura 4-7: Matriz limite para $\varphi_1(x)$ con 100 estados

Si se tiene el modo de vibración trivial $\varphi_1(x)$ como se muestra en la figura 4-7 con 100 estados, los únicos valores diferentes de cero de la matriz, son las entradas que corresponden a las probabilidades de transición de los estados a los nodos y a salirse del sistema, por esta razón se puede observar dos pequeñas líneas finas coloreadas en los extremos de la matriz limite. Pero no solo se puede concluir eso de esta imagen, pues, los estados recurrentes coinciden con los nodos del modo de vibración y los transitorios con el resto de estados, además de esto se tiene que la cadena de Markov es aperiódica (el análisis del período de la cadena fue desarrollado por el *software Mathematica*, pues los cálculos hechos a mano son de gran complejidad).

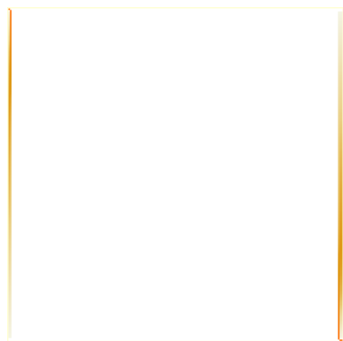


Figura 4-8: Matriz limite para $\varphi_1(x)$ con 200 estados

Como se puede observar en la figura 4-8 se tiene la matriz limite para la cadena de Markov con modo de vibración trivial y 200 estados, el lector puede corroborar la similitud de las figuras 4-7 , 4-8 y 4-9. De esto se puede concluir que la única diferencia es el grosor de las líneas extremas de la matriz, esto es debido a la cantidad de estados que posee esta cadena. Sin embargo las conclusiones anteriores también aplican para ésta matriz limite. Análogamente se tiene el mismo resultado para la figura 4-9, aunque las líneas sean más



Figura 4-9: Matriz limite para $\varphi_1(x)$ con 300 estados

delgadas, recuerde que esto es debido a la cantidad de estados que posee la cadena. De otro lado se presentará a continuación las figuras de las matrices limites para diferentes modos de vibración, con el fin de sacar una conclusión final sobre el comportamiento de la partícula en la cuerda resonante.

Como se puede observar en la figura 4-10 tenemos la matriz limite cuando se tiene 4 nodos (los dos extremos y los dos interiores), este resultado es muy similar a los anteriores, pues la matriz será nula en los estados que no corresponde a los nodos, mientras que la probabilidad de que la partícula este en alguno de los nodos o que salga del sistema sigue siendo diferente de cero en el limite. El lector puede observar que las líneas delgadas de color marron corresponden a las probabilidades de transición de la partícula a un nodo del modo de vibración, mientras los puntos de color rojo, corresponden a los nodos del modo de

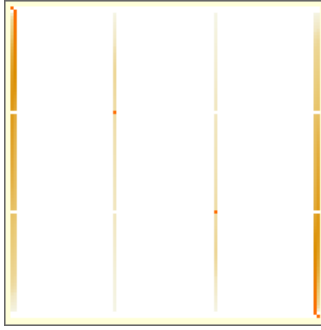


Figura 4-10: Matriz limite para $\varphi_3(x)$ con 100 estados

vibración.

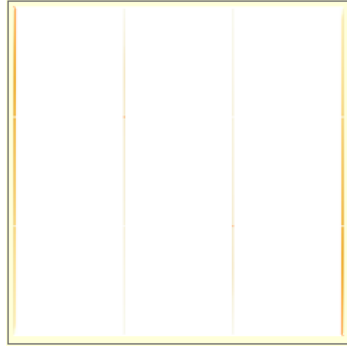


Figura 4-11: Matriz limite para $\varphi_3(x)$ con 300 estados

En la figura 4-11 se observa a las matriz limite con dos nodos, de la misma manera se tiene que , entre más estados las líneas no desaparecerán si no que serán cada vez mas finas. Gracias a esto se puede esperar que el comportamiento de la cadena en el límite se asemeja a lo esperado , pues la partícula tenderá a irse a los nodos del modo de vibración o a salirse del sistema, como muestran los anteriores gráficos. aun así experimentamos si esto se seguía cumpliendo, para cualquier cantidad de nodos y los resultados fueron satisfactorios, como se observa en la figura 4-12. Gracias a estos resultados tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 10. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov que gobierna nuestro fenómeno y S el conjunto de estados, entonces todo estado $i \in S$ que no es un nodo corresponde a un estado transitorio de la cadena de Markov.

Demostración. Esta proposición parece difícil de probar. Sin embargo, nos limitaremos a dar algunos argumentos basados en la experimentación numérica. De la experimentación se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ii}^n = 0$, lo que conlleva a, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$, por lo tanto i es un estado transitorio, además de esto, todos los estados que no son nodos se comunican entre si, de esto se seguiría la proposición. $\square$

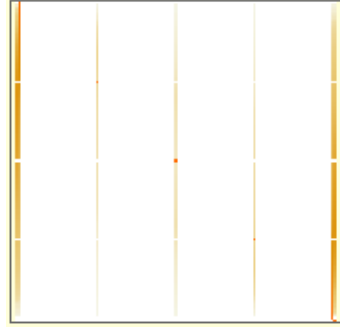


Figura 4-12: Matriz limite para $\varphi_4(x)$ con 100 estados

Proposición 11. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ la cadena de Markov de la proposición anterior entonces todo estado $i \in S$ que es un nodo corresponde a un estado recurrente de la cadena de Markov.

Demostración. Sea $i \in S$ un nodo de cierto modo de vibración, entonces $p_{ii} = 1$, de esto se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_{ii}^n = 1$, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$ $\square$

Ahora tenemos los resultados suficientes para observar que pasa con la distribución π^* , teniendo en cuenta nuestro vector de distribución inicial, las siguientes gráficas terminan de confirmar que las partículas tienden a ir a los nodos de los modos de vibración o a salirse del sistema.

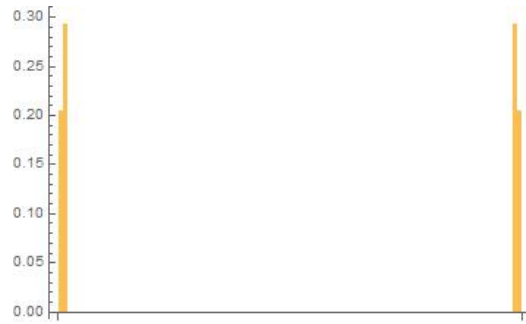


Figura 4-13: Vector distribución limite para $\varphi_1(x)$ con 500 estados

Como se observa en la figura 4-13 se obtiene el vector π^* para 500 estados, se toma este valor debido a que las variaciones cuando se llegan a los 500 estados es muy mínima, luego la distribución limite verifica que las suposiciones eran ciertas, ya que, las partículas tenderán a los nodos o a salirse del sistema (los dos estados extremos de la gráfica representan a (Left(L) y Right (R)) que son los estados de salida).

Continuando con los resultados, se tiene la figura 4-14, ésta muestra como se comportan las partículas cuando se tienen cuatro nodos y dos estados de salida (L,R), como se esperaba

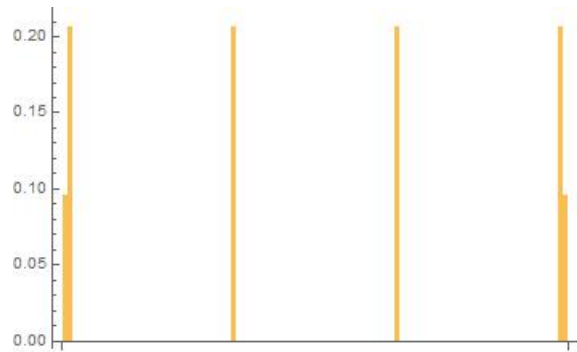


Figura 4-14: Vector distribución limite para $\varphi_3(x)$ con 500 estados

tenemos la convergencia a los puntos nodales. El lector puede observar que la cantidad de partículas que abandonan el sistema disminuyen dependiendo de la cantidad de nodos.

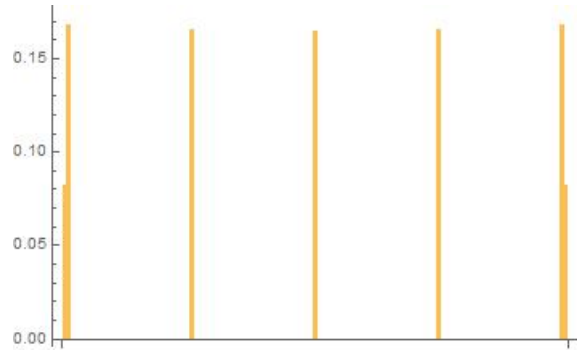


Figura 4-15: Vector distribución limite para $\varphi_4(x)$ con 500 estados

En la gráfica 4-15 se puede terminar de corroborar lo antes dicho. En resumen, se puede verificar lo supuesto sobre el desplazamiento horizontal de las partículas en la cuerda, este desplazamiento depende de los modos de vibración, en consecuencia, se tiene que, dada la cadena de Markov $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que corresponde a la posición de las partículas en tiempo n , esta converge cuando n tiende a infinito a los puntos nodales de la cuerda en resonancia, que era justo lo que se deseaba mostrar con este modelo. Por ultimo mostraremos en la siguiente imagen como es la evolución de los estados.

Como se muestra en las gráficas siguientes, tenemos la evolución de la cadena, para una cantidad de 10 estados con 2 nodos y 20 estados con 4 nodos, cabe resaltar que los dos estados extremos corresponden a salirse del sistema (L,R). Estas gráficas muestran el desplazamiento de la partícula en la cuerda.

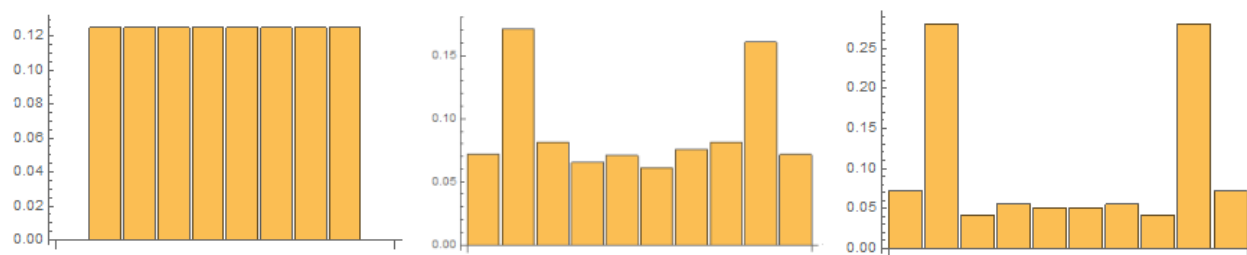


Figura 4-16: Evolución de a cadena para $n = 0$, $n = 7$, $n = 20$

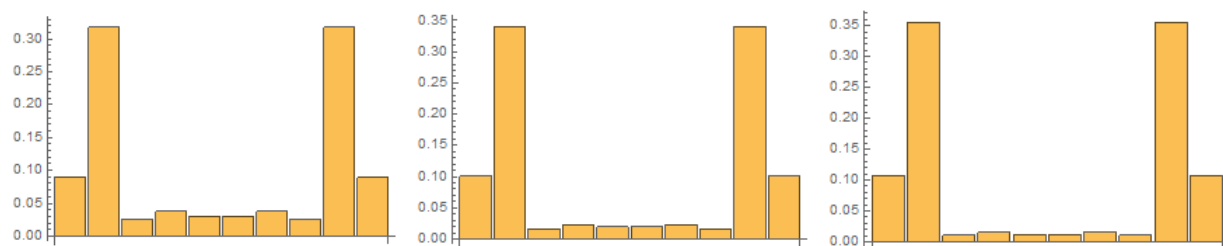


Figura 4-17: Evolución de a cadena para $n = 30$, $n = 40$, $n = 50$

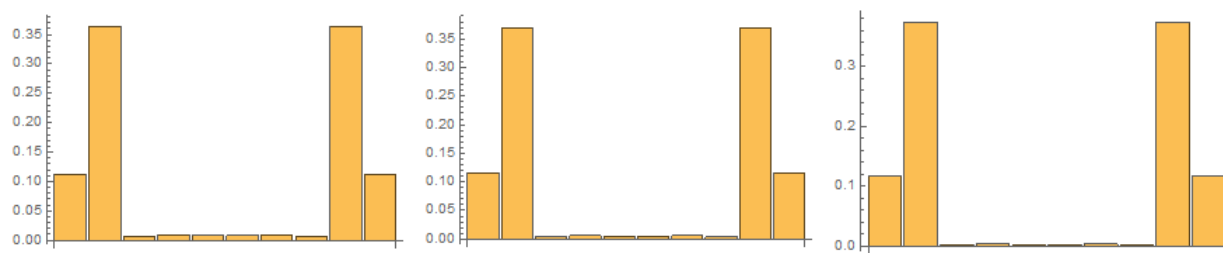


Figura 4-18: Evolución de a cadena para $n = 60$, $n = 70$, $n = 80$

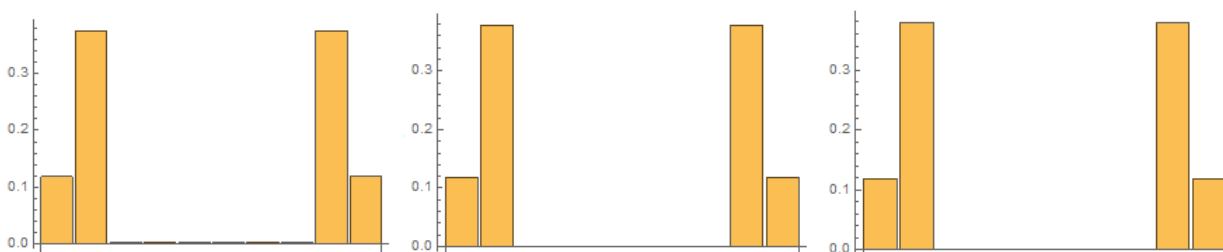


Figura 4-19: Evolución de a cadena para $n = 90$, $n = 100$, $n = 120$

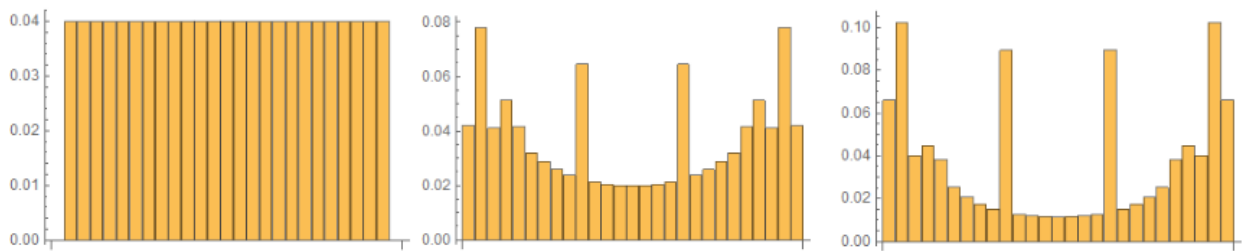


Figura 4-20: Evolución de a cadena para $n = 0$, $n = 10$, $n = 20$

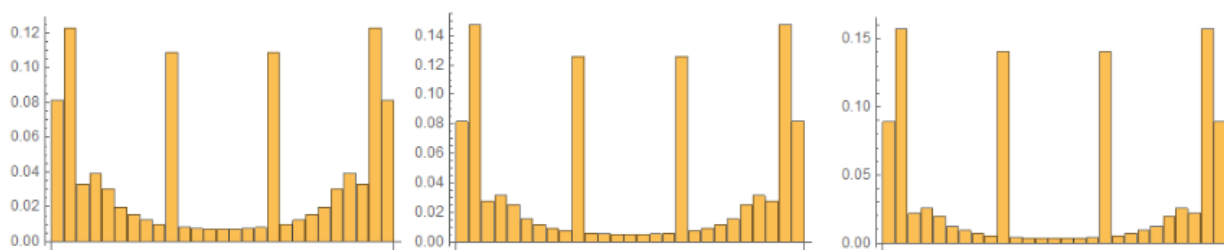


Figura 4-21: Evolución de a cadena para $n = 30$, $n = 40$, $n = 50$

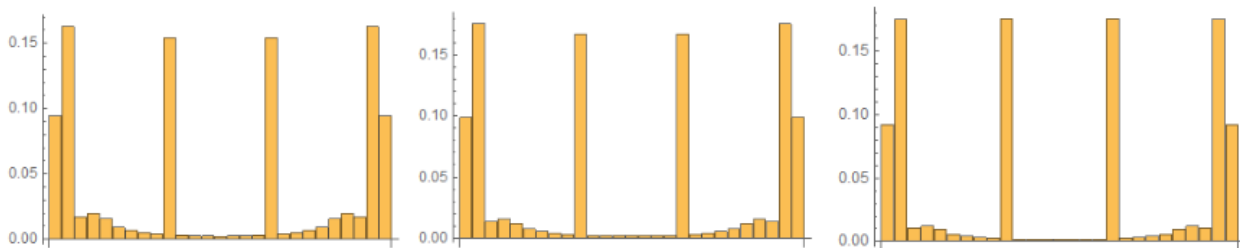


Figura 4-22: Evolución de a cadena para $n = 60$, $n = 70$, $n = 80$

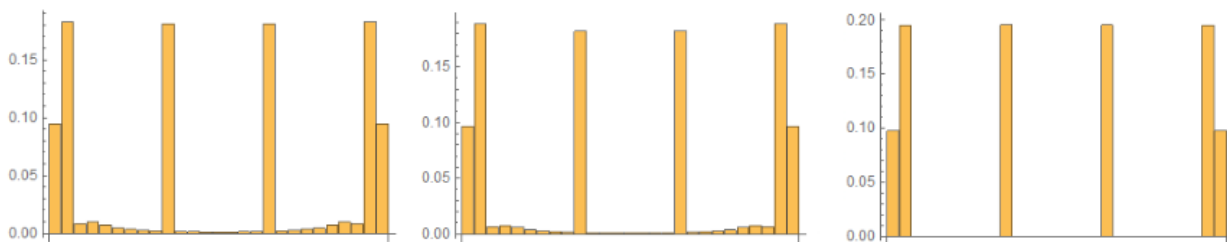


Figura 4-23: Evolución de a cadena para $n = 90$, $n = 100$, $n = 120$

5 Modelo para las figuras de Chladni

En el capítulo anterior se desarrolló un modelo que representaba una analogía unidimensional de las figuras de Chladni con cadenas de Markov de tiempo discreto, el cual corresponde al desplazamiento de una partícula sobre una cuerda en vibración. Esto se realizó con el fin de poder plantear un modelo en dos dimensiones, este corresponderá a las figuras de Chladni. En este capítulo se mostrará la relación que hay entre un modelo y otro, sus diferencias y como el modelo anterior puede servir para el planteamiento del modelo dos dimensional y el desarrollo de este en futuros trabajos.

5.1. Planteamiento del Modelo dos dimensional

Para plantear este modelo nos basaremos en el modelo unidimensional anteriormente desarrollado, es decir, tomaremos sus supuestos, la familia de distribuciones de probabilidad y las extenderemos a dos dimensiones. Con ello se busca explicar de la mejor forma posible por medio de los procesos estocásticos la formación de las figuras de Chladni. En este caso, las partículas se desplazarán por medio de una placa cuadrada, lo que conlleva a pensar en un movimiento dos dimensional, es decir, se tendrá un desplazamiento tanto vertical como horizontal. Por lo dicho anteriormente se tiene que del desplazamiento horizontal de la partícula en un punto (x, y) estará relacionada con el desplazamiento vertical $\varphi_m(x, y)$. Todo indica que se puede dar una relación entre los dos modelos y sus supuestos, de la siguiente manera

- El desplazamiento de cada partícula es independiente de la otra.
- La dirección de cada salto es aleatoria.
- El desplazamiento que inicia en la posición (x, y) es una variable aleatoria con distribución normal. La media está relacionada con la posición de la partícula y la varianza es proporcional a $\varphi_m(x, y)$.
- Si una partícula sale del sistema, no podrá volver al mismo.

A diferencia del modelo unidimensional donde $\Omega = [0, 1]$ debemos considerar un espacio

dos dimensional, el cual represente la placa, por esta razón extenderemos a $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$, ya que la idea será discretizar este espacio. De otro lado teniendo en cuenta que el movimiento de la partícula será por medio de saltos, debemos definir a $X_n = (x_n, y_n)$ como la posición de la partícula a tiempo n . Análogamente al primer modelo, el desplazamiento es aleatorio y este depende únicamente del estado actual de la partícula, por esta razón se tiene que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de Markov.

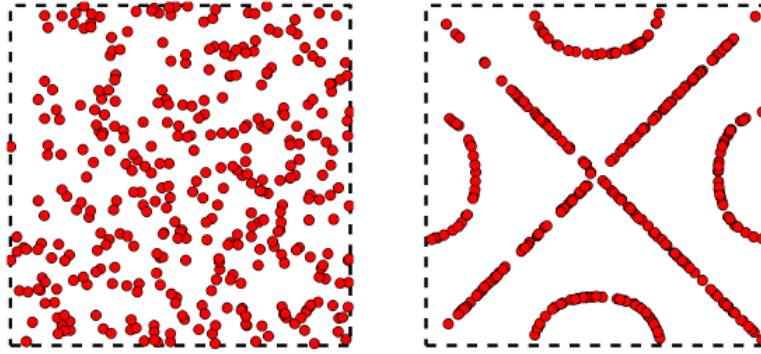


Figura 5-1: Desplazamiento aleatorio de las partículas por medio de saltos (tomada de [2])

Sin embargo una de las mayores diferencias de los dos modelos corresponde a los modos de vibración φ_m , debido a que las ecuaciones diferenciales de onda y sus soluciones correspondientes son diferentes y de mucho cuidado, no se sabe con certeza si el comportamiento de las soluciones sirva para que realmente exista la relación entre la varianza de la distribución normal y el modo de vibración dos dimensional, además de eso si consideramos los estados de salida del sistema, se debe tener en cuenta que ya no son puntos si no un conjunto de estos, los cuales formaran cuatro líneas de salida (Left (L), Right (R), Up (U), Down (D)), por esta razón se necesitará de un mayor recurso computacional y mayor conocimiento de programación. A pesar de estas dificultades, los dos modelos tiene una gran relación y mucha similitud, debido a los resultados obtenidos en el primer modelo se cree que las cadenas de Markov serán la herramienta adecuada para explicar este fenómeno. En resumen debido a la similitud de los dos modelos, lo que la simulación estocástica con cadenas de Markov del primer modelo sugiere es la siguiente conjetura

Conjetura: Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $X_n = (x_n, y_n)$ la cadena de Markov que gobierna el modelo dos dimensional entonces X_n converge con un probabilidad diferente de cero a las líneas nodales de la placa, las cuales corresponden a los ceros de las funciones $\varphi_m(x, y)$ en $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^0 P^n$$

existe y será un vector de distribución de probabilidad cuyas entradas iguales a cero serán las que corresponde a los estados que no son nodos. El lector debe tener en cuenta que los

nodos ya no son representados por medio de puntos como en la cuerda si no por un conjunto de ellos que representan las lineas nodales.

Con el ánimo de darle algún piso a la conjetura anterior se presento el primer modelo análogo unidimensional y los resultados obtenidos de este, los cuales fueron satisfactorios pues las partículas si tienden a los puntos nodales. Esto nos lleva a pensar que en este modelo dos dimensional ocurriría lo mismo, aunque ya se han resaltado las dificultades y las diferencias de ambos modelos, aun así creemos obtener los mismo resultados. Se espera que en futuros trabajos se pueda demostrar esta conjetura y desarrollar completamente el modelo anteriormente planteado.

6 Conclusiones y Perspectivas

6.1. Conclusiones

Este trabajo de grado tuvo como objetivo presentar un modelo estocástico que representa una analogía unidimensional de las figuras de Chladni, el cual corresponde a una cuerda en resonancia. Claramente se mostró la relación entre el modelo propuesto y el fenómeno que ocurre en la placa de metal. La idea principal era poder modelar el problema con cadenas de Markov, así, dada una cadena de Markov de tiempo discreto, la cual corresponde a las posiciones de las partículas a tiempo n , esta converge cuando n tiende a infinito a los puntos nodales de la cuerda en resonancia, es decir, la trayectoria de las partículas tenderán a irse a puntos donde no hay vibración o a salirse del sistema.

Para demostrar esto, primero se realizaron investigaciones sobre la formación de las figuras de Chladni en los documentos presentados por Arango-Reyes [2]. Se pudo observar que existía una relación entre la formación de las figuras en una placa de metal y la vibración de una cuerda, debido a esto, existe una correspondencia entre las líneas nodales de la placa y los puntos nodales de la cuerda, lo cual ayudo a plantear y desarrollar un modelo análogo unidimensional con el fin de poderlo extender a dos dimensiones en trabajos futuros y explicar la formación de las figuras por medio de las cadenas de Markov.

Los resultados de este trabajo de grado fueron los esperados, pues, definitivamente si suponemos que tenemos una cadena de Markov $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ homogénea de tiempo discreto con conjunto de estados $S = \bar{S} \cup \{L, R\}$, donde $\bar{S}$ será una discretización de la cuerda tal que $\bar{S} = \{j/k : j = 0, 1, 2, \dots, k\}$. Este conjunto S corresponde al desplazamiento de las partículas de forma horizontal y además se supone que

- El desplazamiento de cada partícula es independiente de la otra.
- La dirección de cada salto es aleatoria.
- El desplazamiento horizontal del salto que inicia en la posición x es una variable aleatoria con distribución normal.

- Si una partícula sale de Ω , no podrá volver al sistema.

Entonces tenemos que π^* (distribución límite) existe y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^0 P^n = \pi^*$$

de tal manera que

$$\pi^*(j/n) \approx \begin{cases} 0 & j/n \neq \xi_i \\ \frac{1-q}{\xi-2} & j/n = \xi_i \end{cases}$$

donde q representa la "proporción" de partículas que salen del sistema y ξ el número de nodos correspondientes al modo de vibración φ_m con los estados de salida Left(L) y Right(R), de donde se puede concluir que las partículas después de un periodo de tiempo, si se desplazarán a los puntos nodales o se saldrán del sistema, esto era justo lo que deseábamos mostrar. De otro lado se concluye que q la porción de las partículas que salen del sistema, depende de la cantidad de nodos presentes, pues, cuando se tenían solo dos nodos $q \approx 20\%$, cuando eran cuatro $q \approx 10\%$ y cuando eran cinco $q \approx 7\%$ entonces se puede conjeturar que q es inversamente proporcional a la cantidad de nodos presentes en el sistema, pues, los cálculos numéricos corroboran dicho resultado. En cuanto a la distribución de probabilidad utilizada para el desplazamiento de las partículas, fue bastante acertada debido a la simetría de la familia de distribuciones y su fácil manejo, esto permitió poder programar de forma más sencilla y obtener los resultados esperados en la distribución límite. Fueron muchas las distribuciones utilizadas y esta fue la que mejor se acomodó al modelo.

Al estudiar la cadena de Markov que gobierna este fenómeno podemos concluir que es una cadena aperiódica y no regular, además de ser homogénea, donde tenemos dos clases de estados, los transitorios que corresponden a los estados que no son nodos y los absorbentes que corresponden a los nodos, lo que implica que la cadena no es irreducible, estos resultados fueron de gran importancia en el desarrollo del cálculo de las distribuciones límite, debido a que se necesitaba la convergencia de la cadena de Markov a los puntos nodales de la cuerda en resonancia, además de eso el programa que sirvió como herramienta para el desarrollo de las simulaciones numéricas fue hecho en *Mathematica* y creado por el autor de este documento.

En resumen, el modelo estocástico análogo unidimensional por medio de las cadenas de Markov, puede explicar de una forma más que correcta el desplazamiento horizontal de una partícula por medio de una cuerda en vibración, los resultados obtenidos fueron los esperados, pues, las partículas si tienden a los puntos nodales y nos sirvió como primer paso para poder plantear el modelo dos dimensional, por lo tanto se cumplieron los objetivos propuestos en este trabajo de grado.

6.2. Perspectivas

El modelo de cadenas de Markov expuesto en este documento ayudo en gran medida a comprender el modelo dos dimensional necesario para desarrollo de las figuras de Chladni, a plantear varias hipótesis y a conjeturar el desplazamiento de cada partícula en el plano, podemos tomar este trabajo de grado como un gran avance, para futuras investigaciones, ya que para entrar en detalle sobre el modelo dos dimensional es necesario un mayor grado de conocimiento en programación y tener mejores recursos en hardware.

Nuestra perspectiva es poder en el futuro fortalecer esta investigación, desarrollando por completo el modelo de cadenas de Markov que explique de forma correcta la formación de las figuras de Chladni en una placa de metal cuadrada, esto se desarrollará en posteriores documentos de investigación, debido a que para el desarrollo del modelo presentado en este trabajo de grado fue necesaria la creación de un algoritmo en el software Mathematica, el cual pudiera crear la matriz de transición deseada y además de ello desarrollará de forma correcta las simulaciones necesarias para la cadena de Markov. Esto implica más de 250000 entradas para la matriz de transición y no solo eso, si no también el hecho de calcular las distribuciones límites requieren de muchos recursos en cuanto a hardware de computadora. Este fue uno de los mayores obstáculos a la hora de desarrollar el modelo propuesto, a pesar de ello y la complejidad que implica la programación, se desarrollo un programa más que decente, el cual nos pudo explicar de la forma más precisa posible el fenómeno estudiado.

Se tiene la seguridad de que el modelo propuesto en este trabajo se podrá extender a dos dimensiones por medio de vectores de variables aleatorias que modelen el desplazamiento de la partícula en dos dimensiones, tomando los mismos supuestos y pudiéndolos demostrar numéricamente por medio de software de programación.

Teniendo en cuenta lo anterior, este es un primer paso para desarrollar el modelo correspondiente a las figuras de Chladni, el cual cumple con todas las características del modelo expuesto, salvo que tendremos una cadena de Markov en dos dimensiones, pues los movimientos de las partículas serán tanto "horizontales como verticales". Se desarrollará en futuros trabajos los cálculos numéricos y se demostrarán las conjeturas propuestas en este documento, ya que seguiremos trabajando en este tema en nuestros estudios posteriores al pregrado.

Bibliografía

- [1] AGMON, S.: On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,. En: *Comm. Pure Appl. Math.* 15 (1962), p. 119–147
- [2] ARANGO, J. ; C, Reyes: Stochastics models for Chladni figures. En: *Proceedings of the Edinburgh Mathematica Society* 59 (2016), p. 287–300
- [3] CHAKRAVERTY., S.: *Vibration of plates*. CRC Press, 2008
- [4] CHLADNI, E. *Die Akustik*. <http://vlp.mpiwg-berlin.mpg.de/references?id=lit29494>.
- [5] JAIME ARANGO, Carlos R.: Figuras de Chladni en tambores. En: *Lecturas Matemáticas* 33 (2012), p. 5–18
- [6] KIRCHOFF, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. En: *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 44 (1850), p. 51–92
- [7] P.G. HOEL, S.C. P. (Ed.): *Introduction to Stochastic Processes*. USA : University of California, 1972
- [8] RINCON, L. (Ed.): *Introducción a los Procesos Estocásticos*. Mexico : Depto. de Matemáticas, UNAM, 2011
- [9] ROSS, Sheldon M. (Ed.) ; WILEY, John (Ed.): *Introduction to Probability Models*. New York, 1995
- [10] SIDNEY, Resnick: *Adventures in Stochastic Processes*. Boston : Academic Press, 1992
- [11] STOCKMANN, H. J.: Chladni meets Napoleon. En: *Eur. Phys. J. Special Topics* 145 (2007), p. 15–23
- [12] STRUTT, Lord R. (Ed.): *The theory of sound, vol I,*. New York : London, Macmillan,, 1945
- [13] ULLMANN, D.: Life and work of E.F.F. Chladni. En: *Eur. Phys. J. Special Topics* 145 (2007), p. 25–32

- [14] W. CHING, X. H. (Ed.): *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. USA : University of California, 1972
- [15] WILLIAM MENDENHALL, Robert J. B. ; BEAVER., Barbara M.: *Introduction to Probability and Statistics*. Brooks/Cole, 2006
- [16] WOLFRAM. *Mathematica*. <http://reference.wolfram.com/language/?source=nav>