

Caracterización de la progresión del aprendizaje de estudiantes de grado 8° de la noción de
Congruencia y Semejanza en polígonos regulares mediante un recurso que integra tecnología
digital

Angui Juliana Montenegro Restrepo

María Camila Bohórquez Rivera

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Ciencias, Tecnologías y Cultura

Licenciatura en Matemáticas

Zarzal- Valle

2024

Caracterización de la progresión del aprendizaje de estudiantes de grado 8° de la noción de
Congruencia y Semejanza en polígonos regulares mediante un recurso que integra tecnología
digital

Angui Juliana Montenegro Restrepo

1969563

María Camila Bohórquez Rivera

1969521

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Dirigido por:

Mg. Leidy Cristina Cumbal Acosta

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Ciencias, Tecnologías y Cultura

Licenciatura en Matemáticas

Zarzal- Valle

2024

AGRADECIMIENTOS

A nuestra universidad del valle, sede Zarzal y a todos los profesores que con mucho esfuerzo y compromiso nos apoyaron para llegar hasta aquí, especialmente al profesor Carlos Rojas, puesto que sin su gestión y compromiso con el programa habría sido imposible conseguir este sueño.

A nuestra directora Leidy Cumbal, cuya dirección experta y valiosos consejos han sido esenciales para el desarrollo y éxito de este trabajo de grado. Su paciencia, conocimiento y compromiso con la excelencia, han sido una fuente de motivación y aprendizaje constante.

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a las mujeres fuertes de mi familia, mis abuelas; Juana y Raquel. A mis tías; Elena y Alexandra, cuyo apoyo incondicional y sabiduría han sido mi faro en este viaje. Su amor y enseñanzas han sido fundamentales en mi formación. De igual manera, mi corazón está lleno de gratitud hacia mis padres; a mi madre Carolina, por su amor inagotable y su fuerza inspiradora, y a mi padre, Orlando por su amor incondicional, han sido el pilar fundamental en la consecución de mis metas.

Angui Juliana Montenegro restrepo

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi familia por su apoyo inquebrantable durante todo este proceso. Especialmente a mi madre Yuleny, por su amor incondicional y creer en mí incluso cuando las cosas se volvían difíciles, a mi padre Juan Carlos por su sacrificio y apoyo invaluable. A mi abuela Esther por su constante aliento y por inculcarme los valores que me han llevado hasta aquí. Sin su aliento y comprensión, no habría sido posible completar este trabajo.

María Camila Bohórquez Rivera

Tabla de contenido

AGRADECIMIENTOS	2
Lista de tablas	4
Lista de figuras	4
Lista de ilustraciones	5
Resumen	6
Introducción	7
Capítulo I: Planteamiento del problema	9
Contexto del Problema	9
Antecedentes	10
Justificación	17
Capítulo II: Marco Teórico	26
Noción de Recurso Curricular Digital	26
La Heurística de los Niveles en Modelos Emergentes	27
La Semejanza y La Congruencia	30
Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	34
Capítulo III: Metodología	37
Enfoque Cualitativo	37
Modelo de Investigación basada en el Diseño	37
Estrategia Metodológica Experimento de Enseñanza	38
Capítulo IV: Resultados	55
Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la Enseñanza de la Congruencia y la Semejanza.	55
Niveles de Progresión de Aprendizaje de la Congruencia y la Semejanza	66
El Proceso Real en Comparación con el Proceso Hipotético	74
Capítulo V: Conclusiones	83
Diseño de una Progresión de Aprendizaje para la Noción de Semejanza y Congruencia	83
Descripción de los Niveles de Progresión de Aprendizaje de la Semejanza y la Congruencia	84
Comparación del Proceso Hipotético con el Proceso Real de Aprendizaje	85
Capítulo VI: Limitaciones y recomendaciones	86
Referencias	88
Anexos	94

Lista de tablas

Tabla 1	39
Tabla 2	41
Tabla 3	43
Tabla 4	44
Tabla 5	45
Tabla 6	48
Tabla 7	51
Tabla 8	53
Tabla 9:	56
Tabla 10	57
Tabla 11	59
Tabla 12	61
Tabla 13	63
Tabla 14	65

Lista de figuras

Figura 1: Niveles de matematización	30
Figura 2: Representación de un triángulo	33
Figura 3: Representación de un cuadrado	33
Figura 4: Representación de un pentágono	34
Figura 5: Traslación, giro y reflexión- Tarea 1A	57
Figura 6: Semejanza-Tarea 1B	58
Figura 7: Traslación, giro y reflexión- Tarea 2A	60
Figura 8: Semejanza- Tarea 2B	62
Figura 9: Traslación, giro y reflexión- Tarea 3A	64
Figura 10: Semejanza- Tarea 3B	66

Lista de ilustraciones

Ilustración 1: Sala de sistemas	42
Ilustración 2: Dibujo 4- Tarea 1A	68
Ilustración 3: Medición con el dedo realizada por el estudiante	70

Resumen

En este trabajo se caracterizó la progresión del aprendizaje de los estudiantes de grado 8 en la congruencia y la semejanza de los tres primeros polígonos regulares: cuadrado, triángulo equilátero y pentágono regular, mediante un recurso que integra tecnologías digitales. El estudio se basó en la heurística de los modelos emergentes, un componente crucial de la Educación Matemática Realista, y consideró cómo el uso de recursos digitales facilita la visualización de estas nociones.

La metodología empleada fue cualitativa, incluyendo un experimento de enseñanza dentro del marco de la Investigación Basada en el Diseño. Se diseñó un recurso digital que construye la trayectoria hipotética de aprendizaje, implementada en el aula con una muestra de 18 estudiantes de grado 8° de un colegio privado en Roldanillo. Se recopilaron registros audiovisuales y escritos, y se realizó un análisis sistemático mediante la codificación de las respuestas de los estudiantes.

Los resultados principales fueron tres. Primero, la trayectoria hipotética de aprendizaje resultó útil para aproximar progresivamente a los estudiantes a las nociones y captar su atención. Segundo, se observó una progresión en la comprensión de la semejanza y congruencia en diferentes niveles. Tercero, al comparar el proceso hipotético con el real, se encontró una congruencia, concluyendo que el recurso fue adecuado para la comprensión del concepto.

Palabras clave: trayectoria hipotética de aprendizaje, niveles de progresión, recurso digital, semejanza y congruencia.

Introducción

Este trabajo está enmarcado en la utilidad que un recurso digital curricular puede brindar en el aprendizaje dentro del campo de la geometría, puesto que existen estudios que demuestran que el uso de un ambiente digital promueve la creatividad y el interés por aprender en los estudiantes.

El presente documento consta de cinco capítulos en donde se detallan las bases teóricas y la metodología utilizada en el desarrollo del mismo. En el primer capítulo se presenta la contextualización y el planteamiento del problema. Además se presentan los antecedentes, las justificaciones y los objetivos que guiaron el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo se presentan los soportes teóricos que sirvieron de base para el desarrollo del objetivo de este trabajo. Para llevar a cabo la caracterización nos basamos en aproximaciones teóricas como la noción de recurso curricular digital, la heurística de los niveles en los modelos emergentes. Así mismo, se usa la noción de semejanza y congruencia, particularmente en las propiedades relacionadas a la forma y el tamaño.

En el tercer capítulo se presenta la metodología empleada, la cual se basa en el enfoque cualitativo, bajo la investigación basada en el diseño. Para esto se realizó un experimento de enseñanza, teniendo en cuenta las tres fases: preparación del experimento, intervención en el aula y el análisis retrospectivo.

En la primera fase caracterizamos las nociones de semejanza y congruencia para posteriormente adaptar las tareas seleccionadas. Después se diseñó un recurso curricular digital teniendo en cuenta los procesos de aprendizaje hipotético de aprendizaje.

En la segunda fase se llevó a cabo la intervención en el aula, en una institución privada del municipio de Roldanillo Valle donde se recolectaron los datos para el análisis y los resultados a partir de las respuestas escritas de 18 estudiantes y las videograbaciones.

La tercera fase se realizó en tres momentos: En el primer momento las videograbaciones de las sesiones de intervención fueron transcritas al igual que las respuestas escritas de los estudiantes y se seleccionaron las unidades de análisis. En el segundo momento se codificaron las unidades de análisis y en el tercer momento se relacionaron los códigos emergentes con el marco teórico.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos en el análisis, los cuales permiten dar respuesta a los objetivos específicos de este trabajo. Los resultados se ejecutaron de tres maneras: Presentando el diseño de la THA, contrastando el proceso real con el proceso hipotético y relacionando los códigos con la progresión del aprendizaje de la semejanza y la congruencia.

En el último capítulo se presentan las conclusiones en donde se determinan los errores, dificultades y aciertos obtenidos en el experimento de enseñanza, de acuerdo con los objetivos planteados.

Capítulo I: Planteamiento del problema

Contexto del Problema

En la actualidad, es muy frecuente el uso de software de geometría dinámica en las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. Esto se debe a que las tecnologías digitales ofrecen nuevas posibilidades para entender y representar los conceptos geométricos, así como para manipularlos y procesarlos, pues Hegedus y Moreno-Armella (2020) sostienen que esto permite una comprensión conceptual de la geometría.

La integración de un ambiente tecnológico en la enseñanza de la geometría tiene en cuenta diferentes aspectos, como los conceptos geométricos por parte de los docentes y el pensamiento geométrico por parte de los estudiantes (Jones y Tzekaki, 2016).

Según Negrón y Estrada (2000) citado en Flores (2010) el potencial que ha ganado la enseñanza de la geometría se debe a los grandes avances en el desarrollo de distintos softwares para artefactos tecnológicos como la computadora. De este modo, se implementan diferentes herramientas de la tecnología en el aula, lo cual resulta beneficioso en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este gran beneficio se debe a varias razones. En primer lugar, el uso de tecnología digital estimula la creatividad y el interés por aprender. En segundo lugar, facilita la adquisición de conocimiento y promueve el crecimiento intelectual y en tercer lugar, crea un entorno que motiva al estudiante a descubrir por sí mismo y facilita la formación de conceptos.

De acuerdo con Flores (2010) por medio de la utilidad de la tecnología digital se genera la creación rápida y sencilla de gráficos, ahorrando tiempo que se puede enfocar en aspectos conceptuales de la geometría; incluso llega a transformar las interacciones sociales en el aula, fomenta la discusión y el trabajo en equipo. Además, el profesor ocupa un lugar importante al hacer uso de dicha tecnología, pues se convierte en un facilitador y guía del aprendizaje, en lugar de ser simplemente un transmisor de información.

Con todo lo anterior, Flores (2010) infiere que el uso de tecnología en el aula de clase es una herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, existen diferentes factores que intervienen en dicho proceso. Por ejemplo, existen situaciones donde se utiliza tecnología digital pero no se tienen claros los conceptos trabajados, por lo tanto no se avanza en el proceso de aprendizaje y la actividad matemática se torna compleja.

Para dar cuenta de lo anterior, se toma en consideración el trabajo de investigación realizado por García y Ávalos (2021), en donde evidenció que “los alumnos mostraron muchas dificultades para la construcción de figuras geométricas mediante los criterios de semejanza y congruencia” (p. 8). Este problema motivó a García y Ávalos (2021) a buscar otras formas de desarrollar nuevos aprendizajes en la educación asistida por tecnología, por medio de un recurso digital matemático.

Antecedentes

A continuación, se presentan investigaciones basadas en la didáctica de las matemáticas y la utilidad de integrar tecnología digital en la enseñanza de esta, las cuales funcionan como antecedentes relevantes para este estudio y dan lugar a la necesidad de nuestro tema de investigación. Así mismo, dichos antecedentes demuestran una trayectoria del tema de investigación y las relaciones existentes frente a este.

El Aprendizaje de la Geometría Mediada por Tecnologías Digitales

En este apartado se consideraron trabajos que abordaron el aprendizaje de la geometría desde el uso de tecnología digital, es decir, el proceso de apropiación y uso de recursos tecnológicos en la actividad matemática. Estos trabajos mostraron cómo el uso de recursos curriculares digitales puede favorecer el desarrollo de razonamientos y prácticas matemáticas relacionadas con la noción de semejanza y congruencia.

Pérez (2019) en su trabajo identificó y clasificó las prácticas matemáticas con un Software de Geometría Dinámica (SGD), teniendo en cuenta los tipos de razonamiento intervienen en los estudiantes para el reconocimiento de la congruencia de triángulos, a partir de problemas propuestos, tomando como referencia el concepto de génesis instrumental. El autor realizó un estudio de caso donde la mirada estuvo puesta en cómo el estudiante se relacionaba con el Software de Geometría Dinámica (SGD) en la resolución de problemas, se evidenció que al haberse centrado particularmente en la génesis instrumental producida en un contexto en el que la actividad incluye el uso de tecnología digital, las actividades que el sujeto realiza tienen un componente instrumental intrínseco y determinante.

Los resultados de Pérez (2019) se enfocaron en el tipo de práctica matemática y de razonamiento que emplean los estudiantes al resolver problemas geométricos sobre la congruencia de triángulos, desde el enfoque como transformación geométrica en el ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra.

Siguiendo la línea de investigación mencionada, Santacruz (2012) llevó a cabo un estudio en el que se enfocó en dos aspectos. Por un lado, diseñó una secuencia didáctica que abordaba la mediación instrumental en el aprendizaje de la rotación. Por otro lado, desarrolló una propuesta de organización sistemática de artefactos, destacando el papel del docente al integrar diversos instrumentos en el aula.

Santacruz (2012) optó por una estrategia metodológica basada en la micro-ingeniería didáctica en donde le otorgó relevancia al papel del profesor en la caracterización de sus acciones relacionadas, con la mediación de instrumentos en el aprendizaje de la geometría.

Los resultados obtenidos por Santacruz (2019) apuntaron a ofrecer una perspectiva didáctica sobre el uso de tecnología informática en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Dicha perspectiva debía tener en cuenta la complejidad del objeto matemático cuando está mediado por algún tipo de instrumento que considerara la mediación instrumental

y que sugiriera una intervención en el contexto escolar, además debía ir más allá de la simple incorporación de artefactos en el aula.

Las investigaciones presentadas anteriormente, permiten situar el problema de investigación en un contexto práctico en el que se utilizó algún recurso curricular digital para el aprendizaje. De tal manera que ocupó un lugar importante la orquestación instrumental, la cual determinaba el conjunto de acciones y decisiones del profesor para llevar a cabo la integración de los instrumentos en la clase de geometría, teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje, las características del estudiante, las restricciones del contexto y la posibilidad del recurso.

El Aprendizaje de la Congruencia y la Semejanza Mediante el Uso de Tecnología Digital

En este apartado se consideraron los estudios realizados para el aprendizaje de la congruencia y la semejanza. Primero se mencionan los trabajos relacionados con la semejanza y por último los trabajos relacionados con la semejanza y la congruencia. A continuación, detallamos cada uno de ellos.

En el contexto del aprendizaje de la geometría de manera particular la congruencia y la semejanza se han llevado a cabo varios estudios. Algunos relacionan la visualización en la solución de problemas. Por ejemplo, Ojeda (2021) desarrolló un trabajo de investigación en el que estudió cómo los estudiantes reconocen aspectos del concepto de semejanza, al resolver tareas que involucran la visualización en el diseño y la elaboración de modelos de maquetas a escala. Este trabajo se llevó a cabo bajo la metodología de investigación basada en el diseño, en donde implementó una actividad tecnológica escolar a 3 estudiantes de séptimo grado.

Los resultados de la investigación realizada por Ojeda (2021) remitieron a que GeoGebra como herramienta tecnológica digital, sirve como medio para establecer diferentes representaciones geométricas implementando actividades de diseño y análisis. También con el

uso de GeoGebra los estudiantes pudieron crear, modificar y explorar figuras geométricas, puesto que pudieron moverlas, cambiarlas, medirlas y operar con ellas.

De la misma manera Bonelo y Maca (2023) realizó un estudio en una institución educativa de la ciudad de Cali, donde propuso una experiencia de aula con el uso de GeoGebra por medio de un experimento de enseñanza. Con este estudio buscó que los estudiantes lograran una comprensión más específica, reconociendo sus errores y alcances a partir de la interacción con el profesor y el ajuste realizado a las tareas llevadas a la clase por parte de este.

La actividad realizada por Bonelo y Maca (2023) tuvo como objetivo impulsar a los estudiantes de grado 6° en el proceso de visualización cuando se relacionan polígonos a través de las transformaciones isométricas.

Los resultados de la investigación de Bonelo y Maca (2023) y Ojeda (2021) remiten al uso de la percepción en el aprendizaje de la semejanza por medio de un Actividad Tecnológica Escolar (ATE), para reconocer la forma y el tamaño de las figuras, además se evidenció que los estudiantes relacionaron elementos geométricos y tecnológicos por medio de modelaciones y construcciones.

Según Bonelo y Maca (2023) el hecho de integrar un software como GeoGebra facilitó el proceso de visualización respecto a figuras geométricas por parte del estudiante y la actividad heurística de ellas. En este sentido, el autor mencionó que, con las experiencias de construcción, exploración, clasificación y elaboración de explicaciones, logró que los estudiantes conceptualizaran apropiadamente lo que se propuso, referente a las transformaciones isométricas realizando una manipulación de las figuras y reconocimientos visuales.

Ahora bien, en relación con la propiedad de homotecia como propiedad de la semejanza, Estévez (2022) realizó una investigación para conocer cómo las retroacciones

didácticas favorecieron el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia, a través de la teoría de situaciones didáctica.

En este trabajo Estévez (2022) adaptó una secuencia didáctica diseñada en Cabri por medio de la ingeniería didáctica, la cual implementó en dos estudiantes de noveno grado. Los resultados obtenidos indicaron que fue más favorable para los estudiantes reconocer la unicidad del centro de homotecia y operar numéricamente para después encontrar la relación de proporcionalidad.

En sintonía con lo anterior, Gonzales y Maestre (2012) determinaron los beneficios de utilizar el pantógrafo o Cabri con el objetivo de estudiar la formulación, construcción y comprensión de la semejanza. En su trabajo utilizaron la metodología de estudio de casos, en donde dos estudiantes de grado noveno fueron observados mientras daban solución a diferentes actividades organizadas en 3 etapas.

Los resultados obtenidos por Gonzales y Maestre (2012) arrojaron que los estudiantes crearon una imagen conceptual de semejanza entre figuras, y así lograron caracterizar la figuras semejantes y no semejantes. También llegaron a la concepción de que una de las características de la semejanza es tener misma forma y diferente tamaño. Además, lograron determinar que el manejo de cada uno de los artefactos permitió fomentar, crear y aplicar actividades geométricas que permitieron la construcción del concepto semejanza.

En cuanto a la congruencia y la semejanza, Erazo (2019) se enfocó en analizar el aprendizaje de la semejanza y la congruencia de triángulos, para ello realizó un estudio de campo documental para diseñar un recurso en el software de geometría dinámica GeoGebra. Como elemento fundamental del estudio tomó en consideración el acceso y la frecuencia con que los estudiantes y profesores hacían uso de recursos tecnológicos en diferentes espacios.

Erazo (2019) en su estudio afirmó que el uso de un recurso tecnológico de poca complejidad y accesible como GeoGebra, permite una mejor comprensión de teoremas que

determinan la semejanza y la congruencia de los triángulos. Es notable que solo considera aquellos recursos tecnológicos que facilitaban la ejecución de tareas y motivaron a los estudiantes.

Los estudios presentados anteriormente permiten determinar el panorama en el que enmarcamos nuestro problema de investigación, puesto que abordaron el aprendizaje de la semejanza y la congruencia por medio de tecnología digital, haciendo énfasis a las propiedades de forma y tamaño en particular.

Modelos Para el Aprendizaje de la Geometría

En el siguiente apartado se presentan antecedentes relacionados con la heurística de los modelos emergentes al utilizar recursos curriculares digitales, puesto que el aprendizaje surge de manera progresiva, lo cual guarda relación con los niveles de Van Hiele.

Dicho lo anterior, se consideran 2 estudios relevantes para esta investigación.

Por un lado, se toma en consideración el estudio realizado por Cumbal (2020) en donde caracterizó la docencia de los profesores novatos al integrar recursos digitales en la enseñanza de la traslación, por medio de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) teniendo en cuenta la metodología de Investigación Basada en el Diseño (IBD).

Cumbal (2020) en su trabajo sobre los profesores novatos, obtuvo como resultado que la THA fue una herramienta eficaz para los profesores que enseñaban la traslación, puesto que ofrecía una serie de actividades ajustadas a un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), que estimulaba a los estudiantes a reconocer la traslación en situaciones de diseño.

Por otro lado, Pechené y Garzón (2023) investigaron las decisiones de los profesores en formación en relación con la enseñanza de la semejanza. Para ello, aplicaron una THA basada en la heurística de modelos emergentes y en estudios previos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza, por medio de investigación basada en el diseño. Los resultados de su estudio mostraron que los estudiantes reconocieron figuras relacionadas por semejanza.

Además, se dedujo que la THA para la enseñanza de la traslación contribuyó a fortalecer el razonamiento del estudiante mediante el desarrollo de las actividades.

Otro estudio tomado en consideración es el de Cárcamo (2017) quien en su tesis doctoral propuso un cambio en la docencia para el curso de Álgebra Lineal impartido en la universidad. Esta investigación, se basó en los modelos emergentes y la modelización matemática.

Para lograr su objetivo, Cárcamo (2017) aplicó una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) con el fin de impartir en los estudiantes los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Los resultados de la investigación demostraron que esta innovación docente beneficia a los estudiantes en la construcción de dichos conceptos, pues se llevó a cabo “la identificación del rol de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado” (Cárcamo, 2017, p.131).

Según Cárcamo (2017) “los modelos emergentes junto a sus niveles de actividad cumplieron un papel clave en nuestra innovación docente. Por una parte, guiaron el diseño de la THA y por otra, apoyaron a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado” (p.150).

En cuanto a los modelos de Van Hiele, relacionados con los modelos emergentes como referentes de este trabajo, Arbeláez (2017) diseñó una secuencia didáctica en GeoGebra por medio de los niveles de razonamiento de Van Hiele, con el fin de generar un entorno de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes de séptimo grado, en relación con la congruencia y semejanza de triángulos. El estudio se llevó a cabo bajo la metodología de investigación-acción fundamentada y la teoría de aprendizaje basado en problemas.

Los resultados del estudio de Arbeláez (2017) indicaron que los estudiantes visualizaron características de los triángulos, pero no pudieron determinar operacionalmente

si los segmentos son proporcionales. Además, lograron desarrollar las nociones de semejanza y congruencia a través del trabajo realizado en GeoGebra, donde el uso del programa y la Tablet capturó la atención de los estudiantes.

Los trabajos mencionados permitieron dar cuenta de diferentes situaciones y problemáticas que han surgido al integrar en el aprendizaje de la semejanza y la congruencia un recurso curricular digital. Cada investigación realizada sitúa el objeto matemático de este trabajo en diferentes contextos. Sin embargo, presentan similitud en el uso de un entorno virtual para la enseñanza de un objeto matemático en el aula.

Justificación

En este apartado se presenta un panorama que permite situar el trabajo de investigación dentro de su objetivo general. Por lo cual, se parte de la revisión de los conceptos y las aplicaciones de la geometría, de los fundamentos teóricos y metodológicos de la Educación Matemática Realista y el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Numerosos estudios respaldan la eficacia de los recursos digitales en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, hay una falta de investigación específica sobre cómo los recursos digitales pueden caracterizar el aprendizaje y evaluar la comprensión de los estudiantes frente a la noción de la semejanza y la congruencia.

Según Hershkowitz (2020) el aprendizaje de la geometría tiene varios propósitos y aplicaciones. En primer lugar, la geometría es considerada como un campo primordial de la matemática por su gran potencial en la evolución de habilidades de razonamiento lógico y abstracto. En segundo lugar, la geometría funciona como una mediadora en la solución de diferentes situaciones dentro de la física, la arquitectura y la ingeniería.

Para Hershkowitz (2020) la geometría también se utiliza en la vida cotidiana, por ejemplo, para medir áreas y volúmenes, diseñar objetos y planificar rutas. Además, el

aprendizaje de la geometría es esencial para el desarrollo de habilidades en matemática y es aplicada en una amplia variedad de campos y situaciones de la vida real.

Hershkowitz (2020) sitúa la congruencia y la semejanza como conceptos importantes en geometría que se utilizan para comparar y relacionar figuras geométricas, por lo que se refiere a la congruencia, como la igualdad exacta de dos figuras geométricas, en términos de forma y tamaño.

Así mismo Hershkowitz (2020) determina la importancia de la congruencia en la geometría al permitir a los estudiantes identificar y comparar figuras geométricas que son idénticas en términos de forma y tamaño. Además, le resulta útil en la resolución de problemas de geometría y en la construcción de objetos.

Ahora bien, en cuanto a la semejanza Hershkowitz (2020) la sitúa como la relación entre dos figuras geométricas, que tienen la misma forma, pero tamaños diferentes y plantea que su importancia en la geometría radica en que permite a los estudiantes comparar y relacionar figuras que tienen la misma forma, pero diferente tamaño.

Después de presentar diferentes aplicaciones de la enseñanza de la geometría en entornos virtuales, se hace necesario presentar investigaciones sobre la Educación Matemática Realista (EMR). Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2020) plantean que la EMR se basa en la idea de que las matemáticas se aprenden mejor a través de la experiencia y la práctica, y que los estudiantes deben tener la oportunidad de aplicar su conocimiento matemático en situaciones significativas y relevantes para ellos.

De esta manera, Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2020) determinan que los estudiantes al estar inmersos en situaciones realistas y cotidianas pueden tener una apprehensión más intensa y significativa de los conceptos matemáticos. Además, al trabajar con situaciones realistas demuestran una mejor destreza en la resolución de problemas y enriquecen su pensamiento crítico, lo que les permite aplicar su conocimiento matemático en

una variedad de contextos, por ejemplo, realizar cálculos en la solución de un acertijo matemático.

En otras palabras, para Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2020) lo importante es que los problemas sean reales en la mente de los estudiantes para así desarrollar conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos.

Como se pudo evidenciar, Cumbal (2020), Pechené y Garzón (2023) obtuvieron buenos resultados haciendo uso de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), pues estas permitieron seguir el proceso de comprensión de los conceptos matemáticos en cada uno de los trabajos, lo que impulsó a hacer uso de THA en el desarrollo de este trabajo.

De acuerdo con Simón et al (2017) la THA apoya en el reconocimiento del momento de aprendizaje donde se encuentran los estudiantes para poder brindar las herramientas necesarias para apoyar dicho proceso. Además, estas THA se diseñan a partir de estudios anteriores y de experiencias de clase lo que las hace pertinentes para orientar el proceso de aprendizaje o dominio de un campo particular de la matemática.

Todos estos estudios dan cuenta de un amplio interés en este campo de la educación matemática, sin embargo, en las diferentes bases de datos, existe muy poca literatura que vincule directamente el aprendizaje de la congruencia y la semejanza por medio de un recurso tecnológico.

Dificultades en el Aprendizaje de Congruencia y la Semejanza

A continuación, se presentan diferentes estudios en donde se evidenciaron dificultades a la hora de utilizar un recurso tecnológico para el aprendizaje de la congruencia y la semejanza, lo cual justifica la investigación realizada.

Hershkowitz (2020) menciona que una de las dificultades comunes en el aprendizaje de la congruencia y la semejanza incluyen la confusión entre los conceptos, la falta de comprensión de los atributos críticos de las figuras, la limitación en la comprensión de las

diferentes representaciones de las figuras, la dificultad para visualizar y manipular figuras, y la dificultad para aplicar los conceptos a situaciones del mundo real.

Por su parte, Gualdrón (2011) presenta particularmente las dificultades en el aprendizaje de la semejanza, prestando principal atención en la noción de homotecia, pues a los estudiantes se les dificulta identificar la posición del centro de homotecia con relación a las figuras, lo que complica la comprensión de la relación de la construcción de dichas figuras.

Según Gualdrón (2011) la orientación o sentido relativo entre el objeto y su imagen y la identificación del sentido de orientación de las figuras ayuda a visualizar la relación de la constante de homotecia con cada transformación. Así, en la identificación de los elementos homólogos de las figuras, se dificulta identificar el comportamiento de los polígonos en la transformación, al confundir los elementos homólogos o correspondientes de los polígonos.

Asimismo, Gualdrón (2011) afirma que el uso de la palabra “semejante” suele inducir a error a los estudiantes, ya que tienen un significado para este término fuera del contexto matemático, entendiéndolo comúnmente como “parecido”.

Haciendo referencia a las dificultades del aprendizaje de la congruencia y la semejanza se presenta el trabajo de Sanabria (2018) donde se evidencia que una de las principales dificultades en el aprendizaje de la geometría, en particular para resolver problemas donde se trabajan las nociones de semejanza y congruencia, es que los estudiantes no tienen claro los conceptos fundamentales que las constituyen, además no tienen la habilidad de percibir y reconocer las figuras para después aplicar dichos conceptos.

MEN (2006), en los principios del proyecto de introducir nuevas tecnologías al currículo de matemáticas “tenía el objetivo de mejorar el aprendizaje de las matemáticas mediante la utilización en el aula de calculadoras gráficas y algebraicas” (Moreno, 2003, p.1)

Así mismo Castiblanco (2002) evidenció algunas razones, por las cuales resulta eficaz el uso de tecnología digital en el aula de educación matemática.

Primero, a través de la tecnología digital, es posible desarrollar nuevas tácticas para resolver problemas y mejorar la capacidad de expresión y argumentación al determinar el porqué del comportamiento de objetos matemáticos visualizados en la calculadora. Además, se pueden potenciar las habilidades como la comunicación y la investigación de nuevos temas en matemática

Segundo, el uso de herramientas tecnológicas permite utilizar múltiples representaciones a la vez, fomentando conexiones matemáticas y fortaleciendo estrategias de trabajo en equipo. En este contexto, la actuación individual del estudiante y el respeto por las ideas de los demás actores en el aula de clase son fundamentales para construir conocimientos.

Para Castiblanco (2002) un Recurso Curricular Digital (RCD) se convierte en un elemento de vital importancia en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que ofrece diferentes herramientas como juegos, videos, tutoriales, ejercicios interactivos, entre otros, que apoyan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los estudiantes pueden sentirse cómodos al compartir sus ideas con sus compañeros, transformando su perspectiva sobre las matemáticas, pues en lugar de considerarlas una ciencia compleja y definitiva, se busca que vean las matemáticas como un conocimiento en constante evolución al que pueden contribuir. Además, esto ayuda a superar el temor que algunos estudiantes experimentan frente a estas, especialmente aquellos que han tenido dificultades (Castiblanco, 2002)

De la misma manera, Hegedus y Moreno (2020) afirman que las representaciones digitales utilizan las acciones del estudiante y transforman la manera de ver el objeto, por lo cual se vuelven ejecutables. Así, el estudiante puede manipular el objeto de diferentes

maneras, las cuales no son posibles en un entorno tradicional, es decir, por fuera de la tecnología.

En este sentido, se hace necesario presentar la importancia de utilizar un recurso digital en el aula. Hershkowitz (2020) plantea que los recursos digitales son importantes en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría por varias razones que a continuación se describen.

“En primer lugar, los recursos digitales, como los programas de geometría dinámica, permiten a los estudiantes interactuar con figuras geométricas de una manera más visual y dinámica. Esto puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos geométricos y a desarrollar habilidades de razonamiento espacial. En segundo lugar, los recursos digitales pueden proporcionar a los estudiantes una retroalimentación inmediata sobre su trabajo. Por ejemplo, los programas de geometría dinámica pueden mostrar a los estudiantes cómo cambia una figura geométrica cuando se modifican sus parámetros, lo que les permite experimentar y explorar diferentes configuraciones.” Hershkowitz (2020) (p.5).

Hershkowitz (2020) menciona que los programas de geometría dinámica ofrecen una ventaja y es que pueden verificar automáticamente si una figura es congruente o semejante a otra, lo que ayuda a los estudiantes a verificar sus respuestas y a comprender mejor los conceptos geométricos.

Es a partir de las diferentes dificultades presentadas en el aula al momento del aprendizaje, que surgen diferentes estudios en donde se pretende buscar una disminución de estas. Treffers (1987), plantea que es importante trabajar con problemas que pueden ser solucionados por medio de diferentes herramientas e instrumentos con el fin de que los estudiantes utilicen diferentes estrategias y mecanismos para llegar a ello.

Es muy importante tener en cuenta que, a la hora del acercamiento a la noción de semejanza y congruencia, a partir de figuras planas contamos con propiedades para diferentes polígonos, pero solo criterios establecidos para los triángulos, lo cual limita un poco la extensión de este trabajo.

Ahora bien, para poder ubicar individualmente cada una de las dificultades se pretende utilizar los niveles de progresión en el aprendizaje de la geometría, apoyándose en su estructura para identificar en cada uno de los momentos del proceso las dificultades. Según Hershkowitz (2020) los niveles de progresión son importantes en el aprendizaje de la geometría, porque proporcionan una guía para el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. Los niveles de progresión se refieren a una secuencia de etapas en el desarrollo del pensamiento geométrico, desde el reconocimiento y la visualización hasta la rigurosidad y la formalización.

Para Hershkowitz (2020) estos niveles permiten a los profesores y educadores diseñar actividades y estrategias de enseñanza que sean apropiadas para el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes. Al comprender los niveles de progresión, los profesores pueden adaptar su enseñanza para ayudar a los estudiantes a avanzar en su pensamiento geométrico y desarrollar habilidades más avanzadas. Así mismo los estudiantes pueden identificar sus fortalezas y debilidades en el pensamiento geométrico y trabajar para mejorarlas.

Este trabajo de investigación busca caracterizar la progresión del aprendizaje de las nociones de congruencia y semejanza en estudiantes de octavo grado, por medio de un recurso que integra tecnologías digitales haciendo uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje.

Por lo que se considera importante determinar la manera en que los estudiantes progresan en la comprensión de un objeto matemático a medida que avanzan en la THA y así evidenciar si podría beneficiar el uso de un SGD para el aprendizaje de la semejanza y la congruencia de figuras planas particularmente en el grado octavo. Lo anterior, considerando

que con el software se podría ver favorecido el proceso de visualización, que es necesario para el aprendizaje de estas transformaciones geométricas.

Es importante destacar que algunas dificultades se pueden generar debido a las pocas horas académicas que se le dedica a la geometría. Esto ha generado preocupación en los educadores de matemáticas, puesto que la geometría ha perdido importancia en el currículum escolar (Acosta y Fiallo, 2017). Como prueba de ello, se considera lo siguiente:

Durante varios años, la enseñanza de la geometría ha sido olvidada en los procesos de aprendizaje de la matemática y en ciertas ocasiones es como si ambas fueran disjuntas; es por esto por lo que Miguel de Guzmán no se equivoca cuando dice que: “Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática inicial, primaria y secundaria” (p.1).

En ocasiones, la geometría parece estar excluida de la matemática, y su importancia se ha ido desvaneciendo. Sin embargo, es fundamental reconocer que la matemática no podría existir sin sus cimientos geométricos y sin la base para el desarrollo del pensamiento, tanto geométrico como espacial (Cardona et al., 2012, p. 1210).

A partir de las dificultades presentadas y reconociendo la existencia de otras en el aprendizaje de la geometría, en particular en la semejanza y la congruencia, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué caracteriza la progresión del aprendizaje de la congruencia y la semejanza en estudiantes de octavo grado a través de un recurso que integra tecnologías digitales?

Objetivo General.

Caracterizar la progresión del aprendizaje de la congruencia y la semejanza de los estudiantes de grado 8° mediante un recurso digital.

Objetivos Específicos.

1. Diseñar una progresión de aprendizaje para el aprendizaje de la semejanza y congruencia de los tres polígonos regulares, que integre tecnología digital.
2. Describir los niveles de progresión de aprendizaje de la semejanza y la congruencia de los estudiantes de grado 8° cuando resuelven las tareas diseñadas.
3. Comparar el proceso hipotético con el proceso real de aprendizaje para determinar las características de la progresión del aprendizaje de los estudiantes de grado 8.

Capítulo II: Marco Teórico

Este capítulo tiene como propósito proporcionar el sustento teórico para caracterizar la progresión del aprendizaje de las nociones de semejanza y congruencia. En primer lugar, se presenta la noción del recurso digital considerado, el cual será fundamental para el desarrollo del estudio. En segundo lugar, se introduce la heurística de los modelos emergentes, enfocándose particularmente en los niveles de progresión para el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje. En tercer lugar, se abordan aspectos relevantes en torno a las nociones de semejanza y congruencia, destacando las propiedades de forma y tamaño propias de cada transformación.

Noción de Recurso Curricular Digital

La noción de recurso curricular puede ser muy intuitiva. A continuación, se tomará en consideración la definición de Trouche et al (2020), pues define un recurso curricular como un recurso diseñado y desarrollado específicamente para ser usado por estudiantes y profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro y fuera del aula. Ahora, un Recurso Curricular Digital (RCD) sigue siendo un recurso curricular con la particularidad de estar diseñado con apoyo de tecnologías digitales, conservando su objetivo de ser usado en la educación.

El diseño y el uso de un RCD está estrechamente relacionado en la Educación Matemática. Según Pepin et al (2017) el diseño de un RCD debe tener en cuenta los objetivos y el contenido de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el papel del profesor en el proceso de diseño de la instrucción, las interacciones de los estudiantes con los RCD y el impacto del RCD en el alcance y la secuencia del objeto matemático.

El uso de un RCD es muy amplio, puesto que puede ser implementado de diversas maneras en la educación, por ejemplo, en la preparación de clase, en el aprendizaje y el desarrollo profesional de los profesores y cuando trabajan con los estudiantes en clase.

De acuerdo con Pepín et al (2017) los estudiantes pueden utilizar los RCD individualmente cuando trabajan con dichos materiales en clase y en casa o colectivamente en grupos de compañeros. Además, un RCD interviene en el aprendizaje de la matemática de múltiples formas. Por ejemplo, un RCD es más flexible y adaptable que los recursos curriculares tradicionales, lo que permite un aprendizaje individual en los estudiantes, además su implementación puede favorecer el aprendizaje de la matemática, siempre y cuando se utilicen de manera efectiva y se integren adecuadamente en la enseñanza.

Las plataformas digitales brindan una gran ayuda a la educación, es por lo que Pepín et al. (2017) han encontrado una convergencia significativa en el uso creciente de plataformas digitales para los materiales curriculares y la integración de formas de tecnología de la enseñanza en estas plataformas.

La Heurística de los Niveles en Modelos Emergentes

En este apartado, se presenta el papel de la THA en el proceso de aprendizaje de la geometría y los diferentes niveles de los modelos emergentes, desde los principios fundamentales hasta las aplicaciones prácticas. Por lo que se hace necesario considerar la Educación Matemática Realista (EMR), la cual propone una visión innovadora del aprendizaje matemático.

De acuerdo con Simon (2020) “la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje es un modelo teórico para el diseño de la enseñanza de las matemáticas. Consta de tres componentes: un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético” (p.354-355)

Pechené y Garzón (2023) presentan una THA como una herramienta valiosa para los profesores en formación, puesto que permite tener claras las metas de aprendizaje y comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Además, la THA está diseñada a

partir de estudios especializados en los conceptos de estudio, con el fin de que el aprendizaje sea progresivo y se construya aprendizaje significativo en los estudiantes.

En relación con la EMR, Zolkower y Bressan (2012) plantean lo siguiente: “la EMR concibe el aprendizaje como un proceso discontinuo que se desarrolla a través de niveles crecientes de estructuración, abstracción, generalización y formalización” (p.6). Este enfoque didáctico se centra en la fenomenología, es decir, busca situaciones o contextos reales que promuevan la matematización y permitan a los estudiantes aplicar los objetos matemáticos en entornos que les son familiares.

Una de las características más distintivas de la EMR es su énfasis en la progresión de los niveles de comprensión, donde los estudiantes avanzan gradualmente hacia la formalización de las matemáticas. Este estudio se propone explorar en profundidad esta progresión y su impacto en el aprendizaje de un objeto matemático en particular.

De esta manera Streefland (1991) defiende la utilidad de un entorno real, aclarando que primero funciona como una herramienta para producir matemática y segundo se convierte en las bases para el dominio de la aplicación del concepto matemático.

Para Streefland (1991) los estudiantes cruzan la frontera de los niveles en interacción con los demás y guiados por el docente en los modelos adecuados, para así favorecer los procesos de estructuración, organización, simbolización, visualización, entre otros necesarios para el quehacer matemático. Después el estudiante podrá salirse de un contexto totalmente real, para trabajar con variables, constantes, espacios, relaciones netamente matemáticas sin que el contexto sea el punto de partida de la comprensión.

De esta manera, Zolkower y Bressan (2012) plantean que “Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes se dividen en 4”, los cuales se presentan a continuación.

Nivel Situacional

Es una aproximación al objeto matemático desde una interpretación y solución que dependen de la comprensión de problemas del contexto del estudiante. Las situaciones problemas surgen espontáneamente de los contextos reales del estudiante, donde este busca soluciones cotidianas con lo que ya sabe.

Nivel Referencial

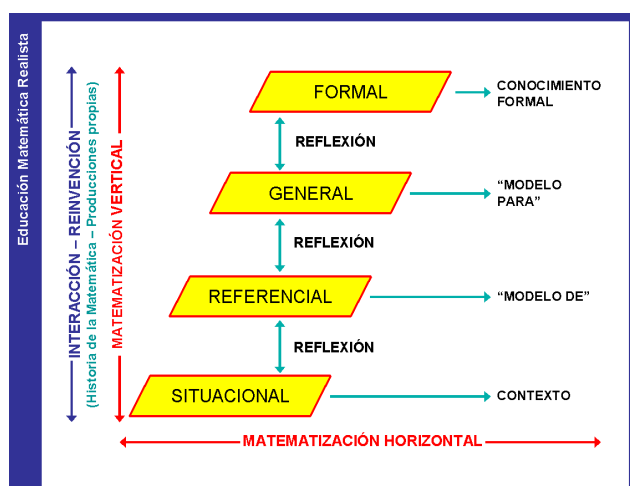
Trabaja sobre modelos que se refieren al entorno descrito en las actividades de introducción o del nivel situacional, como gráficos, notaciones y procedimientos, apoyando la visualización de la estructura de la situación problema, sin embargo, este entorno sigue siendo específico del contexto real inmediato.

Nivel General

Es un modelo para facilitar un enfoque en las interpretaciones y soluciones independientes. Explora, reflexiona y generaliza las condiciones del nivel anterior, saliéndose del contexto inmediato y trasladándose a cualquier situación que cumpla con las condiciones generales de la situación problema.

Nivel Formal

En este nivel se razona con el simbolismo tradicional sin depender de los contextos reales, procedimientos y notaciones convencionales. Deja de tener relevancia la situación problema que originó la actividad matemática, concentrando únicamente en esta última, sin embargo, queda la posibilidad de regresar al contexto si es necesario, es decir el nivel formal no es un punto sin retorno, es más bien el punto más alto de comprensión que permite trabajar dentro y fuera de contextos reales enfocándose principalmente en el quehacer matemático.

Figura 1: Niveles de matematización

(Gravemeijer, 1994)

La figura anterior da cuenta de los planteamientos de Treffers (1987) en relación con la heurística de los modelos emergentes, pues determina que existen dos líneas en el tratamiento matemático: horizontal y vertical. Por un lado, la línea horizontal, nos lleva a transformar una situación o problemática del entorno a una situación matemática, por medio del criterio propio, el instinto, la visualización, la percepción y el razonamiento deductivo. Por otro lado, la línea vertical nos conduce a movernos dentro del ámbito matemático utilizando la traficación, la universalización y la figuración.

La Semejanza y La Congruencia

En este apartado se considera la semejanza de acuerdo con la conservación de la forma y la congruencia de acuerdo con la conservación de la forma y el tamaño, además se plantean las definiciones de los tres primeros polígonos regulares: triángulo, cuadrado y pentágono.

Luengo (1990) destaca que los estudiantes se familiarizan inicialmente con la noción de semejanza alrededor de los 11 años durante su educación formal, a pesar de haber experimentado conceptos relacionados de manera informal desde los 3 o 4 años. La definición de semejanza implica ciertas condiciones específicas: los puntos que están alineados en la figura original deben mantenerse alineados en la figura homotética, los segmentos

correspondientes deben ser proporcionales y los ángulos correspondientes deben ser congruentes.

Además, se consideran “figuras semejantes” a aquellas entre las cuales se puede establecer una correspondencia uno a uno que satisfaga las condiciones mencionadas. La proporción entre segmentos correspondientes se denomina “razón de semejanza”, y la correspondencia en sí se conoce como “semejanza”. Una semejanza se clasifica como directa si mantiene la orientación del plano y como inversa si la altera (Luengo, 1990, p.77)

De la misma manera Hemmerling (1981) define que “dos polígonos son semejantes si cumplen con dos condiciones: sus ángulos son correspondientemente iguales y los lados homólogos son proporcionales” (p. 104).

En relación con la congruencia, se puede afirmar que “dos segmentos son congruentes si es factible alinear uno con el otro mediante su rotación alrededor de un extremo y su posterior traslación, hasta que ambos segmentos se superpongan” (Cárdenas, 2013, p. 13).

Siguiendo la perspectiva de Cárdenas (2013), se establece que la congruencia entre dos figuras planas se da cuando es posible ajustar una sobre la otra mediante movimientos como rotaciones, reflexiones y traslaciones. Así, por ejemplo, “si dos triángulos equiláteros tienen lados de igual medida, dos círculos comparten el mismo radio, o dos cuadrados tienen lados de idéntica longitud, entonces se consideran congruentes” (Cárdenas, 2013, p. 13).

Como parte fundamental de este trabajo, es necesario presentar desde qué punto se tomará en consideración la definición de semejanza y congruencia. Es por esto por lo que surge el siguiente interrogante ¿Qué se entiende por semejanza y congruencia?

Según Cárdenas (2013), dos polígonos se consideran semejantes si comparten la misma forma y existe una reciprocidad entre sus vértices, donde los ángulos ubicados en la misma posición son congruentes y los lados ubicados en la misma posición son

proporcionales, en otras palabras, la semejanza considera la preservación de la forma y la alteración del tamaño.

Por otro lado, según Lozada (2018) dos polígonos son congruentes si coinciden en las propiedades de forma y tamaño, es decir que al superponerlos se puede observar que sus elementos homólogos, como ángulos y lados son coincidentes, en otras palabras, dos polígonos son congruentes cuando elementos correspondientes coinciden en forma y medida.

En este punto consideramos que se presenta la conservación del tamaño cuando la variable de homotecia es igual a 1, es decir, cuando se genera una superposición de los polígonos.

Para la definición de congruencia se tiene en cuenta la traslación, los giros y la simetría (reflexión), de acuerdo con el trabajo de investigación de Jaime (1993) quien define las isometrías por medio de una caracterización.

De tal manera que determina la traslación como la preservación de la forma y el tamaño de las figuras. En el caso de los giros determina que se mantiene la forma y el tamaño de las figuras y para el caso de la simetría (reflexión) determina que por el hecho de ser una isometría el tamaño y la forma de las figuras se mantiene (Jaime, 1993).

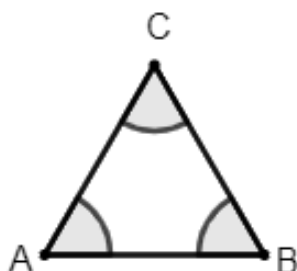
Según Clements y Sarama (2015) “un polígono es una figura plana limitada por tres o más lados rectos” (p.201). En el diseño de las tareas de aprendizaje se incluyen los tres primeros polígonos regulares.

Hemmerling (1981) define que “un polígono es regular cuando tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales” (p.154). A continuación, se define cada polígono con sus principales características.

“Dados tres puntos A, B y C no colineales, llamamos triángulo a la unión de los tres segmentos AB, BC, AC” (Hoyos, 2014, p.27)

Figura 2

Representación de un Triángulo



Fuente: Elaboración propia

En los triángulos, se identifican los puntos A, B y C como vértices. Los segmentos de línea que los conectan, conocidos como AB, BC y AC, pueden referirse ocasionalmente como c, a y b, respectivamente, y se clasifican como los lados del triángulo (Hoyos, 2014).

De acuerdo con Hoyos (2014) los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos.

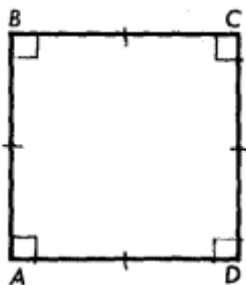
Según sus lados se clasifican en equiláteros, tres de sus lados son congruentes; isósceles, dos de sus lados son congruentes y Escaleno, sus lados no son congruentes entre sí.

Según sus ángulos se clasifican en Acutángulo, tres de sus ángulos son agudos; Rectángulo, uno de sus ángulos es recto o igual a 90° y Obtusángulo, uno de sus ángulos son obtusos, es decir mide entre 90° y 180° . (p.27-28)

Según Moise y Downs (1986) “un cuadrilátero es una figura plana de cuatro lados” (p.143). Además “si los cuatro ángulos son ángulos rectos y los cuatro lados son congruentes, entonces el cuadrilátero es un cuadrado” (p.144)

Figura 3

Representación de un Cuadrado



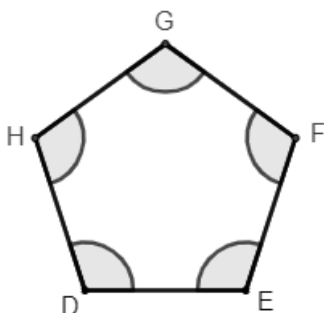
Nota: Adaptado de *Geometría moderna* (p.144), por Moise y Downs, 1986.

De acuerdo con Moise y Downs (1986) a los segmentos AD, DC, CB y BA se les denomina lados, además a los puntos A, B, C y D, se les denomina vértices.

Con relación al Pentágono Clements y Sarama (2015) lo definen como un polígono de cinco lados rectos.

Figura 4

Representación de un Pentágono



Fuente: Elaboración propia

En este caso, se considerarán el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono, como los polígonos a ser utilizados en el diseño de las tareas.

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

Según los estándares básicos en competencias, las matemáticas no son consideradas como un lenguaje, sin embargo, estas se pueden comunicar y construir por medio de diferentes lenguajes para ser representadas (MEN,2006)

Al interactuar con las matemáticas nos encontramos con el razonamiento lógico, el cual se considera como la capacidad de pensar de forma coherente y consistente. Este se

desarrolla desde los primeros grados y en los grados superiores se va haciendo más abstracto para posteriormente trabajar con proposiciones y teorías.

Según el MEN (2006) además de los procesos de comunicar y razonar que involucran las matemáticas, también se tienen en cuenta los 5 pensamientos que se desarrollan en esta, uno de ellos es el pensamiento espacial, en donde interviene la capacidad de crear y manipular imágenes mentales de los objetos y sus relaciones en el espacio.

Según el MEN (2006) los estándares básicos en competencias, presentan la manera en que los estudiantes aprenden sobre el espacio físico y geométrico a través de distintas relaciones espaciales y mencionan tres tipos: las que se basan en la posición y la relación de los objetos y el sujeto en el espacio, sin medirlos; las que se basan en la medición de las propiedades de los objetos, como las distancias, los ángulos, las áreas, etc.; y las que se basan en los conocimientos formales de la geometría, como los teoremas y las demostraciones.

El MEN (2006) determina que el estudio de la geometría se puede hacer con objetos planos y sólidos, con movimientos y transformaciones, con sistemas de medida y con conceptos como la simetría, la semejanza y la congruencia, entre otros.

Este trabajo de investigación está situado en los estándares básicos de competencias del MEN (2006) en el ciclo de octavo a noveno, dentro del pensamiento espacial y sistemas geométricos. El siguiente estándar sustenta (curricularmente) la propuesta:

“Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas” (MEN, 2006, p.86)

Es por lo que este trabajo busca desarrollar diferentes procesos curriculares, principalmente el razonamiento y la comunicación, de acuerdo con los estándares establecidos. Lo anterior se debe a que El MEN (2006) establece que se debe prestar especial

atención al aprendizaje y dominio de los lenguajes matemáticos, facilitando y promoviendo un debate continuo sobre situaciones, significados, conceptos y simbolizaciones.

Según el MEN (2006) la comunicación promueve el trabajo en equipo y la conciencia de la diversidad de ideas respecto a un mismo objeto matemático, lo que fortalece las ideas individuales a través de argumentos válidos generados por el razonamiento.

Capítulo III: Metodología

La metodología de esta propuesta de trabajo de grado se basó en un enfoque cualitativo desde la Investigación Basada en el Diseño, donde se analizó las interacciones de los estudiantes con el recurso digital, por medio de un estudio sistemático del diseño y de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Además se llevó a cabo un experimento de enseñanza, en tres fases: primero la preparación del experimento, es decir el rediseño de las tareas para el ajuste del recurso digital, segundo la intervención en el aula, donde se realizó la puesta en práctica del diseño y por último el análisis retrospectivo a partir de videograbaciones, respuestas escritas y transcripciones sistematizadas y clasificadas, para dar cumplimiento a los objetivos específicos del trabajo.

Enfoque Cualitativo

De acuerdo con Confrey (2006), mencionado por Molina et al. (2011), la investigación cualitativa posibilita el análisis del trabajo de los estudiantes, las interacciones entre alumnos y profesores, las anotaciones y registros, así como la emergencia y evolución de las concepciones sobre los fenómenos sociales. Esta metodología empleó métodos que generan datos descriptivos, como las palabras de las personas, comportamientos observables e interacción con artefactos.

Modelo de Investigación basada en el Diseño

Nuestro trabajo se llevó a cabo bajo el modelo de Investigación Basada en el Diseño (IBD), el cual se explicita a continuación.

Según Molina et al (2011) la investigación basada en el diseño se puede ver como un modelo de investigación cualitativa que se enfoca en el diseño y estudio organizado de formas características del aprendizaje, planificación y materiales de enseñanza, de una forma receptiva a la esencia organizada del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Esta

metodología se alimenta de diferentes disciplinas, que estudian el comportamiento humano y el desarrollo social y neurológico, así como didácticas específicas, entre otros.

Según Molina et al (2011) se puede concluir que la investigación basada en el diseño es una metodología sólida para investigar el aprendizaje y la enseñanza. Esta metodología permite abordar de manera sistemática y rigurosa el diseño y la evaluación de entornos de enseñanza y aprendizaje, y se apoya en un amplio campo multidisciplinario.

Estrategia Metodológica Experimento de Enseñanza

Según Molina et al (2011), los experimentos de enseñanza se sitúan dentro del modelo de investigación de diseño, siendo este tipo de diseño el más utilizado en estudios.

Molina et al (2011) explican que un experimento de enseñanza implica una serie de episodios educativos en los cuales típicamente participan un investigador-docente, uno o varios alumnos, y uno o más investigadores-observadores. Para el presente estudio, se llevó a cabo en tres etapas que se detallan a continuación.

Fase 1. Preparación del Experimento.

En la preparación del experimento se diseñó la THA. En primer lugar, para la construcción de la meta de aprendizaje se tuvieron en cuenta los documentos curriculares para el grado 8º: Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2016) y Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006). La meta de aprendizaje se enfocó en que los estudiantes reconocieran figuras congruentes, a partir de la traslación, el giro y la reflexión y semejantes a partir de la variable de homotecia mayor que 1, es decir a partir de la ampliación de figuras.

En segundo lugar, para la caracterización de la congruencia y la semejanza se tuvo en cuenta investigaciones en didáctica de las matemáticas como la de Pastor (1993) y Ojeda (2021). Por ejemplo, para la congruencia se tomaron los planteamientos de Pastor (1993)

quien en su trabajo determinó las propiedades básicas de las isometrías a partir de la traslación, los giros y la simetría (reflexión) en cada nivel de aprendizaje de los estudiantes. Además, para la semejanza se tomaron en consideración los planteamientos de Ojeda (2021), quien en su trabajo determinó la manera en que los estudiantes reconocen aspectos de la semejanza, al resolver tareas que involucran la visualización en el software GeoGebra.

A partir de los planteamientos anteriores se determinó la congruencia teniendo en cuenta que la longitud de los segmentos correspondientes es igual y que la medida de los ángulos correspondientes entre la figura original y la figura transformada son iguales. En el caso de la semejanza se determinó, tomando en consideración que la longitud de los segmentos correspondientes es proporcional y mayor que 1 y que la medida de los ángulos correspondientes entre la figura original y la transformada son iguales.

De esta manera se llevó a cabo la caracterización de la congruencia y la semejanza haciendo alusión a la forma y al tamaño de las figuras. (Ver tabla 1)

Tabla 1

Caracterización de la semejanza y la congruencia en los niveles de los modelos emergentes

	Congruencia			Semejanza
	1. El estudiante reconoce que la longitud de los segmentos correspondientes es igual. 2. El estudiante reconoce que la medida de los ángulos correspondientes entre la figura original y la transformada son iguales.			1. El estudiante reconoce que la longitud de los segmentos correspondientes es proporcional y mayor que 1. 2. El estudiante reconoce que la medida de los ángulos correspondientes entre la figura original y la transformada son iguales.
	Traslación	Giro	Reflexión	Homotecia
Nivel Situacional	El estudiante puede visualizar las dos características, al emplear las transformaciones isométricas.			El estudiante puede visualizar las dos características, al emplear la homotecia.
Nivel	El estudiante puede comprobar			El estudiante puede comprobar las dos

Referencial	las dos características por medio de la superposición de polígonos empleando las transformaciones isométricas.	características por medio de la superposición de polígonos empleando la homotecia.
Nivel General	El estudiante puede comprobar las dos características por medio de la medición de polígonos empleando las transformaciones isométricas.	El estudiante puede comprobar las dos características por medio de la medición de polígonos empleando la homotecia.

Fuente: Elaboración propia

En tercer lugar, se seleccionaron y adaptaron las tareas de aprendizaje, en coherencia con los procesos de aprendizaje hipotéticos y la heurística de los niveles de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1994), de acuerdo con el marco teórico.

Para seleccionar las tareas de aprendizaje teniendo en cuenta las indagaciones desde la didáctica de las matemáticas, se seleccionaron las tareas de los trabajos de grado de Pechené y Garzón (2023) y Cumbal (2020), puesto que en sus investigaciones tuvieron en cuenta la semejanza y la traslación, respectivamente, tomando en consideración los niveles de los modelos emergentes. Es decir que las tareas debían de funcionar en la transición de un nivel a otro, de manera que las tareas que se hicieron necesarias para dicha transición fueron diseñadas.

Por ejemplo, la tarea 1 del nivel situacional, la tarea 2 del nivel referencial y la tarea 1 del nivel general, referentes a la traslación fueron adaptadas del diseño de Cumbal (2020). Las tareas sobre semejanza en relación con la homotecia de los tres niveles fueron adaptadas del diseño de Pechené y Garzón (2023). Luego, se realizó una exploración en los recursos de GeoGebra con el fin de seleccionar tareas relacionadas con el objeto matemático que las fuentes de investigación no tuvieran. Por ejemplo, la tarea 1 del nivel referencial sobre traslación, las tareas del nivel referencial y general sobre giros y las tareas del nivel situacional y referencial sobre reflexión (Ver tabla 2).

Tabla 2*Actividades preseleccionadas*

Niveles emergentes	Congruencia		Semejanza	
	Traslación	Giro	Reflexión	Homotecia
Nivel Situacional	1.Tarea traslación	1.Tarea Giro	1.Tarea Reflexión	1.Tarea Homotecia
Nivel Referencial	1.Tarea traslación	1.Tarea Giro	1.Tarea Reflexión	1.Tarea Homotecia
	2.Tarea traslación			
Nivel General	1.Tarea traslación	1.Tarea Giro	No se encontraron tareas diseñadas	1.Tarea Homotecia

Fuente: Elaboración propia

En cuarto lugar, las tareas fueron adaptadas y organizadas de tal manera que permitieran observar la progresión en los niveles de la heurística de los modelos emergentes.

Después de realizar la adaptación de las tareas, se obtuvieron diferentes Applets, los cuales daban cuenta, por un lado, de una transformación isométrica para el caso de las tareas de congruencia y por otro lado daban cuenta de la homotecia para el caso de la semejanza.

Las tareas constaban de Applets en donde se incluyeron dibujos con figuras iniciales y figuras finales, para que los estudiantes pudieran interactuar con el recurso.

Fase 2. Intervención en el Aula y Recolección de Datos.

La intervención se realizó en una institución privada del municipio de Roldanillo-Valle, a finales del tercer periodo. La intervención en el aula se desarrolló en dos sesiones, la primera de dos horas y la segunda de una hora, teniendo en cuenta que las horas académicas en la institución son de 45 minutos, para un total de 135 min.

La intervención en el aula fue realizada por dos docentes en formación, una se encargó de dirigir la clase y la otra realizó el registro audiovisual. A los estudiantes se les indicó cómo acceder a la plataforma de GeoGebra y se les presentó un código único para ingresar a la

lección donde encontraron el libro y pudieron trabajar de forma individual. Durante la sesión la docente resolvió las dudas de los estudiantes, además de guiarlos en el uso de la plataforma, pues era la primera vez que la mayoría hacía uso de esta.

La sala de sistemas donde se realizó la intervención contaba con conexión estable a internet y con 23 equipos de cómputo, que se encontraban distribuidos como se muestra a continuación.

Ilustración 1: Sala de sistemas



Participantes

La intervención se llevó a cabo con 18 estudiantes de grado octavo, con edades que oscilan entre los 13 y 15 años, algunos de los estudiantes no mostraron disposición y no mostraron una participación, lo cual generó una dispersión en la atención de varios estudiantes, por lo que algunos no terminaron la actividad. Sin embargo, la gran mayoría participó de forma activa y comprometida con el desarrollo de esta.

Recolección de Datos

Los instrumentos de datos utilizados en esta investigación fueron dos: las respuestas escritas de los estudiantes y las videograbaciones de las sesiones de clase. Para la recolección

de datos se utilizaron dos cámaras, una para grabar en audio durante toda la intervención y otro para la grabación audiovisual de las intervenciones de los estudiantes y su interacción con el recurso digital. Además, se recolectaron todas las respuestas escritas de los estudiantes en la opción de lección virtual que brinda GeoGebra Classroom.

Fase 3: Análisis Retrospectivo.

El análisis retrospectivo se llevó a cabo en tres momentos. En el primer momento las videograbaciones de las sesiones de intervención fueron transcritas al igual que las respuestas escritas de los estudiantes. Luego se seleccionaron las unidades de análisis, estas unidades fueron aquellas respuestas de los estudiantes, que daban cuenta de la comprensión de la noción de semejanza y congruencia.

De la misma forma en las videograbaciones se seleccionaron aquellos segmentos de enseñanza donde los estudiantes en la interacción con el profesor dieran respuesta a la comprensión matemática. Como resultado de este proceso se analizaron 74 interacciones de la videograbación y 1212 respuestas escritas de los estudiantes, distribuidas como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 3

Unidades de análisis

Tarea	Unidades de análisis de las respuestas escritas	Unidades de análisis de las interacciones en la videograbación
Tarea 1A	317	24
Tarea 1B	107	17
Tarea 2A	372	15
Tarea 2B	172	9
Tarea 3A	135	0
Tarea 3B	109	9

Fuente: Elaboración propia

Después se llevó a cabo el proceso de codificación de los datos, en donde se seleccionaron las respuestas obtenidas de cada pregunta en las 6 tareas por los estudiantes y se le asignó un código, como se presenta en la tabla 4.

Tabla 4

Ejemplo del proceso de codificación, pregunta 1-Tarea 1A.

Pregunta: En el Dibujo 1, ¿La figura inicial y la figura final mantienen el mismo tamaño? ¿Por qué?		
Respuestas escritas de los estudiantes	Respuestas de los estudiantes, obtenidas en la videgrabación	Códigos
-Si, cambia su posición no su tamaño.	- "E3: Una pregunta acá dice que si ambas figuras tienen el mismo tamaño ¿le pongo por qué?	-Relaciona la conservación del tamaño con el cambio de posición, de tres maneras, menciona cambio de lugar, desplazamiento o movimiento.
-Si, por que la figura solo se desplazó más no hubo un cambio en el tamaño.	J: Si, por qué consideras que tienen el mismo tamaño	-Relaciona la conservación del tamaño con la conservación de la inclinación.
-Si mantienen el mismo tamaño porque solo se mueven de lugar o cambian de posición.	E3: Todos se ponen y se recogen. "	-Confunde el tamaño con la forma
-Si, porque en el desplazamiento no se altera el tamaño del objeto.	-"E1: Profe una pregunta, digamos que yo puedo decirle acá en esta pregunta, sí porque literalmente solo se desplazó, más no perjudica el tamaño.	-Relaciona la conservación con la superposición de las figuras.
-Porque solo se mueve de lugar, pero eso no modifica su tamaño ni su figura.	J: Si	
-Si mantienen su tamaño ya que solo se desplazó.	E4: ahí solo está cambiando de lugar pero no el tamaño."	
-Si, ya que solo se desplazó el objeto, mantiene su tamaño y no cambia de ángulo.	- "E2: Profe una pregunta, si yo estoy parado en un lugar 1 y luego me muevo a un lugar 2 ¿se supone que	
-Porque solo se mueven más no cambian de forma.		
-Si mantiene el mismo tamaño porque no se aleja, se desplaza.		
-Si porque la figura solo se cambió de posición y no cambió su tamaño.		
-Si porque en el desplazamiento no se altera el tamaño del avión.		
-Porque el movimiento que se realiza solo cambia las figuras de posición mas no cambia el tamaño.		
-Si, por que se desplazó pero no hubo un cambio en el tamaño. -Mantienen el		

mismo tamaño porque solo cambian de lugar.	sigio siendo igual? y si no se modifica ni la figura ni el tamaño, significa que soy igual, pero solo cambié de posición"	-Identifica la figura inicial y la figura final"
-Porque se mantiene la misma forma del objeto y tamaño porque solo rota su posición.		
-Mantiene el mismo tamaño solo cambia de lugar.		

Fuente: Elaboración propia

Para el proceso de codificación se leyeron las respuestas escritas y se le asignaron etiquetas según la expresión matemática del estudiante. De allí emergieron 34 códigos que se presentan a continuación.

Tabla 5

Códigos que emergieron del análisis de las tareas

En la siguiente tabla se presentan los códigos relacionados a las respuestas escritas y las respuestas de los estudiantes en las interacciones con la profesora.

#	CÓDIGO	Número de veces que se repite el código en la tarea					
		T 1A	T 1B	T 2A	T 2B	T3A	T 3B
1.	Relaciona la conservación del tamaño con el cambio de posición. De tres maneras, menciona cambio de lugar, desplazamiento o movimiento.	54		56			
2.	Relaciona la conservación del tamaño con la conservación de la inclinación.	2					
3.	Confunde el tamaño con la forma.	11	6	19	12		
4.	Relaciona la conservación con la superposición de las figuras (menciona características de la superposición).	1		119	9		
5.	Identifica la figura inicial y la figura final.	9					
6.	Identifica la forma con la palabra figura.	2					
7.	Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente.	34	4	43	3	41	2

8.	Reconoce la conservación de la forma y el cambio de posición (desplazamiento y cambio de lugar).	43	1	31	6	2
9.	Reconoce la diferencia entre la figura inicial y la figura final como un cambio de posición. (desplazamiento, movimiento, diferentes puntos).	40				
10.	Reconoce la congruencia como conservación de la posición.	4				
11.	Reconoce que el cambio de posición no afecta la congruencia de las figuras.	25		3		8
12.	Describe una trayectoria rectilínea (concibe la trayectoria como un movimiento).	36		2		
13.	Confunde la trayectoria con el cambio de posición o cantidad.	5		1		
14.	Reconoce el giro como un cambio de posición (menciona propiedades de giro).	10				
15.	Reconoce la congruencia como conservación de la forma y el tamaño.	18		6	7	3
16.	Reconoce que el giro o la rotación no afecta las propiedades de la figura.	8		7		
17.	No reconoce la figura final y la figura inicial.	18	6	2		
18.	Reconoce la conservación de la forma asociada al giro de la figura.	4				
19.	Describe una trayectoria circular.	20		33	1	6
20.	Se contradice en la respuesta.		4		4	1
21.	Reconoce la conservación de la forma y cambio de tamaño (tienen en cuenta la perspectiva).		86		59	1
22.	Reconoce la conservación de la forma y el tamaño, no importa su posición.			6		
23.	Reconoce la diferencia entre la semejanza y la congruencia.		15		10	9
24.	Reconoce que la congruencia de las medidas representa congruencia en el tamaño.			9	2	

25.	Reconoce características relevantes en la congruencia (conservación de los lados, vértices, forma y tamaño).	5	25	10
26.	Menciona características no relevantes en la superposición.	7		
27.	Describe un doblez o reflexión.	5		
28.	Relaciona el cambio de tamaño con que las figuras no se superponen.		17	1
29.	Reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza).		49	45
30.	Reconoce que la medida de los lados cambia (Hacen referencia a que las medidas se multiplican, aumentan o disminuyen).			8
31.	Reconoce que la medida de los lados se conserva o son congruentes.		44	
32.	Reconoce las veces que se amplió la figura.			34
33.	No reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza).			4
34.	Confunde las características de la semejanza con las de congruencia.			10

Fuente: Elaboración propia

En el tercer momento se relacionaron los códigos emergentes con las categorías del marco teórico, se hizo de dos formas. Por un lado, se relacionaron los códigos con la progresión del aprendizaje de la noción de semejanza y congruencia para poder llevar a cabo el segundo objetivo. Por otro lado, se relacionaron los códigos con cada una de las tareas, para poder contrastar el proceso real con el proceso hipotético.

En la Tabla 6 se presentan los códigos obtenidos en cada tarea y su frecuencia en ellas, lo cual representa una información importante para el análisis, puesto permite identificar el tipo de respuesta obtenida por los estudiantes en cada tarea.

Tabla 6*Códigos seleccionados en cada tarea.*

Tareas	Códigos	Frecuencia
Tarea 1A	1.Relaciona la conservación del tamaño con el cambio de posición. De tres maneras, menciona cambio de lugar, desplazamiento o movimiento.	54
	2. Relaciona la conservación del tamaño con la conservación de la inclinación.	2
	3. Confunde el tamaño con la forma.	11
	4. Relaciona la conservación con la superposición de las figuras.	1
	5. Identifica la figura inicial y la figura final.	9
	6. Identifica la forma con la palabra figura.	2
	7. Reconoce que la figura no cambia o dice que es congruente.	34
	8. Reconoce la conservación de la forma y cambio de posición (desplazamiento y cambio de lugar).	43
	9. Reconoce la diferencia entre la figura inicial y la figura final como un cambio de posición, desplazamiento, movimiento, diferentes puntos.	40
	10. Reconoce la congruencia como conservación de la posición.	4
	11. El cambio de posición no afecta la igualdad de las figuras.	25
	12. Describe una trayectoria rectilínea (concibe la trayectoria como un movimiento).	36
	13. Confunde la trayectoria con el cambio de posición o cantidad.	5
	14. Reconoce el giro como un cambio de posición (menciona propiedades de giro).	10
	15. Reconoce la igualdad como conservación de la forma y el tamaño.	18
	16. Reconoce que el giro no afecta las propiedades de la figura.	8
	17. No reconoce la figura final y la figura inicial.	18
	18. Conservación de la forma asociada al giro de la figura.	4
	19. Describe una trayectoria circular.	20

	3.Confunde el tamaño con la forma.	6
	7.Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente.	4
	8.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de posición (desplazamiento y cambio de lugar).	1
1B	17.No reconoce la figura final y la figura inicial.	6
	20.Se contradice en la respuesta.	4
	21.Conservación de la forma y cambio de tamaño (tienen en cuenta la perspectiva).	86
	23.Reconoce la diferencia entre la semejanza y la congruencia.	15
	1.Relaciona la conservación del tamaño con el cambio de posición. De tres maneras, menciona cambio de lugar, desplazamiento o movimiento.	56
	3.Confunde el tamaño con la forma.	19
	4.Relaciona la conservación con la superposición de las figuras (menciona características de la superposición).	119
	7.Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente.	43
	8.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de posición (desplazamiento y cambio de lugar).	31
	11.Reconoce que el cambio de posición no afecta la congruencia de las figuras.	3
	12.Describe una trayectoria rectilínea (concibe la trayectoria como un movimiento).	2
2A	13.Confunde la trayectoria con el cambio de posición o cantidad.	1
	15.Reconoce la congruencia como conservación de la forma y el tamaño.	6
	16.Reconoce que el giro o la rotación no afecta las propiedades de la figura.	7
	17.No reconoce la figura final y la figura inicial.	2
	19.Describe una trayectoria circular.	33
	22.Conservación de la forma y el tamaño, no importa su posición.	6
	24.La congruencia de las medidas representa congruencia en el tamaño.	9

	25.Reconoce características relevantes en la congruencia (conservación de los lados, vértices, forma y tamaño).	5
	26.Menciona características no relevantes en la superposición.	7
	27.Describe un dobléz o reflexión.	5
	3.Confunde el tamaño con la forma.	12
	4.Relaciona la conservación con la superposición de las figuras (menciona características de la superposición).	9
	7.Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente.	3
	8.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de posición (desplazamiento y cambio de lugar).	6
	15.Reconoce la congruencia como conservación de la forma y el tamaño.	7
	19.Describe una trayectoria circular.	1
2B	20.Se contradice en la respuesta.	4
	21.Conservación de la forma y cambio de tamaño (tienen en cuenta la perspectiva).	59
	23.Reconoce la diferencia entre la semejanza y la congruencia.	10
	24.La congruencia de las medidas representa congruencia en el tamaño.	2
	28.Relaciona el cambio tamaño con que las figuras no se superponen.	17
	29.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza).	49
	7.Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente.	41
	11.Reconoce que el cambio de posición no afecta la congruencia de las figuras.	8
	15.Reconoce la congruencia como conservación de la forma y el tamaño.	3
3A	19.Describe una trayectoria circular.	6
	20.Se contradice en la respuesta.	1
	25.Reconoce características relevantes en la congruencia (conservación de los lados, vértices, forma y tamaño).	25

	7.Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente.	2
	8.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de posición (desplazamiento y cambio de lugar).	2
	21.Conservación de la forma y cambio de tamaño (tienen en cuenta la perspectiva).	1
	23.Reconoce la diferencia entre la semejanza y la congruencia.	9
	25.Reconoce características relevantes en la congruencia (conservación de los lados, vértices, forma y tamaño).	10
3B	28.Relaciona el cambio de tamaño con que las figuras no se superponen.	1
	29.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza).	45
	32.Reconoce las veces que se amplió la figura.	34
	33.No reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza).	4
	34.Confunde las características de la semejanza con las de congruencia.	10

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 7 se muestra la comparación de los códigos que se obtuvieron en las tareas con la progresión del aprendizaje de la noción de semejanza y congruencia, identificando los elementos característicos de las respuestas que dieron cuenta de un acercamiento a las nociones deseadas. Al final de cada código se registró la frecuencia en paréntesis.

Tabla 7

Códigos relacionados en la progresión de aprendizaje y su frecuencia.

Congruencia	Semejanza
-La longitud de los segmentos correspondientes es igual.	-La longitud de los segmentos correspondientes es proporcional y mayor que 1.
-La medida de los ángulos correspondientes entre la figura original y la transformada son iguales.	-La medida de los ángulos correspondientes entre la figura original y la transformada son

			iguales.	
	Traslación, Giro y Reflexión		Homotecia	
	Congruencia	Tamaño	Semejanza	Forma
Nivel Situacional	5.Identifica la figura inicial y la figura final. (9) 9.Reconoce la diferencia entre la figura inicial y la figura final como un cambio de posición. (desplazamiento, movimiento, diferentes puntos). (40) 10.Reconoce la congruencia como conservación de la posición. (4) 11.Reconoce que el cambio de posición no afecta la congruencia de las figuras. (25) 12.Describe una trayectoria rectilínea (concibe la trayectoria como un movimiento). (36) 13.Confunde la trayectoria con el cambio de posición o cantidad. (5) 14.Reconoce el giro como un cambio de posición (menciona propiedades de giro). (10) 17.No reconoce la figura final y la figura inicial. (18) 19.Describe una trayectoria circular. (20) 18.Conservación de la forma asociada al giro de la figura. (4)	1.Relaciona la conservación del tamaño con el cambio de posición. De tres maneras, menciona cambio de lugar, desplazamiento o movimiento. (54) 2.Relaciona la conservación del tamaño con la conservación de la inclinación. (2) 3.Confunde el tamaño con la forma. (11)	23.Reconoce la diferencia entre la semejanza y la congruencia. (15) 21.Conservación de la forma y tamaño (tienen en cuenta la perspectiva). (86)	6.Identifica la forma con la palabra figura (0) 8.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de posición (desplazamiento o y cambio de lugar). (1)
Nivel Referencial	4.Relaciona la conservación con la superposición de las figuras (menciona características de la superposición). (119) 7.Reconoce que la figura final no cambia o dice que es congruente. (43) 15.Reconoce la congruencia	22.Conservación de la forma y el tamaño, no importa su posición. (6) 24.La congruencia de las	29.Reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza). (49) 28.Relaciona el cambio de	

	como conservación de la forma y el tamaño. (6)	medidas representa congruencia en el tamaño. (9)	tamaño con que las figuras no se superponen. (17)	
	16.Reconoce que el giro no afecta las propiedades de la figura. (7)			
	25.Reconoce características relevantes en la congruencia (conservación de los lados, vértices, forma y tamaño). (5)			
Nivel General	31.Reconoce que la medida de los lados se conserva o son congruentes. (44)	30.Reconoce que la medida de los lados cambia (Hacen referencia a que las medidas se multiplican, aumentan o disminuyen). (8)	33.No reconoce la conservación de la forma y el cambio de tamaño (Semejanza) (4)	32.Reconoce las veces que se amplió la figura. (34)
			34.Confunde las características de la semejanza con las de congruencia. (10)	

Fuente: Elaboración propia

A los códigos que se presentan a continuación no se les encontró vinculación en la progresión del aprendizaje de la noción de semejanza y congruencia.

Tabla 8

Códigos no vinculados a la progresión de aprendizaje.

Códigos
20.Se contradice en la respuesta
26.Menciona características no relevantes en la superposición.
27.Describe un dobléz o reflexión

Fuente: Elaboración propia

Capítulo IV: Resultados

En el siguiente apartado se describen los resultados de esta investigación en relación con los tres objetivos específicos coherentes con el objetivo general. En primer lugar, se diseñó una progresión de aprendizaje para la noción de semejanza y congruencia de polígonos regulares, que integró tecnologías digitales. En segundo lugar, se describieron los niveles de progresión de aprendizaje de la semejanza y la congruencia de los estudiantes de grado 8° cuando resolvieron las tareas diseñadas. Por último, se compararon los procesos hipotéticos con el proceso real de aprendizaje para determinar las características de la progresión. A continuación, se describe de manera detallada cada uno de estos resultados.

Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la Enseñanza de la Congruencia y la Semejanza.

En relación con el primer objetivo se diseñó una progresión del aprendizaje de la noción de semejanza y congruencia, en donde se presenta cada tarea de aprendizaje y el respectivo proceso de aprendizaje hipotético.

Esta trayectoria está formada por 28 tareas que dan cuenta de la apropiación de la conservación del tamaño y de la forma para la congruencia, y la conservación de la forma para la semejanza. A continuación, se describe cada una de las tareas:

Nivel Situacional:

Las tareas del nivel situacional buscaron ubicar al estudiante en situaciones comunes de su entorno, donde fuera posible evidenciar las transformaciones de una forma contextualizada.

Tabla 9:*Proceso de aprendizaje hipotético- Tarea 1A*

Tarea de Aprendizaje	Proceso de Aprendizaje Hipotético
Tarea 1A. - Las parejas de figuras son ejemplos de deslizamientos (Ver dibujos). En cada caso mueve el punto rojo para observar el deslizamiento desde la figura inicial hasta la figura final. En cada pareja de figuras, compara la figura inicial con la figura final y responde a las preguntas: a) En el Dibujo 1, ¿La figura inicial y la figura final mantienen el mismo tamaño? ¿Por qué?, b) En el Dibujo 1, ¿La figura inicial y la figura final mantienen la misma forma? ¿Por qué?, c) En el Dibujo 1, ¿En qué se diferencian la figura inicial y la figura final?, d) En el Dibujo 1, ¿Podrías afirmar que la figura inicial y la figura final son iguales? ¿Por qué?, e) ¿Qué trayectoria sigue la figura inicial para llegar a la figura final, en el Dibujo 1 y en el Dibujo 2? -Observa el movimiento del Dibujo 3. Responde las siguientes preguntas: f) Al deslizar el punto rojo del Dibujo 3, ¿Qué sucede con la figura inicial y la figura final de la rueda?, g) En el Dibujo 3, ¿La figura inicial y la figura final tienen la misma forma? ¿Por qué?, h) En el Dibujo 3, ¿La figura inicial y la figura final tienen el mismo tamaño? ¿Por qué?, i) ¿Qué trayectoria sigue la figura inicial para llegar a la figura final, en el Dibujo 3? -Mueve el deslizador para observar la construcción y responde: j) En el Dibujo 4, ¿La figura inicial y la figura final mantienen el mismo tamaño? ¿Por qué?, k) En el Dibujo 4, ¿La figura inicial y la figura final mantienen la misma forma? ¿Por qué?, l) En el Dibujo 4, ¿En qué se diferencian la figura inicial y la figura final?, m) En el Dibujo 4, ¿Podrías afirmar que la figura inicial y la figura final son iguales? ¿Por qué? y n) ¿Qué trayectoria sigue la figura inicial para llegar a la figura final, en el Dibujo 4?	En los dibujos 1 y 2, el estudiante en cada pareja de figuras que se obtiene por medio de un deslizamiento compara la figura inicial con la figura final. Con esto, ellos infieren las características visuales de las figuras que deslizadas siguiendo una trayectoria rectilínea, mantiene invariante: el tamaño, la forma, la inclinación, la trayectoria y la orientación de la figura inicial. El estudiante observa que las parejas de figuras que se obtienen por medio de un deslizamiento sobre trayectoria rectilínea conservan tamaño, forma, orientación e inclinación. Por lo tanto, llegan a concluir que son congruentes. En el dibujo 3, después de que el estudiante mueva el deslizador para que las cabinas de la rueda giren se espera que reconozca que la forma de las cabinas no cambia, pero al girarse cambia su posición. Además percibir que la distancia de las cabinas al centro de la rueda no cambia, con el fin de que pueda visualizar la superposición de las cabinas. También, debe de percibir la trayectoria que sigue la figura inicial para llegar a la figura final y así reconocer la transformación isométrica representada en el dibujo. Por medio de la visualización en los giros se espera que el estudiante reconozca que las figuras son congruentes, por lo tanto su forma y tamaño no cambia. De la misma manera se pretende que el estudiante por medio de la reflexión perciba la congruencia de las figuras, reconociendo la trayectoria que realiza la figura inicial para llegar a la figura final. En este punto el estudiante debe percibir que la forma y el tamaño de la figura reflejada se conserva.

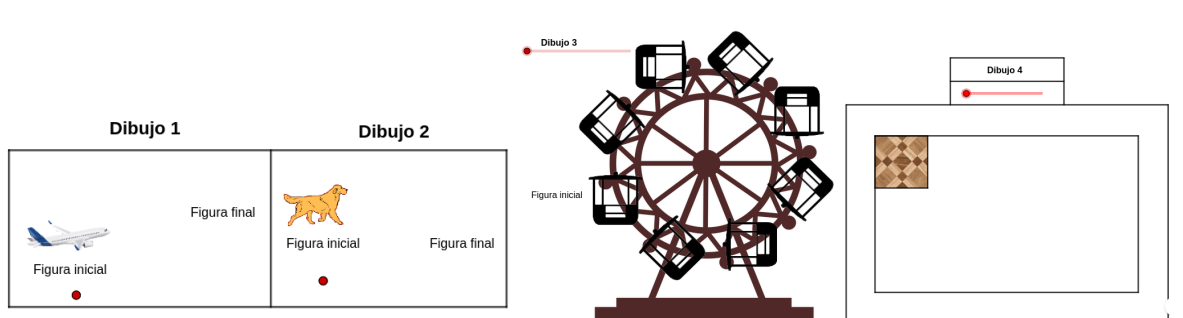


Figura 5: Traslación, giro y reflexión- Tarea 1A

Fuente: Elaboración propia

Los dibujos 1 y 2 de la tarea 1A se seleccionaron del trabajo de Cumbal (2020), puesto que su diseño está orientado a los niveles de progresión, en particular los niveles de los modelos emergentes de la heurística, lo cual coincide con el marco teórico de este trabajo, además el concepto abordado es la congruencia siendo esta uno de los conceptos esenciales de este trabajo. En esta tarea se observa una aproximación a la transformación de traslación en figuras cotidianas, lo que la hace oportuna para el nivel situacional.

El dibujo 3 y 4 fueron diseñados de acuerdo con las características que presenta Pastor (1993) en su tesis doctoral en la enseñanza de la congruencia mediante traslación, giros y reflexión. Este diseño permitió que el estudiante observara una aproximación a la transformación de giro en una situación cotidiana, como lo es la rueda de la fortuna.

El proceso de aprendizaje hipotético de la tarea 1A se complementa del proceso hipotético utilizado en el diseño de Cumbal (2020), puesto que algunos Applets fueron tomados y adaptados de este.

Tabla 10

Proceso de aprendizaje hipotético- Tarea 1B

Tarea de Aprendizaje

Proceso de Aprendizaje Hipotético

Tarea 1B.

-Activa la casilla "iniciar" para observar el movimiento de los Dibujos 1 y 2. Responde las siguientes preguntas: a) Al comparar la figura final con la figura inicial en el Dibujo 1, ¿Se conserva el tamaño? Explica tu respuesta, b) Al comparar la figura final con la figura inicial en el Dibujo 1, ¿Se conserva la forma? Explica tu respuesta, c) Al observar los Dibujos de la Tarea 1A, mencione la principal característica de la composición de las parejas de figuras, d) Al observar los Dibujos de la Tarea 1B, mencione la principal característica de la composición de las parejas de figuras y e) Mencione la principal característica que diferencia los Dibujos de la Tarea 1A y la Tarea 1B

Los estudiantes, (a) observan el movimiento en cada una de las ilustraciones con el fin de reconocer el cambio en el tamaño de las figuras relacionadas. Al comparar la figura final respecto a la figura inicial de la ilustración 1 y la ilustración 2 el estudiante identifica el cambio de tamaño y reconoce la conservación de la forma en la figura final respecto a la inicial. Infiere que las figuras relacionadas mediante una transformación de homotecia la forma se conserva pero hay cambio en el tamaño. Reconoce el cambio de tamaño como una característica principal de la semejanza y la conservación de la forma. Reconoce las principales diferencias entre la congruencia y semejanza.

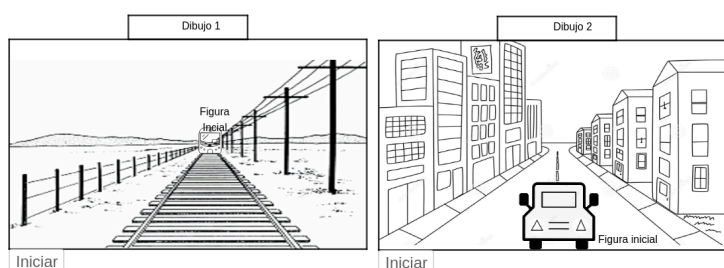


Figura 6: Semejanza-Tarea 1B

Fuente: Elaboración propia

La tarea 1B se seleccionó del trabajo de Peche y Garzón (2023), puesto que su diseño está orientado a los niveles de progresión, en particular los niveles de los modelos emergentes de la heurística, lo cual coincide con el marco teórico de este trabajo, además el concepto abordado es la semejanza siendo esta uno de los conceptos esenciales de este trabajo. Así mismo el proceso de aprendizaje hipotético fue tomado y adaptado de su diseño.

En esta tarea se observa una aproximación a la homotecia, reconociendo la conservación de la forma entre figuras semejantes. En este caso se utilizaron figuras de la vida cotidiana, lo que la hace oportuna para el nivel situacional.

Nivel Referencial:

Las tareas del nivel referencial alejaban del contexto al estudiante mostrando las transformaciones de una forma más puramente geométrica, llevando al estudiante a identificar propiedades de la semejanza y la congruencia desde un pensamiento espacial a partir de la superposición de figuras.

Tabla 11

Proceso de aprendizaje hipotético -Tarea 2A

Tarea de Aprendizaje	Proceso de Aprendizaje Hipotético
Tarea 2A. -Mueve el punto negro en los Dibujos 1, 2 y 3 para observar su movimiento. Responde las siguientes preguntas: a) En el Dibujo 1, ¿Es posible afirmar que "la figura final y la figura inicial tienen la misma forma"? ¿Cómo lo compruebas?, b)4. Al comparar la figura final con la figura inicial en el Dibujo 1, ¿Se conserva el tamaño? ¿Cómo lo compruebas?, c) ¿Qué elementos tienen en común la figura final y la figura inicial en cada Dibujo?, d) Al comparar la figura final y la figura inicial en los Dibujos 1, 2 y 3 ¿Es posible afirmar que "la figura inicial y la figura final se superponen"? ¿Cómo lo compruebas? -Mueve el deslizador en los Dibujos 4, 5 y 6, para observar el movimiento de las figuras. Responde las siguientes preguntas: e) ¿Qué trayectoria sigue la figura inicial para llegar a la figura final, en los Dibujos 4, 5 y 6?, f) En el Dibujo 4 ¿La forma de la figura inicial es igual a la de la figura final? ¿Cómo lo comprobarías?, g) Al mover el deslizador en el Dibujo 4 ¿Es posible afirmar que "la figura final y la figura inicial conservan el mismo tamaño"? ¿Cómo lo comprobarías?, h) ¿Los vértices de la figura inicial y la figura final coinciden en los Dibujos 4, 5 y 6? ¿Cómo lo comprobarías?, i) Al comparar la figura final y la figura inicial en los Dibujos 4, 5 y 6 ¿Es posible afirmar que "la	En los dibujos 1, 2 y 3 los estudiantes realizan la traslación de la figura inicial, utilizando sus conocimientos de la tarea 1A. Así este determina que para trasladar una figura, se traslada cada punto vértice de la figura inicial, esta traslación se hace determinada por el segmento orientado, el cual contiene la orientación, la inclinación y la longitud del movimiento. Después de trasladar cada vértice de la figura inicial, el estudiante dibuja la figura final uniendo los puntos obtenidos mediante el deslizamiento, luego el estudiante reconoce la figura final. En los dibujos 4, 5 y 6 el estudiante mueve el deslizador para girar el polígono 360 °. Al observar el movimiento del polígono se dará cuenta que los vértices corresponden, puesto que giran sobre la misma circunferencia. El estudiante reconoce que los polígonos se superponen al mover el deslizador 360° lo cual le permite deducir que la forma y el tamaño del polígono no cambian después del giro. Además, reconoce que los vértices y los lados de los polígonos no cambian. Así llega a la conclusión de que la figura inicial y la figura final son congruentes. Por otro lado, el estudiante debe reconocer la congruencia en la superposición de una figura por medio de la reflexión, en donde la figura reflejada (figura final) no sufre modificaciones y se puede comprobar la

figura inicial y la figura final se superponen"? ¿Cómo lo compruebas?

-Mueve el punto rojo y luego responde:

j) ¿Qué trayectoria sigue la figura inicial para llegar a la figura final, en el Dibujo 7?

k) En el Dibujo 7 ¿La forma de la figura inicial es igual a la forma de la figura final? ¿Cómo lo comprobarías?

l) Al mover el punto rojo de la figura inicial, en los Dibujos 7 y 8 ¿Es posible afirmar que "la figura final y la figura inicial conservan el mismo tamaño"? ¿Cómo lo comprobarías?

m) ¿Los vértices de la figura inicial y la figura final coinciden en el Dibujo 7 y 8?

¿Cómo lo comprobarías?

n) Al comparar la figura final y la figura inicial en los Dibujos 7 y 8 ¿Es posible afirmar que "la figura inicial y la figura final se superponen"?

¿Cómo lo compruebas? y ñ) A partir de las respuestas anteriores ¿Es posible afirmar que "la figura final y la figura inicial en los Dibujos del 1 al 8 son iguales"? ¿Por qué?

conservación de la forma y el tamaño por medio de la superposición. Así los estudiantes pueden determinar elementos o partes de los polígonos que son congruentes, como los lados, por medio de la superposición. También se espera que implícitamente los estudiantes se percaten de la correspondencia de los vértices.

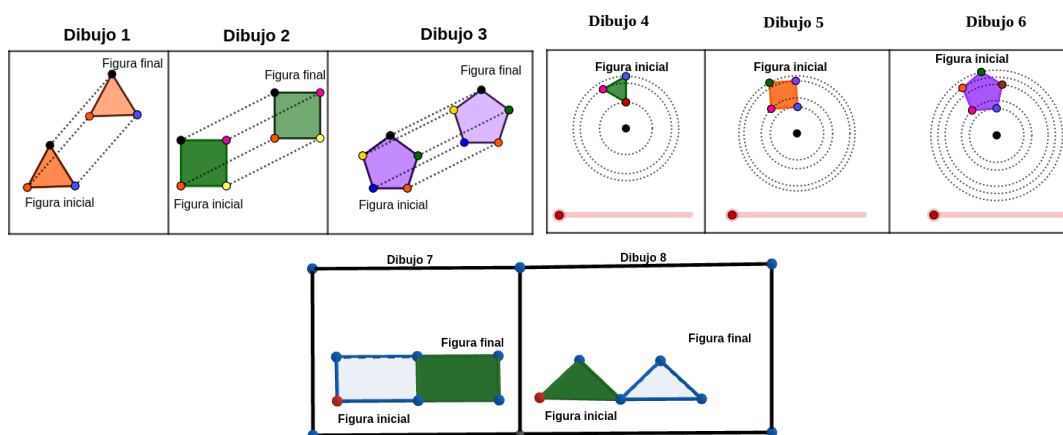


Figura 7: Traslación, giro y reflexión- Tarea 2A

Fuente: Elaboración propia

Los dibujos 1, 2 y 3 se adaptaron con el fin de que los estudiantes reconozcan dos figuras cuando son congruentes a partir de la conservación del tamaño, por medio de la superposición, con los primeros tres polígonos regulares en transformaciones isométricas como la traslación.

En los dibujos 4, 5 y 6 el estudiante mueve el deslizador para girar el polígono 360° . Al observar el movimiento del polígono se da cuenta que los vértices corresponden, puesto que giran sobre la misma circunferencia.

El estudiante reconoció que los polígonos se superpusieron al mover el deslizador 360° lo cual le permitió deducir que la forma y el tamaño del polígono no cambian después del giro. Además reconoce que los vértices y los lados de los polígonos no cambian.

Los dibujos 7 y 8 fueron un diseño propio de acuerdo con las características que presenta Pastor (1993) en su tesis doctoral en la enseñanza de la congruencia mediante traslación, giros y reflexión. Los dibujos 1, 2 y 3 fueron adaptados del diseño de la profesora Cumbal (2020), por lo tanto el proceso de aprendizaje hipotético se complementa de su diseño.

Tabla 12

Proceso de aprendizaje hipotético - Tarea 2B

Tarea de Aprendizaje	Proceso de Aprendizaje Hipotético
Tarea 2B. En cada uno de los Dibujos activa la casilla "iniciar" para observar el movimiento. Responde a las siguientes preguntas: a) ¿La figura final conserva el mismo tamaño que la figura inicial en el Dibujo 1? Explica tu respuesta, b) ¿La figura final conserva la misma forma que la figura inicial en el Dibujo 1? Explica tu respuesta, c) Al activar la casilla "iniciar" ¿Es posible afirmar que "la figura inicial y la figura final de los Dibujos 1, 2 y 3 se superponen"? Explica tu respuesta, d) A partir de las respuestas anteriores ¿Que se puede afirmar respecto a la forma y al tamaño de la figura final y la figura inicial en los Dibujos 1, 2 y 3? Explica tu respuesta, e) Al observar los Dibujos de la Tarea 2A, mencione propiedades de la composición de las parejas de figuras, f) Al observar los Dibujos de la Tarea 2B, mencione	Los estudiantes, (a) observan el movimiento y trayectoria que describe la figura inicial hasta obtener la figura final, (b) reconocen la colinealidad entre los puntos correspondientes de cada figura, e (c) identifican el centro de homotecia entre figuras planas semejantes cuyo factor de semejanza es $K > 1$. En los lados de las figuras se encuentran las unidades que lo conforman separados por puntos, con el fin de que el estudiante reconozca la proporcionalidad de las figuras en cada ampliación. Así podrán reconocer que cambia su tamaño, pero no la forma.

propiedades de la composición de las parejas de figuras y g) Mencione las propiedades que diferencian los Dibujos de la Tarea 2A y la Tarea 2B.

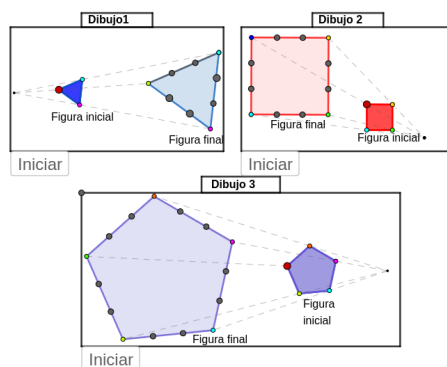


Figura 8: Semejanza- Tarea 2B

Fuente: Elaboración propia

La tarea se seleccionó del trabajo de Pechené y Garzón (2023), puesto que su diseño está basado en los niveles emergentes de la heurística, lo cual coincide con el marco teórico de este trabajo. Esta proyección tiene en común uno de los objetos matemáticos utilizados en este trabajo, la semejanza.

Con esta actividad se pretende recordar algunos aspectos relacionados con la homotecia de polígonos regulares, como por ejemplo, centro de homotecia. También identificar el centro de homotecia entre polígonos regulares relacionados, que tienen "la misma forma".

El proceso de aprendizaje hipotético de la tarea 1B fue tomado del diseño de Pechené y Garzón (2023) para guardar relación con la tarea diseñada.

Nivel General:

Las tareas del nivel general buscaban aproximar al estudiante al reconocimiento de las propiedades de la semejanza y la congruencia desde un aspecto métrico, identificando proporciones y relaciones en las medidas de los diferentes polígonos.

Tabla 13

Proceso de aprendizaje hipotético -Tarea 3A

Tarea de Aprendizaje	Proceso de Aprendizaje Hipotético
Tarea 3A. -Mueve el deslizador en los Dibujos 1, 2 y 3 para observar su movimiento. Determina la medida de los lados de la figura final y de la figura inicial, para ello ubica los puntos de la regla interactiva en los vértices que comprenden cada lado de las figuras. Responde las siguientes preguntas: a) En el Dibujo 1, ¿Que sucede con la medida de los lados de la figura final y la figura inicial?, b) ¿Considera que la forma y el tamaño de la figura final se conserva respecto a la forma y el tamaño de la figura inicial, en los Dibujos 1, 2 y 3? Explique su respuesta, c) A partir de la medida de los lados de las figuras en los Dibujos 1, 2 y 3, ¿Es posible afirmar que "la figura final y la figura inicial son congruentes"? ¿Por qué?. -Mueve el deslizador para evidenciar la transformación geométrica de las figuras en los Dibujos 4, 5 y 6. Utiliza la regla interactiva para medir los lados de las figuras. Responde las siguientes preguntas: d) En el Dibujo 4, ¿Qué sucede con la medida de los lados de la figura final y la figura inicial?, e) ¿Considera que la forma y el tamaño de la figura final se conserva respecto a la forma y el tamaño de la figura inicial, en los Dibujos 4, 5 y 6? Explique su respuesta, f) A partir de la medida de los lados de las figuras en los Dibujos 4, 5 y 6, ¿Es posible afirmar que "la figura inicial y la figura final son congruentes"? ¿Por qué?. -Mueve el punto rojo para observar la transformación, luego mueve los segmentos con el punto naranja para medir y comparar la medida en las figuras de cada dibujo. Responde las siguientes preguntas: g) En el Dibujo 7, ¿Qué ocurre con la medida de los lados de la figura final y la figura inicial?, h) ¿Considera que la forma y el tamaño de la figura final se conserva respecto a la forma y el tamaño de la figura inicial, en los Dibujos	En los dibujos 1, 2 y 3 los estudiantes determinan la longitud de cada figura, comparando la medida de sus lados. En primer lugar el estudiante tomará la métrica para medir los lados de las figuras de vértice a vértices, así conocerá las unidades que conforman cada lado de estas. Así el estudiante puede reconocer que a partir de la traslación de las figuras, la medida de los lados de la figura inicial y de la figura final no cambian, por lo tanto su forma y su tamaño son iguales, es decir, las figuras son congruentes. En los dibujos 4, 5 y 6 los estudiantes deben de realizar el ejercicio anteriormente mencionado, pero en este caso están frente a la transformación realizada por el giro de figuras, donde pueden percibir que sin importar dicha transformación el tamaño y la forma de las figuras se mantienen, por lo tanto, son congruentes. En los dibujos 7 y 8, el estudiante se encuentra frente a una reflexión. Se espera que por medio de los segmentos pueda dar cuenta de las unidades de los lados que conforman los polígonos de la figura inicial, que a ser reflejadas serán las mismas unidades en la figura final. Por medio de la reflexión se espera que el estudiante reconozca la conservación de la forma y el tamaño de las figuras y pueda determinar si una figura es o no congruente. Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante puede reconocer características de la congruencia y la semejanza, que las hace diferentes.

7 y 8? Explique su respuesta y i) A partir de la medida de los lados de las figuras en los Dibujos 7 y 8, ¿Es posible afirmar que "la figura final y la figura inicial son congruentes"? ¿Por qué?

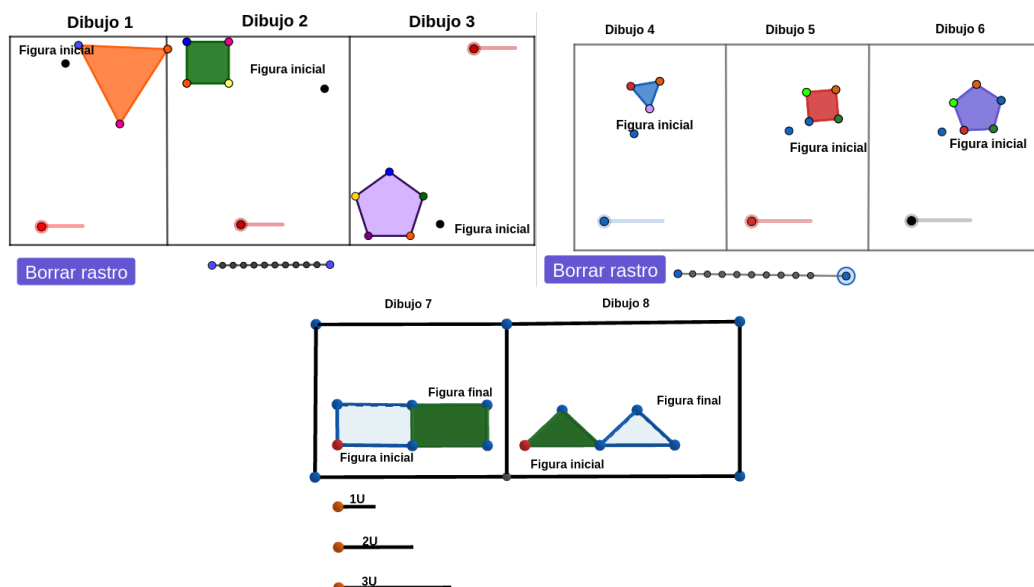


Figura 9: Traslación, giro y reflexión- Tarea 3A

Fuente: Elaboración propia

Los dibujos 1, 2 y 3 se seleccionaron del trabajo de la profesora Cumbal (2020), puesto que su diseño está orientado a los niveles de progresión, en particular los niveles de los modelos emergentes de la heurística, lo cual coincide con el marco teórico de este trabajo, además el concepto abordado es la congruencia a partir de la traslación, siendo esta uno de los conceptos esenciales de este trabajo.

Los dibujos 4, 5 y 6 se diseñaron para presentar la congruencia por medio del giro, en donde los lados de la figura final y la figura inicial deben conservar las mismas unidades, por lo que se presenta una regla interactiva con el fin de que el estudiante se dé cuenta que el tamaño y la forma se mantienen.

Los dibujos 7 y 8 fueron un diseño propio de acuerdo con las características que presenta Pastor (1993) en su tesis doctoral en la enseñanza de la congruencia mediante traslación, giros y reflexión. El proceso de aprendizaje hipotético se complementa con el

proceso hipotético utilizado en el diseño de la profesora Cumbal (2020), puesto que adaptamos algunos de sus dibujos en esta tarea.

Tabla 14

Proceso de aprendizaje hipotético - Tarea 3B

Tarea de Aprendizaje	Proceso de Aprendizaje Hipotético
Tarea 3B. Activa la casilla "iniciar" en cada uno de los dibujos para observar el movimiento. Utiliza la regla interactiva para comprobar la medida de los lados de las figuras. Puedes ubicar los puntos de la regla en los vértices que comprenden cada lado de la figura. Responde las siguientes preguntas: a) En el Dibujo 1, ¿Cuántas veces se amplió la figura final respecto a la figura inicial?, b) Al comparar la figura final respecto a la figura inicial del Dibujo 1, 2 y 3 ¿Qué cambio tuvo?, c) ¿La forma de la figura inicial y la figura final se conserva en los Dibujos 1, 2 y 3? Explica tu respuesta, d) ¿Qué puedes afirmar respecto a la forma y el tamaño, en los Dibujos 1, 2 y 3? Explica tu respuesta, e) ¿Las parejas de figuras de los Dibujos 1, 2 y 3 corresponden a una semejanza? ¿Por qué?, f) ¿Cuáles son las características principales para que las parejas de figuras de la Tarea 3A sean Congruentes?, g) ¿Cuáles son las características principales para que las parejas de figuras de la Tarea 3B sean Semejantes? y h) ¿Cuál es la diferencia entre las parejas de figuras Congruentes de la Tarea 3A y las parejas de figuras Semejantes de la Tarea 3B?	En primer lugar los estudiantes deben medir los lados de las figuras para conocer la proporcionalidad con que cambia el tamaño de las figuras después de cada ampliación. En segundo lugar, los estudiantes, (a) observan el movimiento y trayectoria que describe la figura inicial hasta obtener la figura final, (b) reconocen la colinealidad entre los puntos correspondientes de cada figura, e (c) identifican el centro de homotecia entre figuras planas semejantes cuyo factor de semejanza es $K > 1$.

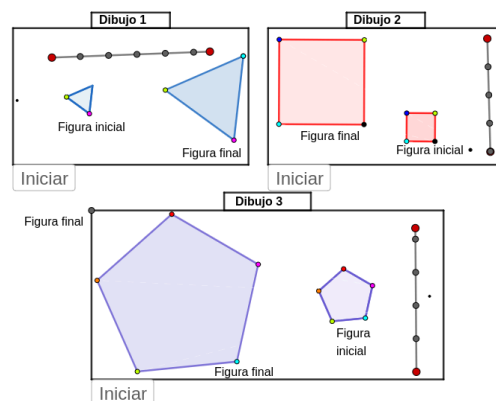


Figura 10: Semejanza- Tarea 3B

Fuente: Elaboración propia

La tarea se seleccionó del trabajo de Pechené y Garzón (2023), puesto que su diseño está basado en los niveles emergentes de la heurística, lo cual coincide con el marco teórico de este trabajo. Esta proyección tiene en común uno de los objetos matemáticos utilizados en este trabajo, la semejanza.

Con esta actividad se pretende reconocer y comprender cuándo una figura es una ampliación de otra, además determinar el factor de semejanza dada una figura y su ampliación.

El proceso de aprendizaje hipotético de la tarea 1B fue tomado del diseño del profesor Pechené y Garzón (2023) para guardar relación con la tarea diseñada.

Después de tener completa la adaptación de las tareas se realizó una lección en GeoGebra Classroom para que los estudiantes registraran sus respuestas y así tener un registro de la progresión en el desarrollo de las tareas.

Niveles de Progresión de Aprendizaje de la Congruencia y la Semejanza

En coherencia con el segundo objetivo se caracterizaron los niveles de progresión de la semejanza y la congruencia, de acuerdo con los resultados obtenidos en la codificación de las respuestas escritas y de las videograbaciones de los estudiantes.

Niveles de Progresión para la Congruencia

En el nivel situacional en relación con la congruencia, los estudiantes relacionaron la conservación del tamaño con el cambio de posición de tres formas diferentes: movimiento, cambio de lugar y desplazamiento. Además, los estudiantes reconocieron la figura inicial y final y el cambio de posición de esta última.

Por ejemplo, el estudiante E1 en su respuesta escrita mencionó que *“Por qué el movimiento que se realiza solo cambia las figuras de posición mas no cambia el tamaño”* además, en la interacción con el profesor expresó *“si porque literalmente solo se desplazó, más no perjudica el tamaño.”* Este tipo de respuesta da cuenta de una comprensión del estudiante en relación con la conservación del tamaño en la congruencia por medio de la traslación.

Otro ejemplo, es la respuesta escrita del estudiante E6 donde mencionó que *“si, cambia su posición no su forma”* y en la interacción con el profesor expresó *“puedo decir que se diferencia simplemente en su posición”*. Esta respuesta dejó en evidencia el reconocimiento de la figura inicial y la figura final relacionando solo un cambio de posición al momento de conservar sus demás propiedades o elementos, como lo es la forma y *“sigue la trayectoria en un movimiento rectilíneo”* y en la interacción con el profesor, este le pregunta por la trayectoria de la figura inicial para llegar a la figura final y el estudiante E9 responde *“en línea recta diagonal”*. Esta respuesta nos remite a las trayectorias observadas por los estudiantes en las tareas y a su intento a describirlas específicamente.

Los estudiantes también se percataron de que el desplazamiento o el cambio de posición no afecta la congruencia de la figura final y la figura inicial.

Por ejemplo, el estudiante E3 en su respuesta escrita mencionó *“si, porque tienen el mismo tamaño y tienen la misma forma, pero en diferente punto”* y en la interacción con el profesor, E3 expresó *“se puede decir que se desplazan pero que no se modifican”*. Este tipo

de respuesta da cuenta de la conservación de la forma y el tamaño de las figuras al desplazarse, es decir, dan cuenta de una congruencia.

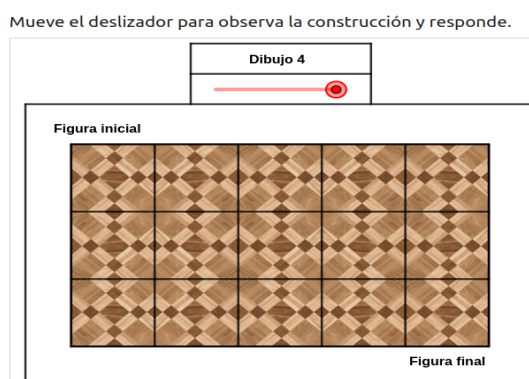
Sin embargo, en este nivel muy pocos estudiantes relacionaron la conservación del tamaño con la conservación de la inclinación y la conservación de la forma respecto al giro que da la figura. Además algunos estudiantes confundieron la trayectoria con el cambio de posición o cantidad, pues en el caso de las preguntas relacionadas con la reflexión, describieron la trayectoria como la acción de agregar figuras iguales para obtener una figura más grande.

Un ejemplo de lo anterior es la respuesta escrita del estudiante E14 al mencionar “*su trayectoria es que cada vez se le van agregando más cuadros haciendo que termine siendo una figura más grande*”. Esta respuesta nos permite evidenciar que el razonamiento del estudiante fue a partir de que la tarea presentaba una réplica de las figuras en cuanto a la reflexión, pues hizo una descripción de la trayectoria a partir de lo que visualizo en el applet. Sin embargo, presentó una confusión al momento de evidenciar la figura final, pues a pesar de tener las etiquetas, confunde la figura final de la reflexión, con todo el mosaico de réplicas.

A continuación en la ilustración 2 se presenta el applet de la tarea.

Ilustración 2

Dibujo 4- Tarea 1A



Fuente: Elaboración propia- Tarea reflexión

En el nivel referencial en relación con la congruencia, los estudiantes relacionaron la conservación del tamaño y la forma con la superposición de las figuras, además reconocieron que la figura final no cambia a pesar de las isometrías, por lo que la definen como congruente.

Un ejemplo de lo anterior es la respuesta escrita del estudiante E15 *“si es igual lo podemos comprobar porque al deslizar la barra roja la figura se mueve y da una vuelta quedando en la misma posición y lugar que la figura inicial y ahí podemos ver que las figuras encajan bien y que su tamaño ni forma se ven afectados”*. Este tipo de respuesta deja en evidencia la relación de la superposición con la congruencia de la figura final y la figura inicial. Pues a partir de la superposición los estudiantes reconocen la correspondencia de los vértices y lados de las figuras, entendiendo la superposición como la acción de cubrir una figura con otra.

Por otro lado, los estudiantes reconocieron que la congruencia de las medidas representa congruencia en el tamaño, es decir que, si todos sus lados se conservan, tamaño de la figura también.

Por ejemplo, en la pregunta que hacía referencia al tamaño de una figura, el estudiante E6 en su respuesta escrita mencionó *“si, porque sus medidas siguen iguales”*, además en la interacción con el profesor al preguntarle si ha medido las figuras expresó *“si, con el dedo”*. Este tipo de respuesta da cuenta de que a pesar de que el estudiante no tuvo en cuenta los puntos que dividieron las unidades de los lados de las figuras, se percató de que al conservar el tamaño de la figura también se conservan las medidas de sus lados.

El ejemplo anterior deja en evidencia el uso de herramientas no convencionales en las clases de geometría, pero que han servido en la aprehensión de conceptos por parte de los estudiantes.

Ilustración 3

Medición con el dedo realizada por el estudiante



Por otra parte, pocos estudiantes reconocieron que el giro no afecta o modifica las propiedades de la figura, como sus lados y sus vértices, pues en las transformaciones isométricas como la traslación, el giro y la reflexión, la figura final y la figura inicial son congruentes. Pocos estudiantes lograron reconocer que la congruencia implica la conservación de los lados, los vértices, la forma y el tamaño, pues algunos solo se percataron de la conservación de una de estas características.

En este nivel referencial, solo 6 estudiantes de 18 han logrado reconocer la congruencia como la conservación de la forma y el tamaño, en la mayoría de los casos, la han logrado reconocer solo como la conservación del tamaño.

Por ejemplo, el estudiante E7 en su respuesta escrita a la pregunta *“A partir de las respuestas anteriores ¿Es posible afirmar que “la figura final y la figura inicial en los Dibujos del 1 al 8 son iguales”? ¿Por qué?”* responde *“si, por el tamaño”*. En la respuesta dada por el estudiante se puede inferir que relaciona la congruencia con la conservación del tamaño, sin aun tener en cuenta la conservación de la forma.

En el nivel general en relación con la congruencia, los estudiantes reconocieron que si la medida de los lados se conserva la figura final y la figura inicial son congruentes. Para la

medida de los lados en las tareas, los estudiantes contaban con una regla interactiva, con el fin de que pudieran medir los lados de las figuras y así establecer una conservación de estos.

Por ejemplo, en la respuesta escrita el estudiante E9 mencionó “*las medidas de las figuras se mantienen iguales*”. Este tipo de respuestas muestran la relación de la congruencia con la conservación de los lados, pues al mencionar que las medidas de los lados se mantienen iguales, se infiere que tanto la figura inicial como la figura final no sufrieron cambios.

Al conservarse las medidas de los lados implícitamente se conserva su tamaño, de tal manera que al afirmar que si se conserva la medida de sus lados las figura son congruentes, se conserva la forma y el tamaño de la figura final respecto a la figura inicial.

En relación con la medida de los lados, algunos estudiantes reconocieron que estas medidas cambian de diversas maneras: se multiplican, aumentan o disminuyen, guardando una correspondencia entre figuras. La variación de las medidas de los lados de la figura final y la figura inicial se genera simultáneamente, de tal manera que sean congruentes.

Por ejemplo, el estudiante E8 en su respuesta escrita a la pregunta ¿Qué sucede con la medida de los lados de la figura final y la figura inicial? mencionó que “*se multiplica*”. De la misma manera el estudiante E2 mencionó que “*se modifica por la trayectoria*”. Este tipo de respuestas muestra una conservación de la medida de los lados en la figura final y la figura inicial, pues si la medida varía en la figura inicial de la misma manera debe variar en la figura final. De tal manera que la conservación de la medida de los lados se mantiene sin importar las variaciones de las figuras, lo que nos pone frente a una congruencia.

Niveles de Progresión para la Semejanza

En el nivel situacional en relación con la semejanza, los estudiantes reconocieron la conservación de la forma y cambio de tamaño en la figura inicial y la figura final. En este punto los estudiantes reconocieron la semejanza desde la visualización, pues siempre tuvieron en cuenta la perspectiva de las figuras.

Por ejemplo, el estudiante E8 en la respuesta escrita a la pregunta “¿Que se puede afirmar respecto a la forma y al tamaño de la figura final y la figura inicial en los Dibujos 1, 2 y 3?” mencionó “que la forma es igual pero su tamaño si cambia gracias a la perspectiva”. Este tipo de respuesta permite evidenciar el proceso de visualización en los estudiantes, pues desde su punto de vista pudieron observar el cambio de tamaño de las figuras después de realizar un movimiento. Además relacionaron ese cambio de tamaño con la conservación de la forma de las figuras.

En este nivel gran parte de los estudiantes lograron reconocer la diferencia entre la semejanza y la congruencia, es decir, evidenciaron la conservación de la forma y el tamaño para el caso de la congruencia y la conservación de la forma y un cambio en el tamaño para la semejanza.

Por ejemplo, el estudiante E11 en su respuesta escrita mencionó “que en el 1A son trayectorias diferentes, se conserva la forma y la figura y el tamaño y en la 1B se conserva la figura pero no el tamaño”, además en la interacción con el profesor expresó “que en la 1A son trayectorias diferentes, no cambia la forma ni el tamaño y en la 1B se conserva su forma pero no el tamaño”. La respuesta dada por el estudiante permitió evidenciar propiedades que diferencian la semejanza de la congruencia. En este punto los estudiantes relacionaron la conservación de la forma con que la figura final y la figura inicial no cambien como figuras, es decir, que conserven la misma cantidad de lados y vértices, sin importar su medida, en otras palabras su tamaño.

En este nivel situacional solamente un estudiante reconoció la conservación de la forma al cambiar la figura de posición de diferentes maneras: desplazamiento y cambio de lugar de la figura.

Como ejemplo de lo anterior el estudiante E5 en su respuesta escrita mencionó “si solo se mueve para adelante”. Este tipo de respuesta permite reconocer un cambio de

posición de las figuras, sin cambiar los elementos de su composición, como la forma y el tamaño. Así se evidenció un acercamiento a la noción de semejanza.

En el nivel referencial en relación con la semejanza, los estudiantes reconocieron la conservación de la forma y el cambio de tamaño, es decir que los estudiantes reconocieron características de la noción de semejanza. Además relacionaron el cambio de tamaño en la semejanza con la no superposición de la figura final y la figura inicial.

Por ejemplo, el estudiante E6 en su respuesta escrita mencionó *“la forma está igual pero el tamaño se amplía”*, además en la interacción con el docente expresó *“Forma igual, tamaño no. Entonces voy a poner, que la forma está igual pero el tamaño se amplía”*. Esta respuesta da cuenta de la comprensión de la noción de la semejanza, donde implícitamente se produce la conservación de la proporción de los lados y la conservación de la medida de los ángulos correspondientes.

Otro ejemplo de lo anterior es la respuesta escrita del estudiante E5 donde mencionó que *“no conserva su tamaño porque no se superpone”*. Esta respuesta da cuenta de la comprensión del estudiante en cuanto al cambio de tamaño por medio de la superposición, pues el cambio de tamaño de la figura final y la figura inicial no permite la superposición de las figuras, es decir, que en la semejanza sólo se producirá la superposición cuando la variable de homotecia sea igual a 1, lo cual nos remite a una congruencia de las figuras.

En cuanto al nivel general en la semejanza, los estudiantes reconocieron las veces que se amplió la figura final respecto a la figura inicial, es decir, la proporcionalidad de los lados correspondientes.

Por ejemplo, el estudiante E6 en su respuesta escrita mencionó *“3 veces”*, además en su interacción con el docente expresó *“La segunda dos”*. Este tipo de respuesta da cuenta de la comprensión de la proporcionalidad de los lados, además implícitamente el estudiante supone que el valor de la variable de homotecia es mayor que 1 sin importar el tamaño de las

figuras. En este punto la medida de los ángulos correspondientes entre la figura final y la figura inicial son iguales.

Como era de esperarse algunos estudiantes tuvieron confusión en las características de la semejanza con las de congruencia, además algunos ni siquiera reconocieron la conservación de la forma y el cambio de tamaño como la noción de semejanza.

Por ejemplo, en la respuesta a la pregunta sobre las diferencias entre la congruencia y la semejanza, el estudiante E12 en su respuesta escrita mencionó “*que todos son figuras congruentes porque todas son la misma figura*”. Este tipo de respuesta da cuenta de la falta de comprensión de la noción de semejanza, pues el estudiante demuestra que aún no tiene claras las propiedades de la semejanza y la congruencia en cuanto a la forma y el tamaño.

Otro ejemplo de lo anterior es la respuesta escrita del estudiante E4, en donde mencionó “*Si, ningún aspecto físico cambia*”. Esta respuesta permite evidenciar una falta de comprensión de la noción de semejanza, donde el estudiante no reconoció el cambio de tamaño en la figura, por lo cual se presenta una confusión entre las propiedades de los dos objetos matemáticos.

De esta manera se pudo evidenciar la progresión de los estudiantes en el aprendizaje de la congruencia y la semejanza, partiendo de un acercamiento visual con elementos del entorno para llegar a una conceptualización general de estas. A pesar de que el objetivo de las tareas no era llegar hasta la formalización de las nociones, se logró un acercamiento a estas, pues los estudiantes diferenciaron características de conservación de la forma y el tamaño a partir de las diferentes transformaciones.

El Proceso Real en Comparación con el Proceso Hipotético

El último resultado a presentar está directamente relacionado con el tercer objetivo, por lo que a continuación se muestra la comparación entre el proceso hipotético de

aprendizaje y el proceso real de los estudiantes durante la implementación del recurso, se presentará por cada tarea en ambas transformaciones trabajadas.

Congruencia Tarea 1A

En la tarea 1A se esperaba que los estudiantes identificarán características principales de las transformaciones presentadas en cada caso (traslación, giro y reflexión). Entre estas principales características los estudiantes debían identificar y comparar principalmente la figura inicial y la figura final, luego la trayectoria entre estas, para finalmente de forma visual identificar cuáles características se conservan, como la forma, el tamaño, la trayectoria y la inclinación, además también identificar el cambio de posición en las figuras. Finalmente se esperaba que a partir de estas características concluyeran que la figura inicial y la figura final eran “iguales” o congruentes.

De acuerdo con las 341 respuestas de los estudiantes en la tarea 1A podemos afirmar que los estudiantes en su mayoría lograron identificar las trayectorias, ilustradas en cada dibujo como rectilínea, circular, (traslación, giro, reflexión), para después en ellas identificar cuál era la figura inicial y cuál era la figura final después de realizar el deslizamiento, el giro o la reflexión.

Los estudiantes también lograron identificar visualmente las características que se conservan, como la forma, el tamaño, la inclinación y la trayectoria y a partir de ellas concluir que la figura inicial y la figura final eran iguales, reconociendo un cambio de posición. Otros códigos encontrados en esta tarea proponen que los estudiantes lograron identificar que cuando una figura cambia de posición conserva sus principales propiedades, como la forma y el tamaño, es decir van a ser iguales.

Una muestra de esto es la respuesta que dio uno de los estudiantes a la pregunta 8. *En el dibujo 2, ¿Podrías afirmar que la figura inicial y la figura final son iguales? ¿Por qué?* El estudiante respondió: *Son iguales porque tienen la misma forma, las mismas características*

sólo cambian de lugar. En esta respuesta podemos ver que el estudiante sí reconoció la conservación de la forma y el tamaño en el caso de la congruencia.

Algunos códigos menos frecuentes dan cuenta de que algunos estudiantes confundieron el tamaño con la forma, o la forma con la figura, por esto último no lograron identificar la figura inicial y la figura final, esto nos indica que es necesario recordar conceptos previos con los estudiantes para favorecer el desarrollo de las tareas.

Un ejemplo de esto es en una de las respuestas de la pregunta 16. *En el dibujo 4, ¿En qué se diferencian la figura inicial y la figura final?* En el dibujo 4 se mostraba la construcción de un mosaico a partir de la reflexión, la figura inicial correspondía a la primera baldosa y la figura final correspondía a la última baldosa. El estudiante respondió “*Que en la inicial hay un cuadro y en la final hay quince cuadrados*” esta respuesta nos muestra que no logró identificar cual es la figura inicial y la figura final por lo cual no logró evidenciar la conservación de tamaño entre las figuras.

Congruencia Tarea 2A

En la tarea 2A se esperaba que los estudiantes al observar la traslación, el giro y la reflexión identificaran la correspondencia entre los elementos homólogos de los polígonos. Además de lograr identificar que la traslación está condicionada por un segmento orientador, siendo este el que determina la orientación, la inclinación y la longitud del desplazamiento.

En este punto el estudiante debería identificar la superposición como una forma de comparar el tamaño y la forma de las figuras en el giro, la traslación y la reflexión. Además de poder comprobar la correspondencia de los vértices y la medida de los lados al quedar una figura sobre la otra. Por último el estudiante debería poder concluir que las figuras que cumplen la superposición son figuras congruentes.

Con los códigos recogidos en la tarea 2A podemos decir que los estudiantes en su mayoría lograron identificar elementos importantes de la traslación, la rotación y la reflexión,

como la correspondencia de los vértices, el segmento orientador y las medidas de los lados, además de identificar las diferentes trayectorias realizadas por las figuras.

Los estudiantes lograron reconocer la superposición como una forma de comprobación de la conservación de la forma y el tamaño, comprobando la igualdad de los lados, e identificaron que el cambio de posición no altera las propiedades principales de las figuras y llegaron a la conclusión de que la figura inicial y la figura final eran congruentes.

Esta comprensión de los estudiantes puede ser evidente en la respuesta que dio uno de ellos a la pregunta 20. *Al mover el punto rojo de la figura inicial, en los dibujos 7 y 8 ¿Es posible afirmar que “la figura final y la figura inicial conservan su tamaño”? ¿Cómo lo comprobarías?* A esto el estudiante respondió *si, conserva el mismo tamaño, lo que sucede es que la figura inicial se superpone en la figura final*. Aquí podemos evidenciar que el estudiante identifica la figura inicial y la final, además de que utilizó la superposición para comprobar el tamaño de la figura demostrando un progreso en la comprensión del concepto.

Por último algunos códigos que se encontraron son evidencia de que algunos estudiantes continuaron con la confusión entre el tamaño y la forma, además algunos no identificaron las trayectorias, por el contrario reconocieron únicamente un cambio de posición, también algunos estudiantes asociaron el color, con las características de la superposición.

Una muestra de estas dificultades puede ser la respuesta dada por un estudiante a la pregunta 2. *En el dibujo 2, ¿Es posible afirmar que “la figura final y la figura inicial tienen la misma forma”? ¿Cómo lo compruebas?* A esta pregunta el estudiante respondió: *Si, porque sus medidas siguen iguales*. Esto demuestra que el estudiante está confundiendo la forma de la figura con el tamaño de esta, con esta dificultad será muy difícil para el estudiante identificar las características de la semejanza y la congruencia, pues las confunde entre sí.

Congruencia Tarea 3A

En la última tarea referente a la congruencia se esperaba que los estudiantes logaran identificar la igualdad entre las medidas de los lados de las figuras, para esto debía utilizar la regla para medir y comparar las medidas obtenidas, esto en cada una de las transformaciones, traslación, giro y reflexión. A partir de la igualdad de la medida de los lados deberían inferir que el tamaño de las dos figuras era igual, para poder llegar a la conclusión de que las figuras eran congruentes.

Los estudiantes en esta tarea debían reconocer ya genéricamente la conservación de la forma y el tamaño como elementos principales de la congruencia e identificar cuando una figura es congruente con otra.

En las respuestas de los estudiantes en esta tarea se evidenció que reconocieron las diferentes trayectorias de las transformaciones, además de reconocer la igualdad entre figuras posterior a la transformación, algunos llegaron a la conclusión de que los diferentes desplazamientos no afectan en nada a las figuras más que en su posición. Varios estudiantes lograron reconocer la congruencia como la conservación de la forma y el tamaño, además reconocieron elementos importantes, como la conservación de las medidas de los lados y la correspondencia de los vértices de las figuras.

Una muestra de estos niveles de comprensión de los estudiantes se evidencia en la siguiente respuesta a la pregunta 14. *A partir de la medida de los lados de las figuras en los Dibujos 7 y 8, ¿Es posible afirmar que “la figura final y la figura final son congruentes”?* *¿Por qué?* el estudiante contesta: *Si, porque cumple con las cualidades de la congruencia tienen el mismo tamaño y la misma forma.* En esta respuesta el estudiante demuestra que ha logrado comprender y apropiarse de la noción de congruencia desde los aspectos más básicos, la conservación de la forma y el tamaño.

En esta tarea se encontraron algunas respuestas contradictorias o sin sentido que se fueron dejando de lado, además algunos estudiantes no llegaron a esta parte del recurso.

Semejanza Tarea 1B

En la tarea 1B correspondiente a la semejanza, se esperaba que los estudiantes lograran a partir de la observación identificar el cambio de tamaño de la figura final respecto a la inicial, además de reconocer la conservación de la forma. El estudiante debería empezar a identificar características de la semejanza en la transformación de homotecia y encontrar alguna diferencia con la congruencia.

Los códigos recolectados, dan cuenta de que los estudiantes lograron reconocer la conservación de la forma, además identificaron un cambio de posición de la figura final respecto a la inicial, teniendo en cuenta la perspectiva de la visión de las figuras. La mayoría de los estudiantes logró reconocer un cambio en el tamaño de las figuras y lo reconocieron como la principal diferencia entre la semejanza y la congruencia.

Una prueba del proceso de comprensión de los estudiantes es la respuesta que dieron a la pregunta 7. *Mencione la principal característica que diferencia los Dibujos de la Tarea 1A y la Tarea 1B.* La respuesta dada por el estudiante fue: *En la figura 1A cambia la posición de las figuras pero se conserva el tamaño y en la 1B cambió el tamaño por la perspectiva del tren.* De esta forma el estudiante muestra su avance en el reconocimiento de la congruencia y empieza a acercarse a las propiedades de la semejanza.

Otros códigos de menor frecuencia revelan que algunos estudiantes confundieron de nuevo el tamaño con la forma, y no identificaron el cambio de tamaño en las figuras, en algunos casos los estudiantes no reconocieron la figura final y la inicial, además de referir que eran iguales.

Un ejemplo de esta dificultad podría ser una de las respuestas dadas a la pregunta 3. *Al comparar la figura final con la figura inicial en el dibujo 2, ¿Se conserva el tamaño?* a lo que uno de los estudiantes contestó: *Se conserva el tamaño del carro, pero cambia su perspectiva haciendo que se vea más pequeño* en esta respuesta podemos ver que el estudiante se concentra más en las propiedades físicas de la conservación de la masa, y no en comparar la figura final con la figura inicial, dejando de lado entonces las propiedades de la semejanza.

Semejanza Tarea 2B

En esta segunda tarea de la semejanza se esperaba que los estudiantes por medio de la observación lograran reconocer la trayectoria que describe la figura inicial hasta llegar a la final, el estudiante debería identificar la colinealidad entre los puntos correspondientes de las figuras en la transformación de homotecia. El estudiante además debería poder reconocer la existencia de una proporcionalidad en la identificación de cambio de tamaño, haciendo uso de las unidades marcadas en los lados de las figuras, por último el estudiante debería hacer uso de la superposición como medio para comparar el tamaño entre las figuras y poder concluir que es lo único que cambia en esta transformación.

Respecto a los códigos recolectados en la tarea 2B, estos permitieron, evidenciar que los estudiantes identificaron y comprobaron por superposición que la figura final cambiaba de tamaño respecto a la figura inicial, además lograron identificar la trayectoria realizada por las figuras. A partir de esta comprobación, lograron reconocer el cambio de tamaño como propiedad principal de la semejanza.

Los estudiantes reconocieron individualmente las características de la semejanza como la conservación de la forma y cambio en el tamaño; y las de la congruencia, como la conservación del tamaño y la forma. Posteriormente las compararon para llegar a la conclusión de que su principal diferencia, es la variación del tamaño.

Un ejemplo donde se puede evidenciar el uso de la superposición para la comprobación del tamaño es en las respuestas de la pregunta 7. *Al activar la casilla “iniciar” ¿Es posible afirmar que “la figura inicial y la figura final de los dibujos 1, 2 y 3 se superponen”? explica tu respuesta.* Una de las respuestas fue: *No se superponen porque sus vértices no coinciden.* Esta respuesta demuestra que el estudiante se ha apropiado de la superposición para la comparación de figuras, lo que le permite identificar el cambio de tamaño en la semejanza.

Hubo algunos códigos de muy baja frecuencia que evidenciaban que algunos estudiantes continuaban con la confusión entre la forma y el tamaño, y sus respuestas eran contradictorias. Una de estas respuestas fue dada en la pregunta 6. *¿La figura final conserva la misma forma que la figura inicial en el dibujo 3? Explica tu respuesta.* Un estudiante contestó: *No, porque la figura inicial es más pequeña que la final.*

En esta afirmación se puede identificar que el estudiante confunde el tamaño con la forma, pues la pregunta se refiere a la forma, esperando que el estudiante responda a partir de las características propias de la forma, cantidad de lados, de ángulos, etc. Por el contrario, el estudiante da una respuesta basada en características referentes al tamaño de las figuras.

Semejanza Tarea 3B

Por último se esperaba que los estudiantes lograran reconocer la proporcionalidad a partir de la medición de los lados de las figuras, y reconocer “cuántas veces se amplía la figura”. Posteriormente deberían reconocer la colinealidad entre los puntos correspondientes de la figura y concluir que la principal propiedad de la semejanza es la conservación de la forma y cambio del tamaño, y la principal diferencia entre esta y la congruencia es la variación en el tamaño.

Los códigos referentes a la Tarea 3B dan cuenta de que los estudiantes lograron reconocer la proporcionalidad desde la cantidad de veces que se amplió una figura en la

transformación de homotecia, además reconocieron que la forma de la figura inicial y la final eran iguales y por superposición comprobaron el cambio de tamaño entre las figuras.

Al finalizar se pudo evidenciar que la mayoría de los estudiantes logró reconocer las propiedades de la semejanza y de la congruencia de forma individual, y además lograron definir el tamaño como la diferencia principal entre las dos transformaciones.

Esto se puede evidenciar en las respuestas dadas por los estudiantes en la pregunta 10. *¿Cuál es la diferencia entre las parejas de figuras congruentes de la Tarea 3A y las parejas de figuras semejantes de la Tarea 3B?* una de las respuestas, fue: *En la 3A su tamaño y su forma son el mismo, pero en la 3B se mantiene su forma pero no su tamaño.* Esta respuesta muestra que el estudiante se aproximó a las nociones de semejanza y congruencia desde las características más básicas.

Unos pocos estudiantes no lograron reconocer las características de las transformaciones o las confundieron entre ellas, al momento de nombrarlas. Esto se puede observar en una respuesta dada a la pregunta 9. *¿Cuáles son las características principales para que las parejas de figuras de la Tarea 3B sean semejantes?* Un estudiante respondió, *En que siguen siendo la misma figura*, esta respuesta muestra que el estudiante no logró reconocer el cambio de tamaño y la conservación de la forma como características de la semejanza, por lo que fácilmente la va a confundir con la congruencia.

Finalmente se pudo observar que el proceso hipotético de aprendizaje y el proceso real se relacionan entre sí, dando como resultado que los estudiantes lograron avanzar de manera progresiva en el acercamiento a la noción de semejanza y congruencia a pesar de algunas dificultades con los conocimientos previos.

Capítulo V: Conclusiones

Este trabajo tuvo como objetivo general caracterizar la progresión del aprendizaje de la congruencia y la semejanza de los estudiantes de grado 8° mediante un recurso que integra tecnologías digitales, con el propósito de responder a este objetivo, se propusieron tres objetivos específicos. A los cuales se les dará conclusión de forma individual, donde en el primero se enfoca en el diseño de la progresión de aprendizaje para las nociones de semejanza y congruencia. El segundo se vincula a la descripción de los niveles de progresión del aprendizaje de las nociones deseadas y por último la comparación del proceso hipotético con el proceso real de los estudiantes, donde se determinaron las características de la progresión.

Diseño de una Progresión de Aprendizaje para la Noción de Semejanza y Congruencia

En relación con el primer objetivo específico de este trabajo, se diseñó un THA para el aprendizaje de la noción de semejanza y congruencia en los tres primeros polígonos regulares, puesto que en la literatura existente no se encontró una progresión de aprendizaje relacionada con este contenido matemático.

La THA resultó ser una herramienta útil en la clase de geometría, puesto que al estar inmersa en los contextos de diseño captó la atención de la mayoría de los estudiantes.

Se infiere que a partir de la THA los estudiantes van construyendo progresivamente las nociones de semejanza y congruencia. Las tareas al estar adaptadas a los niveles de la heurística en los modelos emergentes primero acercaban a los estudiantes a características de forma y tamaño, para que finalmente llegarán a la comprensión de las nociones, es decir, cumplen una función de transición.

Descripción de los Niveles de Progresión de Aprendizaje de la Semejanza y la Congruencia

En relación con el segundo objetivo específico de este trabajo, el diseño de la THA permitió conocer los niveles de comprensión y de aprendizaje de los estudiantes. En el nivel situacional los estudiantes exploraron las tareas y a partir de la visualización concluyeron que en la congruencia se da la conservación del tamaño de la figura final y la figura inicial con el cambio de posición de tres formas diferentes: movimiento, cambio de lugar y desplazamiento.

La congruencia se presentó con relación a tres isometrías: la traslación, el giro y la reflexión. En donde la THA permitió a los estudiantes observar la trayectoria y la inclinación de las figuras.

Sin embargo, no todos los estudiantes lograron identificar la conservación de la forma en cuanto al giro de las figuras y la conservación del tamaño de acuerdo con la inclinación de las figuras.

Para el caso de la semejanza los estudiantes reconocieron la conservación de la forma y cambio de tamaño en la figura final y la figura inicial, además identificaron características que diferencian la congruencia de la semejanza. Sin embargo, pocos estudiantes lograron identificar la conservación de la forma al cambiar la posición de la figura.

En cuanto al nivel referencial los estudiantes establecieron una relación entre la conservación de la forma y el tamaño al superponer las figuras. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes relacionaron la congruencia con la conservación del tamaño, pasando un poco desapercibida la forma de la figura. Para el caso de la semejanza, los estudiantes reconocieron la conservación de la forma y el cambio de tamaño con la no superposición de la figura final y la figura inicial.

Por último, en el nivel general los estudiantes reconocieron que si la medida de los lados se conserva, la figura final y la figura inicial son congruentes, relacionando dicha

conservación con el tamaño de las figuras. Además los estudiantes reconocieron las veces que se amplió la figura final respecto a la figura inicial, es decir, la proporcionalidad de los lados correspondientes.

Lo anterior es una muestra de la caracterización de la THA en cuanto a la progresión del aprendizaje de los estudiantes descrita en las bases teóricas de este trabajo, lo cual está en relación con los objetivos de este. De esta manera se puede observar una coherencia con la caracterización de las nociones de semejanza y congruencia presentada en la tabla 1.

Dicho lo anterior, se puede concluir que los estudiantes fueron avanzando progresivamente en los niveles de aprendizaje, para llegar finalmente a la construcción de las nociones de semejanza en cuanto a sus propiedades de forma y tamaño. Sin embargo algunos estudiantes presentaron confusiones entre las características de ambas nociones.

Comparación del Proceso Hipotético con el Proceso Real de Aprendizaje

Respecto al tercer objetivo específico, se pudo evidenciar que los códigos obtenidos a partir de las respuestas verbales y escritas de los estudiantes permitieron evidenciar el progreso de los estudiantes en el acercamiento a la noción de semejanza y congruencia. Además el proceso real de aprendizaje evidenciado en la mayoría de los estudiantes correspondió con el proceso hipotético de aprendizaje diseñado, en la preparación del experimento, exceptuando unos pocos casos particulares. Por lo que se puede afirmar que los estudiantes avanzaron en los diferentes niveles de progresión de la forma esperada.

A partir de evidenciar que el proceso de aprendizaje de los estudiantes fue congruente con el esperado, se llega a la conclusión de que la implementación de un recurso digital, basado en una THA, soportado en niveles de progresión, permitió a los estudiantes acercarse satisfactoriamente a las nociones de semejanza y congruencia desde las propiedades de forma y tamaño.

Capítulo VI: Limitaciones y recomendaciones

Durante el desarrollo de este trabajo de investigación surgieron ciertas limitaciones que dificultaron su realización e implementación en el aula. A continuación presentamos cada una de ellas.

En primer lugar se evidenció una falta de documentación respecto al uso de polígonos regulares con recursos que integran tecnología digital, en especial el uso del pentágono, lo cual dificultó la presentación de su definición en el marco teórico. Además no fue posible encontrar información con respaldo sobre propiedades o elementos de la composición del pentágono, sin embargo se presentó una breve definición de este.

En segundo lugar se evidenció una escasez en cuanto a las investigaciones sobre la congruencia con recursos que integran tecnología digital. A diferencia de la semejanza, al momento de realizar la búsqueda en los diferentes repositorios nacionales e internacionales, no se encontraron referentes teóricos para la congruencia, lo cual dificultó la composición de los antecedentes de este trabajo.

En tercer lugar se presentó una gran dificultad para representar de forma correcta la transformación de la reflexión al momento de realizar el diseño de la THA. A la hora de representar la reflexión en el recurso, hubo contratiempos, debido a que usualmente la reflexión en el plano se trabaja a partir de la simetría, los recursos encontrados se enfocaban en ella. Sin embargo la reflexión es una transformación en el espacio, por lo que lo correcto era estar representada en tres dimensiones, por lo cual hubo que diseñar los Applets para las actividades.

Por último, el tiempo dispuesto por la institución para la realización de la actividad fue corto, pues cada sesión es de 45 min por lo que al trabajar tres horas como se tenía planeado, realmente se trabajaron 2 horas y 15 minutos, por lo que algunos estudiantes no lograron terminar las actividades.

Como recomendaciones a futuras investigaciones se deja la idea de investigar sobre los polígonos regulares, sus propiedades y características para posteriormente continuar haciendo investigación sobre su manipulación y aplicación en distintos elementos matemáticos. Es pertinente destacar que estos polígonos son relevantes en varias áreas del conocimiento y diferentes ciencias, por lo que ampliar el estudio de ellos beneficiaría no sólo a la educación matemáticas, sino a otros campos que intervienen en la educación.

La reflexión como transformación geométrica también es un área que genera gran interés. Teniendo en cuenta la nueva influencia que tienen los recursos que integran tecnología digital en la educación actual y futura, se considera que ampliar la representación de la reflexión en el espacio, podría aportar significativamente herramientas para la enseñanza y aprendizaje de esta transformación.

Por último, se resalta que este experimento de enseñanza se llevó a cabo en una institución privada con pocos estudiantes, por lo cual sería interesante ampliarlo y llevarlo a cabo en otros espacios, como instituciones oficiales o a un grupo más grande de estudiantes, para así evidenciar los resultados y compararlos con los del presente trabajo. Además se podría ampliar desde la parte del diseño para alcanzar el nivel formal y aplicarlo en un grado superior y comprobar si es oportuno para todos los niveles de progresión.

Referencias

- Acosta, M., y Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: Una propuesta desde la Teoría de las situaciones Didácticas*. Énfasis. Bogotá DC.
- Arbeláez, L. (2017). *Ambiente de aprendizaje para la enseñanza de la congruencia y semejanza de triángulos basado en problemas y mediado por TIC para estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Román María Valencia del municipio de Calarcá, Quindío* (Tesis de maestría), Universidad Tecnológica de Pereira.
<https://hdl.handle.net/11059/9370>
- Bonelo, Y., y Maca, Ó. E. (2023). La visualización de las transformaciones isométricas, un elemento para la conceptualización en DGE en estudiantes de básica secundaria. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (8), e2012413.
https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i8.12413
- Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado* (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Barcelona. <https://hdl.handle.net/10803/458629>
- Cárdenas, D. P. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica* (Tesis de maestría), Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/74930>
- Cardona, S., Rave, J. C., y Muñoz, J. M. (2012). *La geometría en el aula: una propuesta para la interpretación de conceptos e ideas matemáticas y físicas*. (Trabajo de grado). Universidad de Antioquia. <https://hdl.handle.net/10495/28118>
- Castiblanco, A. (2002). Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas. *Conferencia presentada en memorias segundo encuentro colombiano de Matemática Educativa*, Ministerio de Educación Nacional. <https://core.ac.uk/reader/158573360>

- Clements, D. H., y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.
- Confrey, J. (2006). *The evolution of design studies as methodology*, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Hand-book of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press
- Cumbal, L. (2020). *Caracterización de las prácticas de profesores nóveles en la integración de recursos digitales con una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la traslación* (Tesis de maestría), Universidad del Valle.
<https://hdl.handle.net/10893/18487>
- Erazo, E. (2019). *Estrategias dinámicas en la enseñanza de congruencias y semejanzas de triángulos: Guía de aplicación GeoGebra* (Tesis de maestría), Universidad de Guayaquil. <http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/39213>
- Estévez, R. A. (2022). *Retroacciones didácticas programadas en DGPAD para el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia* (Tesis de maestría), Universidad Industrial de Santander. <https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/11288>
- Flores, J. (2010). *Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de geometría* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”. <https://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmczw246>
- García, G., y Ávalos, J. (2021). *Uso de herramientas tecnológicas para construir polígonos mediante la congruencia y semejanza en tercer grado de secundaria* (Trabajo de grado), Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí.
<https://repositorio.beceneslp.edu.mx/jspui/handle/20.500.12584/885>
- González, J. C. y Maestre, W. L. (2012). *¿Pantógrafo o Cabri? Artefactos para la conceptualización*. (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional.
<http://hdl.handle.net/20.500.12209/2214>.

- Gravemeijer, K. (1994). *Educational development and developmental research in mathematics education*. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(5), 443–471.
- Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas* (Tesis doctoral), Universitat de València.
<http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.2928.8729>
- Hegedus, S., y Moreno-Armella, L. (2020). Learning practices in digital environments. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 295–299). London: Springer.
- Hemmerling, E. M. (1981). *Geometría elemental*. Limusa.
- Hoyos, D. L. (2014). Capítulo 4: Triángulos. *Geometría fundamental*. (pp. 27-39). Universidad del Valle.
- Hershkowitz, R. (2020). Shape and space-Geometry teaching and learning. *Encyclopedia of Mathematics Education*, (pp 542-547). London: Springer
- Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Brill Sense.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis doctoral en Didáctica de la Matemática). Universidad de Valencia.
<https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- Lozada, R. (2018). *Diseño e implementación de una secuencia didáctica aplicada a la enseñanza de la congruencia de triángulos, mediante el uso del software GeoGebra*. (Tesis de maestría). Universidad del Cauca.
<http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/478>

- Luengo, R. (1990). Bases teóricas: proporcionalidad y semejanza. *En GRUPO BETA (Ed.), Proporcionalidad geométrica y semejanza* (pp. 47-91). Síntesis
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Addison - Wesley Iberoamericana
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Revista de investigación y experiencias didácticas: enseñanza de las ciencias*, 29(1), 75-88. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824>.
- Moreno, L. (2003). *Cognición y Computación: el Caso de la Geometría y la Visualización*. Eduteka de Colombia. <https://eduteka.icesi.edu.co/articulos/GeometriaVisual>
- Negrón, C., & Estrada, M. (2000). Aprendiendo a descubrir con la computadora. *Ponencia al evento Pedagogía 2001*, Universidad de Holguín.
- Ojeda, J. E. (2021). *Diseño y desarrollo de una ATE para la comprensión de la semejanza con soporte en la actividad de visualización* (Tesis de maestría), Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <http://hdl.handle.net/11349/29680>
- Pechené, V., y Garzón, D. (2023). *Una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales*. *En XVI Congreso Interamericano de Educación Matemática (CIAEM-IACME)* (pp. 1-7). Lima, Perú.
- Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K., y Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. *ZDM: the international journal on mathematics education* 49(1), 645-661. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z>

- Pérez, C. R. (2019). *Prácticas matemáticas y tipos de razonamientos con SGD para la congruencia de triángulos: un estudio de caso desde la génesis instrumental* (Tesis doctoral), Universidad Nacional de Córdoba.
<http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.26217.62569>
- Sanabria, A. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos de semejanza y congruencia, dirigida a estudiantes de grado octavo* (Tesis de maestría), Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63892>
- Santacruz, M. (2012). La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental. Conferencia presentada en el 10° *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Universidad del Valle.
<https://www.researchgate.net/publication/284721365>
- Simon, D, Horne, M, Clements, D, Confrey, J, Maloney, A, Sarama, J, Tzur, R and Watson, A. (2017). 'Researching and using learning progressions (trajectories) in mathematics education', in Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Singapore, 17-22 July 2017, pp. 109-136
- Simon, M. (2020). *Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 354-357). London: Springer.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*.
<https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/978-94-011-3168-1>
- Treffers, A. (1987). *Antecedentes didácticos de un programa de matemáticas para la educación primaria*. En *Three Dimensions*. Springer Dordrecht.
<https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9>

Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., Salinas-Hernández, U., & Sacristán, A. I. (2020). *El enfoque documental de lo didáctico*. DAD-Multilingual.

<https://hal.science/hal-02557744v2/document>

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2020). *Realistic Mathematics Education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.713-717) London: Springer.

Zolkower, B., y Bressan, A. (2012). Educación matemática realista [Realistic mathematics education]. In M. Pochulu & M. Rodríguez (Eds.), *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. (pp.175-200) Editorial Universitaria Villa María, Universidad de General Sarmiento.

Anexos

Libro en GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/acxa5q3k>