

SOBRE LA DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES LIPSCHITZIANAS EN ESPACIOS DE BANACH

Andrés Felipe Muñoz Tello

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali
2019

SOBRE LA DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES LIPSCHITZIANAS EN ESPACIOS DE BANACH

Andrés Felipe Muñoz Tello

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Julio Delgado, Director
Universidad del Valle, Colombia.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali
2019

Resumen

En esta tesis se presentan resultados sobre la derivada de Gâteaux y Fréchet de normas y de funciones localmente Lipschitzianas definidas sobre espacios de Banach, mostrando las propiedades de sus conjuntos de diferenciabilidad. En particular, se hace un estudio de un teorema clásico de Phelps [55], presentando entre otros resultados una extensión de este teorema a espacios no separables. En este documento, los temas a tratar no son sólo de interés en el estudio intrínseco del análisis funcional, estos también se aplican al estudio de ecuaciones de difusión, ecuaciones elípticas en dimensión infinita, control estocástico y los espacios de Sóbolev (cf. [41] y [33]). La extensión del teorema mencionado no será posible en todo espacio de Banach no separable, ya que en el caso de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ la seminorma $\limsup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ no es Gâteaux diferenciable en ningún punto.

En este trabajo se empezará definiendo conceptos y recordando propiedades que hacen parte del marco teórico del Teorema de Phelps. En segundo lugar, se mostrarán los conjuntos de Gâteaux diferenciabilidad de las normas de los espacios separables $c_0(\mathbb{R})$, $\ell^1(\mathbb{R})$ y $L^1(\mathbb{R})$, exhibiendo además sus conjuntos de medida gaussiana nula. También, se obtendrá un resultado similar al descrito para la seminorma en $\ell^\infty(\mathbb{R})$, para las normas de los espacios no separables $NBV[a, b]$, $L^\infty(\mathbb{R})$. Además, se demostrará que para la norma de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de Gâteaux diferenciabilidad es de medida gaussiana cero.

Posteriormente, se demostrarán varios resultados de la Gâteaux diferenciabilidad de las normas definidas en espacios de Hilbert, luego en normas definidas en espacios de Banach y después sobre la relación de funciones localmente Lipschitz con las normas de los espacios de partida de estas funciones. Finalmente, se probarán algunas extensiones del Teorema de Phelps, empezando con funciones de dominio separable y rango sobre los espacios de Asplund; terminando con funciones con dominio no separable, utilizando límites proyectivos y funciones cilíndricas localmente Lipschitz.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Espacios medibles y medidas de probabilidad	5
1.2. Probabilidades cilíndricas	10
1.3. Medidas Gaussianas	15
1.4. Bornologías y derivadas	20
1.5. Espacios de Asplund	26
1.6. Dualidad y la PRN	31
1.7. Filtros y Redes	36
2. La derivada de Gâteaux de normas	41
2.1. En espacios de Banach separables	41
2.2. En espacios de Banach no separables	62
3. G-derivada de funciones localmente Lipschitz	72
3.1. Caso espacios separables y de Hilbert	72
3.2. Caso espacios no separables	75
Conclusiones	80
Bibliografía	81
Índice alfabético	87

Lista de símbolos

$\mathcal{A}$	—	Álgebra de un conjunto.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	—	σ -álgebra de Borel sobre el campo real.
$\mathcal{C}(\Omega)$	—	El espacio de las funciones reales continuas sobre un conjunto Ω .
$c_0(\mathbb{R})$	—	El espacio de las sucesiones reales que convergen a cero.
$\partial_F(a, h)$	—	Derivada de Fréchet de una función f sobre un punto a .
$\partial_G(a, h)$	—	Derivada de Gâteaux de una función f sobre un punto a .
$\partial_H(a, h)$	—	Derivada de Hadamard de una función f sobre un punto a .
$\mathcal{F}$	—	Filtro.
G_δ	—	Conjunto que se puede expresar como intersección numerable de abiertos.
$\mathcal{G}$	—	El conjunto de todos los conjuntos gaussianos nulos de un conjunto medible.
$\ell^p(\mathbb{R})$	—	El espacio de las sucesiones p -sumables definidas en $\mathbb{R}$.
$\ell^\infty(\mathbb{R})$	—	El espacio de las sucesiones reales acotadas.
$L^p(\mathbb{R})$	—	El espacio de las clases de funciones reales p -integrables en el sentido de Lebesgue.
$L^\infty(\Omega)$	—	El espacio de las clases de funciones reales medibles y esencialmente acotadas definidas sobre el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
$NBV([a, b])$	—	El espacio de las funciones reales normales de variación acotada sobre el intervalo $[a, b]$.
p_{st}	—	Función continua de un espacio topológico X_t a otro espacio topológico X_s .
PRN	—	Propiedad de Radon-Nikodým.
$\mathcal{U}$	—	Ultrafiltro.
X_T	—	Límite proyectivo de una familia de espacios topológicos $(X_t)_{t \in T}$.

Introducción

Un teorema fundamental en el estudio de la diferenciabilidad en espacios de Banach es el Teorema de Phelps [55]. En esta tesis se estudian las derivadas de Gâteaux y Fréchet de normas y funciones localmente Lipschitzianas definidas sobre espacios de Banach, mostrando las propiedades de sus conjuntos de diferenciabilidad. El Teorema de Phelps establece que toda función localmente lipschitziana de un espacio de Banach separable a otro con la propiedad de Radon-Nikodým, es Gâteaux derivable fuera de un conjunto gaussiano nulo. Dicho teorema es a su vez una generalización del Teorema de Rademacher [60] de funciones Lipschitz sobre $\mathbb{R}^n$. Una extensión del Teorema de Phelps removiendo la condición de separabilidad no es posible, por ejemplo en el caso de $\ell^\infty(\mathbb{R})$, la seminorma $\limsup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ no es Gâteaux diferenciable en ningún punto. Por lo tanto se considerarán algunos espacios importantes, en los que se pueden demostrar extensiones al Teorema de Phelps. Adicionalmente, se establecen generalizaciones del Teorema de Phelps empleando como espacio de llegada los espacios de Asplund.

En este documento, los temas a tratar no son sólo de interés en el estudio intrínseco del análisis funcional, estos también se aplican al estudio de ecuaciones de difusión, ecuaciones elípticas en dimensión infinita y control estocástico. Particularmente Goldys y Gozzi [41], utilizan el Teorema de Phelps para el estudio de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman relacionada a el control óptimo de una ecuación semilineal estocástica sobre un espacio de Hilbert H . Por otro lado, este teorema es de utilidad en geometría en espacios de Banach, sobre funciones convexas y sobre los espacios de Sóbolev, como aparece en el Capítulo 5 del libro de Evans [33]. El Teorema de Phelps además, sirvió de punto de partida y guía en el estudio de nuevos métodos variacionales aplicados a la Fréchet diferenciabilidad de funciones localmente Lipschitz como lo plantea Lindens-
trauss et al. en [48]. Más aún, el estudio de la diferenciabilidad de normas en espacios de Banach, en particular de normas admisibles como lo hecho en Restrepo [62], ha tenido repercusión en la investigación de sistemas elípticos cuasilineales de segundo orden con

condiciones de frontera no lineales; como lo muestran Shi y Wang [68].

Utilizando como referencias los libros de Wussing [76], Dieudonne [27] y Pietsch [57], a continuación, se describe el desarrollo del estado del arte para esta tesis.

En 1887, Volterra en [75] presenta la primera versión de la diferencial, sustentada en métodos del cálculo de variaciones, comenzando con el análisis en espacios de dimensión infinita. Hadamard en 1899 hace una crítica encontrando algunos casos en los cuales la derivada de Volterra tiene fallas y les plantea a sus alumnos Fréchet y Gâteaux el problema de hacer depender la existencia de la derivada a la existencia de una función lineal que dependa del incremento. En 1913, Gâteaux introduce la definición de diferenciabilidad de una función con rango en $\mathbb{R}$ la cual es adecuada sobre cualquier espacio vectorial, así, la diferenciabilidad de Gâteaux en un punto es equivalente a la diferenciabilidad sobre todas las líneas que pasen por el punto. En 1925, Fréchet incluye la linealidad generalizando la definición de Gâteaux sobre espacios vectoriales normados, resolviendo de paso el problema de la diferenciación de la composición de funciones, definiendo la derivada de una función f definida sobre espacios normados. Entre los años 1938 y 1964, Fréchet y Michal trabajando de manera paralela, logran generar una nueva definición de derivada entre espacios vectoriales topológicos arbitrarios, la cual extiende una vieja idea del Hadamard y al mismo tiempo cumple con el propósito de Michal de generalizar el cálculo diferencial en el sentido intuitivo de aproximación requerido en las aplicaciones de la Física, por ejemplo, caracterizar las vibraciones de un medio continuo a través de ecuaciones con derivadas parciales de segundo orden en relación con el tiempo.

Por otra parte, a fines del siglo XIX y a principio del XX, aparecen grandes aportes al análisis funcional y a la teoría de medida por distinguidos matemáticos tales como Banach, Hilbert, Borel y Lebesgue. Estos aportes fueron retomados por quienes contribuyeron enormemente al surgimiento y al desarrollo de la teoría de probabilidad en espacios abstractos, teniendo sus primeros impulsos en los trabajos de Kolmogórov (1933), en el que establece las bases modernas de la teoría axiomática de la probabilidad, Fréchet (1948) y posteriormente Mourier (1953). Por esa época, la consideración de los procesos estocásticos como elementos aleatorios en un espacio de funciones, es decir una variable aleatoria a valores en un espacio funcional realizada por Doob(1947), Mann(1951), Prohorov(1956) y la escuela rusa en general, ha inspirado entre otras cosas el estudio de los teoremas límites para elementos aleatorios abstractos. Lo cual fue acompañado por lo hecho por Wiener (1926), quien hizo una construcción matemática

rigurosa del modelo de Albert Einstein del movimiento browniano e Itô (1944), quien desarrolló el cálculo y análisis estocástico.

Finalmente, con relación a las funciones Lipschitzianas en $\mathbb{R}^n$, de manera casi simultánea al trabajo de Hadamard y sus estudiantes. En 1919, Rademacher [60] prueba que toda aplicación Lipschitziana definida sobre un conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}^m$ con imagen en $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en casi todas partes. En 1933, Mazur [50] extiende el resultado de Rademacher, en el sentido de los conjuntos densos. En 1968, Asplund [3] extendió el Teorema de Mazur, sobre la diferenciabilidad automática de las funciones convexas en espacios separables, estudiando una cierta clase de espacios de Banach, ahora llamados espacios de Asplund, en los cuales es cierta una conclusión más fuerte que reemplaza la Gâteaux diferenciabilidad por la Fréchet diferenciabilidad. El trabajo de Asplund, impulsó una intensa actividad investigativa que culminó produciendo resultados de caracterización alternativa de los espacios que llevan su nombre, como los debidos en buena parte a C. Stegall [71]. En 1977, Diestel y Uhl [25], quienes además estudian la Propiedad de Radon-Nikodym (PRN) sobre espacios de Banach, mostrando algunos ejemplos de tales espacios. Todo lo anterior, se complementa en los trabajos de Aronzañ [2] en 1976, Phelps [55] en 1978, Vakhania [73],[74] de 1981- 1987 y Lindenstrauss [47] en 2012, con lo hecho sobre la Fréchet y Gâteaux diferenciabilidad de funciones localmente Lipschitz y el desarrollo de la teoría de distribuciones de probabilidad sobre espacios de Banach. Más recientemente con los trabajos de Bongiorno [10], [11] entre 2013 y 2017, quien incluso excluye la PRN usada en el Teorema de Phelps. Ellos colocan la teoría de la probabilidad y el análisis funcional en el contexto de espacios de Banach de dimensión infinita como parte de un análisis global en proceso de construcción.

El trabajo está distribuido de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se hace una presentación de espacios medibles y medidas de probabilidad (Sección 1.1), para después introducir los conceptos de probabilidades y funciones cilíndricas, límites proyectivos, medidas radonianas, gaussianas y conjunto Gauss nulo (Sección 1.2 y 1.3). Posteriormente se presentan las definiciones y algunas propiedades de las derivadas de Gâteaux, Hadamard y Fréchet enfocando algunos apartes a las funciones Lipschitz y localmente Lipschitz (Sección 1.4). Luego se continúa con las definiciones de espacios de Asplund, la de espacios con la propiedad de Radon-Nikodým (PRN) (Sección 1.5 y 1.6), para terminar con una introducción a Filtros y Redes (Sección 1.7). El Capítulo 2 aborda el problema de la derivada de Gâteaux en normas de espacios de Banach separables y no separables, presentando en el caso separable el Teorema de Phelps (Sección 2.1) y

en el caso no separable mostrando los conjuntos Gâteaux diferenciables y sus propiedades sobre sus espacios de referencia (Sección 2.2). Finalmente en el Capítulo 3, se presentan algunos resultados originales sobre la Gâteaux diferenciabilidad de funciones localmente Lipschitz, una extensión del Teorema de Phelps caso separable a espacios Asplund (Sección 3.1) y se termina con una extensión del Teorema de Phelps en el caso de espacios no separables, para límites proyectivos y funciones cilíndricas localmente Lipschitz con valores en $\mathbb{R}$ (Sección 3.2).

Los resultados fundamentales de este trabajo están constituidos por la parte final de la Sección 2.1, algunos apartes de la Sección 2.2 y la mayor parte del Capítulo 3. Parte de estos se encuentran incluidos en el artículo *Gâteaux differentiability on non-separable Banach spaces* de Muñoz-Tello [51].

Por último, agradezco a todos aquellos que fueron guía y apoyo para la realización y culminación de este documento, en especial a mis directores los profesores Guillermo Restrepo y Julio Delgado quienes me brindaron confianza y herramientas para realizar este proyecto. Doy gracias a mi querida madre, mi hermana, mi novia y amigos quienes con su ayuda y sacrificio me llevaron hasta aquí. Gracias a mi codirector profesor José Raúl Quintero quien me animó a iniciar estudios doctorales. Agradezco a la profesora Doris Hinestroza por su gestión y acompañamiento en la búsqueda y consecución de un nuevo director para este trabajo. Agradezco a los jurados de proyecto y de trabajo de tesis, quienes con sus valiosas observaciones aportaron para el mejoramiento de este documento. Particularmente, agradezco al profesor Miguel Angel Marmolejo por sus detalladas anotaciones, específicamente en relación con el estudio los casos de $L^1(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\Omega)$.

Capítulo 1

Preliminares

El objeto de este capítulo es presentar las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo. Para ello se hace un seguimiento de Shiryaev [67], Bogachev [7],[9], Vakhania [73],[74], Schirotzek [65], Penot [54], entre otros. Con el objetivo particular de poder trabajar con las medidas gaussianas. A continuación, se tratarán los conceptos de espacio medible y de medida en diferentes espacios, caso finito, caso infinito numerable ó no. Todo lo anterior, en términos de la medida de probabilidad.

1.1. Espacios medibles y medidas de probabilidad

Los elementos de teoría de medida que se requieren en esta sección son extraídos de Bauer [4] y Shiryaev [67].

Definición 1.1.1. Sea Ω un conjunto, consideremos las propiedades

- (1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (2) Si $A, B \in \mathcal{A}$ implica $A \cup B \in \mathcal{A}$.
- (3) Si $A \in \mathcal{A}$ implica $A^c \in \mathcal{A}$.
- (4) Si $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ entonces $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$.

Un sistema $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω con las propiedades (1), (2) y (3) es conocido como *álgebra* y si cumple las propiedades (1), (3) y (4) se le denomina *σ -álgebra*.

Observación 1.1.2. Dado un conjunto $\mathcal{E}$. La σ -álgebra más pequeña, en el sentido de la inclusión, que contiene a $\mathcal{E}$, es denominada σ -álgebra generada por $\mathcal{E}$ y se le simboliza por $\sigma(\mathcal{E})$.

Teniendo en cuenta que un espacio medible esta definido por la pareja $(\Omega, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra. A continuación, se tratarán algunos espacios medibles que serán útiles en el desarrollo de este manuscrito.

El espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: En el caso de $\mathbb{R}$, si se define

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad \text{para todo } -\infty \leq a < b < \infty,$$

y se define $\mathcal{A} = \{A : A = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i], \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ forma un álgebra, pero no es una σ -álgebra, ya que $\cup_{i=1}^{\infty} (a, b - \frac{b-a}{i}] = (a, b) \notin \mathcal{A}$.

La σ -álgebra generada por $\mathcal{A}$ ($\sigma(\mathcal{A})$), es también conocida como la σ -álgebra de Borel, la cual se denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. A el espacio medible inducido por la σ -álgebra se le simboliza con la pareja $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde a los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se le llaman conjuntos borelianos y algunos de estos están representados de la siguiente manera:

$$(a, b), \quad [a, b], \quad [a, b), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b],$$

para $a, b \in \mathbb{R}$. Este espacio medible también se puede representar como $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ y puede ser generado a partir de cualquiera de las representaciones anteriores.

El espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$: Dado $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, el producto cartesiano de n -copias de $\mathbb{R}$, al conjunto

$$I := I_1 \times \cdots \times I_n, \quad I_k = (a_k, b_k], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

se le conoce como el rectángulo contenido en $\mathbb{R}^n$ con lado I_k . Si se toma a $\mathcal{J}$ como el conjunto de todos los rectángulos, entonces la σ -álgebra generada por $\mathcal{J}$ ($\sigma(\mathcal{J})$) es llamada la σ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ y se representa como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, la cual es también equivalente al producto directo de n σ -álgebras de Borel en $\mathbb{R}$, es decir

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Más aún, la σ -álgebra generada por los rectángulos $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ y la σ -álgebra generada por el producto de conjuntos borelianos $B = B_1 \times \cdots \times B_n$, donde $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $k = 1 \cdots n$, son equivalentes (ver la demostración en [67]). Además, al espacio medible representado por la pareja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ también se le puede representar como $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

El espacio medible $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$: Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de todas las sucesiones ordenadas de números reales

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad -\infty < x_k < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Sean I_k, B_k, B^k respectivamente los intervalos de la forma $(a_k, b_k]$, subconjuntos borelianos de la k -ésima copia de $\mathbb{R}$ y conjuntos borelianos en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen:

$$\mathcal{J}(I_1 \times \dots \times I_n) = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n\},$$

$$\mathcal{J}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\},$$

$$\mathcal{J}(B^n) = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_1, \dots, x_n) \in B^n\}.$$

Entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $\mathcal{B}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ y $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ son las σ -álgebras generadas respectivamente por las familias conformadas por todas las posibles variaciones de $n \in \mathbb{N}$ en los conjuntos $\mathcal{J}(I_1 \times \dots \times I_n)$, $\mathcal{J}(B_1 \times \dots \times B_n)$ y $\mathcal{J}(B^n)$. Además, dado que

$$\mathcal{J}(B^n) = \mathcal{J}(B^{n+1}), \quad \text{donde } B^{n+1} = B^n \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathcal{J}(B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R}),$$

y

$$\mathcal{J}(I_1 \times \dots \times I_n) = \mathcal{J}(I_1 \times \dots \times I_n \times \mathbb{R})$$

se puede demostrar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (ver la demostración en Billingsley [6]).

El espacio medible $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$: Sea T un subconjunto arbitrario no numerable de $\mathbb{R}$. Si I_k, B_k, B^k son respectivamente los intervalos $(a_k, b_k]$, subconjuntos borelianos de la k -ésima copia de $\mathbb{R}$ y conjuntos borelianos en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(I_1 \times \dots \times I_n) = \{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} \in I_1, \dots, x_{t_n} \in I_n\},$$

$$\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} \in B_1, \dots, x_{t_n} \in B_n\},$$

$$\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(B^n) = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B^n\},$$

donde $\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(I_1 \times \dots \times I_n)$ se interpreta como el conjunto de funciones en $\mathbb{R}^T$ tal que al ser evaluadas en $t_1, \dots, t_n$ toman respectivamente valores sobre los intervalos $I_1, \dots, I_n$ y sobre los valores restantes (una cantidad no numerable) toman valores arbitrarios; de igual manera se interpretan los conjuntos $\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n)$, $\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(B^n)$, teniendo

en cuenta si son producto de borelianos de $\mathbb{R}$ ó si es un boreliano de $\mathbb{R}^n$. A las σ -álgebras generadas respectivamente por las familias conformadas por todas las posibles combinaciones de subconjuntos finitos $\{t_1, \dots, t_n\}$ contenidos en T sobre los conjuntos $\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(I_1 \times \dots \times I_n)$, $\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n)$ y $\mathcal{J}_{t_1, \dots, t_n}(B^n)$ se les denota como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $\mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T)$ y $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T)$ y de esta construcción, se tiene que:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \subseteq \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T) \subseteq \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T).$$

El teorema a continuación, el cual se demuestra en la Sección 2 Capítulo II de [67], muestra la contenencia opuesta, exhibiendo como son los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

Teorema 1.1.3. *Sea T un conjunto no numerable. Entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T) = \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T)$ y para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, existe un conjunto numerable $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de T y un boreliano $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_k})_{k \in \mathbb{N}} \in B\}.$$

A todos los espacios medibles anteriormente descritos se les puede asignar una medida. A continuación, se definen las medidas que se asignarán a cada uno de estos espacios medibles. Para ello, primero se hará la definición de medida de probabilidad.

Definición 1.1.4. Una medida de probabilidad P es una medida definida sobre una σ -álgebra $\mathcal{A}$, que satisface:

- (1) $0 \leq P(A) \leq 1$, $A \in \mathcal{F}$;
- (2) $P(\Omega) = 1$;
- (3) $P(\uplus_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, donde $A_n \in \mathcal{F}$, satisface $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Las siguientes son las medidas de probabilidad definidas para los espacios medibles definidos anteriormente.

Medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$: En los espacios $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, la medida de probabilidad se construye primero para conjuntos elementales, los rectángulos $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n]$, después para el conjunto de figuras $A = \uplus(a_i, b_i]$, donde $(a_i, b_i]$ son rectángulos en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente se utiliza el Teorema de Carathéodory para cualquier conjunto en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. La demostración se puede encontrar en [4], [6] o en [67] y se enunciará así:

Teorema 1.1.5 (de Carathéodory). Sea Ω un conjunto, $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω y $\sigma(\mathcal{A})$ la σ -álgebra generada por $\mathcal{A}$. Si P_0 es una medida σ -aditiva sobre $(\Omega, \mathcal{A})$, entonces existe una única medida P sobre $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ la cual es una extensión de P_0 , es decir que

$$P(A) = P_0(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$: Sea $\mathcal{J}_n(B) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ un cilindro en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con base $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se define la medida de probabilidad sobre estos cilindros en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ como:

$$P(\mathcal{J}_n(B)) = P_n(B), \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots,$$

donde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $P_1, P_2, \dots$ son medidas de probabilidad definidas respectivamente sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, $\dots$, cumpliendo la siguiente *propiedad de consistencia*:

$$P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B),$$

para $n = 1, 2, \dots$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. La existencia y unicidad de esta medida de probabilidad esta garantizada en el siguiente teorema de extensión de medidas.

Teorema 1.1.6 (de Kolmogórov en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$). Dada la sucesión $P_1, P_2, \dots$ de medidas de probabilidad definidas respectivamente sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, $\dots$. Si las anteriores medidas poseen la propiedad de consistencia, entonces existe una única medida de probabilidad P sobre $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ tal que para $n = 1, 2, \dots$, se tiene:

$$P(\mathcal{J}_n(B)) = P_n(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Ver Sección 3 Capítulo II de [67]. □

Medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$: Sean T un subconjunto de los números reales, $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$ un subconjunto finito y no ordenado de T con $n \geq 1$ y P_τ la probabilidad sobre $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$, donde $\mathbb{R}^\tau = \mathbb{R}_{t_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{t_n}$. Entonces se dice que la familia $\{P_\tau\}_{\tau \subseteq T}$ es *consistente* si para todos los conjuntos $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$ y $\sigma = \{s_1, \dots, s_m\}$ tal que para $\sigma \subseteq \tau$, se cumple

$$P_\sigma((x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) : (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in B) = P_\tau((x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) : (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in B),$$

donde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\sigma)$.

En el siguiente teorema, ver demostración en [67] página 167, se muestra la existencia de una única medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$.

Teorema 1.1.7 (de Kolmogórov en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$). Sea $\{P_\tau\}_{\tau \subseteq T}$ una familia consistente de medidas de probabilidad definidas respectivamente sobre $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$. Entonces existe una única medida de probabilidad P sobre $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ tal que

$$P(\mathcal{J}_\tau(B)) = P_\tau(B),$$

para todos los conjuntos no ordenados $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$ de diferentes índices $t_i \in T$. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ y $\mathcal{J}_\tau(B) = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B\}$.

Finalmente, hay que dejar claro que un espacio de medida de probabilidad es una tripla $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde Ω es un conjunto (espacio muestral), $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω (eventos) y P es una medida de probabilidad.

1.2. Probabilidades cilíndricas

En las definiciones y resultados descritos en la sección anterior, se muestra que se pueden definir en distintos espacios conjuntos borelianos y a su vez medidas de probabilidad correspondientes a estos conjuntos. En este sentido se debe dejar claro al lector, que en este trabajo de tesis se hará siempre la distinción entre dos tipos importantes de espacios, los cuales son conocidos como separables y no separables. A continuación se definirán estos espacios, mostrando algunos ejemplos, para luego continuar con otros elementos útiles en el desarrollo de este documento.

Definición 1.2.1. Un espacio topológico X es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplo 1.2.2. Los siguientes son algunos ejemplos de espacios topológicos separables, suponiendo según sea el caso que $\mathbb{K}$ es igual a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$:

- (1) $\mathbb{K}^n$ con n finito.
- (2) Todo espacio topológico numerable.
- (3) Todo espacio de Hilbert con base ortonormal numerable.
- (4) El espacio de sucesiones p -sumables $\ell^p(\mathbb{K})$.
- (5) El espacio de las funciones p -integrables en el sentido de Lebesgue $L^p(\Omega)$, para $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ boreliano y $1 \leq p < \infty$.

- (6) El espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(T)$ sobre un compacto T .

En el caso no separable, estos son algunos ejemplos:

- (1) El espacio de las sucesiones acotadas $\ell^\infty(\mathbb{K})$.
- (2) El espacio $L^\infty(\Omega)$, para $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ boreliano.
- (3) El espacio de las funciones reales normales de variación acotada $NBV[a, b]$.

Observación 1.2.3. La propiedad de separabilidad no se hereda a los subespacios; por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ definimos la base

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) : a < b, c < d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

definiendo la topología de los cuadrados semiabiertos, la cual es separable ya que $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; si se considera la recta diagonal $M = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$; la topología del subespacio no es más que la discreta y M no es separable. Por otro lado, si X es un espacio métrico separable entonces todos sus subespacios también lo son.

Teniendo en cuenta que un espacio topológico X es Hausdorff si todo par de puntos distintos en X tienen entornos disjuntos. Una *medida radoniana* en un espacio Hausdorff X , es una medida boreliana μ que satisface las condiciones siguientes:

- (i) $\mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \supseteq B, G \text{ abierto y } B \text{ boreliano}\}.$
- (ii) $\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq G, K \text{ compacto y } G \text{ abierto}\}.$
- (iii) μ es localmente finita. Es decir, cada $x \in X$ posee una vecindad V tal que $\mu(V) < \infty$.

Observación 1.2.4.

- (1) Una medida μ que cumple las dos primeras condiciones de la definición anterior es conocida como una medida *débilmente regular*.
- (2) Una medida radoniana μ es *fuertemente regular* si

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \text{ compacto y } B \text{ boreliano}\}.$$

- (3) Si μ es una medida radoniana σ -finita, entonces es fuertemente regular.
- (4) En un espacio polaco (un espacio métrico completo y separable), toda medida boreliana finita es radoniana.

Por otro lado, se recuerda que un conjunto no vacío T , es un *conjunto dirigido*, si existe una relación $\preceq$ sobre este, tal que:

- (i) Si $a \in T$, entonces $a \preceq a$,
- (ii) Sean $a, b, c \in T$. Si $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$,
- (iii) Si $a, b \in T$ existe $c \in T$, tal que $a \preceq c$ y $b \preceq c$.

A continuación, se harán las definiciones de los elementos con que se trabajará en esta sección.

Definición 1.2.5. Sean $(T; \preceq)$ un conjunto dirigido y $s, t \in T$

- (1) La familia $(X_t)_{t \in T}$ de espacios topológicos es *proyectiva* si para cada pareja $(s, t) \in T \times T$ con $s \preceq t$ existe una función continua $p_{st} : X_t \rightarrow X_s$ (función conectora) tal que $p_{st} \circ p_{tw} = p_{sw}$ si $s \preceq t \preceq w$.
- (2) El *límite proyectivo* X_T de una familia proyectiva $(X_t)_{t \in T}$ de espacios de topológicos de dimensión finita, es el conjunto de los $x = (x_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} X_t$ tal que existe una función conectora $p_{st}(\cdot)$ que cumple $x_s = p_{st}(x_t)$ para todo $s \preceq t$. En particular, a la función conectora $p_t(\cdot) : X_T \rightarrow X_t$ se le llama *proyección t -ésima*.
- (3) La familia $(\mu_t)_{t \in T}$ de medidas borelianas es *proyectiva*, si para $s \preceq t$ se cumple $p_{st}(\mu_t) = \mu_s$.
- (4) El *límite proyectivo* de una familia proyectiva $(\mu_t)_{t \in T}$ de medidas borelianas, es un elemento maximal del conjunto de las medidas borelianas ν en X_T tal que $p_t(\nu) = \mu_t$, siempre y cuando el límite exista.
- (5) Una *probabilidad cilíndrica* es una familia proyectiva $(\mu_t)_{t \in T}$ de medidas de probabilidad μ_t . Es decir, si $s \preceq t$ entonces $p_{st}(\mu_t) = \mu_s$.
- (6) Dada $(X_t)_{t \in T}$ una familia proyectiva, C_T el conjunto de todas las funciones continuas de X_T en $\mathbb{R}$ y C_t el conjunto de todas las funciones continuas de X_t en $\mathbb{R}$. Una *función* $f \in C_T$ es *cilíndrica* si existen un $t \in T$ y $h \in C_t$ tal que $f = h \circ p_t$.

Observación 1.2.6.

- (1) El límite proyectivo X_T de una familia proyectiva $(X_t)_{t \in T}$ de espacios topológicos, es un espacio topológico dotado de la topología producto cartesiano restringida a X_T .

(2) El límite proyectivo μ de la familia proyectiva $(\mu_t)_{t \in T}$ de medidas borelianas, esta caracterizado por las siguientes condiciones:

- $p_t(\mu) = \mu_t$ para todo $t \in T$.
- si ν es una medida boreliana y $p_t(\nu) = \mu_t$, para todo $t \in T$, entonces $\nu = \mu$.

(3) Si $s \preceq t$ y $f = h \circ p_s$. Entonces $f = h' \circ p_t$, donde $h' = h \circ p_{st}$.

Ejemplo 1.2.7. Si T el conjunto de todos los subespacios de dimensión finita ordenados por inclusión de un espacio vectorial topológico X . Para cada $F \in T$ se denotará por p_F la proyección de X sobre F . Si $F, G \in T$ y $F \subseteq G$ Se denotará por p_{FG} a la proyección ortogonal de G sobre F . Es inmediato que si $F \subseteq G$ entonces $p_F = p_{FG} \circ p_G$. Por tanto $(F)_{F \in T}$ es una familia proyectiva de espacios topológicos llamados *familia proyectiva de los subespacios de dimensión finita*. Ahora, para cada $F \in T$ y cada μ_F una medida boreliana en F , se dirá que una familia $(\mu_F)_{F \in T}$ es proyectiva si para toda $F \subseteq G$ se cumple que $\mu_F = p_{FG}(\mu_G)$. Además, toda medida en $\text{bor}(X)$ genera una familia proyectiva $(\mu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ de medidas borelianas, donde $\mu_F = p_F(\mu)$ y una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es cilíndrica si existen un subespacio de dimensión finita F y una función $f_F : F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = f_F \circ p_F$.

Observación 1.2.8. Dado $F \subset X$ un subespacio de dimensión finita.

- (1) Una función cilíndrica $f = f_F \circ p_F$ es boreliana si y sólo si f_F es boreliana.
- (2) Si X es un espacio de Hilbert, la proyección p_F de X sobre F , se tomará en este caso como una proyección ortogonal.
- (3) Si X es un espacio de Hilbert separable, toda función boreliana es el límite puntual de una sucesión de funciones cilíndricas borelianas.

Los resultados siguientes se encuentran demostrados en Schwartz [72]. Aquí se presentarán estos resultados de una manera mas conveniente al desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.2.9 (Prokhorov). Sean $(X_t)_{t \in T}$ una familia proyectiva de espacios topológicos con funciones conectoras p_{st} y $(\mu_t)_{t \in T}$ una familia proyectiva de medidas de probabilidad. Si X es un espacio topológico tal que existen funciones $p_t : X \rightarrow X_t$ que cumplen $p_s = p_t \circ p_{st}$ si $s \preceq t$. La condición necesaria y suficiente para que exista una medida radoniana μ en X tal que $p_t(\mu) = \mu_t$, es:

Condición (ϵ, K) Para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subseteq X$ tal que para todo $t \in T$

$$\mu_t(p_t(K)) \geq 1 - \epsilon$$

Dados los elementos anteriores, en el caso particular de los espacios de Hilbert se obtiene sin dificultad el siguiente corolario, el cual muestra un par de criterios en los cuales se identifica el tipo de medida que genera una probabilidad cilíndrica.

Corolario 1.2.10. Sean X un espacio de Hilbert, $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$ un espacio de probabilidad, $r > 0$, $B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ y una probabilidad cilíndrica $(\mu_F)_{F \in \mathcal{F}}$. Entonces

- (1) $(\mu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ es generada por una medida probabilística μ en X si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\mu_F(B_r \cap F) \geq 1 - \epsilon \quad \text{para todo } F \in \mathcal{F}.$$

- (2) $(\mu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ es generada por una medida de probabilidad radoniana (respecto a la topología de la norma) μ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\int_L e^{-\alpha \|x\|^2} d\mu_L(x) \geq 1 - \epsilon,$$

para todo subespacio L de dimensión finita.

Del corolario anterior, se puede inferir que existen probabilidades cilíndricas que no son generadas por medidas de probabilidad. El siguiente ejemplo clarifica esto en el caso de los espacios de Hilbert separables.

Ejemplo 1.2.11. En todo espacio de Hilbert separable E de dimensión infinita existen probabilidades cilíndricas que no son generadas por medidas probabilísticas μ de E .

En efecto, si se define $\mu_F = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\langle x, x \rangle} \lambda^n$, $x \in F$, donde F es un subespacio de dimensión n del espacio de Hilbert separable y λ^n es la medida de Lebesgue n -dimensional. Como $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = (2\pi)^{1/2}$ entonces $\mu_F(F) = 1$ y por tanto μ_F es una medida probabilística. Sean L y M subespacios de dimensión finita l y m respectivamente y $L \subseteq M$ entonces $M = L \oplus L_M^\perp$ cuya base es $\{e_1, \dots, e_l, \dots, e_m\}$, donde $e_{l+1}, \dots, e_m$ pertenecen a $L^\perp$. Si $A \in \text{bor}(L)$

$$\begin{aligned} \mu_M(P_{L,M}^{-1}(A)) &= \mu_M(A \times L^\perp) = (2\pi)^{-m/2} \int_M I_{A \times L^\perp} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_m^2)} d\lambda^m(x) \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int_A e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_l^2)} d\lambda^l(x) \int_{L^\perp} e^{-\frac{1}{2}(x_{l+1}^2 + \dots + x_m^2)} d\lambda^{m-l}(x) \\ &= (2\pi)^{-m/2} (2\pi)^{l/2} \mu_L(A) (2\pi)^{(m-l)/2} = \mu_L(A), \end{aligned}$$

luego $(\mu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ es una familia proyectiva. Ahora sea $f(x) = e^{-\epsilon \langle x, x \rangle} < 1$ para todo $\epsilon > 0$ una función μ -integrable. Si $f_n(x) = e^{-\epsilon \langle p_n(x), p_n(x) \rangle}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Si F_n es un subespacio de dimensión n , entonces

$$\begin{aligned} \int_E f_n(x) d\mu_{F_n}(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{F_n} e^{-\frac{1}{2}(1+2\epsilon)\langle x, x \rangle} d\lambda^n(x) \\ &= \frac{(1+2\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{F_n} e^{-\frac{1}{2}\langle y, y \rangle} d\lambda^n(y) = (1+2\epsilon)^{-n/2} \end{aligned}$$

luego $\int_E f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu_{F_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+2\epsilon)^{-n/2} = 0$, lo cual es contradictorio puesto que $f(x) = e^{-\epsilon \langle x, x \rangle} > 0$ implica $\int_E e^{-\epsilon \langle x, x \rangle} d\mu(x) > 0$. Por lo tanto, $(\mu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ no es generado por una medida probabilística μ .

1.3. Medidas Gaussianas

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, de Gauss o gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece aproximada en fenómenos reales. En el caso real, la gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada, es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico y es conocida como campana de Gauss. La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes. En esta sección se tomarán como referentes y guías los libros de Billingsley [6], Bogachev [9] y Vakhania [74].

En $\mathbb{R}^n$ la medida de Lebesgue queda caracterizada salvo una constante multiplicativa, por las siguientes propiedades:

- (i) Toma valores finitos sobre borelianos acotados.
- (ii) Toma valores positivos sobre abiertos no vacíos.
- (iii) Es invariante por traslaciones.

En dimensión infinita no existe una medida con propiedades análogas a éstas. Por ejemplo, en un espacio de Hilbert separable H , si tomamos $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cualquier base ortonormal resulta:

- Para $n \neq m$ $B_{1/2}(e_n) \cap B_{1/2}(e_m) = \emptyset$,
- $B_{1/2}(e_n) \subset B_2(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

y por lo tanto

$$\sum_{n \geq 1} \mu(B_{1/2}(e_n)) = \mu(\cup_{n \geq 1} B_{1/2}(e_n)) \leq \mu(B_2(0)).$$

Si μ es invariante por traslaciones y toma valores finitos sobre borelianos acotados, necesitamos que $\mu(B_{1/2}(e_m)) = 0$ y por lo tanto existen abiertos no vacíos de medida nula. En forma similar, si queremos que los abiertos no vacíos tengan medida positiva, resulta que hay borelianos acotados de medida infinita. Estas dificultades en espacios de dimensión infinita, llevaron a definir otros tipos de medidas y nuevos conjuntos nulos, como lo son particularmente las medidas gaussianas y los conjuntos gaussianos nulos, siendo este par de elementos esenciales para el desarrollo de este documento.

Una medida boreliana en $\mathbb{R}$ es una *medida gaussiana en $\mathbb{R}$* , si tiene una densidad respecto a la medida de Lebesgue de la forma

$$g_{\alpha, \sigma^2}(t) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-(t-\alpha)^2/2\sigma^2},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. La densidad cumple con las propiedades

- (i) $\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha, \sigma^2}(t) dt = 1.$
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} t g_{\alpha, \sigma^2}(t) dt = \alpha.$
- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 g_{\alpha, \sigma^2}(t) dt = \alpha^2 + \sigma^2.$

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medición dotado de una medida probabilística μ y X es una variable aleatoria. La imagen de μ dada por X , denotada por μ_X , se llama *distribución de X en $\mathbb{R}$* con $\mu_X(B) = \mu(X^{-1}(B))$, para todo boreliano $B \in \mathbb{R}$; siendo inmediato que μ_X es una medida probabilística. X es *gaussiana* con parámetros α y σ^2 si su distribución μ_X es gaussiana, es decir $\mu_X = g_{\alpha, \sigma^2} \lambda$; donde

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_X(x) = \alpha$$

y $V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2.$

La función característica de una variable aleatoria X con valores en $\mathbb{R}$ es la transformada de Fourier de su distribución μ_X . Es decir, si se denomina por φ_X a la función característica de X , entonces

$$\varphi_X(t) := \hat{\mu}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} d\mu_X(y).$$

Observación 1.3.1. Dada la anterior definición para todo $t \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes igualdades

$$\varphi_X(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} d\mu_X(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\overline{ity}} d\mu_X(y) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} d\mu_X(y)} = \overline{\varphi_X(t)},$$

es decir, que en el caso real las propiedades y resultados obtenidos para $\varphi_X(t)$ fácilmente se pueden usar en el caso de $\varphi_X(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} d\mu_X(y)$. Más aún, si μ_X tiene una función de densidad f con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, se cumple que

$$\varphi_X(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} f(y) dy = \hat{f}(t),$$

por tanto, la función característica $\varphi_X(-t)$ coincide con la definición de transformada de Fourier de la función f .

Más detalles sobre las nociones anteriores de medidas y variables aleatorias gaussianas en $\mathbb{R}$ y la demostración del siguiente teorema, se pueden encontrar en el libro de Billingsley [6].

Teorema 1.3.2. Una variable aleatoria X es gaussiana si y sólo si para $E(X) = \alpha$ y $V(X) = \sigma^2$, su función característica es de la forma

$$\varphi_X(t) = e^{i\alpha t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Por otro lado, una medida gaussiana μ es *no degenerada*, si posee varianza finita no nula. Es decir, aquellas medidas gaussianas en las cuales la varianza sea nula, se les denomina *medidas gaussianas degeneradas*.

Ejemplo 1.3.3. Puesto que la medida δ_α de Dirac concentrada en un valor α , satisface $\hat{\delta}_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$. Entonces $\sigma = 0$, de lo cual δ_α es una medida gaussiana degenerada.

En el caso de medidas gaussianas en espacios de Hilbert, se hace la siguiente definición.

Definición 1.3.4. Dado E un espacio de Hilbert y μ una medida boreliana

- (1) Se dice que μ es *gaussiana* si μ se distribuye gaussianamente en $\mathbb{R}$ por medio del producto escalar. Es decir, si $x, y \in E$ y f_x es la función $y \rightarrow f_x(y) = \langle x, y \rangle$, entonces $f_x(\mu) = \mu_x$ es una medida gaussiana en $\mathbb{R}$.
- (2) Sea μ una medida gaussiana no degenerada en E . La *transformada de Fourier* de μ se define por $\hat{\mu}(x) = e^{i\langle a, x \rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle}$, donde A es un operador nuclear simétrico, positivo y $a \in E$.

Basandose en Lax [46], en el caso de un espacio de Hilbert separable E . Un operador compacto $A : E \rightarrow E$ es un *operador nuclear* u operador clase traza, si para alguna base ortonormal $\{e_k\}_k$ de E la suma de terminos positivos:

$$\sum_k \langle (A^*A)^{1/2} e_k, e_k \rangle \text{ es finita,}$$

en este caso la suma $\text{Tr} A := \sum_k \langle Ae_k, e_k \rangle$ es absolutamente convergente y es independiente de la elección de la base ortonormal. A es *operador simétrico* si

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \text{para todo } x, y \text{ en el dominio de } A,$$

y A es un *operador positivo* si A es simétrico y

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x \in E.$$

En seguida, se expondrán algunos ejemplos de operador nuclear, los cuales se encuentran en la Sección 30.5 del libro de Lax [46].

Ejemplo 1.3.5.

- (1) Todo operador de rango finito es de clase Traza.
- (2) El operador $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$, definido como

$$(Ku)(s) = \int_0^1 k(s, t)u(t)dt \tag{1.1}$$

tal que $\langle Ku, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in L^2[0, 1]$, en donde k es una función real valuada simétrica y continua sobre s y t es un operador nuclear.

- (3) Si k en (1.1) es suave, entonces k es nuclear.

En el teorema siguiente, se hace una relación de estas medidas en espacios de Hilbert separables y las medidas gaussianas en $\mathbb{R}$, la demostración de este resultado aparece en el libro de Vakhania [74].

Teorema 1.3.6. *Sea una medida probabilística μ en un espacio de Hilbert E . Si E es separable y μ es gaussiana. Entonces μ es el producto numerable de medidas gaussianas definidas en $\mathbb{R}$.*

En el contexto de los espacios de Banach, si E es un espacio de Banach y E' es su dual, la medida gaussiana sobre E se define de la siguiente forma.

Definición 1.3.7. Una *medida gaussiana* μ en un espacio de Banach E es una medida probabilística definida sobre los borelianos de E , tal que $x'(\mu)$ es una medida gaussiana en $\mathbb{R}$ para todo $x' \in E'$ no nulo.

La siguiente definición se puede utilizar sobre cualquier espacio de Banach, en particular sobre los $\mathbb{R}^n$ y cualquier espacio de Hilbert separable o no separable.

Definición 1.3.8. Un conjunto boreliano A en un espacio de Banach E es llamado *Gauss nulo* si $\mu(A) = 0$, para toda medida gaussiana no degenerada μ sobre E .

Teniendo en cuenta que un espacio vectorial topológico E es *localmente convexo* sobre un campo $\mathbb{K}$, cuando posee una base de entornos convexos de 0_X . Además, que para toda familia F de funciones de valor real definidas sobre un conjunto E , la σ -álgebra $\mathcal{E}(E, F)$ es aquella generada por la familia de conjuntos de la forma

$$\{x \in E : f(x) < c\}, \text{ donde } f \in F, c \in \mathbb{R}.$$

A continuación, se realizan algunas definiciones generales de medida gaussiana, vectores aleatorios gaussianos y función característica, en los casos de espacios lineales y espacios localmente convexos, generando algunos resultados interesantes. Para más detalles ver Bogachev [9].

Definición 1.3.9.

- (1) Dado E un espacio lineal y F algún espacio lineal de funciones lineales sobre E que separa puntos en E . Una medida de probabilidad μ sobre $\mathcal{E}(E, F)$ es llamada gaussiana si para toda $f \in F$, la medida $\mu \circ f^{-1}$ es gaussiana.
- (2) Dado E un espacio localmente convexo. Una medida de probabilidad μ definida sobre la σ -álgebra $\mathcal{E}(E, E')$, es llamada gaussiana si para toda $f \in E'$, la medida inducida $\mu \circ f^{-1}$ sobre $\mathbb{R}$ es gaussiana.

- (3) Un vector aleatorio es llamado gaussiano, si este induce una medida gaussiana.
- (4) La función característica de una medida μ definida sobre una σ -álgebra $\mathcal{E}(E, E')$ en un espacio localmente convexo E , esta dada por la formula:

$$\hat{\mu} : E' \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(f) = \int_E \exp(if(x))\mu(dx), \quad f \in E'.$$

Observación 1.3.10. Sean E un espacio localmente convexo, $C(E)$ el espacio de todas las funciones reales continuas sobre E , $\mathcal{E}(E) := \mathcal{E}(E, E')$, $\mathcal{B}_0(E) := \mathcal{E}(E, C(E))$ y $\mathcal{B}(E)$ la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de E . Entonces

- (1) $\mathcal{E}(E) \subset \mathcal{B}_0(E) \subset \mathcal{B}(E)$.
- (2) Si E es un espacio de Fréchet separable entonces $\mathcal{E}(E) = \mathcal{B}_0(E) = \mathcal{B}(E)$.

Teorema 1.3.11. Una medida μ sobre un espacio E localmente convexo, es gaussiana si y sólo si su función característica es de la forma

$$\hat{\mu} = \exp \left(iL(f) - \frac{1}{2}B(f, f) \right),$$

donde L es una función lineal sobre E' y B es una función bilineal, simétrica sobre E' , tal que la forma cuadrática $f \rightarrow B(f, f)$ es estrictamente positiva.

1.4. Bornologías y derivadas

En esta sección se abordará el concepto de espacio bornológico. En particular, una bornología induce una estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo. Esto hace que todos los espacios metrizable localmente convexos sean espacios bornológicos, caso particular de los espacios de Banach. En este sentido aplicar las diferentes nociones de derivada que se describen a continuación sobre los espacios bornológicos tiene implicaciones sobre los espacios de Banach generales. El estudio de los espacios bornológicos fue iniciado por Mackey [49] y continuado después por Bourbaki [12] quien introdujo el término “bornología”. La siguiente definición se apoya en lo hecho en el libro de Hogbe-Nlend [42]. Pero primero, es importante recordar que para (X, τ) un espacio vectorial topológico y A un subconjunto no vacío de X , A es un *subconjunto acotado* si y sólo si para toda vecindad U de cero en X respecto a la topología τ , existe un $\lambda > 0$, tal que $A \subset \lambda U$.

Definición 1.4.1. Sean E un espacio vectorial topológico (e.v.t.) y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos acotados de E . Se consideran las siguientes propiedades acerca de $\mathcal{B}$:

- (1) $\mathcal{B}$ cubre a E . Es decir, $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = E$.
- (2) $\mathcal{B}$ es hereditario bajo inclusiones. Es decir, si $S \in \mathcal{B}$ y $A \subseteq S$ entonces $A \in \mathcal{B}$.
- (3) $\mathcal{B}$ es estable bajo uniones finitas. Es decir, si $(S_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{B}$ entonces $\bigcup_{k=1}^n S_k \in \mathcal{B}$.
- (4) $\mathcal{B}$ es estable bajo la operación suma y la multiplicación por escalares. Es decir, si $(S_k)_{1 \leq k \leq n}, S \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\sum_{k=1}^n S_k \in \mathcal{B} \quad y \quad \lambda S \in \mathcal{B}.$$

- (5) $\mathcal{B}$ es estable bajo la formación de cascarones circulares. Es decir, si $S \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda S \in \mathcal{B}.$$

Se dirá que $\mathcal{B}$ es una *bornología* si cumple (1), (2) y (3) y es un *espacio bornológico*, si además cumple (4) y (5).

A continuación, se analizan las nociones de derivada en un e.v.t. ligadas a las bornologías anteriormente mencionadas. Con esto en mente, se harán las siguientes definiciones.

Definición 1.4.2. Sean E y F e.v.t., $\Omega \subseteq E$ abierto y $f : \Omega \rightarrow F$.

- (1) La derivada radial de f en el punto $a \in \Omega$ en la dirección h es el límite

$$\partial_R f(a, h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + th) - f(a)}{t},$$

en caso de que el límite exista. La función f es *radialmente diferenciable* en $a \in \Omega$, si $\partial_R f(a, h)$ existe para todo $h \in E$.

- (2) f es $\mathcal{B}$ -diferenciable en a (diferenciable con respecto a la bornología $\mathcal{B}$ en el punto $a \in \Omega$) si satisface las siguientes condiciones:
 - f es radialmente diferenciable en a y la función $h \rightarrow \partial_R f(a, h)$ de E en F es lineal y continua.

- El límite en (1) es uniforme sobre cada conjunto acotado $B \in \mathcal{B}$. Es decir, para toda vecindad W de 0_F y todo $B \in \mathcal{B}$, existe un $\delta > 0$ talque

$$\frac{f(a + th) - f(a)}{t} - \partial_R f(a, h) \in W,$$

si $0 < t < \delta$ para todo $h \in B$.

Observación 1.4.3.

- (1) La función $h \rightarrow \partial_{\mathcal{B}} f(a)(h) := \partial_R f(a, h)$ en (2), se llama derivada en a de la función f respecto a la bornología $\mathcal{B}$ o simplemente $\mathcal{B}$ -derivada de f en a .
- (2) Las bornologías más usuales son: la de todos los subconjuntos acotados ($\mathcal{B}^*$), la de todos los subconjuntos finitos ($\mathcal{B}_*$) y la de todos los subconjuntos compactos ($\mathcal{H}$).
- (3) Las derivadas de la función f respecto a las bornologías $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}_*$ y $\mathcal{H}$ en su orden, son conocidas como la *derivada de Frechét* ($\partial_F f(a, h)$), la *derivada de Gâteaux* ($\partial_G f(a, h)$) y la *derivada de Hadamard* ($\partial_H f(a, h)$).
- (4) Como $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}^*$. Entonces ser Fréchet derivable (F -derivable) implica la diferenciabilidad de Hadamard (H -derivable). A su vez, la diferenciabilidad de Hadamard implica la diferenciabilidad de Gâteaux (G -derivable).

El próximo diagrama resume lo anterior, para $f : \Omega \rightarrow F$, $a \in \Omega$ y todo $h \in \Omega$:

$$\partial_F f(a, h) \Rightarrow \partial_H f(a, h) \Rightarrow \partial_G f(a, h).$$

Los siguientes son algunos contraejemplos para las implicaciones recíprocas.

Ejemplo 1.4.4.

- (1) La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es G -diferenciable en $a = (0, 0)$, con derivada $\partial_G f(a, h) = 0$ para todo h ; pero no es F -diferenciable en dicho punto (ver Sección 2.3 Penot [54]).

- (2) Sea $g : L^1[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $x \rightarrow g(x) := \int_0^\pi \sin(x(t)) dt$. Esta función es G -diferenciable pero no es F -diferenciable en $x \in L^1[0, 2\pi]$ (ver Gieraltowska y Van Vleck [40]).

Para E, F espacios de Banach y $\Omega \subseteq E$ un abierto. En la siguiente proposición, cuya demostración aparece en Schirotzek [65], se muestran las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las derivadas de Gâteaux, Hadamard y Frechét.

Proposición 1.4.5. *Dado $a \in \Omega$ y la función $f : \Omega \rightarrow F$.*

(1) *f es G -diferenciable en a si y sólo si existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$u(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}, \quad \text{para todo } h \in E.$$

(2) *f es H -diferenciable en a si y sólo si existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$u(h) = \lim_{(t,k) \rightarrow (0^+, h)} \frac{f(a + tk) - f(a)}{t}, \quad \text{para todo } h \in E.$$

(3) *f es F -diferenciable en a si y sólo si existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$f(a + h) - f(a) - u(h) = r(h) \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

En el siguiente ejemplo, se ilustra la utilización de la anterior propiedad de caracterización de derivadas.

Ejemplo 1.4.6.

(1) Una seminorma no nula y continua p en un espacio vectorial topológico no es G -diferenciable en $x = 0$. En efecto, sea h tal que $p(h) \neq 0$. Entonces

$$\partial_+ p(0, h) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p(0 + th) - p(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p(th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|p(h)}{t} = p(h),$$

$$\partial_- p(0, h) := \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{p(0 + th) - p(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{p(th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|p(h)}{t} = -p(h).$$

Luego $\partial_+ p(0, h) \neq \partial_- p(0, h)$.

(2) Dado $t \neq 0$, la función $f : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) := \begin{cases} t^{(1+\frac{1}{s})} & \text{si } x = te_s \\ 0 & \text{si } x \neq te_s, \end{cases}$$

donde $e_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, con 1 en la s -ésima posición, es H -diferenciable. En efecto, para todo $h \in \ell^2(\mathbb{R})$ y $u(h) := \partial_H f(0_{\ell^2(\mathbb{R})}, h)$ se cumple

$$u(h) := \lim_{(t,k) \rightarrow (0,h)} \frac{f(0_{\ell^2(\mathbb{R})} + tk) - f(0_{\ell^2(\mathbb{R})})}{t} = \lim_{(t,k) \rightarrow (0,h)} \frac{f(tk)}{t} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{s}} & \text{si } k = e_s \\ 0 & \text{si } k \neq e_s \end{cases}$$

Luego, $u(h) = 0$ para todo $h \in \ell^2(\mathbb{R})$. Esto muestra que f es H -diferenciable. Más aún

$$\partial_G f(0_{\ell^2(\mathbb{R})}, h) := u(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th) - f(0_{\ell^2(\mathbb{R})})}{t} = 0.$$

A continuación se harán un par de definiciones vitales para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.4.7. Sean (X, α) y (Y, φ) dos espacios normados, $x, y \in X$ y una función $f : X \rightarrow Y$

- (1) Se dice que f es *Lipschitz*, si existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x, y \in X$

$$\varphi(f(x) - f(y)) \leq K\alpha(x - y).$$
- (2) Se dice que f es *localmente Lipschitz* en X , si para todo punto de X existe una vecindad V en donde f cumple la condición Lipschitz.

Observación 1.4.8.

- (1) Si f es Lipschitz, con $K < 1$, entonces f es llamada una contracción.
- (2) f Lipschitz en $X \Rightarrow f$ localmente Lipschitz en $X \Rightarrow f$ uniformemente continua en X .

Ejemplo 1.4.9.

- (1) En el caso real, la función continua $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, no es Lipschitz; sólo es localmente Lipschitz.

En efecto, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tal que $I = [x_0 - r, x_0 + r]$. Si $x_1, x_2 \in I$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |x_2^n - x_1^n| = |x_2 - x_1| \cdot |x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2x_1^{n-1} + x_1^{n-1}| \\ &\leq |x_2 - x_1| \cdot n|x_0 + r|^{n-1}. \end{aligned}$$

Luego $K = n|x_0 + r|^{n-1}$ depende de x_0 y del tamaño del intervalo, lo cual asegura que f sea localmente Lipschitz en todo $\mathbb{R}$. Por otra parte, si se supone que f es Lipschitz sobre $\mathbb{R}$ para 0 y $x \in \mathbb{R}$ existe un $k > 0$ tal que

$$|f(x) - f(0)| \leq K|x - 0| \quad \text{que equivale a} \quad |x^n| \leq k|x|,$$

lo que es una contradicción, mostrando que $f(x) = x^n$ no es Lipschitz para $n > 1$.

- (2) Si (X, α) es un espacio normado, entonces α es Lipschitz.
- (3) Sean (X, α) es un espacio normado, $I = [\alpha(x_0) - r, \alpha(x_0) + r]$, para $x_0 \in X$ y $r > 0$. Analogamente a lo hecho en (1) de este ejemplo, se puede concluir que la función $f(x) = (\alpha(x))^n$ es sólo localmente Lipschitz y no Lipschitz.

Finalmente, se mostrarán algunas relaciones y propiedades bastante conocidas entre las tres nociones de derivada aquí expuestas, las cuales serán de gran utilidad.

Proposición 1.4.10. *Dados E, F y G espacios de Banach, $\Omega \subseteq E$, $\Omega' \subseteq F$ conjuntos abiertos y $f : \Omega \rightarrow F$, $g : \Omega' \rightarrow Z$ funciones tales que $f(\Omega) \subseteq \Omega'$, donde $b = f(a)$. Se cumple:*

- (1) *Si f es G -diferenciable en $a \in \Omega$, y localmente Lipschitziana en $a \in \Omega$, entonces es H -diferenciable y $\partial_H f(a) = \partial_G f(a)$.*
- (2) *Si f es una función continuamente G -diferenciable, entonces f es H -diferenciable.*
- (3) *Si f es H -diferenciable en $a \in \Omega$ y g es H -diferenciable en $b \in \Omega'$. Entonces $g \circ f : \Omega \rightarrow Z$ es H -diferenciable en $a \in \Omega$ y*

$$\partial_H (g \circ f)(a) := \partial_H g(b) \circ \partial_H f(a).$$

- (4) *Si f es F -diferenciable en $a \in \Omega$ y g es F -diferenciable en $b \in \Omega'$. Entonces $g \circ f : \Omega \rightarrow Z$ es F -diferenciable en $a \in \Omega$ y*

$$\partial_F (g \circ f)(a) := \partial_F g(b) \circ \partial_F f(a).$$

Demostración. Para (1) ver Proposición 2.25, para (2) ver Proposición 2.51 y para (3) ver Teorema 2.28, todos resultados del libro de Penot [54]. En el caso de (4) ver Teorema 2.1 en Coleman [17]. $\square$

Observación 1.4.11. Sea E un espacio de Banach, con E' separable. En el caso particular de funciones $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz y G -diferenciables en casi todas partes, Lindenstrauss [48] demuestra que f posee puntos F -diferenciables.

El siguiente ejemplo se propone sin demostración en Schirotzek (ver [65]; p. 44) y muestra que la regla de la cadena no es válida para la G -derivada. Es decir, la bornología más pequeña de las tres expuestas en la que se cumple este teorema es la bornología de los subconjuntos compactos.

Ejemplo 1.4.12. Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función $(x, y) \mapsto g(x, y) := (x, y^3)$ y se define $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

En primer lugar, la función g es F -diferenciable en $\mathbb{R}^2$. En efecto, como $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ entonces

$$\partial_F g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

para $g_1(x, y) = x$ y $g_2(x, y) = y^3$, es decir

$$\partial_F g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Como las derivadas parciales de la función g existen y son continuas en $(0, 0)$. Entonces g es F -diferenciable en $(0, 0)$ y por tanto G -diferenciable en dicho punto.

Observemos ahora que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función G -diferenciable. En efecto, sea $h = (a, b) \neq (0, 0)$, entonces

$$\partial_G f((0, 0), h) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t(a, b))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{ta^3}{b} = 0$$

y si $b = 0$ se obtiene $\partial_G f((0, 0); h) = u(h) = 0$ para todo $h = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, la función $f \circ g$ no es G -diferenciable en el punto $(0, 0)$, ya que para $\varphi(x, y) := f(g(x, y)) = \frac{x^3}{y^3}$, si $y \neq 0$, $c = (0, 0)$ y $h = (a, b) \neq (0, 0)$. Entonces $\varphi(ta, tb) = a^3/b^3$ y

$$\partial_G \varphi((0, 0), h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi((0, 0) + t(a, b)) - \varphi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(ta, tb)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^3}{tb^3},$$

luego el límite no existe. Por tanto, la función φ no es G -diferenciable en dicho punto.

1.5. Espacios de Asplund

Esta sección tratará sobre el concepto de espacio G y F -Asplund. Se mostrarán algunos ejemplos y algunas de las propiedades fundamentales de estos espacios, sin olvidar la relación que estos tienen con los conjuntos de medida nula. En el desarrollo de esta sección se necesitarán de algunas definiciones, la siguiente es una de ellas.

Definición 1.5.1.

- (1) Una función real f definida en un subconjunto convexo C de algún espacio vectorial X , se llama *función convexa* o cóncava hacia arriba, si para cualesquiera dos puntos x, y en C , y cada $t \in [0, 1]$, se cumple que:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- (2) Un conjunto N es *Lebesgue-nulo* (*L-nulos*) en $\mathbb{R}^n$, si $\lambda^n(N) = 0$, donde $\lambda^n(N)$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

A continuación, se mostrará la relación entre las funciones convexas definidas en conjuntos abiertos, los conjuntos Lebesgue-nulos y la F -derivada.

Teorema 1.5.2. *Dado Ω un subconjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.*

- (1) *Si $n = 1$, entonces f es G -diferenciable en el complemento de un subconjunto finito ó numerable.*
- (2) *Si existen todas las derivadas parciales de f en un punto $a \in \Omega$, entonces f es F -diferenciable en a .*
- (3) *f es F -diferenciable en el complemento de un conjunto nulo.*

Demostración. La demostración de (1) y (3) se pueden considerar como casos particulares de la hecho por Rademacher en [60], para (2) ver Proposición 2.52 de Penot [54]. $\square$

Observación 1.5.3. Es importante señalar el caso en el cual Ω sea un subconjunto abierto y convexo de un espacio normado X y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función convexa. En efecto, de un resultado clásico de funciones localmente Lipschitz, tener en cuenta las anteriores condiciones implica la equivalencia entre que f sea localmente Lipschitz sobre Ω y la continuidad de f sobre Ω . Particularmente se puede afirmar en el caso $X = \mathbb{R}^n$, que f es entonces una función localmente Lipschitz.

En el punto (1) del teorema anterior, el conjunto de G -diferenciabilidad de una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, es el complemento de un conjunto B . Como B^c puede ser a lo más numerable, entonces $\overline{B} = \Omega$ y

$$B^c = \bigcup \{x_i\}, \quad \text{donde } \partial_G f(x_i) \text{ no existe,}$$

luego como cada $\{x_i\}$ es un conjunto cerrado y $B = \bigcap (\Omega \setminus \{x_i\})$, con $\Omega \setminus \{x_i\}$ es abierto, B se puede expresar como una intersección numerable de abiertos densa en Ω . En este mismo sentido y con la idea de generalizar de alguna manera lo hecho, en la siguiente definición se introduce el concepto de conjunto G_δ y de espacios F y G -Asplund.

Definición 1.5.4. Dado (X, τ) un espacio topológico.

- (1) Un conjunto es llamado G_δ si se puede expresar como una intersección numerable de abiertos.
- (2) Un *espacio G -Asplund* es un espacio de Banach en el cual toda función convexa y continua definida en un subconjunto abierto y convexo es G -diferenciable en un conjunto denso y G_δ .
- (3) Un *espacio F -Asplund* es un espacio de Banach en el cual toda función convexa y continua definida en un subconjunto abierto y convexo es F -diferenciable sobre un conjunto denso y G_δ .

Observación 1.5.5.

- (1) En otros escritos, a los espacios F -Asplund se les llama espacios de Asplund y a los espacios G -Asplund se les conocen como espacios Asplund débiles.
- (2) No tiene sentido referirse a los espacios de H -Asplund. En efecto toda función convexa y continua con valores en $\mathbb{R}$ definida en un abierto es localmente Lipschitziana. Por otro lado, si para E, F espacios de Banach, $\Omega \subseteq E$ abierto, $f : \Omega \rightarrow F$ localmente Lipschitziana, se tiene que la G -diferenciabilidad de f en $a \in \Omega$ implica la H -diferenciabilidad de f en $a \in \Omega$. Es decir, referirse a H -espacios de Asplund es igual a referirse a espacios G -Asplund.

En las demostraciones de los siguientes teoremas se tiene en cuenta que un espacio de *primera categoría*, es la unión numerable de conjuntos de interior vacío. Un conjunto de *segunda categoría* es aquel que no es de primera categoría y el *Teorema de Baire* el cual dice, que todo espacio métrico completo es de segunda categoría. Estas demostraciones aparecen en el libro de Phelps [56] y el artículo de Asplund [3].

Teorema 1.5.6.

- (1) $\mathbb{R}^n$ es un espacio de F -Asplund.
- (2) (**Mazur**) Todo espacio de Banach separable es un espacio G -Asplund.

Observación 1.5.7.

- (1) El conjunto de todos los espacios F -Asplund esta estrictamente contenido en el conjunto de todos los espacios G -Asplund. En efecto, del teorema anterior $\ell^1(\mathbb{R})$ es un espacio G -Asplund; pero de lo hecho en la página 6 del libro de Deville [23], la norma usual de $\ell^1(\mathbb{R})$ no es F -diferenciable en ningún punto, y por tanto $\ell^1(\mathbb{R})$ no es un espacio F -Asplund.
- (2) $\ell^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach no separable. En efecto, si se supone lo contrario y se define $(\alpha_n = (\alpha_{nk})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ denso en $\ell^\infty(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida así:

$$\beta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha_{n,n}| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |\alpha_{n,n}| > 1/2 \end{cases}$$

tal que $\|\beta - \alpha\| = \limsup_n |\beta_n - \alpha_n| \geq 1/2$, lo que contradice que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea denso. Como la seminorma $\varphi(x) = \limsup |x_n|$ de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ no es G -diferenciable en ningún punto, entonces $\ell^\infty(\mathbb{R})$ no es un espacio G -Asplund, lo que significa que existen espacios de Banach no separables que no son G -Asplund.

Dado $H = \{x \in E : u(x) = r\}$ un hiperplano de un espacio de vectorial E , donde $u \in E^*$ y $r \in \mathbb{R}$. u es una *forma lineal de apoyo* del subconjunto convexo Ω si existe un $x_0 \in \Omega$ tal que $\sup_{x \in \Omega} u(x) = u(x_0)$, donde a x_0 se le llama *punto de apoyo* de la forma lineal u . Un hiperplano H es un *hiperplano de apoyo* de Ω , si $H \cap \Omega \neq \emptyset$ y Ω esta contenido en uno de los semiespacios

$$H^+ = \{x \in E : u(x) \leq r\} \quad \text{ó} \quad H^- = \{x \in E : u(x) \geq r\},$$

donde los puntos de $H \cap \Omega$ se llaman *puntos de apoyo del hiperplano H* .

Observación 1.5.8. Dado H un hiperplano.

- (1) H es cerrado si y sólo si u es continua.
- (2) Si H es no cerrado, entonces H es denso en E .
- (3) $H = \{x \in E : u(x) = r\}$ es de apoyo de Ω si y sólo si u o $-u$ es una forma lineal de apoyo de Ω en x_0 .

Sea Ω un subconjunto convexo, cerrado y con interior no vacío de un espacio vectorial topológico E . Un *punto regular* $x_0 \in fr(\Omega)$ es aquel punto donde existe uno y sólo un hiperplano de apoyo de Ω en x_0 . En caso contrario se conoce a x_0 como *punto singular*. Conociendo lo anterior, se puede entonces hacer la siguiente definición de los siguientes tipos de norma.

Definición 1.5.9. Dado (E, α) un espacio vectorial normado de norma α y $\alpha'(x') = \sup\{|\langle x, x' \rangle| : \alpha(x) \leq 1\}$ la norma de E'

- (1) α es *redonda* si para todo $\{x, y\} \subseteq B_\alpha = \{z \in E : \alpha(z) \leq 1\}$, el segmento abierto (x, y) esta enteramente contenido en el interior de B_α ($(x, y) \subseteq \{z : \alpha(z) < 1\}$).
- (2) Una norma α es *suave* si todo punto de frontera de $\Omega = \{x : \alpha(x) \leq 1\}$ es regular.
- (3) Una norma β en E' es una *norma dual* si existe una norma α en E tal que $\alpha' = \beta$.
- (4) Dos normas α y γ son *equivalentes* ($\alpha \simeq \gamma$) si definen la misma topología, es decir existen $s, t \in \mathbb{R}^+$ tal que $s\alpha \leq \gamma \leq t\alpha$.
- (5) Una norma β en E' es una *norma admisible* si $\beta \simeq \alpha'$.
- (6) Una *G-norma* (*F-norma*) es una norma que es *G-diferenciable* (*F-diferenciable*) en $E - \{0\}$.

Observación 1.5.10. Una norma α en un espacio vectorial E es suave si y sólo si es *G-diferenciable* en todo $x \neq 0$. Es decir, la medida del conjunto donde una norma suave no es *G-diferenciable* es igual a cero.

Utilizando la observación anterior y lo hecho en los libros de Giles [39] y Deville [23], se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 1.5.11.

- (1) Si E es un espacio normado separable entonces existe una norma admisible β tal que β es suave y β' es redonda.
- (2) En todo espacio de Banach separable existen *G-normas admisibles*.

El siguiente teorema continua con las hipótesis de separabilidad; pero en este caso los consecuentes son mas generales, arrojando resultados equivalentes. Las demostraciones del primer punto se encuentra en Phelps [56] y el segundo en Restrepo [62].

Teorema 1.5.12. Dado E un espacio de Banach separable.

(1) E es un espacio F -Asplund si y sólo si su dual E' es separable.

(2) E admite una F -norma admisible si y sólo si E' es separable.

En el caso de que no exista la condición de separabilidad, los siguientes teoremas muestran resultados en una sola vía, sus demostraciones se encuentran Namioka [52] y Phelps [56].

Teorema 1.5.13. *Sea E un espacio de Banach con norma α .*

(1) *Si α es admisible y redonda, entonces E es un espacio G -Asplund.*

(2) *Si α es una F -norma admisible, entonces E es un espacio F -asplund.*

(3) *Si E no es un espacio F -Asplund, entonces existe una norma equivalente a α sobre E la cual no es F -diferenciable en ninguna parte.*

1.6. Dualidad y la PRN

Una *dualidad* entre dos espacios vectoriales (e.v.) E y F sobre $\mathbb{K}$, es una función bilineal $(x, y) \rightarrow b(x, y)$ de $E \times F$ en $\mathbb{K}$, la cual cumple:

(i) Para todo $x \neq 0$ en E existe un $y \in F$ tal que $b(x, y) \neq 0$.

(ii) Para todo $y \neq 0$ en F existe un $x \in E$ tal que $b(x, y) \neq 0$.

Una pareja de e.v. E y F es una *pareja dual* si existe una dualidad b entre ellos denotándose como $\langle E, F \rangle_b$ y $\langle x, y \rangle_b$.

Ejemplo 1.6.1. Las siguientes son parejas duales conocidas:

(1) $\langle \ell^p(\mathbb{K}), \ell^q(\mathbb{K}) \rangle$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$ y dualidad $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$.

(2) $\langle L^p(\mu), L^q(\mu) \rangle$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$ y dualidad $\langle \dot{f}, \dot{g} \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu$.

Si $\langle E, F \rangle$ es una pareja dual de e.v. sobre $\mathbb{K}$. Para cada $y \in F$, la función $p_y(x) = |\langle x, y \rangle|$ es una seminorma en E y la *topología* $\sigma(E, F)$ en E es aquella inducida por la familia de seminormas $\{p_y : y \in F\}$. Similarmente, para todo $x \in E$ la topología $\sigma(F, E)$ en F es aquella inducida por la familia de seminormas $\{q_x(y) = |\langle x, y \rangle| : x \in E\}$. Las colecciones a continuación son respectivamente bases en cero de las topologías $\sigma(E, F)$ y $\sigma(F, E)$

$$V(\epsilon, A) = \bigcap_{y \in A} \{x : |\langle x, y \rangle| < \epsilon\}, \quad A \subseteq F \text{ finito y } \epsilon > 0.$$

$$W(\epsilon, B) = \bigcap_{x \in B} \{y : |\langle x, y \rangle| < \epsilon\}, \quad B \subseteq E \text{ finito y } \epsilon > 0.$$

Una topología τ en E es *compatible con la dualidad* en $\langle E, F \rangle$, si es localmente convexa, hausdorffiana y el dual topológico de (E, τ) es el conjunto $\{u_y : y \in F\}$, donde u_y es lineal en E y $u_y(x) = \langle x, y \rangle$.

Observación 1.6.2. Si $\langle E, F \rangle$ es una pareja dual, entonces la topología $\sigma(E; F)$ es la menor topología vectorial, localmente convexa y hausdorffiana compatible con la dualidad.

Ejemplo 1.6.3.

- (1) La pareja dual $\langle \ell^p(\mathbb{K}), \ell^q(\mathbb{K}) \rangle$ con dual $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$ es compatible con la topología inducida por la norma $\|x\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$ en $\ell^p(\mathbb{K})$.
- (2) $\langle c_0(\mathbb{K}), \ell^1(\mathbb{K}) \rangle$ con dual $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$ es compatible con la topología inducida por la norma $\|x\|_0 = \sup_n |x_n|$ en $c_0(\mathbb{K})$.
- (3) $\langle \ell^1(\mathbb{K}), \ell^\infty(\mathbb{K}) \rangle$ con dual $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$ es compatible con la topología inducida por la norma $\|x\|_1 = \sum_n |x_n|$ en $\ell^1(\mathbb{K})$.

Observación 1.6.4. Si (E, τ) es un e.v.t. localmente convexo hausdorffiano, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ el espacio de las formas lineales continuas en E (dual topológico de E).

- $\langle x, x' \rangle = x'(x)$ es una dualidad, para $x \in E$ y $x' \in E'$.
- $\langle E', E'' \rangle$ es una pareja dual mediante la dualidad $\langle x', x'' \rangle = x''(x')$, para $x' \in E'$ y $x'' \in E''$.

Estas dualidades inducen las topologías debiles $\sigma(E, E')$ en E , $\sigma(E', E)$ en E' inducida por E y $\sigma(E', E'')$ en E' inducida por E'' .

En el siguiente teorema se expone un resultado clásico de la teoría de duales.

Teorema 1.6.5 (Dualidad de Riesz). *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces la función bilineal*

$$\langle f, \alpha \rangle = \int_a^b f(t) d\alpha(t) \quad \text{de } C(I) \times NBV(I) \text{ en } \mathbb{C},$$

es una dualidad compatible con la topología $C(I)$, donde $NBV(I)$ es el espacio vectorial de todas las funciones de variación acotada normales y $C(I)$ el de todas las funciones continuas, ambas sobre I .

Del anterior teorema queda claro que hay que definir lo que significa variación acotada; primero aclarando que una función de variación acotada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, es *normal* si es continua por la izquierda en todo punto. Es decir, si

$$\lim_{y \rightarrow x^-} \alpha(y) = \alpha(x), \quad \text{para todo } x > a.$$

Ahora, dados $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, una partición finita y disjunta $P_n = \{B_k : 1 \leq k \leq n\}$ de $A \in \mathcal{F}$ y $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow E$ una función φ -aditiva. La *variación* de α en $A \in \mathcal{F}$ es el número

$$|\alpha|(A) = \sup_{P_n \subseteq A} \left\{ \sum_{k=1}^n \|\alpha(B_k)\| \right\}$$

y α es de *variación acotada* si $|\alpha| < \infty$. La aplicación $|\alpha| : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ hereda la φ -aditividad ó σ -aditividad de la función α .

Particularmente, si $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ entonces para la función $\alpha : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ y I un intervalo en $\mathbb{R}$, la variación es el número real

$$|\alpha|(I) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| \right\},$$

donde $\{t_k : 0 \leq k \leq n\} \subseteq I$ es la partición finita de puntos que cumplen con la desigualdad $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Por otro lado, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida y E un espacio de Banach. Una función φ -aditiva $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow E$ es μ -continua (o absolutamente continua con respecto a μ) si para $A \in \mathcal{F}$ se cumple que $\mu(A) = 0$ implica $\alpha(A) = 0$.

Observación 1.6.6. Dado que $\|\alpha(A)\| \leq |\alpha|(A)$, $A \in \mathcal{F}$, es claro que si $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow E$ es una función vectorial φ -aditiva (por lo menos) y $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ es una medida, se cumple que α es μ -continua si y sólo si $|\alpha|$ es μ -continua.

El siguiente teorema es un clásico de la teoría de integración y hace uso de las definiciones anteriores. La demostración de este teorema aparece en Bauer [4] o en Shiryaev [67].

Teorema 1.6.7 (Radon-Nikodým caso escalar). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita μ . Si α es una función σ -aditiva y μ -continua con valores en $\mathbb{K}$, entonces existe una función $g \in L^1(\mu, \mathbb{K})$ tal que para todo $A \in \mathcal{F}$*

$$\alpha(A) = \int_A g(\omega) d\mu(\omega).$$

A la función $g \in L^1(\mu, \mathbb{K})$, se le representa como $d\alpha/d\mu$ y se le conoce como densidad de Radon-Nikodým de α con respecto a μ .

Definición 1.6.8. Dado E un espacio de Banach

- (1) E tiene la *propiedad de Radon-Nikodým respecto al espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ con medida finita μ , si toda función σ -aditiva, de variación acotada y μ -continua $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow E$ admite una representación integral de la forma

$$\alpha(A) = \int_A g(\omega) d\mu(\omega),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ y $g \in L^1(\mu, E)$.

- (2) E tiene la propiedad de Radon-Nikodým (*PRN*), si E tiene esta propiedad respecto a cualquier espacio de medida finita $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Ejemplo 1.6.9.

- (1) Todo espacio de Banach de dimensión finita posee la PRN.
 (2) El espacio de Banach c_0 no tiene la PRN.
 (3) El espacio de Banach $\ell^1(\mathbb{K})$ tiene la PRN.

Observación 1.6.10. Dado un espacio de medida finita $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, un μ -átomo es un conjunto $T \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(T) > 0$ y $\mu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset T$. Si una medida μ no atómica es aquella que no posee átomos, entonces para μ no atómica que define al espacio de Banach $E = L^1(\mu)$ la PRN no se satisface.

Sea E un espacio de Banach. Un subconjunto numerable $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ de E es una *base de Schauder*, si para todo $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x = \lim_n \left(\sum_{k=1}^n t_k b_k \right) := \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n b_n$$

Observación 1.6.11.

- (1) Todo espacio de Banach con una base de Schauder es separable.
 (2) El operador $P_n(x) = \sum_{k=1}^n t_k b_k$ de un espacio de Banach E en si mismo, con $P_0(x) = 0$, es un operador lineal y continuo.

(3) Las normas $\|x\|_E$ del espacio de Banach E y la norma

$$\|x\|_b = \sup\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\},$$

inducida por la base de Schauder $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, son equivalentes.

(4) Enflo en 1973 (cf. [32]), muestra que existen espacios de Banach separables sin bases de Schauder.

Teniendo en cuenta lo hecho anteriormente, usando el hecho de que si E' es un espacio de Banach separable implica que E es separable. Si es conocido que la restricción de la topología $\sigma(E', E)$ a la bola unitaria es metrizable si y sólo si E' es separable y que X es un espacio de Banach dual significa que $X = E'$ para algún espacio de Banach E . Entonces es cierta la siguiente proposición (cf. [25], [38], [52]).

Proposición 1.6.12.

- (1) *Todo espacio de Banach dual y separable tiene la PRN.*
- (2) *Todo espacio de Banach reflexivo tiene la PRN.*
- (3) *Si todo subespacio de E tiene la PRN entonces E tiene la PRN.*
- (4) *Si un espacio de Banach tiene la PRN, entonces todo subespacio cerrado también la tiene.*
- (5) *E' tiene la PRN si y sólo si el dual de todo subespacio separable de E es separable.*

Del punto (2) de la anterior proposición, es claro el siguiente resultado.

Corolario 1.6.13. *Todo espacio de Hilbert tiene la PRN.*

En sus trabajos Namioka [52] y Stegall [71], demuestran la siguiente equivalencia que relaciona lo hecho en la sección anterior y ésta.

Teorema 1.6.14. *E es un espacio F -Asplund si y sólo si E' tiene la PRN.*

Finalmente, en los libros de Diestel [25] y Fleming [38], se demuestra este curioso resultado, en donde $L^p(\mu, X)'$ representa el espacio dual del espacio $L^p(\mu, X)$ de funciones p -integrables con respecto a una medida μ y con valores en un espacio de Banach X .

Teorema 1.6.15. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, $1 \leq p < \infty$ y X un espacio de Banach. Entonces $(L^p(\mu, X))' = L^q(\mu, X')$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si y sólo si X' tiene la PRN respecto a μ .*

Ejemplo 1.6.16. Si $1 < p < \infty$ y X es reflexivo entonces X' tiene la PRN, por lo enunciado en (2) de la Proposición 1.6.12 y aplicando el teorema anterior $(L^p(\mu, X))' = L^q(\mu, X')$, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En consecuencia, $L^q(\mu, X')$ es reflexivo para toda medida μ finita, ya que

$$L^q(\mu, X') = L^q(\mu, X''') = L^p(\mu, X)''' = (L^p(\mu, X)')'' = L^q(\mu, X'').$$

1.7. Filtros y Redes

La definición de filtro que se manejará en esta sección, es la dada por Cartan ([15] y [16]). Cabe mencionar que no es la única manera de definir filtros, esto debido a su dualidad con los ideales; por tanto, se puede tener una definición alterna a la siguiente basándose en los ideales.

Definición 1.7.1. Dado un conjunto X no vacío. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X* , es un subconjunto de $\wp(X)$ con las siguientes propiedades:

- (1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- (2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
- (3) Si $F_1 \subset F_2 \subset X$ y $F_1 \in \mathcal{F}$, entonces $F_2 \in \mathcal{F}$.

Tengase en cuenta, que la propiedad (3) implica que $X \in \mathcal{F}$. En seguida, se darán algunos ejemplos importantes de filtro.

Ejemplo 1.7.2. Dado X un conjunto no vacío, A y F subconjuntos no vacíos de X , se tiene:

- (1) $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro sobre X , llamado el filtro trivial.
- (2) $\mathcal{F}_A = \{F \subset X : A \subset F\}$ es llamado filtro principal de A sobre X . En el caso que $A = \{x\}$, $x \in X$, entonces al filtro principal se le denota como $\mathcal{F}_x$.
- (3) Si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{N}(x) = \{F \subset X : F \text{ es vecindad de } x \in X\}$ es un filtro, llamado filtro de vecindades de x .

A continuación se definirán los conceptos de base de filtro y ultrafiltro sobre conjuntos. En particular, se mostrará que en términos de la relación de la inclusión un conjunto es ultrafiltro sobre X , si es un filtro maximal sobre la familia de filtros en X .

Definición 1.7.3. Dado X un conjunto no vacío.

(1) Una $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X es *base de filtro sobre X* si:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

(2) Una familia $\mathcal{U} \subset \wp(X)$ es un *ultrafiltro sobre X* si:

- $\mathcal{U}$ es un filtro sobre X .
- Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Ejemplo 1.7.4.

- (1) Sean X un conjunto no vacío y C un subconjunto de X no vacío. Entonces $\{C\}$ es una base de el filtro que genera. Es decir, la colección de todos los subconjuntos que contienen a C ($\mathcal{F}_C$).
- (2) Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x$ es un ultrafiltro. En efecto, si $\mathcal{F}'$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}'$, y $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ entonces $\{x\} \in \mathcal{F}'$, luego por ser $\mathcal{F}'$ filtro $\{x\} \cap G \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{F}'$, lo que equivale a que $\{x\} \subset G$, nuevamente de la definición de filtro se tiene que $G \in \mathcal{F}_x$ para todo $G \in \mathcal{F}'$. Por tanto $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}'$.

El resultado que se enuncia más adelante es uno de los más importantes en la Teoría de filtros. Este teorema garantiza la existencia de ultrafiltros y para su demostración se utiliza el Lema de Zorn. La versión original de este teorema aparece en el artículo de Tarski, *Une contribution á la théorie de la mesure* en 1930, esta versión y su demostración aparece en la Sección 7 parte 1 de Jech [43].

Teorema 1.7.5. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

En el caso de los espacios topológicos arbitrarios, particularmente en el caso de espacios topológicos no numerables, una de las formas de referirse a la convergencia sobre un espacio topológico arbitrario X es mediante los filtros. Para la siguiente definición se tendrá en cuenta que $\mathcal{N}(x)$ es la familia de todas las vecindades de $x \in X$.

Definición 1.7.6. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$. Entonces se dice que $\mathcal{F}$ converge a x ($\mathcal{F} \rightarrow x$), si para toda vecindad $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$.

Ejemplo 1.7.7. Dado un espacio topológico (X, τ) y $x \in X$, se tiene:

- (1) El filtro $\mathcal{N}(x)$ converge trivialmente a x ($\mathcal{N}(x) \rightarrow x$).
- (2) El filtro principal $\mathcal{F}_x$ converge a x ($\mathcal{F}_x \rightarrow x$).

En el siguiente ejemplo, se observa que la convergencia no es necesariamente única.

Ejemplo 1.7.8. El espacio $X = \{0, 1\}$, con la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ (espacio de Sierpinski). Entonces para el filtro $\mathcal{N}(x)$, se tiene que $\mathcal{N}(x) \rightarrow 0$ y $\mathcal{N}(x) \rightarrow 1$.

Para garantizar la unicidad del punto de convergencia, se necesita un tipo especial de espacios, en el siguiente teorema, que aparece en Ryszard [64], se muestra lo que es necesario.

Teorema 1.7.9. Sean (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es un espacio Hausdorff si y sólo si todo filtro convergente en X converge en un único punto.

Para continuar con el desarrollo de esta sección, se hace necesario recordar los siguientes conceptos:

- (i) Una *red* en un conjunto X , es una función $P : I \rightarrow X$ donde I es un conjunto dirigido.
- (ii) Sean X un espacio topológico, $\{x_i\}_{i \in I}$ una red en X y $x \in X$. La red $\{x_i\}_{i \in I}$ converge a x , si para cada vecindad V de x , existe $i_0 \in I$ tal que para todo $i \geq i_0$, se tiene $x_i \in V$.

Definición 1.7.10. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X , I un conjunto dirigido y $\{x_i\}_{i \in I}$ una red en X .

- (1) Si $B_{i_k} = \{x_i : i \geq i_k\}$, para cada $i_k \in I$ y $B_I = \{B_{i_k} : i_k \in I\}$. Entonces al filtro $\mathcal{F}(B_I)$ se le llama *filtro generado por la red* $\{x_i\}_{i \in I}$.
- (2) La red $P_{\mathcal{F}} : I_{\mathcal{F}} \rightarrow X$, definida por $P_{\mathcal{F}}((x, F)) = x$, para cada $(x, F) \in I_{\mathcal{F}}$, es llamada *red generada por* $\mathcal{F}$.

En el caso de la convergencia de redes o de filtros, también existe una relación, la cual se basa en los resultados anteriores y se ve reflejada en el siguiente teorema, el cual incluso muestra una caracterización de la compacidad de espacios topológicos usando ultrafiltros y se encuentra demostrado en Dugundji [28] y Capítulo 2 del libro de Zelenyuk [78].

Teorema 1.7.11. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X .

- (1) $\mathcal{F}$ converge a x si y sólo si la red generada por $\mathcal{F}$ converge a x .
- (2) La red $\{x_i\}_{i \in I}$ converge a x si y sólo si el filtro generado por $\{x_i\}_{i \in I}$ converge a x .
- (3) X es compacto si y sólo si todo ultrafiltro sobre X converge.

En esta sección, también vale la pena mencionar. Sea $\mathbb{K}$ un campo y $c(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las sucesiones convergentes, para $1 < p < q < \infty$. Entonces se cumple la siguiente relación

$$\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^p(\mathbb{K}) \subset \ell^q(\mathbb{K}) \subset c_0(\mathbb{K}) \subset c(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Si T es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, $\mathcal{C}_0(T)$ se conoce como el subespacio de las funciones de rango $\mathbb{K}$ continuas de soporte compacto, $\mathcal{C}_0(T)$ el conjunto de las funciones continuas de rango $\mathbb{K}$ que se anulan en infinito y dado que $\mathcal{C}(T)$ es el espacio de Banach de todas las funciones continuas en T con valores en $\mathbb{K}$, se cumple

$$\mathcal{C}_0(T) = \mathcal{C}_0(T) = \mathcal{C}(T)$$

Más aún, si μ es una medida finita y $1 < p < q < \infty$, es posible la relación

$$\mathcal{C}([a, b]) \subset L^\infty(\mu)([a, b]) \subset L^q(\mu)([a, b]) \subset L^p(\mu)([a, b]) \subset L^1(\mu)([a, b]).$$

En el caso del espacio $L^\infty(\mathbb{R})$, el dual topológico de este espacio es el espacio $ba(\mu)(\mathbb{R})$ de todas las medidas signadas α finitamente aditivas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ las cuales son absolutamente continuas con respecto a μ , con la norma de la variación total

$$|\alpha|(E) = \sup_{\pi} \left\{ \sum_{A \in \pi} \|\alpha(A)\| \right\}, \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de un conjunto medible E en un número contable de subconjuntos medibles disjuntos. La demostración de este hecho se encuentra en Dunford-Schwartz [30] Teorema IV.8.16, página 296.

Dado que $\beta\mathbb{N}$ es el conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$, con la topología generada por conjuntos de la forma $\{F : U \in F\}$ para U un subconjunto de $\mathbb{N}$ y $C(\beta\mathbb{N})$ es el conjunto de todas las funciones escalares definidas sobre $\beta\mathbb{N}$, de lo hecho en el Capítulo 15 del libro de Carothers [14] o en Zelenyuk [78] Capítulo 2, el espacio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ es isométricamente isomorfo a $C(\beta\mathbb{N})$, por lo tanto el dual de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ es isomorfo a $C'(\beta\mathbb{N})$, conocido como

el espacio de las medidas borelianas fuertemente regulares sobre $\beta\mathbb{N}$.

La tabla a continuación, resume algunos de los resultados importantes de este capítulo, utilizando la norma usual de cada espacio presentado y según sea el caso, se tomará μ una medida finita no atómica, T compacto y metrizable, $\mathcal{M}(T)$ el espacio de todas las medidas fuertemente regulares definidas sobre T , $[a, b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$, $1 \leq p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y al Dual como el dual topológico.

Espacio	Separable	Base de Shauder	PRN	G-Asplund	Dual
$\mathbb{R}^n$	Si	Si	Si	Si	$\mathbb{R}^n$
$c_0(\mathbb{R})$	Si	Si	No	Si	$\ell^1(\mathbb{R})$
$\ell^1(\mathbb{R})$	Si	Si	Si	Si	$\ell^\infty(\mathbb{R})$
$\ell^p(\mathbb{R}), p > 1$	Si	Si	Si	Si	$\ell^q(\mathbb{R})$
$L^1(\mathbb{R})$	Si	Si	No	Si	$L^\infty(\mathbb{R})$
$L^p(\mathbb{R}), p > 1$	Si	Si	Si	Si	$L^q(\mathbb{R})$
$\mathcal{C}([a, b])$	Si	Si	No	Si	$NBV[a, b]$
$\mathcal{C}(T)$	Si	Si	No	Si	$\mathcal{M}(T)$
$\ell^\infty(\mathbb{R})$	No	No	No	No	$C'(\beta\mathbb{N})$
$L^\infty(\mathbb{R})$	No	No	No	No	$ba(\mu)(\mathbb{R})$
$NBV[a, b]$	No	No	No	No	

Capítulo 2

La derivada de Gâteaux de normas

En este capítulo, se tratarán algunos teoremas sobre la G -diferenciabilidad de normas en espacios de Banach separables y no separables, mostrando en que casos los conjuntos donde las normas son G -derivables son también de medida gaussiana nula y demostrando en detalle varios resultados expuestos en [51]. Algunos de estos teoremas son el fruto de diversas discusiones realizadas en los seminarios de Análisis Funcional dirigido por el profesor Guillermo Restrepo Sierra entre los años 2014 y 2016.

2.1. En espacios de Banach separables

Primero, se exhibirán algunos elementos teóricos en los cuales se apoya el posterior desarrollo de esta sección.

En [55], Phelps demuestra que dado un espacio de Banach separable el conjunto $\mathcal{G}$ de todos los conjuntos gaussianos nulos sobre E posee las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{G}$ es cerrado bajo uniones numerables.
2. Si $G \in \mathcal{G}$ y $B \subseteq G$ es boreliano, entonces $B \in \mathcal{G}$.
3. Si $G \in \mathcal{G}$ y $x \in E$, entonces $x + G \in \mathcal{G}$.
4. Si $S : E \rightarrow E$ es un isomorfismo (uno a uno, lineal y continuo), entonces $S(B) \in \mathcal{G}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.
5. Si E es de dimensión finita (isomorfo a $\mathbb{R}^n$) y $B \in E$, entonces $B \in \mathcal{G}$ si y sólo si B es Lebesgue nulo.

También demuestra que ningún conjunto abierto de un espacio de Banach separable es gaussiano nulo, determinando entonces que en estos tipos de espacios el complemento de un conjunto gaussiano nulo es denso. Pero advierte que en el caso de los conjuntos gaussianos nulos, estos no obedecen a la propiedad de la medida de Lebesgue, la cual dice:

"toda familia de conjuntos disjuntos de medida de Lebesgue distinta de cero, es a lo más numerable". El siguiente ejemplo ilustra dicha situación.

Ejemplo 2.1.1. En $\ell^2(\mathbb{K})$, la colección no numerable, disjunta y compacta

$$K_S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K}) : \|x_n - s_n 2^{-n}\| \leq 4^{-n}\}$$

donde $S = \{(s_n)_{n \in \mathbb{N}} : s_n = \pm 1\}$ no posee medida gaussiana nula.

Indicando también que el teorema escrito a continuación no puede ser extendido al caso de la F -diferenciabilidad, ya que la norma en $\ell^1(\mathbb{K})$ es G -diferenciable en un conjunto dado; pero no es F -diferenciable en ningún punto.

Definición 2.1.2. Dado E un espacio de Banach separable, $\{a_n\} \subset E$ una sucesión con $a_n \neq 0$, de elementos los cuales forman una expansión lineal densa en E . $\mathcal{A}_E\{a_n\}$ es la familia de todos los conjuntos borelianos de la forma $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada A_n es un conjunto boreliano con la propiedad para todo $x \in E$

$$A_n \cap (x + \mathbb{R}a_n)$$

tiene medida de Lebesgue cero sobre la línea $\mathbb{R}a_n$. La clase de Aronszajn $\mathcal{A}_E$ esta dada por $\mathcal{A}_E = \cap \mathcal{A}_E\{a_n\}$ para todas las posibles sucesiones $\{a_n\}$.

Particularmente, Aronszajn demuestra que si $S \subseteq E$ es un subespacio finito dimensional tal que S es generado por una sucesión $\{a_n\}$ entonces $\mathcal{A}\{a_n\} = \mathcal{A}(S)$. Además, define la clase $\mathcal{A}_E^0$ utilizando los conjuntos nulos en $\mathbb{R}$, las clases $\widetilde{\mathcal{A}}_E = \cap \widetilde{\mathcal{A}}_E\{a_n\}$, donde

$$\widetilde{\mathcal{A}}_E\{a_n\} = \{A \subset E : A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap (x + \mathbb{R}a_n) \text{ es nulo en } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ sobre } \mathbb{R}a_n \text{ y } x \in E\}$$

y lo hace como la clase mas pequeña no trivial del conjunto de clases $\widetilde{\mathcal{A}}_E\{a_n\}$, mencionando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.3. La clase $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^0$ consiste de todos los subconjuntos contables de $\mathbb{R}$.

Observación 2.1.4.

- (1) El conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero y al no ser contable es un elemento de algún $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}}$; pero no pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^0$.
- (2) El complemento del conjunto de Cantor no es denso en $[0, 1]$ y tiene medida de Lebesgue uno.
- (3) $\widehat{\mathcal{A}}_E^0$ es la clase generada por aquellas sucesiones $\{\widehat{a}_n\}$ equivalentes a las sucesiones $\{a_n\}$. Es decir, cada elemento de $\{\widehat{a}_n\}$ se genera a partir de combinaciones lineales finitas de la sucesión $\{a_n\}$.

Aronszajn, también utiliza el concepto de *antisimetría de un cociente diferencial* sobre f . Es decir, si se cumple para todo $h \in E$ lo siguiente:

$$u(h, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x - th) - f(x)}{-t} = -u(-h, x),$$

lo cual es útil para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.5. *Si E es un espacio de Banach separable, $G \subset E$ y $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Si $u(h, x)$ existe y es continua sobre h para todo $x \in G$, entonces $u(h, x)$ es antisimétrica excepto en $\widehat{\mathcal{A}}_E^0$.*

Por otra parte, Phelps en [2] demuestra que si $A \subseteq E$ es un conjunto boreliano el cual pertenece a la clase de Aronszajn $\mathcal{A}_E$, entonces A es un conjunto gaussiano nulo. Es decir,

$$\mathcal{A}_E \subset \mathcal{G};$$

pero en el año 1999 Marianna Csörnyei, demuestra en su artículo [18] que en realidad se cumple que

$$\mathcal{A}_E = \mathcal{G}.$$

En la demostración del siguiente teorema, para E un espacio de Banach separable y $T : E \rightarrow F$ una función localmente Lipschitz, se utiliza el hecho en el cual por suponer a F con la PRN va existir $\{y_n\} \subset F'$ denso en F' respecto a la topología $\sigma(F', F)$ y se definen funciones $T_n(x) = y_n(T(x))$ de un abierto Ω de E en $\mathbb{R}$ obteniendo

$$\partial_G T_n(x, h) = y_n(\partial_G T(x, h)),$$

concluyendo que $\partial_G T(x, h)$ es antisimétrica si y sólo si $\partial_G T_n(x, h)$ es antisimétrica. Si se toma el hecho de que $\partial_G T_n(x, h)$ es continua sobre h para todo $x \in E$, entonces se

puede utilizar la Proposición 2.1.5, llegando a una conclusión en términos de conjuntos de Aronszajn nulos y por lo mencionado en Csörnyei [18] se puede entonces concluir en gaussianos nulos. Estos elementos sirven para entender el por que Phelps se basa en el trabajo de Aronszajn para generar y demostrar el teorema enunciado a continuación.

Teorema 2.1.6 (Phelps). *Sea E un espacio de Banach real separable, F un espacio de Banach con la PRN y G un abierto no vacío de E . Si $T : G \rightarrow F$ es una aplicación localmente Lipschitz, entonces T es G -diferenciable salvo en un conjunto Gauss nulo.*

Demostración. Ver Phelps [55] y Aronszajn [2]. □

Observación 2.1.7. En el Teorema original de Aronszajn en [2], se define a Y como un espacio con topología débil, Hausdorff y localmente convexa, tal que existe una sucesión v_n densa en Y relativo a la topología elegida en principio.

A continuación, se enunciarán algunos teoremas en donde se muestran los conjuntos de G -diferenciabilidad de normas de ciertos espacios de Banach, además mostrando en algunos casos si estos conjuntos son G_δ . En la demostración del numeral (1) de los dos siguientes teoremas se siguen los lineamientos de Schirotzek [65] y Deville [23]. En el numeral (2) de ambos teoremas y en el numeral (3) del siguiente teorema se realizan demostraciones originales.

Además, es importante resaltar que en todos los teoremas que se demostrarán en esta sección, es valida la aplicación del Teorema de Phelps, ya que en principio las normas son funciones lipschitzianas y como $\mathbb{R}$ es separable, $\mathbb{R}$ tiene la PRN. Es decir, se puede concluir en todos los casos y mientras el espacio de partida sea separable que el complemento del conjunto de G -diferenciabilidad de cada norma tiene medida gaussiana cero. En los siguientes resultados se hará uso de la función signatura. La *signatura* de un número real x se denota como $sig(x)$ y se define como:

$$sig(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.1.8. *Sea $E = c_0(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las sucesiones $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que convergen a cero con la norma $\varphi(x) = \sup_n |x_n|$ y B el subconjunto de los $x \in c_0(\mathbb{R})$ que alcanza el supremo en un sólo punto. Si x_p es el único punto donde x alcanza el supremo y e_p es la sucesión $e_n = 1$ si $n = p$ y cero si $n \neq p$, se cumple que:*

- (1) *El conjunto de G -diferenciabilidad de φ es B y la G -derivada de φ en x es $\partial_G \varphi(x) = sig(x_p)e_p$.*

(2) El conjunto de F -diferenciabilidad de φ es B y la F -derivada de φ en x es $\partial_F \varphi(x) = \text{sig}(x_p)e_p$.

(3) B es un conjunto abierto y denso.

(4) B^c tiene medida gaussiana nula.

Demostración. (1) supongamos que $x \in B$, entonces $\varphi(x) = \sup_n |x_n|$ alcanza el supremo en un solo valor p si y sólo si $\sup_{n \neq p} |x_n| < |x_p| = \varphi(x)$. Por consiguiente, si $h \neq 0$ y se toma $t > 0$ es suficientemente pequeño, tal que $\sup_n |x_n + th_n| = |x_p + th_p|$, luego

$$\varphi(x + th) - \varphi(x) = |x_p + th_p| - |x_p| = \text{sig}(x_p)(x_p + th_p) - \text{sig}(x_p)x_p = \text{sig}(x_p)th_p.$$

Por tanto, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} = \text{sig}(x_p)h_p = u(h)$. Como $h \rightarrow u(h)$ es lineal y continua, luego es G -diferenciable y $\partial_G \varphi(x) = \text{sig}(x_p)e_p$.

Por otro lado, si x alcanza el supremo en dos puntos diferentes, es decir $|x_n| \leq |x_p| = |x_q|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al definir $h \in c_0$ tal que $h_p = 1$, $h_q = 0$ y suponer que $x_p > 0$, entonces para valores pequeños de t se cumple que

$$\varphi(x + th) - \varphi(x) = |x_p + th_p| - |x_p| = t,$$

por tanto $d_+ \varphi(x, h) = 1$, al tiempo se cumple $\varphi(x + th) - \varphi(x) = |x_q + th_q| - |x_q| = 0$, es decir que $d_- \varphi(x, h) = 0$. En suma, φ no es G -diferenciable en ningún $x \in B^c$. Si $x_p < 0$, se procede de manera similar.

(2) Dado que x_p es el único punto donde $x \in c_0(\mathbb{R})$ alcanza el supremo y como $x_n \rightarrow 0$, existe un n_0 tal que para $n > n_0$ se cumple $|x_n| < \varphi(x) - r$, donde $r > 0$ y $\varphi(x) - r > 0$; entonces $\varphi(x) = \sup\{|x_k| : k \leq n_0\}$. Si se definen

$$s := \sup\{|x_k| : k \leq n_0 \text{ y } k \neq p\} \quad \text{y} \quad \epsilon := \min\{r, |x_p| - s\},$$

luego $s < |x_p|$ y $\epsilon < |x_p| - |x_k|$. Si se toma $\varphi(h) < \epsilon/2$ entonces

$$r(h) = \varphi(x + h) - \varphi(x) - \text{sig}(x_p)h_p = \text{sig}(x_p)(x_p + h_p) - \text{sig}(x_p)x_p - \text{sig}(x_p)h_p = 0,$$

de lo cual $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$. Lo cual demuestra que la norma φ es F -diferenciable en B y $\partial_F \varphi(x) = \text{sig}(x_p)e_p$. Más aún, como en el anterior punto se demostró que φ no es G -diferenciable en ningún $x \in B^c$, entonces del contrarrecíproco del punto (4) de la Observación 1.4.3 se obtiene que φ no es F -diferenciable en ningún $x \in B^c$.

(3) Si $x \in B$, luego existe x_p el único punto donde x alcanza el supremo, si además para $\epsilon = \inf_{n \neq p}(|x_p| - |x_n|)$, se toma $y \in B(x, \epsilon/2)$, entonces para $n \neq p$

$$\begin{aligned} \varphi(y) + \epsilon &\leq \varphi(y) + |x_p| - |x_n| \leq \varphi(y - x) + |x_p| < \frac{\epsilon}{2} + |x_p| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + |x_p - y_p| + |y_p| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + |y_p| = |y_p| + \epsilon, \end{aligned}$$

por tanto, $\varphi(y) < |y_p|$ y $y \in B$. Es decir, que $B(x, \epsilon/2) \subseteq B$ para todo $x \in B$ y luego B es abierto.

Sean $y \in B^c$ y $\epsilon > 0$, entonces la sucesión $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alcanza el supremo en n -puntos, de lo cual $\varphi(y) = |y_{p_1}| = \dots = |y_{p_n}|$ y si se define

$$x_k = \begin{cases} y_k & \text{si } k \neq p_n \\ y_k + \epsilon & \text{si } k = p_n \end{cases}$$

entonces $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B$ y $\varphi(x - y) = \epsilon$, luego $\overline{B} = c_0(\mathbb{R})$.

(4) Es consecuencia directa de aplicar el Teorema de Phelps. □

Es también importante anotar que siendo $c_0(\mathbb{R})$ un espacio de Banach separable y a su vez tener como espacio dual $\ell^1(\mathbb{R})$, que es otro espacio separable. Entonces del Teorema 1.5.12 el espacio $c_0(\mathbb{R})$ admite una F -norma admisible y en consecuencia por el Teorema 1.5.13 el espacio en mención, es un espacio F -Asplund. A continuación, se mostrará cual es el conjunto de G -diferenciabilidad de una norma del dual de $c_0(\mathbb{R})$.

Teorema 2.1.9. *Sea $E = \ell^1(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las sucesiones $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $\sum_n |x_n| < \infty$ con la norma $\varphi(x) = \sum_n |x_n|$. Si $B \subseteq \ell^1(\mathbb{R})$ es el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

(1) *El conjunto de G -diferenciabilidad de φ es B y la G -derivada de φ en x es*

$$\partial_G \varphi(x, h) = \sum_n \text{sig}(x_n) h_n \quad \text{y en consecuencia} \quad \partial_G \varphi(x) = (\text{sig}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

(2) *B es un conjunto G_δ y denso.*

(3) *φ no es F -diferenciable en ningún punto.*

(4) *B^c tiene medida gaussiana nula.*

Demostración. (1) Si $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y $h \in \ell^1(\mathbb{R})$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>n_0} |h_k| < \epsilon/2$. Además, existe un $\delta > 0$ y $|t| < \delta$, para $1 \leq k \leq n_0$ tal que se cumple $\text{sig}(x_k + th_k) = \text{sig}(x_k)$. Todo lo cual implica

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} - \sum_k \text{sig}(x_k) h_k \right| = \left| \sum_k \left(\frac{|x_k + th_k| - |x_k|}{t} - \text{sig}(x_k) h_k \right) \right| \\ & \leq 0 + \sum_{k>n_0} \left| \frac{|x_k| + |th_k| - |x_k|}{t} \right| + \sum_{k>n_0} |h_k| = \sum_{k>n_0} |h_k| + \sum_{k>n_0} |h_k| < \epsilon, \end{aligned}$$

por tanto, $\partial_G \varphi(x, h) = \sum_n \text{sig}(x_n) h_n$. Por otro lado, si $x_q = 0$ para algún $q \in \mathbb{N}$ entonces φ no es G -diferenciable en x , ya que para $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida como $h_k = 0$ si $k \neq q$ y $h_q = 1$, se cumple

$$\frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = \frac{|x_q + th_q| - |x_q|}{t} = \frac{|t|}{t},$$

de lo cual

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = 1 \neq -1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t}.$$

Mostrando que φ tiene a B como su conjunto de G -diferenciabilidad.

Para la igualdad $\partial_G \varphi(x) = (\text{sig}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene en cuenta que $\partial_G \varphi(x, \cdot)$ es lineal y continua y por lo tanto un elemento del dual de $\ell^1(\mathbb{R})$.

(2) Como la forma lineal $x \rightarrow x_n$ es continua en $\ell^1(\mathbb{R})$, entonces el conjunto A_n de los x tales que $x_n \neq 0$, es abierto de $\ell^1(\mathbb{R})$ para cada n y $B = \cap_n A_n$ es un conjunto G_δ . Ahora B es denso en $\ell^1(\mathbb{R})$, ya que si se toma $x \in \ell^1(\mathbb{R})$, $\epsilon > 0$ y se define $y_n = x_n$ si $x_n \neq 0$ y $y_n = \epsilon/2^n$ si $x_n = 0$, entonces $\varphi(y - x) < \epsilon$.

(3) Si se supone $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$ un punto tal que $x_n \neq 0$ para todo n , en donde $\varphi(x)$ es F -diferenciable. Luego su derivada sería la misma derivada de Gâteaux $\partial_G \varphi(x) = (\text{sig}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Si se define

$$h_n = (h_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} = \begin{cases} -2x_k & \text{si } k > n, \\ 0 & \text{si } k \leq n. \end{cases}$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(h_n) = 0$ y

$$\begin{aligned}
& |\varphi(x + h_n) - \varphi(x) - \partial_G \varphi(x)(h_n)| \\
&= \left| \sum_{k > n} (|x_k + h_{n,k}| - |x_k| - \text{sig}(x_n)h_{n,k}) \right| \\
&= \left| \sum_{k > n} \text{sig}(x_n)h_{n,k} \right| = \varphi(h_n).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{\varphi(h_n) \rightarrow 0} \frac{|\varphi(x + h_n) - \varphi(x) - \partial_G \varphi(x)(h_n)|}{\varphi(h_n)} = 1 \neq 0,$$

lo que contradice el supuesto de que φ es F -diferenciable en x . Por otro lado, si se toma $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$ tal que $x_q = 0$ para algún $q \in \mathbb{N}$, entonces del numeral (1) de este teorema φ no es G -diferenciable en x y por tanto no F -diferenciable en x . Luego φ no es F -diferenciable en ningún $x \in \ell^1(\mathbb{R})$.

(4) Es consecuencia directa de aplicar el Teorema de Phelps. $\square$

En el siguiente resultado se considerará el espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ de las funciones borelianas $f(x)$ de valor real tales que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$.

Teorema 2.1.10. *Sea $L^1(\mathbb{R})$ dotado de la norma $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$. Sea B el conjunto de las $\tilde{F} \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\tilde{F}$ posee un representante f que cumple $\inf_{[\alpha, \beta]} |f(x)| > 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces*

(1) *El conjunto de G -diferenciabilidad de φ es B y si $f \in B$, entonces*

$$\partial_G \varphi(f, h) = \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x) dx \quad \text{y en consecuencia} \quad \partial_G \varphi(f(x)) = \text{sig}(f(x)).$$

(2) *El conjunto de G -diferenciabilidad de φ es denso y G_δ .*

(3) *B^c tiene medida gaussiana nula.*

Demostración. (1) Sea $\tilde{F} \in B$, $\tilde{F}$ posee un representante f que cumple $\inf_{[\alpha, \beta]} |f(x)| > 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $h(x) \in L^1(\mathbb{R}) \setminus 0$ y $\epsilon > 0$ existe un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\int_{[a, b]^c} |h(x)| dx < \epsilon/2$. En efecto, para la existencia del intervalo $[a, b]$ observemos que gracias al Teorema de convergencia dominada se tiene:

$$\int_{[0, \infty)} |h| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |h| I_{[0, n]} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} |h| dx.$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple

$$\left| \int_{[0,\infty)} |h|dx - \int_{[0,n]} |h|dx \right| = \int_{[n,\infty)} |h|dx < \epsilon/4.$$

En particular, $\int_{[N,\infty)} |h|dx < \epsilon/4$ y tomando $b = N$ se concluye que $\int_{[b,\infty)} |h|dx < \epsilon/4$. Haciendo un análisis similar para $(-\infty, 0]$ se obtiene $a \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{(-\infty,a]} |h|dx < \epsilon/4$. De aquí se puede concluir la existencia del intervalo $[a, b]$ deseado.

Ahora se supondrá temporalmente que h es continua en $[a, b]$, posteriormente un argumento de densidad permitirá extender el calculo de la G -derivada en la dirección $h \in L^1(\mathbb{R})$. Si h es continua en $[a, b]$ existe $\delta > 0$ talque $\text{sig}(f + th) = \text{sig}(f)$ en $[a, b]$ para todo $|t| < \delta$.

Para ver esto, se considera sólo el caso $\inf_{[a,b]}(f) > 0$, si $f > 0$ en $[a, b]$. Siendo análogo el caso $\sup_{[a,b]}(f) < 0$, si $f < 0$ en $[a, b]$. Si se define $m = \inf_{[a,b]}(f)$ en $[a, b]$, entonces $m > 0$. Luego para que $f + th$ preserve la positividad del signo de f en $[a, b]$ solo se requiere que $|th(x)|$ sea suficientemente pequeño comparado con la distancia del grafo de f al eje x , que es m . Mas exactamente se toma $|th(x)| < \frac{m}{2}$, lo cual nos lleva a la condición

$$|t| < \frac{m}{2 \max_{[a,b]} |h|}.$$

Notese que $\max_{[a,b]} |h| > 0$ por la no nulidad de h y su continuidad. De esta manera, se obtiene

$$\text{sig}(f + th) = \text{sig}(f) \text{ en } [a, b], \quad (2.1)$$

para $|t| < \delta := \frac{m}{2 \max_{[a,b]} |h|}$. Si $f < 0$ en $[a, b]$ se procede de manera análoga.

A continuación se hará el calculo de la G -derivada de φ en el punto f y la dirección $h \in L^1(\mathbb{R}) \setminus 0$.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} - \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x)dx \right| \\ &= \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} |f + th|dx - \int_{\mathbb{R}} |f|dx}{t} - \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x)dx \right| \\ &\leq \left| \frac{\int_{[a,b]} |f + th|dx - \int_{[a,b]} |f|dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x)dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{\int_{[a,b]^c} |f + th| dx - \int_{[a,b]^c} |f| dx}{t} - \int_{[a,b]^c} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| \\
& \leq \left| \frac{\int_{[a,b]} (|f + th| - |f|) dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| \\
& \quad + \int_{[a,b]^c} \left| \frac{|f(x) + th(x)| - |f(x)|}{t} \right| dx + \int_{[a,b]^c} |h(x)| dx \\
& \leq \left| \frac{\int_{[a,b]} (|f + th| - |f|) dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| \\
& \quad + \int_{[a,b]^c} \frac{|f(x) + th(x) - f(x)|}{|t|} dx + \int_{[a,b]^c} |h(x)| dx \\
& \leq \left| \frac{\int_{[a,b]} (|f + th| - |f|) dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| \\
& \quad + \int_{[a,b]^c} \left| \frac{th(x)}{t} \right| dx + \int_{[a,b]^c} |h(x)| dx \\
& < \left| \frac{\int_{[a,b]} (|f + th| - |f|) dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| + \epsilon. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Suponiendo h continua en $[a, b]$ y usando la propiedad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\int_{[a,b]} (|f(x) + th(x)| - |f(x)|) dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| \\
& = \left| \frac{\int_{[a,b]} [\text{sig}(f(x))(f(x) + th(x)) - \text{sig}(f(x))(f(x))] dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| \\
& = \left| \frac{\int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))(th(x)) dx}{t} - \int_{[a,b]} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| = 0. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que para h continua en $[a, b]$ se tiene

$$\left| \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} - \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x) dx \right| < \epsilon. \tag{2.4}$$

Lo cual demuestra la propiedad deseada

$$\partial_G \varphi(f, h) = \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x) dx,$$

para $h \in L^1(\mathbb{R}) \setminus 0$ y h continua en $[a, b]$. Para extender esta propiedad al caso general $h \in L^1(\mathbb{R}) \setminus 0$, se usa la densidad $\mathcal{C}([a, b])$ en $L^1([a, b])$. Es importante resaltar que

en el desarrollo de la desigualdad (2.2) no se usó la continuidad de h en $[a, b]$, esta solo interviene para obtener (2.3). Así solo queda por extender la desigualdad (2.4) al caso $h \in L^1(\mathbb{R}) \setminus 0$. Para ello se aproxima h sobre el intervalo $[a, b]$ dejando invariante h en $[a, b]^c$. Así pues, existe $g \in \mathcal{C}([a, b])$ tal que $\|h - g\|_{L^1([a, b])} < \epsilon$. Tomando $\tilde{g} = gI_{[a, b]} + hI_{[a, b]^c}$ se tiene $\|h - g\|_{L^1([a, b])} = \|h - \tilde{g}\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Ahora, puesto que la desigualdad (2.4), es una distancia entre integrales, esta es controlada por normas en $L^1([a, b])$. Escribiendo $h = (h - \tilde{g}) + \tilde{g}$ y usando (2.4) para $\tilde{g}$, la cual es continua en $[a, b]$ se obtiene para el h general

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} - \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x)dx \right| \\ & \leq \left| \frac{\varphi(f + t\tilde{g}) - \varphi(f)}{t} - \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))\tilde{g}(x)dx \right| + \epsilon \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\partial_G \varphi(f, h) = \int_{\mathbb{R}} \text{sig}(f(x))h(x)dx.$$

Ahora se supondrá que $\tilde{F} \in B^c$ y se demostrará que φ no posee G -derivada en $\tilde{F}$. Si $\tilde{F} \in B^c$ entonces $\tilde{F}$ posee un representante f que cumple que existe un intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ tal que $\inf_{[\alpha, \beta]} |f(x)| = 0$, lo cual genera los siguientes dos casos.

Primero, se asume que f es continuo sobre $[\alpha, \beta]$. Posteriormente se extenderá por densidad al caso general en $L^1(\mathbb{R})$. Por ser f continua sobre $[\alpha, \beta]$ entonces $\inf_{[\alpha, \beta]} |f(x)| = \min_{[\alpha, \beta]} |f(x)|$. Luego $\tilde{F}$ posee representantes continuos f con ceros y a su vez existen otros dos casos:

- Si f tiene sucesiones de ceros que poseen puntos de acumulación y sea c uno de estos puntos. Por la continuidad de la función f sobre un punto c , para todo $\epsilon > 0$ existe algún $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 > 2$, tal que $|x - c| < \frac{1}{2^{m_0}}$ implica $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Por otra parte, si c es el punto de acumulación de alguna sucesión de ceros $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en f , entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq n_0$ se cumple $|x_k - c| < \frac{1}{2^{m_0}}$. Por tanto, para $k \geq n_0$ se cumple que $c \in (x_k - \frac{1}{2^{m_0-1}}, x_k + \frac{1}{2^{m_0-1}})$, también para todo $x \in (x_k - \frac{1}{2^{m_0-1}}, x_k + \frac{1}{2^{m_0-1}})$ se tiene que $|f(x) - f(x_k)| < \epsilon$. De esto se concluye que $|f(x)| \leq |f(x_k)| + \epsilon = \epsilon$. Si se toma $V = (x_{n_0} - \frac{1}{2^{m_0-1}}, x_{n_0} + \frac{1}{2^{m_0-1}})$ y $h(x) = 1I_V(x) + 0I_{V^c}(x)$, se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} |f(x) + th(x)|dx - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx}{t} \\ &= \frac{[\int_V |f(x) + th(x)|dx - \int_V |f(x)|dx] + [\int_{V^c} |f(x) + th(x)|dx - \int_{V^c} |f(x)|dx]}{t} \end{aligned}$$

$$= \frac{\int_V |f(x) + t| dx - \int_V |f(x)| dx}{t}.$$

Si $t > 0$, se tiene

$$\frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} \leq \frac{\int_V (|f(x)| + t) - |f(x)| dx}{t} = \int_V dx = \frac{1}{2^{m_0}}$$

Si $t < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} &> \frac{\int_{\mathbb{R}} |f(x) + t| dx - \int_{\mathbb{R}} \epsilon dx}{t} \geq \frac{\int_V (-|f(x)| - |t|) dx - \int_V \epsilon dx}{t} \\ &> \frac{\int_V (-\epsilon + t) dx - \int_V \epsilon dx}{t} = \frac{\int_V (t - 2\epsilon) dx}{t} \\ &= \left(\frac{t - 2\epsilon}{t} \right) \frac{1}{2^{m_0}}. \end{aligned}$$

Luego φ no tiene G -derivada en f respecto a la dirección h , ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} \leq \frac{1}{2^{m_0}} < \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t}.$$

- Si f tiene un cero aislado $c \in \mathbb{R}$ sobre alguna vecindad $W = (c - \delta', c + \delta') \subset \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$, por la continuidad de f , existe $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta$ implica que $|f(x)| < \epsilon$. Sea $V = (c - \delta, c + \delta)$, se puede asumir $\delta < \delta'$. Se definen $V_1 = \{x \in V : 0 \leq f(x) < \epsilon\}$, $V_2 = \{x \in V : -\epsilon < f(x) < 0\}$ y $h = 1I_{V_1} + (-1)I_{V_2} + 0I_{V^c}$. Entonces $h \in L^1(\mathbb{R})$ y además:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} |f(x) + th(x)| dx - \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx}{t} \\ &= \frac{(\int_V |f(x) + th(x)| dx - \int_V |f(x)| dx) + (\int_{V^c} |f(x) + th(x)| dx - \int_{V^c} |f(x)| dx)}{t} \\ &= \frac{\int_{V_1} (|f(x) + th(x)| - |f(x)|) dx + \int_{V_2} (|f(x) + th(x)| - |f(x)|) dx + 0}{t} \\ &= \frac{\int_{V_1} (|f(x) + t| - f(x)) dx + \int_{V_2} (|f(x) - t| + f(x)) dx}{t}. \end{aligned}$$

Si $t > 0$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} &= \frac{\int_{V_1} (f(x) + t - f(x)) dx + \int_{V_2} (-(f(x) - t) + f(x)) dx}{t} \\ &= \frac{\int_{V_1} t dx + \int_{V_2} t dx}{t} = \frac{\int_V t dx}{t} = \frac{2\delta t}{t} = 2\delta. \end{aligned}$$

Ahora, si $t < 0$, se consideran los subconjuntos $\{x \in V : f(x) \geq t\}$ y $\{x \in V : f(x) < t\}$. Entonces $V_1 \cap \{x \in V : f(x) < t\} = \emptyset$ y

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} \\
&= \frac{\int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} (|f(x) + t| - |f(x)|) dx + \int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} (|f(x) + t| - |f(x)|) dx}{t} \\
&+ \frac{\int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} (|f(x) - t| - |f(x)|) dx + \int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} (|f(x) - t| - |f(x)|) dx}{t} \\
&\leq \frac{\int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} ((f(x) - t) - f(x)) dx + \int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} (|f(x) + t| - |f(x)|) dx}{t} \\
&+ \frac{\int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} ((f(x) - t) + f(x)) dx + \int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} (-(f(x) - t) + f(x)) dx}{t} \\
&= \frac{\int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} -tdx + 0 + \int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} (2f(x) - t)dx + \int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} tdx}{t} \\
&< \frac{\int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} -tdx + 2 \int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} 0dx + \int_{V_2 \cap \{x \in V: f(x) < t\}} (-t + t)dx}{t} \\
&= \frac{\int_{V_1 \cap \{x \in V: f(x) \geq t\}} -tdx}{t} < \int_{V_1} dx = -\delta < 0 < 2\delta,
\end{aligned}$$

donde $\int_{V_1} dx = \delta$, es cierta de la definición de V_1 , ya que en esta el punto aislado es el punto medio de V y sólo se considera $0 \leq f(x) < \epsilon$. Por lo tanto, φ no es G -diferenciable en f , puesto que se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} < \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t}.$$

En el caso en que $\tilde{F}$ no posea representantes continuos, para extender el anterior resultado para funciones $\tilde{g}$ con representantes continuos g al caso general $f \in L^1(\mathbb{R}) \setminus 0$, se usa la densidad $\mathcal{C}([a, b])$ en $L^1([a, b])$.

Para la igualdad $\partial_G \varphi(f(x)) = \text{sig}(f(x))$ se tiene en cuenta que $\partial_G \varphi(f, \cdot)$ es lineal y continua y por lo tanto un elemento del dual de $L^1(\mathbb{R})$.

(2) Es bien conocido que el espacio $L^1(\mathbb{R})$ es separable (ver Teorema 4.1.3 de Brezis [13]) luego por el Teorema 1.5.6 (2) de Mazur, se tiene que $L^1(\mathbb{R})$ es G -Asplund. Dado que φ es convexa y continua entonces el conjunto de G -diferenciabilidad de φ es denso y G_δ .

(3) Es consecuencia directa de aplicar el Teorema de Phelps. $\square$

Observación 2.1.11.

1. Si $\tilde{F}$ posee un representante continuo f , que se anula en un intervalo $[a, b]$, este representante es un caso particular del caso en que f posea sucesiones de ceros que tengan un punto de acumulación. En efecto, lo anterior es cierto ya que para cualquier $f(x) = 0$ con $x \in [a, b]$ existe una sucesión $\{f(x_k) = 0\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$. Por tanto, el teorema anterior es valido para el caso en el cual el representante f se anule en $V = [a, b]$, ya que si $h(x) = 1I_V(x) + 0I_{V^c}(x)$, demostrar que φ no tiene G -derivada en f respecto a la dirección h , se reduce al siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} |f(x) + th(x)| dx - \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx}{t} \\ &= \frac{[\int_V |f(x) + th(x)| dx - \int_V |f(x)| dx] + [\int_{V^c} |f(x) + th(x)| dx - \int_{V^c} |f(x)| dx]}{t} \\ &= \frac{[\int_V |th(x)| dx - 0] + 0}{t} = \frac{|t| \int_V 1 dx}{t} = \frac{|t|(2\delta)}{t}. \end{aligned}$$

De lo cual

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} = 2\delta \neq -2\delta = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t}.$$

2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un dominio acotado. En el caso de $L^p(\Omega)$, con $1 < p < \infty$, de lo mostrado en el libro de Diestel [24] se conoce que la norma de cada uno de los espacios referidos, definida como $\|\cdot\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |f(w)|^p dw)^{1/p}$, es F -diferenciable sobre cualquier $f \neq 0$. Además, si $1 < p < \infty$ entonces

$$\partial_F \|f\|_{L^p} = \frac{|f|^{p-1} \text{sig}(f)}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}.$$

Si $p = 1$, la norma de $L^1(\Omega)$ no es F -diferenciable en ninguna parte. Por otro lado, dado que para $1 < p < \infty$ el dual de $L^p(\Omega)$ es un $L^q(\Omega)$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y ambos espacios son separables. Entonces del Teorema 1.5.12 el espacio $L^p(\Omega)$ admite una F -norma admisible y en consecuencia por el Teorema 1.5.13 el espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio F -Asplund.

En el teorema a continuación, se considerará el espacio de Banach $\mathcal{C}[a, b]$ de las funciones f reales continuas sobre el intervalo $[a, b]$, con la norma $\varphi(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Teorema 2.1.12. *Si B el conjunto de todas las $f \in \mathcal{C}[a, b]$ tal que $|f|$ asume el supremo en un sólo punto $x_0 \in [a, b]$.*

(1) El conjunto de G-diferenciabilidad de φ es B y si $f \in B$, entonces

$$\partial_G \varphi(f, h) = \text{sig}(f(x_0))h(x_0).$$

(2) B es un conjunto denso y G_δ .

(3) B^c tiene medida gaussiana nula.

Demostración. (1) Si se toma $f \in B$, existe $x_0 \in [a, b]$, tal que

$$\varphi(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

Como $h \in \mathcal{C}[a, b]$ entonces h es acotado y gracias a la unicidad del máximo de $|f|$ existe un $\delta > 0$ tal que para $|t| < \delta$ se cumple $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) + th(x)| = |f(x_0) + th(x_0)|$ y $\text{sig}(f(x_0) + th(x_0)) = \text{sig}(f(x_0))$. Entonces, para $|t| < \delta$, se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(f + th) - \varphi(f) &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x) + th(x)| - \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \\ &= |f(x_0) + th(x_0)| - |f(x_0)| = \text{sig}(f(x_0) + th(x_0))(f(x_0) + th(x_0)) - \text{sig}(f(x_0))(f(x_0)) \\ &= \text{sig}(f(x_0))(f(x_0) + th(x_0)) - \text{sig}(f(x_0))(f(x_0)) = \text{sig}(f(x_0))(th(x_0)), \end{aligned}$$

$$\text{luego } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} = \text{sig}(f(x_0))h(x_0).$$

Por otra parte, si se toma un $f \in B^c$, entonces $|f|$ alcanza el supremo en por lo menos dos puntos x_1 y x_2 distintos. Si h es una función continua, tal que $h(x_1) = 0$ y $h(x_2) = -1$, entonces para un $|t| < \delta$ con δ suficientemente pequeño se cumple que $\text{sig}(f(x_2) + th(x_2)) = \text{sig}(f(x_2))$ y

$$\varphi(f + th) - \varphi(f) \leq |f(x_2) + th(x_2)| - |f(x_2)| = \text{sig}(f(x_2))(th(x_2)) = \text{sig}(f(x_2))(-t) \quad (2.5)$$

$$\varphi(f + th) - \varphi(f) \leq |f(x_1) + th(x_1)| - |f(x_1)| = 0. \quad (2.6)$$

Por tanto, si en (2.5) se toma $f(x_2) > 0$, entonces $\varphi(f + th) - \varphi(f) \leq -t$, luego $\partial_+ \varphi(f, h) \leq -1$. Por otro lado, aplicando límite a cero por izquierda en (2.6), se tiene que $\partial_- \varphi(f, h) \geq 0$. Si se toma $f(x_2) < 0$ entonces, de (2.5), se cumple que $\partial_- \varphi(f, h) \geq 1$ y si se aplica límite a cero por derecha en (2.6), se obtiene que $\partial_+ \varphi(f, h) \leq 0$. Mostrando que φ no es diferenciable en B^c .

(2) Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y el Teorema de aproximación de Weierstrass, demuestra que el conjunto de polinomios de coeficientes reales $\mathbb{P}[x]$ definidos sobre el intervalo cerrado

$[a, b]$ es denso sobre $\mathcal{C}[a, b]$. Entonces el conjunto de polinomios de coeficientes racionales $\mathbb{Q}[x]$ definidos sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ es denso sobre $\mathcal{C}[a, b]$. Es decir, que $\mathcal{C}[a, b]$ es separable, de lo cual al aplicarse el Teorema 1.5.6 (2) de Mazur, se demuestra que $\mathcal{C}[a, b]$ es G -Asplund. Por tanto, el conjunto de todas las $x \in \mathcal{C}(T)$, tal que $\varphi(x)$ es G -diferenciable, es denso y G_δ .

(3) Es consecuencia directa de aplicar el Teorema de Phelps. $\square$

Lema 2.1.13. Sean X y Y espacios de Banach isomorfos. X es G -Asplund (F -Asplund) si y sólo si Y es G -Asplund (F -Asplund).

Demostración. Dado que X, Y son isomorfos, entonces existe una función bicontinua y biyectiva $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) \quad y \quad \varphi^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi^{-1}(y_1) + \lambda_2 \varphi^{-1}(y_2),$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$. A continuación, se demuestra la equivalencia correspondiente para F -Asplund. Si Y es F -Asplund, entonces para toda función convexa y continua g sobre un abierto y convexo Ω' se cumple que para $\tilde{u} \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\|g(b + h') - g(b) - \tilde{u}(h')\|}{\|h'\|} = 0,$$

donde b pertenece a un conjunto denso y G_δ contenido en Ω' , luego existe un $a \in \Omega$ con $\varphi(a) = b$, de la misma manera existe un único $h \in X$ tal que $\varphi(h) = h'$, $h' \in Y$ y además

$$\begin{aligned} \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\|g(b + h') - g(b) - \tilde{u}(h')\|}{\|h'\|} &= \lim_{\varphi(h) \rightarrow 0} \frac{\|g(\varphi(a) + \varphi(h)) - g(\varphi(a)) - \tilde{u}(\varphi(h))\|}{\|\varphi(h)\|} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(\varphi(a + h)) - g(\varphi(a)) - \tilde{u}(\varphi(h))\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

donde $f = g \circ \varphi$ es claramente una función convexa y continua sobre el abierto y convexo Ω y $u = \tilde{u} \circ \varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

luego f es F -derivable sobre $a \in \Omega$.

Por otra parte, si X es F -Asplund entonces para toda función convexa y continua f definida sobre un abierto y convexo Ω y a sobre un subconjunto denso y G_δ de Ω se cumple que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

donde $h \in \Omega$ y a su vez se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} \\ &= \lim_{\varphi^{-1}(h') \rightarrow 0} \frac{\|f(\varphi^{-1}(b) + \varphi^{-1}(h')) - f(\varphi^{-1}(b)) - u(\varphi^{-1}(h'))\|}{\|\varphi^{-1}(h')\|} \\ &= \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\|f(\varphi^{-1}(b + h')) - f(\varphi^{-1}(b)) - u(\varphi^{-1}(h'))\|}{\|h'\|} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\|g(b+h') - g(b) - \tilde{u}(h')\|}{\|h'\|}. \end{aligned}$$

Es decir, que para $g = f \circ \varphi^{-1}$ y $\tilde{u} = u \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ se cumple que g es una función convexa y continua sobre el abierto y convexo Ω' , la cual es F -derivable sobre $b \in \Omega'$.

Lo anterior, demuestra que dado un isomorfismo topológico entre X y Y espacios de Banach, X es F -Asplund si y sólo si Y es F -Asplund. El argumento para la demostración correspondiente para la parte G -Asplund sigue lineamientos similares y se omite. $\square$

Corolario 2.1.14. *Sea T un espacio métrico compacto y no numerable. Si $\varphi(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|$ es la norma en $\mathcal{C}(T)$, entonces $\mathcal{C}(T)$ es G -Asplund.*

Demostración. Dado que T es un espacio métrico compacto y no numerable, entonces del Teorema de Milyutin (ver en página 380 de Semadeni [66]) se cumple que $\mathcal{C}(T)$ es isomorfo a $\mathcal{C}[0, 1]$. Por otro lado, de lo hecho en el Teorema 2.1.12 se conoce que $\mathcal{C}[0, 1]$ es separable y por lo tanto G -Asplund. Entonces del Lema 2.1.13 se concluye que $\mathcal{C}(T)$, con T es un espacio métrico compacto y no numerable es G -Asplund. $\square$

Observación 2.1.15. En contraste con el Teorema 2.1.8 el conjunto B en el Teorema 2.1.12 no es abierto. En efecto, sea $[a, b] = [0, 2]$, $0 < \epsilon < 1/4$, f y g funciones definidas como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\epsilon} & \text{si } 0 \leq x < 1-\epsilon \\ 1 & \text{si } 1-\epsilon \leq x \leq 1+\epsilon \\ \frac{2-x}{1-\epsilon} & \text{si } 1+\epsilon < x \leq 2 \end{cases}$$

Se verifica que $f \in B$, pues esta función es continua y toma su supremo únicamente en el punto $x = 1$. También, es claro que $\varphi(f - g) < \epsilon$ y finalmente $g \notin B$, ya que g alcanza el supremo sobre el intervalo $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$.

Sea T un espacio topológico compacto y hausdorffiano. El conjunto $\mathcal{C}(T)$ de las funciones continuas de T en $\mathbb{R}$, es un espacio de Banach real, con la norma definida por

$$\varphi(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

En el siguiente teorema se tratará sobre la F y G -diferenciabilidad de la norma del supremo en el espacio de Banach separable $\mathcal{C}(T)$. Se exhibirá el subconjunto en donde la norma es F y G -diferenciable, todo esto siguiendo algunos parámetros del libro de Fabian [36]; pero utilizando una notación diferente y tomando algunos elementos de la Sección 1.7 del Capítulo 1 de este documento. También, se hará uso del teorema anterior para demostrar que el conjunto de G -diferenciabilidad es denso y G_δ .

Teorema 2.1.16. *Sea T un espacio topológico hausdorffiano y compacto. Entonces*

- (1) *La norma $\varphi(x)$ es G -diferenciable en $x \in \mathcal{C}(T)$ si y sólo si alcanza el supremo en un sólo punto $t_0 \in T$, en tal caso tiene G -derivada*

$$\partial_G \varphi(x)(h) = \text{sig}((x(t_0))), \quad \text{es decir} \quad \partial_G \varphi(x) = \text{sig}(x(t_0))\delta_{t_0}.$$

- (2) *La norma $\varphi(x)$ es F -diferenciable en $x \in \mathcal{C}(T)$ si y sólo si $\varphi(x)$ alcanza el supremo en un único punto aislado $t_0 \in T$, en tal caso tiene F -derivada*

$$\partial_F \varphi(x) = \text{sig}(x(t_0))\delta_{t_0}.$$

- (3) *Si adicionalmente el espacio T es metrizable, el conjunto de todos las $x \in \mathcal{C}(T)$, tal que $\varphi(x)$ es G -diferenciable, es denso y G_δ .*

- (4) *Si adicionalmente el espacio T es metrizable, el conjunto de todos las $x \in \mathcal{C}(T)$, tal que $\varphi(x)$ no es G -diferenciable, tiene medida gaussiana nula.*

Demostración. (1) Sea $x(t)$ una función tal que existe un $t_0 \in T$ y $\varphi(x) = |x(t_0)|$. Si se definen $h \in \mathcal{C}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que cumplen $\varphi(x + \lambda h) = |x(t_\lambda) + \lambda h(t_\lambda)|$. Entonces $|x(t_0) + \lambda h(t_0)| \leq |x(t_\lambda) + \lambda h(t_\lambda)|$ y

$$|x(t_0)| = |x(t_0) + \lambda h(t_0) - \lambda h(t_0)| \leq |x(t_\lambda) + \lambda h(t_\lambda)| + |\lambda h(t_0)| \leq |x(t_\lambda)| + 2|\lambda|\varphi(h),$$

luego $|x(t_0)| - |x(t_\lambda)| \leq 2|\lambda|\varphi(h)$, lo cual prueba que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |x(t_\lambda)| = |x(t_0)|.$$

Ahora, se probará que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} t_\lambda = t_0,$$

para esto, se tomará a $\mathcal{B}$ como una base de filtro de las vecindades de cero. Si la función $\phi : \lambda \rightarrow t_\lambda$ transforma la base de filtro $\mathcal{B}$ en otra base de filtro $\mathcal{D}$ en T , se mostrará que $\mathcal{D} \rightarrow t_0$, que por Teorema 1.7.11 equivale a lo que se quiere probar. Argumentando por contradicción, si se supone $\mathcal{D} \nrightarrow t_0$ entonces existe una vecindad V de t_0 tal que $D \cap V^c \neq \emptyset$, para todo $D \in \mathcal{D}$. Luego

$$\mathcal{H} = \{D \cap V^c : D \in \mathcal{D}\}$$

es una base del filtro y entonces por Teorema 1.7.5, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con base $\mathcal{H}$, como T es compacto, luego del Teorema 1.7.11 punto (3), $\mathcal{U}$ converge a un $a \in T$ y de la continuidad de $|x|$ se concluye que

$$|x|(\mathcal{U}) \rightarrow |x|(a) = |x(a)|.$$

Por otro lado, se probó que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} |x(t_\lambda)| = |x(t_0)|$, entonces $|x(\mathcal{D})| \rightarrow |x(t_0)|$, así que de la definición de $\mathcal{H}$ y de $\mathcal{U}$, se tiene que $|x|(\mathcal{U}) \rightarrow |x|(t_0)$. Por tanto, de la unicidad de los límites $|x(a)| = |x(t_0)|$ y como x alcanza el supremo en un sólo punto, luego $a = t_0$ y $\mathcal{U} \rightarrow t_0$, lo que es una contradicción, ya que $\mathcal{U} \rightarrow t_0$ implica que existe un $F \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset V$ y de la definición de $\mathcal{U}$, se tiene $F \cap (D \cap V^c) \neq \emptyset$. Entonces $V \cap (D \cap V^c) \neq \emptyset$, lo que es imposible, ya que $V \cap V^c = \emptyset$.

Ahora bien, si $\varphi(x) = |x(t_0)|$, implica que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|x(t_0) + \lambda h(t_0)| - |x(t_0)| \leq \varphi(x + \lambda h) - |x(t_0)|.$$

Si se supone que $x(t_0) > 0$ y $|\lambda|$ pequeño, entonces $x(t_0) + \lambda h(t_0) > 0$. Dado que se definió al principio de la demostración que $\varphi(x + \lambda h) = |x(t_\lambda) + \lambda h(t_\lambda)|$, se cumple

$$\lambda h(t_0) \leq \varphi(x + \lambda h) - |x(t_0)| = |x(t_\lambda) + \lambda h(t_\lambda)| - |x(t_0)| = x(t_\lambda) + \lambda h(t_\lambda) - x(t_0) \leq \lambda h(t_\lambda),$$

luego

$$h(t_0) \leq \frac{\varphi(x + \lambda h) - |x(t_0)|}{\lambda} = \frac{\varphi(x + \lambda h) - \varphi(x)}{\lambda} \leq h(t_\lambda).$$

Como se probó que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} t_\lambda = t_0$, entonces de la continuidad de h , se obtiene que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} h(t_\lambda) = h(t_0)$ y $\partial_G \varphi(x)(h) = h(t_0)$.

Si se supone que $x(t_0) < 0$ y $|\lambda|$ pequeño, entonces $\varphi(x) = -x(t_0)$ y $x(t_0) + \lambda h(t_0) < 0$. Como $-x(t_0) > 0$, entonces por lo hecho en el paso anterior

$$\lambda h(t_0) \leq \varphi(-x + \lambda h) - \varphi(-x) \leq \lambda h(t_\lambda),$$

luego para $\lambda = -\mu$, se tiene que

$$-\mu h(t_0) \leq \varphi(x + \mu h) - \varphi(x) \leq -\mu h(t_\lambda).$$

Por tanto, $\partial_G \varphi(x)(h) = -h(t_0)$. Todo lo cual demuestra que

$$\partial_G \varphi(x)(h) = \text{sig}(x(t_0))h(t_0).$$

Si $x \in \mathcal{C}(T)$ alcanza el supremo en dos puntos distintos t_0 y t_1 , se demostrará que φ no es G-diferenciable en x . En efecto, haciendo caso al supuesto, se tiene que

$$|x(t)| \leq \varphi(x) = |x(a)| = |x(b)|, \text{ para todo } t \in T.$$

Como T es compacto, existe una función continua $h \in \mathcal{C}(T)$ tal que $h(a) = 1$ y $h(b) = 0$. Si se supone que $x(a) > 0$ entonces, para valores pequeños $\lambda > 0$, se cumple

$$\varphi(x + \lambda h) - \varphi(x) \geq |x(a) + \lambda h(a)| - x(a) = \lambda,$$

luego $\partial_+ \varphi(x)(h) \geq 1$. Por otro lado, si se toman valores $\lambda < 0$ pequeños, se tiene

$$\varphi(x + \lambda h) - \varphi(x) \geq |x(b) + \lambda h(b)| - |x(b)| = |x(b)| - |x(b)| = 0,$$

por tanto $\partial_- \varphi(x)(h) \leq 0$, todo lo cual muestra que φ no es G-diferenciable en x .

(2) Dado que t_0 es un punto aislado y $\varphi(x(t)) = |x(t_0)|$, $t \neq t_0$, entonces $\{t_0\}$ es abierto y $T - \{t_0\}$ es compacto, luego de la continuidad de x , se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que $|x(t_0)| - |x(t)| > \epsilon$. Es decir,

$$|x(t_0)| - \frac{\epsilon}{2} > |x(t)| + \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $t \neq t_0$, por lo tanto si se toma $h \in \mathcal{C}(T)$ tal que $\|h\| < \frac{\epsilon}{2}$, se cumple que $\text{sig}(x(t_0) + h(t_0)) = \text{sig}(x(t_0))$ y

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= \sup_{t \in T} |x(t) + h(t)| \leq \sup_{t \in T} (|x(t)| + |h(t)|) \leq \sup_{t \in T} \left(|x(t_0)| - \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &< \sup_{t \in T} (|x(t_0)| - |h(t_0)|) \leq \sup_{t \in T} |x(t_0) + h(t_0)| = |x(t_0) + h(t_0)|, \end{aligned}$$

luego de la definición de $\varphi(x)$ y suponiendo que $\|h\| < \frac{\epsilon}{2}$, se tiene

$$\varphi(x+h) = |x(t_0) + h(t_0)|.$$

Entonces, para $\|h\| < \frac{\epsilon}{2}$, se cumple

$$\begin{aligned} w(x, h) &= \varphi(x+h) - \varphi(x) - \text{sig}(x(t_0))h(t_0) \\ &= |x(t_0) + h(t_0)| - |x(t_0)| - \text{sig}(x(t_0))h(t_0) \\ &= \text{sig}(x(t_0) + h(t_0))(x(t_0) + h(t_0)) - \text{sig}(x(t_0))(x(t_0)) - \text{sig}(x(t_0))h(t_0) \\ &= \text{sig}(x(t_0))(x(t_0) + h(t_0)) - \text{sig}(x(t_0))(x(t_0) + h(t_0)) = 0, \end{aligned}$$

luego $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(x, h)\|}{\|h\|} = 0$. Por lo tanto, $\varphi(x)$ es F -diferenciable sobre los puntos aislados donde $\varphi(x)$ alcanza un único supremo.

Por otra parte, la demostración del caso en que x alcance el supremo en más de un punto, queda demostrado por lo hecho en el caso de la G -diferenciabilidad, pues no ser G -diferenciable implica no ser F -diferenciable. Por tanto, $|x|$ alcanza el supremo en un único punto $t_0 \in T$.

Ahora bien, si se supone que φ es F -diferenciable en x , se mostrará entonces que φ alcanza el supremo en un punto $t_0 \in T$ aislado. Demostrando por contradicción se tiene:

Si t_0 es un punto no aislado con $x(t_0) > 0$, existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \in T$, para la cual $t_n \rightarrow t_0$ y de la continuidad de $x(t)$ existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de reales positivos que converge a cero que satisfacen $x(t_0) - x(t_n) < r_n$. Si h_n es una función continua tal que $h_n(t_n) = 2r_n$ y $h_n(t_0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} w(x, h_n) &= \varphi(x+h_n) - \varphi(x) - \partial_\varphi(x, h_n) \\ &= \sup_{t \in T} |x(t) + h_n(t)| - \sup_{t \in T} |x(t)| - \text{sig}(x(t_0))h_n(t_0) \\ &= \sup_{t \in T} |x(t) + h_n(t)| - \sup_{t \in T} |x(t)| \geq |x(t_n) + h_n(t_n)| - |x(t_0)| \\ &\geq x(t_n) + h_n(t_n) - x(t_0) = -(x(t_0) - x(t_n)) + h_n(t_n) \\ &> -r_n + 2r_n = r_n \end{aligned}$$

como $\|h_n\| \rightarrow 0$, entonces $\lim_{\|h_n\| \rightarrow 0} \frac{\|w(x, h_n)\|}{\|h_n\|} = \lim_{\|h_n\| \rightarrow 0} \frac{r_n}{2r_n} = \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción a la F -diferenciabilidad de φ . Por lo tanto, queda demostrado que la F -diferenciabilidad de φ en x implica que $|x|$ alcanza el supremo en un único punto aislado.

(3) Es un resultado conocido que si T es compacto Hausdorff y metrizable entonces $\mathcal{C}(T)$ es separable, en consecuencia del Teorema 1.5.6 (2) de Mazur $\mathcal{C}(T)$ es G -Asplund. Por tanto, el conjunto de todos las $x \in \mathcal{C}(T)$, tal que $\varphi(x)$ es G -diferenciable, es denso y G_δ .

(4) Es consecuencia directa de aplicar parte de lo hecho en (3) y utilizar el Teorema de Phelps. $\square$

Observación 2.1.17.

- (1) Dado que el compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ no tiene puntos aislados sobre el cual $\varphi(x) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ exista, entonces $\varphi(x)$ no es F -diferenciable en ningún punto de $[a, b]$.
- (4) Si se toman todos los puntos en los cuales las $x \in \mathcal{C}(T)$ son F -diferenciables, esto equivale a tomar todos los puntos aislados en T ; pero por su misma naturaleza este conjunto de puntos aislados no es denso en T . Por tanto, de la Proposición 2.2.2 del libro de Fabian [36] se concluye que el conjunto de los $x \in \mathcal{C}(T)$, tal que $\varphi(x)$ es F -diferenciable, no es denso en $\mathcal{C}(T)$.

2.2. En espacios de Banach no separables

En esta sección, se presentan algunos teoremas, en su mayoría con demostraciones originales. En particular, se trabajará sobre una norma del espacio no separable $\ell^\infty(\mathbb{R})$, demostrando que cumple la tesis del Teorema de Phelps. Además, de exhibir los conjuntos de G -diferenciabilidad en otros espacios, como lo son $L^\infty(\Omega)$ y $NBV[a, b]$. A continuación, el siguiente resultado, muestra la imposibilidad de extender el Teorema de Phelps a todo espacio de Banach no separable.

Teorema 2.2.1. *En $\ell^\infty(\mathbb{R})$ la función $\varphi(x) = \limsup_n |x_n|$, es una seminorma continua, que es G -diferenciable en ningún punto.*

Demostración. En primer lugar, φ es una seminorma. En efecto, $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(\lambda x) = \limsup_n |\lambda x_n| = |\lambda| \varphi(x)$ y

$$\varphi(x + y) = \limsup_n |x_n + y_n| \leq \limsup_n |x_n| + \limsup_n |y_n| = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Es importante observar, que no es norma, ya que $\varphi(x) = 0$ si y sólo si $x \in c_0(\mathbb{R})$.

En el caso de la G -diferenciabilidad, si se toma $x \in c_0(\mathbb{R})$ y se define $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $h_n = 1$, para todo n . Como $x \rightarrow 0$, entonces

$$\varphi(x + th) = \limsup |x_n + th_n| = |t| \quad y \quad \varphi(x + th) - \varphi(x) = |t|$$

así que $\partial_+ \varphi(x, h) \neq \partial_- \varphi(x, h)$. Si $x \notin c_0(\mathbb{R})$, es decir que $\varphi(x) \neq 0$. En particular, si $\varphi(x) = \beta > 0$ existe una subsucesión $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a β , tal que $x_{k_n} > 0$, para todo n . Si se define $h = (h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ como:

$$h_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k_n \text{ para todo } n \\ 0 & \text{si } j = k_n \text{ y } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } j = k_n \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

entonces

$$x_j + th_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \neq k_n \text{ para todo } n \\ x_{k_n} & \text{si } j = k_n \text{ y } n \text{ es par} \\ x_{k_n} + t & \text{si } j = k_n \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Como $\limsup_n h_n = 1 = \limsup_n h_{k_n}$, entonces

$$\limsup_n th_n = \limsup_n th_{k_n} = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Dado que $x_k \rightarrow \beta$. Si $t > 0$, se tiene

$$\limsup_n (x_{k_n} + th_{k_n}) = \beta + t \leq \limsup_n (x_n + th_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n th_n = \beta + t,$$

luego $\varphi(x + t) = \beta + t = \varphi(x) + t$, para $t > 0$. Si $t < 0$, un razonamiento similar muestra que $\varphi(x + t) = \varphi(x)$; por lo tanto,

$$\varphi(x + t) - \varphi(x) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

de lo que se concluye $\partial_+ \varphi(x, h) \neq \partial_- \varphi(x, h)$. Es decir, que φ no es G -diferenciable en ningún punto. $\square$

Observación 2.2.2.

- (1) Sea $e_n = \delta_{kn}$ (delta de Kronecker), es claro que $e_n \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Se observa que la función $\varphi(x) = \limsup_n |x_n|$ es derivable en cada punto $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ en la dirección de cada e_n . En efecto, para $|t|$ un valor muy cercano a cero y por la definición de límite superior se cumple:

$$\frac{\varphi(x + te_n) - \varphi(x)}{t} = 0.$$

- (2) El anterior resultado, también muestra que aún la condición de ser Lipschitz no es suficiente para garantizar las consecuencias del Teorema de Phelps en el caso no separable. En el siguiente teorema, se considerará la condición de ser Lipschitz, particularmente se hará uso de la norma, mostrando que ser Lipschitz no es tampoco impedimento a que las consecuencias del Teorema de Phelps se cumplan.

El Teorema 2.2.1 muestra que $\ell^\infty(\mathbb{R})$ no es G -Asplund. Sin embargo, se demostrará en el teorema siguiente que se conservan las buenas propiedades de los espacios G -Asplund en $\ell^\infty(\mathbb{R})$ para la norma $\varphi(x) = \sup_n |x_n|$ y se considerará su conjunto de G -diferenciabilidad. Más aún, en esta norma el conjunto de G -diferenciabilidad y F -diferenciabilidad son los mismos. Además, como $\ell^\infty(\mathbb{R})$ no es F -Asplund por el Teorema 1.5.13 existe una norma α equivalente a la norma φ que no es F -diferenciable en ninguna parte.

Teorema 2.2.3. *Sea $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las sucesiones acotadas con la norma $\varphi(x) = \sup_n |x_n|$. Si $B \subseteq \ell^\infty(\mathbb{R})$ es el conjunto de las sucesiones $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$; para las cuales existen $p \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, tales que $|x_k| < |x_p| - \epsilon$, para todo $k \neq p$. Entonces*

- (1) *El conjunto de G -diferenciabilidad de φ es B y la G -derivada de φ en $x \in B$ es*

$$\partial_G \varphi(x, h) = \text{sig}(x_p) h_p$$

Más aún, el conjunto de F -diferenciabilidad de φ coincide con B .

- (2) *B es un conjunto abierto y es denso.*

- (3) *Existe una medida gaussiana μ , tal que $\mu(B^c) = 0$.*

Demostración. (1) Si $x \in B$, $\epsilon > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ cumplen que $|x_k| < |x_p| - \epsilon$, para todo $k \neq p$. Si $\delta = \epsilon/2$ y $\|h\| < \delta$, se tiene

$$\varphi(x + h) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n + h_n| = |x_p + h_p| \quad \text{y} \quad \text{sig}(x_p + h_p) = \text{sig}(x_p),$$

con $u(h) = \text{sig}(x_p) h_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} r(x, h) &= \varphi(x + h) - \varphi(x) - \text{sig}(x_p) h_p = |x_p + h_p| - |x_p| - \text{sig}(x_p) h_p \\ &= \text{sig}(x_p)(x_p + h_p - x_p - h_p) = 0, \end{aligned}$$

obteniendo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x, h)\|}{\|h\|} = 0$. Luego φ es F -diferenciable, lo cual implica que $u(h) = \text{sig}(x_p) h_p$ es la G -derivada para $x \in B$.

Para demostrar que φ no es G -diferenciable en B^c , se tomará $x \in B^c$ y $\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Luego existe una subsucesión $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{k_n} > 0$, para todo n con $x_{k_n} \rightarrow \beta$ ó una subsucesión $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{k_n} < 0$ para todo n con $-x_{k_n} \rightarrow \beta$ (en cualquiera de los dos casos se procede de la misma manera). Sea $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $h_j = 0$ si $j \neq k_n$, $h_j = 1$ si $j = k_n$, n par y $h_j = -1$ si $j = k_n$, n impar. Ahora, si $x_{k_n} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y t es suficientemente pequeño, se tiene:

$$\sup\{|x_j + th_j| : j \neq k_n\} \leq \beta,$$

$$\sup\{|x_j + th_j| : j = k_n \text{ y } n \text{ es par}\} = \beta + t,$$

$$\sup\{|x_j + th_j| : j = k_n \text{ y } n \text{ es impar}\} = \beta - t.$$

Entonces $\varphi(x + th) = \beta + t$ si $t > 0$ y $\varphi(x + th) = \beta - t$ si $t < 0$, luego

$$d_+\varphi(x, h) = 1 \quad \text{y} \quad d_-\varphi(x, h) = -1,$$

por tanto, φ no es G -diferenciable en B^c , lo que implica que φ no es F -diferenciable en B^c .

(2) Si se toma $x \in B$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ tales que $|x_k| < |x_p| - \epsilon$, para todo $k \neq p$. Si se supone $y \in B(x, \epsilon/4)$ y $k \neq p$, se cumple

$$|y_k| \leq |y_k - x_k| + |x_k| \leq \epsilon/4 + |x_p| - \epsilon \leq |x_p - y_p| + |y_p| - 3\epsilon/4 \leq |y_p| - \epsilon/2.$$

Por tanto, $y \in B$, demostrando que B es abierto. Para demostrar que el conjunto B es denso en $\ell^\infty(\mathbb{R})$, se tomará $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$, luego existe un índice p tal que $\varphi(x) - \epsilon/4 < |x_p| \leq \varphi(x)$. Si se define $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como $y_p = \text{sig}(x_p)(\varphi(x) + \epsilon/2)$ y $y_k = x_k$, para $k \neq p$, entonces $|y_k| \leq \varphi(x) = |y_p| - \epsilon/2$, para $k \neq p$, lo que implica $y \in B$. Además,

$$|y_p - x_p| = |\text{sig}(x_p)(\varphi(x) + \epsilon/2) - \text{sig}(x_p)|x_p|| = |\varphi(x) + \epsilon/2 - |x_p|| < 3\epsilon/4 < \epsilon.$$

Por consiguiente, $\varphi(y - x) = |y_p - x_p| < \epsilon$.

(3) En $\ell^\infty(\mathbb{R})$ existe una medida gaussiana μ , ya que en la Sección 2.4.3 de Vakhania [74], se demuestra que existe una medida μ gaussiana sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, que cumple $\mu(\ell^\infty(\mathbb{R})) = 1$. Por otra parte, sean $t \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_t, \dots) \in B$. Si se define $f_t : B \rightarrow \mathbb{R}^t$ por

$$f_t(x_1, \dots, x_t, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t).$$

Entonces f_t es continua. En efecto, para un elemento y de la bola abierta $B(x, \delta)$, con $x, y \in B$ y $\|(x_1, \dots, x_t)\|_{\mathbb{R}^t} = |x_1| + \dots + |x_t|$, se cumple:

$$\begin{aligned} \|f_t(x) - f_t(y)\|_{\mathbb{R}^t} &= \|(x_1 - y_1, \dots, x_{t-1} - y_{t-1}, x_t - y_t)\|_{\mathbb{R}^t} \\ &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_{t-1} - y_{t-1}| + |x_t - y_t| \\ &\leq t \sup_n |x_n - y_n| = t \|x - y\|_{\ell^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Luego para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \frac{\epsilon}{t}$ tal que $\|x - y\|_{\ell^\infty(\mathbb{R})} < \delta$ implica $\|f_t(x) - f_t(y)\|_{\mathbb{R}^t} < \epsilon$. Por tanto, para cada medida gaussiana μ_t en cada $\mathbb{R}^t$ y $A \subseteq B$ se cumple que $\mu(A) = \mu_t(f_t(A))$.

Utilizando lo demostrado en el caso de f_t , se concluye que para $w \leq t \in \mathbb{N}$ y $g_t^w : B \rightarrow \mathbb{R}^t$, tal que

$$g_t^w(x_1, \dots, x_t, \dots) = (x_1, \dots, x_p, \dots, x_t), \text{ con } x_p \text{ en la } w\text{-ésima coordenada de } \mathbb{R}^t.$$

Además se cumple $\mu(A) = \mu_t(g_t^w(A))$, para todo $w \leq t \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq B$.

Si $t = 2$ y se define $B_2 = \bigcup_{w=1}^2 \{g_2^w(x) : |x_k| < |x_p| - \epsilon_p, 1 \leq k \leq t \text{ y } k \neq w\}$, es fácil demostrar que

$$B_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x_1, x_2) : x_2 = x_1, x_2 = -x_1\}.$$

Entonces $\mu_2(B_2) = 1$, y por tanto $B_2^c = \{(x_1, x_2) : x_2 = x_1, x_2 = -x_1\}$ cumple que $\mu_2(B_2^c) = 0$.

Ahora, si se toma cierto el resultado anterior para $t = n$. Es decir, $\mu(B_n) = 1$, para

$$B_n = \bigcup_{w=1}^n \{g_n^w(x) : |x_k| < |x_p| - \epsilon_p, k \neq w\}.$$

Luego

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \bigcup_{w=1}^{n+1} \{g_{n+1}^w(x) : |x_k| < |x_p| - \epsilon_p, k \neq w\} \\ &= \bigcup_{w=1}^{n-1} \{g_{n+1}^w(x) : |x_k| < |x_p| - \epsilon_p, k \neq w\} \cup \bigcup_{w=n}^{n+1} \{g_{n+1}^w(x) : |x_k| < |x_p| - \epsilon_p, k \neq w\} \\ &= B_{n-1} \times [\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]^2 \cup [\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]^{n-2} \times B_2 \\ &\supseteq B_n \times [\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p] \cup [\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]^{n-2} \times B_2 \\ &\supseteq B_n \times [\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]. \end{aligned}$$

Entonces para todo $x_p \in \mathbb{R}$, se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned}\mu_{n+1}(B_{n+1}) &\geq \mu_{n+1}(B_n \times [\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]) \\ &= \mu_n(B_n) \times \mu_1([\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]) \\ &= \mu_1([\epsilon_p - |x_p|, |x_p| - \epsilon_p]).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_{n+1}(B_{n+1}) = 1$ y $\mu_{n+1}(B_{n+1}^c) = 0$, de lo cual para todo $n \geq 2$, se cumple que $\mu_n(B_n^c) = 0$.

Finalmente, como $B^c \subset B_n^c \times \ell^{\infty-\{1, \dots, n\}}(\mathbb{R})$, donde $B_n^c \times \ell^{\infty-\{1, \dots, n\}}(\mathbb{R})$ es el conjunto de las sucesiones en $\ell^\infty(\mathbb{R})$ con las primeras n componentes en B_n^c , se cumple que

$$\mu(B^c) \leq \mu(B_n^c \times \ell^{\infty-\{1, \dots, n\}}(\mathbb{R})) \leq \mu(B_n^c \times \ell^\infty(\mathbb{R})) \leq \mu_n(B_n^c) \times \mu(\ell^\infty(\mathbb{R})) \leq \mu_n(B_n^c).$$

De aquí $\mu(B^c) \leq \mu_n(B_n^c)$ para todo $n \geq 2$. Es decir, que $\mu(B^c) = 0$. $\square$

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se considerará $L^\infty(\Omega)$, como el espacio de Banach de las clases de funciones de Ω en $\mathbb{R}$ medibles $\tilde{F}$ esencialmente acotadas. Es decir, todo representante f de $\tilde{F}$ cumple la condición $\inf\{M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M, \text{c.t.p.}\} < \infty$. En el teorema siguiente se demostrará que a diferencia de $\ell^\infty(\mathbb{R})$, la norma definida para $L^\infty(\Omega)$ no es G -diferenciable en ningún elemento del espacio.

Teorema 2.2.4. *En $L^\infty(\Omega)$ la norma $\varphi(f) = \inf\{M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M, \text{c.t.p.}\}$ no es G -diferenciable en ningún elemento del espacio.*

Demostración. Sea $\tilde{F} \in L^\infty(\Omega)$ y sea f un representante de $\tilde{F}$. Si $\varphi(f) = L > 0$ y si $h \in L^\infty(\Omega)$ se define como $h(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$. Entonces para $|t| < L$:

$$\varphi(f + th) = \begin{cases} L + t & \text{si } t > 0, \\ L & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Luego para $|t| < L$ se tiene

$$\frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Entonces $\partial_+ \varphi(f, h) = 1 \neq 0 = \partial_- \varphi(f, h)$.

Por otra parte, si $\tilde{F}$ posee un representante f tal que $\varphi(f) = 0$, entonces es claro de la definición de la norma φ que $f = 0$ c.t.p. y luego para todo $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t} = \varphi(h) \neq -\varphi(h) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(f + th) - \varphi(f)}{t},$$

demostrándose en este caso la no existencia de la G -derivada de la norma φ . Por tanto, la norma φ no es G -diferenciable en ningún $\tilde{F} \in L^\infty(\Omega)$. $\square$

A continuación, se muestra un resultado para el caso de las funciones reales de variación acotada BV con la misma conclusión del Teorema 2.2.1. Este mismo resultado se repite también con las normas de los espacios BV y NBV . De esta manera, se exhibe de forma mas intrínseca una patología del espacio NBV . En un trabajo posterior se espera estudiar la propiedad de aproximación de NBV . La propiedad de aproximación de diferentes espacios ha sido estudiada por Delgado et al. en [21], [22]. Dicha propiedad en BV ha sido establecida por Alberti et al. en [1].

Teorema 2.2.5. *Si $BV[a, b]$ es el espacio de Banach de las funciones reales de variación acotada con la seminorma $\alpha(f) = |f|([a, b])$. Entonces α no es G -diferenciable en ningún punto de $BV[a, b]$.*

Demostración. Sea $f \in BV[a, b]$ constante y $h \in BV[a, b]$ una función no constante. Entonces, es claro que $|f|([a, b]) = 0$, $|h|([a, b]) \neq 0$ y

$$\frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t} = \frac{|f + th|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} = \frac{|t|}{t} |h|([a, b]).$$

Luego no existe la G -derivada de α sobre f , ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t} = -|h|([a, b]) \neq |h|([a, b]) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t}.$$

Ahora, sea f no constante y $h = |f|([a, b])I_{[a, \frac{a+b}{2}]} + 0I_{(\frac{a+b}{2}, b]}$. Entonces $h \in BV[a, b]$ y para $t > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t} &= \frac{|f + th|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} \leq \frac{|f|([a, b]) + |t||h|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} \\ &= \frac{|f|([a, b]) + t|f|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} = |f|([a, b]) < \infty. \end{aligned}$$

Si $t < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t} &= \frac{|f + th|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} > \frac{t|h|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} \\ &= \frac{t|f|([a, b]) - |f|([a, b])}{t} = \left(\frac{t-1}{t}\right) |f|([a, b]), \end{aligned}$$

donde el orden de la anterior desigualdad es estricto, puesto que f no es una función constante. Luego $|f + th|([a, b]) > 0$ y para $t < 0$ es claro $t|h|([a, b]) < 0$. Por lo tanto, se concluye

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t} < \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\alpha(f + th) - \alpha(f)}{t} = \infty,$$

donde el límite del lado derecho se obtiene de $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} 1 - \frac{1}{t} = +\infty$. Luego α no es G-diferenciable para toda función f no constante. Todo lo cual implica que la seminorma α no es G-diferenciable en ningún $f \in BV[a, b]$. $\square$

Teorema 2.2.6. *Si $BV[a, b]$ es el espacio de Banach de las funciones reales de variación acotada con la norma $\varphi(f) = |f(a)| + |f|([a, b])$. Entonces φ no es G-diferenciable en ningún punto de $BV[a, b]$.*

Demostración. Si $f \in BV[a, b]$ es igual a una constante $k \in \mathbb{R}$ y $h = 0I_{[a, \frac{a+b}{2}]} + 1I_{(\frac{a+b}{2}, b]}$ entonces se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} &= \frac{|(k+th)(a)| + |k+th|([a, b]) - (|k| + |k|([a, b]))}{t} \\ &= \frac{|k+th(a)| + |t||h|([a, b]) - |k|}{t} \\ &= \frac{|k+t \cdot 0| + |t| \cdot 1 - |k|}{t} = \frac{|t|}{t}. \end{aligned}$$

Luego no existe la G-derivada de φ sobre f , ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} = -1 \neq 1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t}.$$

Ahora, para $f \in BV[a, b]$ no es una constante y $h = 0I_{[a, \frac{a+b}{2}]} + |f|([a, b])I_{(\frac{a+b}{2}, b]}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} &= \frac{|(f+th)(a)| + |f+th|([a, b]) - (|f(a)| + |f|([a, b]))}{t} \\ &= \frac{|f(a)| + |f+th|([a, b]) - (|f(a)| + |f|([a, b]))}{t}. \end{aligned}$$

Si $t > 0$, entonces

$$\frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} \leq \frac{|f(a)| + (1+t)|f|([a, b]) - |f(a)| - |f|([a, b])}{t} = |f|([a, b]).$$

Si $t < 0$, luego

$$\frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} > \frac{|f(a)| + t|f|([a, b]) - |f(a)| - |f|([a, b])}{t} = \left(\frac{t-1}{t}\right) |f|([a, b]),$$

donde el orden de la anterior desigualdad es estricto, puesto que f no es una función constante. Luego $|f+th|([a, b]) > 0$ y para $t < 0$ es claro $t|f|([a, b]) < 0$. Por lo tanto, para $h = 0I_{[a, \frac{a+b}{2}]} + |f|([a, b])I_{(\frac{a+b}{2}, b]}$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} < \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(f+th) - \varphi(f)}{t} = +\infty,$$

donde el límite del lado derecho se obtiene de $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} 1 - \frac{1}{t} = +\infty$. Lo cual implica que φ no es G-diferenciable para toda función f no constante. Por tanto, se puede concluir que la norma φ no es G-diferenciable en ningún $f \in BV[a, b]$. $\square$

El siguiente corolario es producto directo de los anteriores resultados.

Corolario 2.2.7. Si $NBV[a, b]$ es el espacio de Banach de las funciones reales normales de variación acotada con la norma $\varphi(f) = |f(a)| + |f|([a, b])$. Entonces φ no es G-diferenciable en ningún punto de $NBV[a, b]$.

Observación 2.2.8. La función $\alpha(f) = |f|([a, b])$ es Lipschitz continua, ya que

$$|\alpha(f) - \alpha(g)| = ||f|([a, b]) - |g|([a, b])| \leq |f - g|([a, b]).$$

Por tanto, $\alpha : BV[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Lipschitz definida de un espacio no separable a otro con la PRN, la cual no es G-derivable y por tanto no F-derivable en ningún elemento perteneciente a $BV[a, b]$.

Sean $\alpha(\cdot)$ y $\varphi(\cdot)$ dos normas en el espacio vectorial X . Se dirá que la norma $\alpha(\cdot)$ es *más débil* que la norma $\varphi(\cdot)$, si la topología inducida por la primera norma es más débil que la topología inducida por la segunda, esto es equivalente a la existencia de una constante $\beta > 0$ tal que $\alpha(x) \leq \beta\varphi(x)$, para todo $x \in X$. A continuación, se hace una observación en la cual se muestra que para un par de normas, una más débil que otra, no se sigue cumpliendo la misma relación de orden respecto a sus derivadas.

Observación 2.2.9. La existencia de una norma $\alpha(\cdot)$ más débil que una norma $\varphi(\cdot)$ no implica la existencia de un número real β_0 tal que $\partial_G \alpha(x, h) \leq \beta_0 \partial_G \varphi(x, h)$. En efecto, si se toma $X = \mathbb{R}^2$, con elementos de la forma (x_1, x_2) y se definen las normas $\alpha(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y $\varphi(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Entonces se verifica que $\alpha(x) \leq \beta\varphi(x)$ para $\beta = \sqrt{2}$ (más aún $\alpha(\cdot)$ y $\varphi(\cdot)$ son normas equivalentes). Por otro lado, dado $x_1 > x_2 > 0$ y $h = (a, b)$ se tienen las siguientes derivadas:

$$\partial_G \alpha(x, h) = \frac{ax_1 + bx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad y \quad \partial_G \varphi(x, h) = a.$$

En particular, si se toma $(x_1, x_2) = (2, 1)$, se obtiene $\partial_G \alpha(x, h) = \frac{2a+b}{\sqrt{5}}$ y $\partial_G \varphi(x, h) = a$. Luego no existe $\beta_0 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $h = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, se cumpla

$$\frac{2a+b}{\sqrt{5}} \leq \beta_0 a.$$

A continuación se enuncia y demuestra un pequeño lema, que a pesar de su sencillez nos da una idea de del tamaño de los conjuntos de G -diferenciabilidad y los no G -diferenciables. Para este lema será necesario tener en cuenta que un *cono* Ω es un subconjunto de un espacio real normado en el cual para todo $x \in \Omega$ y para todo $r \in \mathbb{R}^+$, se cumple $rx \in \Omega$.

Lema 2.2.10. *Sea Ω un cono abierto del espacio de Banach X . Si existe un $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}^+$ y se define la función f sobre Ω como $f(rx) = r^k f(x)$. Entonces f es G -diferenciable en x si y sólo si f es G -diferenciable en cx , para todo $c > 0$.*

Demostración. Sea $c > 0$, $x \in \Omega$ y $h \in X$. Para t suficientemente pequeño y Ω un cono se obtiene que $x + th$, cx , $cx + th$ y $c(x + th) = cx + cth$ pertenecen a Ω . Por tanto, se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(cx + th) - f(cx)}{t} &= \lim_{ct \rightarrow 0} \frac{f(cx + cth) - f(cx)}{ct} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c^k f(x + th) - c^k f(x)}{t} \\ &= c^k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \end{aligned}$$

□

Observación 2.2.11. Sea Ω un cono abierto del espacio de Banach X y $x \in \Omega$.

1. A todas las funciones f definidas sobre Ω para las cuales se cumple que existe un $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(rx) = |r|^k f(x)$, se les puede aplicar la misma demostración del lema anterior, obteniendo el mismo resultado.
2. De lo escrito anteriormente, una norma $\varphi(\cdot)$ sobre X , cumple el lema precedente.
3. En el lema anterior también es posible concluir que si f no es G derivable sobre x , tampoco lo es en cx , para $c > 0$, esto si f se define sobre Ω . Esto último igualmente se cumple en el caso que f sea una norma del espacio X .

Capítulo 3

G-derivada de funciones localmente Lipschitz

En este capítulo, se mostrarán algunas variaciones inéditas del Teorema de Phelps en principio sobre espacios separables y de Hilbert, luego sobre espacios no separables para obtener resultados similares al ya mencionado teorema. Además, se añaden algunos resultados pertenecientes a la diferenciabilidad de funciones localmente Lipschitz y en cuanto se progrese, se proponen algunos ejemplos que ilustren los avances.

3.1. Caso espacios separables y de Hilbert

En la Proposición 1.4.10 y el Teorema 1.6.14 de este documento, se mostró respectivamente que existía una relación entre funciones G -diferenciables y funciones H -diferenciables vía funciones localmente Lipschitz y que un espacio de Banach es F -Asplund si y sólo si su dual tiene la PRN. En este sentido, primero se mostrará un resultado en el cual se pone de manifiesto que el Teorema de Phelps no habla exclusivamente de funciones G -derivables, es en realidad un resultado que se acomoda a las funciones H -diferenciables en cuya demostración sólo se aplica la Proposición 1.4.10. Luego se juega un poco con el Teorema 1.6.14, obteniendo una variación del Teorema de Phelps, en el cual se involucran los espacios de Asplund.

Corolario 3.1.1. *Sea X un espacio de Banach separable. Si f cumple todas las hipótesis del Teorema de Phelps, entonces f es H -diferenciable en el complemento de un conjunto gaussiano nulo de un abierto no vacío Ω de X .*

Teorema 3.1.2. Sean X un espacio de Banach separable, $\Omega \subset X$ un abierto no vacío y Y' un espacio dual con la PRN. Si $\psi : Y' \rightarrow Y$, es H -diferenciable en todo Y' y $T : \Omega \rightarrow Y'$ es localmente Lipschitz. Entonces Y es Asplund y existe un $\tau : \Omega \rightarrow Y$ que es H -diferenciable, salvo en un conjunto gaussiano nulo.

Demostración. Del Teorema de Phelps, T es G -diferenciable salvo en un conjunto B^c de medida gaussiana $\mu(B^c) = 0$, como T es localmente Lipschitz entonces T es H -diferenciable salvo en B^c y si se define $\tau = \psi \circ T$. Entonces de la regla de la cadena en la H -derivada, se cumple para $x \in B$, $y' \in Y'$, $h \in X$ y $h' \in Y'$ que:

$$\partial_H \tau(x, h) = \partial_H \psi(y', h') \cdot \partial_H T(x, h),$$

por tanto, τ es H -derivable en B y además

$$\begin{aligned} \mu\{x \in X : \partial_H \tau(x, h) \text{ existe}\} &= \mu\{x \in X : \partial_H \psi(y', h') \cdot \partial_H T(x, h) \text{ existe}\} \\ &= \mu\{x \in X : \partial_H T(x, h) \text{ existe}\} = \mu(B). \end{aligned}$$

Es decir, $\mu\{x \in X : \partial_H \tau(x, h) \text{ no existe}\} = \mu(B^c)$, concluyendo lo requerido. $\square$

Observación 3.1.3.

- (1) Si $Y = Y'$, es claro que este teorema coincide con el de Phelps.
- (2) Si Y tiene la PRN, sólo hay que demostrar en el teorema anterior que τ es localmente Lipschitz.

De ahora en adelante, se harán una serie de extensiones del Teorema de Phelps en espacios no separables. Para ello, se iniciará con el siguiente teorema en espacios de Hilbert.

Teorema 3.1.4. Si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con norma $\varphi(\cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$, entonces $B = H \setminus \{0_H\}$ es el conjunto de F -diferenciabilidad de $\varphi(\cdot)$, con derivada

$$\partial_F \varphi(x, h) = \frac{\langle x, h \rangle}{\varphi(x)},$$

por tanto, para toda medida gaussiana no degenerada μ definida en H , se cumple que $\mu(B^c) = 0$.

Demostración. En efecto, para $x \neq 0_H$, $h \in H$, $f(x) = \langle x, x \rangle = \varphi^2(x)$ y $u = 2 \langle x, h \rangle$ se cumple:

$$\begin{aligned} \|r(h)\| &= \|f(x + th) - f(x) - 2 \langle x, h \rangle\| = |\varphi^2(x + th) - \varphi^2(x) - 2 \langle x, h \rangle| \\ &= |\langle x + h, x + h \rangle - \langle x, x \rangle - 2 \langle x, h \rangle| \\ &= |\langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle - \langle x, x \rangle - 2 \langle x, h \rangle| = 0, \end{aligned}$$

luego $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$, entonces f es F -derivable sobre los $x \neq 0_H$. Como es conocido que para todo $y \in \mathbb{R}^+$ la F -derivada de $g(y) = y^{1/2}$ existe, por (4) de la Proposición 1.4.10 se concluye que $\varphi = g \circ f$ es F -derivable sobre los $x \neq 0_H$, con derivada

$$\partial_F \varphi(x, h) = \partial_F g(f(x), h') \cdot \partial_F f(x, h) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot 2 \langle x, h \rangle = \frac{\langle x, h \rangle}{\varphi(x)},$$

donde $h \in H$, $h' \in \mathbb{R}$ y $f(x) \in \mathbb{R}^+$.

Por otro lado, si $x = 0_H$, se cumple:

$$\frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = \frac{\varphi(th)}{t} = \frac{|t|}{t} \varphi(h)$$

por tanto, φ no es G-diferenciable en 0_H . □

Observación 3.1.5. En el libro de Dieudonne [26], Ejercicio 1, página 151 una versión análoga al anterior teorema se puede enunciar en el caso de espacios prehilbertianos, obteniendo los mismos resultados y los cuales generalizan el Teorema de Phelps en espacios prehilbertianos de cualquier dimensión.

Definición 3.1.6. Sea (E, α) un espacio normado. Se dice que α es una **norma rotunda**, si para todo $x, y \in E$ tal que $\alpha(x) = \alpha(y) = 1$ y $\alpha(x + y) = 2$, se cumple $x = y$.

En el caso de espacios de Hilbert, el siguiente resultado es consecuencia directa de la anterior definición y la ley del paralelogramo.

Teorema 3.1.7. *Todo espacio de Hilbert H tiene norma α rotunda.*

Observación 3.1.8.

- (1) El dual H' de un espacios de Hilbert H es isometricamente isomorfo a H .
- (2) Se puede definir un producto interno $\langle ; \rangle$ en H' , tal que $(H', \langle ; \rangle)$ sea un espacio de Hilbert con $\| \cdot \|_{H'} = \langle ; \rangle^{1/2}$.
- (3) Todo espacio de Hilbert H es reflexivo.

Por otro lado, en el libro de Deville [23] se propone y se demuestra el siguiente teorema para el dual E' de un espacio de Banach E .

Teorema 3.1.9. *Si α' en E' es una norma rotunda, entonces α es G-diferenciable (G -derivable en todas partes menos en $0 \in E$).*

El siguiente es un ejemplo de espacio de Hilbert no separable que cumple con lo anterior.

Ejemplo 3.1.10. El conjunto de las funciones reales $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sólo son diferentes de cero en un conjunto finito o contable de puntos S_f tal que $\sum_{x \in S_f} |f(x)|^2 < \infty$ con producto escalar $\langle f, g \rangle = \sum_{S_f \cap S_g} \overline{f(x)}g(x)$ y $\|f\| = (\sum_{S_f} |f(x)|^2)^{1/2}$.

3.2. Caso espacios no separables

En el Teorema de Phelps se toma una función localmente Lipschitz con dominio en un espacio de Banach X separable. A continuación, se mostrará (ver también en [51]) que esta condición se puede cambiar a espacios no separables, si se supone a el espacio de Banach X como un límite proyectivo de espacios de Banach finito, en donde las funciones conectoras cumplen la condición de ser H -diferenciables. Para llegar a buen término, se empezará enunciado y demostrando la siguiente proposición original.

Proposición 3.2.1. *Dada una función $f : \Omega \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz y no constante sobre ningún abierto de Ω . Si f resulta de componer otras dos funciones $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $p : \Omega \rightarrow Y$, $f(x) = h(p(x))$, entonces h es localmente Lipschitz.*

Demostración. Dado que f es localmente Lipschitz sobre $x \in \Omega$, entonces existe $B(x, r)$, $k > 0$ tal que para $y \in B(x, r)$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |h(p(x)) - h(p(y))| \leq k\|x - y\|_X.$$

Si se supone que h no es localmente Lipschitz, entonces para todo $k_0 > 0$ y $y \in B(x, r)$, se tiene:

$$|h(p(x)) - h(p(y))| > k_0\|p(x) - p(y)\|_Y.$$

Luego, utilizando la primera desigualdad

$$\|p(x) - p(y)\|_Y < \frac{k}{k_0}\|x - y\|_X \leq \frac{k}{k_0}r,$$

para todo $k_0 > 0$, de lo que se concluye que $p(x) = p(y)$ y a su vez que $f(x) = f(y)$ para todo $y \in B(x, r) \subseteq \Omega$. Lo que contradice la hipótesis en la cual se toma a f una función no constante sobre ningún abierto de Ω . $\square$

Observación 3.2.2.

- (1) Si se toma en cuenta que dado $t \preceq s$, para las funciones conectoras anteriormente mencionadas y $f \in Cil(X_T) \equiv C_T$ una función cilíndrica, de la Observación 1.2.8 se cumple que existen $m_t \in Cil(X_t) \equiv C_t$ y $m_s \in Cil(X_s) \equiv C_s$, tal que

$$f = m_t \circ p_t = m_s \circ p_s.$$

(2) Si f , m_t , p_t son H -diferenciables entonces para $f = m_t \circ p_t$, se cumple:

$$\partial_H f(x, h) = \partial_H[m_t(p_t)(x, h)] = \partial_H m_t(p_t(x, h)) \partial_H p_t(x, h).$$

Por tanto, la existencia de $\partial_H m_t(x_t, h)$ implica la existencia de $\partial_H f(x, h)$.

En el siguiente teorema, se hará la extensión del Teorema de Phelps en el caso de funciones cilíndricas y localmente Lipschitz, definidas sobre un límite proyectivo X_T , el cual se supondrá no separable.

Teorema 3.2.3. *Sea X_T un espacio de Banach no separable, el cual es límite proyectivo de la familia de espacios de dimensión finita $(X_t)_{t \in T}$ con proyecciones t -esimas p_t y $\Omega \subseteq X_T$ un abierto. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función cilíndrica y localmente Lipschitz, donde $f(x) = m_t \circ p_t(x)$, no constante sobre ningún abierto de Ω . Si μ y $\mu_t = p_t(\mu)$ medidas gaussianas definidas sobre X_T y sobre X_t respectivamente. Entonces*

$$\mu(\{x \in \Omega : \partial_G f(x, h) \text{ no existe}\} \cap \Omega) = 0.$$

Demostración. Como $f(x) = m_t \circ p_t(x)$ es localmente Lipschitz, de la Proposición 3.2.1 se obtiene que m_t es localmente Lipschitz. Como X_t es de dimensión finita, $\mathbb{R}$ tiene la PRN y $m_t : X_t \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces del Teorema de Phelps aplicado a cada m_t , se cumple que

$$\mu_t(\{x_t \in \Omega_t : \partial_G m_t(x_t, h) \text{ no existe}\}) = 0, \text{ donde } p_t(\Omega) = \Omega_t.$$

Por otro lado, como $p_t(\cdot)$ es continua sobre Ω y por tanto medible, se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \Omega : \partial_G f(x, h) \text{ no existe}\}) &= \mu(p_t^{-1}(\{x_t \in \Omega_t : \partial_G m_t(x_t, h) \text{ no existe}\})) \\ &= \mu_t(\{x_t \in \Omega_t : \partial_G m_t(x_t, h) \text{ no existe}\}). \end{aligned}$$

Todo lo cual implica que $\mu(\{x \in \Omega : \partial_G f(x, h) \text{ no existe}\}) = 0$. □

Observación 3.2.4. Si se define a $f = m_t \circ p_t(x)$ sobre $C_T(Z)$ ($C_T(Z)$ el conjunto de funciones continuas de X_T en Z), m_t sobre $C_t(Z)$ ($C_t(Z)$ el conjunto de funciones continuas de X_t en Z), para Z un espacio de Banach con la PRN, si se extiende la demostración de la Proposición 3.2.1 de $\mathbb{R}$ a Z y si se asumen las restantes condiciones del teorema anterior. Entonces se demuestra de igual manera a lo hecho anteriormente que $\mu(\{x \in \Omega : \partial_G f(x, h) \text{ no existe}\}) = 0$.

En los siguientes ejemplos, se mostrará que le sucede a una función Lipschitz definida sobre un espacio de Banach, la cual cumple con las hipótesis de la observación anterior.

Ejemplo 3.2.5. Dado que $\ell^\infty(\mathbb{R})$ un espacio de Banach no separable, con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$, se puede definir como el límite proyectivo de espacios finitos $(\mathbb{R}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si se define $f : \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$, como la serie convergente

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^2},$$

esta función es continua, ya que del punto (2) de la Observación 1.4.8 basta con demostrar que es Lipschitz en $\ell^\infty(\mathbb{R})$ y en efecto, para $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|}{k^2}$$

luego $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2}$ converge y como $|x_k - y_k| \leq \|x - y\|_\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k| - |y_k|}{k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x - y\|_\infty}{k^2} \\ &\leq \|x - y\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe un $k_0 = 1$ tal que para todo $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, se cumple

$$|f(x) - f(y)| \leq k_0 \|x - y\|_\infty.$$

Por otro lado, para $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ se puede afirmar que $p_t : \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^t$ definida como $p_t(x) = (x_1, \dots, x_t)$ y $m_t : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $m_t(x_1, \dots, x_t) = \sum_{k=1}^t \frac{|x_k|}{k^2}$ son funciones continuas, ya que respectivamente se cumple:

$$\sum_{k=1}^t |x_k - y_k| \leq t \|x - y\|_\infty \quad y \quad \sum_{k=1}^t \frac{|x_k - y_k|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^t |x_k - y_k|.$$

Es decir, p_t y m_t son funciones Lipschitz y se puede aplicar el punto (2) de la Observación 1.4.8.

Además, es clara la existencia de medidas gaussianas μ_t para cada $\mathbb{R}^t$ y por lo hecho en la Sección 2.4.3 de Vakhania [74], se demuestra que existe una medida μ gaussiana sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, la cual cumple que $\mu(\ell^\infty(\mathbb{R})) = 1$.

Observación 3.2.6. Sean $\ell^1(\mathbb{R})$ y $\ell^\infty(\mathbb{R})$ dos espacios con sus respectivas normas usuales $\|\cdot\|_{\ell^1(\mathbb{R})}$ y $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{R})}$. Si se toman $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ y $T : \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{R})$ una transformación lineal continua e inyectiva definida por

$$T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Esta función es Fréchet diferenciable en todas partes con derivada

$$\partial_F T(x, h) = T(h).$$

Si $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_{\ell^1(\mathbb{R})}$ y se toma $k = (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$, del Teorema 2.1.9 la norma φ es G -diferenciable sobre el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$, tales que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con derivada

$$\partial_G \varphi(x, k) = \sum_n \text{sig}(x_n) k_n.$$

Por otro lado, para todo $h \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ la función $f : \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \varphi(T(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2},$$

es G -diferenciable sobre el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, tales que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con derivada

$$\partial_G f(x, h) = \partial_G \varphi(T(x), T(h)) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sig}(x_n) \frac{h_n}{n^2}.$$

Por tanto, aunque la regla de la cadena no vale para la derivada de Gâteaux, en lo hecho anteriormente es posible aplicar esta regla, puesto que

$$\begin{aligned} \partial_G(\varphi \circ T)(x, h) &= \partial_G f(x, h) = \partial_G \varphi(T(x), T(h)) = \partial_G \varphi(T(x)) \circ T(h) \\ &= \partial_G \varphi(T(x)) \circ \partial_G T(x, h). \end{aligned}$$

Además, la función f es otra norma en $\ell_\infty(\mathbb{R})$ que cumple:

$$f(x) \leq \|x\|_\infty \left\| \left(1/n^2 \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_1.$$

A continuación, se proponen algunas extensiones del Teorema 3.2.3, en las cuales se establecen espacios de llegada distintos a $\mathbb{R}$.

Proposición 3.2.7. *Suponiendo las mismas hipótesis del Teorema 3.2.3, con f continua y tomando g una función Lipschitz de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces para $\mathcal{H} = g \circ f$, $f(x) = m_t \circ p_t(x)$, $\mathcal{H}$ es G -diferenciable excepto en un conjunto de medida gaussiana nula con respecto al abierto Ω del teorema referido.*

Demostración. Utilizando el Teorema 3.2.3, para μ una medida gaussiana sobre X_T , se cumple que $\mu(\{x \in \Omega : \partial_H f(x, h) \text{ no existe}\}) = 0$. Por otro lado, del Teorema de Rademacher se cumple que $\partial_H g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, existe excepto en un conjunto de medida gaussiana nula, en este caso Lebesgue nula de $\mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\partial_H \mathcal{H}(x, h) = \partial_H g(f(x), \tilde{h}) \cdot \partial_H f(x, h), \quad \tilde{h} \in \mathbb{R}.$$

De lo cual,

$$\begin{aligned} & \mu(\{x \in \Omega : \partial_H \mathcal{H}(x, h) \text{ no existe}\}) \\ &= \mu(\{x \in \Omega : \partial_H g(f(x), \tilde{h}) \text{ no existe}\} \cup \{x \in \Omega : \partial_H f(x, h) \text{ no existe}\}) \\ &\leq \mu(\{x \in \Omega : \partial_H g(f(x), \tilde{h}) \text{ no existe}\}) + \mu(\{x \in \Omega : \partial_H f(x, h) \text{ no existe}\}) \\ &= \mu(\{x \in \Omega : \partial_H g(f(x), \tilde{h}) \text{ no existe}\}) + 0 \\ &= \lambda(\{t \in \mathbb{R} : \partial_H g(t, \tilde{h}) \text{ no existe}\}) = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida a la continuidad de f . □

Proposición 3.2.8. *Suponiendo las mismas hipótesis del Teorema 3.2.3, con f continua y tomando g una función localmente Lipschitz de $\mathbb{R}$ en un espacio Y con la PRN. Entonces, para $\mathcal{H} = g \circ f$, $f(x) = m_t \circ p_t(x)$, $\mathcal{H}$ es G -diferenciable excepto en un conjunto de medida gaussiana nula, con respecto al abierto Ω del teorema referido.*

Demostración. Utilizando el Teorema 3.2.3, el Teorema de Phelps y aplicando un proceso similar a la proposición anterior, se obtiene el resultado. □

Corolario 3.2.9. *Suponiendo las mismas hipótesis de la proposición anterior, tomando $Y = X'$ el espacio dual de un espacio de Banach X y si $\psi : X' \rightarrow X$ es H -diferenciable. Entonces X es Asplund y $\tau = \psi \circ \mathcal{H} : \Omega \subseteq X_T \rightarrow X$ es H -diferenciable salvo un conjunto gaussiano nulo.*

Demostración. Dado que $\mathcal{H} = g \circ f$, para f y g localmente Lipschitz, entonces $\mathcal{H} : \Omega \rightarrow X'$ es localmente Lipschitz. Por lo tanto, de lo hecho en la proposición anterior y lo hecho en el Teorema 3.1.2, se concluye que $\tau = \psi \circ \mathcal{H}$ es H -diferenciable salvo en un conjunto gaussiano nulo. □

Conclusiones

No es posible la extensión del Teorema de Phelps en todo espacio de Banach no separable. En efecto, en el Capítulo 3 se muestra el caso de la seminorma $\limsup_n |x_n|$ del espacio no separable $\ell^\infty(\mathbb{R})$ y los casos de las normas en los espacios $L^\infty(\Omega)$, $BV[a, b]$ y $NBV[a, b]$ como ejemplos de funciones localmente Lipschitz las cuales no son G -diferenciables en ningún punto.

Sea T un espacio metrizable. El conjunto de todas las $x \in \mathcal{C}(T)$, en las cuales $\varphi(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|$ es G -diferenciable, es denso.

La norma $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ del espacio $L^1(\mathbb{R})$, es G -diferenciable sobre el conjunto de las $\tilde{F} \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\tilde{F}$ posee un representante f que cumple $\inf_{[\alpha, \beta]} |f(x)| > 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

El complemento del conjunto de todos las $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(x) = \sup_n |x_n|$ es G -diferenciable, tiene medida gaussiana cero.

Se estableció una extensión del Teorema de Phelps sobre espacios separables a funciones con valores en espacios de Asplund.

Se establecieron algunos resultados sobre normas en espacios de Hilbert y otras consecuencias en los cuales se relacionan funciones localmente Lipschitz y las normas de los espacios de partida de estas funciones.

Se estableció una extensión del Teorema de Phelps en el caso de espacios no separables, para límites proyectivos y funciones cilíndricas localmente Lipschitz con valores en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ y sobre espacios con la PRN.

Bibliografía

- [1] Alberti, G.; Csörnyei, M.; Peczyński, A. and Preiss, D. *BV has the bounded approximation property*. J. Geom. Anal. 15, No. 1 (2005) 17.
- [2] Aronszajn, N. *Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*. Studia Math., No. 57 (1976) 147-190.
- [3] Asplund, E. *Fréchet differentiability of convex functions*. Acta Math. No. 121 (1968) 31-47.
- [4] Bauer, H. *Probability theory and elements of measure theory*. Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1972).
- [5] Benyamini, Y. and Lindenstrauss, J. *Geometric nonlinear functional analysis*. Colloquium Publications, AMS, Vol. 48 (2000).
- [6] Billingsley, P. *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York (1968).
- [7] Bogachev, V. *Measure theory*. Springer-Verlag, Vol. 1, Berlin (2007).
- [8] Bogachev, V. *Measure theory*. Springer-Verlag, Vol. 2, Berlin (2007).
- [9] Bogachev, V. *Gaussian measures*. Amer. Math. Soc., No. 62 (1998).
- [10] Bongiorno, D. *Metric differentiability of Lipschitz maps*. J. Aust. Math. Soc., 96 (2014), 25-35.
- [11] Bongiorno, D. *Absolutely continuous functions with values in a Banach space*. J. Math. Anal. Appl. 451, No. 2 (2017) 1216-1223.
- [12] Bourbaki, N. N. *Eléments de mathématique, espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5, Springer, Paris (1981).

- [13] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, New York (2011).
- [14] Carothers, N. L. *A short course on Banach space theory*. Cambridge University Press (2005).
- [15] Cartan, H. *Théorie des filtres*. C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937) 595-598.
- [16] Cartan, H. *Filtres et ultrafiltres*. C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937) 777-779.
- [17] Coleman, R. *Calculus on normed vector spaces*. Springer, New York (2012).
- [18] Csörnyei, M. *Aronszajn null and Gaussian null sets coincide*. Israel J. Math. 111 (1999), 191-201.
- [19] Daniel, P. J. *Integrals in an infinite number of dimensions*. Annals of Mathematics, No. 4, Vol. 20 (1919) 281-288.
- [20] Da Prato, G. *An Introduction to infinite dimensional analysis*. Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [21] Delgado, J. and Ruzhansky, M. *The bounded approximation property of variable Lebesgue spaces and nuclearity*. Math. Scand. 122, No. 2 (2018) 299-319.
- [22] Delgado, J.; Ruzhansky, M. and Wang, B. *Approximation property and nuclearity on mixed-norm L_p , modulation and Wiener amalgam spaces*. J. Lond. Math. Soc. (2) 94, No. 2 (2016) 391-408.
- [23] Deville, R.; Godefroy G. and Zizler, V. *Smoothness and renormings in Banach spaces*. Longman Group UK Limited (1993).
- [24] Diestel, J. *Geometry of Banach spaces*. Lect. Notes in Math., No. 485, Springer-Verlag (1975).
- [25] Diestel, J. and Uhl, J.J. *Vector measures*. Amer. Math. Soc., Vol. 15 (1977).
- [26] Dieudonne, J. *Fundamentos de análisis moderno*. Reverte, Vol. 1 (1966).
- [27] Dieudonne, J. *History of functional analysis*. North Holland, Amsterdam (1981).
- [28] Dugundji, J. *Topology*. Allyn and Bacon Inc, United States of America (1976).

- [29] Dunford, N. *Integration and linear operations*. Trans. Amer. Math. Soc., No. 40 (1936), 474-494.
- [30] Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Linear operators. Part 3: Spectral Operators*. New York: Interscience, (1971).
- [31] Einstein, A. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover Publications, Inc. (1956).
- [32] Enflo, P. *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*. Acta Math. Vol. 130, No. 1 (1973) 309-317.
- [33] Evans, L. C. *Partial differential equations*. Am. Math. Soc., 2nd edition (2010).
- [34] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Montesinos, V. and Zizler, V. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. Springer-Verlag New York, Inc. (2001).
- [35] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Montesinos, V. and Zizler, V. *Banach space theory the basis for linear and nonlinear analysis*. Springer-Verlag New York, Inc. (2011).
- [36] Fabian, M. *Gateaux differentiability of convex functions and topology: weak Asplund spaces*. John Wiley and Sons, Inc. (1997).
- [37] Feynman, R. P. *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*. Reviews of Modern Physics. 20 (2) (1948) 367-387.
- [38] Fleming, R. J. and Jamison, J. E. *Isometries on Banach spaces: vectorvalued function spaces*. Vol. 2, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 138, CRC, Boca Raton, FL, (2008).
- [39] Giles, J. R. *Convex analysis with applications in differentiation of convex functions*. Pitman advanced Publishing Program (1982).
- [40] Gieraltowska, M. and Van Vleck, F. S. *Fréchet Vs. Gâteaux differentiability of Lipschitzian functions*. Am. Math. Soc., Vol. 114, No. 4 (1992) 905-907.
- [41] Goldys, B. and Gozzi, F. *Second order parabolic Hamilton-Jacobi-Bellman equations in Hilbert spaces and stochastic control: L^2_μ approach*. Stochastic Process. Appl. 116, No. 12 (2006) 1932-1963.

- [42] Hogbe-Nlend, H. *Bornologies and functional analysis*. Vol. 26, North-Holland, Amsterdam (1977).
- [43] Jech, T. *Set theory- 3rd millennium ed, rev. and expanded*. Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [44] Kuelbs, J. *Gaussian measures on Banach space*. Journal of Functional Analysis, No. 5 (1970) 354-367.
- [45] Larman, D.G. and Phelps, R. R. *Differentiability of convex functions on Banach spaces*. J. London Math. Soc. (2), 20 (1979) 115-127.
- [46] Lax, P. D. *Functional analysis*. Wiley-Interscience, New York (2002).
- [47] Lindenstrauss, J.; Preiss, D. and Tišer, J. *Fréchet differentiability of Lipschitz functions and porous sets in Banach spaces*. Princeton University Press, Princeton and Oxford (2012).
- [48] Lindenstrauss, J.; Preiss, D. and Tišer, J. *Fréchet differentiability of Lipschitz functions via a variational principle*. J. Eur. Math. Soc. 12 (2010) 385-412.
- [49] Mackey, G. W. *Theory of unitary group representation*. Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press (1976).
- [50] Mazur, S. *Über konvexe mengen in linearen normierten räumen*. Studia Math., No. 4 (1933) 70-84.
- [51] Muñoz-Tello, A. F. *Gâteaux differentiability on non-separable Banach spaces*. arXiv:1808.02843 [preprint] (2018).
Disponible en: <http://arxiv.org/abs/1808.02843>
- [52] Namioka, I. and Phelps R. R. *Banach spaces which are Asplund spaces*. Duke Math. J., Vol. 42, No. 4 (1975) 735-750.
- [53] Oxtovi, J. C. *Measure and category*. Springer- Verlag, New York (1980).
- [54] Penot, J. P. *Calculus without derivatives*. Springer, New York (2013).
- [55] Phelps, R. R. *Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz map on Banach spaces*. Pacific Juornal of Mathematics, Vol. 77, No. 2 (1978) 523-531.
- [56] Phelps, R. R. *Convex functions, monotone operators and differentiability*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1989).

- [57] Pietsch, A. *History of Banach spaces and linear operators*. Birkhuser Boston (2007).
- [58] Preiss, D. *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*. Journal of Functional Analysis, No. 91 (1990) 312-345.
- [59] Preiss, D. *Differentiability and measures in Banach spaces*. International Congress of Mathematicians, 1990, Kyoto (1990).
- [60] Rademacher, H. *Über partielle und totale differenzierbarkeit von funktionen mehrerer variablen und über die transformation der doppelintegrale*—. Math. Ann., No. 79 (1919) 340-359.
- [61] Rall, L. B. *Functional analysis & Applications*. Academic Press New York - London (1970).
- [62] Restrepo, G. *Differentiable norms in Banach spaces*. Bull. Am. Math. Soc. 70 (1964) 413-414.
- [63] Restrepo, G. *Teoría de integración*. Universidad del Valle (2004).
- [64] Ryszard, E. *General topology*. Heldermann Verlag Berlin (1989).
- [65] Schirotzek, W. *Nonsmooth analysis*. Springer (2007).
- [66] Semadeni, Z. *Banach spaces of continuous functions*. PWN, Warszawa (1971).
- [67] Shiryaev, A. N. *Probability*. Second Edition Springer, New York (1996).
- [68] Shi, J. and Wang, X. *On global bifurcation for quasilinear elliptic systems on bounded domains*. J. Differential Equations 246, No. 7 (2009) 2788-2812.
- [69] Skorohod, A. V. *Integration in Hilbert space*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1974).
- [70] Sova, M. *Conditions of differentiability in linear topological spaces*. Czech. Math. J. (1966) 339-362.
- [71] Stegall, C. *The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nykodým property*. Israel J. Math., No. 29 (1978) 408-412.
- [72] Schwartz, L. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*. Tata institute of Fundamental Research, Oxford University Press (1973).

- [73] Vakhania, N. N.; Tarieladze, V. I. and Chobanyan, S. A. *Probability distributions on Banach spaces*. D. Reidel Publishing Company (1987).
- [74] Vakhania, N. N. *Probability distributions on linear spaces*. Elsevier North Holland (1981).
- [75] Volterra, V. *Supra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, *Rendiconti. Accad. Naz. dei Lincei*, ser IV, Vol. III (1887) 97-105.
- [76] Wussing, H. *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI, Madrid (1998).
- [77] Yosida, K. *Functional analysis*. Second Edition Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1980).
- [78] Zelenyuk, Y. G. *Ultrafilters and topologies on groups*. De Gruyter Expositions in Mathematics, 50, Berlin (2011).

Índice alfabético

- $\mathcal{B}$ -derivada, 22
- σ -Álgebra, 5
- Álgebra, 5
- Átomo, 34
- Antisimetría de un cociente diferencial, 43
- Base
 - de filtro
 - sobre un conjunto, 37
 - de Schauder, 34
- Bornología, 21
- Clase de Aronszajn, 42
- Conjunto
 - G_δ , 28
 - dirigido, 12
 - Gauss nulo, 19
 - Lebesgue nulo, 27
- Cono, 71
- Derivada
 - de Frechét, 22
 - de Gateaux, 22
 - de Hadamard, 22
- Distribución de una variable aleatoria, 16
- Dualidad, 31
- Espacio
 - F -Asplund, 28
 - G -Asplund, 28
 - bornológico, 21
 - con la propiedad de Radon-Nikodým (PRN), 34
 - de Baire, 28
 - de medida de probabilidad, 10
 - de primera categoría, 28
 - de segunda categoría, 28
 - localmente convexo, 19
 - medible
 - $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, 6
 - $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, 7
 - $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N}))$, 7
 - $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, 6
 - separable, 10
- Familia
 - proyectiva, 12
 - de subespacios de dimensión finita, 13
- Filtro, 36
 - generado por una red, 38
- Función
 - $\mathcal{B}$ -diferenciable, 21
 - μ -continua, 33
 - característica
 - en $\mathbb{R}$, 17
 - cilíndrica, 12
 - convexa, 27
 - de variación acotada, 33
 - normal, 33
 - Lipschitz, 24

- localmente Lipschitz, 24
 - radialmente diferenciable, 21
- Hiperplano de apoyo, 29
- Límite
 - proyectivo
 - de espacios topológicos, 12
 - de medidas borelianas, 12
- Medida
 - atómica, 34
 - de Probabilidad, 8
 - debilmente regular, 11
 - fuertemente regular, 11
 - gaussiana
 - en $\mathbb{R}$, 16
 - en un espacio de Banach, 19
 - en un espacio de Hilbert, 18
 - en un espacio localmente convexo, 19
 - radoniana, 11
- Norma
 - G y F , 30
 - admisible, 30
 - dual, 30
 - equivalente, 30
 - más débil, 70
 - redonda, 30
 - rotunda, 74
 - suave, 30
- Operador
 - nuclear, 18
 - positivo, 18
 - simétrico, 18
- Pareja dual, 31
- Probabilidad
 - cilíndrica, 12
 - en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}})$, 9
 - en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R})^n)$, 8
 - en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^T)$, 9
- Proyección t-esima, 12
- Punto
 - de apoyo, 29
 - regular, 30
 - singular, 30
- Red, 38
 - generada por un filtro $\mathcal{F}$, 38
- Signatura de un número real, 44
- Teorema
 - de Carathéodory, 9
 - de Kolmogórov en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$, 9
 - de Kolmogórov en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, 10
 - de la dualidad de Riesz, 32
 - de Mazur, 28
 - de Phelps, 44
 - de Prokhorov, 13
 - de Radon-Nikodým, 33
- Topología
 - $\sigma(E, F)$, 31
 - compatible con la dualidad, 32
- Variable aleatoria gaussiana
 - en $\mathbb{R}$, 16
- Variación, 33