

**Aprendizaje de la Traslación en 6º Grado: Rediseño de una Trayectoria Hipotética
de Aprendizaje Construida con GeoGebra**

Daniela Brigitte Mora Torres

Jhonathan Stiven Muñoz Diaz

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2023

**Aprendizaje de la Traslación en 6º Grado: Rediseño de una Trayectoria Hipotética
de Aprendizaje Construida con GeoGebra**

Daniela Brigitte Mora Torres

Jhonathan Stiven Muñoz Díaz

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Dirigido por:

Mag. Leidy Cristina Cumbal Acosta

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2023



Programa Académico Licenciatura en Matemáticas

Fecha

Día	Mes	Año
06	10	2023

Código del programa: 3492.

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Aprendizaje de la tabulación en 6º Grado: Rediseño de una THA

Se trata de:

Proyecto ☐

Informe Final ☒

Director

Leidy Cumbal

Nombre del Primer Evaluador

Diego Garzón

Nombre del Segundo Evaluador

Jaime Castaño

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Téfonos de contacto
<u>Daniela Mora</u>	<u>1631666</u>	<u>3492</u>	<u>daniela.mora@correounivalle.edu.co</u>	<u>3152156754</u>
<u>Jhonatan Muñoz</u>	<u>1632434</u>	<u>3492</u>	<u>jhonatan.munoz@gmail.com</u>	<u>3119367237</u>

Evaluación

Aprobado ☒

Meritorio ☐

Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐

No Aprobado ☐

Incompleto ☐

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐

Primer Evaluador ☐

Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas

Leidy Cumbal

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

DIEGO GARZÓN C.

Primer Evaluador

Jaime Castaño

Segundo Evaluador

Recomendaciones ☐

Observaciones ☐

Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación de obras en el repositorio institucional

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE,

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)



LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Aprendizaje de la Traslación en 6° Grado: Rediseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Construida con GeoGebra

Autores:

Nombre: Daniela Brigitte Mora Torres

Firma:
C.C. 1107520262

Nombre: Jhonathan Stiven Muñoz Díaz

Firma:
C.C. 1151947007

Fecha: 06/10/2023

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

(Si de sea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

Agradecimientos

Daniela Torres

A mi familia, por ser mi ancla en este viaje, por el amor incondicional, el apoyo constante y la creencia en mí incluso cuando dudé de mí misma. Cada logro que alcanzo es también suyo.

A Jhonathan, por su amistad, apoyo y por ser un compañero excepcional. Es nuestro logro, y estoy agradecida por haberte tenido a mi lado en esta travesía académica.

A aquellos que ya no están con nosotros, pero cuyas enseñanzas y recuerdos siguen vivos en mi corazón. Su presencia es eterna y su influencia ha moldeado la persona que soy.

A mi directora de tesis, por su inquebrantable dedicación, paciencia y sabiduría. Su guía experta y mentoría han sido esenciales para el desarrollo de este trabajo.

A mis compañeros de carrera, por el apoyo, la colaboración y la amistad que hemos compartido.

A la Universidad del Valle, por proporcionar un entorno de aprendizaje excepcional y las herramientas necesarias para mi formación académica.

Jhonathan Muñoz

A Luz Mary, mi madre que ha esperado este logro, seguramente, mucho más que yo y que siempre me apoyó a pesar de los fracasos que he arrastrado.

A Briyí, por confiar en mí para esta empresa, aunque fuera una mala idea para cualquiera.

A la profesora Leidy, por aceptar la dirección de nuestro trabajo, porque nadie habría dado dos pesos por nosotros.

A la Universidad del Valle, por enseñarme que no hay que idealizar a nada ni a nadie. Pasar por aquí fue una experiencia tan fantástica como desagradable.

Por último, le agradezco todos los días a dios por darme esta buena oportunidad. Por los que me han apoyado: a mi mamá, a mi papá, a mi tía Piedad, a mis amigos de mi barrio, a todo el mundo que me ha apoyado. Es una emoción muy grande, o sea, no me lo puedo entender aquí, que mi trabajo fue aprobado y por fin me voy a graduar. Lo hice en la casa de una amiga que se llama Doris Mercado, que le agradezco todos los días a ella por ayudarme a redactar.

Resumen

A partir del interés por el aprendizaje de la transformación isométrica de la traslación y el estudio de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje inmersa en un ciclo de implementación, análisis y rediseño, este ejercicio de investigación caracterizó la progresión del aprendizaje de un grupo de estudiantes de 6º año de escolaridad, con base en la Heurística de los Modelos Emergentes. Para esto, se implementó la estrategia metodológica de un Experimento de Enseñanza que permitió, mediante un análisis riguroso de la puesta en escena de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la enseñanza de la traslación, hacer un contraste entre el proceso de aprendizaje esperado en los estudiantes y el que se desarrolló realmente. Con base en estos insumos, se construyó una propuesta de rediseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje con el fin de subsanar sus limitaciones identificadas en el análisis retrospectivo.

Palabras Clave: traslación, transformaciones geométricas, trayectoria hipotética de aprendizaje, heurística de los modelos emergentes, tecnologías digitales, ambientes de geometría dinámica, GeoGebra, investigación cualitativa, experimento de enseñanza, investigación basada en diseño, videojuegos.

Tabla de Contenido

Introducción	5
Capítulo I: El Problema de Investigación	7
Planteamiento del Problema	7
Justificación	11
Antecedentes	15
Objetivos.....	18
Objetivo General.....	18
Objetivos Específicos.....	19
Capítulo II: Marco Teórico	20
Traslaciones Geométricas en el Plano	20
Errores y Dificultades en el Aprendizaje de la Traslación Geométrica.....	26
Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje	30
Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes.....	32
Ambientes de Geometría Dinámica	35
Videojuegos y Educación	36
Capítulo III: Metodología de Investigación	39
Marco Metodológico	39
Investigación Basada en Diseño	39
Experimentos de Enseñanza.....	40
Análisis de Datos Cualitativos.....	41
Fases del Experimento de Enseñanza	44
Fase 1: Preparación del Experimento	44
Fase 2: Experimentación.....	48
Fase 3: Análisis Retrospectivo	52
Capítulo IV: Resultados de Investigación	88
Descripción de los Niveles de Comprensión de los Estudiantes Intervenidos Sobre la Traslación	88
Comparación de la THA y la Trayectoria de Aprendizaje Real del Grupo de Estudiantes Intervenidos	94
Propuesta de Rediseño de la THA de Cumbal (2020)	99
Capítulo V: Conclusiones y Discusiones	112
Descripción de los Niveles de Comprensión de los Estudiantes Intervenidos	112

Comparación de la THA y la Trayectoria de Aprendizaje Real	113
Rediseño de la THA	114
Limitaciones y Recomendaciones	115
Referencias Bibliográficas	118
Anexos	126
Anexo 1. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de Cumbal (2020).	126
Anexo 2. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Rediseñada	132

Índice de Tablas

Tabla 1: Cronograma Previsto para la Experimentación.....	48
Tabla 2: Etiquetas Destacadas en la Codificación Libre de las Interacciones	53
Tabla 3: Codificación del Segmento de Aprendizaje 2A-4	54
Tabla 4: Categorías por Nivel y sus Códigos Emergentes Destacados.....	55
Tabla 5: Comparación del PAH y el Proceso de Aprendizaje Real de la Tarea 2A	57
Tabla 6: Conservación del Tamaño por Institución Visual	59
Tabla 7: Conservación de la Inclinação por Institución Visual	60
Tabla 8: Identificación del Lugar Geométrico de la Trayectoria	61
Tabla 9: Incoherencia Respecto a la Congruencia, la Conservación del Tamaño y la Forma.....	62
Tabla 10: Comparación Entre Trayectorias Rectilíneas y no Rectilíneas en Registros Físicos	63
Tabla 11: Comparación Entre Trayectorias Rectilíneas y no Rectilíneas en Registros de Audio..	64
Tabla 12: Conservación del Tamaño y Forma por Superposición.....	65
Tabla 13: Equidistancia entre los Pares de Vértices Correspondientes de una Figura y su Traslación en Registros Físicos	66
Tabla 14: Equidistancia entre los pares de Vértices Correspondientes de una Figura y su Traslación en Registros de Audio.....	67
Tabla 15: Conservación de la Orientación por Superposición	68
Tabla 16: Conservación de la Inclinação por Superposición	69
Tabla 17: Dificultad para Recordar las Características Visuales de la Traslación	70
Tabla 18: Reconocimiento de Deslizamientos que Corresponden a una Traslación.....	71

Tabla 19: Medida de la Longitud del Desplazamiento con Herramienta Métrica.....	72
Tabla 20: Medida de la Longitud del Desplazamiento por Animación y Cuadrícula.....	73
Tabla 21: El Sentido del Deslizamiento.....	75
Tabla 22: Comparación de la Inclinación en Distintas Traslaciones.....	77
Tabla 23: Comparación del Sentido en Distintas Traslaciones.....	77
Tabla 24: Vector de Traslación como Parámetro de la Traslación	79
Tabla 25: Construcción de la Traslación de una Figura a través de un Vector.....	80
Tabla 26: Prueba de la Equidistancia entre los pares de Puntos Correspondientes de una Figura y su Traslación	81
Tabla 27: Reconocimiento de Traslaciones	83
Tabla 28: Conflicto entre el Contexto y la Conservación del tamaño	85
Tabla 29: Comparación entre los TAH y los Procesos de Aprendizaje Real.....	94
Tabla 30: Malinterpretación del Concepto de Inclinación en la THA	100
Tabla 31: Disonancia entre el Modelo de Progresión, el Proceso de Aprendizaje Hipotético y las Preguntas de la Tarea 1A	103

Índice de Figuras

Figura 1: Representación de una Isometría en $\mathbb{R}^2$	21
Figura 2: Traslación de un Segmento	22
Figura 3: Esquema de la Traslación como Función	23
Figura 4: Esquema de la Función Traslación como un Deslizamiento.....	24
Figura 5: Contraste de los Efectos Visuales de la Variación de la Magnitud y la Inclinación de los Segmentos que Unen los Pares de Puntos Correspondientes	25
Figura 6: Construcción de una Figura Traslada	26
Figura 7: Traslación de una Recta a partir de un Vector de Traslación Paralelo	27
Figura 8: Superposición del Lado de una Figura con otro de su Traslación	28
Figura 9: Uso Incorrecto del Vector de Traslación.....	29
Figura 10: Interpretación Inapropiada de una Traslación como dos Traslaciones Compuestas	29

Figura 11: Esquema del Ciclo de Enseñanza Matemática	31
Figura 12: Esquema de los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes.....	34
Figura 13: Estructura General de una IBD	40
Figura 14: Representación de la Traslación en la THA	46
Figura 15: Disposición del Espacio donde se Desarrolló la Experimentación.....	48
Figura 16: Applet para la Explicación de la Representación de un Deslizamiento Rectilíneo Asociado a una Traslación	51
Figura 17: Contraste entre la Relación Esperada y Reportada del Deslizamiento en Línea Recta y sus Características Visuales.....	88
Figura 18: Imprecisión en los Conceptos de Inclinación y Orientación	91
Figura 19: Redibujado Instantáneo de las Figuras Trasladas	93
Figura 20: Applet de la Tarea 3B Adaptada al Contexto de Diseño de Videojuegos.....	102
Figura 21: Esquema del Proceso de Rediseño de la THA de Cumbal (2020).....	111

Introducción

Este informe de investigación se desarrolla desde la línea de Prácticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Tiene como propósito la caracterización de la progresión del aprendizaje de la traslación de estudiantes de 6º año de escolaridad mediante la implementación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) basada en Geogebra, a partir del acercamiento a un Experimento de Enseñanza.

En el primer capítulo se introduce el problema de investigación partiendo del interés en la implementación del constructo de THA y en el aprendizaje de la traslación. Esto se sustenta en la revisión de antecedentes que dan cuenta de la necesidad de someter las THA a un proceso de implementación, análisis y rediseño, así como la de explorar modelos concretos para la enseñanza de dicha isometría. Su pertinencia, se justifica en el hecho de que, a la fecha, solo se reportó un trabajo de investigación a nivel nacional que integrara las THA con la traslación. Sin embargo, este se enfoca en la práctica profesional del profesor de matemáticas y no en el proceso de aprendizaje del estudiante sobre el contenido.

En el segundo capítulo se presentan los insumos teóricos que se consideraron pertinentes para esta investigación. En concreto, se introduce: la conceptualización de la traslación desde la matemática formal; una compilación de dificultades asociadas al contenido reportadas en la literatura; el constructo de THA; la Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes; una caracterización de la potencialidad del uso de Ambientes de Geometría Dinámica para la enseñanza de la geometría; y los beneficios del uso de videojuegos con propósitos educativos. La mayoría de estos elementos fundamentan teóricamente la THA seleccionada para esta investigación; los otros se justifican en el ejercicio de rediseño suscitado por la teoría.

El tercer capítulo se divide en dos momentos que definen la estructura metodológica de esta investigación cualitativa: la presentación de los Experimentos de Enseñanza, la Investigación Basada en Diseño (IBD) y el análisis de datos cualitativos; y la implementación de este marco metodológico con la estrategia planteada por un Experimento de Enseñanza. Esto consistió en la preparación del experimento, la experimentación y el análisis retrospectivo. Así, este trabajo se desarrolla a partir del ejercicio de rediseño planteado por el enfoque de la IBD.

En el cuarto capítulo se presentan los tres resultados de investigación que responden a los objetivos específicos propuestos en el primer capítulo: la descripción de los niveles de comprensión de los estudiantes intervenidos sobre la traslación; la comparación entre el proceso de aprendizaje previsto versus el proceso de aprendizaje que se evidenció en los estudiantes durante la implementación; y el rediseño de la THA. Estos resultados se derivaron del análisis retrospectivo desarrollado en el acercamiento a un Experimento de Enseñanza.

Por último, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones de este trabajo en función de sus propósitos e intereses, así como las recomendaciones que surgieron de la reflexión sobre el aprendizaje de la traslación, el uso de THA, la implementación de un Experimento de Enseñanza y los procesos propios de este ejercicio investigativo.

Capítulo I: El Problema de Investigación

En este capítulo se introduce la problemática sobre la que se desarrolla este trabajo de investigación. Para esto, se parte de unas intuiciones sobre el aprendizaje de la traslación y la implementación de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje como modelo para estructurar propuestas de aula. Estas se revelan pertinentes con base en las valoraciones de algunos referentes teóricos que se introducen en el planteamiento del problema, se desarrollan en la justificación y se ejemplifican en los antecedentes. Así, se presenta la pregunta de investigación, de la que se desprenden el objetivo general y los específicos de este ejercicio investigativo.

Planteamiento del Problema

Para plantear la pregunta de investigación, en este apartado se abordan 3 necesidades: mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en matemáticas con base en informes de rendimiento educativo a nivel nacional e internacional; implementar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje inmersa en un ciclo de análisis y rediseño; y estudiar cómo se desarrolla la comprensión de los estudiantes sobre la transformación geométrica de la traslación.

Informes Internacionales y Nacionales del Desempeño Académico de Estudiantes en el Área de Matemáticas

El informe más recientemente publicado de los resultados del Programa Internacional para la Evaluación de Alumnos (PISA¹) de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) reportó que Colombia tuvo un rendimiento inferior a la media de la OCDE en los componentes de lectura, ciencias y matemáticas (OCDE, 2019). En este último, los jóvenes de Colombia obtuvieron un puntaje de 391, 98 puntos por debajo la media de la OCDE que fue de 489. También se reportó que el 65% de los estudiantes evaluados se caracterizaron con un bajo rendimiento en matemáticas.

¹ Por sus siglas en inglés Programme for International Student Assessment.

En el anterior informe se enlistó el rendimiento de los 37 países de la OCDE, de aquel entonces², en las tres áreas de conocimiento evaluadas, donde Colombia se posicionó en el penúltimo lugar por debajo de Eslovaquia, Grecia, Chile y México, estando únicamente por encima de España. En el componente de matemáticas, Colombia se ubicó en el último lugar, reportando un puntaje cercano al de México y Chile. Adicionalmente, se señala que no hubo un cambio significativo entre el rendimiento en matemáticas presentado en el 2018 y el de 2015, año del anterior informe.

En el informe del Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE) de 2019 generado por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO³) se comparó el desempeño de varios países de América Latina y el Caribe en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias (UNESCO, 2021), de manera análoga al anterior informe. El rendimiento presentado se categorizó en cuatro niveles, donde Colombia, para el grado 6º de escolaridad, reportó que el 83,4% de los estudiantes evaluados presentaron un rendimiento menor al nivel mínimo de competencias, alcanzando los niveles I y II, y tan solo el 16,6% supero este nivel, alcanzando los niveles III y IV.

A nivel nacional, se puede recurrir al informe de resultados de las Pruebas Saber de 2022 (Icfes, 2022). En este se reportó el rendimiento de los estudiantes evaluados en 3º, 5º y 9º año de escolaridad y se estableció, como en el ERCE, cuatro niveles de rendimiento para cada área de conocimiento evaluado. En contraste a los resultados internacionales, se señala que en el grado 9º, en el área de matemáticas, el 70% de los estudiantes evaluados están en los niveles I y II y solo el 30% alcanzan los niveles III y IV. En este informe se resaltaron diferencias importantes entre centros educativos rurales y urbanos, así como oficiales y no oficiales. Adicionalmente, se evidencia un declive en el rendimiento de los estudiantes conforme se

² A la fecha de este trabajo, la OCDE se compone de 38 países.

³ Por sus siglas en inglés United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

compara el rendimiento de los 3 grados de escolaridad evaluados, de lo que se puede inferir que hay más dificultades de aprendizaje en los últimos años de escolaridad.

La necesidad de Implementar una THA en un Ciclo de un Experimento de Enseñanza

De la investigación en Educación Matemática, surgen diferentes marcos de referencia que sirven de pauta para la estructuración de la clase de matemáticas. Un ejemplo de esto es la investigación de Simon (1995) que propuso un modelo concreto para el desarrollo de propuestas de aula que denominó THA. En esta se plantea una manera de estructurar actividades y se ve inmersa en un ciclo de análisis y rediseño⁴. Sobre esto, Simon (1995) señaló que debe ser un propósito del profesor el de prever cómo se manifestará el conocimiento matemático de los estudiantes durante la implementación de una propuesta de aula.

Así, una THA se construye, inicialmente, sobre los imaginarios del profesor, producto de su formación y experiencia profesional, pero adquiere un carácter orgánico y evolutivo, pues su constante puesta en acción lleva al profesor a replantear aquellos imaginarios para dar paso a unos nuevos con base en su reciente experiencia. En contraste, la búsqueda documental ha arrojado que, en el diseño de THA para la enseñanza de algún contenido, no se reporta el ciclo de revisión y reformulación sugerido por Simon (1995), aspecto esencial del referente teórico. De aquí el interés en cómo se da este proceso en el marco de la implementación de una THA.

La Necesidad de Interesarse por las Transformaciones Geométricas

La enseñanza de la geometría en las primeras etapas de escolaridad se ve afectada por una tendencia a dedicarle mucho menos tiempo que a otras áreas de las matemáticas, enfocándose en el estudio de los números y las operaciones aritméticas, limitando el alcance del entendimiento geométrico de los estudiantes al simple reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos (Cheuquepán y Barbé, 2012).

⁴ Este ciclo se precisa posteriormente como parte de un Experimento de Enseñanza.

Xistouri y Pitta-Pantazi (2011) afirmaron que, aunque las transformaciones geométricas como la traslación, reflexión y rotación se consideraban importantes para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, faltaba robustecer la investigación respecto a las habilidades de los estudiantes abordando estas isometrías. Además, se han reportado dificultades en el aprendizaje de este contenido matemático, dado que los estudiantes priorizan el uso de reglas sobre la visualización, relegando una competencia de alto nivel a la memoria de leyes (Mbusi, 2016).

Los anteriores resultados académicos parecieran secundar una valoración más antigua hecha por Vasco (1992) respecto a la minimización de la geometría en el aula, así como su crítica a la geometría tradicional euclidiana que, por su carácter estático, no favorece la visualización en transformaciones geométricas como la traslación, rotación y reflexión. Así, resulta pertinente continuar con la exploración de estas isometrías a la luz de la perspectiva de la Geometría Activa sugerida por los referentes curriculares del Ministerio de Educación Nacional⁵ (MEN, 1998).

Con la vista puesta sobre las transformaciones geométricas y las THA, la búsqueda documental, como se reporta en los antecedentes, dio cuenta de los pocos trabajos de investigación a nivel nacional relacionados a la traslación a partir de THA. Esto empieza a acotar el objeto de esta investigación, a lo que se le añade que se oriente a estudiantes de 6º año de escolaridad, pues es uno de los momentos para los que los referentes curriculares proponen el desarrollo del contenido (MEN, 2006).

Inmersa la traslación en el campo de la geometría, las Tecnologías Digitales se revelan como recursos idóneos por su potencial para desarrollar este tipo de contenido. Por ejemplo, Santos-Trigo (2016) afirmó que el uso de herramientas digitales extendía los razonamientos de los estudiantes sobre las posibilidades que ofrecía el lápiz y papel, además de que propiciaba

⁵ Institución colombiana que se encarga de orientar y dirigir la formulación de políticas relacionadas a la educación.

diversas oportunidades para visualizar relaciones y sustentar argumentos; y sugirió “El alfabetismo o cultura digital resulta una de las competencias esenciales que los individuos deben adquirir y que los profesores y estudiantes deben mostrar en sus experiencias de aprendizaje.” (p. 345).

Por último, resulta pertinente explicitar una estrategia metodológica para el desarrollo de la investigación que integre los elementos mencionados de manera adecuada. La teoría sobre THA sugiere, por sí misma, un modelo cíclico para su desarrollo, por lo que un Experimento de Enseñanza resulta, no solo apropiado, sino también enriquecedor en tanto, como señala Valverde (2014), tiene la virtud de establecer una relación directa entre la teoría y la práctica, estableciendo un puente entre el contenido y el modelo de estructuración de una propuesta de aula.

A partir de todo lo anterior, se toma la decisión de usar la THA propuesta por Cumbal (2020) por ser consistente con los intereses investigativos de este trabajo y se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se Caracteriza la progresión del aprendizaje sobre la traslación de un grupo de estudiantes de 6º grado a partir de un acercamiento a un Experimento de Enseñanza mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en un Ambiente de Geometría Dinámica?

Justificación

De manera intuitiva, el quehacer del profesor formula la tarea concreta de planificación de la clase. Desarrollar un conocimiento en los estudiantes implica la elaboración o adaptación de propuestas de aula que lleven a los estudiantes a alcanzar los objetivos planificados. Esta práctica se ejecuta de manera reiterada en la formación profesional de un profesor, con la diferencia, respecto al ejercicio profesional, que estas propuestas se producen para una única ejecución. En contraste, el profesor puede diseñar sus propias propuestas, o adaptar otras, para

implementarlas varias veces en grupos de estudiantes de similares características durante su vida laboral.

Lo anterior lleva a pensar en la posible mutabilidad de las propuestas de aula, pues las experiencias académicas dejan ver que las dinámicas planeadas no se desarrollan tal cual se prevé. Esta intuición empírica se apoya con lo señalado por Simon (1995) en uno de sus trabajos de investigación:

Como profesor/investigador, comencé el curso de matemáticas con perspectivas teóricas particulares sobre la enseñanza y el aprendizaje, algunas de las cuales fueron articuladas anteriormente en este documento. Sin embargo, como era de esperar, estas perspectivas no me "dijeron" qué hacer a medida que surgían los desafíos. Mis respuestas a estos desafíos a menudo no fueron el resultado de modelos bien articulados. Más bien, eran patrones emergentes de operación en situaciones problemáticas. Es sólo a través del análisis a posteriori que estos patrones han sido caracterizados y utilizados para mejorar, modificar o desarrollar la teoría. (p. 20, traducción propia)

A partir de lo anterior surge la necesidad de estudiar la adaptación de dichas propuestas con base en la respuesta de los estudiantes y en contraste con los objetivos planteados. Simon (1995) desarrolló el constructo de THA como un acercamiento metodológico para la estructuración de una propuesta de aula. Esta se ve enmarcada en un ciclo de revisión iterativo por parte del profesor, donde se destaca la necesidad de prever cómo interactúan los estudiantes con las tareas de aprendizaje.

Gómez y Lupiáñez (2007) afirmaron que el anterior acercamiento metodológico servía tanto para el investigador en educación matemática como al profesor de matemáticas y añadieron:

Para realizar este proceso cíclico, el profesor debe tener una idea de cuáles son los posibles caminos de aprendizaje que pueden llevar a los escolares desde su estado actual (capacidades que ya han desarrollado) al estado que representa sus objetivos de aprendizaje (capacidades que se quieren desarrollar). Para ello, el profesor debe producir la lista de capacidades que considera relevantes con respecto a dichos objetivos de aprendizaje. (p. 97)

Ya con una perspectiva para la estructuración de una propuesta respecto a la reflexión inicial, es necesario justificar el interés por las transformaciones geométricas y, en particular, por la traslación. Una búsqueda por la literatura deja ver que, aunque se han producido propuestas robustas para la enseñanza de este contenido⁶ sólo se encontró una que se configura como THA. Esta propuesta corresponde a la de Cumbal (2020) cuyo trabajo resulta apropiado para el interés de este ejercicio investigativo, pues la construyó con base en la estructura de Simon (1995), pero no la sometió al proceso cíclico de iteración de un Experimento de Enseñanza.

Castaño (2006), Evocando la Geometría Activa de Vasco (1992), enunció los principios que diferencian esta perspectiva de la tradicional en cuanto a la enseñanza de la geometría. Esta visión responde a los objetivos del Ministerio de Educación Nacional de apartarse de la perspectiva euclidiana, que consiste en no introducir el estudio de la geometría a partir de conceptos abstractos y estáticos, sino desde la exploración de figuras en movimiento. Lo anterior invita a traer a colación los referentes curriculares nacionales para justificar el interés en la enseñanza de la traslación.

En primer lugar, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) adoptaron directamente la Geometría Activa como perspectiva de enseñanza de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial. En esta, se señala la importancia de la visualización de objetos

⁶ Como la propuesta de Jaime (1993).

geométricos en movimiento, pues favorece la comprensión de conceptos y propiedades abstractas que se representan tradicionalmente como estáticos, señalando entre líneas la necesidad del estudio de las transformaciones geométricas.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) especificaron los conocimientos que se espera desarrollen los estudiantes en los distintos niveles de escolaridad. Aquí se hizo referencia directa a las transformaciones geométricas y, en el periodo de sexto a séptimo año, se propuso como competencia “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.” (MEN, 2006, p. 84). Aunque esta investigación se interesa por el 6º grado de escolaridad, es pertinente señalar que el estudio de las traslaciones se propone desde los primeros ciclos de educación básica.

El último referente curricular es el de los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015), donde se plantearon unos objetivos de aprendizaje más concretos respecto al estudio de las transformaciones geométricas. En este se propuso para el grado séptimo: “Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.” (p. 55).

En la elaboración de una propuesta de aula, es natural considerar distintos recursos que favorezcan la consecución de un objetivo de aprendizaje, como el uso de un texto específico o material concreto. En virtud de esto se puede resaltar el papel de las Tecnologías Digitales en la educación. Actualmente el entorno escolar se encuentra enriquecido con la disponibilidad de materiales físicos manipulativos, pero también se nota una presencia creciente de las Tecnologías Digitales. Estas propician el aprendizaje de tal manera que ya no se experimenta solo como una explicación verbal, un dibujo en el tablero o un procedimiento mecánico, sino que se desarrolla a partir de recursos audiovisuales e interactivos. Así, “Las herramientas, y en

particular la tecnología, ofrecen oportunidades para el aprendizaje. El sujeto se enfrenta a limitaciones impuestas por el artefacto y las nuevas posibilidades de las acciones, para identificar, comprender y con las que hacer frente.” (Fortuny et al 2010, p. 77).

Son diversos los documentos que describen los resultados favorables sobre el uso de Tecnologías Digitales en el aula de clases. Flores (2021) usó del programa GeoGebra y dio cuenta de la potencialización de las destrezas y habilidades de los estudiantes con este tipo de recursos, desarrollando pensamiento crítico a partir de una manera de experimentar la geometría a la que no puede aspirar la enseñanza más tradicional.

Todo lo anterior se configura en el interés de implementar una THA basada en Tecnologías Digitales para la enseñanza de la traslación en el marco de un Experimento de Enseñanza con el fin de poder dar cuenta de su efectividad real, así como identificar posibles limitaciones para su reformulación con base en una experiencia de aula.

Antecedentes

Los trabajos de investigación provechosos para las necesidades planteadas debían tratar sobre la implementación de una THA para la enseñanza de la traslación mediada por un AGD. Sin embargo, la búsqueda de material documental reciente no arrojó los resultados deseados, pues no se encontraron aportes que conjugaran estos tres elementos. Así, se hace una recopilación de trabajos de investigación que trataron estos tópicos por separado.

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

La investigación de Gutiérrez (2022) se enfocó en el contenido de la probabilidad sobre el que desarrolló una THA para construir el conocimiento de la probabilidad a partir de eventos donde se valoraba su factibilidad fenomenológica. Entre sus resultados de investigación destacó, sobre las THA, que la estructuración de las tareas y el ejercicio de previsión del aprendizaje de los estudiantes tuvieron un impacto favorable y perceptible en el desarrollo del conocimiento sobre el contenido en cuestión.

En su trabajo, Sánchez (2021) buscó reconocer errores del lenguaje algebraico a partir de la implementación de una THA construida por Maria Victoria Amador, donde, a partir de juegos de palabras, se aplicaban acciones como aumentar, quitar o doblar sobre un objeto real para construir una expresión algebraica que correspondiera a dichos enunciados. Uno de los resultados de la implementación de la THA fue de tipo afectivo, en tanto los estudiantes se mostraron más seguros y cooperativos en la medida que avanzaba la implementación. También señaló que indagar sobre las herramientas que benefician los procesos de enseñanza y aprendizaje abren nuevas posibilidades para la investigación.

Rodriguez y Perez (2017) desarrollaron una THA para la enseñanza de la multiplicación en el AGD de GeoGebra, donde relacionaron unidades de área con números naturales para determinar el producto de estos últimos a partir de un tratamiento gráfico. Su principal conclusión respecto a las THA se centró en resaltar su importancia para la estructuración de las tareas en función de los propósitos de enseñanza. También destacaron la versatilidad del AGD de GeoGebra para explorar distintos registros de representación⁷, así como las posibilidades que ofrecía el arrastre para la visualización y reconocimiento de patrones invariables.

Sobre el Aprendizaje de la Traslación o Transformaciones Geométricas

El trabajo de Hernandez y Pastrana (2020) se enfocó en la enseñanza de la traslación a partir de un recurso tecnológico en el AGD de DGPAd. Así, diseñaron una propuesta que consistió en la construcción del vector de traslación una vez se habían reconocido sus propiedades de longitud, inclinación y sentido, así como la relación de dependencia entre una figura y su traslación. Los resultados y conclusiones se centraron en el uso de tecnologías para la enseñanza y la respuesta de los estudiantes a la perspectiva didáctica usada. Resaltaron que el uso de un AGD les permitió a los estudiantes observar las propiedades geométricas deseadas a través de la exploración y la posibilidad de arrastre.

⁷ En el sentido de Duval (2017).

Cáceres (2017) orientó su investigación al aprendizaje de las traslaciones mediado por el uso de GeoGebra como AGD. Partió de una valoración de los conocimientos previos de los estudiantes donde hizo una exploración de las concepciones e imaginarios de estos sobre el objeto matemático. Así, reportó en sus resultados que el modelo de Van Hiele respondió de la manera esperada en cuanto a su capacidad de caracterizar el conocimiento geométrico de los estudiantes. También, sugirió que deben diseñarse propuestas de aula que utilicen dicho modelo, pero que también se desarrollen en AGD para el estudio de fenómenos que involucren movimiento en el plano cartesiano.

Sobre el uso de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje para la Enseñanza de la Geometría

Bocanegra y Devia (2019) diseñaron una THA para desarrollar el proceso de generalización geométrica en estudiantes de grado 6º en dos grupos de diferentes instituciones, con el fin de reconocer una propiedad de una figura geométrica. Este trabajo invitaba a los profesores a llevar este tipo de experiencias a sus aulas y formular sus propias THA para desarrollar procesos de generalización en los estudiantes, a la vez que destacaba cómo se puede propiciar este proceso por medio de las THA. La respuesta de los estudiantes dio cuenta de que el uso de la THA fue exitoso y señalaron que esta podía ser susceptible de refinamiento para posteriores implementaciones.

Cumbal (2020) desarrolló una THA para la enseñanza de la traslación en el marco de su interés por la práctica profesional de los profesores y la integración de recursos digitales para la enseñanza, por lo que esta propuesta fue implementada por distintos profesores. Como resultado, reportó que la THA resultó serles útil para la enseñanza de la traslación, pues les proporcionó una secuencia de tareas concretas en un AGD que favorecían la exploración de las características del fenómeno en contextos de diseño. Por otro lado, la THA facilitó a los

profesores la comprensión de las estrategias que los estudiantes usaban para desarrollar las tareas propuestas.

Gustin (2021) elaboró una THA para identificar los elementos de la visualización que favorecían el aprendizaje de la rotación. Esta propuesta contribuyó al desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes intervenidos cuando hacían uso de determinados tratamientos u operaciones a partir de los procesos de visualización, construcción y conjeturación. De esta manera, pudo concebir un acercamiento a la comprensión de la rotación de figuras geométricas con la ayuda de las tareas que se desarrollaron en la THA.

Una revisión rápida de los aportes documentales presentados deja ver que el constructo THA se usó principalmente para estructurar las propuestas de aula de los investigadores. Sin embargo, estas no se sometieron al ciclo de revisión y reformulación sugerido por Simon (1995), sino que se conformaron con los resultados de una implementación. La posibilidad de prever el desarrollo del conocimiento matemático del estudiante se sustentaba sólo en marcos teóricos y sus perspectivas particulares sobre el contenido, pero no sobre la experiencia misma de la implementación de la THA.

Por otro lado, las investigaciones de Rodriguez y Perez(2017), Hernandez y Pastrana (2020) y Cáceres (2017), reportaron que el uso de Tecnologías Digitales favorecen el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante sobre un contenido y, en particular, Cumbal (2020) concluyó que el uso de este tipo de recursos facilitaba el aprendizaje sobre la traslación. Así, puede afirmarse que el uso de AGD resultó oportuno para el estudio de fenómenos que involucraran representaciones geométricas en movimiento.

Objetivos

Objetivo General

Caracterizar la progresión del aprendizaje sobre la traslación de un grupo de estudiantes de 6º grado a partir de un acercamiento a un Experimento de Enseñanza mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en un Ambiente de Geometría Dinámica.

Objetivos Específicos

- Describir los niveles de comprensión de estudiantes de 6º grado mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la enseñanza de la traslación.
- Comparar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje con su correspondiente Trayectoria de Aprendizaje Real de los estudiantes intervenidos.
- Refinar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje con base en las limitaciones identificadas a lo largo del acercamiento a un Experimento de Enseñanza.

Capítulo II: Marco Teórico

En este capítulo se presentan los insumos teóricos pertinentes para esta investigación: una conceptualización formal de la traslación, de la cual se sustraen los principales aspectos que se consideraron apropiados para la enseñanza de la traslación en el nivel de escolaridad de interés; una breve compilación de dificultades en el aprendizaje de la traslación; la conceptualización de las THA y la Heurística de los Modelos Emergentes, pues son los elementos de la teoría que estructuraron la THA de Cumbal (2020); la justificación del uso de AGD y Tecnologías Digitales para el desarrollo de contenidos en el aula de matemáticas; y las ventajas del uso de videojuegos para propósitos educativos.

Traslaciones Geométricas en el Plano

En este apartado se adopta una concepción formal de la traslación y se enuncian algunas de sus propiedades demostrables según las definiciones aportadas. Luego, se concretan estos elementos abstractos en enunciados apropiados para el estudio del fenómeno con estudiantes de 6º grado en el contexto de la THA de Cumbal (2020).

Una Definición Matemática de Traslación

El concepto de traslación puede variar según el área del conocimiento desde el que se aborde. Por ejemplo, la traslación en astronomía puede referirse al cambio de posición de la tierra a través de su órbita elíptica alrededor del sol, como definieron Paschini y Carneiro (2017). Así, es pertinente precisar que se hará referencia a este concepto desde la geometría para distinguirlo en función su campo de estudio.

Para definir formalmente la traslación desde la matemática se usa como referente el trabajo de Umble y Han (2015), quienes definieron la traslación como una función o aplicación en el plano. Cabe resaltar que este acercamiento no pretende explorar todas las dimensiones de conceptualización de la traslación desde la matemática. A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas pertinentes para los propósitos de este trabajo de investigación.

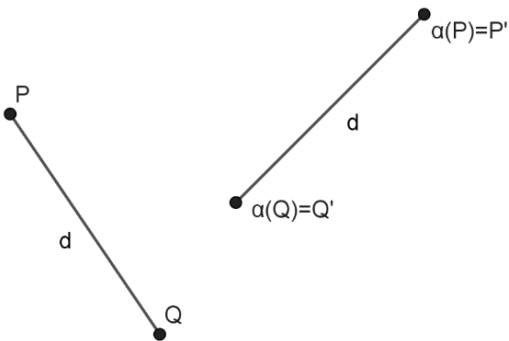
Definición 1. Una **transformación** del plano es una función $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con dominio $\mathbb{R}^2$.

Notación. Si P y Q son puntos en $\mathbb{R}^2$, entonces $|PQ|$ será la distancia entre P y Q .

Definición 2. Sea $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación, P y Q puntos en $\mathbb{R}^2$, $P' = \alpha(P)$ y $Q' = \alpha(Q)$. Entonces α es una **isometría** si $|P'Q'| = |PQ|$. Es decir, una isometría es una transformación del plano que conserva la distancia entre un par de puntos y sus imágenes (ver figura 1).

Figura 1

Representación de una Isometría en $\mathbb{R}^2$



Nota. La distancia d es igual entre P y Q & P' y Q' . Elaboración propia.

Definición 3. Sean P y Q puntos en $\mathbb{R}^2$. La **traslación** de P a Q es la transformación $\tau_{P,Q}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Q = \tau_{P,Q}(P)$

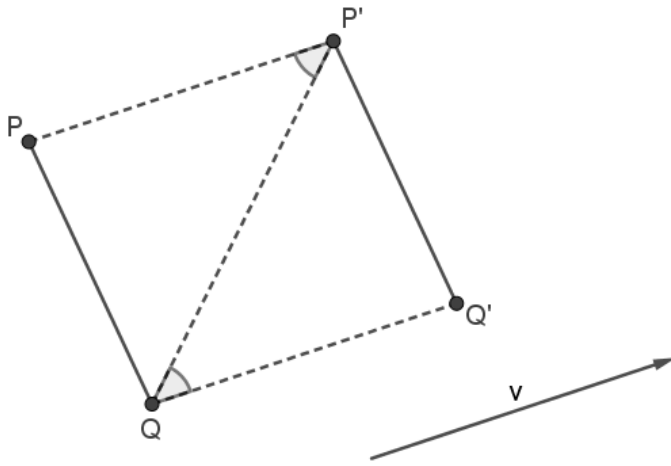
Definición 4. Un **vector** $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ con magnitud $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y dirección θ se define por las ecuaciones $\|v\| \cos \theta = a$ y $\|v\| \sin \theta = b$. Los valores de a y b se denominan respectivamente componente x y componente y de v . Si $P = (x, y)$, $Q = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, PQ denotará el vector con componentes $\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix}$ y será llamado vector de posición de P a Q . P será llamado el punto inicial y Q el punto terminal de PQ .

Definición 5. Sea v un vector; $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tal que $PQ = v$. La traslación por el vector v es la transformación $\tau_v := \tau_{P,Q}$. El **vector de traslación** de τ_v es el vector v y la longitud τ_v corresponde a la magnitud $\|v\|$.

Teorema 1. Sea v un vector; $P, Q, P', Q' \in \mathbb{R}^2$ tal que $P' = \tau_v(P)$ y $Q' = \tau_v(Q)$. El segmento $\overline{PQ}$ es congruente con el segmento $\overline{P'Q'}$ (ver figura 2).

Figura 2

Traslación de un Segmento



Nota. En esta representación se añaden los elementos visuales construidos para seguir la demostración siguiente. Elaboración propia.

Demostración. Los segmentos $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ son congruentes pues $v = PP'$ y $v = QQ'$, por lo que $QQ' = PP'$. El segmento $\overline{P'Q}$ es congruente consigo mismo. Como $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ son congruentes, las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$ y $\overleftrightarrow{QQ'}$ son paralelas, por lo que la recta $\overleftrightarrow{P'Q}$ forma los ángulos $\angle PP'Q$ y $\angle Q'QP'$ que son congruentes por ser alternos internos. Así, Los triángulos $PP'Q$ y $Q'QP'$ son congruentes, por lo que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ son también congruentes.

Corolario. Sea v un vector; $P, Q, P', Q' \in \mathbb{R}^2$ tal que $P' = \tau_v(P)$ y $Q' = \tau_v(Q)$. El cuadrilátero $PQP'Q'$ es un paralelogramo.

Demostración. Como los triángulos $PP'Q$ y $Q'QP'$ son congruentes, los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ son congruentes, al igual que los segmentos $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$. Con ambos pares de lados opuestos del cuadrilátero $PQP'Q'$ son congruentes, este es un paralelogramo.

Las anteriores definiciones también permiten demostrar las siguientes proposiciones:

Teorema 2. Un polígono y el polígono resultante de la traslación de los segmentos del primero son congruentes.

Teorema 3. Toda traslación es una isometría.

Teorema 4. La composición de traslaciones es una traslación ($\tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$).

Teorema 5. Toda isometría, o conserva la orientación de los ángulos o la invierte.

Concreción del Concepto Matemático de Traslación Geométrica para la Enseñanza

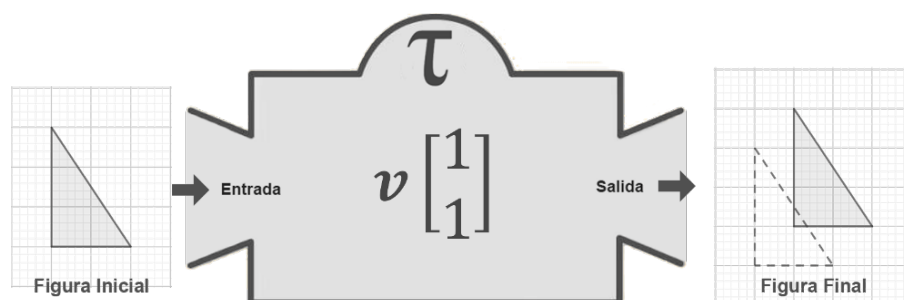
El anterior insumo teórico incita a concretar unas máximas conceptuales de la traslación de tal suerte que se omita el profundo formalismo y rigor matemático para ser enseñadas a estudiantes de 6º grado de escolaridad.

Definición de Traslación. Las definiciones 1, 2 y el teorema 3 permiten catalogar a la traslación como una isometría plana y, a su vez, como una transformación en el plano. En consecuencia, las traslaciones heredan la naturaleza de función. Percibir la traslación como una función que toma un punto y lo transforma en otro al “deslizarlo” por un vector, revela una manera particular de concebir el fenómeno, desde un punto de vista didáctico.

Pensar en la transformación “traslación” y los elementos “vector de traslación”, “punto” y “punto trasladado” permite establecer una jerarquía de estos, donde el vector de traslación es el parámetro para la traslación del punto (ver figura 3). En contraste, esta perspectiva de función no evidencia la noción intuitiva de cualquier traslación en el plano: el movimiento.

Figura 3

Esquema de la Traslación como Función

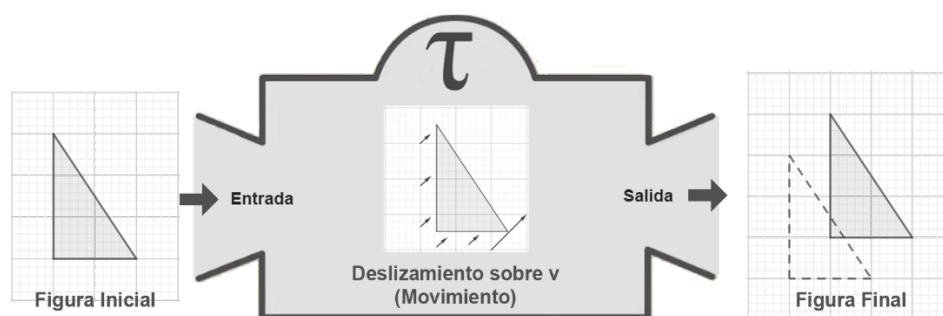


Nota. Esta representación surge de la clásica analogía de percibir una función como una máquina que toma un objeto y arroja otro. Elaboración propia.

Resulta necesario aludir a la perspectiva de la Geometría Activa de Vasco (1992) para reivindicar la importancia de percibir el movimiento en las transformaciones geométricas. Así, es pertinente concebir que el vector de traslación puede interpretarse como un segmento orientado con longitud, inclinación y sentido, sobre el que se “desliza” un punto. Así, se interpreta el tratamiento de la función traslación como un deslizamiento en el sentido físico, haciendo convivir las interpretaciones matemática y didáctica del fenómeno, como se representa en la figura 4.

Figura 4

Esquema de la Función Traslación como un Deslizamiento



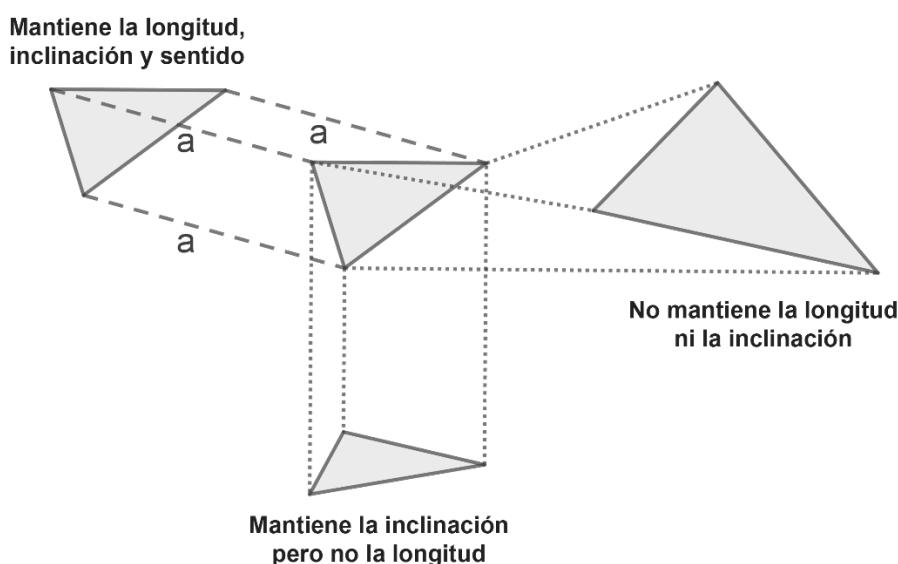
Nota. Elaboración propia

Propiedades de la Figura Traslada. Las definiciones 3, 4 y el teorema 1 permiten afirmar que todos los puntos de una figura plana se pueden trasladar y, al hacerlo con el mismo vector de traslación, los puntos se “deslizan” describiendo trayectorias que comparten la longitud, inclinación y sentido de dicho vector. Esto implica que una figura trasladada conservará las

características visuales de forma, tamaño y orientación respecto al centroide⁸, esto es la congruencia con orientación común respecto al centroide entre la figura y su traslación (ver figura 5).

Figura 5

Contraste de los Efectos Visuales de la Variación de la Magnitud y la Inclinação de los Segmentos que Unen los pares de Puntos Correspondientes



Nota. No se presenta el efecto visual de la variación del sentido porque esto puede provocar que las figuras se superpongan, dificultando la visualización de las otras propiedades. Elaboración propia.

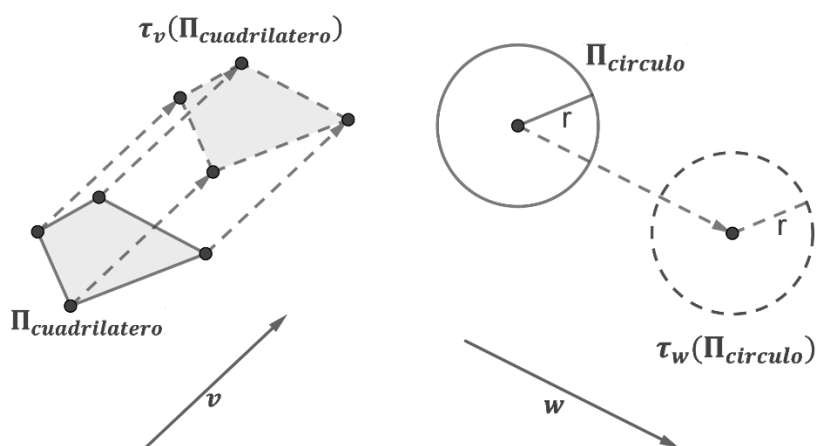
Dos Construcciones sobre Traslaciones Geométricas. Las definiciones 4 y 5 permiten construir la traslación de una figura a partir de esta y un vector de traslación. Basta con ubicar el punto inicial del vector de traslación sobre un punto característico de la figura y el punto final corresponderá a la traslación de dicho punto. Este proceso sobre todos los puntos característicos de la figura permite construir la figura trasladada. En figuras rectilíneas como polígonos, basta con trasladar sus vértices para poder reconstruir el polígono trasladado; en

⁸ También conocido como baricentro o centro de gravedad de una figura.

figuras no rectilíneas, habría que tener en cuenta su lugar geométrico, como en el caso de una circunferencia, donde se traslada su centro y la circunferencia trasladada se construye a partir del conocimiento del radio (ver figura 6). Este procedimiento puede resultar más complejo con figuras o trazos que no se caractericen fácilmente a partir de pocos puntos.

Figura 6

Construcción de una Figura Traslada



Nota. Elaboración propia.

La definición 4 permite excluir los elementos de longitud, inclinación y sentido. A partir de una figura y su traslación, se puede construir el vector de traslación correspondiente: determinando la distancia entre un par de puntos correspondientes de la figura; reproduciendo la inclinación de un segmento entre dos puntos correspondientes de la figura; e identificando el sentido, lo que consiste en determinar de qué extremo a qué extremo se traslada la figura.

Cumbal (2020) heredó las concepciones matemáticas de la traslación de Jaime (1993) al basarse en su trabajo para el diseño de tareas de su THA. Jaime (1993), a su vez, se remitió a una conceptualización de la traslación como función de una manera análoga a la presentada, por lo que este insumo teórico resulta pertinente para los intereses de esta investigación.

Errores y Dificultades en el Aprendizaje de la Traslación Geométrica

Socas (1997) señaló la importancia de interesarse por los errores de los estudiantes y los caracteriza como manifestaciones de dificultades u obstáculos relacionados al aprendizaje de las

matemáticas. Es a partir de la reflexión sobre estos errores que el profesor puede buscar activamente estrategias para mitigar su ocurrencia. A la luz de lo anterior, Socas (1997) hizo una clasificación de las dificultades según su naturaleza: la complejidad de los objetos en las matemáticas; los procesos de pensamiento matemático; los procesos de enseñanza; el desarrollo cognitivo de los estudiantes; y las actitudes afectivas y emocionales.

La literatura suele reportar los errores y dificultades de aprendizaje sobre un contenido matemático concreto a partir del análisis de datos recopilados en una investigación, usualmente en la aplicación de propuestas de aula. Estas se ven enmarcadas en un contexto local por lo que la amplitud de la muestra depende de la ambición del investigador. Así, la caracterización de errores y dificultades suele dar cuenta de un contexto específico, por lo que no se acostumbra a generalizar un resultado sobre estas.

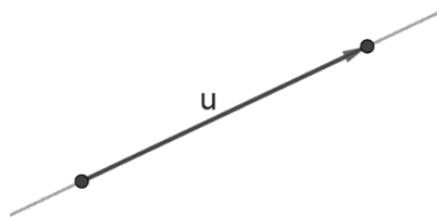
La búsqueda documental no arrojó un resultado satisfactorio en tanto no se encontró un insumo lo suficientemente robusto sobre las dificultades en el aprendizaje de la traslación como para tener la pretensión de generalidad deseada. Por lo tanto, se opta por hacer una pequeña compilación de los errores y dificultades reportadas por Mbusi (2016), Hollebrands (2003), Aktas y Ünlü (2017) y Laderosa y Malara (2000) en sus trabajos de investigación.

Dificultades Relacionadas a la Complejidad de los Objetos de las Matemáticas

- Confunden las distintas isometrías planas debido a que los términos rotación, traslación y reflexión se suelen confundir con sus homónimos para fenómenos reales.
- No logran reconocer la información condensada en la representación de un vector: longitud, inclinación y sentido.
- Se les dificulta efectuar una traslación usando un vector de traslación que sea paralelo a una segmento o recta por trasladar, como se ilustra en la figura 7.

Figura 7

Traslación de una Recta a partir de un Vector de Traslación Paralelo

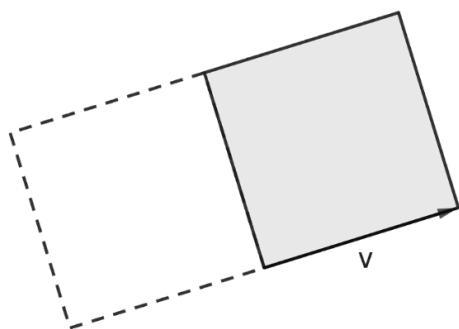


Nota. Como la recta trasladada tiene una longitud infinita, se superpone exactamente sobre la recta inicial, dificultando su visualización en la representación. Elaboración propia.

- Una traslación donde la figura trasladada superpone uno de sus lados con uno de la figura inicial, confunde a los estudiantes porque perciben dos figuras que comparten un lado (ver figura 8).

Figura 8

Superposición del Lado de una Figura con otro de su Traslación



Nota. Elaboración propia.

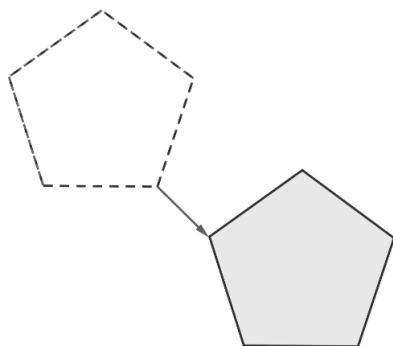
Dificultades Relacionadas a los Procesos de Pensamiento Matemático

- Se les dificulta determinar y utilizar las características que definen una traslación, por lo que suelen conformarse con reconocerlas parcialmente sin percatarse de que, por separado, pueden asociarse a otro tipo de transformaciones.
- No utilizan la uniformidad de la longitud del desplazamiento en todos los puntos de una figura para la construcción de una traslación; una errada intuición visual

los lleva a trasladar un punto y construir la figura trasladada sin considerar la relación de correspondencia entre dichos puntos (ver figura 9).

Figura 9

Uso Incorrecto del Vector de Traslación



Nota. Elaboración propia.

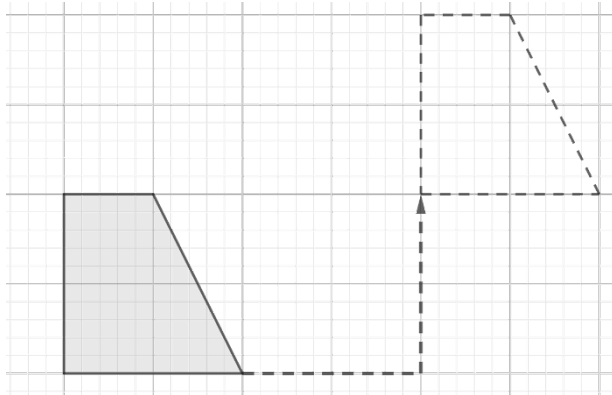
- No logran identificar el rol del vector de traslación en el fenómeno, ignorando sus parámetros de longitud, inclinación y sentido. También se les dificulta percibirlo como objeto individuado de la representación del deslizamiento. Esta es, con diferencia, la dificultad más recurrente en la literatura consultada.

El concepto de vector se desarrolla en niveles superiores de escolaridad (MEN, 2006), por lo que, en niveles inferiores, puede resultar un objeto extraño para los estudiantes. Por esto, también se puede considerar la anterior dificultad como asociada al proceso de enseñanza.

Por último, Mbusi (2016) reportó que los estudiantes forzaban el deslizamiento a través de la cuadrícula, un elemento común en cuadernos de matemáticas o AGD, dificultándoles el reconocimiento de deslizamientos en diagonal e induciéndoles una suerte de zigzag horizontal y vertical (composición de traslaciones), como se ilustra en la figura 10. Este error surge de un uso intensivo de la cuadrícula, correspondiendo a un obstáculo de aprendizaje.

Figura 10

Interpretación Inapropiada de una Traslación como dos Traslaciones Compuestas



Nota. Elaboración propia.

Aunque solo algunas de estas dificultades se manifestaron como errores en la implementación de la THA, los anteriores elementos resultaron ser un insumo pertinente para considerar durante el rediseño de la THA. En particular, se enfocó la atención sobre la caracterización del vector de traslación por ser uno de los elementos más problemáticos reportados en la literatura.

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

El constructivismo se sustenta en la idea platónica de que los individuos no acceden a la realidad objetiva, sino a una particular a partir de sus experiencias, lo que le confiere al proceso educativo una forma concreta de concebir el desarrollo del conocimiento de un estudiante: construirlo desde su mundo experiencial. Sin embargo, Simon afirmó que “Aunque el constructivismo tiene el potencial de informar cambios en la enseñanza de las matemáticas, no ofrece una visión particular de cómo se deben enseñar las matemáticas; se necesitan modelos de enseñanza basados en el constructivismo.” (1995, p. 114. Traducción propia).

Con base en los resultados de un Experimento de Enseñanza, Simon (1995) propuso el constructo de THA como un modelo donde se estructuran un conjunto de tareas de aprendizaje elaboradas para desarrollar un conocimiento matemático concreto. Estas se ven enmarcadas en una progresión, planteada desde la teoría, que involucra niveles de comprensión y buscan alcanzar unos objetivos más específicos. Simon (2014) caracterizó los 3 elementos que configuran una THA: “el objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de

aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético: una predicción de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje.” (pp. 354 – 355. Traducción propia)

Una revisión ligera del constructo puede no dejar claras las diferencias entre una THA y cualquier otro diseño formal de una propuesta de aula, pues es fácil homologar dichos elementos en otros modelos. Así, cobra especial importancia el papel del Proceso de Aprendizaje Hipotético (PAH) que describe cómo el profesor prevé que el estudiante interactuará con las tareas de la THA para desarrollar el conocimiento matemático deseado.

Simon (1995) resaltó la importancia de reflexionar sobre la fuente de los imaginarios del profesor a los que se supedita su capacidad de prever lo que sucederá en el aula como sus referentes teóricos, formación académica o experiencias previas que conforman su criterio profesional. Esto parece suficiente para construir una THA o una propuesta de aula cualquiera, pero la realidad de su ejecución resulta distinta a cómo se planea, como en el Experimento de Enseñanza de Simon (1995).

Con base en sus resultados, Simon (1995) añadió una característica esencial al modelo de las THA: su inmersión en el Ciclo de Enseñanza Matemática⁹ (ver figura 11). En este, la THA se ve sometida a un proceso de implementación y reflexión por parte del profesor, cuyos resultados en la práctica sustentan una reformulación del objetivo de enseñanza, las tareas y el PAH de la THA.

Figura 11

Esquema del Ciclo de Enseñanza Matemática

⁹ Este ciclo se concreta metodológicamente desde la Investigación Basada en Diseño y los Experimentos de Enseñanza.



Nota. Adaptado del esquema de Simon (1995).

Por contraste a la definición de THA, se puede inferir el concepto de Trayectoria de Aprendizaje Real. Esta describe lo que realmente sucede con los estudiantes en relación con el PAH durante la implementación de la THA, es decir, determina el Proceso de Aprendizaje Real. Esta descripción se hace sobre el estudiante o grupo de estudiantes que experimentan el desarrollo de la THA, pero, a partir de un ejercicio exhaustivo e iterativo de análisis y rediseño, se puede abstraer una Trayectoria de Aprendizaje Real que describa, de manera razonablemente acertada, un modelo de aprendizaje local para estudiantes con características similares a las de los sujetos de estudio.

Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes

La corriente didáctica de la Educación Matemática Realista, según Zolkower y Bressan (2012), es un enfoque que se basa en la exploración de fenómenos significativos para los estudiantes que les permitan desarrollar nociones matemáticas intuitivas y alcanzar otras más formales de manera progresiva, a partir de la interacción entre los actores del aula y la valoración positiva de las producciones de los estudiantes. Todo lo anterior se ve atravesado por

una intención de relacionar, desde distintos niveles, los contenidos desarrollados con los propósitos curriculares más generales.

Un concepto fundamental en la Educación Matemática Realista es el de Matematización. Isoda (2018) concretó esta noción como el proceso de reorganizar la experiencia sobre fenómenos reales que se pueden estudiar desde unas matemáticas intuitivas para establecer modelos matemáticos de mayor rigor. Así, la matematización busca “traer” las matemáticas de las experiencias de los estudiantes, en contraste a perspectivas más tradicionales que se orientan a reconocer unas matemáticas ya aprendidas en fenómenos de la realidad.

Freudenthal (2005) hereda de Adrian Treffers la distinción entre dos direcciones del proceso de matematización: horizontal, donde se convierte un problema real en uno matemático a través de un estudio intuitivo del fenómeno; vertical, en el que se moviliza el pensamiento matemático de los estudiantes entre unas matemáticas más o menos sofisticadas. Esta diferenciación revela la posibilidad de abordar diversos problemas reales desde las matemáticas, variando su nivel de rigor y formalismo.

Desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, el proceso de matematizar se puede caracterizar a partir de 4 niveles de “estructuración, abstracción, generalización y formalización” (Zolkower y Bressan, 2012):

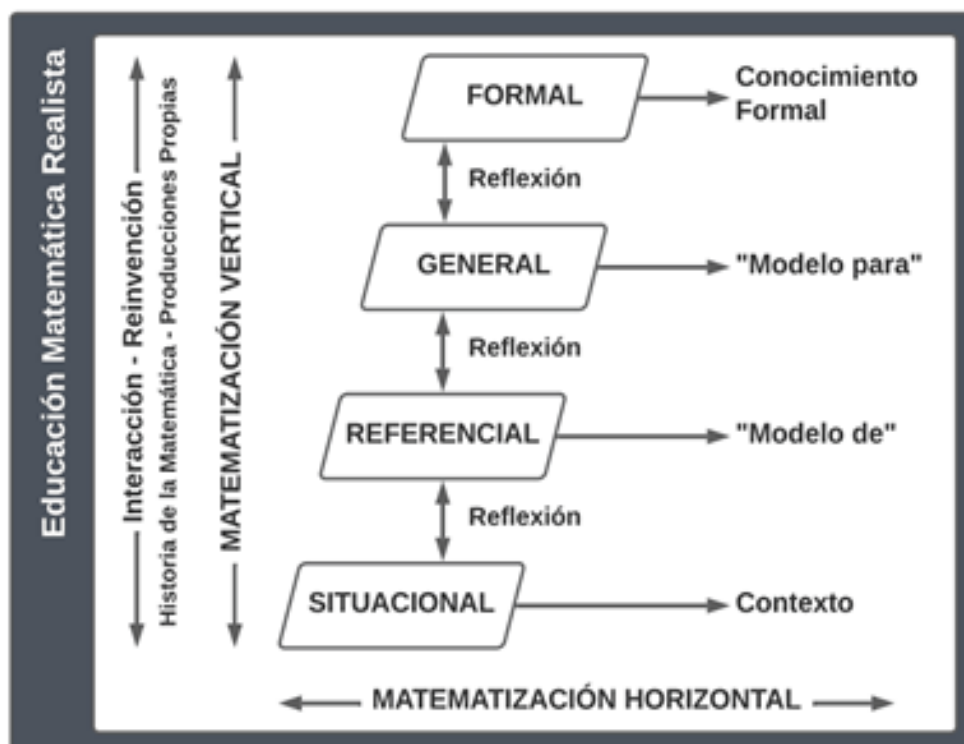
- Nivel Situacional: donde se plantea una situación problemática específica en un contexto real y accesible para los estudiantes que permita desplegar distintas representaciones, procesos intuitivos y estrategias de resolución desde el mismo contexto.
- Nivel Referencial: donde surge la esquematización a través de distintos modelos gráficos, notaciones y procedimientos, avanzando en el nivel de percibir las matemáticas del fenómeno, pero refiriéndose a la misma situación problemática en contexto.

- Nivel General: donde, a partir de un proceso de reflexión y análisis, se generaliza el modelo que describe el objeto matemático, alejándose de la situación problemática inicial y de cualquier otro contexto particular.
- Nivel Formal: donde se desarrolla un lenguaje formal apropiado y pertinente, así como los procedimientos más puramente matemáticos con la profundidad académica que el nivel educativo suscite.

La perspectiva de la Educación Matemática Realista, la concepción de matematización y los 4 niveles mencionados anteriormente configuran la Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes (ver figura 12), como acuña Gravemeijer (1999), en el que se centra el interés en el cambio del “Modelo de” al “Modelo para”, siendo muy utilizada en el diseño instruccional de una THA (Cumbal, 2020, p. 21). Este referente teórico sustentó la estructura y progresión de las tareas en la THA de Cumbal (2020), por lo que es un insumo pertinente para su análisis.

Figura 12

Esquema de los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes



Nota. Adaptado del esquema de Gravemeijer (1994).

Ambientes de Geometría Dinámica

Es amplia la literatura que reporta los resultados positivos de utilizar Tecnologías Digitales para la enseñanza de las matemáticas. Sánchez et al (2021) señalaron que el uso de Tecnologías Digitales tiene un papel fundamental en la enseñanza de la geometría por su dinamismo, favoreciendo la conjeturación de los estudiantes sobre lo que visualizaban en la pantalla. Sacristán et al (2010) hicieron una caracterización de algunas de las capacidades computacionales y dinámicas de las Tecnologías Digitales:

- Pueden manipular mucha información real de manera más sencilla que a lápiz y papel.
- Permiten la reproducción instantánea de procesos repetitivos que no aportan al aprendizaje de conocimientos más sustanciales.
- Las representaciones dinámicas permiten un nivel de visualización sobre problemas matemáticos que no son posibles a través de medios tradicionales.
- Permiten identificar relaciones invariantes a través del arrastre, así como la verificación de hipótesis sobre familias de casos.

La elección de un software particular tiene un peso sobre el proceso de enseñanza, como afirmaron Sacristán et al (2010) “... tendrá una influencia crucial para fomentar y promover el pensamiento matemático y en el tipo de trayectoria de aprendizaje que se desarrollará.” y agregan “diferentes herramientas o entornos constituyen diferentes dominios de la fenomenología y, por lo tanto, tienen una validez epistemológica diferente (es decir, el conocimiento que se puede generar es diferente en diferentes entornos).” (p. 186. Traducción propia). Sobre esto, Hershkowitz et al (2002) propuso 3 criterios para la selección adecuada de una herramienta digital: generalidad, referida a sus posibilidades de aplicación en distintas áreas de conocimiento y disponibilidad, es decir, que sea accesible para los actores del aula; potencialidad de matematizar, relativa a la posibilidad de reorganizar, amplificar y abstraer el

contenido representado; y poder comunicativo, es decir, su contingencia para relacionarse con el sistema de símbolos propios de la matemática.

Como describe la página web de GeoGebra (s.f.), este es un software libre y gratuito que apoya la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, confiriéndole el carácter de generalidad. Los distintos modos de visualización (Algebraico, gráfico 2D y 3D, CAS, hoja de cálculo, etc.) ofrecen muchas posibilidades para el tratamiento de datos de distinta naturaleza y sus variadas herramientas de construcción y programación proporcionan un entorno rico para la matematización. Por último, GeoGebra dispone de un amplio abanico de símbolos matemáticos de fácil acceso, inclusive ofrece la posibilidad de utilizar el sistema de composición de textos LaTeX¹⁰ para la representación de expresiones matemáticas.

Con base en lo anterior se puede afirmar que el software GeoGebra satisface los criterios de selección de Hershkowitz et al (2002). En consecuencia, se verifica la pertinencia del uso de este software como AGD en la THA de Cumbal (2020), por lo que se tomó la decisión de heredar esta herramienta digital para los propósitos de adaptación y rediseño de la THA de este trabajo de investigación.

Videojuegos y Educación

Durante el rediseño¹¹ de la THA de Cumbal (2020), se tomó la decisión de hacer un cambio del contexto de diseño al de diseño de videojuegos. Por lo tanto, resulta pertinente traer a este apartado algunos aportes respecto a los beneficios del uso de videojuegos para la educación.

El informe de Newzoo (2022) reportó que alrededor de 3200 millones de personas son consumidores de videojuegos en el mundo, con un crecimiento anual estimado del 2,1%. De estos, 315 millones están en Latinoamérica, por lo que alrededor del 47% de esta región es

¹⁰ Este es un procesador de texto ampliamente reconocido para la edición de documentos que permite la configuración de símbolos y expresiones especializadas para cualquier área del conocimiento (Valiente, 1997, p. 1).

¹¹ Este proceso se describe en el apartado de resultados.

consumidora activa de videojuegos, una cantidad nada despreciable. Etxeberria (1998) asoció el aumento de consumidores de videojuegos a: la creciente socialización de las tecnologías que, desde los años 90, ha hecho cada vez más accesibles los dispositivos que permiten la ejecución de este tipo de software; los videojuegos consisten en actividades lúdicas que producen satisfacción y ofrecen un refuerzo cognitivo inmediato y constante por la consecución de un objetivo. Lo anterior lleva a considerar este medio por su popularidad y envergadura.

Granic et al (2014) señalaron que los videojuegos se han valorado tradicionalmente de manera negativa, pues se han presentado como adictivos y reproductores de violencia. Sin embargo, en su trabajo, se encargaron de estudiar los beneficios del uso de videojuegos, de los cuales se presentan algunos pertinentes para el foco de esta investigación:

- Mejoran las habilidades espaciales en breves periodos de tiempo, las cuales resultan fácilmente transferibles a contextos externos a los videojuegos.
- Desarrollan habilidades relacionadas al reconocimiento de patrones, llamando la atención sobre elementos importantes y descartando información irrelevante para la consecución de un objetivo de manera efectiva.
- Promueven el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas al plantear situaciones particulares que deben resolverse mediante unas mecánicas concretas.
- Desarrollan la creatividad al sumergir a al jugador en un mundo fenomenológico específico, pero dándole la agencia suficiente para afrontar y superar los retos que se le proponen.
- Motiva al jugador a completar una tarea o alcanzar un logro particular mediante refuerzos cognitivos.

Resulta fácil percibir que estos beneficios pueden ser aprovechados durante el desarrollo de un contenido educativo. En particular, los videojuegos resultan llamativos, una característica que de la que parecieran carecer las matemáticas educativas, algo que se puede inferir del

trabajo de González (2015), que calificó como preocupante el desinterés de los estudiantes por las matemáticas e hizo un estudio donde reportó como principales causas de este fenómeno la percepción de los estudiantes de dificultad y utilidad de los contenidos. Así, la explotación de recursos para producir interés en los estudiantes resulta crucial para el profesor y es aquí donde los videojuegos pueden ser una herramienta poderosa. La anterior intuición se ve secundada por trabajos de investigación como los de Capell et al (2017), Carvajal y Rojas (2014) y Serna-Rodrigo y Cardell (2017), que reportaron experiencias exitosas del uso de videojuegos para la enseñanza de las matemáticas.

Los videojuegos pueden ser producidos con fines educativos concretos, pero también pueden usarse los videojuegos más comerciales si se ven inmersos en una propuesta de aula bien estructurada (Serna-Rodrigo y Cardell, 2017). Sobre estos últimos no debe esperarse que desarrollen el conocimiento de los estudiantes por si solos; pueden considerarse, como se catalogarían desde el Enfoque Instrumental de Trouche (2004), artefactos cuyo rol en el aula adquiere sentido a través de la orquestación del profesor para alcanzar la génesis instrumental, donde se aprovecha el recurso para favorecer un aprendizaje.

Capítulo III: Metodología de Investigación

Este capítulo se divide en dos momentos: en la primero se introducen los referentes que aportaron a este trabajo una dirección de corte metodológico, donde se presenta la IBD, los Experimentos de Enseñanza y el análisis de datos cualitativos; en segundo lugar, se describe la ejecución de ese marco metodológico durante este ejercicio investigativo.

Marco Metodológico

En este apartado introduce la teoría de la IBD, los Experimentos de Enseñanza y el análisis de datos cualitativos con el fin de precisar la ruta metodológica que se siguió en esta etapa del proceso de investigación.

Investigación Basada en Diseño

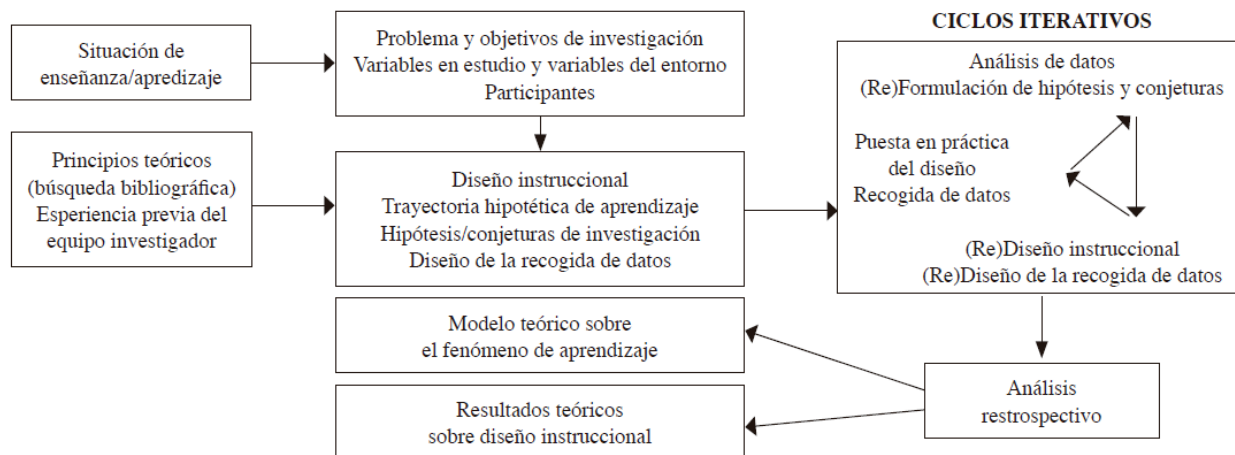
Una IBD es una investigación sobre las interacciones entre los actores de la clase que surgen en medio de la implementación de una propuesta de aula construida minuciosamente para alcanzar unos propósitos de enseñanza (Confrey, 2006). Dicho estudio se ve interesado en el “cómo se aprende” de un área del conocimiento a través de la interacción entre los estudiantes y la orientación del profesor. La IBD plantea un enfoque donde los propósitos investigativos se desarrollan a partir un ejercicio cíclico de implementación y rediseño de una propuesta de aula. Esta experiencia se somete a una sistematización¹² y análisis que sustenta dicho rediseño en la medida que da cuenta de los intereses particulares de la investigación (Molina et al, 2011).

Por su naturaleza cíclica, la IBD propone dos tipos de análisis sobre las experiencias documentadas: el primero sobre cada ciclo de implementación, con el fin práctico de modificar la propuesta para promover el desarrollo del conocimiento de los estudiantes; y el segundo sobre el resultado final y enfocado a contribuir al desarrollo teórico del proceso de aprendizaje sobre el contenido de interés. El proceso planteado para una IBD se ilustra en la figura 13.

Figura 13

¹² En el contexto de una investigación, este es el proceso de organizar, estructurar y ordenar de manera lógica y coherente un conjunto de datos.

Estructura General de una IBD



Nota. Tomado de Molina et al (2011, p. 76).

Molina et al (2011) consideraron que una de las ventajas de usar la IBD, como paradigma de investigación, es que establecía un puente directo entre la práctica educativa y los resultados teóricos sobre la enseñanza de un objeto de conocimiento por la íntima relación que plantea la dinámica del diseño, desde lo teórico, y la implementación, desde la práctica. Esta idea es secundada por Tena y Couso (2023), quienes destacaron la capacidad de la IBD para establecer un canal directo entre la teoría y la práctica a partir de su dinámica de rediseño. Por su parte, Benito y Salinas (2016) afirmaron sobre la IBD para propuestas basadas en AGD que “... ayudan a comprender todos los pasos del proceso de creación, elaboración, revisión, implantación y disseminación, en su caso, de cualquier programa o producto relacionado con la introducción de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje.” (p. 56).

Experimentos de Enseñanza

Steffe y Thompson (2000), definieron un Experimento de Enseñanza como una herramienta conceptual y exploratoria para la estructuración y organización de las actividades del investigador, dirigida a estudiar las matemáticas de los estudiantes, que se deriva de la entrevista clínica de Piaget. Así, un Experimento de Enseñanza relaciona una serie de episodios de enseñanza, un agente de enseñanza, uno o más estudiantes y un método de registro de datos (Steffe y Thompson, 2000). Cabe aclarar que un agente de enseñanza es, en un sentido amplio,

un actor que orienta el proceso educativo de los estudiantes y no necesariamente el profesor habitual de estos. Molina et al (2011) precisaron que, en un Experimento de Enseñanza, el investigador es el agente de enseñanza y no, en el caso del aula tradicional, el profesor habitual del grupo de estudiantes.

Cobb y Gravemeijer (2008) caracterizaron 3 fases generales en la ejecución de un Experimento de Enseñanza a partir de las tareas prácticas que implican:

- La preparación del experimento: donde se definen aspectos como los objetivos de la investigación, metodologías de enseñanza, el diseño y secuenciación de las actividades, mecanismos de recogida de datos, etc.
- La experimentación: donde se ultiman detalles previos a la actividad en el aula con base en el contexto de implementación, se recogen los datos de las interacciones, se modifica el diseño con base en las decisiones ad hoc del profesor y se hacen unos análisis parciales de los episodios desarrollados.
- El análisis retrospectivo: donde se sistematizan los datos recopilados y en el que es necesario distanciarse de los imaginarios iniciales, producto de los análisis parciales, las conjeturas y la justificación del diseño, para estudiar los resultados de manera global; e identificar cómo cambiaron los caminos conceptuales seguidos por los estudiantes en función de las acciones del profesor/investigador y su influencia.

Bernabeu et al (2019) destacaron la posibilidad que ofrecen los Experimentos de Enseñanza de describir lo que realmente pasa con el aprendizaje del estudiante por su proximidad constante al aula de clases.

Análisis de Datos Cualitativos

Definidos el paradigma y la estrategia metodológica como la IBD y los Experimentos de Enseñanza respectivamente, surge la necesidad de concretar un camino para la sistematización y análisis de datos cualitativos durante la fase del análisis retrospectivo. González y Cano (2010)

describieron esta etapa como “... un proceso metódico, riguroso, y cognitivamente complejo que implica la puesta en marcha de complicados procesos de comprensión, síntesis, teorización, y recontextualización.” (p. 4). Sobre este se destaca su importancia en una investigación porque es donde se plantea una dinámica de trabajo, se organizan los datos en unidades manejables y se clasifican para encontrar patrones generales, como afirma Mejía (2011) y sobre su propósito añadió:

Tiene por objeto posibilitar la emergencia de enunciados sobre los significados que expresan los datos, palabras, textos, gráficos, dibujos. Las proposiciones, que se desprenden de los datos, pueden ser descriptivas y empíricas, también, en un plano superior, las conclusiones pueden ser explicativas y teóricas. (p. 48)

El trabajo de Mejía (2011) describió en, términos generales, la siguiente secuencia para el análisis de datos cualitativos:

- La transcripción en texto de los registros, siendo estos de distintas fuentes como notas de campo y grabaciones de audio y video. Estos datos en bruto no constituyen propiamente datos cualitativos, pues solo adquieren esta connotación después de su tratamiento en los siguientes procesos.
- La reducción de los datos cualitativos, donde se simplifican, resumen, seleccionan, ordenan y clasifican con el fin de hacerlos más abarcables y susceptibles de análisis.
- La edición de los datos cualitativos, que consiste en una revisión y crítica de los estos con base en 3 criterios: representatividad de los datos, donde se cuestiona si la envergadura del conjunto de datos sustenta la relación entre el grupo sociocultural objeto de investigación y las intenciones investigativas; fiabilidad, relacionada a la coherencia de los datos, donde se busca garantizar la posibilidad de obtener datos similares al reproducir el proceso en otro contexto; validez, que garantiza que los datos corresponden a la realidad.

- Categorización y codificación: la primera, referente a una descomposición de los datos en unidades temáticas que expresan una idea relevante del objeto de estudio; la segunda, corresponde a la asignación de un rotulo, etiqueta o palabra a cada unidad categorial del cuerpo de datos. Estos procesos pueden desarrollarse de manera: deductiva, donde primero se conceptualizan las categorías a partir de la teoría y los códigos surgen para dar cuenta de esas categorías (de lo general a lo específico); inductiva, donde se codifica de manera libre el cuerpo de datos para identificar patrones que permitan concretar las categorías (de lo específico a lo general); o inductiva-deductiva, donde se toman aspectos de las dos anteriores, trayendo categorías de la teoría, pero también de la examinación de los datos.
- Registro, tabulación, disposición y transformación de datos, donde se establece un esquema concreto para organizar los datos codificados y categorizados con el fin de facilitar su análisis.
- Análisis descriptivo, que consiste en derivar, del cuerpo de datos codificado, enunciados descriptivos que son conclusiones que siguen al propio dato cualitativo.
- Interpretación, donde la examinación meticulosa de los casos se generaliza a la luz de la teoría y las intenciones investigativas.

Como esta investigación tiene como objeto de estudio una THA con unos PAH particulares, se siguieron las sugerencias de Bakker y Van Eerde (2015) para poder hacer una descripción de la Trayectoria de Aprendizaje real de los estudiantes intervenidos. De esta manera, era esencial poder dar cuenta de los PAH y, en consecuencia, de estos debían emerger categorías de análisis, sugiriendo seguir un método de categorización deductivo. Sin embargo, también se buscaba llegar a observaciones sobre el uso del AGD para el aprendizaje de la traslación, pero debido a que estos dependían exclusivamente de la causalidad en la experimentación, algunas categorías relacionadas surgieron de la examinación de los datos, lo

que corresponde a una categorización inductiva. Así, este informe precisó una categorización inductiva-deductiva.

Fases del Experimento de Enseñanza

En un Experimento de Enseñanza en el marco de una IBD se espera que se realicen varios ciclos de implementación, análisis y rediseño de una propuesta de aula con el fin de que sus resultados tengan un grado de generalidad satisfactorio. Como se puede intuir, esto conlleva una enorme complejidad logística y del procesamiento de una amplia cantidad de datos, lo que supone un trabajo investigativo de gran envergadura que supera las ambiciones del aquí presentado. Así, solo se desarrolló un ciclo, por lo que debe considerarse como un simple acercamiento a un Experimento de enseñanza. Por lo tanto, en este apartado se describe la preparación del experimento, la experimentación y el análisis retrospectivo de una implementación de la THA de Cumbal (2020).

Fase 1: Preparación del Experimento

Análisis y Adaptación de la THA. Una revisión general de la THA de Cumbal (2020) permitió afirmar que esta: se estructuró para la enseñanza de la transformación isométrica de la traslación; tenía como meta de enseñanza reconocer el resultado de aplicar transformaciones de traslación a figuras bidimensionales en contextos de diseño; las tareas que proponía se desarrollaban a partir de la observación de representaciones dinámicas en applets de GeoGebra; y los PAH se presentaban sobre cada Tarea.

La THA se configuró en una matriz que relacionaba los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes con varias tareas por nivel, cuyo propósito se describía mediante un modelo de progresión para cada una. Estas poseían una descripción y una serie de preguntas que accionaban la reflexión del estudiante sobre el contenido y la exploración en el applet. A su vez, a cada tarea se asociaba un PAH que describía cómo se esperaba que interactuara el estudiante con la tarea para alcanzar el modelo de progresión.

A partir de un análisis de los grupos de tareas relacionados a cada Nivel de la Heurística de los Modelos Emergentes, estos se pudieron interpretar desde la teoría y en el contexto concreto de la THA de la siguiente manera:

- Nivel Situacional (Tareas 1A - 1B): el contexto real utilizado se centró en presentar distintos elementos como animales o vehículos que se mueven, en las situaciones usadas, siguiendo una trayectoria rectilínea. Aquí las tareas giraban en torno a buscar que los estudiantes, a partir de un ejercicio de visualización, reconocieran las características visuales de deslizamientos que se relacionan o no a una traslación.
- Nivel Referencial (Tareas 2A – 2D): la esquematización surgía cuando se planteaba implícitamente una representación particular del fenómeno de la traslación a través de un deslizamiento rectilíneo. Sobre esta, se retomaban las características del Nivel Situacional, pero se propendía una comprobación a partir de acciones como la medición o superposición de figuras.
- Nivel General (Tareas 3A - 3F): se abstraían las características de inclinación, longitud y sentido de la traslación para concretarlas en el objeto vector de traslación. Este se presentaba como el parámetro que determinaba la traslación en su forma más general, explorando su efecto en distintas representaciones y a través de la variación de sus características para la construcción de la figura trasladada.
- Nivel Formal (Tareas 4A – 4B): se introducía una notación formal para nombrar los elementos geométricos de las representaciones. Además, se buscaba que los estudiantes elaboraran un razonamiento, a partir del reconocimiento de paralelogramos y el uso de sus propiedades, que diera cuenta de una prueba¹³

¹³ Este corresponde a un tipo de razonamiento válido, pero que carece de la formalidad y rigor que puede suponer una demostración, como precisa Stylianides (2009).

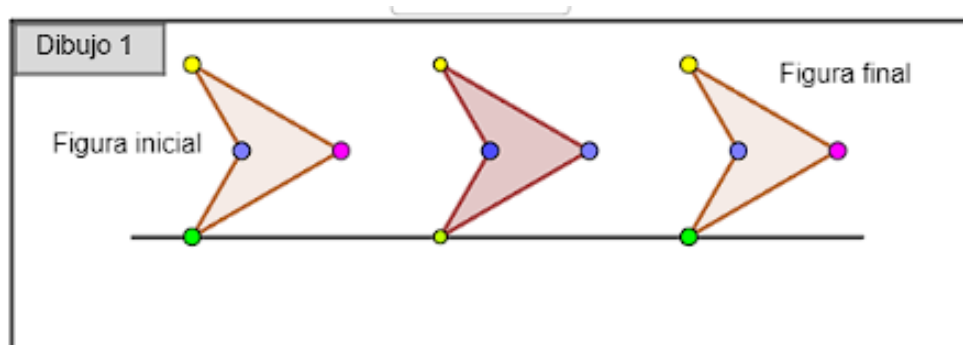
sobre la igualdad de la distancia entre los pares de vértices correspondientes entre una figura y su traslación.

Cumbal (2020), como ya se enunció, heredó la perspectiva de Jaime (1993) sobre la enseñanza de la traslación. Esta consistía en presentar la traslación como un tipo particular de movimiento de un objeto geométrico, del cual se caracterizaban unas propiedades que eran consecuencia de que cada punto del objeto se trasladara por un mismo vector de traslación, manteniendo la longitud, inclinación y sentido para cada par de puntos correspondientes. En consecuencia, la figura trasladada no cambiaba en tamaño, forma u orientación respecto al centroide.

La THA de Cumbal (2020) evidenciaba su concepción de la traslación como función, pero también acudía al recurso del movimiento para la exploración del fenómeno (ver figura 14). El primer aspecto se pudo identificar cuando suscitaba la comparación entre una figura y su traslación, es decir preimagen e imagen de una función traslación a través de un vector. El segundo se percibe en la exploración del deslizamiento rectilíneo de una figura por medio de una animación o el arrastre de esta en el AGD.

Figura 14

Representación de la Traslación en la THA



Nota. Las figuras inicial y final son estáticas y representan un rastro de la figura central que se mueve mediante una animación del AGD. Tomada del Applet de Cumbal (2020)

<https://www.geogebra.org/m/jqtravfh#material/uwh3wufc>.

Lo anterior se explicitaba en los PAH de cada tarea a partir de la exploración de las características del fenómeno. Por ejemplo, las tareas 2A, 2C, 2D y 3A buscaban que los estudiantes comprobaran la conservación de la forma, tamaño, orientación respecto al centroide e inclinación en una figura y su traslación. Así, un análisis de los PAH y los modelos de progresión de las tareas es lo que le ofrecía un sentido a la manera de secuenciar la THA.

Salta a la vista que el enfoque de Cumbal (2020) fue el de un tratamiento estrictamente gráfico de la traslación, por lo que no se destacó el uso de otro tipo de representación. Esto era consecuencia de que el conocimiento previo de los estudiantes para enfrentarse a las tareas fuera la conceptualización de elementos primitivos de la geometría: punto, segmento, recta y figura. Así, se puede afirmar que esta era una propuesta bastante accesible y apropiada para el nivel de escolaridad para el que se planteó.

Respecto a la adaptación de la THA para su implementación en el acercamiento al Experimento de Enseñanza, Simon (1995) y Zolkower y Bressan (2012) admitían que en el proceso de diseño o selección de una THA se hagan adaptaciones durante la preparación del experimento. Sin embargo, Baker y Van Eerde (2015) sugirieron, como precisión metodológica, que la THA debe reformularse a partir de los resultados del análisis retrospectivo, por lo que las adaptaciones deliberadas deberían ser mínimas en la primera etapa de implementación. Por lo anterior, se tomó la decisión de no realizar adaptaciones preliminares a la THA de Cumbal (2020), debido a que estas solo podían sustentarse en la especulación.

Caracterización del Espacio y la Población del Experimento. La implementación se desarrolló con estudiantes de 6º grado de escolaridad de unos 12 años, pertenecientes a una institución oficial de Cali ubicada en el oeste de la ciudad, en una zona de clase media-baja. Esta disponía de un amplio espacio con áreas verdes, canchas y piscina. El acercamiento a un Experimento de Enseñanza se llevó a cabo en una de las 6 sedes de esta institución, lo que da cuenta de su envergadura y población estudiantil.

Previsión Programática del Trabajo de Investigación. En la tabla 1 se relaciona el número de sesiones previstas con los contenidos y tareas de la THA, donde se esperaba poder realizar 4 sesiones de dos horas para abarcar el cuantioso número de tareas. Es necesario señalar que esta programación suponía un panorama ideal y se vio afectada por las dinámicas propias de la institución y el aula, alterando la duración prevista para una actividad concreta o sesión completa.

Tabla 1

Cronograma Previsto para la Experimentación

Sesión	Contenidos Desarrollados	Tareas de la THA
Marzo 1 (2h)	Conservación de tamaño, forma, inclinación y orientación; longitud de desplazamiento en la traslación de figuras.	1A, 1B, 2A y 2B
Marzo 8 (2h)	Comprobación por superposición de las características visuales de la traslación; correspondencia de vértices correspondientes de una figura y su traslación.	2C, 2D, 3A y 3B
Marzo 17 (2h)	Caracterización del vector de traslación; construcción de una figura trasladada a partir del vector de traslación.	3C, 3D, 3E y 3F
Marzo 22 (2h)	Introducción de notación formal; prueba de la equidistancia entre vértices correspondientes de una figura y su traslación.	4A y 4B

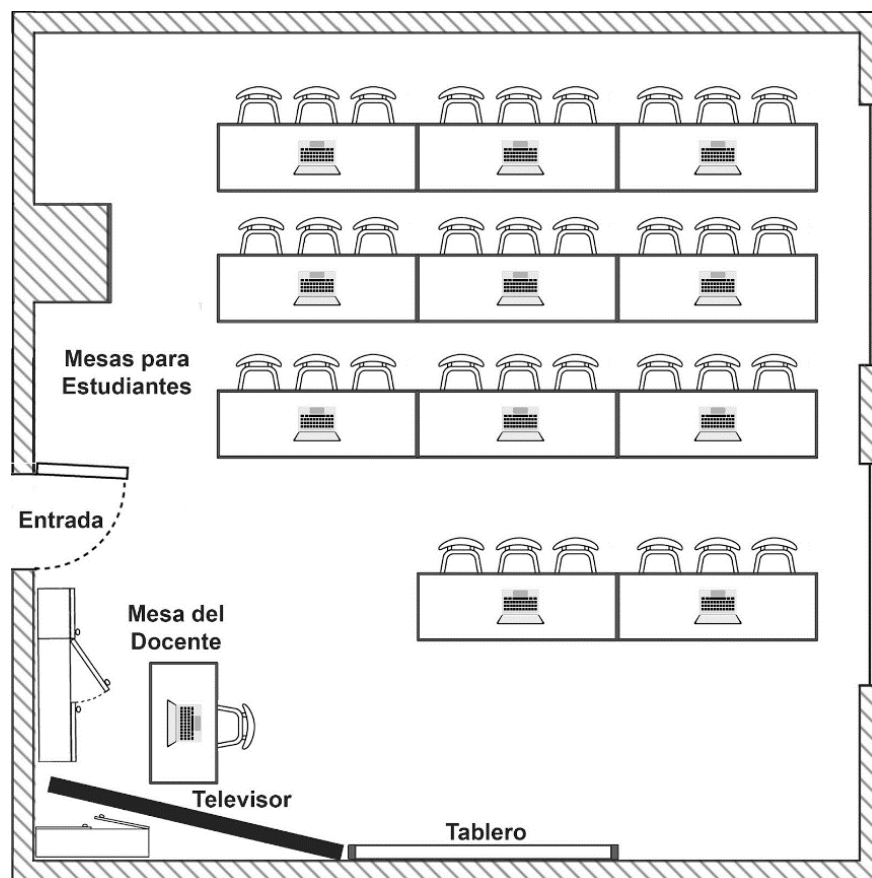
Nota. Elaboración propia

Fase 2: Experimentación

El espacio donde se realizaron todas las sesiones del experimento siempre fue el mismo: una sala con una capacidad para unos 40 estudiantes que disponía de computadores portátiles con acceso a internet (sin ratón/mouse), un televisor que cumplió las veces de proyector y un tablero (ver figura 15). Esto propició unas buenas condiciones para desarrollar las actividades planteadas, pues la efectividad de la THA dependía del uso de dispositivos apropiados para la visualización de los applets. Sin embargo, parece pertinente indicar que el touchpad de los portátiles dificultó la acción de arrastre, algo que se veía agravado por el hecho de que estos equipos eran usados por toda la institución, notándose un desgaste en el componente.

Figura 15

Disposición del Espacio donde se Desarrolló la Experimentación



Nota. Elaboración propia.

Como mecanismos de recolección de datos se usaron registros de audio capturados con teléfonos inteligentes y registros de video por medio de una cámara especializada para este tipo de propósitos. Esto permitió hacer una reproducción textual más precisa y contextualizada de las interacciones durante la implementación. Adicionalmente se acompañaron estos registros con uno físico, donde los estudiantes plasmaban sus razonamientos y respuestas a las tareas planteadas. Así, se pudieron capturar algunos insumos que iban más allá de las ideas que se generaban en la discusión con los estudiantes y que surgieron de su propia interacción con las tareas y sus maneras particulares de razonar sobre el contenido.

Inicialmente se introdujo a los estudiantes sobre las motivaciones que llevaban al ejercicio de implementación, se mencionó el contenido matemático a tratar y se estableció una dinámica para las sesiones. En esta, para cada tarea hubo una introducción en la que se

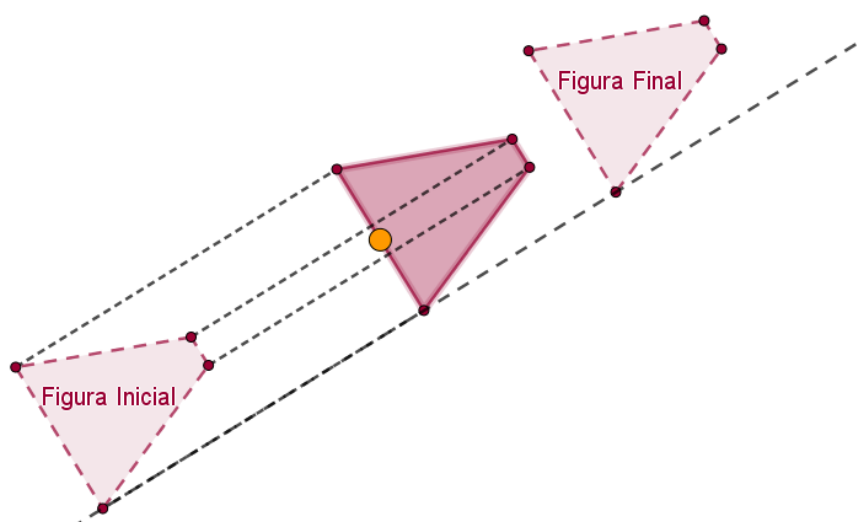
explicaba el propósito de la tarea y la manera en que se esperaba que usaran los applets. Así, los estudiantes se dividieron en grupos de 3, con el fin de favorecer la interacción entre pares, y se enfrentaron a las preguntas que accionaban la reflexión sobre el contenido, registrando sus respuestas en un medio físico. Durante el proceso de respuesta a las preguntas, los estudiantes debían discutir entre ellos a la vez que mediaban sus razonamientos con el Profesor en Formación Inicial (PFI), tal como fue factible logísticamente.

Durante el desarrollo del experimento se produjeron unos percances que no se previeron durante la fase de preparación del experimento y que generaron la necesidad de tomar algunas decisiones ad hoc:

- Aunque la implementación empezó según lo planteado en la propuesta programática, durante la primera sesión apenas se lograron abarcar las tareas del Nivel Situacional. Así, se hizo un cambio en la dinámica, en el que se seleccionaron solo algunas preguntas de las tareas para que los estudiantes se enfrentaran a ellas por sí mismos y el resto se discutían con el grueso del grupo. A pesar de esto, la fase de experimentación se extendió 2 sesiones para desarrollar la THA en su totalidad.
- Al evidenciar una falta de comprensión de la representación utilizada para visualizar el deslizamiento rectilíneo y la traslación asociada, al inicio de la 3ra sesión se desarrolló una actividad grupal adicional a las tareas propuestas en la THA. En esta, se utilizó un nuevo applet para explicar la forma prevista de interpretar la representación. Así, se procuró relacionar una figura y su traslación a partir de un tercera que fungía como figura auxiliar para representar la figura inicial durante el deslizamiento, mostrando unos rastros en sus vértices y una recta sobre la que se deslizaba que representaba la trayectoria, como se ilustra en la figura 16.

Figura 16

Applet para la Explicación de la Representación de un Deslizamiento Rectilíneo Asociado a una Traslación



Nota. Elaboración propia.

- Durante el desarrollo de las tareas correspondientes al nivel general se previó, a razón de la inexperiencia percibida en los estudiantes sobre tratamientos geométricos, que se les dificultaría configurar las características de inclinación, longitud y sentido en el vector de traslación. En consecuencia, esta actividad no se dejó a los estudiantes, sino que se realizó una construcción en el AGD de un vector con unas características propuestas por estos en un ejercicio grupal. Posteriormente, se usó dicho vector para trasladar una figura.
- Al ser investigadores inexperimentados, hubo algunos percances con la grabación de los registros de audio, provocando la pérdida o incomprensión de interacciones valiosas. Para solventar esto, se citó a algunos estudiantes para retomar estas intervenciones y así nutrir los registros. Este proceso se hizo de manera incisiva, sobre unas tareas y estudiantes concretos.

Haciendo las anteriores salvedades, la propuesta de THA de Cumbal se desarrolló según lo esperado. Los elementos destacados respecto al aprendizaje de la traslación se señalan en el siguiente apartado.

Fase 3: Análisis Retrospectivo

Este proceso se dividió en tres momentos: en el primero se hizo una coordinación, organización y codificación libre de los registros de video, audio y físicos; luego se plantearon unas categorías que se relacionan con los modelos de progresión planteados en la THA de Cumbal (2020) en cada tarea y se les asociaron unos códigos emergentes concretos para la identificación de patrones sobre dichos modelos; y por último se utilizaron los anteriores recursos para hacer un análisis descriptivo de lo sucedido en la experimentación a la luz de la teoría y los objetivos de investigación.

Transcripción, Segmentación y Codificación Abierta del Cuerpo de Datos. El procesamiento de los datos empezó por la transcripción de los registros de audio y una reducción de estos con el fin de sustraer interacciones que no tuvieran relación con el foco de interés de esta investigación¹⁴. Estos datos fueron dosificados por los registros de video, aportando anotaciones sobre interacciones que solo se podían percibir visualmente, como los gestos físicos usados por los estudiantes para describir elementos o propiedades geométricas. Así, los datos se dividieron en apartados relacionados a cada tarea, a las cuales se les sumó la transcripción de los registros físicos correspondientes.

Los insumos resultantes de lo anterior fueron segmentados en grupos de interacciones que daban cuenta de: el intercambio entre los estudiantes y el PFI sobre una pregunta; la socialización grupal de una conclusión; o un grupo de interacciones sobre algún tópico de

¹⁴ Estas eran interacciones sobre las dinámicas del aula que no tenían relación alguna con contenido o la THA.

interés para la investigación¹⁵. Esta segmentación fue caracterizada teniendo en cuenta lo siguiente:

- Los estudiantes se referenciaron con la letra “E” y se diferenciaron unos de otros a partir de una enumeración según su orden de ocurrencia durante la intervención. Por otro lado, el profesor en formación inicial se referenció como “PFI”. Para efectos de economía del lenguaje, se usó una enumeración local para las ilustraciones que se presentan en este informe.
- Se utilizó una enumeración para cada interacción que, de nuevo por economía del lenguaje, se supeditó a cada tarea. Así, para cada conjunto interacciones de una tarea se reiniciaba la enumeración.
- Cada segmento de aprendizaje se referenció según la tarea y una enumeración asociada a la ocurrencia del segmento en dicha tarea.

Hecha la segmentación se procedió a hacer una descripción preliminar de las interacciones del cuerpo de datos con el fin de tomar una decisión sobre la codificación de estos. Así, y dada la complejidad de manipular una cantidad tan abundante de datos, se identificaron elementos como acciones, conceptos, propiedades o relaciones, a partir de los cuales se generaron una serie de etiquetas que los representan. Este proceso dio como resultado una matriz con más de 70 etiquetas de las cuales se muestran las más destacadas en la tabla 2.

Tabla 2

Etiquetas Destacadas en la Codificación Libre de las Interacciones

Acciones		Conceptos		Propiedades y Relaciones	
Etiqueta	Significado	Etiqueta	Significado	Etiqueta	Significado
DTR	Determina	IN	Inclinación	CF	Conservación de la forma
I	Identifica	O	Orientación	CT	Conservación del tamaño
C	Comprueba	T	Tamaño	CO	Conservación de la orientación

¹⁵ Por ejemplo, la incomprensión de los estudiantes sobre la representación usada para los deslizamientos relacionados a una traslación.

R	Reconoce	TS	Traslación	CG	Congruencia
RL	Relaciona	TY	Trayectoria	DP	Dependencia

Nota. Elaboración propia.

Las etiquetas se configuraron en códigos emergentes con el fin de describir las interacciones en función de los intereses de la investigación, lo que corresponde a una codificación libre, como caracterizaron Bonilla y López (2016). Sobre esto es importante señalar que una etiqueta podía relacionar a otras dos. Por ejemplo, la etiqueta “DP” (Dependencia) hacía referencia a la dependencia de dos elementos como, por ejemplo, “TYLR” (Trayectoria en Línea Recta) y “CO” (Conservación de la orientación), por lo que el código emergente DP(TYLR, CO) describía la dependencia de la conservación de la orientación por la trayectoria en línea recta del deslizamiento. La etiqueta “N.” se configuraba con otra etiqueta para describir lo opuesto a su significado por lo que, si “CF” referenciaba la conservación de la forma, “N.CF” describía la no conservación de la forma. Teniendo en cuenta lo anterior, en la tabla 4 se presentan los códigos emergentes destacados que se generaron en este proceso.

El proceso anterior permitió la codificación de alrededor de 1500 interacciones, que se tabularon y organizaron como se ilustra en la tabla 3. Es importante señalar que, por los propósitos de esta investigación y su marco teórico, no se hace una codificación de las interacciones del PFI, dado que un análisis de estas correspondería a intereses investigativos de otra dimensión y envergadura.

Tabla 3

Codificación del Segmento de Aprendizaje 2A-4

Línea	Interacción	Cod-Traslación	Cod-AGD
52	PFI: A ver ustedes – observa las respuestas en el registro físico – ¿Por qué estas no?		
53	E 1: (t) es que esas no tienen el mismo tamaño, pero si son la misma figura (incomprensible) eran la 1, la 2 y la 3 y la 5.	C-N.CT-SP C-CT-SP	VR-APP-ARR
54	PFI: ¿La pregunta dice que tienen conservar qué? La misma forma y el mismo tamaño. ¿Cierto? ¿Entonces ahí qué pasa? Solamente conserva uno, ¿Y entonces?		

55	E 1: y en el 2 también.	C-CT-SP C-CF-SP	VR-APP-ARR
56	PFI: Tienen que ser los dos		
57	E 1: entonces no más por (incomprensible) la 1, la 2 y la 5	C-CT-SP C-CT-SP	VR-APP-ARR
58	E 2: 2 y usted en la tercera (incomprensible) en la 5	C-CT-SP C-CT-SP	VR-APP-ARR
59	E 2: ni ahí, ni aquí. – indicando que los dibujos 3 y 4 no cumplen la propiedad -	C- N.CT-SP C- N.CF-SP	UT-APP-IC

Descripción de los códigos del Segmento

C- N.CT-SP	Comprobación de la no conservación del tamaño por superposición
C-CT-SP	Comprobación de la conservación del tamaño por superposición
C-CF-SP	Comprobación de la conservación de la forma por superposición
C- N.CF-SP	Comprobación de la no conservación de la forma por superposición.

Nota. Elaboración propia.

Conformación de las Categorías de Análisis. Con el horizonte metodológico planteado por Bakker y Van Eerde (2015), la categorización deductiva permitió dar cuenta de lo sucedido con los PAH de la THA. Así, se establecieron una serie de categorías relacionadas a los modelos de progresión de cada tarea. Esto consistió en tomar una categoría y determinar qué códigos emergentes daban cuenta de esta, ya sea que describieran un resultado favorable o desfavorable. Luego, se examinó con detalle la ocurrencia de estos códigos emergentes en el cuerpo de datos de esa tarea para determinar patrones que sustentaran afirmaciones sobre la progresión del aprendizaje de los estudiantes. Las tablas que se presentan como ilustraciones, corresponden a secuencias representativas de dichas afirmaciones. La tabla 4 ilustra las categorías producto de este proceso, así como los códigos emergentes destacados que se les asociaron.

Tabla 4

Categorías por Nivel y sus Códigos Emergentes Destacados

Tarea Asociada	Categoría	Código Emergente	Descripción
Nivel Situacional			

1A	Identificación de la conservación del tamaño, forma, inclinación y orientación de figuras trasladadas	I-CF-IV	Identifica la conservación de la forma por intuición visual.
		I-CO-IV	Identifica la conservación del tamaño por intuición visual.
		I-TYLR-IV	Identifica la trayectoria rectilínea por intuición visual.
1B	Identificación del cambio de tamaño, forma, inclinación y orientación de figuras no trasladadas	I-N.CT-IV	Identifica la no conservación del tamaño por intuición visual.
		I-N.CO-IV	Identifica la no conservación de la orientación por intuición visual.
		CMP(TYLR, N.TYLR)	Compara una trayectoria rectilínea y otra que no.
Nivel Referencial			
2A	Comprobación de la conservación del tamaño y la forma	C-CT-SP	Comprueba la conservación del tamaño por superposición.
		C-CF-SP	Comprueba la conservación de la forma por superposición.
2B	Comprobación de la uniformidad de longitud entre los vértices correspondientes de la figura inicial y final	RL(EQVC, L)	Relaciona la equidistancia entre vértices correspondientes de la figura y su traslación con la longitud.
2C	Comprobación de la conservación de la orientación	C-CO-SP	Comprueba la conservación de la orientación por superposición.
2D	Comprobación de la conservación de la inclinación	C-CI-SP	Comprueba la conservación de la inclinación por superposición.
Nivel General			
3A	Comprobación de congruencia de las figuras inicial y final	C-CG-SP	Comprueba la congruencia por superposición.
3B	Determinación de la longitud del vector de traslación	DTR-L-DL	Determina la longitud del deslizamiento.
		C-L-DL	Comprueba la longitud del deslizamiento.
3C	Reconocimiento del sentido del vector de traslación	D-DIR-GF	Describe la dirección a partir de un gesto físico.
		I-DIR-DL	Identifica la dirección del desplazamiento.
3D	Configuración del vector de traslación	D-IN-GF-INA	Describe la inclinación con el gesto físico de inclinar el antebrazo.
		D-S-GF-DAPA	Describe el sentido a partir del gesto físico “De acá para allá”.
3E	Reconocimiento del vector de traslación como parámetro de la traslación	RL(L, S, IN, VTS)	Relaciona longitud, sentido e inclinación con el vector de traslación.
		I-DP(VTS, FF)	Identifica la dependencia de la figura final por el vector de traslación.
3F	Construcción de la figura trasladada dado un vector de traslación	UT-CD-CTR-VA	Utiliza la cuadrícula para construir el vector auxiliar.
		CTR-FF	Construye la figura final.
Nivel Formal			
4A		H(DL, TS)	Homologa deslizamiento con traslación.

	Prueba de igualdad entre distancias de puntos correspondientes por paralelogramo	R-EQVC-CC-TS	Reconoce la equidistancia entre los vértices correspondientes de la figura y su traslación para conceptualizar la traslación.
4B	Reconocimiento de la traslación en una configuración geométrica de diseño	R-TS ARG-TS-CT-CF-CO	Reconoce la traslación. Argumenta la traslación por la conservación de tamaño, forma y orientación.

Nota. Elaboración propia.

Por otro lado, la categorización inductiva del cuerpo de datos codificado libremente permitió conformar unas categorías de análisis relacionadas al uso del AGD para el aprendizaje de la traslación. Estas se relacionaban a una acción sobre los applets y posibilitaron la identificación de los usos del AGD que favorecían la comprensión de los estudiantes sobre una propiedad o concepto del contenido.

De lo anterior, es importante señalar que la búsqueda de patrones tuvo en cuenta la ocurrencia de un código emergente, pero también el proceso de mediación con el PFI. Este último tuvo prelación sobre la primera, pues era previsible que las interacciones partieran de una incompreensión de los estudiantes que se solventaría a partir del intercambio con el PFI para alcanzar una conclusión o inferencia esperada.

Como cada modelo de progresión correspondía a una tarea, a su vez lo hacía con un PAH, como consecuencia de la estructura misma de la THA. Así, el proceso anterior permitió hacer una descripción de los Procesos de Aprendizaje Real que se contrastaron con los hipotéticos, como sugieren Bakker y Van Eerde (2015) y se ilustra en la tabla 5. El conjunto de los Procesos de Aprendizaje Real conformó por sí mismo la Trayectoria de Aprendizaje Real.

Tabla 5

Comparación del PAH y el Proceso de Aprendizaje Real de la Tarea 2A

Proceso de Aprendizaje Hipotético	Proceso de Aprendizaje Real
El estudiante reconoce la conservación del tamaño y la forma. Cuando la figura inicial se desliza para obtener la figura final, el estudiante compara el tamaño de las figuras, a través de la superposición de todos los puntos de la figura inicial en la figura final. A partir de la comparación se puede inferir que, si la figura inicial se puede superponer sobre la figura final, sin modificar	Cuando el estudiante desliza la figura inicial para obtener la figura final, el estudiante compara el tamaño y la forma de las figuras a través de la superposición de todos los puntos de la figura inicial en la figura final. A partir de la comparación se puede inferir que, si la figura inicial se puede superponer sobre la figura final, las figuras inicial y final tienen la misma forma y tamaño.

ninguna de las dos figuras, se conserva el tamaño y la forma de la figura inicial en la figura final.

Nota. Elaboración propia.

Debido a que Cumbal (2020) estructuró los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes de manera secuencial en la THA, el agrupamiento de observaciones de las tareas correspondientes a un nivel permitió describir lo sucedido respecto a este. Con base en lo anterior se caracterizaron los niveles de comprensión sobre la traslación de los estudiantes intervenidos.

Descripción de la Intervención con Base en los Modelos de Progresión y los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes. Aquí se reporta, propiamente, el análisis descriptivo del cuerpo de datos codificado a la luz de la teoría y los objetivos de investigación. Así, este apartado se divide en dos momentos de análisis: sobre los modelos de progresión de cada tarea; y sobre los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes. A su vez, estos insumos sirvieron para identificar posibles limitaciones de la THA de Cumbal (2020) para generar una propuesta concreta de rediseño.

Descripción de los Modelos de Progresión de cada Tarea de la THA. En este se describió lo sucedido con los estudiantes y la THA respecto a cada tarea, pues de estas surgieron los modelos de progresión sobre los que se establecieron las categorías de análisis en el anterior apartado. Esto permitió determinar los Procesos de Aprendizaje Real y, en consecuencia, la Trayectoria de Aprendizaje Real de los estudiantes intervenidos.

En la Tarea 1A se proponía la identificación de las características visuales de conservación de tamaño, forma, orientación e inclinación en deslizamientos rectilíneos asociados a una traslación, así como el lugar geométrico de sus trayectorias. Para esto, se esperaba que los estudiantes usaran la intuición visual a partir del arrastre de un punto que modificaba un vector y, como consecuencia, la posición de la figura final.

Respecto a la conservación del tamaño, los estudiantes expresaron percepciones divididas, donde alrededor de la mitad del grupo de estudiantes lograban intuir que las figuras

inicial y final de la representación tenían el mismo tamaño. En contraste, la otra mitad dudaba sobre esta propiedad, afirmando que había un cambio en el tamaño. En ambos casos, cuando se les solicitaba argumentar sus intuiciones, establecían relaciones extrañas de dependencia como se presenta en la tabla 6.

Tabla 6

Conservación del Tamaño por Institución Visual

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: (...) para cada pareja de figuras, vamos a comparar la figura inicial con la figura final y vamos a responder las siguientes preguntas: La primera nos dice que, si mantienen el tamaño, si la figura inicial mantiene el tamaño con la figura final. ¿Ustedes qué consideran importante?
VS-APP	N.I-CT-IV	E 1: Que no
		PFI: ¿Qué no? ¿Por qué no?
VS-APP	N.RL(FI, FF)	E 1: Porque una es inicial y la otra final
VS-APP	I-CT-IV	PFI: ¿Ustedes? – Dirigiéndose a otro grupo, en el cual el estudiante 2 asiente - ¿Sí? ¿Por qué?
VS-APP-ARR	RL(FI, FF)	E 2: Porque salen de la misma figura
		PFI: Listo, Ustedes dos de allá, la primera, ¿Qué pusieron?
VS-APP	I-CT-IV	E 3: Que sí
		PFI: ¿Por qué?
VS-APP	RL(CT, CF) H(CT, CF)	E 3: Porque mantienen la misma forma.
		(...)
		PFI: ¿Por qué creen que cambia el tamaño?
VS-APP-ARR	ARG-N.CT-IV RL(CT, TY)	E 4: Por las trayectorias
VS-APP-ARR	ARG-N.CT-DL RL(N.CT, DL)	E 5: Cuando se desplaza el se agranda, se vuelve más grande.
VS-APP-ARR	ARG-N.CT-EX RL(N.CT, CPO)	E 6: Cambian de tamaño porque cuando se desplazan... mire profe uno está arriba y el otro esta abajo, uno al lado y al otro.

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento

N.I-CT-IV	Omite la conservación del tamaño por intuición visual.	ARG- N.CT-IV	Argumenta la no conservación del tamaño por intuición visual.
N.RL(FI, FF)	Omite la relación entre figuras inicial y final.	RL(CT, TY)	Relaciona la conservación del tamaño y la trayectoria rectilínea.
I-CT-IV	Identifica la conservación del tamaño por intuición visual.	ARG-N.CT-DL	Argumenta la no conservación del tamaño por el desplazamiento.

RL(FI, FF)	Relaciona las figuras inicial y final.	RL(N.CT, DL)	Relaciona la no conservación del tamaño con el desplazamiento.
RL(CT, CF)	Relaciona la conservación del tamaño y la conservación de la forma.	VS-APP	Visualización en el applet.
H(CT, CF)	Homologa la conservación del tamaño con la conservación de la forma.	VS-APP-ARR	Visualización por arrastre en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 1A-3: Líneas 16-25, 36-39. Elaboración propia.

En contraste, la conservación de la forma fue la característica visual que les resultó más fácil identificar de manera intuitiva. Esto se evidencia en los datos, donde 24 de 36 estudiantes dieron cuenta de la propiedad. En general, estos consideraron como evidente la conservación de la forma, sin embargo, un grupo de 3 estudiantes argumentaron que no tenían la misma forma porque cambiaban de tamaño, relacionando tamaño y forma de manera imprevista.

La conservación de la inclinación fue la característica visual más conflictiva para los estudiantes. Solo 3 grupos expresaron identificar la conservación de la inclinación. En particular, se evidenció que no tenían claridad sobre la noción de inclinación en una recta. Por ejemplo, un estudiante atribuyó la propiedad a la figura representada y no a la trayectoria propiamente, como se observa en la tabla 7.

Tabla 7

Conservación de la Inclinación por Institución Visual

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
VS-APP-ARR	RL(IN, DIR)	PFI: ¿En la 3 donde nos dicen que si mantienen la misma inclinación, cuando estamos hablando de inclinación ustedes qué creen que es? E 1: Para arriba
VS-APP	I-EX	PFI: ¿La inclinación es para arriba? y en el caso de las figuras cuál creen que es la inclinación? E 2: El carro, el avión, iel avión!
VS-APP-ARR	A-N.CI -EX	PFI: ¿Esta sería la inclinación? ¿la línea sería la inclinación? E 3: El carro profe, es diferente porque uno está más inclinado que el otro. PFI: ¿Y por qué uno está más inclinado que el otro?
VS-APP-ARR	A- N.CI-DIR RL(IN, DIR)	E 4: Porque el otro va hacia arriba (incomprensible)

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento

RL(IN, DIR)	Relaciona la inclinación y la dirección.	A- N.CI-DIR	Argumenta la no conservación de la inclinación por la dirección.
I-EX	Identificación extraña	VS-APP	Visualización en el applet.
A- N.CI -EX	Argumenta la no conservación de la inclinación de manera extraña.	VS-APP-ARR	Visualización por arrastre en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 1A-4: Líneas 55-62. Elaboración propia.

El lugar geométrico que describe la trayectoria de las figuras representadas en el deslizamiento relacionado a una traslación es el de una recta. Este parámetro fue identificado por 24 de 36 estudiantes, por lo que se puede afirmar que les resultó intuitivo reconocer la trayectoria rectilínea de las representaciones. Sin embargo, algunas interacciones llaman la atención sobre la dificultad de algunos estudiantes para identificar una recta cuando tiene una inclinación particular: algunos concebían la recta solo cuando esta era horizontal y no, por ejemplo, cuando era diagonal, como se evidencia en la tabla 8. Esto se saldó conceptualmente a partir de la mediación del PFI.

Tabla 8

Identificación del Lugar Geométrico de la Trayectoria

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: La cuarta pregunta nos dice: la trayectoria que sigue la figura inicial. ¿Certo? A la figura final, ¿Es en línea recta? Entonces miremos la primera, miremos el primer dibujo del avión. ¿La trayectoria es en línea recta de la figura inicial a la figura final?
VS-APP-ARR	N.I-TYLR-IV	E 1: No, no va en línea recta
		PFI: No, ¿Por qué no es una línea recta?
VS-APP-ARR	DF(LR, IN)	E 2: Profe no, no van derecho, no profe, porque van en vertical
VS-APP-ARR	D-LR-GF-INA	E 3: Si es una línea recta profe porque va así...
		PFI: ¿Y si yo acomodara este en función de este? Es decir ¿Así?
VS-APP-ARR	I-DLR-IV	E 2: Ese va derecho
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
N.I-TYLR-IV	Omite la trayectoria en línea recta por intuición visual.	I-DLR-IV Identifica el desplazamiento en línea recta por intuición visual
DF(LR, IN)	Diferencia los conceptos de línea recta e inclinación.	VS-APP-ARR
D-LR-GF-INA	Describe la línea recta a partir del gesto físico inclinación del antebrazo	

Nota. Segmento de Aprendizaje 1A-6: Líneas 71-77. Elaboración propia.

El PAH de la tarea 1A considera la conservación de la orientación como una de las características visuales que se pretendía que infirieran los estudiantes. Sin embargo, ninguna pregunta de la tarea llevaba a los estudiantes a reconocer dicha propiedad.

El estudio de las anteriores características visuales pretendía que el estudiante pudiera concluir que las figuras inicial y final eran congruentes respecto al centroide. Sin embargo, los datos reportaron que solo 9 estudiantes lograron reconocer esta relación entre las figuras. De esto, hay que señalar que algunos grupos que habían identificado la conservación de la forma en la primera pregunta, por ejemplo, cuando se les preguntaba por la congruencia, afirmaban que las figuras no eran iguales porque no tenían la misma forma, como se muestra en la tabla 9.

Tabla 9

Incoherencia Respecto a la Congruencia, la Conservación del Tamaño y la Forma

Preguntas	Grupo 2	Grupo 7
¿Mantienen el mismo tamaño?	No (N.I-CT-IV)	Si (I-CT-IV)
¿Mantienen la misma forma?	Si (I-CF-IV)	Si (I-CF-IV)
¿Podrías afirmar que las dos figuras son iguales? ¿Por qué?	No, por el tamaño y la forma (ARG- N.CG-~CT-~CF)	No, el cohete no es igual (ARG- N.CG-DF(FI, FF))
Descripción de los códigos del Segmento		
N.I-CT-IV	Omite la identificación de la conservación del tamaño por intuición visual.	
I-CF-IV	Identifica la conservación de la forma por intuición visual.	
ARG- N.CG- N.CT- N.CF	Argumenta la no congruencia por la no conservación del tamaño o no conservación de la forma.	
I-CT-IV	Identifica la conservación del tamaño por intuición visual.	
ARG- N.CG-DF(FI, FF)	Argumenta la no congruencia por diferencia entre las figuras inicial y final.	

Nota. Registro físico 1A: Grupos 2 y 7. Elaboración propia.

En la Tarea 1B los estudiantes debían observar deslizamientos con trayectorias no rectilíneas en las que no se verificaban las características visuales de conservación de tamaño, forma, orientación e inclinación, así como la trayectoria descrita por los objetos deslizados

mediante una animación en el AGD. Los datos reportaron que los estudiantes lograron reconocer la trayectoria circular acertadamente en la tarea 1B. De manera análoga, lograron identificar el cambio en el tamaño del dibujo 3, pero solo algunos pudieron describir el cambio de orientación del dibujo 4. A nivel general, se puede afirmar que los estudiantes contrastaron estas características visuales de manera acertada, como se presenta en la tabla 10.

Tabla 10

Comparación Entre Trayectorias Rectilíneas y no Rectilíneas en Registros Físicos

Preguntas	Grupo 1	Grupo 5	Grupo 9
¿Cómo es el movimiento del cuadrado verde en el dibujo 1?	En forma circular (D- N.TYLR)	Circular hacia la derecha (D- N.TYLR)	Da vueltas y se va pasando de cuadro a cuadro (D- N.TYLR)
¿En qué se parece el movimiento del dibujo 1 al movimiento del dibujo 2?	Que son en forma circular (D-CMP(TYLR, N.TYLR))	Los dos giran a la misma parte (D-CMP(TYLR, N.TYLR))	Que da vueltas y se va pasando de lugar a lugar (D-CMP(TYLR, N.TYLR))
Compara la figura inicial y final del dibujo 4 ¿En qué se diferencian?	Cambio de lugar y mira hacia el otro lado (D-CPO- N.CO)	En el último aparece un punto (D-EX)	Que la figura inicial está en la izquierda y aparece otra en la izquierda, pero al revés (D- N.CO)
Descripción de los códigos del Segmento			
D-~TYLR	Descripción de una trayectoria no rectilínea.		
D-CMP(TYLR, N.TYLR)	Descripción de la comparación entre una trayectoria rectilínea y otra que no.		
D-CPO- N.CO	Descripción del cambio de posición y no conservación de la orientación.		
D-EX	Descripción extraña.		
D-~CO	Descripción de la no conservación de la orientación.		

Nota. Registro físico 1B: Grupos 1, 5 y 9. Elaboración propia.

Otro propósito importante en este nivel era que los estudiantes lograran contrastar las características visuales de los deslizamientos de la tarea 1A con los de la 1B. Inicialmente varios grupos no lograron concretar las diferencias entre estos tipos de deslizamiento y aludían a observaciones como que los objetos representados eran distintos entre dibujos. Sin embargo, la mediación del PFI llevó a los estudiantes a fijarse en dichas características, por lo que

identificaron algunas de las diferencias entre los deslizamientos de la tarea 1A y 1B, aunque con un lenguaje impreciso, como se observa en la tabla 11.

Tabla 11

Comparación Entre Trayectorias Rectilíneas y no Rectilíneas en Registros de Audio

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: (...) Todos observaron la tarea 1B, ¿Qué diferencia o qué consideran ustedes importante en comparación con la tarea 1A? En las figuras, en la inclinación en las formas...
VS-APP-AN	D-CMP(TYLR, N.TYLR) I- N.CT-IV	E 1: En la 1A que ellos siguen una misma trayectoria, en la 1B cambia el trayecto y se agrandan.
VS-APP-ARR	I-TYLR	E 2: Profe, que van en línea recta, pero se separan. PFI: ¿Ustedes qué consideraron de diferencia?
VS-APP-ARR VS-APP-AN	RL(TY, DL) D-CMP(TYLR, N.TYLR) I- N.CT-IV	E 1: Diferente porque la tarea 1A los objetos suben (incomprensible) y en la 1B dan vuelta o crecen. PFI: Muy bien. Ustedes allá, ¿Encontraron alguna diferencia?
VS-APP-ARR VS-APP-AN	I-TYLR D-CMP(TYLR, N.TYLR)	E 1: Que las de antes siempre iban recto y acá en circulo.
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
D-CMP(TYLR, N.TYLR)	Descripción de la comparación entre una trayectoria rectilínea y otra que no.	RL(TY, DL) Relaciona trayectoria con deslizamiento.
I- N.CT-IV	Identifica la no conservación del tamaño por intuición visual.	VS-APP-ARR Visualización por arrastre en el applet.
I-TYLR	Identifica la trayectoria rectilínea.	VS-APP-AN Visualización de animación en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 1B-5: Líneas 10-16. Elaboración propia.

El PAH de la tarea 1B y su modelo de progresión llaman a considerar los cambios en la forma entre las figuras inicial y final. Sin embargo, las representaciones del applet no ilustraban deslizamientos donde se estos se produjeran. Además, no se evidenció que hicieran referencia a lo que sucede con la inclinación en un mismo dibujo. Por último, aunque hubo indicios documentados sobre el reconocimiento de algunas características visuales, no se registraron interacciones de los estudiantes donde se pudiera constatar una conciencia de que las

características visuales de la tarea 1A, al ser contrastadas con la tarea 1B, eran consecuencia de que el deslizamiento estuviera asociado a una traslación.

En la Tarea 2A los estudiantes debían comprobar las propiedades de conservación de tamaño y forma a partir del arrastre de la figura inicial para superponerla sobre la final. La coincidencia de sus vértices debía permitirles inferir que ambas figuras eran idénticas en forma y tamaño.

Se evidenció que 18 estudiantes lograron identificar todos los deslizamientos donde las figuras inicial y final tenían igual forma y tamaño, como se ilustra en la tabla 12; y 6 identificaron solo algunos de los deslizamientos donde se cumplía la propiedad. De las interacciones se puede destacar que los estudiantes no conocían el término “superponer”, donde la aclaración del PFI sobre esta acción impulsó un rápido reconocimiento de la propiedad.

Tabla 12

Conservación del Tamaño y Forma por Superposición

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
VR-APP-ARR UT-APP-DI	ARG-CT-CF-SP C-CT-CF-SP C-~CT- N.CF-SP	PFI: Bueno, la primera... La 1, la 2 y la 5 - refiriéndose a la respuesta de los estudiantes 1, 2 - ¿Por qué escogieron estas? ahí le están diciendo que ustedes tienen que explicar por qué escogieron estas. (...) PFI: ¿Qué dice la pregunta? - continua con el grupo - E 2: No (incomprensible) yo le digo... Lo escogimos porque... Son las únicas figuras que coinciden el mismo (incomprensible) Si porque unas son más, digamos por ejemplo la... Por ejemplo esta - señala un dibujo de la pantalla - O sea, no... No tienen ni el mismo tamaño, ni la misma figura. PFI: La misma forma - corrige -
	ARG-CT-CF-SP C-CT-CF-SP C-~CT- N.CF-SP	E 2: La misma forma y esta tampoco - señala otro dibujo de la pantalla - y las únicas que si coincidían con la misma forma eran la 1, la 2 y la 5 PFI: Exacto

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento

ARG-CT-CF-SP	Argumenta la conservación del tamaño y la conservación de la forma por superposición.	VR-APP-ARR	Visualización por arrastre en el applet.
C-CT-CF-SP	Comprueba la conservación del tamaño y la conservación de la forma por superposición.	UT-APP-DI	Utiliza el applet para desarrollar una idea.

C-~CT- N.CF-SP Comprueba la no conservación del tamaño y la no conservación de la forma por superposición.

Nota. Segmento de Aprendizaje 2A-7: Líneas 94, 97-101. Elaboración propia.

En la Tarea 2B los estudiantes debían comprobar que entre todos los pares de vértices correspondientes de una figura y su traslación la distancia era la misma. Se buscaba que esta se infiriera a partir de la elección de un segmento particular, con una inclinación y longitud fijas, que conectara todos los vértices correspondientes. La selección de este no presentó dificultad para los estudiantes y al preguntarles sobre lo que los había llevado a su elección, afirmaban que fue el de la longitud, usando términos como “distancia” o “tamaño”, como se muestra en la tabla 13.

Tabla 13

Equidistancia entre los Pares de Vértices Correspondientes de una Figura y su Traslación en Registros Físicos

Pregunta	Grupo 1	Grupo 3	Grupo 8	Grupo 9
¿Qué tuviste en cuenta al momento de seleccionar el segmento que le corresponde a cada deslizamiento?	Porque una es más larga que las otras (ARG-RL(EQVC, L))	Por la distancia de los puntos (ARG-RL(EQVC, L))	Midiendo el largo (D-PR)	Seleccione la más larga porque es la coincide con todos los puntos (ARG-RL(EQVC, L))
Descripción de los códigos del Segmento				
ARG-RL(EQVC, L)	Argumenta la relación entre la equidistancia entre vértices correspondientes con la longitud.			
D-PR	Describe un proceso.			

Nota. Registro físico 2B: Grupos 1, 3, 8 y 9. Elaboración propia.

Es importante señalar que la tarea donde se buscaba inferir la propiedad anterior no proponía preguntas que accionaran la reflexión del estudiante sobre esta, sino que se limitaban a buscar que el estudiante encontrara el segmento apropiado. Hay que señalar que el PFI se conformó con esto y no profundizó sobre estas respuestas para establecer las relaciones planteadas en el PAH, como se ilustra en la tabla 14.

Tabla 14

Equidistancia entre los pares de Vértices Correspondientes de una Figura y su Traslación en

Registros de Audio

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: Entonces, la idea, con lo que queremos que se queden, es que cuando usted desliza una figura ¿No? Usted desliza este cuaderno - utiliza un objeto concreto - ¿Cierto? Lo desliza en línea recta, tatatata - mueve el cuaderno - usted puede crear una recta, una línea que va a hacer que coincidan todos los puntos de la parte inicial con la final. ¿Vieron que eso se podía hacer? ¿Cierto? Ustedes elegían una y pasaba eso, había una recta que unía este con este mismo punto de acá - señalando los "puntos" del cuaderno - y así sucesivamente. De hecho, había varias que eran parecidas ¿No? Tenían como la misma dirección, pero ¿Qué es lo que hacía que una funcionara? (...) PFI: Es decir, ¿lo que importaba qué era?
	ARG-EX	E 1: profe, que... Fuera la correcta PFI: Pero ¿Qué hacía que fuera la correcta? ¿Qué cosa que se puede medir? - da una pista -
VR-APP-ARR	R-LR	E 1: la línea
VR-APP-ARR	C-RL(EQVC, L)	E 2: profe... (incomprensible) los puntos. Profe, que de los puntos depende la distancia de, o sea, la línea. PFI: Van por ahí, es la longitud - da la respuesta - ¿No?
	RF	E 2: Ajá PFI: Lo que mida, la distancia, la longitud de la línea va a determinar qué tanto se mueve.
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
ARG-EX	Argumenta de manera extraña.	RF Reafirma.
R-LR	Reconoce la línea recta.	VR-APP-ARR Visualización por arrastre en el applet.
C-RL(EQVC, L)	Comprueba la relación entre la equidistancia entre vértices correspondientes con la longitud.	

Nota. Segmento de Aprendizaje 2B-7: Líneas 72, 76-83. Elaboración propia.

En la Tarea 2C, se desarrollaba la propiedad de la conservación de la orientación respecto al centroide. Los estudiantes debían comprobar esta característica a partir del proceso de superposición descrito en la tarea 2A. Sobre esto, es pertinente señalar que los estudiantes no tenían claridad sobre el concepto de orientación e incluso la analogía “la figura mira hacia...” les era confusa. La mediación del PFI les permitió asociar las figuras con objetos concretos, como un avión, la vela de un barco o una flecha. Así, los estudiantes percibían con mayor claridad si

las figuras cambiaban de orientación mediante la analogía propuesta, como se muestra en la tabla 15.

Tabla 15

Conservación de la Orientación por Superposición

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: (...) Hacia dónde... ¿Esto qué es? ¿A qué se parece? ¿A qué le ven forma? - No obtiene respuesta - PFI: Un momento que estoy con ellas. ¿Ah? ¿a nada? - retomando el dialogo con las estudiantes 1 y 2 - a una flecha, a un avión.
VS-APP	R-A-CP	E 1: Ah sí.
VS-APP	R-A-CP	E 2: Si, a una flecha - al unísono con la estudiante 1 -
		PFI: Ah ok, a la vela de un barco... A cualquier cosa. ¿Cuál eligen? ¿Cuál figura? ¿Una flecha? ¿Quieren una flecha? Bueno, digamos que esto es una flecha. ¿Hacia dónde está mirando la flecha?
VS-APP UT-APP-DI	I-O-FI-IV	E 2: acá (incomprensible) - indica señalando -
		PFI: En la figura inicial, ¿No?
	RF	E 2: ujum PFI: Y después del movimiento ella termina acá ¿Cierto? Y hacia dónde está mirando. Estudiante 1: hacia...
VS-APP UT-APP-DI	I-O-FF-IV	E 2: hacia allá - señalando - PFI: Hacia el mismo lado ¿No?
VS-APP UT-APP-DI	I-CO-IV	E 2: Si, los dos miran para allá – señalando - PFI: Parece que está mirando hacia el mismo lado. Ehhh, entonces lo que le están preguntando es ¿En cuáles de esos movimientos la figura pasa eso? al inicio y al final miran hacia exactamente el mismo lado.
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
R-A-CP	Reconoce la analogía de concretar la representación.	I-CO-IV Identifica la conservación de la orientación por intuición visual.
I-O-FI-IV	Identifica la orientación de la figura inicial por intuición visual.	VS-APP Visualización en el applet.
RF	Reafirma.	UT-APP-DI Utiliza el applet para desarrollar una idea.
I-O-FF-IV	Identifica la orientación de la figura final por intuición visual.	

Nota. Segmento de Aprendizaje 2C-4: Líneas 74, 81-92. Elaboración propia.

En la Tarea 2D, de manera similar a la anterior, los estudiantes debían comprobar la conservación de la inclinación por superposición, con la diferencia de que aquí el applet permitía arrastrar la recta que representaba la trayectoria, con el fin de establecer que, para algunos dibujos, las figuras inicial y final no compartían una misma trayectoria rectilínea. Los datos evidenciaron que 15 estudiantes lograron identificar los dibujos de la tarea 2D donde las figuras inicial y final estaban sobre la misma recta; 12 estudiantes reconocieron la propiedad en el dibujo 1, pero también consideraron que el dibujo 2 satisfacía la propiedad de manera desacertada.

El método de superposición para comprobar la congruencia pareció no generarles problemas en este punto, ya que la mayoría de los grupos reportaron que en los dibujos 1 y 3 de la tarea 2D, que eran los deslizamientos donde se conservaba la inclinación, las figuras inicial y final eran congruentes con común orientación respecto al centroide por superposición. Sin embargo, no explicitaron una relación de dependencia entre la condición de “deslizamiento en línea recta” con el consecuente “conservación de la inclinación”, tan solo evidencian una intuición de su relación con la trayectoria. La tabla 16 ilustra lo anterior.

Tabla 16

Conservación de la Inclinación por Superposición

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
VR-APP-ARR	C-CG-SP	PFI: Listo, ahí, ¿Coinciden los vértices?
		E 1: Si
VR-APP-ARR	C-CG-SP ARG-CG-SP	PFI: ¿O sea que las figuras cómo son? Uno qué podría decir de la que estaba acá y de la que estaba acá.
		E 1: coinciden, son las mismas
	ARG-EX	PFI: Son las mismas, ¿no?
VR-APP-ARR VS-APP	I-RP-TY R-DP(TYLR, CG)	E 1: los mismos ángulos
		PFI: Ahora, si es posible hacer eso, ustedes dirían que los vértices... Si los vértices coinciden, ¿Se encuentra sobre la misma línea recta?
	ARG-CG-TYLR	E 2: Si
		E 1: Si coinciden porque siguen su misma... Rotación se le puede decir?

		PFI: ¿Cómo así? ¿Qué quieres decir?
VS-APP-ARR	EV-R-TYLR	E 1: Siguen su mismo camino pues.
		PFI: Van por el mismo... Siguen como el mismo patrón...
RF		E 1: Si
		PFI: Se mueven de la misma manera todos los vértices. Vale
VS-APP	ARG-EX	E 1: Mantiene su mismo ángulo y su misma rotación.

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
C-CG-SP	Comprueba la congruencia por superposición.	ARG-CG-TYLR	Argumenta la congruencia por la trayectoria rectilínea.
ARG-CG-SP	Argumenta la congruencia por superposición.	EV-R-TYLR	Evidencia reconocer la trayectoria rectilínea.
ARG-EX	Argumentación extraña.	RF	Reafirma.
I-RP-TY	Identifica la representación de la trayectoria	VS-APP	Visualización en el applet.
R-DP(TYLR, CG)	Reconoce la dependencia entre la trayectoria rectilínea y la congruencia.	VS-APP-ARR	Visualización por arrastre en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 2D-3: Líneas 73-87. Elaboración propia.

En la Tarea 3A los estudiantes debían conjugar las conclusiones de las tareas 2A y 2C para inferir, en un deslizamiento asociado a una traslación, la congruencia con orientación común respecto al centroide de las figuras inicial y final a partir de su superposición. Los datos evidenciaron que esta acción les ofrecía a los estudiantes la certeza para afirmar que una figura y su traslación eran iguales, ya que 27 de los estudiantes identifican la propiedad en los dibujos de la tarea. Por otro lado, es necesario señalar que los estudiantes, por si solos, no recordaron las características visuales de la traslación para identificarlas en los dibujos, por lo que el PFI debió recordárselas y estos solo se remitían a su verificación, como se evidencia en la tabla 17.

Tabla 17

Dificultad para Recordar las Características Visuales de la Traslación

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: ¿Cuáles son traslaciones ahí?
	N.R-CC-TS	E 1: ¿Traslación?
	EN-LR-IPD	E 2: Línea recta
		PFI: ¿Recuerdan qué era una traslación?

	EN-T-F-IPD	E 2: Algo con el tamaño y la forma PFI: A ver... ¿Qué pasaba con el tamaño y la forma?
	R-CT-CF	E 1: Eran iguales PFI: Ok, esas son características de la traslación, que mantienen forma y tamaño, pero había otras.
	N.R-CI N.R-CO N.R-TYLR	E 1: Profe, no me acuerdo PFI: otra característica era si mantenía la orientación
	N.R-CO	E 1: No PFI: ¿No? A ver, recuerden, la orientación tenía que ver con si miraban para el mismo lado.
VS-APP	R-CO-IV	E 2: Ah sí, ese sí, pero el 4 no PFI: ¿Certo? La otra gran característica era si iban en línea recta. ¿Ese va en línea recta? – señala el dibujo 1 -
VS-APP	R-TYLR-DL	Estudiante 2: Si
VS-APP-ARR	R-TYLR-DL	E 1: Va derecho PFI: Entonces el primero es una traslación. Ahora deben hacer lo mismo con los otros dibujos.

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento

N.R-CC-TS	Omite reconocer la conceptualización de traslación.	N.R-CO	Omite reconocer la conservación de la orientación.
EN-LR-IPD	Enuncia la línea recta de manera inesperada.	N.R-TYLR	Omite reconocer la trayectoria rectilínea.
EN-T-F-IPD	Enuncia el tamaño y la forma de manera inesperada.	VS-APP	Visualización en el applet.
R-CT-CF	Reconoce la conservación del tamaño y la conservación de la forma.	VS-APP-ARR	Visualización por arrastre en el applet.
N.R-CI	Omite reconocer la conservación de la inclinación		

Nota. Segmento de Aprendizaje 1A-1: Líneas 12-20, 25-32. Elaboración propia.

A partir de la mediación con el PFI, los estudiantes lograron argumentar porqué algunos de los dibujos representaban un deslizamiento que se corresponde con una traslación de manera satisfactoria, como se evidencia en la tabla 18.

Tabla 18

Reconocimiento de Deslizamientos que Corresponden a una Traslación

Pregunta	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 9
----------	---------	---------	---------

En cada uno de los dibujos las figuras que tienen la misma forma ¿corresponden a una traslación? ¿Por qué?	Por la misma forma, el tamaño, el movimiento es en línea recta y la figura inicial y la final miran hacia el mismo lado. (ARG-TS-CT-CF-CO-TYLR)	La una y la dos porque tienen la misma forma y tamaño y se mueven en línea recta. (ARG-TS-CT-CF-TYLR)	En el dibujo 1 y en el dibujo 2 porque tienen la misma forma y coinciden con los puntos. (ARG-TS-CF-CG)
Descripción de los códigos del Segmento			
ARG-TS-CT-CF-CO-TYLR	Argumenta la traslación mediante la conservación del tamaño, forma, orientación y la trayectoria rectilínea.		
ARG-TS-CT-CF-TYLR	Argumenta la traslación mediante la conservación del tamaño, la forma y la trayectoria rectilínea.		
ARG-TS-CF-CG	Argumenta la traslación mediante la conservación de la forma y la congruencia.		

Nota. Registro físico 3A: Grupos 2, 3 y 9. Elaboración propia.

En la Tarea 3B se llamaba la atención del estudiante sobre la distancia de desplazamiento de una traslación, para abstraerla en tareas siguientes como la longitud del vector de traslación. Esta se determinaba a partir de una medición, para lo que el applet disponía de dos métodos: el uso de una herramienta métrica y la observación de una animación en conjunción con la cuadrícula del AGD.

Los estudiantes empezaron por usar la herramienta de medición para determinar la longitud de desplazamiento en los dibujos 1, 2 y 3. Aunque lograron ubicar correctamente la herramienta de tal manera que “conectara” un par de vértices correspondientes de las figuras inicial y final, presentaron una dificultad para determinar la medida de la longitud. Para medir, se remitían a contar las divisiones de la herramienta y no los espacios que representaban la unidad de longitud. Esto último se saldó a través de la mediación con el PFI, como se muestra en la tabla 19.

Tabla 19

Medida de la Longitud del Desplazamiento con Herramienta Métrica

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: Con el palito... A ver, ¿Cómo lo usarías? Mídanme el de los triángulos azules a ver y me dicen qué tanto mide.
VR-APP-ARR	DTR-L-DL-EX	E 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 - Contando los puntos de la herramienta -

		PFI: Ok, a ver... Uhm... ¿Ustedes qué creen que representan los espacios entre los punticos?
	CC-UM-EX	E 1: Las veces que se repite?
		PFI: ¿Que se repite...? ¿Cómo es un metro?
	ICM	E 2: (incomprensible) 1, 2, 3...
		PFI: Cómo... ¿Qué es cada cosa? ¿Qué es cada espacio?
VS-APP	R-UM	E 2: Un centímetro
		PFI: Ahí usan un centímetro, ¿no? Eso es una unidad de medida. Podrá haber un metro, bueno, seguramente lo han visto. Usualmente los metros tienen por un lado en centímetros y por otro en pulgadas y la pulgada es diferente pero también es la misma: primero una pulgada, luego otra, luego otra... Aquí usan algo parecido, es como una unidad. Ehm... pero como no tiene exactamente qué es, uno podría decir "es una unidad de longitud" o, pues, aquí no nos vamos a preguntar tanto por ese tema, podemos decir que mide en centímetros, por decir algo, ¿No? Digamos que estos son centímetros. Listo, entonces dice que mide 7 cm.
VS-APP-ARR	DTR-L-DL-EX	E 1: Si
		PFI: ¿Seguro?
VS-APP-ARR	DTR-L-DL	E 1: Seguro, mide 7... Ah no 6, 6 porque 1, 2, 3, 4, 5, 6 - contando las unidades de longitud - Son los espacios que hay entre los puntos.
		PFI: Exacto

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
DTR-L-DL-EX	Determina la longitud del desplazamiento de manera extraña.	DTR-L-DL	Determina la longitud de desplazamiento.
CC-UM-EX	Conceptualiza la unidad de medida de manera extraña.	VS-APP	Visualización en el applet.
ICM	Incomprensible.	VS-APP-ARR	Visualización por arrastre en el applet.
R-UM	Reconoce la unidad de medida.		

Nota. Segmento de Aprendizaje 3B-2: Líneas 10, 29-40. Elaboración propia.

Posteriormente los estudiantes determinaron la longitud del desplazamiento sin la herramienta de medición. Para esto, observaron la animación de la figura final, y con las aclaraciones del PFI de que cada “paso” de la animación era uniforme, identificaron la longitud del desplazamiento a partir del conteo de los “pasos” que daba la figura al deslizarse, como se muestra en la tabla 20. Algunos grupos usaron la herramienta de medición para comprobar su respuesta.

Tabla 20

Medida de la Longitud del Desplazamiento por Animación y Cuadrícula

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración	
VS-APP-AN		PFI: Ya, listo, ok. Sin usar la regla, cuánto se mueve la del final - indicando el dibujo 4 - La rosada, usen la animación.	
		- Los estudiantes observan la animación -	
VS-APP-AN	DTR-L-DL	PFI: Supongamos que ella se está moviendo una cantidad uniforme, o sea que cada uno es 1cm	
		E 1: 9	
VS-APP-AN UT-APP-CD	C-L-DL	PFI: A ver, dele otra vez, yo miro, que yo no conté	
		E 2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... 9 cm	
		PFI: Ajá, suponiendo que es en cm, ahí le estamos inventando nosotros, pero si y es una unidad de medida. Listo.	
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
DTR-L-DL	Determina la longitud de desplazamiento.	VS-APP-AN	Visualización de animación en el applet.
C-L-DL	Comprueba la longitud del desplazamiento.	UT-APP-CD	Utiliza la cuadrícula del applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 3B-3: Líneas 54-60. Elaboración propia.

Lo anterior permite destacar un nuevo uso del applet a partir de la implementación de elementos geométricos auxiliares para un propósito concreto. En este caso, se emuló una herramienta de medición cuyo uso fue asimilado de manera orgánica por los estudiantes, aunque determinar correctamente la medida requerida se les dificultara. Es pertinente señalar que GeoGebra tiene una herramienta nativa para determinar la distancia entre dos puntos, pero su uso requiere una experiencia sobre el AGD. Este recurso permitió subsanar la necesidad de medir de una manera apropiada para usuarios sin esta experticia, como los sujetos de estudio de esta investigación.

En la Tarea 3C se buscaba que los estudiantes identificaran el sentido de la traslación a partir de un applet donde debían ingresar unos parámetros que cambiaban la posición de la figura final. Así, tenían que ingresar los valores adecuados para trasladar la figura a una posición concreta. Es importante señalar que tanto el applet como las preguntas se referían al sentido como “orientación”.

Aquí se destacó que la exploración del applet resultó, en un principio, compleja para los estudiantes por lo que siguieron un proceso de prueba y error para descubrir cómo funcionaba, seleccionando las casillas de “orientación” e ingresando valores en las entradas de posición, como se ilustra en la tabla 21. Finalmente consiguieron comprender que los valores ingresados determinaban la longitud de desplazamiento, inclinación y sentido con los que se trasladaría la figura central.

Tabla 21

El Sentido del Deslizamiento

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
E-APP	AAP	PFI: (...) Entonces, vamos a ver, lo primero, qué sucede, ustedes ven que al lado hay como un panel, hay una figura en el centro y hay unas figuras a los costados y al lado derecho hay como un panel. Entonces, por ejemplo, selecciona donde dice "derecha-abajo".
		- el estudiante selecciona la casilla indicada -
	EXC	PFI: y quita el "derecha arriba". ¿Qué sucede? E 1: (incomprensible) no capto... (...)
DIF-E-APP	EXC	PFI: Ahora, dejémoslo ahí en derecha abajo. Derecha-abajo, ¿Ustedes hacía dónde creerían que eso indica?
		E 1: No, es que la verdad no entendemos porque la figura no marca ni los puntos ni marca (incomprensible) punto a punto, o sea, no... PFI: Ok, pero mira, tenemos eso ahí, cuando a vos te dicen derecha abajo, Muéstrame, decime una dirección que se te venga a la cabeza.
VS-APP	D-DIR-GF	E 1: derecha abajo, sería un ángulo, pam pam - usando un gesto para describir su idea - PFI: Derecha abajo, listo, ahora metamos valores en esos numeritos que hay, donde dice derecha-abajo a ver qué pasa, por ejemplo, en donde dice derecha, pongan un número que quieran, que no sea muy grande. (...)
E-APP-AC	ICM	E 1: póngale 4, porque sería como tienen los mismos (incomprensible)
E-APP-AC		E 2: ah, derecha-abajo... Ya entendí
		E 1: (incomprensible) PFI: ¿Ya vieron más o menos que hace?
E-APP-AC	I-DIR-DL	E 2: Si

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento

AAP Atiende a la aclaración del profesor. E-APP Exploración del applet.

EXC	Expresa desconocimiento.	DIF-E-APP	Dificultad en la exploración del applet.
D-DIR-GF	Describe la dirección mediante un gesto físico.	E-APP-AC	Exploración acertada del applet.
ICM	Incomprensible.	VS-APP	Visualización en el applet.
I-DIR-DL	Identifica la dirección del deslizamiento.		

Nota. Segmento de Aprendizaje 3B-6: Líneas 9-11, 21-25, 34-38. Elaboración propia.

Una vez alcanzado el objetivo procedimental del applet de la tarea 3C, los estudiantes lograron inferir la configuración adecuada de longitud, inclinación y sentido de la traslación a partir de la selección de las casillas “orientación”. Es necesario señalar que las preguntas no hacían alusión al sentido propiamente. De hecho, el applet trasladaba la figura a partir de la selección de los componentes del vector implícito en la representación, lo que correspondería a una configuración de todas sus características: longitud, inclinación y sentido. Así, no se abstraía el concepto individuado de sentido pues un segmento, con una inclinación y longitud particular, puede caracterizar dos vectores con distinto sentido, determinado por los extremos del segmento.

A pesar de lo señalado anteriormente, durante el desarrollo de esta tarea se evidenció una potencialidad del AGD. Para cumplir el objetivo procedimental de la tarea, los estudiantes debían tener una conciencia explícita de la dirección de la trayectoria. Así, la acción suscitada por el AGD fungía como catalizador para la comprensión de la propiedad.

En la Tarea 3D los estudiantes se enfrentaban a una matriz que abstraía las características de longitud, inclinación y sentido del desplazamiento de distintas traslaciones en representaciones auxiliares que dieran cuenta de cada propiedad. A partir de la comparación de estas, debían reconocer esas propiedades como inherentes a cualquier traslación, aunque presentaran variaciones. Sobre esto, los datos de la tarea 3D evidenciaron que 21 estudiantes contrastaron las inclinaciones de manera correcta y otros 6 lo hicieron parcialmente. A algunos grupos se les dificultó comparar las inclinaciones en un principio, pero a partir de la mediación del PFI pudieron con este cometido, como ilustra la tabla 22.

Tabla 22*Comparación de la Inclinación en Distintas Traslaciones*

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: (...) ¿Qué deslizamientos tienen la misma inclinación? ¿Cuáles tienen la misma inclinación? Miren que este se mueve como así derecho - hace el gesto de movimiento horizontal - para un lado, entonces la inclinación va a ser la inclinación de ese movimiento - el estudiante h hace un aporte al mismo tiempo - ¿Cómo?
VS-APP-AN	DIF-CMP-IN	E 1: Todos tienen la misma inclinación PFI: ¿Sí? ¿Y qué pasa con el tercero?
VS-APP-AN	DIF-CMP-IN	E 1: Tiene la misma inclinación PFI: ¿El tercero tiene la misma inclinación que el segundo? por ejemplo - pregunta porque no es así -
VS-APP-AN	CMP-IN-GF-INA	E 1: Ah no, es otra, es así – utiliza un gesto físico - PFI: Ah bueno
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
DIF-CMP-IN	Dificultad para comparar la inclinación.	VS-APP-AN Visualización de animación en el applet.
CMP-IN-GF-INA	Compara la inclinación usando el gesto de inclinar el antebrazo.	

Nota. Segmento de Aprendizaje 3D-4: Líneas 36-42. Elaboración propia.

Respecto a la comparación del sentido, se pudo evidenciar que la mayoría de los estudiantes no lograron identificar la propiedad en las traslaciones presentadas, por lo que el PFI debió reintroducir el concepto. Esto refuerza la idea, desarrollada cuando se describió lo sucedido con el concepto de sentido, donde se podía interpretar la “orientación” como la configuración de la longitud, inclinación y sentido del deslizamiento, pero no se abstraía totalmente la noción referida. Para saldar esto, el PFI utilizó el gesto físico “de acá para allá”, indicando el sentido del vector a partir de los extremos de un segmento, como se observa en la tabla 23.

Tabla 23*Comparación del Sentido en Distintas Traslaciones*

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
---------	----------------	-------------

		PFI: Orientación es, es decir, ustedes ya tienen esto - señalando la columna de inclinaciones - Ahora, una figura... Sin ver estos ejemplos - los deslizamientos - a uno le dicen "vea estas son las inclinaciones de unas figuras" ¿Sí? - aislando las inclinaciones para crear la necesidad de saber el sentido - Eh, ¿cuál es el sentido? ¿Cuál es la orientación? Miren que uno podría decir "ah pues yo no sé, ella podría venir de acá hacia acá - haciendo un gesto de movimiento - ¿Cierto? Como en esta dirección o de allá hacia allá. Tienen esa misma inclinación en ambos sentidos ¿Cierto? ¿Qué es lo que nos da esa información? Pues de dónde hacia dónde va la figura. Entonces dale aquí dice eh...
	EN-DL	E 1: Deslizamiento... PFI: Deslizamiento - confirma y observan la animación - Mira que ella viene de acá hacia acá - señala la pantalla - ¿Cierto? Este de acá hacia acá - refiriéndose al segundo dibujo - Esta de acá hacia acá - con el tercero - ¿Y esta? ¿Qué hacía?
VS-APP-AN	D-S-GF-DAPA	E 1: de acá a acá – utiliza un gesto físico - PFI: ¿De dónde?
VS-APP-AN	D-S-GF-DAPA	E 2: sí, mire, aquí y aquí – utiliza un gesto físico - PFI: Ajá, muy bien. Entonces, miren que eso, la manera de indicar eso es sencilla, le ponen una flecha ¿Sí? Como para diferenciar. Vean, esta... Esta inclinación, esta figura se traslada, pero hacia allá - indicando el sentido - no para acá, sino para allá. En ese sentido, ¿Cuáles tienen la misma orientación?

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
EN-DL	Enuncia el desplazamiento	VS-APP-AN	Visualización de animación en el applet.
D-S-GF-DAPA	Describe el sentido a partir del gesto físico "de acá para allá".		

Nota. Segmento de Aprendizaje 3D-7: Líneas 89-95. Elaboración propia.

Llama la atención que la representación auxiliar para el sentido en la THA de Cumbal (2020) consistía en una flecha horizontal que podía ser de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, por lo que resulta evidente que no podría describir trayectorias verticales.

La configuración de las propiedades de inclinación, longitud y sentido en el vector de traslación se realizó con el grueso del grupo. Para esto, el PFI les pidió a los estudiantes un caso particular de cada una de estas características y las utilizó para la construcción de un vector en el AGD: trazando una recta con la inclinación dada; delimitando un segmento con la longitud dada; y caracterizándolo con un sentido dado. Una vez construido el vector, se usó para trasladar una figura propuesta por un estudiante.

En la Tarea 3E se buscaba que los estudiantes reconocieran el rol del vector de traslación como parámetro de traslación. Para esto, el applet permitía la modificación de las características

del vector de traslación y redibujaba la figura trasladada en consecuencia. El PFI oriento la exploración del applet relacionado con el fin de llamar la atención sobre el vector y su papel en la traslación. A partir de este intercambio de interacciones, los estudiantes lograron darle las propiedades adecuadas al vector para cumplir con el cometido de la tarea, como se presenta en la tabla 24. Aquí se destacó la versatilidad del AGD para favorecer la visualización de múltiples traslaciones de manera instantánea a partir de la modificación de la inclinación, longitud y sentido del vector de traslación.

Tabla 24

Vector de Traslación como Parámetro de la Traslación

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
E-APP-ARR		PFI: Entonces, hagamos un ejercicio ahí como para bobear. Usted muévame el vector, pero no le de comprobar todavía, solo muévalo a algo que usted le guste.
		- El estudiante cambia el vector -
E-APP-AC		PFI: Listo, él lo quiso dejar ahí. usted a dónde quiere que se mueva la figura ahí? que quede ahí.
		E 1: Comprobar - indicando que se active la casilla -
VS-APP	IPR	PFI: A ver, miremos a ver
		- El estudiante activa la casilla comprobar -
	R-RL(L, S, IN, VTS)	PFI: ¿Faltó? Le faltó ¿No? pero me gusta, tenés la idea, o sea, ¿Que es hacia allá, ¿Qué le faltó?
		Estudiante 1: Eh... más... Más movimiento hacia la derecha
	RF	PFI: Que fuera más largo, ¿No?
		E 2: Si
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
IPR	Indicación a par.	E-APP-ARR Exploración por arrastre en el applet.
R-RL(L, S, IN, VTS)	Reconoce la relación entre longitud, sentido e inclinación con el vector de traslación.	E-APP-AC Exploración apropiada del applet.
RF	Reafirma.	VS-APP Visualización en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 3E-5: Líneas 73-82. Elaboración propia.

En la Tarea 3F, para la construcción de la figura trasladada a partir de un vector de traslación dado, se usó un applet que mostraba la secuencia del proceso de construcción y se

esperaba que estas indicaciones fueran suficientes para que los estudiantes lograran realizar la traslación requerida. Sin embargo, los datos evidenciaron que solo los 3 grupos que alcanzaron a tener mediación con el PFI lograron el objetivo. De este proceso se destacó que lo más complicado para estos estudiantes fue el de recrear el vector de traslación en algún vértice de la figura manteniendo la longitud, inclinación y sentido. Una vez lograban hacer esto con el primer vértice, podían repetir el proceso para construir la figura trasladada rápidamente, como se observa en la tabla 25.

Tabla 25

Construcción de la Traslación de una Figura a través de un Vector

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: Ojo que el de allá, allá el vector es diferente, ¿No? ustedes tienen que hacerlo con este que dibujaron.
	UT-CD-CTR-VA	E 1: por ejemplo, si ponemos este aquí, ¿Cuántos cuadritos son? Son dos, uno, dos.
	DISP	E 2: pero lo estamos moviendo para la izquierda.
	UT-CD-CTR-VA-EX DISP	E 1: por eso (incomprensible) 1, 2, sería aquí - ubica el vector de manera errónea -
	CMP(IN-VTS, IN-VA) DISP	E 2: sería normal, no en diagonal.
	DISP	E 1: Ah, ya entendí.
		PFI: ¿Por qué creías que era en diagonal?
	RL(IN, DIR)-EX	E 1: yo creía que era en diagonal porque pues la izquierda es como por ejemplo que todo sea para allá.
		PFI: Ajá, pero ¿Por qué pensás que es hacia abajo? Que es como a la izquierda hacia abajo que es lo que estás diciendo.
	D-CTR-VA-EX	E 1: yo digo que... Me perdí. Es como también se puede ubicar el vector, porque también se puede ubicar aquí porque también esto hace (incomprensible) y es para la izquierda.
		PFI: O sea...
	CTR-VA-AC DISP	E 2: Como usted lo estaba diciendo (incomprensible) lo que usted estaba diciendo era poner el vector a este lado.
	BP	E 1: Si es así profe?
		PFI: Claro, porque tienen que hacer exactamente ese mismo vector, mira que este tiene la misma dirección, el mismo tamaño, mira hacia allá, no cambia.

Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento

UT-CD-CTR-VA	Utiliza la cuadrícula para construir el vector auxiliar.	RL(IN, DIR)-EX	Relaciona inclinación y dirección de manera extraña.
DISP	Discusión entre pares.	D-CTR-VA-EX	Describe la construcción del vector auxiliar.
UT-CD-CTR-VA-EX	Utiliza la cuadrícula para construir el vector auxiliar de manera extraña.	CTR-VA-AC	Construye el vector auxiliar de manera acertada.
CMP(IN-VTS, IN-VA)	Compara la inclinación del vector de traslación con la inclinación del vector auxiliar.	BP	Busca aprobación.

Nota. Segmento de Aprendizaje 3F-3: Líneas 47-60. Elaboración propia.

En la Tarea 4A se introdujo una notación formal para referenciar los objetos geométricos de la traslación. Además, el applet permitía visualizar los paralelogramos formados por los lados correspondientes de una figura y su traslación, con el fin de que los estudiantes usaran su propiedad de congruencia de lados opuestos para argumentar la igualdad entre las longitudes de los segmentos que conectan los pares de vértices correspondientes.

De manera grupal, el PFI llevó a los estudiantes a fijarse en la necesidad de nombrar los elementos geométricos implicados en las representaciones usadas. Estos se percataron de que debían señalar las figuras en la pantalla para referirse a ellas. A partir de esto, se suscitó la necesidad de etiquetar las figuras para referenciarlas en función de sus puntos característicos.

Los estudiantes lograron reconocer la trayectoria en la representación y, por medio de la mediación del PFI, también la igualdad de la distancia entre los pares de vértices correspondientes. Sin embargo, algunos estudiantes usaron como argumento que, por ser una traslación, esas longitudes debían ser iguales, como se había concluido en el Nivel Referencial; otros observaron la medida representada en la figura. En ningún caso usaron la propiedad del paralelogramo para argumentar sus respuestas, como se ve en la tabla 26.

Tabla 26

Prueba de la Equidistancia entre los pares de Puntos Correspondientes de una Figura y su Traslación

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración	
VS-APP-AN	IP	E 1: Es que aquí dice "¿La distancia de A hasta A es igual a la distancia de B hasta B?"	
		PFI: ¿Es igual?	
VS-APP-AN	I-EQVC-IV	E 1: Si	
		PFI: ¿Por qué?	
VS-APP-AN	ARG-EQVC-EX	E 1: porque... si	
	RL(EQVC, TYLR)-EX	E 2: profe porque es recto	
		PFI: ¿Y qué pasa que sea recto?	
	DIF-CC-TS	E 2: es... cómo se llamaba?	
	H(DL, TS)	E 1: deslizamiento	
		PFI: ¿Traslación?	
	R-EQVC-CC-TS DISP	E 2: eso y eso siempre era igual	
		PFI: Exacto. Si cambian en algún momento, la figura se deforma y ya no es una traslación.	
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
IP	Incomprensión de la pregunta.	H(DL, TS)	Homologa deslizamiento y traslación.
I-EQVC-IV	Identifica la equidistancia de los vértices correspondientes una figura y su traslación por intuición visual	R-EQVC-CC-TS	Reconoce la equidistancia de los vértices correspondientes una figura y su traslación por conceptualización de traslación.
ARG-EQVC-EX	Argumenta la equidistancia de los vértices correspondientes una figura y su traslación de manera extraña.	DISP	Discusión entre pares.
RL(EQVC, TYLR)-EX	Relaciona la equidistancia de los vértices correspondientes una figura y su traslación con la trayectoria rectilínea de manera extraña.	VS-APP-AN	Visualización de animación en el applet.
DIF-CC-TS	Dificultad para conceptualizar la traslación.		

Nota. Segmento de Aprendizaje 4A-10: Líneas 117-129. Elaboración propia.

En la Tarea 4B se esperaba que los estudiantes pudieran reconocer todos los elementos conceptuales desarrollados a lo largo de la THA para caracterizar unos deslizamientos como traslaciones, a la vez que abstraían el vector de traslación implicado en la representación de un deslizamiento asociado a una traslación.

Los datos evidenciaron que 18 estudiantes lograron identificar las representaciones que correspondían a una traslación en la tarea 4B y otros 6 lo hicieron de manera parcial. Por otro

lado, se observó que los estudiantes tienden a usar como argumentos, para la caracterización de la traslación, las propiedades visuales de conservación de tamaño, forma y orientación, así como el reconocimiento de la trayectoria rectilínea, como se ilustra en la tabla 27. Sobre esto hay que señalar que el PFI incitaba a los estudiantes a usar este tipo de argumentos, sin explorar unos más sofisticados, como se esperaba en este nivel.

Tabla 27

Reconocimiento de Traslaciones

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración	
		PFI: (...) ¿Qué características debe tener la traslación? Ahorita las acabamos de mencionar. La orientación, que no cambia de tamaño, que mantiene una inclinación, una longitud, entonces, ¿Cuáles de los siguientes diseños fueron obtenidos por medio de la transformación de traslación? Si tu vez, ¿Esta conserva o no conserva la forma? – señala el primer dibujo -	
VS-APP-AN	I-CF-IV	E 1: Conserva la forma	
		PFI: ¿Conserva el tamaño?	
VS-APP-AN	I-CT-IV	E 1: Si	
		PFI: ¿Conserva el sentido? ¿Conserva la inclinación? por ejemplo	
VS-APP-AN	I-CI-IV I-S-EX	E 2: Si...	
		PFI: Si, entonces cumple con una transformación de traslación, pero si nosotros miramos la figura 4 ¿Conserva la inclinación?	
VS-APP-AN	I-N.CI-IV	E 1: No	
		PFI: No, ¿cierto? Entonces eso es lo que tiene que ver acá.	
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
I-CF-IV	Identifica la conservación del tamaño por intuición visual.	I-S-EX	Identifica el sentido de manera extraña.
I-CT-IV	Identifica la conservación del tamaño por intuición visual.	I-N.CI-IV	Identifica la no conservación de la inclinación por intuición visual.
I-CI-IV	Identifica la conservación de la inclinación por intuición visual.	VS-APP-AN	Visualización de animación en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 4B-2: Líneas 20-28. Elaboración propia.

Descripción sobre los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes.

En este apartado se hizo una descripción que agrupa las observaciones del conjunto de tareas asociadas a cada uno de los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes, produciendo

una caracterización del nivel de comprensión de los estudiantes sobre el contenido de la traslación a luz de la teoría.

En el Nivel Situacional, la teoría destaca la exploración de las situaciones desde situaciones en un contexto. Durante la implementación de la THA, se esperaba que los estudiantes pudieran abordar las características visuales de conservación de tamaño, forma, orientación e inclinación de deslizamientos asociados a una traslación a partir de una exploración visual. Sobre estas se pudo observar que:

- Como se evidenció en las tablas 6 y 28, hubo dificultades para intuir la conservación del tamaño, pues la intuición visual no fue suficiente para generarles certitud a los estudiantes sobre la propiedad.
- La conservación de la forma fue fácilmente identificable para los estudiantes, como se reportó en el anterior apartado.
- La conservación de la inclinación fue una característica complicada de interpretar como se ilustró en la tabla 7, inclusive se homologaba la inclinación de la trayectoria con la “inclinación” de la figura (orientación respecto al centroide).
- La conservación de la orientación no se desarrolló porque la Tarea 1A no proponía una reflexión al respecto.

Por otro lado, la comparación entre deslizamientos que correspondían a una traslación con deslizamientos de otro tipo les permitió a los estudiantes reconocer diferencias relacionadas a las características visuales de la traslación, así como las trayectorias que describían en su deslizamiento.

Durante el desarrollo de las Tareas 1A y 1B, se evidenció un imprevisto en cuanto a la relación del contexto y el fenómeno planteado: la asociación de propiedades fenomenológicas de la realidad con las representaciones planteadas en el AGD resultó intrusiva para la interpretación de la conservación del tamaño. En la tabla 28 se evidencia cómo un estudiante

indujo la perspectiva¹⁶ en la representación, determinando que, en el dibujo 1 de la Tarea 1A, el avión debía cambiar de tamaño al subir, pues así se percibe el fenómeno en la realidad.

Tabla 28

Conflicto entre el Contexto y la Conservación del tamaño

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración	
VS-APP-ARR		PFI: ¿Por qué crees que son diferentes?	
	ARG-N.CT-CPO	E1: Porque el cuándo sube cambia de tamaño.	
	RL(N.CT, CPO)-EX		
		PFI: ¿Ahí ves que cambia de tamaño?	
VS-APP-ARR	ARG-N.CT-CPO	E1: Es que cuando un avión despegue, se va volviendo más pequeño.	
	RL(RP, CX)-IPD		
		PFI: Ok, pero en esa representación... en el applet, lo que estás viendo, ¿Cambia de tamaño?	
	ARG-N.CT-CPO	E1: - se queda pensando – profe, pero es que se va para arriba	
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento			
ARG-N.CT-CPO	Argumenta la no conservación del tamaño por el cambio de posición.	RL(RP, CX)-IPD	Relaciona la representación con el contexto de manera inesperada.
RL(N.CT, CPO)-EX	Relaciona la no conservación del tamaño con el cambio de posición de manera extraña.	VS-APP-ARR	Visualiza por arrastre en el applet.

Nota. Segmento de Aprendizaje 1A-3: Líneas 27-32. Elaboración propia.

En este nivel, los estudiantes interactuaron con el AGD para visualizar el deslizamiento y generar una intuición visual sobre las propiedades por identificar. Tanto el arrastre en la tarea 1A como las animaciones de la tarea 1B, favorecieron en los estudiantes la observación y descripción de la trayectoria de los deslizamientos.

Lo anterior permite afirmar que la exploración del fenómeno correspondió a lo esperado en el Nivel Situacional, pues fue un ejercicio relacionado al contexto planteado, donde se identificaron características matemáticas del fenómeno a partir de la intuición.

En el Nivel Referencial se esperaba que surgiera la esquematización del fenómeno en contexto, con el fin de hacer un estudio más elaborado de las propiedades desarrolladas en el

¹⁶ El efecto visual que describe como un objeto parece volverse más pequeño a medida que se aleja del observador.

Nivel Situacional. Sobre esto se destacó que, en las Tareas planteadas para este nivel, ya había una ausencia total del contexto y las representaciones correspondían a figuras geométricas sin más. Sin embargo, la esquematización se percibe en los elementos geométricos que acompañaban a dichas representaciones como la línea que representaba la trayectoria o la presentación de las figuras inicial y final que correspondían a la figura y su traslación.

Como se ilustró en las tablas 12 y 15, la superposición de las figuras inicial y final permitió a los estudiantes comprobar la conservación del tamaño, forma y orientación, lo que corresponde a un proceso resultante de la esquematización del fenómeno. Por otro lado: la conservación de la inclinación persistió como la característica de más difícil interpretación para los estudiantes, como se mostró en la tabla 15, y no se evidenció que la superposición favoreciera el reconocimiento de esta propiedad; la igualdad de las longitudes entre pares de vértices correspondientes de una figura y su traslación no se percibió explícitamente en el pensamiento matemático de los estudiantes, quienes solo se limitaron a reconocer la longitud como magnitud esencial para cumplir el objetivo procedimental del applet, como se ilustró en la tabla 14.

Con base en lo anterior, se puede afirmar que el Nivel Referencial se ve reflejado en el proceso de esquematización del fenómeno, a partir del uso de la superposición como método de comprobación de las características visuales de la traslación. Sin embargo, no se alcanzaron algunos de los objetivos relacionados al desarrollo del contenido y se evidenció una ausencia total del contexto de diseño.

En el nivel general se esperaba que los estudiantes logaran abstraer las características de inclinación, longitud y sentido de la traslación para concretarlas en el vector de traslación y reconocer su rol determinante en el fenómeno. Esto correspondía a un estudio gráfico del principio general de la traslación como función, con un vector como parámetro que tomaba una figura y la relacionaba con su traslación.

Los estudiantes lograron identificar la longitud, inclinación y sentido de un deslizamiento asociado a una traslación para configurar el vector de traslación y, a partir de la

exploración de un applet que permitía modificar sus características, reconocieron su papel en el fenómeno. Sin embargo, solo los estudiantes que pudieron ser asistidos por el PFI lograron utilizar un vector para construir la figura trasladada. Por lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes desarrollaron el Nivel General de comprensión sobre la traslación de manera parcial, ya que alcanzaron a configurar el vector de traslación y percibirlo como parámetro del fenómeno, pero no llegaron a utilizarlo para construir la figura trasladada.

En el Nivel Formal los estudiantes debían apropiarse de la notación formal para referenciar los objetos geométricos de la traslación, así como probar la igualdad de las distancias entre los pares de vértices correspondientes de una figura y su traslación a partir de la implementación de un argumento que relacionara la propiedad con la congruencia de los lados opuestos de un paralelogramo. Es importante señalar que, aunque este nivel de formalidad se consideró pertinente para el nivel de escolaridad del grupo intervenido, la THA no propone usar la propiedad referida para probar la congruencia de una figura y su traslación, algo que podría considerarse relevante para el estudio del fenómeno en este nivel.

Los estudiantes pudieron reconocer los elementos geométricos a partir de una notación formal, pero omitieron el uso del paralelogramo para la prueba de la igualdad de longitud entre los vértices correspondientes de una figura y su traslación, como se ilustró en la tabla 26. En general, los estudiantes se limitaron a reconocer la traslación a partir de sus características visuales y no sobre argumentos con el nivel de formalidad esperado.

Con base en lo anterior, se pudo afirmar que los estudiantes no alcanzaron a desarrollar el Nivel Formal pues se limitaron a usar un lenguaje formal para referirse a los elementos geométricos de la traslación y no utilizaron recursos formales para caracterizar el fenómeno.

Capítulo IV: Resultados de Investigación

A partir del análisis retrospectivo y con base en los objetivos específicos de este trabajo, en este capítulo se presentan los 3 resultados de investigación: una descripción de los niveles de comprensión de los estudiantes intervenidos sobre la traslación; la Trayectoria de Aprendizaje Real resultante del acercamiento a un Experimento de Enseñanza; y una propuesta concreta de rediseño de la THA de Cumbal (2020).

Descripción de los Niveles de Comprensión de los Estudiantes Intervenidos Sobre la Traslación

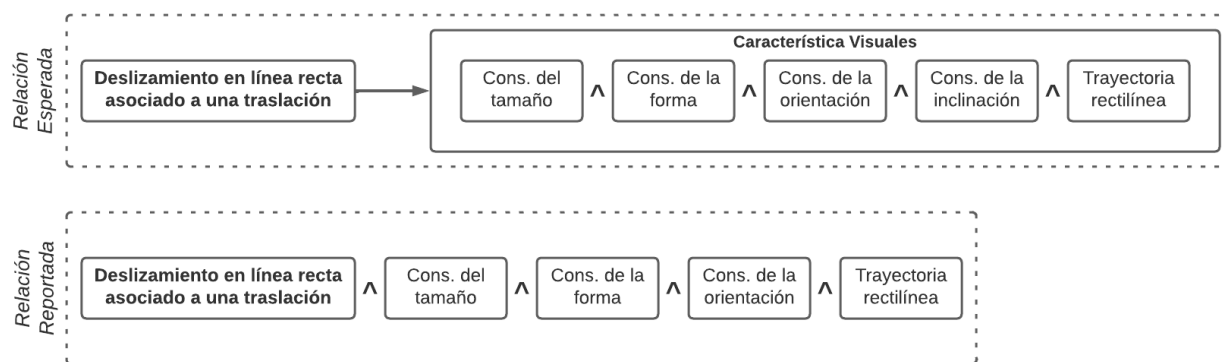
La Heurística de los Modelos Emergentes y la interpretación de sus niveles en el contexto de la THA de Cumbal (2020) sirvieron como insumos para caracterizar la progresión del aprendizaje de los estudiantes intervenidos con base en el análisis retrospectivo. Así, en este resultado se presenta dicha caracterización para cada nivel y se añade una descripción de los usos concretos del AGD que favorecieron el desarrollo del contenido.

Nivel Situacional

Los estudiantes lograron reconocer las representaciones de deslizamientos, asociados a una traslación, que describen una trayectoria rectilínea y los diferenciaron de otros con distintas trayectorias. Sobre los primeros, identificaron las características visuales de conservación del tamaño, forma y orientación respecto al centroide, pero presentaron dificultades para interpretar la conservación de la inclinación. En contraste, no se evidenció que los estudiantes tuvieran una conciencia explícita sobre la dependencia entre los deslizamientos en línea recta, asociados a una traslación, con las características visuales referidas, sino que se limitaron a listarlas (ver figura 17). También, mostraron dificultades en el reconocimiento del concepto de línea recta y la caracterización de su inclinación.

Figura 17

Contraste entre la Relación Esperada y Reportada del Deslizamiento en Línea Recta y sus Características Visuales



Nota. Aunque se esperaba que los estudiantes reconocieran las características visuales como consecuencia del deslizamiento en línea recta, se reportó que solo se limitaron a identificar cada característica omitiendo la implicación lógica. Elaboración propia.

En este nivel se destacó la visualización del deslizamiento lograda a través del AGD, donde los estudiantes pudieron percibir la trayectoria por medio del arrastre de un punto o una animación. En cuanto a las características visuales, los applets planteados les permitieron intuir si dos figuras distintas conservaban el tamaño, forma y orientación a partir de una comparación visual.

Es importante señalar que todo lo anterior fue el resultado del intercambio entre estudiantes, applets y PFI. Por sí mismos, los estudiantes entraban en controversias sobre algunas características y es a través de la mediación del PFI y el uso del recurso digital que estos llegaron a algunas de las conclusiones esperadas. Esta dinámica fue una constante a lo largo de toda la experimentación.

Por otro lado, los estudiantes carecían del lenguaje matemático necesario para comunicar sus ideas con relación a la traslación. Así, el uso de gestos físicos para la descripción de las trayectorias y su inclinación tuvo un gran protagonismo: los estudiantes “dibujaban” la trayectoria en el aire y con su antebrazo reproducían la inclinación. El uso de este recurso se presentó de manera orgánica y se incentivó por el PFI para subsanar la falta de literacidad matemática propia del nivel de escolaridad.

Nivel Referencial

En este nivel la configuración de los applets les ofreció a los estudiantes la posibilidad de arrastrar la figura inicial para superponerla sobre la figura final. Esta acción les permitió hacer una comparación entre los puntos y lados de las figuras inicial y final para determinar si eran iguales o no. Así, el AGD tuvo un rol de verificación, favoreciendo la certitud de los estudiantes respecto a sus conclusiones sobre la congruencia de las figuras. Esto se contrasta con el nivel anterior, donde solo se posibilitaba una intuición visual que podía provocar ambigüedades perceptivas.

Los estudiantes usaron lo anterior para comprobar la conservación del tamaño y la forma en la figura y su traslación. Con este mismo proceso, los estudiantes pudieron comprobar la conservación de la orientación respecto al centroide, donde tuvo un papel importante la analogía de “¿A dónde mira la figura?”. Esta consistía en que a un polígono se le asignaba un objeto hipotético del cual se podía decir que “miraba” a una dirección concreta. Esto les permitió a los estudiantes contrastar figuras con el fin de determinar si una figura “miraba” a un lado distinto que su traslación, es decir, si tenían la misma orientación respecto al centroide.

Por otro lado, los estudiantes omitieron el reconocimiento de la propiedad de la igualdad entre las distancias de los pares de vértices correspondientes de una figura y su traslación. Sobre esta característica, solo se limitaron a determinar que la longitud era la magnitud relevante para la consecución del objetivo procedimental del applet, sin evidenciar una conciencia sobre la propiedad como se esperaba. Además, resulta pertinente señalar que en este nivel aún no se constata el reconocimiento de la implicación que relaciona el antecedente “deslizamiento en línea recta asociado a una traslación” con el consecuente “características visuales de la traslación”.

Nivel General

En este nivel la distancia del deslizamiento logró ser determinada por los estudiantes mediante la herramienta de medición que les proporcionaba el applet, así como por la cuadrícula uniforme de la que dispone el AGD. Sin embargo, inicialmente los estudiantes

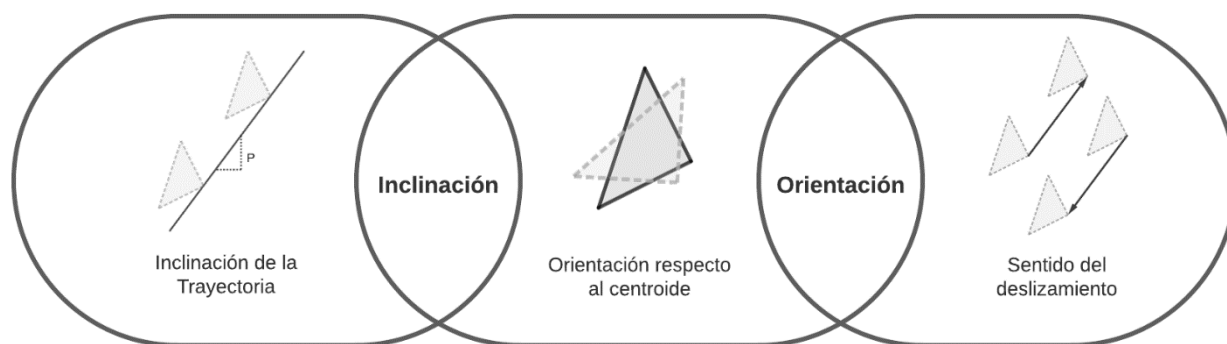
tuvieron dificultad para medir una distancia a partir la herramienta métrica. Fue una constante que, para determinar la medida de un deslizamiento, hicieran un conteo discreto de las marcas en la herramienta y no de las unidades de longitud entre estas. Esto se saldó a partir de la mediación del PFI a partir de la problematización esta estrategia errónea de medición.

Por otro lado, los estudiantes identificaron el sentido y la inclinación del deslizamiento, pero no hicieron una abstracción concreta del sentido por sí solo. Una concepción intuitiva de la dirección configura el sentido y la inclinación de una recta sobre la que vive el vector, lo que permite estimar hacia dónde se deslizan las figuras. El sentido de un vector, propiamente, se determina al definir si este va del extremo inicial al final o del extremo final al inicial de un segmento. Esto se saldó posteriormente cuando se contrastó el sentido en distintas traslaciones, donde se presentó el gesto físico “de acá para allá”. Este consistía en señalar el origen (extremo inicial) y el destino (extremo final) del deslizamiento.

De nuevo, se volvieron a presentar dificultades con el concepto de inclinación, en particular los estudiantes tuvieron problemas para diferenciar la inclinación de distintas trayectorias rectilíneas. A esto se suma que la THA usaba la palabra “inclinación” para referirse a la inclinación de la trayectoria, pero cotidianamente puede referirse a la “inclinación” de un objeto, que en este contexto corresponde a la orientación respecto al centroide. Esta última se reducía lingüísticamente a “orientación”, palabra que también usó la THA para referirse al sentido. Lo anterior supuso varias confusiones a lo largo de la implementación, pues inducía una suerte de transitividad de las 3 propiedades referidas (ver figura 18).

Figura 18

Imprecisión en los Conceptos de Inclinación y Orientación



Nota. Elaboración propia.

A partir de la conciencia sobre las características de inclinación, longitud y sentido, los estudiantes configuraron un vector a partir de una construcción geométrica grupal en el AGD. Así, percibieron cómo los cambios en dichas propiedades del vector de traslación influían en la posición final de la figura trasladada. Por otro lado, se les dificultó construir la figura trasladada por sí mismos a partir de una figura y un vector, solo lográndolo quienes alcanzaron a tener mediación con el PFI para este propósito.

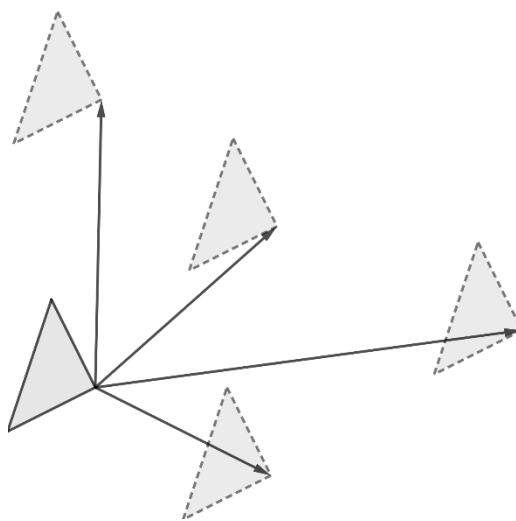
En este nivel, el AGD tuvo varios roles destacados en función de los elementos matemáticos que se estudiaron, permitiendo:

- Emular una herramienta de medición, ofreciéndole a los estudiantes certeza sobre la longitud del deslizamiento mediante el arrastre. Esto presenta la potencialidad de extender este uso a otro tipo de elementos auxiliares que faciliten la comprensión de un concepto o propiedad.
- Configurar una tarea en la que, para su consecución, debían enfocarse en la característica de la inclinación y sentido del deslizamiento. Esto pudo contrastarse con otras tareas donde las acciones sobre los applets no requerían usar los conceptos en juego de manera determinante para cumplir su objetivo procedimental.

- Abstraer las características de inclinación, longitud y sentido del vector de traslación en representaciones auxiliares que enfatizaban dichas características.
- Comparar grandes cantidades de representaciones de una figura trasladada a partir de la modificación de las características del vector de traslación de manera instantánea, como se ilustra en la figura 19.

Figura 19

Redibujado Instantáneo de las Figuras Trasladas



Nota. Un proceso análogo a lápiz y papel sería mucho más dispendioso.

Elaboración propia.

Nivel Formal

Los estudiantes lograron adoptar un lenguaje formal para la referenciación de las figuras involucradas en una traslación a partir de las etiquetas de sus vértices. Por otro lado, no reconocieron los paralelogramos representados y, en consecuencia, tampoco la propiedad de congruencia entre sus lados opuestos. Así, no alcanzaron a desarrollar un razonamiento que probara la equidistancia entre pares de puntos correspondientes de una figura y su traslación.

En este nivel, se retomó la necesidad de justificar si una representación era una traslación. Sobre esto, los estudiantes no lograron argumentar lo solicitado, evidenciando una

falta de propiedad sobre los conocimientos desarrollados en los anteriores niveles. Sin embargo, a partir de la mediación del PFI, retomaron las características visuales del nivel situacional y referencial como la conservación del tamaño, forma y orientación, siendo el PFI quien enunciaba la relación entre la traslación y dichas propiedades.

Los anteriores resultados por nivel reflejan que los estudiantes intervenidos lograron reconocer la traslación hasta el nivel general, donde identificaron el parámetro que determina la traslación: el vector de traslación. Sin embargo, se les dificultó emplear lo anterior para la construcción de la traslación de una figura. Por otro lado, solo utilizaron las propiedades visuales de conservación de la forma, tamaño, orientación y trayectoria rectilínea para caracterizar la traslación, sin recurrir a razonamientos u observaciones más sofisticadas. Por lo tanto, se puede afirmar que los estudiantes alcanzaron parcialmente un nivel general en el estudio de la traslación en la THA.

Comparación de la THA y la Trayectoria de Aprendizaje Real del Grupo de Estudiantes Intervenidos

La estructura de la THA planteada por Simon (1995) supone un PAH sobre el que no se plantea un lineamiento de forma concreto, por lo que se puede presumir como general de toda la THA o particionado en varios procesos concretos, como sucede en la THA de Cumbal (2020). En esta, se plantea un PAH para cada Tarea, por lo que durante el análisis retrospectivo se hizo un contraste entre el PAH y el Proceso de Aprendizaje Real, como sugirieron Bakker y Van Eerde (2015). El conjunto de Procesos de Aprendizaje Real de la tabla 29 describe lo que realmente sucedió con el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Tabla 29

Comparación entre los TAH y los Procesos de Aprendizaje Real

Proceso de Aprendizaje Hipotético	Proceso de Aprendizaje Real
Tarea 1A	
El estudiante, para cada pareja de figuras que se obtiene por medio de un deslizamiento, compara la figura inicial con la figura final. Con esto, ellos infieren las	Los estudiantes, para cada pareja de figuras que se obtiene por medio de un deslizamiento, compararon la figura inicial con la final. Con esto, intuyeron que las

características visuales de las figuras que deslizadas siguiendo una trayectoria rectilínea, mantiene invariante: el tamaño, la forma, la inclinación, la trayectoria y la orientación de la figura inicial.

El estudiante observa que las parejas de figuras que se obtienen por medio de un deslizamiento sobre trayectoria rectilínea conservan tamaño, forma, orientación e inclinación. Por lo tanto, llegan a concluir que son congruentes.

figuras deslizadas siguiendo una trayectoria rectilínea mantienen la forma. En contraste, no lograron tener certeza sobre la conservación del tamaño por medio de la intuición visual y tuvieron dificultades para interpretar la conservación de la inclinación. Por otro lado, la conservación de la orientación no se desarrolla en la tarea propuesta. En consecuencia, omitieron el reconocimiento de la congruencia con común orientación respecto al centroide de una figura y su traslación.

Tarea 1B

El estudiante observa parejas de figuras que al deslizarse sobre el plano tienen cambios en su trayectoria, orientación, inclinación, tamaño y forma.

El estudiante observa que algunas parejas de figuras:

- Describen una trayectoria que no es rectilínea, como el movimiento de la hélice o el movimiento del cuadrado.
- La figura final no “mira” hacia el mismo lado que la figura inicial, como en el dibujo 4
- La figura final no tiene el mismo tamaño que la figura inicial, como el dibujo 3.

El estudiante compara los ejemplos de deslizamiento en trayectoria rectilínea (TAREA 1A) con aquellos que no lo son (TAREA 1B), infiere que cuando una figura es deslizada siguiendo una trayectoria rectilínea conserva: el tamaño, la forma, la inclinación y la orientación de la figura inicial.

El estudiante plantea ejemplos de deslizamientos relacionados con el movimiento de objetos cotidianos como, por ejemplo: el movimiento de un animal, de medios de transporte, etc.

Los estudiantes observaron parejas de figuras que, al deslizarse sobre el plano en una trayectoria no rectilínea, tenían cambios en su tamaño y orientación. La selección de figuras no les permitió hacer un contraste respecto a la conservación de la forma o la inclinación.

Los estudiantes observaron que algunas parejas de figuras:

- Describían una trayectoria que no es rectilínea, como el movimiento de la hélice o el movimiento del cuadrado.
- La figura final no “miraba” hacia el mismo lado que la figura inicial, como en el dibujo 4
- La figura final no tenía el mismo tamaño que la figura inicial, como en el dibujo 3.

Los estudiantes compararon los ejemplos de los deslizamientos en trayectoria rectilínea (TAREA 1B) con aquellos que no lo son (TAREA 1B) y reconocieron algunas diferencias en las características visuales como el lugar geométrico de la trayectoria, el cambio de tamaño y de orientación en deslizamientos que se correspondían a una traslación con los que no. Sin embargo, no enunciaron una relación de dependencia entre las características visuales y el tipo de transformación geométrica.

Tarea 2A

El estudiante reconoce la conservación del tamaño y la forma. Cuando la figura inicial se desliza para obtener la figura final, el estudiante compara el tamaño de las figuras, a través de la superposición de todos los puntos de la figura inicial en la figura final. A partir de la comparación se puede inferir que, si la figura inicial se puede superponer sobre la figura final, sin modificar ninguna de las dos figuras, se conserva el tamaño y la forma de la figura inicial en la figura final.

Cuando los estudiantes deslizaban la figura inicial para obtener la figura final, comparaban el tamaño y la forma de las figuras a través de la superposición de todos los puntos de la figura inicial en la figura final. A partir de esto, infirieron que, si la figura inicial se podía superponer sobre la figura final, las figuras inicial y final tenían la misma forma y tamaño.

Tarea 2B

El estudiante observa el deslizamiento de la figura inicial y el rastro que dejan los vértices de la figura inicial al ser deslizada hasta la figura final, identifica el segmento que va desde el vértice de la figura inicial al correspondiente vértice de la figura final.

Luego, el estudiante observa la distancia que hay desde los vértices correspondientes de la figura inicial a la

Los estudiantes observaron la distancia que había entre los vértices correspondientes de la figura inicial y la figura final. De esta manera identificaron que el segmento que correspondía a cada traslación era aquel que unía los vértices correspondientes de la figura inicial y figura final. Los estudiantes determinaron que la

figura final, de esta manera identifican el segmento y la trayectoria de los vértices durante su deslizamiento. A partir de lo anterior, identifican que el segmento que le corresponde a cada traslación es aquel que conserva la medida del segmento que une los puntos correspondientes de la figura inicial y figura final. El estudiante, para cada pareja de figuras, mueven los segmentos para comprobar cuál de ellos corresponde a la distancia desde el vértice de la figura inicial hasta el correspondiente vértice de la figura final, infieren cual es segmento que mide la cantidad que se movió la figura.

longitud era el criterio para seleccionar el segmento apropiado.

Tarea 2C

El estudiante observa el movimiento de la figura inicial en cada dibujo, comparan la orientación de la figura final y la figura inicial, luego reconocen que las figuras relacionadas mediante un deslizamiento sobre una línea recta conservan la orientación, es decir, que la figura final queda mirando hacia el mismo lado que la figura inicial.

El estudiante observa el movimiento de la figura inicial hasta la figura final, luego desliza la figura inicial hacia la figura final para superponer los puntos de la figura inicial en la figura final. El estudiante infiere que cuando los puntos de la figura inicial coinciden con los puntos correspondientes de la figura final, la figura final conserva la orientación de la figura inicial, o sea, ambas figuras están orientadas hacia el mismo lado.

Al observar y comparar la trayectoria de cada movimiento, el estudiante determina que las parejas de figuras que cambian su orientación al deslizarse sobre el plano no son deslizamientos en línea recta, por ejemplo, en el dibujo 2, la figura se mueve sobre un trayecto circular y su orientación es diferente.

Los estudiantes observaron el movimiento de la figura inicial en cada dibujo y compararon la orientación de la figura final y la figura inicial, identificando la conservación de la orientación respecto al centroide, es decir, que la figura final “miraba” hacia el mismo lado que la figura inicial.

Los estudiantes observaron el movimiento de la figura inicial hasta la figura final, luego deslizaron la figura inicial hacia la figura final para superponer los puntos de la figura inicial en la figura final. Así, infirieron que cuando los puntos de la figura inicial coincidían con los puntos correspondientes de la figura final, la figura final conserva la orientación respecto al centroide de la figura inicial.

Tarea 2D

El estudiante observa el movimiento en cada dibujo para reconocer la inclinación que determina el movimiento.

El estudiante observa la inclinación de cada movimiento y ubica la recta correspondiente a cada dibujo, a través de la comparación de la inclinación de la figura inicial y la figura final, identifican los dibujos en los que la inclinación de figura final no corresponde con la inclinación de la figura final. El estudiante infiere que, en las figuras relacionadas mediante un deslizamiento sobre una línea recta, se conservan la inclinación de las figuras, es decir, la figura inicial se encuentra sobre la misma recta que la figura final.

El estudiante identifica los dibujos en los que la figura final no está sobre la misma recta que la figura inicial. Por ejemplo, el estudiante observa que en el dibujo 2 la figura final no está sobre la misma recta que la figura inicial. A través de esto reconocen que esas situaciones, no corresponden a deslizamientos sobre la misma línea recta.

Los estudiantes observaron el movimiento en cada dibujo para reconocer la trayectoria que determinaba el movimiento.

Los estudiantes arrastraron la figura inicial de cada dibujo para determinar si era congruente con la figura final por superposición. Por contraste, infirieron que no se pueden superponer si las figuras inicial y final no están sobre la misma recta que representa la trayectoria. Sin embargo, no justificaron el rol de la inclinación de la trayectoria.

Tarea 3A

El estudiante reconoce y verifica, a través del deslizamiento de la figura inicial, la conservación de la inclinación, el tamaño y la forma de la figura trasladada, reconocen que las parejas de figuras donde la figura inicial corresponden a una traslación de la figura inicial son aquellas en las que la figura inicial se puede superponer en la figura final, haciendo que los puntos correspondientes coincidan.

El estudiante observa que las parejas de figuras, como los dibujos 1 y 2, tienen la misma forma y la figura inicial se puede superponer haciendo que coincidan sus puntos correspondientes en la figura final. El estudiante identifica los dibujos que tienen la misma forma, pero la figura inicial no se puede superponer en la figura final de tal forma que sus puntos correspondientes coinciden, al observar estas figuras el estudiante puede inferir que no corresponden porque la figura final está girada y no coinciden en todos sus puntos.

El estudiante, observando el deslizamiento de la figura movable, infiere que solamente las figuras que se pueden superponer haciendo que todos sus puntos coincidan, corresponden a traslaciones.

El PFI tuvo que recordar a los estudiantes las características visuales de la traslación: conservación de tamaño, forma y orientación, así como la trayectoria rectilínea de un deslizamiento que se corresponde a una traslación. Estas fueron verificadas por el estudiante mediante la superposición de las figuras inicial y final. Así, concluyeron que los deslizamientos donde se pueden superponer las figuras inicial y final corresponden a una traslación. De manera análoga, infirieron que los dibujos donde no se podían superponer las figuras inicial y final, eran los que no conservaban la forma, tamaño u orientación respecto al centroide, siendo estos deslizamientos que no correspondían a una traslación.

Tarea 3B

El estudiante determina la longitud de cada deslizamiento comparando la posición de la figura inicial con la posición de la figura final. En primer lugar, a través de la visualización de la figura inicial y del rastro que esta deja al hacer el deslizamiento, el estudiante puede contar la cantidad de unidades que se traslada de la figura inicial hasta la figura final. Luego, determinan la longitud del deslizamiento en el dibujo 4 donde no se muestra el rastro del deslizamiento, esto lo hacen utilizando el segmento que contiene una métrica y se puede variar. Mueven el inicio del segmento hasta un vértice de la figura inicial, luego alargan el segmento hasta que coincida con el vértice correspondiente de la figura final, luego cuentan las unidades de la métrica y determinan la longitud del deslizamiento.

Los estudiantes determinaron la longitud de los dibujos 1, 2 y 3 utilizando la herramienta de medición proporcionada en el applet. Para esto, movieron el inicio del segmento hasta un vértice de la figura inicial; luego alargaron el segmento hasta que coincidiera con el vértice correspondiente de la figura final. Con la mediación del PFI para el conteo correcto de unidades de longitud, los estudiantes lograron determinar la longitud del deslizamiento.

Los estudiantes determinaron la longitud del deslizamiento del dibujo 4 comparando la posición de la figura inicial con la de la figura final, a partir del conteo de los “pasos” uniformes que daba la figura inicial en una animación.

Tarea 3C

El estudiante determina la orientación del deslizamiento en línea recta a través de la comparación de la posición de la figura final con relación a la figura inicial.

El estudiante identifica la figura inicial y cada una de las figuras finales. Luego seleccionan la orientación para trasladar la figura final (derecha-arriba, derecha-abajo, izquierda-arriba, izquierda-abajo), fijada la orientación ingresan datos numéricos en las casillas y observa cómo cambia la figura final teniendo en cuenta los datos asignados, por ejemplo, observan que seleccionar la orientación derecha arriba e ingresan los números 3 y 5 en las casillas correspondientes, la figura final se traslada e unidad des a la derecha y 5 hacia arriba. A través de esta comparación el estudiante infiere que la figura final se traslada dependiendo de la orientación que se asigne en las casillas.

Los estudiantes determinaron la configuración de la longitud, inclinación y sentido de la traslación a través de la comparación de la posición de la figura final con relación a la figura inicial.

Los estudiantes identificaron una figura y 4 de sus posibles traslaciones; luego seleccionaron la “orientación” para trasladar la figura (derecha-arriba, derecha-abajo, izquierda-arriba, izquierda-abajo); fijada la orientación, ingresaron datos numéricos en las casillas y observaron cómo cambiaba de posición la figura trasladada teniendo en cuenta los datos asignados.

A través de la anterior comparación, los estudiantes infirieron, implícitamente, que el cambio en los componentes del vector determinaba la posición de la figura trasladada.

Tarea 3D

Los estudiantes observan la animación que mide en cada traslación la distancia entre los puntos correspondientes, el estudiante infiere la longitud, es decir, cuántas unidades se desplaza la figura inicial hasta la figura final.

El estudiante observa hacia donde mira la figura y lo representa con una flecha que indica la orientación. A través de la animación se muestra la inclinación de la traslación, esta se representa en una recta, el estudiante observa cómo se inclina cada figura e infieren que esta inclinación corresponde a cada recta.

Para la construcción del segmento orientado, el estudiante observa la integración de cada uno de los tres elementos mediante una animación e infieren que se pueden unificar en un solo objeto matemático: segmento orientado, dado que este segmento tiene la longitud, la inclinación y la orientación del movimiento.

Los estudiantes observaron una matriz donde se abstraían en representaciones auxiliares la longitud de deslizamiento, inclinación de la trayectoria y sentido de varias traslaciones.

Los estudiantes compararon las traslaciones y determinaron cuáles traslaciones compartían la misma inclinación. De manera análoga, observaron el origen y destino del deslizamiento, reconociendo el sentido de las traslaciones.

Para la construcción del segmento orientado, los estudiantes propusieron valores para los parámetros de longitud, inclinación y sentido y observaron su configuración en un vector a partir de una construcción grupal. Luego, observaron el resultado de trasladar una figura a través del vector construido.

Tarea 3E

El estudiante determina la longitud, orientación e inclinación del deslizamiento a través de la identificación del segmento orientado.

El estudiante observa la traslación en cada dibujo, luego mueven el segmento orientado teniendo en cuenta que, al hacer la comprobación, la figura relacionada con el segmento orientado se superponga con la figura final. Luego, el estudiante infiere que la traslación está determinada por la longitud, la orientación y la inclinación del segmento orientado.

Los estudiantes determinaron la longitud, orientación e inclinación de una traslación a través de la variación de estos parámetros en un vector de traslación.

Los estudiantes observaron la traslación en cada dibujo y modificaron el vector mediante el arrastre de su extremo final teniendo en cuenta que, al activar la casilla “comprobación”, la figura trasladada con este vector debía superponerse con la figura final. Así, infirieron que la traslación está determinada por la longitud, la orientación y la inclinación del vector de traslación.

Tarea 3F

El estudiante realiza la traslación de la figura inicial, utilizando sus conocimientos de la tarea 3A relacionados con el segmento orientado y la indicación del profesor para realizar la traslación: traslada cada uno de los elementos de la figura inicial. El estudiante determina que, para trasladar una figura, se traslada cada punto vértice de la figura inicial, esta traslación se hace determinada por el segmento orientado, el cual contiene la orientación, la inclinación y la longitud del movimiento.

Después de trasladar cada vértice de la figura inicial, el estudiante dibuja la figura final uniendo los puntos obtenidos mediante el deslizamiento, luego el estudiante reconoce la figura final

Solo algunos estudiantes realizaron la traslación de una figura utilizando sus conocimientos del nivel general, relacionados al vector de traslación, y la mediación del PFI. Estos determinaron que para trasladar una figura: se trasladaba cada uno de sus vértices mediante un vector de traslación, teniendo en cuenta su longitud, inclinación y sentido; estos vértices se unen con segmentos, correspondiendo esta nueva figura a la traslación de la primera.

Tarea 4A

El estudiante observa la traslación de la figura inicial hasta la figura final, de ahí infieren que los puntos de la figura inicial se mueven siguiendo una trayectoria rectilínea cuando se trasladan hasta la figura final. El estudiante reconoce que la figura inicial y la figura final están relacionadas mediante una traslación, observa que las distancias de los puntos de la figura inicial hasta la figura final son iguales, es decir que la distancia de A hasta A' es igual, a la distancia de B hasta B' y de C

Los estudiantes observaron la traslación de la figura inicial hasta la figura final e infirieron que los puntos de la figura inicial se movían siguiendo una trayectoria rectilínea cuando se trasladan hasta la figura final. Así, reconocieron que la figura inicial y la figura final están relacionadas mediante una traslación a partir del reconocimiento de sus características visuales.

hasta C' , porque las figuras están relacionadas por medio de una traslación. El estudiante identifica que la figura que se forma al unir los puntos A, A' , B y B' es un paralelogramo al establecer la relación que tienen los segmentos AA' y BB' .

Además, los estudiantes identificaron que las distancias de los vértices de la figura y su traslación eran iguales, es decir que la distancia de A hasta A' es igual a la distancia de B hasta B' y de C hasta C' , porque estas distancias eran iguales en una traslación.

Tarea 4B

El estudiante observa la construcción de diseño geométrico, determinando las figuras que se van obteniendo a través de traslaciones, es decir, figuras que conservan la longitud entre sus puntos, la inclinación y la orientación de la figura inicial.

Los estudiantes observaron la construcción de diseño geométrico presentado en el applet, reconociendo las figuras que se van obteniendo a través de traslaciones, es decir, figuras que conservan el tamaño, la forma, la orientación respecto al centroide y se trasladan siguiendo una trayectoria rectilínea.

Nota. Esta tabla permite contrastar el proceso de aprendizaje esperado de los estudiantes con el sucedió realmente para cada Tarea de la THA. Elaboración propia con los PAH de Cumbal (2020).

La columna izquierda de la tabla 31 describe la Trayectoria de Aprendizaje Real del grupo de estudiantes de 6º grado intervenidos con base al análisis retrospectivo del Experimento de Enseñanza. Sobre esta se pueden señalar varias coincidencias entre lo esperado y lo sucedido, así como disonancias que sirvieron de insumos para el rediseño de la THA.

Respecto a la meta de aprendizaje de la THA de Cumbal (2020), se puede afirmar que los estudiantes lograron reconocer el resultado de aplicar una transformación de traslación a una figura bidimensional a partir de la caracterización de sus propiedades visuales, sin alcanzar una conceptualización formal del fenómeno. Sobre esto, se señala que el contexto de diseño no se mostró relevante para el desarrollo de la THA, pues solo se hizo alusión a este al final de la implementación, como estaba programado en la propuesta.

Propuesta de Rediseño de la THA de Cumbal (2020)

El ejercicio de rediseño que se describe a continuación tuvo dos propósitos: modificar las tareas, preguntas, applets y PAH de la THA en función de lo reportado en el análisis retrospectivo; y favorecer la comprensión de la THA al profesor/investigador que pudiera enfrentarse a esta propuesta en futuros procesos de implementación.

Adición de Apartados en el Cuerpo de la THA

El ejercicio de análisis previo de la THA de Cumbal (2020) dio cuenta de una interpretación primitiva de esta. Sin embargo, en este proceso intervinieron los imaginarios de los investigadores sobre el contenido, desarrollando una comprensión ilusoria de la THA. No fue sino hasta que se desarrolló la fase de la experimentación cuando se empezó a tener una conciencia más cercana a las intenciones de Cumbal (2020). Esta malinterpretación tuvo una influencia negativa en la orientación del PFI a los estudiantes, pudiendo generar obstáculos de aprendizaje. En la tabla 30, se ilustra lo anterior, pues da cuenta de un segmento de aprendizaje en el que el PFI se cuestiona sobre la interpretación de la inclinación en la THA.

Tabla 30

Malinterpretación del Concepto de Inclinación en la THA

Cod-AGD	Cod-Traslación	Ilustración
		PFI: Bueno, ya entendieron lo de la inclinación, ¿no?
	AAP	E 1: Ujum.
		PFI: Ahora, si ustedes comparan la inclinación de este (incomprensible) con este, son diferentes ¿no?
	AAP	E 1: Ujum.
		PFI: La pregunta no se entiende si es entre dos figuras o en ella misma, porque uno puede pensar en la inclinación del trayecto, porque un trayecto podría ser así y la inclinación varía dentro del mismo trayecto...
Descripción de los Códigos Emergentes del Segmento		
AAP	Atiende a la aclaración del profesor.	

Nota. Segmento de Aprendizaje 1A-5: Líneas 65-69. Elaboración propia.

Con base en lo anterior, se propusieron los siguientes apartados a la THA en los que se especifican aspectos relevantes para una interpretación apropiada por parte del PFI.

Conceptualización de la Traslación. Este primer elemento especifica la conceptualización de la traslación adoptada en la THA. Se presenta como una función que toma una figura y la relaciona con otra a partir de un vector como parámetro. Por otro lado, esta concepción formal se asocia, para efectos pedagógicos, con el deslizamiento en línea recta de una figura que conserva tamaño, forma y orientación respecto al centroide. Sobre esto, se aclara

que, aunque puede establecerse una relación entre estas dos formas de concebir el fenómeno, una traslación no es un deslizamiento. Este último se utiliza en la THA como recurso para la visualización del movimiento de la figura para favorecer el establecimiento de relaciones entre las propiedades y conceptos propios de esta isometría, como sugieren los referentes curriculares (MEN, 1998) y autores como Sacristán et al (2010).

Descripción de los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes en la THA. La interpretación de estos en el contexto de la THA resulta esencial para comprender los propósitos implícitos de cada nivel. Así, este nuevo apartado busca hacer evidente la relación que tiene el grupo de tareas de un nivel, sugiriendo una manera de orientar el proceso de aprendizaje de los estudiantes para aprovechar los procesos de estructuración, abstracción, generalización y formalización descritos por Zolkower y Bressan (2012). Como consecuencia, se espera que esto favorezca la coherencia entre el discurso del profesor/Investigador y la estructura de la THA a la luz de la teoría que la fundamenta.

Precisión de la Terminología. Otro aspecto relevante que generó dificultades en los estudiantes, como se evidenció a lo largo del análisis retrospectivo y el primer resultado de esta investigación, fue que la THA presentaba e inducía algunas ambigüedades respecto a los términos de inclinación y orientación. Así, se añadió un pequeño apartado que establece una terminología concreta que pretende saldar dichas imprecisiones. En este se definen y diferencian los conceptos de trayectoria, inclinación, orientación respecto al centroide y sentido.

Descripción del Uso de los Applets. Como algunos de los applets originales y rediseñados son complejos respecto al modo de explorarlos, se añadió una breve descripción de su uso, con el fin de que el profesor/investigador pueda aprovechar las posibilidades que ofrecen, así como darle claridad inmediata su uso previsto.

Adaptación del Contexto de la THA

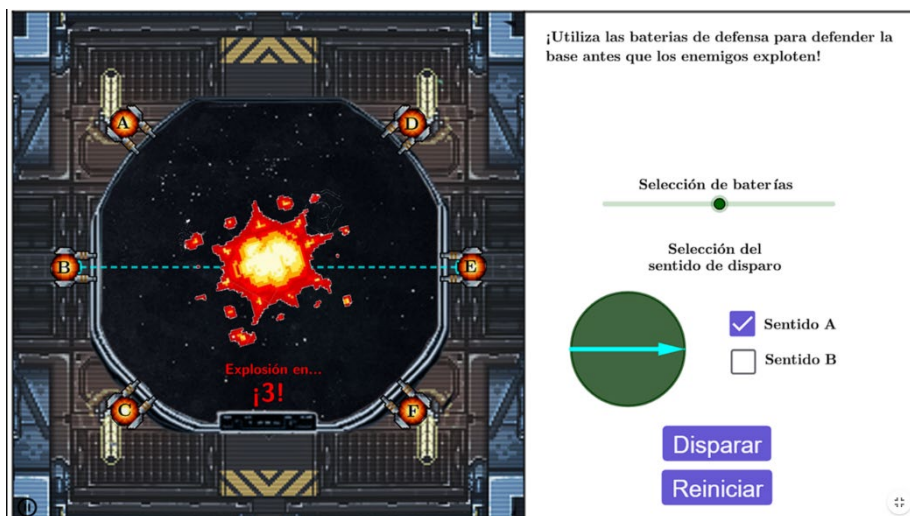
La THA de Cumbal (2020) media el aprendizaje de la traslación a partir de múltiples applets de GeoGebra que, sin lugar a duda, son innovadoras respecto a medios tradicionales

como el lápiz y papel. Sin embargo, es fácil percibir que los medios audiovisuales han evolucionado estrepitosamente en la medida que se socializa la tecnología (Etxeberria, 1998). En este sentido, las representaciones usadas en esta THA pueden resultar poco tan llamativas para estudiantes que se ven enfrentados a un universo audiovisual enorme.

A lo largo de la implementación se percibió un desinterés generalizado de los estudiantes por la propuesta, que se manifestaba cuando, por ejemplo, evitaban desarrollar las tareas y solo lo hacían por la presión del PFI. Esta problemática responde a los resultados de González (2015) y suscitó la necesidad de hacer una adaptación del contexto de la THA. Por lo anterior, se propuso utilizar el contexto de diseño de videojuegos, con base a las virtudes de este medio reportadas en el marco teórico. Así, se hizo un rediseño de los applets usando como temática el género de videojuegos 2D Scrolling Shooter¹⁷, partiendo de una adaptación de las representaciones hasta la configuración de applets que se presentaran como minijuegos, donde el pensamiento matemático del estudiante se acciona a través de un propósito en contexto (ver figura 20).

Figura 20

Applet de la Tarea 3B Adaptada al Contexto de Diseño de Videojuegos



¹⁷ Videojuegos de disparos por desplazamiento en dos dimensiones.

Nota. Con el objetivo de impactar unos objetivos, el estudiante debe seleccionar la inclinación y el sentido apropiado del disparo. Tomado del applet rediseñado.

<https://www.geogebra.org/m/nbx3mmp4>

El uso particular del genero referido de videojuegos, proporciona un contexto fenomenológico muy apropiado para el estudio de la traslación. Mientras que los fenómenos reales que suelen asociarse a la traslación pueden ser fácilmente controvertidos, como se ilustró en la tabla 28, en este nuevo contexto no se ponen en duda. Por ejemplo, los entornos de estos videojuegos suelen ser totalmente bidimensionales, por lo que no se presenta el efecto visual de la perspectiva del mundo real. Este tipo de aspectos fenomenológicos son consecuencia de las matemáticas inherentes al desarrollo de este tipo de software.

Rediseño de Preguntas

En la THA de Cumbal (2020) se encontraron una cantidad importante de tareas en las que las preguntas que pretenden accionar la reflexión del estudiante solo suscitan la identificación de características que se manifiesta con respuestas de “sí” y “no”, inclusive no se formulaban preguntas que dieran cuenta de lo propuesto en el modelo de progresión o el PAH de una tarea (ver tabla 31). Como consecuencia, durante la experimentación se procuró por improvisar nuevas preguntas en medio del intercambio entre PFI y estudiantes para obtener registros que dieran cuenta del pensamiento matemático del estudiante. Aunque esto se hizo en el contexto de una investigación, resulta intuitivo que para un profesor en ejercicio también es pertinente percibir la progresión del aprendizaje de sus estudiantes a través de sus respuestas y la interacción que estas puedan generar.

Tabla 31

Disonancia entre el Modelo de Progresión, el Proceso de Aprendizaje Hipotético y las Preguntas de la Tarea 1A

Características visuales de las figuras trasladadas, estas mantienen: la forma, el tamaño, inclinación o inclinación y orientación.

Proceso de Aprendizaje Hipotético	Descripción y Preguntas
El estudiante, para cada pareja de figuras que se obtiene por medio de un deslizamiento, compara la figura inicial con la figura final. Con esto, ellos infieren las características visuales de las figuras que deslizadas siguiendo una trayectoria rectilínea, mantiene invariante: el tamaño, la forma, la inclinación, la trayectoria y la orientación de la figura inicial.	Las parejas de figuras son ejemplos de deslizamientos en una trayectoria rectilínea. (Ver dibujos) Mueve el punto rojo para observar el deslizamiento de la figura inicial hasta la figura final.
El estudiante observa que las parejas de figuras que se obtienen por medio de un deslizamiento sobre trayectoria rectilínea conservan tamaño, forma, orientación e inclinación. Por lo tanto, llegan a concluir que son congruentes.	Para cada dibujo, compara la figura inicial con la figura final y responde a las preguntas: 1. ¿Mantienen el mismo tamaño? 2. ¿Mantienen la misma forma? 3. ¿Mantienen la misma inclinación? 4. ¿La trayectoria que sigue de la figura inicial a la final es en línea recta? 5. ¿En qué se diferencian? 6. ¿Podrías afirmar que las dos figuras son iguales? ¿Por qué?

Nota. Aunque el proceso hipotético y el modelo de progresión hacen referencia a la orientación, las preguntas no suscitan una reflexión al respecto. Tomado de la THA de Cumbal (2020).

Splitter y Sharp (1995) catalogaron las preguntas referidas como cerradas y las caracterizaron con el propósito de obtener información o evaluar un conocimiento. Sobre esta categorización, López (2012) destacó las preguntas de tipo indagación, pues estimulan la producción de respuestas que propician una discusión provechosa para propósitos educativos y añadió:

... las buenas preguntas ayudan a mejorar y ampliar el aprendizaje por lo que es conveniente conocer qué tipo de preguntas son las adecuadas para cada tipo de ambiente de aprendizaje, de tal manera que permitan a los estudiantes relacionar sus conocimientos previos y experiencias, formular sus propias preguntas, e incluirlo en la planificación de su propio aprendizaje. (p. 49)

Con base en lo anterior, el rediseño también implicó el replanteamiento de las preguntas de tal suerte que promovieran la reflexión de los estudiantes a la luz del modelo de progresión y el Proceso de Aprendizaje Hipotético de cada tarea.

Rediseño de Tareas y sus Applets

A continuación, se hace una breve descripción del rediseño de las tareas de la THA de Cumbal (2020) sustentado en el análisis retrospectivo y los resultados anteriores. Para esto, se presenta cada tarea de la THA rediseñada, justificando los procesos de adaptación o absorción de las tareas originales en las nuevas. Para facilitar el contraste de ambas THA y la comprensión de las decisiones en el rediseño, se dejan como anexos 1 y 2 la THA de Cumbal (2020) y la THA rediseñada respectivamente.

Tarea 1A. En esta nueva tarea se pretende que los estudiantes interactúen con un videojuego del género 2D Scrolling Shooter. Para su selección se exploraron múltiples opciones y se optó por usar R-Type 3: The Third Lightning, un videojuego clásico de la consola Super Nintendo. La finalidad de esta tarea consiste en observar el movimiento de ciertos objetos específicos con el fin de describir sus trayectorias. Estos se mueven siguiendo distintos patrones, sobre los que se espera destacar los que corresponden a una traslación.

Tarea 1B. Esta corresponde a la tarea 1A de la THA original, sobre la que solo se hizo una adaptación al contexto de diseño de videojuegos.

Tarea 1C. Manteniendo el espíritu de la tarea 1B de la THA original, se añadió un nuevo dibujo donde se representa un deslizamiento en línea recta relacionado a una traslación, para poder contrastarlo de manera local con los deslizamientos que tienen otro tipo de trayectorias. Estos últimos se modificaron con el fin de mostrar trayectorias más variadas y así favorecer el contraste.

Tarea 2A. Esta nueva tarea se sustenta en dos aspectos: las dificultades evidenciadas respecto a la interpretación de la representación que asocia el deslizamiento en línea recta de una figura con una traslación; y la Heurística de los Modelos Emergentes, pues en el nivel referencial se introduce la esquematización del fenómeno. Así, en esta tarea se espera que los estudiantes se familiaricen con la manera de representar el fenómeno usada a lo largo de la THA, de la que se espera que reconozcan: una figura que se desliza en línea recta; una

representación de la figura cuando está en sus posiciones inicial y final, correspondiendo estas a la figura y su traslación; los rastros que dejan los vértices de la figura al deslizarse; y una línea recta que representa la trayectoria del deslizamiento.

Tarea 2B. En esta se unieron las tareas 2A, 2C y 3A de la THA original debido a que usaban la superposición como mecanismo de comprobación de una característica visual. Así, se pretende que los estudiantes verifiquen la conservación de tamaño, forma y orientación respecto al centroide a través de un proceso de superposición en una misma tarea. Para esto, bastó con modificar un par de dibujos de la tarea 2A para integrar unos nuevos donde se representan deslizamientos con cambio en la orientación respecto al centroide de las figuras inicial y final.

La tarea 3A de la THA original buscaba que los estudiantes reconocieran la superposición de los vértices y lados correspondientes de una figura y su traslación como un método para verificar las características visuales de la traslación. Así, era procedimentalmente análoga a las tareas 2A y 2C, por lo que se absorbió en la nueva tarea 2B.

Tarea 2C. Esta corresponde a un rediseño la tarea 2B original que consistió en una modificación las representaciones de tal manera que solo un deslizamiento corresponde a una traslación y los otros presentan cambios en el tamaño, forma y orientación respecto al centroide. En esta tarea se mantuvo el objetivo procedimental original: seleccionar un segmento adecuado para conectar todos los vértices correspondientes de una figura y su traslación. Así, los estudiantes solo podrán seleccionar un segmento con dichas condiciones para el deslizamiento que corresponde a una traslación. En consecuencia, deberían poder identificar que en otros tipos de deslizamiento los segmentos que unen estos vértices tienen distintas longitudes e inclinaciones. De esta manera se espera que los estudiantes puedan reconocer la propiedad como una implicación de la traslación, en contraste a la tarea original donde solo se limitaban a reconocer la longitud para la selección de un segmento adecuado, como se reportó en el análisis retrospectivo.

Tarea 3A. El reconocimiento del sentido se desarrollaba en la tarea 3C de la THA original. Sin embargo, esta suponía una configuración de la longitud, inclinación y sentido de la traslación donde no se abstraía el sentido como concepto individuado de los otros parámetros, como se reportó en el análisis retrospectivo. Así, para esta nueva tarea 3A se propuso un rediseño total que busca cumplir dicho propósito.

El nuevo applet de esta tarea propone una situación en el contexto de diseño de videojuegos en la que el estudiante debe identificar un segmento particular que representa la trayectoria de un proyectil. Sobre este, debe seleccionar uno de sus sentidos determinado por los extremos con el fin de impactar unos objetivos. Con las preguntas propuestas, se espera que el estudiante pueda reconocer el concepto referido y pueda distinguirlo visual y conceptualmente de la inclinación y la longitud.

Tarea 3B. Esta corresponde a la tarea 3A de la THA original, sobre la que se hicieron cambios mínimos: la adaptación al contexto de diseño de videojuegos; y un rediseño de la herramienta de medición, que ahora indica la medida de manera explícita. Esta decisión se tomó con base en: la dificultad evidenciada en los estudiantes para medir distancias con un elemento como este; la medición de distancias se desarrolla en los primeros niveles de escolaridad (MEN, 2006); para el desarrollo de la THA, lo sustancial es que los estudiantes puedan reconocer una distancia y la medida que se le puede asignar, más no propiamente la acción de medir.

Tarea 3C. Esta corresponde a la tarea 3D de la THA original, que se mantiene casi intacta en el rediseño. El único cambio que se consideró pertinente es el de abstraer el sentido de las traslaciones conservando la inclinación en la representación auxiliar. Esto se plantea debido a que las representaciones usadas en la THA original solo ofrecen la posibilidad de describir dos sentidos en una traslación: de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Sin embargo, en casos donde la traslación describa una trayectoria vertical, la representación auxiliar no permite determinar la propiedad. Por otro lado, si se conserva la inclinación de la traslación en esta, se puede identificar el sentido de cualquier traslación a partir su

caracterización con base en los extremos del segmento que condensa la longitud y la inclinación del vector.

Tarea 3D. Como se consideró que la configuración del vector de traslación, a partir del estudio de sus parámetros por separado, sería una inferencia compleja para el estudiante, agravada por el hecho de que en el nivel de escolaridad presupuesto no se ha introducido el concepto de vector, se propuso una nueva tarea que consiste en construir el vector de traslación dados los parámetros de inclinación, longitud y sentido. Esta decisión también se sustenta en las dificultades reportadas en el marco teórico respecto a la conceptualización del vector de traslación.

El nuevo applet de esta tarea: construye un vector con los parámetros de longitud, inclinación y sentido que ingresa el estudiante; y luego, traslada una figura con dicho vector. Además, busca favorecer el contraste entre las distintas traslaciones generadas a partir de la variación de los parámetros del vector. Las preguntas asociadas a esta nueva tarea pretenden accionar la reflexión del estudiante sobre los efectos visuales en la traslación del cambio de estos parámetros; en general, se espera que infieran el rol del vector como parámetro determinante de la traslación.

Tarea 3E. Esta hereda el principio procedimental de la tarea 3C original, pero ahora con el propósito de que los estudiantes infieran un método concreto para la construcción de un vector de traslación. Así, el estudiante debe observar cómo cambia un vector al variar sus componentes, estableciendo una relación entre el vector y los “pasos” horizontales y verticales en la cuadrícula del AGD. Así, debe generar un vector que le permita trasladar una figura a una posición concreta. Esta tarea absorbe a la 3E original, pues tienen el mismo propósito de construir un vector para producir una traslación concreta.

Lo anterior se justifica procedimentalmente a través del contexto de diseño de videojuegos, pues la figura corresponde a una nave que debe recolectar unos minerales que se

encuentran en posiciones específicas. Si el estudiante construye un vector que no traslade la nave a uno de los minerales, está colisionará con algún asteroide.

Tarea 3F. La tarea 3F original presentaba una secuencia para la construcción de la figura trasladada, dada una figura y un vector. Aunque el applet mostraba con detalle este proceso gráficamente, en el análisis retrospectivo se reportó la dificultad que tuvieron los estudiantes para seguir la secuencia, a tal punto que solo lograron construirla los estudiantes que tuvieron mediación con el PFI. Manteniendo el principio de la tarea original, se hizo una adaptación según el contexto de diseño de videojuegos, donde se le añade un “asistente” que va describiendo la secuencia en lenguaje natural, lo que puede favorecer la comprensión del estudiante sobre el proceso.

Tarea 4A. Uno de los propósitos de la tarea 4A original, era el de introducir el lenguaje formal para referenciar los elementos geométricos en la traslación. Así, esta nueva tarea se concentra en este propósito, por lo que invita al estudiante a nombrar los vértices de una figura y su traslación. Sobre esto, los estudiantes deben identificar los nombres formales de las figuras y algunos segmentos con el fin de que se apropien de este tipo de notación.

Tarea 4B (Opcional). Debido a las dificultades relacionadas al reconocimiento del paralelogramo y sus propiedades reportadas en el análisis retrospectivo, se propone esta nueva tarea con el fin de que los estudiantes reconozcan este cuadrilátero y puedan usar la congruencia de sus lados opuestos en la tarea 4C del rediseño.

En el applet de esta tarea, el estudiante debe seleccionar, entre varios polígonos, un paralelogramo, pues este es el único que le permite cumplir con el objetivo procedimental del recurso. A partir de las preguntas propuestas, se busca que el estudiante infiera la propiedad de congruencia entre los lados opuestos del paralelogramo.

Esta tarea se propone como opcional porque: solo resulta pertinente su desarrollo si los estudiantes no están familiarizados con los paralelogramos y sus propiedades; el contexto planteado no corresponde al nivel formal de la Heurística de los Modelos Emergentes; la

conceptualización del paralelogramo se propone en otro nivel de escolaridad (MEN, 2006). Sin embargo, se decidió conservar esta tarea en el rediseño pues el reconocimiento de dicha propiedad es imprescindible para el razonamiento que se propone desarrollar en la tarea 4C.

Tarea 4C. En la tarea 4A de la THA original, se propone el uso de las propiedades del paralelogramo para probar que la distancia entre los pares de vértices correspondientes de una figura y su traslación es siempre la misma. Sin embargo, se omite usar un razonamiento análogo para probar la congruencia de una figura y su traslación, que se consideró más relevante en este trabajo. Por lo tanto, esta tarea propone al estudiante reconocer los paralelogramos formados por los lados correspondientes de una figura y su traslación y usar la propiedad de la congruencia entre de los lados opuestos para determinar que todos los pares de lados correspondientes tienen la misma longitud e inclinación, por lo que la figura y su traslación deben ser congruentes.

Todo lo anterior da cuenta del rediseño de la mayoría de las tareas de la THA de Cumbal (2020). Sin embargo, se suprimieron totalmente las siguientes:

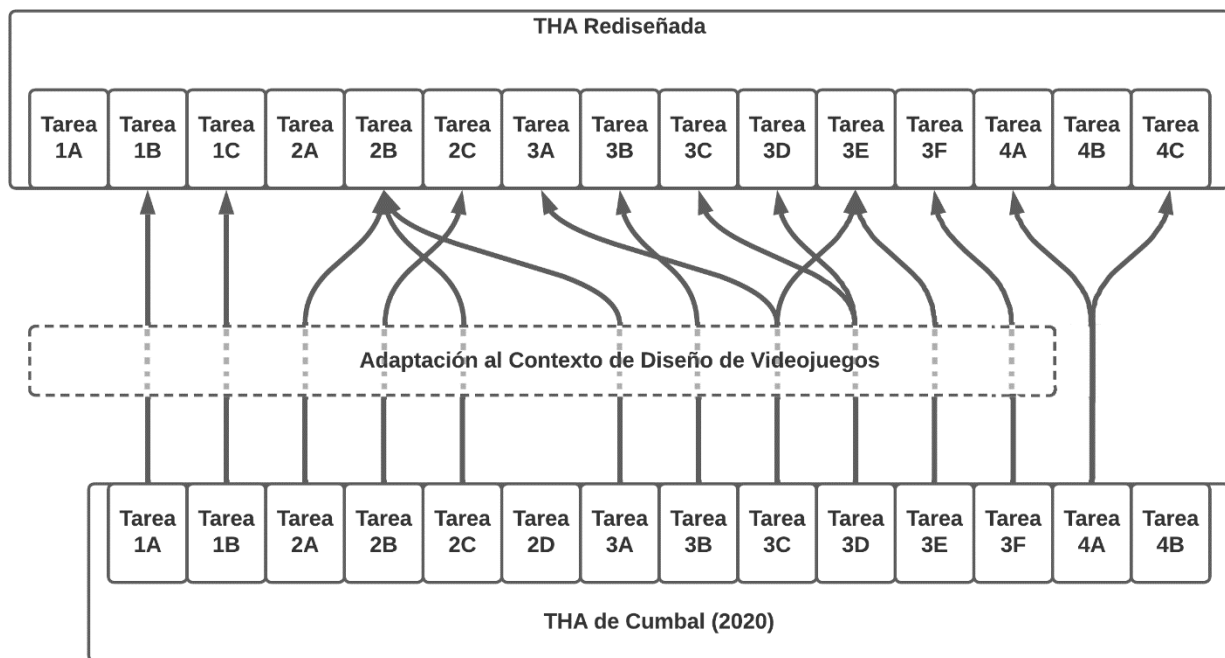
- Tarea 2D: en esta se pretendía que los estudiantes reconocieran la conservación de la inclinación de una figura y su traslación. Como se evidenció en el análisis retrospectivo, esta característica presentó muchas dificultades para los estudiantes. Pensar en una transformación que no conserva la inclinación de su trayectoria rectilínea, implica imaginar que una misma representación corresponde a dos traslaciones distintas. Esto se consideró innecesariamente complejo, pues el estudio de las otras propiedades visuales salda la caracterización de una traslación sin que se presenten ambigüedades.
- Tarea 4B: esta tarea, desde la concepción de su modelo de progresión, no evidencia ser relevante para el desarrollo del contenido, pues las preguntas asociadas retoman elementos previamente desarrollados. Además, la

representación en el contexto original de diseño no es coherente con nivel formal de la Heurística de los Modelos Emergentes para el que se propone.

En la figura 21 se presenta un esquema que describe visualmente el proceso de rediseño de las tareas de la THA de Cumbal (2020) para facilitar la interpretación de todo lo señalado anteriormente.

Figura 21

Esquema del Proceso de Rediseño de la THA de Cumbal (2020)



Nota. Elaboración propia.

Capítulo V: Conclusiones y Discusiones

Este trabajo de investigación se propuso como objetivo general describir el proceso de aprendizaje de estudiantes de 6º grado sobre la traslación mediante una THA mediada por un AGD. Para responder a esto, se propusieron 3 objetivos específicos que permitieron dar cuenta del objetivo general: caracterizar los niveles de comprensión de los estudiantes sobre la traslación a partir de la mediación de la THA; Describir la Trayectoria de Aprendizaje Real de los estudiantes intervenidos en contraste con la THA; y Rediseñar la THA en función del análisis retrospectivo del acercamiento a un Experimento de Enseñanza y los resultados de investigación. Sobre estos elementos, se da respuesta en los siguientes apartados.

Descripción de los Niveles de Comprensión de los Estudiantes Intervenidos

Esta se realizó con base en la Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes de la Educación Matemática Realista. Este insumo teórico permitió hacer una interpretación situada de los niveles que propone en función de la configuración y propósitos de la THA. Así, se establecieron unas características concretas para cada nivel según el conocimiento matemático que se buscaba desarrollar en los estudiantes donde: el nivel situacional se centraba en la visualización de las características visuales de la traslación en un contexto de diseño; en el nivel referencial se privilegiaba la posibilidad de comprobar la conservación de forma, tamaño, inclinación y orientación respecto al centroide de una figura y su traslación a partir de su superposición; en el nivel general se configuraba el vector de traslación a partir de la abstracción de las características de longitud, inclinación y sentido de un desplazamiento; en el nivel formal se buscaba familiarizar a los estudiantes con el uso de una notación formal para referenciar los objetos geométricos de la representación de la traslación, así como la producción de un razonamiento para probar la igualdad de las distancias entre los pares de vértices correspondientes de una figura y su traslación.

Con base en lo anterior, durante la fase de análisis retrospectivo se realizó la sistematización de los datos recolectados en los registros de audio, video y físicos. Con el cuerpo

de datos segmentado y codificado, se efectuó una categorización inductiva-deductiva con el fin de contrastar lo esperado en la interpretación de los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes con lo sucedido en la experimentación. El análisis de patrones en los códigos emergentes permitió caracterizar el conocimiento matemático de los estudiantes en cada nivel de progresión. Así, se concluyó que los estudiantes alcanzaron de manera razonable el nivel general, pues eran capaces de identificar y comprobar las características visuales de la traslación, así como de reconocer el rol del vector de traslación como parámetro determinante en el fenómeno. Por otro lado, se evidenció que no lograron desarrollar razonamientos formales para el estudio del contenido.

Sobre este objetivo, se destaca que el uso de la THA favoreció el proceso de descripción de la comprensión de los estudiantes intervenidos. Los PAH permitieron establecer unas categorías de análisis que concretaban las características de los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes para su comparación con el Proceso de Aprendizaje Real. Así, se estableció un foco sobre los modelos de progresión de los que se podía mostrar evidencia del pensamiento matemático de los estudiantes. Esto tuvo como consecuencia que la categorización se desarrollara de manera orgánica, pues cada modelo de progresión podía reinterpretarse como una categoría de manera casi instantánea.

Comparación de la THA y la Trayectoria de Aprendizaje Real

Una Trayectoria de Aprendizaje Real describe, de manera local, el proceso seguido por los estudiantes para desarrollar un conocimiento matemático concreto en el marco de la implementación de una THA. Durante el acercamiento a un Experimento de Enseñanza, se pudo describir una Trayectoria de Aprendizaje Real para el grupo de estudiantes intervenidos.

Para el anterior propósito, durante el análisis retrospectivo permitió describir un Proceso de Aprendizaje Real para cada tarea. Con estos y los PAH, se construyó la tabla 29 donde se compararon para dar cuenta del desarrollo de la THA en cada tarea. El conjunto de todos los Procesos de Aprendizaje Real constituye la Trayectoria de Aprendizaje Real. A partir de esta se

pudieron evidenciar las dificultades que tuvieron los estudiantes al enfrentarse a las tareas y, en consecuencia, las limitaciones de la THA.

Durante el análisis retrospectivo que sustentó los resultados de esta investigación, se concretaron algunos modelos para la enseñanza de la traslación como: la concepción híbrida del fenómeno como función, desde la matemática, y como deslizamiento, desde la didáctica; la caracterización de la conservación de la forma, el tamaño y la conservación respecto al centroide como propiedades visuales de la traslación; una representación particular del fenómeno a través de distintos elementos geométricos; o unos usos concretos del AGD que favorecieron distintos procesos en el aprendizaje del contenido. Estos modelos se derivan de distintas fuentes como la THA de Cumbal (2020), la experimentación y los referentes teóricos. Así, este ejercicio investigativo permitió establecer un modo particular y explícito de desarrollar el conocimiento matemático del estudiante respecto al contenido.

Rediseño de la THA

Usando como insumos la Trayectoria de Aprendizaje Real descrita, los resultados de investigación y el análisis retrospectivo, se identificaron elementos de la THA que dificultaran la comprensión del estudiante respecto a la traslación. Un proceso de análisis que atravesó los PAH, las preguntas, los modelos de progresión y los applets de las tareas, dio como resultado una serie de modificaciones que nutrieron el rediseño de la THA.

El ejercicio anterior tuvo dos dimensiones:

- Rediseño de los elementos estructurales: esto consistió en una modificación de la meta de aprendizaje, las tareas, las preguntas, los modelos de progresión y los applets. Por su parte, las tareas originales se adaptaron a un nuevo contexto a la vez que se trasladan o absorbían en la nueva THA.
- Adición de apartados: estos tienen el propósito de favorecer la interpretación de la THA para que el proceso de aprendizaje se desarrolle de manera coherente con

los propósitos explícitos e implícitos de la propuesta, determinados por su estructuración y fundamentación teórica.

La comparación de los PAH y los Procesos de Aprendizaje Real permitió hacer una valoración muy precisa de las virtudes y limitaciones de la THA, en tanto ofrecían una descripción incisiva de la interacción de los estudiantes con las tareas y recursos planteados en función de los propósitos de aprendizaje. Así, se destaca que el uso de THA en Experimentos de Enseñanza ofrece unos resultados satisfactorios, pues tiene el potencial de generar insumos tanto generales como específicos para la reflexión y el cuestionamiento de los elementos estructurales de una propuesta de aula, en términos teóricos y procedimentales.

Limitaciones y Recomendaciones

Este ejercicio investigativo se limitó a la descripción de la Trayectoria de Aprendizaje Real de un grupo de estudiantes concreto. Por lo tanto, los resultados expuestos solo sirven para ilustrar un enfoque particular de investigación y no dan cuenta del proceso de aprendizaje de la traslación en un sentido general. Un Experimento de Enseñanza completo conlleva varias iteraciones de implementación, análisis y rediseño con el fin de obtener conclusiones de alto alcance y generalidad. Por las complejidades logísticas que conlleva una implementación de varias sesiones en una institución educativa, este trabajo solo alcanza a completar un ciclo por lo que, como se ha enunciado constantemente, solo puede considerarse un acercamiento a un Experimento de Enseñanza.

El tratamiento de datos recolectados a partir de los registros de audio, video y físicos fue un proceso de enorme complejidad operativa, dado que era necesario cotejar los registros de audio y video para poder sacarle el provecho esperado a estos insumos. También, el proceso de codificación fue un ejercicio dispendioso pues los códigos emergentes generados debían ser lo suficientemente específicos para describir una interacción, pero también lo suficientemente generales para permitir el reconocimiento de patrones en el análisis. Así, resulta imperativo para una investigación cualitativa la planeación de una estrategia para la recolección de datos y su

sistematización, con base en los recursos materiales de la investigación, estableciendo protocolos de comunicación y haciendo una revisión exhaustiva de los medios de registro.

El desarrollo del acercamiento a un Experimento de Enseñanza en el marco de una IBD, permite reafirmar que esta estrategia de investigación materializa la conexión entre la teoría y la práctica. Como se enunció en el capítulo IV, la interpretación inicial de la THA de Cumbal (2020) y sus fundamentos teóricos cambió radicalmente durante la fase de experimentación. Esto no solo permitió comprender la estructuración de la propuesta de aula en función de la Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes, sino también los propósitos y procedimientos de la THA misma. Sobre esta, se presentó una comprensión ilusoria basada en los imaginarios de los investigadores que solo cuestionaron de manera introspectiva en la implementación. Esto controvierte la intuitiva ilusión lírica de que una propuesta de aula, construida rigurosamente bajo la pauta de teorías reconocidas, se puede implementar de manera orgánica en el aula de clases dando cuenta de su fundamentación. Este fenómeno se puede intuir como un tópico interesante para la investigación sobre la práctica profesional del profesor.

En el rediseño de la THA se propuso su adaptación al contexto de diseño de videojuegos con base en los referentes que visibilizan las virtudes de este medio para propósitos educativos. Aunque en esta investigación no se implementó la THA rediseñada, se generó una gran expectativa respecto al resultado de usar recursos de este tipo. Así, se hace una invitación a explorar nuevos contextos, medios y tecnologías para la enseñanza, con el fin de reivindicar el aprendizaje de las matemáticas y confrontar activamente el desinterés particular de los estudiantes del que adolece esta área del conocimiento.

La búsqueda documental sobre la traslación no dio cuenta de un modelo concreto para la enseñanza de la traslación, desde un punto de vista didáctico, sino de lineamientos muy generales para el tratamiento de las transformaciones geométricas, como el de la Geometría Activa. Todos los referentes consultados desarrollaban el contenido desde su propio criterio y con base a una conceptualización formal del fenómeno. Así, como recomendación final, resulta

pertinente seguir explorando los procesos de enseñanza y aprendizaje de la traslación con el fin de encontrar un modelo general para desarrollar este contenido, como en el caso de otros que gozan de modelos ampliamente validados en el campo.

Referencias Bibliográficas

- Aktas, G. S., y Unlü, M. (2017). Understanding of Eight Grade Students about Transformation Geometry: Perspectives on Students' Mistakes. *Journal of Education and Training Studies*, 5(5), pp. 103-119. <https://doi.org/10.11114/jets.v5i5.2254>
- Bakker, A., y Van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education Examples of Methodology and Methods* (1ra ed., pp. 426-466). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Benito, B., y Salinas, J. M. (2016). La Investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa. *RIITE: Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, 0, pp. 44-59. <http://dx.doi.org/10.6018/riite/2016/260631>
- Bernabeu, M., Moreno, M., y Linares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), pp. 103-123. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bocanegra, I., y Devia, M. (2019). *Construcción de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en torno al Proceso de Generalización Geométrica* [Tesis de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional Universidad Pedagógica Nacional. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/11913>
- Bonilla, M. A., y López, A. D. (2016) Ejemplificación del Proceso Metodológico de la Teoría Fundamentada. *Cinta de Moebio*, 54, pp. 305-315. <https://doi.org/10.4067/S0717-554X2016000300006>
- Cáceres, G. (2017). *El Aprendizaje de las Traslaciones en el Plano en el Marco del Modelo de Van Hiele Mediado por el Uso de GeoGebra, en Estudiantes de Séptimo Grado del Centro Educativo Rural Sucre de Mutiscua* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga]. Repositorio Universidad Autónoma de Bucaramanga. <http://hdl.handle.net/20.500.12749/2255>
- Capell, C. M., Tejada, J., y Bosco, A. (2017). Los Videojuegos como Medio de Aprendizaje: un Estudio de Caso en Matemáticas en Educación Primaria. *Pixel-Bit Revista de Medios y Educación*, 51, pp. 133-150. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517105>
- Carvajal, G., y Rojas, P. A. (2015). El Videojuego como Agente motivador en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Grafías Disciplinarias de la Universidad Católica de Pereira*, 25, pp. 45-56. <https://doi.org/10.31908/grafias.voi27.1322>

- Castaño, J. (2006, Junio 23-25). Consideraciones sobre la Educación del Pensamiento Espacial y Geométrico. En C. Ruiz, J. H. Pérez, C. Luque, J. Joaquín, y A. Oostra (Eds.), *Memorias XVI Encuentro de Geometría y IV encuentro de Aritmética* [Encuentro]. XVI Encuentro de Geometría y IV encuentro de Aritmética, Bogotá, Colombia.
- Cheuquepán, D., y Barbé, J. (2012). Propuesta Didáctica para las Traslaciones en el Plano Cartesiano con el Uso de Planilla de Cálculo. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 8(29), pp. 131-154.
<http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/878>
- Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (1ra ed., pp. 68-95). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781315759593>
- Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (1ra ed., pp. 135-151). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511816833.010>
- Cumbal, L. C. (2020). *Caracterización de las Prácticas de Profesores Noveles en la Integración de Recursos Digitales con una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la Enseñanza de la Traslación* [Tesis de Maestría, Universidad del Valle]. Repositorio Digital Univalle. <http://hdl.handle.net/10893/18487>
- Duval, R. (2017). *Semiosis y Pensamiento Humano* (M. Vega, Trad., 2da ed.). Universidad del Valle Programa Editorial.
- Etxeberria, F. (1998). Videojuegos y educación. *Comunicar: Revista Científica de Comunicación y Educación*, 10, pp. 171-180. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=635591>
- Flores, F. (2021). El Uso de las TIC en la Enseñanza de Conceptos Geométricos en la Educación Básica. *RIDE: Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(23), pp. 1-30. <https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1024>
- Fortuny, J. M., Iranzo N., y Morera, J. (2010). Geometría y Tecnología. En M. Moreno, J. Carrillo, y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (1ra ed., pp. 69-86). Edicions de la Universitat de Lleida.
<https://www.seiem.es/docs/actas/14/Actas14SEIEM.pdf>

- Freudenthal, H. (2005). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures* (1ra ed., Vol. 9). Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3>
- GeoGebra. (s.f.). About GeoGebra. <https://www.geogebra.org/about>
- Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), pp. 79-98. <https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6214>
- González, R. M. (2005). Un Modelo Explicativo del Interés hacia las Matemáticas de las y los Estudiantes de Secundaria. *Educación Matemática*, 17(1), pp. 107-128. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517105>
- González, T., y Cano, A. (2010). Introducción al Análisis de Datos en Investigación Cualitativa: Concepto y Características. *Nure Investigación*, 44, pp. 1-5.
- Granic, I., Lovel, A., y Engels, R. (2014). The Benefits of Playing Video Games. *American Psychologist*, 69(1), pp. 66-78. <https://doi.org/10.1037/a0034857>
- Gravemeijer, K. (1994). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), pp. 443-471. <https://doi.org/10.2307/749485>
- Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), pp. 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Gustin, C. (2021). *Propuesta de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para Identificar los Elementos de la Visualización que Favorecen el Aprendizaje de la Rotación de acuerdo a una Perspectiva* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional Universidad Nacional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/81007>
- Gutiérrez, S. (2022). *Aplicación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el Desarrollo del Sentido Estocástico en los Primeros Cursos de Educación Primaria* [Tesis de Maestría, Universidad de Valladolid]. Universidad de Valladolid Repositorio Documental. <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57596>
- Hernandez, D. y Pastrana, J. (2020). *Adaptación de una Ingeniería Didáctica para la Enseñanza de la Traslación* [Tesis de Pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional Universidad Distrital. <http://hdl.handle.net/11349/25437>

- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., Tabach, M., y Schwarz, B.B. (2002). Mathematics Curriculum Development for Computerized Environments: A Designer-Researcher-Teacher-Learner-Activity. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (1ra ed., pp. 657–694). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Hollebrands, K. F. (2003). High School Students' Understandings of Geometric Transformations in the Context of a Technological Environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), pp. 55-72. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00004-X](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X)
- Icfes (2022). *Informe Nacional de Resultados de las Pruebas Saber 3°, 5°, 7° y 9° Aplicación 2022*. MEN. https://www.icfes.gov.co/documents/39286/19845423/Informe_saber_359_06_2022.pdf
- Isoda, M. (2018). Mathematization: A theory for Mathematics Curriculum Design. En M. Kawazoe (Ed.), *Proceedings of the International Workshop on Mathematics Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy* (1ra ed. pp. 27-34). Kogakuin University Shinjuku Campus. http://iwme.jp/pdf/Proceedings_IWME2018.pdf
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la Interpretación y Aplicación del Modelo de Van Hiele: la Enseñanza de las Isometrías del Plano: La Evaluación del Nivel de Razonamiento* [Tesis de Doctorado, Universitat de València]. Repositorio Institucional RODERIC. <http://hdl.handle.net/10550/37994>
- Laderosa, R., y Malara, N. A. (2000). Acerca de las Dificultades Encontradas en Alumnos de 12-13 años en el Aprendizaje de la Isometría Plana. *Educación Matemática*, 12(2), pp. 63-80. <http://funes.uniandes.edu.co/10213/1/Acerca2000Malara.pdf>
- López, G. (2012). Pensamiento crítico en el aula. *Docencia e Investigación*, 22, pp. 41-60. https://educacion.to.uclm.es/pdf/revistaDI/3_22_2012.pdf
- Mbusi, N. (2016, Octubre 23-28). Misconceptions and Related Errors Displayed by Pre-service Foundation Phase Teachers in Transformation Geometry. *2016 ITSE International Conference on Mathematics, Science and Technology Education* [Conferencia]. ITSE International Conference on Mathematics, Science and Technology Education, Limpopo, South Africa.

- Mejía, J. V. (2011). Problemas Centrales del Análisis de Datos Cualitativos. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*, 1, pp. 47-60.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-339975_matematicas.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas V.2*. MEN. https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un Acercamiento a la Investigación de Diseño a Través de los Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29(1), pp. 75-88. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824>
- Newzoo (2022). *Global Games Market Report Key Trends, Market Sizing and Forecasts, Gaming Ecosystems Special Focus Topics: Game Viewing, Cloud Gaming, and Consumer Perception of Blockchain Gaming*. Newzoo. <https://newzoo.com/resources/trend-reports/newzoo-global-games-market-report-2022-free-version>
- OCDE (2019). *PISA 2018 Results: What Students Know and Can Do*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>
- Paschini, M., y Carneiro M. G. (2017). A rotação e a Translação da Terra: um estudo sobre o que se ensina e o que se vê. *Comunicações*, 24(1), pp. 113-124. <https://doi.org/10.15600/2238-121X/comunicacoes.v24n1p113-124>
- Rodriguez, M., y Perez, Y. (2017). *Diseño de un Recurso Pedagógico para la Enseñanza de la Multiplicación al Integrar GeoGebra en Tercer Grado de la Educación Básica Primaria* [Tesis de Pregrado, Universidad del Valle]. Repositorio Digital Univalle. <http://hdl.handle.net/10893/13594>
- Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano Ceballos, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M., Moreno-Armella, L., y Perrusquia, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning – and Learning Trajectories – of Mathematical

- Concepts. En C. Hoyles, y J. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: Vol. 13. New ICMI Study Series* (1ra ed., pp. 179-226). Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Sánchez, I. C., Castillo, L. A., y Luque, R. (2021). Tecnologías Digitales y la Geometría Escolar: el GeoGebra para la Enseñanza del Teorema de Pitágoras. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 16(37), pp. 160-175. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p160-175.id316>
- Sánchez, Y. (2021). *Reconocimiento de los Errores del Lenguaje Algebraico Empleado por los Estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por Medio de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* [Tesis de Pregrado, Universidad del Valle]. Repositorio Digital Univalle. <http://hdl.handle.net/10893/21578>
- Santos-Trigo, L. M. (2016). La Resolución de Problemas Matemáticos y el uso Coordinado de Tecnologías Digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 15, pp. 333-346. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23952>
- Serna-Rodrigo, R., y Cardell, S. D. (2017). De Tetris a Angry Birds: la Aatemática Inherente a los Videojuegos. En C. S. González (Coord.), Libro de Actas del V Congreso Internacional de Videojuegos y Educación CIVE'17 [Congreso]. Congreso Internacional de Videojuegos y Educación CIVE, Alicante, España.
- Splitter, L. J., & Sharp, A. M. (1995). *Teaching for Better Thinking; the Classroom Community of Inquiry*. Melbourne, ACER: Australian Council for Educational Research.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. En D. Lyn (Ed.), *Mathematical Thinking and Learning issue 4: Vol. 11. Mathematical Thinking and Learning* (1ra ed., pp. 258-288). Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Tena, È., y Couso, D. (2023). ¿Cómo sé que mi secuencia didáctica es de calidad? Propuesta de un marco de evaluación desde la perspectiva de Investigación Basada en Diseño. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 20(2), pp. 101-115. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2023.v20.i2.2801
- Valiente, G. (1997). *Composición de Textos Científicos con LaTeX* (1ra ed.). Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya.
- Freudenthal, H. (2005). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures* (1ra ed., Vol. 9). Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3>

- Valverde, G. (2014). Experimentos de Enseñanza: una Alternativa Metodológica para Investigar en el Contexto de la Formación Inicial de Docentes. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(3), pp. 1-20. <https://doi.org/10.15517/aie.v14i3.16095>
- Xistouri, X. y Pitta-Pantazi, D. (2011, Febrero 9-13). Elementary Students' Transformational Geometry Abilities and Cognitive Style. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of Seventh Congress of the European Research in Mathematics Education [Conferencia]*. CERME Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszów, Polonia.
- Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), pp. 114-145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Simon, M. (2014). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (1ra ed., pp. 272-275). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Socas, R. M. (1997). Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (1ra ed., pp. 125-154). Horsori.
- Steffe, L. P., y Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. En A. E. Kelly, y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (1ra ed., pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Srocess through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, pp. 281-307. <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- Umble, R. N., y Han, Z. (2015). *Transformational Plane Geometry* (1st ed.). CRC Press Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.1201/b17787>
- UNESCO (2021). *Los Aprendizajes Fundamentales en América Latina y el Caribe Evaluación del Logros de los Estudiantes Estudio Regional Comparativo y Explicativo ERCE 2019 Resumen Ejecutivo*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380257.locale=en>

- Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, 2, pp. 1-8. <https://doi.org/10.17227/ted.num2-5706>
- Xistouri, X. y Pitta-Pantazi, D. (2011, Febrero 9-13). Elementary Students' Transformational Geometry Abilities and Cognitive Style. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboba (Eds.), *Proceedings of Seventh Congress of the European Research in Mathematics Education [Conferencia]*. CERME Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszów, Polonia.
- Zolkower, B. y Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. En M. D. Pochulu, y M. A. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática: Vol. 1. Aportes a la Formación Docente desde Distintos Enfoques Teóricos* (1ra ed., pp. 175-200). Editorial Universitaria de Villa María. <http://repositorio.ungs.edu.ar:8080/xmlui/handle/UNGS/780>

Anexos

Anexo 1. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de Cumbal (2020).

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (<https://www.geogebra.org/m/jqtravfh>)

Meta de aprendizaje:

Reconoce el resultado de aplicar transformaciones de traslación a figuras bidimensionales en contextos de diseño.

Conocimientos matemáticos en la THA:

Niveles de progresión	TAREAS	Modelo de progresión
Situacional	Tarea 1A	Características visuales de las figuras trasladadas, estas mantienen: • La forma • El tamaño • Inclinação • Orientación
	Tarea 1B	Características visuales de figuras no trasladadas. Cambian en: • Tamaño y forma • Orientación • Inclinação
Referencial	Tarea 2A	El tamaño y la forma de las figuras trasladadas
	Tarea 2B	La longitud, medida del desplazamiento desde la figura inicial hasta la figura final
	Tarea 2C	La conservación de la orientación de la figura final con relación a la figura inicial.
	Tarea 2D	La conservación de la inclinación (inclinación) de la figura final con relación a la figura inicial.
General	Tarea 3A	La coincidencia de los puntos y los segmentos correspondientes, a través de un deslizamiento en línea recta determinan la conservación de la orientación, la forma y la inclinación de la figura trasladada
	Tarea 3B	Longitud del segmento orientado
	Tarea 3C	Sentido de la traslación. Orientación de la figura final e inicial
	Tarea 3D	Configuración en un segmento orientado de los tres elementos de una traslación: la inclinación, la orientación y la longitud del movimiento.
	Tarea 3E	Construcción segmento orientado
	Tarea 3F	Construcción de la figura trasladada dada una figura inicial y el segmento orientado.

Formal	Tarea 4A	Propiedad de una traslación: los puntos A, A', B y B' que corresponden a las figuras inicial y final de una traslación, forman un paralelogramo
	Tarea 4B	La traslación como una configuración geométrica en un diseño

Proceso Hipotético de Aprendizaje	Tareas Nivel Situacional
TAREA 1A El estudiante, para cada pareja de figuras que se obtiene por medio de un deslizamiento, compara la figura inicial con la figura final. Con esto, ellos infieren las características visuales de las figuras que deslizadas siguiendo una trayectoria rectilínea, mantiene invariante: el tamaño, la forma, la inclinación, la trayectoria y la orientación de la figura inicial. El estudiante observa que las parejas de figuras que se obtienen por medio de un deslizamiento sobre trayectoria rectilínea conservan tamaño, forma, orientación e inclinación. Por lo tanto, llegan a concluir que son congruentes.	TAREA 1A https://www.geogebra.org/m/jqtravfh Las parejas de figuras son ejemplos de deslizamientos en una trayectoria rectilínea. (Ver dibujos) Mueve el punto rojo para observar el deslizamiento de la figura inicial hasta la figura final. Para cada dibujo, compara la figura inicial con la figura final y responde a las preguntas: 1. ¿Mantienen el mismo tamaño? 2. ¿Mantienen la misma forma? 3. ¿Mantienen la misma inclinación? 4. ¿La trayectoria que sigue de la figura inicial a la final es en línea recta? 5. ¿En qué se diferencian? 6. ¿Podrías afirmar que las dos figuras son iguales? ¿Por qué?
TAREA 1B El estudiante observa parejas de figuras que al deslizarse sobre el plano tienen cambios en su trayectoria, orientación, inclinación, tamaño y forma. El estudiante observa que algunas parejas de figuras: • describen una trayectoria que no es rectilínea, como el movimiento de la hélice o el movimiento del cuadrado. • la figura final no “mira” hacia el mismo lado que la figura inicial, como en el dibujo 4 • La figura final no tiene el mismo tamaño que la figura inicial, como el dibujo 3. El estudiante compara los ejemplos de deslizamiento en trayectoria rectilínea (TAREA 1A) con aquellos que no lo son (TAREA 1B), infiere que cuando una figura es deslizada siguiendo una trayectoria rectilínea conserva: el tamaño, la forma, la inclinación y la orientación de la figura inicial. El estudiante plantea ejemplos de deslizamientos relacionados con el movimiento de objetos cotidianos como, por ejemplo: el movimiento de un animal, de medios de transporte, etc.	TAREA 1B https://www.geogebra.org/m/jqtravfh En los dibujos se muestran parejas de figuras que NO son ejemplo de deslizamientos en una trayectoria rectilínea. (Ver dibujos) Activa la casilla Iniciar para observar el movimiento. Contesta las preguntas: 1. ¿Cómo es el movimiento del cuadrado verde en el dibujo 1? 2. ¿En qué se parece el movimiento del dibujo 1 al movimiento del dibujo 2? 3. Compara la figura inicial y final del dibujo 3 ¿En qué se diferencian? 4. Compara la figura inicial y final del dibujo 4 ¿En qué se diferencian? 5. ¿En qué se diferencian los movimientos de las figuras de la TAREA 1A y de la TAREA 1B?
Proceso Hipotético de Aprendizaje	Tareas Nivel Referencial
TAREA 2A El estudiante reconoce la conservación del tamaño y la forma. Cuando la figura inicial se desliza para obtener la	TAREA 2A En cada dibujo, desliza la figura inicial para superponerla con su correspondiente figura final, de tal manera que

figura final, el estudiante compara el tamaño de las figuras, a través de la superposición de todos los puntos de la figura inicial en la figura final. A partir de la comparación se puede inferir que, si la figura inicial se puede superponer sobre la figura final, sin modificar ninguna de las dos figuras, se conserva el tamaño y la forma de la figura inicial en la figura final.	todos sus puntos coinciden, sin modificar ninguna de las dos figuras, luego, contesta las preguntas: 1. ¿En qué dibujos la figura final conserva el tamaño y la forma de la figura inicial? 2. Cuando la figura inicial coincide, en todos sus puntos, con la figura final ¿la figura inicial se deslizó en línea recta? 3. Para que la figura final sea un deslizamiento en línea recta de la figura inicial, ¿es necesario que la figura inicial y la figura final tengan el mismo tamaño? 4. ¿En qué dibujos la figura final no es un deslizamiento en línea recta de la figura inicial? ¿Por qué?
TAREA 2B El estudiante observa el deslizamiento de la figura inicial y el rastro que dejan los vértices de la figura inicial al ser deslizada hasta la figura final, identifica el segmento que va desde el vértice de la figura inicial al correspondiente vértice de la figura final. Luego, el estudiante observa la distancia que hay desde los vértices correspondientes de la figura inicial a la figura final, de esta manera identifican el segmento y la trayectoria de los vértices durante su deslizamiento. A partir de lo anterior, identifican que el segmento que le corresponde a cada traslación es aquel que conserva la medida del segmento que une los puntos correspondientes de la figura inicial y figura final. El estudiante, para cada pareja de figuras, mueven los segmentos para comprobar cuál de ellos corresponde a la distancia desde el vértice de la figura inicial hasta el correspondiente vértice de la figura final, infieren cual es segmento que mide la cantidad que se movió la figura.	TAREA 2B Dadas varias parejas de figuras, que están relacionadas por medio de un deslizamiento sobre una línea recta, determina la longitud del movimiento. Activa la casilla “INICIAR” y observa los puntos de la figura inicial hasta la figura final. Selecciona el segmento que corresponde a la longitud del deslizamiento. Mueve el punto rojo para mover cada segmento y comprueba la medida. Contesta las preguntas: 1. ¿Qué tuviste en cuenta al momento de seleccionar el segmento que le corresponde a cada deslizamiento? 2. ¿Podrías decir cuántas unidades se movió cada figura inicial hasta llegar a la figura final?
TAREA 2C El estudiante observa el movimiento de la figura inicial en cada dibujo, comparan la orientación de la figura final y la figura inicial, luego reconocen que las figuras relacionadas mediante un deslizamiento sobre una línea recta conservan la orientación, es decir, que la figura final queda mirando hacia el mismo lado que la figura inicial. El estudiante observa el movimiento de la figura inicial hasta la figura final, luego desliza la figura inicial hacia la figura final para superponer los puntos de la figura inicial en la figura final. El estudiante infiere que cuando los puntos de la figura inicial coinciden con los puntos correspondientes de la figura final, la figura final conserva la orientación de la figura inicial, o sea, ambas figuras están orientadas hacia el mismo lado. Al observar y comparar la trayectoria de cada movimiento, el estudiante determina que las parejas de figuras que cambian su orientación al deslizarse sobre el plano no son deslizamientos en línea recta, por ejemplo,	TAREA 2C Dadas varias parejas de figuras identifica aquellas que después del movimiento, la figura final conserva la misma orientación que la figura inicial. Activa el botón “INICIAR” para observar el movimiento de la figura inicial hasta la figura final. Luego desliza la figura inicial hasta la figura final. Contesta las preguntas: 1. ¿En qué dibujos la figura final y la figura inicial conservan la orientación, es decir “miran hacia el mismo lado” después del movimiento? 2. ¿En qué dibujos los puntos de la figura inicial coinciden con los puntos correspondientes de la final? 3. ¿Qué sucede en el dibujo donde la figura inicial y la figura final no tienen la misma orientación? ¿Es un deslizamiento en línea recta?

en el dibujo 2, la figura se mueve sobre una trayecto circular y su orientación es diferente.	
TAREA 2D El estudiante observa el movimiento en cada dibujo para reconocer la inclinación que determina el movimiento. El estudiante observa la inclinación de cada movimiento y ubica la recta correspondiente a cada dibujo, a través de la comparación de la inclinación de la figura inicial y la figura final, identifican los dibujos en los que la inclinación de figura final no corresponde con la inclinación de la figura final. El estudiante infiere que, en las figuras relacionadas mediante un deslizamiento sobre una línea recta, se conservan la inclinación de las figuras, es decir, la figura inicial se encuentra sobre la misma recta que la figura final. El estudiante identifica los dibujos en los que la figura final no está sobre la misma recta que la figura inicial. Por ejemplo, el estudiante observa que en el dibujo 2 la figura final no está sobre la misma recta que la figura inicial. A través de esto reconocen que esas situaciones, no corresponden a deslizamientos sobre la misma línea recta.	TAREA 2D Activa el botón “INICIAR” para observar el movimiento de la figura inicial hasta la figura final. Compara la inclinación de la figura inicial con la figura final. 1. Mueve la semirrecta para identificar la inclinación en la que se mueven las figuras. 2. ¿En qué dibujos la figura inicial y la figura final se encuentran sobre la misma recta? 3. Cuando la figura inicial y la figura final se encuentran sobre la misma recta ¿los vértices coinciden? 4. ¿Por qué los vértices de la figura final y la figura inicial no coinciden del dibujo 2?
Proceso Hipotético de Aprendizaje	Tareas Nivel General
TAREA 3A El estudiante reconoce y verifica, a través del deslizamiento de la figura inicial, la conservación de la inclinación, el tamaño y la forma de la figura trasladada, reconocen que las parejas de figuras donde la figura inicial corresponden a una traslación de la figura inicial son aquellas en las que la figura inicial se puede superponer en la figura final, haciendo que los puntos correspondientes coincidan. El estudiante observa que las parejas de figuras, como los dibujos 1 y 2, tienen la misma forma y la figura inicial se puede superponer haciendo que coincidan sus puntos correspondientes en la figura final. El estudiante identifica los dibujos que tienen la misma forma, pero la figura inicial no se puede superponer en la figura final de tal forma que sus puntos correspondientes coinciden, al observar estas figuras el estudiante puede inferir que no corresponden porque la figura final está girada y no coinciden en todos sus puntos. El estudiante, observando el deslizamiento de la figura movable, infiere que solamente las figuras que se pueden superponer haciendo que todos sus puntos coincidan, corresponden a traslaciones.	TAREA 3A Mueve el punto rojo para deslizar la figura inicial hasta la figura final. Contesta las preguntas 1. ¿Qué dibujos corresponden a una traslación? Identifica las que sí y las que no. 2. En cada uno de los dibujos las figuras que tienen la misma forma ¿corresponden a una traslación? ¿Por qué? 3. Las figuras que se pueden superponer de tal manera que todos sus puntos coinciden ¿son traslaciones? 4. ¿Por qué en los dibujos 3 y 4 la figura inicial no se puede superponer en la figura final?
TAREA 3B El estudiante determina la longitud de cada deslizamiento comparando la posición de la figura inicial con la posición de la figura final. En primer lugar, a través de la visualización de la figura inicial y del rastro que esta deja al hacer el deslizamiento, el estudiante puede contar la cantidad de unidades que se traslada de	TAREA 3B Dadas las siguientes parejas de figuras identifica la longitud de cada deslizamiento. Activa el botón “INICIAR” para observar el deslizamiento. Contesta las preguntas

la figura inicial hasta la figura final. Luego, determinan la longitud del deslizamiento en el dibujo 4 donde no se muestra el rastro del deslizamiento, esto lo hacen utilizando el segmento que contiene una métrica y se puede variar. Mueven el inicio del segmento hasta un vértice de la figura inicial, luego alargan el segmento hasta que coincida con el vértice correspondiente de la figura final, luego cuentan las unidades de la métrica y determinan la longitud del deslizamiento.	1. En los dibujos 1, 2 y 3 ¿Puedes determinar la longitud de cada deslizamiento? 2. En el dibujo 3 ¿puedes determinar la longitud del deslizamiento? Si es necesario utiliza el segmento rojo que contiene una métrica. 3. ¿Cómo calcular la longitud para cualquier deslizamiento?
TAREA 3C El estudiante determina la orientación del deslizamiento en línea recta a través de la comparación de la posición de la figura final con relación a la figura inicial. El estudiante identifica la figura inicial y cada una de las figuras finales. Luego seleccionan la orientación para trasladar la figura final (derecha-arriba, derecha-abajo, izquierda-arriba, izquierda-abajo), fijada la orientación ingresan datos numéricos en las casillas y observa cómo cambia la figura final teniendo en cuenta los datos asignados, por ejemplo, observan que seleccionar la orientación derecha arriba e ingresan los números 3 y 5 en las casillas correspondientes, la figura final se traslada e unidad des a la derecha y 5 hacia arriba. A través de esta comparación el estudiante infiere que la figura final se traslada dependiendo de la orientación que se asigne en las casillas.	TAREA 3C Dadas las siguientes figuras selecciona la orientación (derecha-arriba, derecha-abajo, izquierda-arriba, izquierda-abajo), luego ingresa un valor (entre 1 y 5) en cada casilla y observa el movimiento de la figura final. Contesta las preguntas 1. ¿Qué sucede con la figura inicial cuando seleccionas la orientación derecha-arriba? 2. ¿Qué significa los números que ingresas en las casillas? 3. Marca la orientación y determina los valores de las casillas para que la figura inicial coincida con la de cada una de las figuras finales. 4. ¿Qué considero importante al momento de seleccionar la orientación para cada una de las figuras?)
TAREA 3D Los estudiantes observan la animación que mide en cada traslación la distancia entre los puntos correspondientes, el estudiante infiere la longitud, es decir, cuántas unidades se desplaza la figura inicial hasta la figura final. El estudiante observa hacia donde mira la figura y lo representa con una flecha que indica la orientación. A través de la animación se muestra la inclinación de la traslación, esta se representa en una recta, el estudiante observa cómo se inclina cada figura e infieren que esta inclinación corresponde a cada recta. Para la construcción del segmento orientado, el estudiante observa la integración de cada uno de los tres elementos mediante una animación e infieren que se pueden unificar en un solo objeto matemático: segmento orientado, dado que este segmento tiene la longitud, la inclinación y la orientación del movimiento.	TAREA 3D Activa cada uno de los botones para observar el deslizamiento, la longitud, la orientación y la inclinación de cada figura. Luego utiliza el deslizador para observar la construcción del segmento orientado. Contesta las preguntas 1. ¿Para qué deslizamientos, la separación entre las figuras tiene la misma longitud? 2. ¿Qué deslizamientos tienen la misma inclinación? 3. ¿Qué deslizamientos tienen la misma orientación? 4. ¿Cómo justificas la unificación de los tres elementos en un segmento orientado? 5. ¿Qué deslizamientos tienen igual longitud, inclinación y orientación? ¿Estos deslizamientos pueden ser representados con el mismo segmento orientado?
TAREA 3E El estudiante determina la longitud, orientación e inclinación del deslizamiento a través de la identificación del segmento orientado. El estudiante observa la traslación en cada dibujo, luego mueven el segmento orientado teniendo en cuenta que, al hacer la comprobación, la figura relacionada con el	TAREA 3E En cada dibujo determina el segmento orientado que corresponde a cada deslizamiento. Observa el movimiento en cada dibujo, luego modifica el segmento orientado (rojo) para que corresponda con el

segmento orientado se superponga con la figura final. Luego, el estudiante infiere que la traslación está determinada por la longitud, la orientación y la inclinación del segmento orientado.	deslizamiento. Puedes utilizar la métrica para determinar la longitud del segmento orientado o la inclinación
TAREA 3F El estudiante realiza la traslación de la figura inicial, utilizando sus conocimientos de la tarea 3A relacionados con el segmento orientado y la indicación del profesor para realizar la traslación: traslada cada uno de los elementos de la figura inicial. El estudiante determina que, para trasladar una figura, se traslada cada punto vértice de la figura inicial, esta traslación se hace determinada por el segmento orientado, el cual contiene la orientación, la inclinación y la longitud del movimiento. Después de trasladar cada vértice de la figura inicial, el estudiante dibuja la figura final uniendo los puntos obtenidos mediante el deslizamiento, luego el estudiante reconoce figura final	TAREA 3F Dada una figura y un segmento orientado, dibuja su correspondiente figura final. Mueve el punto rojo para construir la figura final de la traslación. Contesta las preguntas: 1. ¿La figura inicial y la figura final son iguales? ¿Por qué? 2. ¿La figura final corresponde a una traslación de la figura inicial? 3. ¿Puede realizar la traslación de otra forma? 4. ¿Cómo sabes si la figura final es una traslación de la figura inicial?
Proceso Hipotético de Aprendizaje	Tareas Nivel General
TAREA 4A El estudiante observa la traslación de la figura inicial hasta la figura final, de ahí infieren que los puntos de la figura inicial se mueven siguiendo una trayectoria rectilínea cuando se trasladan hasta la figura final. El estudiante reconoce que la figura inicial y la figura final están relacionadas mediante una traslación, observa que las distancias de los puntos de la figura inicial hasta la figura final son iguales, es decir que la distancia de A hasta A' es igual, a la distancia de B hasta B' y de C hasta C', porque las figuras están relacionadas por medio de una traslación. El estudiante identifica que la figura que se forma al unir los puntos A, A', B y B' es un paralelogramo al establecer la relación que tienen los segmentos AA' y BB'.	TAREA 4A El dibujo muestra la traslación de una figura. La figura final corresponde a la traslación de la figura inicial. Identifica la figura que se forma al unir los puntos correspondientes de la figura inicial y la figura final. Activa el botón de “Ver traslación”. Luego activa el botón “Ver figuras”. 1. Cuando se deslizan los puntos A, B y C pertenecientes a la figura 1 ¿Cuál es la trayectoria que ellos describen? 2. ¿La distancia de A hasta A' es igual a la distancia de B hasta B'? y ¿de C hasta C'? ¿Cómo lo comprobarías? 3. ¿Qué figura se forma al unir los puntos A, A', B y B'?
TAREA 4B El estudiante observa la construcción de diseño geométrico, determinando las figuras que se van obteniendo a través de traslaciones, es decir, figuras que conservan la longitud entre sus puntos, la inclinación y la orientación de la figura inicial.	TAREA 4B Dado un diseño geométrico identifica las figuras que fueron transformadas mediante una traslación. En la siguiente configuración geométrica se presentan diseños obtenidos a través de transformaciones. ¿Cuáles de los siguientes diseños fueron obtenidos por medio de una transformación de traslación?; ¿Cómo justifica su selección? Construye el segmento orientado para cada diseño.

Anexo 2. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Rediseñada

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje: Aprendizaje de la Traslación Geométrica en Grado 6º

Diseño original: Leidy C. Cumbal

Revisión: Daniela B. Torres y Jhonathan S. Muñoz (agosto de 2023)

Recurso Digital: <https://www.geogebra.org/m/qwjxwata>

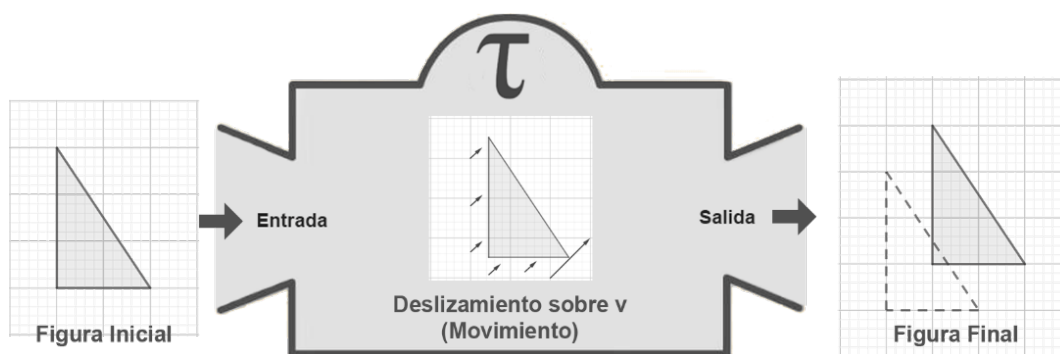
Esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se diseñó para el aprendizaje de la traslación con estudiantes de grado 6º y se desarrolla a partir de un tratamiento eminentemente gráfico. A continuación, se presentan algunos elementos que fundamentaron esta propuesta de aula y que buscan facilitar su comprensión en función de sus propósitos.

Meta de Aprendizaje

Reconoce el resultado de aplicar transformaciones de traslación a figuras bidimensionales en el contexto de diseño de videojuegos.

Conceptualización de la Traslación

Desde la concepción formal matemática se define la transformación isométrica de traslación como una función que le asigna a una figura inicial, una figura final, a partir de un vector como parámetro. Por otro lado, desde la literatura se privilegia la interpretación de la traslación a través del movimiento, por el gran potencial de visualización que ofrece. Así, en esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se adopta la definición formal del fenómeno, pero se estudia a partir del deslizamiento de figuras, haciendo convivir ambas perspectivas. Usando la clásica analogía de la función como una máquina, se podría esquematizar lo anterior de la siguiente manera:



Cabe resaltar que la traslación no es un deslizamiento, pues este no es un elemento propio de la geometría plana. El deslizamiento solo se presenta como recurso didáctico para favorecer la exploración del fenómeno.

Durante el desarrollo de esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, se estudian las siguientes propiedades de la traslación:

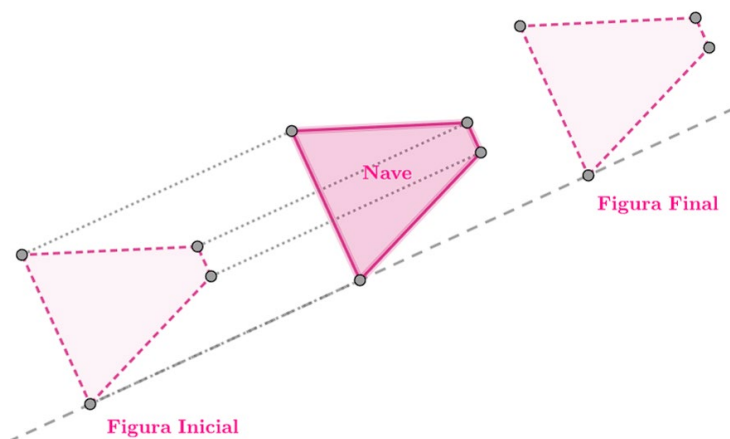
- Una figura y su traslación comparten forma, tamaño y orientación respecto al centroide, es decir, son congruentes con común orientación respecto al centroide.
- Los segmentos que unen los pares de puntos correspondientes de una figura y su traslación tienen la misma longitud e inclinación.
- El rastro que deja el deslizamiento de un punto de una figura al trasladarse describe una trayectoria rectilínea.
- La posición de la figura trasladada está determinada por el vector de traslación. Este se caracteriza con una longitud, inclinación y sentido particulares.
- Los lados correspondientes de una figura rectilínea y su traslación forman paralelogramos.

Para garantizar un uso coherente de los conceptos durante el desarrollo de esta propuesta, es necesario concretar algunos términos que tienen distintos significados dependiendo del contexto donde se usen:

- *Trayectoria*: lugar geométrico que describe el rastro de un punto de la figura al deslizarse.
- *Inclinación*: es la razón entre el desplazamiento vertical y horizontal de una recta. En esta propuesta se interpreta solo como una característica visual de una recta.
- *Orientación respecto al centroide*: característica visual de una figura que describe su posición respecto al centroide. Se usa en el contraste entre una figura y su traslación para determinar si esta se “gira sobre si misma” en un deslizamiento.
- *Sentido*: en la construcción de un vector donde se ha definido un segmento con una inclinación y longitud particular, el sentido determina origen y destino del vector, pudiendo ser del extremo inicial al final del segmento o viceversa.

Representación de la Traslación

En los applets de esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se utiliza una representación particular de la traslación para favorecer su estudio, en la que convergen las concepciones formal y didáctica del fenómeno descritas anteriormente. Esta permite la visualización de: una figura que se desliza en línea recta; los rastros de esa figura en su posición inicial y final, correspondiendo estos a la figura y su traslación; los rastros que dejan los vértices de la figura al deslizarse; y una línea recta que representa la trayectoria del deslizamiento.



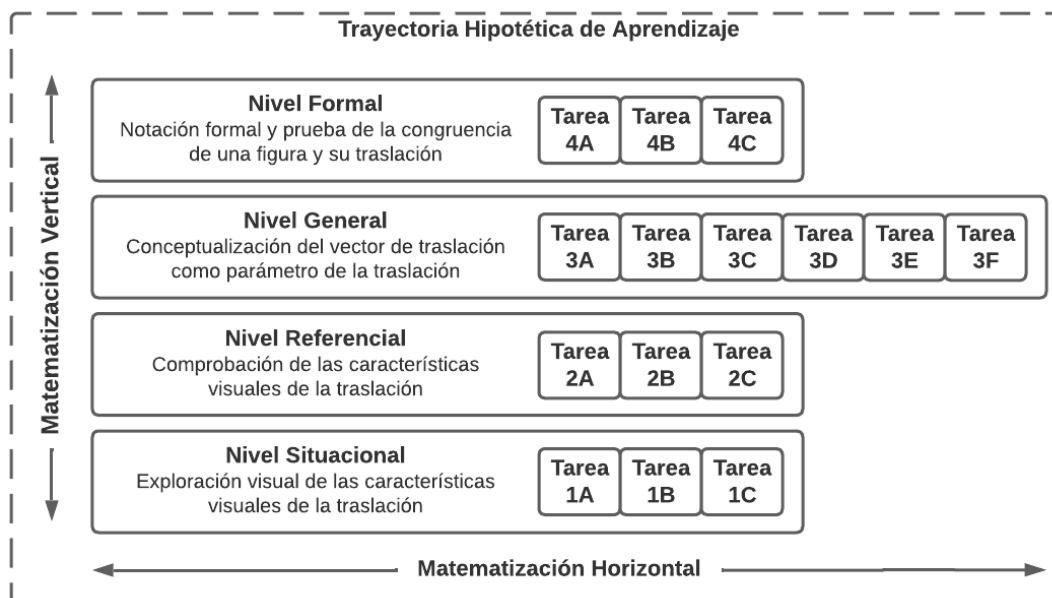
Niveles de Comprensión del Estudiante

Las tareas propuestas en esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se estructuran alrededor del enfoque didáctico de la Educación Matemática Realista y la Heurística de Diseño de los Modelos Emergentes. En esta última se proponen unos niveles que caracterizan el conocimiento matemático del estudiante y giran en torno al proceso de Matematización. Así, las tareas buscan desarrollar el concepto de traslación a partir de un ejercicio que va de la exploración matemática intuitiva a una más sofisticada del fenómeno.

Los Niveles de la Heurística de los Modelos Emergentes se caracterizan desde la teoría de una manera general, pero aquí se presenta una interpretación de estos situada en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en cuestión:

- *Nivel Situacional:* en este nivel se presentan objetos que se mueven siguiendo una trayectoria rectilínea. Aquí, las tareas giran en torno a un ejercicio de visualización, del cual se espera que los estudiantes reconozcan las características visuales de conservación de la forma, tamaño y orientación respecto al centroide de los deslizamientos que se pueden relacionar a la traslación.
- *Nivel Referencial:* en este nivel se introduce la esquematización de la traslación que surge cuando se plantea, de manera implícita, una representación particular de la traslación a través de un deslizamiento rectilíneo. Sobre esta, se retoman las características del nivel situacional donde se propende una comprobación a partir de acciones como la medición de segmentos o la superposición de figuras.
- *Nivel General:* en este nivel se abstraen las características de inclinación, longitud y sentido de la traslación para concretarlas en el objeto vector de traslación. Este se presenta como el parámetro que determina la traslación en su forma más general, explorando su efecto en distintas representaciones y a través de la variación de sus parámetros. A partir de esto, se introduce la construcción de la figura trasladada.
- *Nivel Formal:* en este nivel se introduce una notación formal para referenciar los elementos geométricos de las representaciones. Además, se busca que elaboren un razonamiento, a partir del reconocimiento de paralelogramos y el uso de sus propiedades, para probar la congruencia de una figura y su traslación.

El siguiente gráfico describe la distribución tareas según el Nivel Emergente al que se asocian:



Tareas de Aprendizaje

Para cada tarea se describe: un modelo de progresión, que indica el conocimiento matemático que se busca desarrollar en el estudiante de manera local; la descripción de actividades, que muestra las indicaciones y preguntas que buscan accionar la reflexión matemática del estudiante; el Proceso de Aprendizaje Hipotético, que describe el proceso previsto que seguiría el estudiante para alcanzar el modelo de progresión; un enlace al applet de la tarea; y unas instrucciones de uso, que señala el modo de interactuar con applet.

TAREA 1A

Modelo de Progresión

Identificación y descripción de la trayectoria de distintos objetos en movimiento.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante interactúa con el videojuego y avanza hasta que aparezcan los objetos indicados; observa cómo se mueven mientras juega y describe sus trayectorias mediante gestos físicos, descripciones en lenguaje natural o el uso de representaciones gráficas.

Descripción de Actividades

Explora el videojuego R-Type 3 e intenta avanzar lo suficiente para ver cómo se mueven los siguientes objetos:



Luego, describe la trayectoria del movimiento de cada uno.

Instrucciones

La manera de usar el videojuego está supeditada al medio en que se reproduce. En caso de no disponer de los recursos para esto, se puede utilizar el siguiente video para visualizar los elementos referidos: <https://www.youtube.com/watch?v=dCZ4V-OVAEg>.

TAREA 1B

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/ss3yrycq>)

Modelo de Progresión

Identificación de las características visuales de deslizamientos que corresponden a una traslación:

- La conservación del tamaño, forma y orientación respecto al centroide.
- Los deslizamientos describen una trayectoria rectilínea con una inclinación particular.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante, para cada pareja de figuras que se obtiene por medio de un deslizamiento en línea recta, compara las figuras inicial y final. Con esto, infieren las características visuales de las figuras que, deslizadas siguiendo una trayectoria rectilínea con una inclinación particular, mantienen invariante su forma, tamaño y orientación respecto al centroide. Por lo tanto, llegan a concluir que son congruentes y que las trayectorias de dos deslizamientos en línea recta se pueden diferenciar por su inclinación.

Descripción de Actividades

Las parejas de figuras son ejemplos de deslizamientos en una trayectoria rectilínea. (Ver dibujos en el Applet). Mueve el punto amarillo para observar el deslizamiento de la figura inicial hasta la figura final y responde:

1. ¿Qué sucede con el tamaño y la forma de las figuras inicial y final?
2. ¿Las figuras se giran sobre si mismas?
3. ¿Podrías afirmar que las dos figuras son idénticas? ¿Por qué?
4. ¿Cómo describirías las trayectorias de la figura inicial y final de cada dibujo?
5. ¿En qué se diferencian las trayectorias de cada dibujo?

Applet 1B

<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/ss3vrycq>

Instrucciones

El arrastre del punto amarillo en cada figura la desliza siguiendo una trayectoria rectilínea. Esto también se puede lograr a partir de la animación accionada por el botón “iniciar”.

TAREA 1C

<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/dvhakgdq>

Modelo de Progresión

Identificación de las características visuales de deslizamientos que no corresponden a una traslación.

- Las figuras inicial y final no conservan la forma, tamaño u orientación respecto al centroide.
- La trayectoria que describen no es rectilínea.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante observa parejas de figuras que al deslizarse sobre el plano tienen cambios en su tamaño, forma y orientación respecto al centroide y no tienen una trayectoria rectilínea.

El estudiante determina que algunas parejas de figuras:

- Describen una trayectoria que no es rectilínea, como el movimiento de los dibujos 1 y 2.
- La figura final no “mira” hacia el mismo lado que la figura inicial, como en los dibujos 1 y 4.
- La figura final no tiene el mismo tamaño que la figura inicial, como el dibujo 3.

El estudiante compara el ejemplo de deslizamiento en línea recta que corresponde a una traslación con aquellos que no lo son, infiriendo que, cuando una figura es deslizada siguiendo una trayectoria rectilínea, conserva el tamaño, la forma y la orientación respecto al centroide.

Descripción de Actividades

En los dibujos se muestran parejas de figuras que NO son ejemplos de deslizamientos en una trayectoria rectilínea. Activa la casilla Iniciar para observar el movimiento, describe el movimiento de los objetos en cada dibujo y responde:

1. Compara la figura inicial y final del dibujo 3 ¿En qué se diferencian?
2. Compara la figura inicial y final del dibujo 4 ¿En qué se diferencian?
3. ¿Cuáles son las diferencias entre el movimiento del deslizamiento en línea recta con el resto?

Instrucciones

El arrastre del punto amarillo en cada figura la desliza siguiendo una trayectoria particular. Esto también se puede lograr a partir de la animación accionada por el botón “iniciar”.

TAREA 2A

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/tseut6ge>)

Modelo de Progresión

Interpretación de la representación de una traslación y el deslizamiento en línea recta asociado.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante:

- Observa el movimiento de la nave e identifica que sigue una trayectoria rectilínea.
- Observa cómo se simplifica la nave en un cuadrilátero y comprende la importancia de este proceso para el estudio del fenómeno a partir de la mediación del profesor.
- Identifica los rastros que deja la figura al moverse en su posición inicial y final. Así, intuye una relación transitividad entre las características visuales de estos elementos.
- Identifica los rastros dejados por los vértices y empieza a intuir un patrón visual entre estos (tienen la misma inclinación y longitud).
- Identifica la representación de la trayectoria rectilínea y observa cómo la figura se desliza a través de esta.

Así, configura una manera de interpretar los elementos geométricos de la representación del deslizamiento en línea recta y la traslación asociada.

Descripción de Actividades

Presiona el botón “Animar” para observar el movimiento de la nave y luego:

- Presiona el botón “Simplificar” y observa cómo se simplifica el objeto.
- Presiona el botón “Figura Inicial” para dejar un rastro del objeto en su posición inicial.
- Presiona el botón “Figura Final” para dejar un rastro del objeto en su posición final.
- Presiona el botón “Rastros” y observa el rastro que dejan los vértices del objeto al deslizarse.
- Presiona el botón “Trayectoria” y observa la recta sobre la que se desliza el objeto.

Instrucciones

El uso del applet se detalló en la descripción de actividades.

TAREA 2B

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/wegsj8s>)

Modelo de Progresión

Comprobación de la conservación del tamaño, la forma y la orientación respecto al centroide por superposición de las figuras inicial y final.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante desliza las figuras iniciales con el fin de superponerlas sobre las finales. Observa que, cuando se pueden superponer perfectamente, las figuras coinciden en tamaño, forma y orientación respecto al centroide. Por otro lado, cuando no se superponen perfectamente, hay cambios en el tamaño, forma u orientación respecto al centroide. Así, el estudiante infiere que un método para verificar estas características visuales es el de superponer las figuras inicial y final para comprobar que son idénticas, es decir que son congruentes con común orientación respecto al centroide.

Descripción de Actividades

En cada dibujo, desliza la figura inicial para superponerla con su correspondiente figura final e intenta que todos sus puntos coincidan. Luego, contesta las preguntas:

1. Identifica los dibujos donde se puede superponer la figura inicial y final. ¿Estas son iguales o diferentes? ¿Por qué?
2. Para los dibujos donde la figura inicial y final se pueden superponer ¿Qué sucede con el tamaño, la forma y la orientación de estas figuras?
3. Para los dibujos donde la figura inicial y final NO se pueden superponer ¿Qué tendría que pasar con la figura inicial para que coincidiera con la figura final?

Instrucciones

El botón “Ocultar Naves” simplifica los objetos representados en polígonos. A partir del arrastre de las figuras iniciales, se pueden deslizar para intentar que coincida con la figura final. Debido a la necesidad de

precisión, se pueden utilizar las teclas de dirección del teclado para hacer un movimiento más incisivo.

TAREA 2C

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/wmqbgikb>)

Modelo de Progresión

Comprobación de la igualdad de longitud e inclinación de los segmentos que unen los pares de puntos correspondientes de una figura y su traslación.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante observa el deslizamiento de una figura e intenta seleccionar un segmento adecuado para conectar los vértices correspondientes de la figura y su traslación. Inicialmente, se da cuenta que, en un deslizamiento en línea recta asociado a una traslación, es posible encontrar un único segmento que una todos sus vértices correspondientes. Para seleccionar el segmento adecuado, debe considerar la inclinación y la longitud del segmento. Posteriormente, intentará hacer lo propio con otros deslizamientos, dándose cuenta de que no puede encontrar un mismo segmento que haga lo anterior, ya que estos no corresponden a una traslación, produciendo cambios en la forma, tamaño u orientación respecto al centroide de las figuras. Por lo anterior infiere que, en un deslizamiento en línea recta asociado a una traslación, los segmentos que unen los vértices correspondientes de una figura y su traslación son congruentes.

Descripción de Actividades

Selecciona un segmento adecuado que pueda unir un par de vértices correspondientes de una figura inicial y su figura final y responde:

1. ¿Qué tuviste en cuenta al momento de seleccionar el segmento que le corresponde a cada deslizamiento?
2. Identifica los deslizamientos donde un mismo segmento puede unir todos los vértices correspondientes de las figuras inicial y final.
3. ¿Qué sucede con la figura final cuándo un mismo segmento no puede unir todos sus vértices correspondientes?
4. ¿Cómo son los segmentos que unen los vértices correspondientes de la figura inicial y final en una traslación?

Instrucciones

El botón “Deslizar” despliega una figura auxiliar, congruente a la inicial, que se mueve hasta coincidir con la final; el deslizador verde permite avanzar entre los deslizamientos; los segmentos se pueden arrastrar desde sus puntos verdes, que se anclan a los vértices de la figura inicial.

TAREA 3A

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/nbx3mmp4>)

Modelo de Progresión

El sentido del desplazamiento en un deslizamiento asociado a una traslación.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante observa el segmento de una trayectoria y debe seleccionar un sentido para disparar un proyectil y cumplir el objetivo de la tarea. Durante este proceso infiere que, a un segmento con una inclinación y longitud dadas, se le puede asignar un sentido que determinado por el origen y destino del deslizamiento.

Descripción de Actividades

Utiliza el deslizador para seleccionar un par de baterías; luego elige el sentido del disparo para poder impactar a los objetivos antes de que exploten y responde:

1. ¿Qué tuviste en cuenta para seleccionar la trayectoria del proyectil?
2. Describe la trayectoria usada para impactar a cada objetivo especificando qué par de baterías usaste y de cuál a cuál iba el disparo como en el siguiente ejemplo:

Primer objetivo: $A \rightarrow F$

Instrucciones

El deslizador “Selección de baterías” permite cambiar la inclinación de la trayectoria del disparo; las casillas de sentido permiten seleccionar el sentido del disparo; el sentido se representa en el círculo verde; El botón

“Disparar” acciona el proyectil con el sentido y segmento indicados; El botón “Reiniciar” reinicia el applet.

TAREA 3B

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/thvehtyq>)

Modelo de Progresión

La longitud del desplazamiento en un deslizamiento asociado a una traslación.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante compara la posición de la figura inicial con la posición de la figura final. Para esto utilizan una herramienta de medición que se controla con dos puntos que varían su longitud e inclinación, generando la medida entre ellos. Así, el estudiante usa la herramienta para medir la longitud entre un par de vértices correspondientes de las figuras, determinando la longitud de desplazamiento de la figura deslizada e infiere que esta es una característica cuantificable en una traslación.

Descripción de Actividades

1. Para los dibujos 1 y 2 utiliza la regla para medir la longitud entre un par de vértices correspondientes de las figuras inicial y final. ¿Cuál es la distancia que se desplaza la figura en los dibujos 1 y 2?
2. En el dibujo 3 ¿Cómo determinarías la distancia que se desplaza la figura sin utilizar la regla?

Instrucciones

El botón “mostrar naves” oculta y muestra la representación contextualizada de los objetos. Los botones “Iniciar” muestran la animación de la figura deslizada y el rastro que dejan sus vértices. La regla se puede modificar en inclinación y longitud para medir distancias.

TAREA 3C

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/e3hgyw8k>)

Modelo de Progresión

Comparación de la inclinación, longitud y sentido de distintas traslaciones.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante observa las animaciones que muestran la longitud, inclinación y sentido de varios deslizamientos a partir representaciones auxiliares que abstraen estas características. Esta información le permite hacer comparaciones entre los deslizamientos, infiriendo que la longitud, inclinación y el sentido pueden variar y seguir correspondiendo a traslaciones. Además, infiere que estas características se pueden abstraer de la representación de un deslizamiento.

Descripción de Actividades

Activa cada uno de los botones para observar la trayectoria, longitud, sentido e inclinación de cada deslizamiento y responde:

1. ¿Los deslizamientos presentados corresponden a traslaciones? ¿Por qué?
2. ¿Qué deslizamientos tienen la misma longitud?
3. ¿Qué deslizamientos tienen la misma inclinación?
4. ¿Qué deslizamientos tienen la misma orientación?

Instrucciones

El botón “Deslizamiento” acciona la animación de cada deslizamiento; los otros botones abstraen las características de inclinación, longitud y sentido en representaciones auxiliares. El botón “R” reinicia la matriz.

TAREA 3D

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/pxwzvvmz>)

Modelo de Progresión

Configuración de la inclinación, longitud y sentido en el vector de traslación.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

A partir de la selección de una inclinación, una longitud y un sentido, el estudiante observa cómo se construye un vector con las características dadas, sintetizándolas en un vector. El estudiante observa cómo se traslada la figura a través del vector creado. Luego, modifica los valores de la inclinación, longitud y sentido para observar cómo afecta esto a la posición de la figura trasladada. Así, infiere que un vector se caracteriza a partir de una inclinación, longitud y que este es el parámetro que determina traslación de una figura.

Descripción de Actividades

Selecciona una inclinación, una longitud y un sentido, luego presiona el botón “Crear Vector” para construir un vector con las características que seleccionaste. Después, presiona el botón “Trasladar” para observar cómo se traslada la figura con ese vector.

Modifica los valores de inclinación, longitud y sentido para observar cómo cambia la posición de la figura trasladada.

1. ¿Qué sucede cuando cambias la inclinación?
2. ¿Qué sucede cuando cambias la longitud?
3. ¿Qué sucede cuando cambias el sentido?
4. ¿Cómo describirías la relación que hay entre el vector que construiste y la traslación representada?

Instrucciones

El botón “Crear Vector” solo se activa una vez se han seleccionado los parámetros de inclinación, longitud y sentido. Una vez creado el vector, el botón “Trasladar” traslada la figura a través del vector creado. Los parámetros de inclinación, longitud y sentido pueden ser cambiados posteriormente, redibujándose la figura trasladada en función de estos. El botón “Reiniciar” reinicia el applet.

TAREA 3E

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/kw8tk8rk>)

Modelo de Progresión

Construcción de un vector de traslación para producir una traslación arbitraria.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante observa cómo la variación de los componentes del vector afecta su inclinación, longitud y sentido. Así, trata de construir el vector adecuado para que una figura se traslade a una posición deseada. Así, el estudiante infiere un procedimiento que le permite construir el vector necesario para que una figura se traslade a una posición específica.

Descripción de Actividades

Mueve los deslizadores azul y rojo para observar cómo afecta esto a la inclinación, longitud y sentido del vector. Presiona la tecla “trasladar” para mover la nave y poder recolectar los minerales sin chocarte con los asteroides. Luego, responde:

1. ¿Cómo afectan al vector los cambios que haces en los deslizadores azul y rojo?
2. ¿Cómo le explicarías a alguien la manera la manera que usaste para crear los vectores usados para poder recolectar los minerales?

Instrucciones

Para cambiar el primer componente del vector, se debe activar la casilla azul; para cambiar el segundo componente del vector, se debe activar la casilla roja. El botón “Trasladar” traslada la nave a partir del vector generado. Los botones “Visor Táctico” y “Visor Normal” cambian la representación para observar la situación en contexto y una situación más geométrica del problema. El botón “R” reinicia el applet, volviendo a mostrar todos los minerales que se hubieran recolectado.

TAREA 3F

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/tgmsbvxs>)

Modelo de Progresión

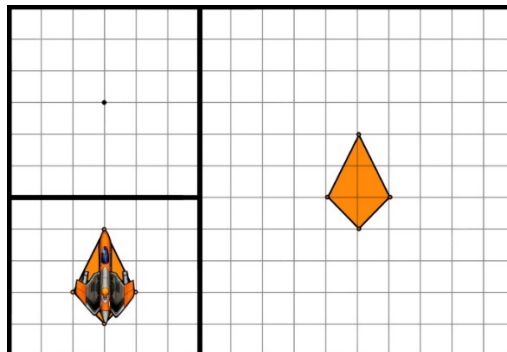
Construcción de la figura trasladada a partir de una figura y un vector.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante empieza por construir un vector arbitrario. Luego, sigue las instrucciones del applet para construir la figura trasladada de una figura inicial. Primero, ubica un vector igual al construido sobre cada vértice de la figura y pinta los vértices correspondientes. Luego, une los vértices para formar la figura trasladada, reconociendo las características visuales de la traslación estudiadas anteriormente. Así, el estudiante se apropia de un procedimiento para la construcción de la traslación de una figura dado un vector de traslación.

Descripción de Actividades

Dibuja un vector en el espacio indicado y utilízalo para trasladar la figura a partir de las indicaciones del applet.



Instrucciones

El botón “>” permite avanzar en la secuencia de instrucciones. El botón “<” permite retroceder en la secuencia de instrucciones.

TAREA 4A

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/pkqqcnzd>)

Modelo de Progresión

Introducción de notación formal para la referenciación de los objetos geométricos en la traslación.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante etiqueta los vértices de una figura y observa su traslación, donde los vértices de esta tienen la misma etiqueta con una comilla. Luego, identifica la relación entre los vértices correspondientes desde la notación.

A partir de la mediación del profesor concreta que la manera general de referirse a un elemento geométrico se estructura como:

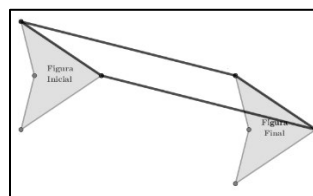
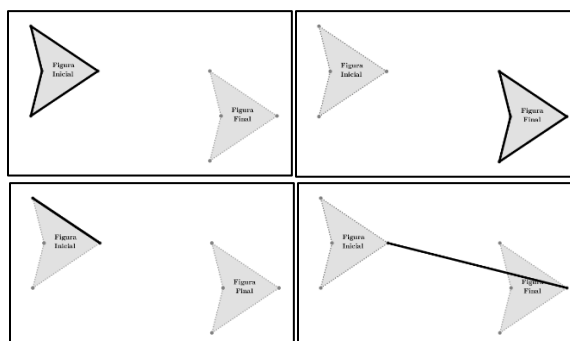
(Tipo de objeto) (Puntos Característicos)

Ejemplo: Polígono ABCD

Así, se apropia de una manera formal de referirse las figuras y segmentos.

Descripción de Actividades

Utiliza letras en mayúscula para nombrar los vértices de la figura y activa la casilla “Ver Traslación” para identificar el nombre de los vértices de la figura trasladada. Utiliza los otros elementos para explorar el dibujo. Luego, indica el nombre formal de los elementos resaltados en cada dibujo con las etiquetas que elegiste.



Instrucciones

Las etiquetas de los vértices deben ingresarse en las casillas indicadas. Las casillas “Ver Traslación” y “Ver Rastros”, muestran dichos elementos. El deslizador rojo resalta los segmentos que unen los pares de vértices correspondientes con el fin de favorecer la visualización.

TAREA 4B (Opcional)

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/hpdxkzpr>)

Modelo de Progresión

Congruencia de los lados opuestos de un paralelogramo.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante identifica las características de inclinación y longitud en los lados opuestos de 3 polígonos; con esta información, determina qué polígono es adecuado para cumplir con el objetivo de la tarea, siendo este un paralelogramo. A partir del contraste entre los lados opuestos de los polígonos, el estudiante infiere que, en un paralelogramo, estos tienen la misma inclinación y longitud.

Descripción de Actividades

Conecta los 3 cables de energía usando el cable con los conectores adecuados para poder disparar antes que te disparen.

1. Utiliza la herramienta roja para comparar los conectores de los 3 tipos de cable. ¿Qué sucede con la longitud e inclinación de los conectores de cada tipo cable?
2. Utiliza los cables adecuados para conectar la energía de la nave.
3. ¿Por qué algunos cables no servían para realizar la conexión?

Instrucciones

El estudiante debe arrastrar los cables con conectores tipo “TI”, “TR” y “PG” con el fin de usarlos para conectar los cables del lado izquierdo. Para esto, puede cambiar la forma de los cables utilizando los puntos verdes de los conectores. La herramienta roja, permite comparar las boquillas de los extremos de un cable en función de su longitud e inclinación. Una vez se presume conectado un cable apropiado, el botón “Conectar” establece dicha conexión. Cada intento de conexión consume una oportunidad del contador; al ser este cero, el enemigo disparará. Una vez conectados todos los cables, se debe pulsar el botón “Disparar” con el fin de impactar primero al enemigo.

TAREA 4C

(<https://www.geogebra.org/m/qwjxwata#material/rnuycdxb>)

Modelo de Progresión

Prueba de la congruencia entre la figura y su traslación a través de los paralelogramos formados por sus lados correspondientes.

Proceso de Aprendizaje Hipotético

El estudiante reconoce los paralelogramos formados por los lados correspondientes de la figura y su traslación. Luego, utiliza la propiedad de que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes para producir un razonamiento que prueba que todos los lados correspondientes la figura y su traslación son congruentes, por lo que las figuras deben ser

Descripción de Actividades

Sabiendo que los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma inclinación y longitud, presiona el botón “Ver Paralelogramos”, observa los paralelogramos del dibujo y responde:

1. ¿El lado CA es igual al lado C'A'? ¿Cómo justificarías tu respuesta?
2. ¿Las figuras ABC y A'B'C' son iguales? ¿Cómo justificarías tu respuesta?
3. ¿Las figuras inicial y final corresponden a una traslación? ¿Cómo justificarías tu respuesta?

congruentes. En consecuencia, reconoce que la figura tiene el mismo tamaño, forma y orientación respecto al centroide de su traslación, por lo que las figuras se pueden relacionar por una transformación de traslación.

Instrucciones

El botón “Ver Paralelogramos” abstrae los paralelogramos formados por los lados correspondientes de una figura y su traslación. El deslizador rojo resalta los paralelogramos abstraídos y los que están propiamente en la representación de la traslación para favorecer la visualización. El botón “R” reinicia el applet.
