



FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO

Homotopía en la Categoría de los Grupos Abelianos Simpliciales

Autor:

Rafael GAITÁN O.

Director:

Ph.D. Roberto RUIZ S.

9 de Enero del 2013

HOMOTOPÍA EN LA CATEGORÍA DE LOS GRUPOS ABELIANOS SIMPLICIALES

RAFAEL GAITAN OSPINA

rgaitan26@gmail.com

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para
optar al título de Matemático**

Director

ROBERTO RUIZ SALGUERO, Ph.D.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI**

2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

RAFAEL GAITAN OSPINA, 1989

HOMOTOPÍA EN LA CATEGORÍA DE LOS GRUPOS
ABELIANOS SIMPLICIALES

TEMAS Y PALABRAS CLAVE:

Conjuntos simpliciales, grupos abelianos simpliciales, homotopía,
transformaciones naturales, arco-conexidad.

Nota de aprobación

El trabajo de grado titulado Homotopía en la Categoría de los Grupos Abelianos Simpliciales, presentado por el estudiante RAFAEL GAITAN OSPINA, para optar al título de matemático, fue revisado por el jurado y calificado como:

APROBADO

Roberto Ruiz Salguero

Director

Jurado

DEDICATORIA

A Dios por la esperanza que me mueve y por su amor que me da felicidad.

A mis padres, por su amor y comprensión.

A mi esposa, por su apoyo incondicional.

A mi hermano, por sus ánimos.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad del Valle, por el apoyo a la investigación científica. A mis compañeros y a los profesores del departamento de matemáticas, que con su ayuda hicieron posible este trabajo. Al profesor Roberto Ruiz por la motivación, tiempo y apoyo incondicional.

Resumen

John Coleman Moore dirigió el *Seminar on Algebraic Homotopy Theory* en la Universidad de Princeton en 1956 y en el capítulo 1 de las recapitulaciones, definió la categoría de los *conjuntos simpliciales* y la homotopía en esa categoría. Después dio una condición suficiente y necesaria para la homotopía de dos funciones simpliciales $f, g : X \longrightarrow Y$, usando una familia de funciones $k_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$, para $i = 0, \dots, q$ y $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esta familia es de interés puesto que las k_i pasan a homotopía a nivel de complejos de cadenas donde se tiene además el concepto de *homología* y se cumple el *axioma de homotopía*. Así que saber cómo se lleva el paso de homotopía a la familia de funciones k_i es crucial para generalizar el axioma de homotopía en teorías de homología simpliciales. En este trabajo se presenta una explicación sobre donde surgen las k_i .

Palabras clave: Conjuntos simpliciales, grupos abelianos simpliciales, homotopía, transformaciones naturales, arco-conexidad.

Abstract

John Coleman Moore led the *Seminar on Algebraic Homotopy Theory* at Princeton University in 1956. In chapter 1 of the summaries, he presented the category of *simplicial sets* and its homotopy. Later he gave a sufficient and necessary condition for the homotopy of two simplicial functions $f, g : X \longrightarrow Y$, using a family of functions $k_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$, for $i = 0, \dots, q$ and $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. This family is of interest because the k_i become homotopy in the complex chains level which has as well the concept of *homology* and the *homotopy axiom* holds. So, how homotopy is carried over to the family k_i , is crucial in order to generalize the homotopy axiom. Here we explain how such functions k_i arise.

Key Words: Simplicial sets, simplicial abelian groups, homotopy, natural transformations, arc-connectedness.

Introducción

Para definir la homotopía de dos funciones simpliciales, John C. Moore¹ usó el concepto de producto cartesiano de conjuntos simpliciales y como parte del proceso definió elementos similares a los simplejos topológicos Δ^n de los cuales $\Delta^1 \cong I$ (I es el intervalo unidad $[0,1]$). Así aparecen los conjuntos simpliciales $\Delta[q]$ para $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\Delta[1]$ es el intervalo unidad utilizado en homotopía simplicial. Después de definir la homotopía de dos funciones simpliciales $f, g : X \longrightarrow Y$ por medio de una función simplicial H entre el cilindro $X \times \Delta[1]$ y el conjunto simplicial Y , Moore dio una condición suficiente y necesaria para homotopía por medio de una familia de funciones $k_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$ para $i = 0, \dots, q$.

Con el objeto de dar una explicación del paso de homotopía en los conjuntos simpliciales a la familia de funciones propuesta por Moore, se presentan tres (3) capítulos cuyos contenidos son:

El capítulo 1 está referido a la definición de funtores adjuntos por medio de transformaciones naturales y con esto, en los sistemas homotópicos, se demuestra la equivalencia de la homotopía a izquierda y a derecha cuando el cilindro y co-cilindro son funtores adjuntos (Por simplicidad las llamamos homotopías adjuntas). También en este capítulo se presentan dos funtores $\mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_\lambda$ definidos por una transformación natural λ . Aparentemente este tipo de adjunción daba una versión diferente de la demostración de la equivalencia de las homotopías adjuntas, pero se demuestra que $\mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_\lambda$ es un par adjunto sólo si λ es un isomorfismo natural. Aplicado a sistemas homotópico sólo se produce homotopía trivial y el proceso debió ser descartado. Sin embargo la equivalencia de homotopías adjuntas pudo explicarse por medio de

¹John Coleman Moore (nacido en Staten Island (Nueva York), 27 de mayo 1923) fue un matemático estadounidense. Recibió su doctorado en 1952 en la Universidad de Brown, bajo la supervisión de George W. Whitehead. http://en.wikipedia.org/wiki/John_Coleman_Moore

mecanismos menos fuertes que adjunción pero llevados a cabo en categorías de morfismos de la categoría original.

En el capítulo 2 se aplicó lo hecho en el capítulo 1 a conjuntos simpliciales y en particular a los grupos abelianos simpliciales.

Finalmente en el capítulo 3 se proponía que la familia de funciones k_i dadas por Moore en su seminario [4], surgían a partir de la función de homotopía a derecha $K : X \longrightarrow Y^{\Delta[1]}$, puesto que para un conjunto simplicial Y , $(Y^{\Delta[1]})_0$ es igual a Y_1 y $K_0 : X_0 \longrightarrow Y_1$, como el caso de Moore. Se trató de verificar que en los demás niveles sucedía lo mismo, para, en caso dado, pasar a buscar la familia k_i . El desfase no sucedió en los niveles superiores con lo cual esta opción se descartó. En cambio se encontró una explicación por medio de la descomposición de cada nivel q de $X \times \Delta[1]$ en una reunión disjunta finita $(q + 2\text{-veces})$ de copias de X_q .

Índice general

Introducción	II
1. Efecto de las adjunciones en morfismos entre funtores	1
1.1. Funtores adjuntos	1
1.2. Sistemas homotópicos	16
1.3. Funtores de una transformación natural	21
2. Homotopía en los Grupos Abelianos Simpliciales	39
2.1. La Categoría Δ	39
2.2. Objetos Simpliciales	42
2.3. Funtor potencia y producto	47
2.4. Relación de arco conexidad	53
3. Teorema de Moore para Homotopía	57

Capítulo 1

Efecto de las adjunciones en morfismos entre funtores

En algunos textos definen funtor adjunto como en el libro *Introduction to the theory of categories and functors*[1], en el cual esta definido como sigue:

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías y $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dos funtores entonces F y G son adjuntos si existe un isomorfismo natural entre $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$.

En este capítulo se presenta una versión equivalente de esta definición, tomada del libro *Homotopical algebra* [5], la cual es importante para demostrar la equivalencia entre la homotopía a izquierda y a derecha cuando el cilindro y co-cilindro son funtores adjuntos (Homotopías adjuntas) y con esto se demuestra la equivalencia de la homotopía a izquierda y a derecha en la categoría de los conjuntos simpliciales.

Por todo el capítulo consideremos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías y $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$ dos funtores covariantes.

1.1. Funtores adjuntos

Los funtores se pueden también considerar como los objetos en una categoría, los eventuales morfismos son las transformaciones naturales donde $\text{Hom}(F, G) \neq \emptyset$ si $\text{Dom}F = \text{Dom}G$ y $\text{Cod}F = \text{Cod}G$. Usamos la notación

normal de $Trans(F, G)$ en cambio de $Hom(F, G)$. Se verá que si (F_1, G_1) y (F_2, G_2) son pares adjuntos entonces hay una biyección entre $Trans(F_1, F_2)$ y $Trans(G_2, G_1)$.

Definición 1.1.1. (Isomorfismo Natural) Una transformación natural $\lambda : F \longrightarrow G$ tal que λ_A es un isomorfismo para todo $A \in Obj\mathcal{A}$, será llamada un *isomorfismo natural*.

Notación 1.1.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, entonces denotaremos al funtor identidad $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ como $I_{\mathcal{C}}$.

Definición 1.1.2. (Funtores adjuntos)

1. Decimos que (F, G) es un *par adjunto* ó que F y G son *funtores adjuntos* si existen transformaciones naturales $\psi : I_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF$ y $\varphi : FG \longrightarrow I_{\mathcal{B}}$, tales que para cada $A \in Obj\mathcal{A}$ y cada $B \in Obj\mathcal{B}$ las funciones

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{(\)_{AB}^*} Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \\ \alpha & \longmapsto \alpha^* = G(\alpha) \circ \psi_A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{(\)_{AB}^{*A}} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \\ \beta & \longmapsto \beta_* = \varphi_B \circ F(\beta) \end{aligned}$$

son inversas una de la otra.

2. Las transformaciones naturales ψ y φ son llamadas *transformaciones de adjunción*.
3. Las funciones $\alpha \mapsto \alpha^*$ y $\beta \mapsto \beta_*$ son llamadas *isomorfismos de adjunción* ó *isomorfismos adjuntos* de (F, G) .
4. Si (F, G) es un par adjunto decimos que F es *adjunto a izquierda* de G y que G es *adjunto a derecha* de F .

Notación 1.1.2. Decimos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & \xrightarrow{\rho} & A_2 \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow \lambda \\
 A_3 & \xrightarrow{\eta} & A_4
 \end{array}$$

conmuta, si $\lambda \circ \rho = \eta \circ \gamma$, graficamente se presenta de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & \xrightarrow{\rho} & A_2 \\
 \gamma \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \lambda \\
 A_3 & \xrightarrow{\eta} & A_4
 \end{array}$$

Es natural preguntarse si $()_{AB}^*$ y $()_{AB,*}$, para $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, son transformaciones naturales, puesto que al ser una la inversa de la otra obtendríamos un isomorfismo natural de $Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ a $Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B))$. La respuesta a este interrogante se demuestra en la siguiente proposición desarrollada en este trabajo.

Proposición 1.1.1. Si $\psi : I_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ y $\varphi : FG \rightarrow I_{\mathcal{B}}$ son transformaciones naturales, entonces

$$\begin{aligned}
 Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{(\)_{AB}^*} Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \\
 \alpha & \mapsto (\alpha)^* = G(\alpha) \circ \psi_A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{(\)_{AB,*}} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \\
 \beta & \mapsto \beta_* = \varphi_B \circ F(\beta)
 \end{aligned}$$

para $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, también lo son.

Demostración. Para $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A)$ y $g \in Hom_{\mathcal{B}}(B, B_1)$ ($A, A_1 \in Obj \mathcal{A}$ y $B, B_1 \in Obj \mathcal{B}$) se define lo siguiente:

1. Para $\beta \in Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$, $Hom(F(f), g)(\beta)$ se define como

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(f), g)(\beta) = g\beta F(f)$$

2. Para $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$, $\text{Hom}(f, G(g))(\rho)$ se define como

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, G(g))(\rho) = G(g)\rho f$$

Por tanto la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{(\)^*_{AB}} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(f), g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, G(g)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A_1), B_1) & \xrightarrow{(\)^*_{A_1 B_1}} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, G(B_1)) \end{array}$$

Figura 1.1

es equivalente a la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccccccc} GF(A_1) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(A) & \xrightarrow{G(\beta)} & G(B) & \xrightarrow{G(g)} & G(B_1) \\ \uparrow \psi_{A_1} & & \uparrow \psi_A & & & & \\ A_1 & \xrightarrow{f} & A & & & & \end{array}$$

Figura 1.2

Entonces $(\)^*_{AB}$ es una transformación natural.

Por otro lado la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{(\)^*_{AB}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, G(g)) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(f), g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, G(B_1)) & \xrightarrow{(\)^*_{A_1 B_1}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A_1), B_1) \end{array}$$

Figura 1.3

es equivalente a la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccccccc}
 F(A_1) & \xrightarrow{F(f)} & F(A) & \xrightarrow{F(\rho)} & FG(B) & \xrightarrow{FG(g)} & FG(B_1) \\
 & & & & \uparrow \varphi_B & & \uparrow \varphi_{B_1} \\
 & & & & B & \xrightarrow{g} & B_1
 \end{array}$$

Figura 1.4

Entonces $(\)_{*AB}$ es una transformación natural. ■

Observación 1.1.1. Para F, G dos funtores covariantes se cumple que si ψ, φ son transformaciones naturales entonces también lo son $G \xrightarrow{\psi_G} GFG$, $F \xrightarrow{F(\psi)} FGF$, $GFG \xrightarrow{G(\varphi)} G$, $FGF \xrightarrow{\varphi_F} F$.

Los isomorfismos de adjunción $(\)_*$ y $(\)^*$ son determinados y determinan a las trasformaciones de adjunción ψ y φ . Si los isomorfismos son dados entonces las transformaciones son obtenidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 Hom_B(F(A), F(A)) & \xrightarrow{(\)^*} Hom_A(A, GF(A)) \\
 1_{F(A)} & \mapsto (1_{F(A)})^* = \psi_A
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 Hom_A(G(B), G(B)) & \xrightarrow{(\)_*} Hom_B(F(G(B)), B) \\
 1_{G(B)} & \mapsto (1_{G(B)})_* = \varphi_B
 \end{aligned}$$

Dadas dos transformaciones naturales ψ y φ , estas definen dos transformaciones $(\)^*$ y $(\)_*$, por proposición 1.1.1, pero es de interés saber cuando estas transformaciones son isomorfismos naturales. Esto se obtiene bajo las condiciones que mencionaremos en la siguiente proposición tomada del libro *Simplicial Objects on algebraic homotopy theory* [3], las cuales son importantes para la demostración de la equivalencia entre las homotopias adjuntas.

Proposición 1.1.2. Sean $I_A \xrightarrow{\psi} GF$ y $FG \xrightarrow{\varphi} I_B$ transformaciones naturales y los morfismos

$$Hom_B(F(A), B) \xrightarrow{(\)^*} Hom_A(A, G(B))$$

y

$$Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \xrightarrow{(\cdot)_*} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$$

definidos por estas transformaciones respectivamente como en la proposición 1.1.1 entonces

1. $(\cdot)^* \circ (\cdot)_* = 1$ si y solo si $G \xrightarrow{\psi_G} GFG \xrightarrow{G\varphi} G$ es la transformación natural idéntica¹.
2. $(\cdot)_* \circ (\cdot)^* = 1$ si y solo si $F \xrightarrow{F\psi} FGF \xrightarrow{\varphi_F} F$ es la transformación natural idéntica.

Demostración. Probaremos 1. La demostración de 2 es similar.

Sea $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B))$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & ((f)_*)^* \\
 & & & & \downarrow \\
 & & \xrightarrow{\psi_A} & & \xrightarrow{G((f)_*)} \\
 A & \xrightarrow{\quad} & GF(A) & \xrightarrow{\quad} & G(B) \\
 \downarrow f & & \downarrow GF(f) & & \nearrow G(\varphi_B) \\
 G(B) & \xrightarrow{\quad} & GF(G(B)) & & \\
 & \xrightarrow{\psi_{G(B)}} & & &
 \end{array}$$

Figura 1.5

Luego si $G\varphi_B \circ \psi_{G(B)} = 1_{G(B)}$ entonces $G\varphi_B \circ \psi_{G(B)} \circ f = f$ entonces $((f)_*)^* = f$ (por la igualdad en el diagrama de la figura 1.5). Por otro lado tomando $f = 1_{G(B)}$, si $((f)_*)^* = f$ entonces $G\varphi_B \circ \psi_{G(B)} \circ f = f$ así $G\varphi_B \circ \psi_{G(B)} \circ 1_{G(B)} = 1_{G(B)}$ entonces $G\varphi_B \circ \psi_{G(B)} = 1_{G(B)}$. ■

Como se mencionó en el inicio de este capítulo, otros textos definen funtores adjuntos por medio de la existencia de un isomorfismo natural entre los conjuntos $Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B))$. En el siguiente teorema demostraremos que esta definición es equivalente a la definición 1.1.2, la cual es importante para demostrar la equivalencia entre las homotopías adjuntas. Para el desarrollo de la demostración de la equivalencia de las definiciones de functor adjunto, se utilizaron ideas tomadas del libro *Introduction to theory*

¹ $\lambda : F \longrightarrow F$ es la transformación idéntica si $\lambda_A = 1_{F(A)}$ para todo $A \in Obj \mathcal{A}$

of categories and functors [1], las cuales fueron importante para demostrar la condición necesaria.

Teorema 1.1.1. *Los funtores F y G son adjuntos si y solamente si existe un isomorfismo natural entre los conjuntos $Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B))$*

Demostración. (Condición suficiente) Por la definición 1.1.2 $(\)_{AB}^*$ es una función uno a uno y sobre y por la proposición 1.1.1 $(\)_{AB}^*$ es una transformación natural, por lo tanto $(\)_{AB}^*$ es un isomorfismo natural.

(Condición necesaria) Supongamos que

$$\delta(A, B) : Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B))$$

es un isomorfismo natural y se define

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A)) & \xrightarrow{\delta(A, F(A))} & Hom_{\mathcal{A}}(A, GF(A)) \\ 1_{F(A)} & \longmapsto & \delta(A, F(A))[1_{F(A)}] = \psi_A \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{(\)_{AB}^*} & Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^* = G(\alpha) \circ \psi_A \end{array}$$

ahora como δ es un isomorfismo natural entonces para $u \in Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ se cumple que

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A)) & \xrightarrow{\delta(A, F(A))} & Hom_{\mathcal{A}}(A, G(F(A))) \\ \downarrow Hom_{\mathcal{B}}(F(1_A), u) & \wr & \downarrow Hom_{\mathcal{A}}(1_A, G(u)) \\ Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{\delta(A, B)} & Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \end{array}$$

por lo tanto $\delta(A, B)[u] = G(u) \circ \delta(A, F(A))[1_{F(A)}] = G(u) \circ \psi_A$ es decir que $\delta(A, B) = (\)_{AB}^*$, luego por la proposición 1.1.1, la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \xrightarrow{(\)_{AB}^*} & Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \\
Hom_{\mathcal{B}}(F(f), g) \downarrow & & \downarrow Hom_{\mathcal{A}}(f, G(g)) \\
Hom_{\mathcal{B}}(F(A_1), B_1) & \xrightarrow{(\)_{A_1 B_1}^*} & Hom_{\mathcal{A}}(A_1, G(B_1))
\end{array}$$

es equivalente a la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccccccc}
GF(A_1) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(A) & \xrightarrow{G(\beta)} & G(B) & \xrightarrow{G(g)} & G(B_1) \\
\psi_{A_1} \uparrow & & \uparrow \psi_A & & & & \\
A_1 & \xrightarrow{f} & A & & & &
\end{array}$$

tomando $B = B_1 = F(A)$ y $g = \beta = 1_{F(A)}$, se concluye que $\psi : I_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF$ es una transformación natural.

Análogamente tomando

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathcal{A}}(G(B), G(B)) & \xrightarrow{\delta^{-1}(G(B), B)} & Hom_{\mathcal{B}}(B, FG(B)) \\
1_{G(B)} & \longmapsto & \delta(G(B), B)[1_{G(B)}] = \varphi_B
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{(\)_{AB}^*} & Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \\
\beta & \longmapsto & \beta_* = \varphi_B \circ F(\beta)
\end{array}$$

se demuestra que $\delta^{-1}(A, B) = (\)_{AB}^*$ y que $\varphi : GF \longrightarrow I_{\mathcal{B}}$ es una transformación natural. ■

Antes de mostrar la relación entre las transformaciones naturales de adjuntos a derecha con la transformaciones naturales de adjuntos a izquierda, presentaremos la definición de la composición de dos transformaciones naturales y algunas propiedades de estas.

Definición 1.1.3. Sean $F_1, F_2, F_3 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tres funtores covariantes y $\lambda_1 : F_1 \rightarrow F_2$, $\lambda_2 : F_2 \rightarrow F_3$ dos transformaciones naturales. Se define la composición $\lambda_2 \circ \lambda_1 : F_1 \rightarrow F_3$ para A perteneciente a $Obj\mathcal{A}$ como $(\lambda_2 \circ \lambda_1)_A = (\lambda_2)_A \circ (\lambda_1)_A$.

Corolario 1.1.1. $\lambda_2 \circ \lambda_1$ dado en la definición 1.1.3 es una transformación natural.

Demostración. Por hipótesis λ_1 y λ_2 son transformaciones naturales entonces para $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, se cumple que

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\
 (\lambda_1)_A \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\lambda_1)_B \\
 F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B) \\
 (\lambda_2)_A \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\lambda_2)_B \\
 F_3(A) & \xrightarrow{F_3(f)} & F_3(B)
 \end{array}$$

es decir

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\
 (\lambda_2 \circ \lambda_1)_A \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\lambda_2 \circ \lambda_1)_B \\
 F_3(A) & \xrightarrow{F_3(f)} & F_3(B)
 \end{array}$$

Por lo tanto $\lambda_2 \circ \lambda_1$ es una transformación natural. ■

Teorema 1.1.2. Sea $\lambda : F_1 \rightarrow F_2$ una transformación natural, entonces si $\lambda^{-1} : F_2 \rightarrow F_1$ existe, esta también es una transformación natural.

Demostración. Por hipótesis λ es una transformación natural, entonces para $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ se cumple que

$$\begin{array}{ccc}
F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\
\lambda_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow \lambda_B \\
F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B)
\end{array}$$

es decir que $\lambda_B \circ F_1(f) = F_2(f) \circ \lambda_A$, ahora componiendo a la izquierda por λ_B^{-1} obtenemos $F_1(f) = \lambda_B^{-1} \circ F_2(f) \circ \lambda_A$ y componiendo a la derecha esta última igualdad por λ_A^{-1} , obtenemos $F_1(f) \circ \lambda_A^{-1} = \lambda_B^{-1} \circ F_2(f)$, así para $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ se cumple que

$$\begin{array}{ccc}
F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B) \\
\lambda_A^{-1} \downarrow & \lrcorner & \downarrow \lambda_B^{-1} \\
F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B)
\end{array}$$

por lo tanto λ^{-1} es una transformación natural. ■

Consideremos dos adjunciones

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F_1} \mathcal{B} \xrightarrow{G_1} \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \xrightarrow{F_2} \mathcal{B} \xrightarrow{G_2} \mathcal{A}$$

Denotaremos a las transformaciones de adjunción por

$$I \xrightarrow{\psi^i} G_i F_i \text{ y } F_i G_i \xrightarrow{\varphi^i} I \text{ para } i = 1, 2.$$

y a las funciones de adjunción por

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F_i(A), B) \xrightarrow{(\cdot)^{*i}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G_i(B))$$

y

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G_i(B)) \xrightarrow{(\cdot)^{*i}} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F_i(A), B)$$

para $i = 1, 2$.

Demostremos que existe una biyección entre las transformaciones naturales de los adjuntos a derecha con las transformaciones naturales de adjuntos a

izquierda. La siguiente proposición y su demostración fue tomada del libro *Homotopical Algebra* [5], sin embargo, en ese libro, para demostrar que la función es biyectiva, se presentó su función inversa, pero no se demuestra explícitamente que lo sea. En este trabajo demostramos explícitamente que la función presentada si es la función inversa.

Proposición 1.1.3. *Sean (F_i, G_i) con $i = 1, 2$ pares adjuntos, entonces: Existe una función biyectiva $Trans(F_1, F_2) \longrightarrow Trans(G_2, G_1)$ que denotaremos $\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}$ tal que:*

1. *Si $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$, entonces λ es la transformación idéntica si y solo si $\bar{\lambda}$ es la transformación idéntica.*
2. *Si (F_3, G_3) es otro par adjunto sobre las mismas categorías y además $\lambda : F_1 \longrightarrow F_2$ y $\eta : F_2 \longrightarrow F_3$ son transformaciones naturales entonces $\overline{\eta\lambda} = \bar{\lambda}\bar{\eta}$.*
3. *λ es un isomorfismo natural si y solo si $\bar{\lambda}$ lo es.*

Demostración. Recordemos que para cada $A \in Obj\mathcal{A}$, $F_1(A) \xrightarrow{\lambda_A} F_2(A)$.

Definiremos $G_2(B) \xrightarrow{\bar{\lambda}_B} G_1(B)$. Para esto consideramos λ en $G_2(B)$, es decir

$$F_1 G_2(B) \xrightarrow{\lambda_{G_2(B)}} F_2 G_2(B)$$

el cual componemos con φ_B^2 para obtener

$$F_1 G_2(B) \xrightarrow{\lambda_{G_2(B)}} F_2 G_2(B) \xrightarrow{\varphi_B^2} B$$

es decir

$$F_1 G_2(B) \xrightarrow{\varphi_B^2 \circ \lambda_{G_2(B)}} B$$

ahora aplicamos a esta composición el isomorfismo de adjunción $()^{*1}$ para obtener $\bar{\lambda}_B$, es decir

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{B}}(F_1 G_2(B), B) &\xrightarrow{()^{*1}} Hom_{\mathcal{A}}(G_2(B), G_1(B)) \\ \varphi_B^2 \circ \lambda_{G_2(B)} &\longmapsto (\varphi_B^2 \circ \lambda_{G_2(B)})^{*1} = \bar{\lambda}_B \end{aligned}$$

Para demostrar que la asignación $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ es biyectiva, simplemente daremos su función inversa que denotaremos

$$\begin{aligned} \text{Trans}(G_2, G_1) &\longrightarrow \text{Trans}(F_1, F_2) \\ \beta &\longmapsto \underline{\beta} \end{aligned}$$

De nuevo recordemos que $G_2(B) \xrightarrow{\beta_B} G_1(B)$ para cada $B \in \text{Obj}\mathcal{B}$, en particular cuando $B = F_2(A)$ se obtiene

$$G_2 F_2(A) \xrightarrow{\beta_{F_2(A)}} G_1 F_2(A)$$

el cual componemos con ψ_A^2 para obtener

$$A \xrightarrow{\psi_A^2} G_2 F_2(A) \xrightarrow{\beta_{F_2(A)}} G_1 F_2(A)$$

es decir

$$A \xrightarrow{\beta_{F_2(A)} \circ \psi_A^2} G_1 F_2(A)$$

Ahora aplicando a esta composición el isomorfismo de adjunción $(\)_{*1}$ tenemos $\underline{\beta}$, es decir

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, G_1 F_2(A)) &\xrightarrow{(\)_{*1}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F_1(A), F_2(A)) \\ \beta_{F_2(A)} \circ \psi_A^2 &\longmapsto (\beta_{F_2(A)} \circ \psi_A^2)_{*1} = \underline{\beta}_A \end{aligned}$$

Mostremos que en efecto $\underline{(\bar{\lambda})} = \lambda$. Nótese que por λ ser transformación natural y por (F_2, G_2) ser un par adjunto (Proposición 1.1.2 ítem 2) se cumple que

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(\psi_A^2)} & F_1 G_2 F_2(A) \\ \lambda_A \downarrow & \wr & \downarrow \lambda_{G_2 F_2(A)} \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2(\psi_A^2)} & F_2 G_2 F_2(A) \\ & \searrow 1_{F_2(A)} & \downarrow \varphi_{F_2(A)}^2 \\ & & F_2(A) \end{array}$$

Figura 1.6

Por otro lado $\underline{(\bar{\lambda})}_A$ es igual a la siguiente composición:

$$F_1(\psi^2_{F_1(A)}) \longrightarrow F_1(\psi^4_{G_2 F_2(A)}) \longrightarrow F_1 G_1(\lambda_{G_2 F_2(A)}) \longrightarrow F_1 G_1(\varphi^2_{F_2(A)}) \longrightarrow \varphi^1_{F_2(A)}$$

Figura 1.7

Ahora por ψ^1 y φ^1 ser transformaciones naturales, por diagrama de la figura 1.6 y por (F_1, G_1) ser un par adjunto (Proposición 1.1.2 ítem 2) se cumple el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1_{F_1(A)} & & \\
 & & & & \wr & & \\
 & & & & \text{---} F_1(\psi^1_A) \text{---} & & \\
 & & & & 1_{F_1 G_1 F_1(A)} & & \varphi^1_{F_1(A)} \\
 & & & & \text{---} & & \\
 & & & & F_1 G_1 F_1(A) & \longrightarrow & F_1(A) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & F_1(\psi^2_A) & \wr & F_1 G_1 F_1(\psi^2_A) & \wr & F_1 G_1(\lambda_A) & \wr & \lambda_A \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_1(A) & \longrightarrow & F_1 G_2 F_2(A) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_1 G_2 F_2(A) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_2 G_2 F_2(A) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_2(A) & \longrightarrow & F_2(A) \\
 & & F_1(\psi^2_A) & & F_1(\psi^1_{G_2 F_2(A)}) & & F_1 G_1(\lambda_{G_2 F_2(A)}) & & F_1 G_1(\varphi^2_{F_2(A)}) & & \varphi^1_{F_2(A)}
 \end{array}$$

Figura 1.8

lo cual muestra claramente que $\overline{(\lambda)}_A = \lambda_A$. De manera analoga se demuestra también que $\overline{(\beta)}_B = \beta_B$

Demostremos que $\overline{(\quad)} : Trans(F_1, F_2) \longrightarrow Trans(G_2, G_1)$ tiene las tres propiedades mencionadas en esta proposición:

1. Nótese que si λ es la transformación idéntica ($\lambda_A = 1_{F_1(A)} = 1_{F_2(A)}$)

entonces

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_B &= (\varphi_B^2 \circ \lambda_{G_2(B)})^{*1} \\
 &= (\varphi_B^2)^{*1} \\
 &= ((1_{G_2(B)})_{*1})^{*1} \\
 &= 1_{G_2(B)}
 \end{aligned}$$

ahora si $\bar{\lambda}$ es la transformación idéntica ($\bar{\lambda}_B = 1_{G_2(B)}$) entonces

$$\begin{aligned}
 \lambda_A &= (\bar{\lambda})_A \\
 &= (\bar{\lambda}_{F_2(A)} \circ \psi_A^2)_{*1} \\
 &= (\psi_A^2)_{*1} \\
 &= ((1_{F_2(A)})^{*1})_{*1} \\
 &= 1_{F_2(A)}
 \end{aligned}$$

2. Notemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 F_2 G_3(B) & \xrightarrow{\eta_{G_3(B)}} & F_3 G_3(B) \\
 F_2(\bar{\eta}_B) \downarrow & & \downarrow \varphi_B^3 \\
 F_2 G_2(B) & \xrightarrow{\varphi_B^2} & B
 \end{array}$$

En efecto tenemos que la función

$$Hom_{\mathcal{B}}(F_2 G_3(B), B) \xrightarrow{(\)^{*2}} Hom_{\mathcal{A}}(G_3(B), G_2(B))$$

es 1-1. Así basta con mostrar que $\varphi_B^2 \circ F_2(\bar{\eta}_B)$ y $\varphi_B^3 \circ \eta_{G_3(B)}$ tienen la misma imagen bajo esta función. La parte derecha superior tiene imagen $\bar{\eta}_B$ por definición de esta última y en cuanto a la parte inferior izquierda

$$F_2 G_3(B) \xrightarrow{F_2(\bar{\eta}_B)} F_2 G_2(B) \xrightarrow{\varphi_B^2} B$$

notamos que es igual a $(\bar{\eta}_B)_{*2}$, la cual es enviada por la función $(\)^{*2}$ en

$$((\bar{\eta}_B)_{*2})^{*2} = \bar{\eta}_B$$

Por otro lado como λ es una transformación natural, entonces

$$\begin{array}{ccccc}
 F_1 G_3(B) & \xrightarrow{\lambda_{G_3(B)}} & F_2 G_3(B) & \xrightarrow{\eta_{G_3(B)}} & F_3 G_3(B) \\
 F_1(\bar{\eta}_B) \downarrow & \wr & F_2(\bar{\eta}_B) \downarrow & \wr & \downarrow \varphi^3_B \\
 F_1 G_2(B) & \xrightarrow{\lambda_{G_2(B)}} & F_2 G_2(B) & \xrightarrow{\varphi^2_B} & B
 \end{array}$$

Figura 1.9

Si enviamos por G_1 al diagrama de la figura 1.9 y le aplicamos ψ^1 a la izquierda, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 G_3(B) & \xrightarrow{\psi^1_{G_3(B)}} & G_1 F_1 G_3(B) & \xrightarrow{G_1(\lambda_{G_3(B)})} & G_1 F_2 G_3(B) & \xrightarrow{G_1(\eta_{G_3(B)})} & G_1(F_3 G_3(B)) \\
 \bar{\eta}_B \downarrow & \wr & G_1 F_1(\bar{\eta}_B) \downarrow & \wr & G_1 F_2(\bar{\eta}_B) \downarrow & \wr & \downarrow G_1(\varphi^3_B) \\
 G_2(B) & \xrightarrow{\psi^1_{G_2(B)}} & G_1 F_1 G_2(B) & \xrightarrow{G_1(\lambda_{G_2(B)})} & G_1 F_2 G_2(B) & \xrightarrow{G_1(\varphi^2_B)} & G_1(B)
 \end{array}$$

Figura 1.10

Nótese que la parte inferior del diagrama de la figura 1.10 es precisamente $\bar{\lambda}_B$ y que la composición externa y superior es $(\bar{\eta}\bar{\lambda})_B$. Así tenemos que $(\bar{\eta}\bar{\lambda})_B = \bar{\lambda}_B \bar{\eta}_B$ y como B fue arbitrario se obtiene $\bar{\eta}\bar{\lambda} = \bar{\lambda} \circ \bar{\eta}$.

3. Nótese que si $\lambda : F_1 \rightarrow F_2$ es un isomorfismo natural, entonces existe $\eta : F_2 \rightarrow F_1$ tal que $\lambda \circ \eta = 1_{F_2}$ y $\eta \circ \lambda = 1_{F_1}$, así la conclusión es clara puesto que $(\eta \circ \lambda = 1_{F_1} \text{ y } \lambda \circ \eta = 1_{F_2}) \iff (\bar{\eta} \circ \bar{\lambda} = \overline{1_{F_1}} \text{ y } \bar{\lambda} \circ \bar{\eta} = \overline{1_{F_2}}) \iff (\bar{\lambda} \circ \bar{\eta} = 1_{G_1} \text{ y } \bar{\eta} \circ \bar{\lambda} = 1_{G_2})$.

(Fin de demostración de la proposición 1.1.3) ■

En la siguiente sección veremos cómo por medio de la biyección de la proposición 1.1.3, en un sistema homotópico a izquierda, donde el cilindro tenga un funtor adjunto, se construye un sistema homotópico equivalente el cual genera la relación de homotopía a derecha. Por medio de estos sistemas homotópicos y con la definición de funtor adjunto (Definición 1.1.2.), se demuestra la equivalencia entre la homotopía a izquierda y a derecha. Con esta biyección también se muestra cómo una transformación natural λ define dos funtores $\mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$, los cuales son adjuntos cuando λ es un isomorfismo natural.

1.2. Sistemas homotópicos

En esta parte se definirá sistema homotópico a izquierda, sistema homotópico a derecha y cuándo dos morfismos son homótopos a izquierda y a derecha. Posteriormente se procederá a demostrar la equivalencia de las homotopías mencionadas cuando el cilindro y el co-cilindro son funtores adjuntos.

Definición 1.2.1. (Sistema homotópico a izquierda) Un *sistema homotópico a izquierda* en una categoría $\mathcal{A}$, es una cuádrupla $\eta = (F, d^0, d^1, s)$ donde $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un funtor covariante el cual llamaremos cilindro, y $d^i : I_{\mathcal{A}} \rightarrow F$, $s : F \rightarrow I_{\mathcal{A}}$ son transformaciones naturales tal que $s \circ d^i = 1$ donde 1 denota la transformación idéntica $I_{\mathcal{A}} \rightarrow I_{\mathcal{A}}$ para $i = 0, 1$.

Definición 1.2.2. (Sistema homotópico a derecha) Un *sistema homotópico a derecha* en una categoría $\mathcal{A}$, es una cuádrupla $\bar{\eta} = (G, D^0, D^1, S)$ donde $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un funtor covariante el cual llamaremos co-cilindro, y $D^i : G \rightarrow I_{\mathcal{A}}$, $S : I_{\mathcal{A}} \rightarrow G$ son transformaciones naturales tal que $D^i \circ S = 1$ para $i = 0, 1$.

A continuación se definirá la relación de homotopía en el sistema homotópico a izquierda y a derecha.

Definición 1.2.3. (Homotopía a izquierda y Homotopía a derecha)

1. Sea $\eta = (F, d^0, d^1, s)$ un sistema homotópico a izquierda sobre $\mathcal{A}$ y $f, g : A \rightarrow B$ ($A, B \in \text{Obj}(\mathcal{A})$) dos morfismos de $\mathcal{A}$, entonces decimos que f es η -homótopo a g ó que f y g son homótopos a izquierda ($f \stackrel{\eta}{\sim} g$) si existe un morfismo $H : F(A) \rightarrow B$ tal que

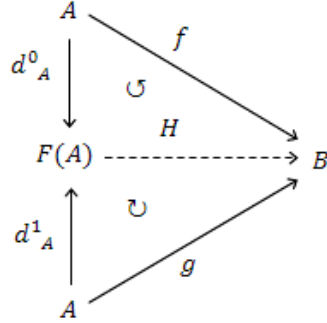


Figura 1.11

2. Sea $\bar{\eta} = (G, D^0, D^1, S)$ un sistema homotópico a derecha sobre $\mathcal{A}$ y $f, g : A \longrightarrow B$ ($A, B \in \text{Obj} \mathcal{A}$) dos morfismos de $\mathcal{A}$, entonces decimos que f es $\bar{\eta}$ -homótopo a g ó que f y g son homótopos a derecha ($f \stackrel{\bar{\eta}}{\sim} g$) si existe un morfismo $K : A \longrightarrow G(B)$ tal que

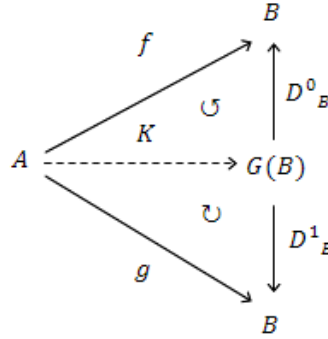


Figura 1.12

Recordemos que para el sistema homotópico $\eta = (F, d^0, d^1, s)$, $d^i : I_{\mathcal{A}} \longrightarrow F$ ($i = 0, 1$) y $s : F \longrightarrow I_{\mathcal{A}}$ son transformaciones naturales. Asumiendo que $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tiene un funtor adjunto $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ y usando la función biyectiva

$$\begin{aligned} \text{Trans}(I_{\mathcal{A}}, F) &\longrightarrow \text{Trans}(G, I_{\mathcal{A}}) \\ \lambda &\longmapsto \bar{\lambda} \end{aligned}$$

denotamos a $\overline{d^i}$ como $D^i : G \longrightarrow I_{\mathcal{A}}$ ($i = 0, 1$) y usando la función biyectiva

$$\begin{aligned} \text{Trans}(F, I_{\mathcal{A}}) &\longrightarrow \text{Trans}(I_{\mathcal{A}}, G) \\ \rho &\longmapsto \bar{\rho} \end{aligned}$$

denotamos a $\bar{s}$ como $S : I_{\mathcal{A}} \longrightarrow G$. Por η ser un sistema homotópico a izquierda tenemos $s \circ d^i = 1$, entonces $1 = \overline{s \circ d^i} = \overline{d^i} \circ \bar{s} = D^i \circ S$ ($i = 0, 1$) y $\bar{\eta} = (G, D^0, D^1, S)$ es un sistema homotópico a derecha. Ahora los siguientes diagramas

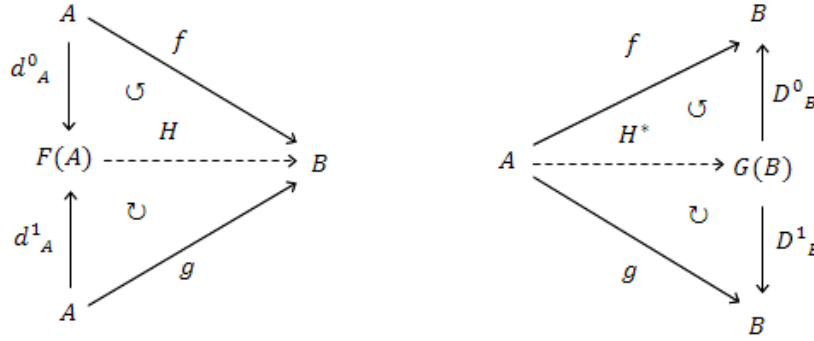


Figura 1.13

se corresponden biunívocamente, es decir que $f \stackrel{\eta}{\sim} g$ si y solo si $f \stackrel{\bar{\eta}}{\sim} g$. Esta afirmación se demostrará en el siguiente teorema.

Observación 1.2.1. Para demostrar la equivalencia de la homotopía a izquierda y a derecha cuando el cilindro y el co-cilindro son funtores adjuntos (Figura 1.13), que por simplicidad las llamamos *homotopías adjuntas*, basta demostrar que los siguientes diagramas se corresponden biunívocamente

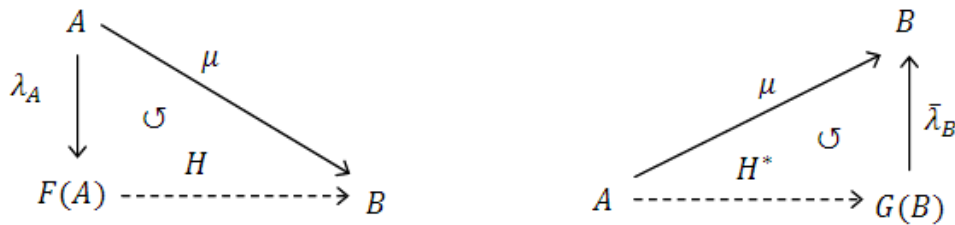


Figura 1.14

En efecto, tomando a $\lambda = d^0$ y a $\mu = f$ se demuestra la equivalencia de la parte superior de los diagramas de la figura 1.13 y tomando a $\lambda = d^1$ y $\mu = g$ se demuestra la equivalencia de la parte inferior de los diagramas de la figura 1.13.

Veamos ahora la demostración de la equivalencia de los diagramas de la figura 1.14, la cual fue desarrollada en este trabajo, y que es equivalente a demostrar la equivalencia de las homotopías adjuntas. Esta equivalencia de homotopías juega un papel importante en la categoría de los grupos abelianos simpliciales, puesto que en la homotopía a izquierda surge un problema con el cilindro, el cual mencionaremos detalladamente en secciones posteriores, y este problema tiene salida con la homotopía a derecha. Con esta equivalencia también se trata de dar una explicación de cómo surge la familia de funciones k_i presentadas por Moore en su seminario, las cuales son suficientes y necesarias para la homotopía de dos funciones simpliciales.

Teorema 1.2.1. *Sea (F, G) un par adjunto, $\lambda : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow F$ una transformación natural, $H : F(A) \rightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{B}$ y $\mu : A \rightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{A}$ entonces*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\mu} & B \\
 \lambda_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow H \\
 F(A) & \xrightarrow{\quad} & B
 \end{array}
 \quad \Leftrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\mu} & B \\
 \xrightarrow{\quad} & \lrcorner & \uparrow \bar{\lambda}_B \\
 A & \xrightarrow{\quad} & G(B)
 \end{array}$$

Demostración. Basta con demostrar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{H^*} & G(B) \\
 \lambda_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow \bar{\lambda}_B \\
 F(A) & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

Figura 1.15

Por definición $H^* = G(H) \circ \psi_A$ y por hipótesis λ es una transformación natural, entonces por la proposición 1.1.3, $\bar{\lambda}$ es una transformación natural, por lo tanto se cumple que

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\psi_A} & GF(A) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_{F(A)}} & F(A) \\
& \searrow H^* & \downarrow G(H) & \wr & \downarrow H \\
& & G(B) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_B} & B
\end{array}$$

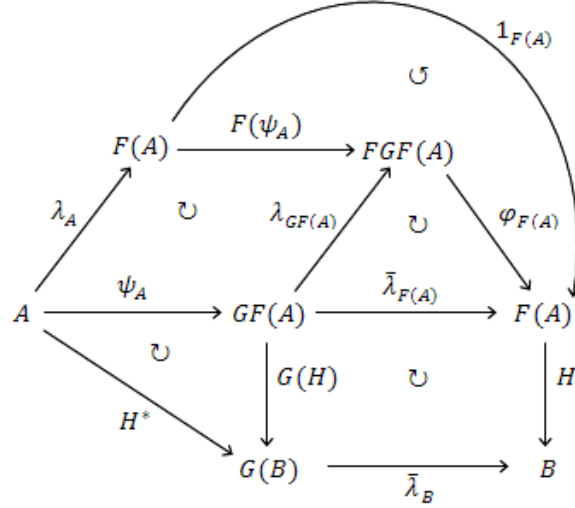
Ahora, de nuevo por la proposición 1.1.3 tenemos que $\bar{\lambda}_{F(A)} = \varphi_{F(A)} \circ \lambda_{GF(A)}$ y como λ_A es una transformación natural, entonces se cumple que

$$\begin{array}{ccccc}
& & F(A) & \xrightarrow{F(\psi_A)} & FGF(A) \\
& \nearrow \lambda_A & \wr & \nearrow \lambda_{GF(A)} & \wr & \searrow \varphi_{F(A)} \\
A & \xrightarrow{\psi_A} & GF(A) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_{F(A)}} & F(A) \\
& \searrow H^* & \downarrow G(H) & \wr & \downarrow H \\
& & G(B) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_B} & B
\end{array}$$

Por hipótesis (F, G) es un par adjunto, es decir $(\)_* \circ (\)^* = 1$ (Definición 1.1.2), entonces por la proposición 1.1.2 ítem 2 se tiene que la composición

$$F(A) \xrightarrow{F(\psi_A)} FGF(A) \xrightarrow{\varphi_{F(A)}} F(A)$$

es la transformación idéntica, entonces se cumple



Por lo tanto el diagrama de la figura 1.15 es conmutativo. ■

1.3. Funtores de una transformación natural

Se presentaran dos funtores $\mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$ definidos por una transformación natural λ y aparentemente la adjunción de estos dos funtores daba una versión diferente de la equivalencia de las homotopías adjuntas mostrada en la sección anterior. Pero estos funtores son adjuntos sólo si λ es un isomorfismo natural y esta adjunción aplicada en sistemas homotópicos solo produce homotopía trivial. Sin embargo la equivalencia de las homotopías adjuntas resulta equivalente a una biyección entre dos conjuntos definidos por los funtores $\mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$.

Notación 1.3.1. Dados $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow D$ dos morfismos de $\mathcal{A}$, un morfismo $\kappa: f \rightarrow g$ en la categoría $Mor\mathcal{A}$ es una pareja de morfismos $\kappa_{dom}: A \rightarrow C$ y $\kappa_{cod}: B \rightarrow D$ que cumplen

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\kappa_{dom}} & C \\
f \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\
B & \xrightarrow{\kappa_{cod}} & D
\end{array}$$

Se denota $\kappa = (\kappa_{dom}, \kappa_{cod})$.

Dados $F_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $F_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ dos funtores covariantes, toda transformación natural $\lambda : F_1 \rightarrow F_2$, puede ser representada como un funtor²

$$T_\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mor}\mathcal{B}$$

de la siguiente forma:

1. Para $A \in \text{Obj}\mathcal{A}$, $T_\lambda(A) = \lambda_A$.
2. Para $f : A \rightarrow B$ en $\text{Mor}\mathcal{A}$, se define $T_\lambda(f) = (F_1(f), F_2(f))$, es decir,

$$\begin{array}{ccc}
F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\
\lambda_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow \lambda_B \\
F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B)
\end{array}$$

La anterior representación fue tomada como referencia del libro *homotopical algebra* [5]. En este trabajo presentaremos como también λ define dos funtores $\mathcal{F}_\lambda : \text{Mor}\mathcal{A} \rightarrow \text{Mor}\mathcal{B}$ y $\mathcal{G}_\lambda : \text{Mor}\mathcal{B} \rightarrow \text{Mor}\mathcal{A}$.

Consideremos lo siguiente:

1. $F_1, F_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G_1, G_2 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ funtores covariantes tales que (F_i, G_i) para $i = 1, 2$ son pares adjuntos.

²Realmente hay que verificar que F_λ es un funtor, pero es directo de la definición.

2. $\lambda : F_1 \longrightarrow F_2$, $\sigma : F_2 \longrightarrow F_1$ dos transformaciones naturales tales que $\sigma \circ \lambda = 1$ en donde 1 denota la transformación idéntica.

Definición 1.3.1. Se define $\mathcal{F}_\lambda : Mor\mathcal{A} \longrightarrow Mor\mathcal{B}$, $\forall f \in ObjMor\mathcal{A}$ por

$$\mathcal{F}_\lambda(f) = F_2(f) \circ \lambda_{dom f}$$

y para todo $(\eta_{dom}, \eta_{cod}) = \eta \in Hom_{Mor\mathcal{A}}(f, h)$ por

$$\mathcal{F}_\lambda(\eta) = (F_1(\eta_{dom}), F_2(\eta_{cod})).$$

Ilustremos la buena definición de $\mathcal{F}_\lambda$.

Para $f : A_1 \longrightarrow A_2$, por ser λ transformación natural se cumple

$$\begin{array}{ccc} F_1(A_1) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(A_2) \\ \lambda_{A_1} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \lambda_{A_2} \\ F_2(A_1) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(A_2) \end{array}$$

y sea $\eta : f \longrightarrow h$, para $f : A_1 \longrightarrow A_2$ y $h : H_1 \longrightarrow H_2$, entonces se cumple

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\eta_{dom}} & H_1 \\ f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h \\ A_2 & \xrightarrow{\eta_{cod}} & H_2 \end{array}$$

Por lo tanto se cumple

$$\begin{array}{ccc}
F_1(A_1) & \xrightarrow{F_1(\eta_{dom})} & F_1(H_1) \\
\lambda_{A_1} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \lambda_{H_1} \\
F_2(A_1) & \xrightarrow{F_2(\eta_{dom})} & F_2(H_1) \\
F_2(f) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F_2(h) \\
F_2(A_2) & \xrightarrow{F_2(\eta_{cod})} & F_2(H_2)
\end{array}$$

Teorema 1.3.1. $\mathcal{F}_\lambda$ es un funtor covariante.

Basta con demostrar que $\mathcal{F}_\lambda(1_f) = 1_{\mathcal{F}_\lambda(f)}$ y que $\mathcal{F}_\lambda(\alpha \circ \beta) = \mathcal{F}_\lambda(\alpha) \circ \mathcal{F}_\lambda(\beta)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\lambda(1_f) &= (F_1((1_f)_{dom}), F_2((1_f)_{cod})) \\
&= (F_1(1_{domf}), F_2(1_{codf})) \\
&= (1_{F_1(domf)}, 1_{F_2(codf)}) \\
&= (1_{dom\mathcal{F}_\lambda(f)}, 1_{cod\mathcal{F}_\lambda(f)}) \\
&= 1_{\mathcal{F}_\lambda(f)}
\end{aligned}$$

Sean α y β morfismos de la categoría $Mor\mathcal{A}$, tales que $\alpha \circ \beta$ está bien definido, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\lambda(\alpha \circ \beta) &= (F_1(\alpha_{dom} \circ \beta_{dom}), F_2(\alpha_{cod} \circ \beta_{cod})) \\
&= (F_1(\alpha_{dom}) \circ F_1(\beta_{dom}), F_2(\alpha_{cod}) \circ F_2(\beta_{cod})) \\
&= (F_1(\alpha_{dom}), F_2(\alpha_{cod})) \circ (F_1(\beta_{dom}), F_2(\beta_{cod})) \\
&= \mathcal{F}_\lambda(\alpha) \circ \mathcal{F}_\lambda(\beta).
\end{aligned}$$

■

Definición 1.3.2. Se define $\mathcal{G}_\lambda : Mor\mathcal{B} \longrightarrow Mor\mathcal{A}$ para $g \in Obj\mathcal{B}$ por

$$\mathcal{G}_\lambda(g) = \bar{\lambda}_{codg} \circ G_2(g)$$

y para $(\gamma_{dom}, \gamma_{cod}) = \gamma \in Hom_{Mor\mathcal{B}}(g, l)$ por

$$\mathcal{G}_\lambda(\gamma) = (G_2(\gamma_{dom}), G_1(\gamma_{cod})).$$

La buena definición de $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$ se ilustra de manera dual a la buena definición de F_{λ} .

Afirmación: $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$ es un funtor covariante dual al teorema 1.3.1.

Definición 1.3.3. La categoría $Mor1_{\mathcal{A}}$ es la que tiene por objetos

$$ObjMor1_{\mathcal{A}} = \{1_A : A \longrightarrow A \mid \forall A \in Obj\mathcal{A}\}$$

es decir todos los morfismo identidad en la categoría $\mathcal{A}$, los morfismos entre $1_A, 1_B \in ObjMor1_{\mathcal{A}}$ están dados por

$$Hom_{Mor1_{\mathcal{A}}}(1_A, 1_B) = \{(f, f) \mid \forall f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)\}$$

Proposición 1.3.1. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$ una adjunción y $\lambda \in Trans(I_{\mathcal{A}}, F)$, donde $I_{\mathcal{A}}$ es el funtor identidad en la categoría $\mathcal{A}$, entonces existe una biyección entre $Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\lambda}(f), g)$ y $Hom_{Mor\mathcal{A}}(f, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g))$ para $f, g \in ObjMor1_{\mathcal{A}}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad consideremos a $f = 1_A$ y $g = 1_B$ y sea $\alpha = (\alpha_{dom}, \alpha_{cod}) \in Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\lambda}(1_A), 1_B)$ es decir que se cumple

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B \\ \lambda_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow 1_B \\ F(A) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B \end{array}$$

entonces definimos

$$\delta(1_A, 1_B) : Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\lambda}(1_A), 1_B) \longrightarrow Hom_{Mor\mathcal{A}}(1_A, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(1_B))$$

por $\delta(1_A, 1_B)(\alpha_{dom}, \alpha_{cod}) = ((\alpha_{cod})^{*2}, \alpha_{dom})$, que corresponde al diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B \\ \uparrow 1_A & \lrcorner & \uparrow \bar{\lambda}_B \\ A & \xrightarrow{(\alpha_{cod})^{*2}} & G(B) \end{array}$$

el cual es conmutativo por el teorema 1.2.1³. La inversa de $\delta(1_A, 1_B)$ para $(\gamma_{dom}, \gamma_{cod}) \in Hom_{Mor\mathcal{A}}(1_A, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(1_B))$ es $\delta(1_A, 1_B)^{-1}(\gamma_{dom}, \gamma_{cod}) = (\gamma_{cod}, (\gamma_{dom})_{*2})$, es decir

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma_{cod}} & B \\ \downarrow \lambda_A & \circlearrowleft & \downarrow 1_B \\ F(A) & \xrightarrow{(\gamma_{dom})_{*2}} & B \end{array}$$

Veamos que en efecto $(\gamma_{cod}, (\gamma_{dom})_{*2}) \in Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\lambda}(1_A), 1_B)$. Por definición $(\gamma_{dom}, \gamma_{cod})$ corresponde al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma_{dom}} & G(B) \\ \downarrow 1_A & \circlearrowleft & \downarrow \bar{\lambda}_B \\ A & \xrightarrow{\gamma_{cod}} & B \end{array}$$

entonces basta demostrar que se cumple

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma_{dom}} & G(B) \\ \downarrow \lambda_A & \circlearrowleft & \downarrow \bar{\lambda}_B \\ F(A) & \xrightarrow{(\gamma_{dom})_{*2}} & B \end{array}$$

Figura 1.16

En efecto, por λ ser transformación natural y por definición de $(\)_{*2}$ y $\bar{\lambda}_B$ se cumple lo siguiente

³ $(\)_{*2}$ y $(\)_{*2}$ son los isomorfismos de adjunción correspondientes a los funtores F y G

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\gamma_{dom}} & G(B) \\
\downarrow \lambda_A & \lrcorner & \downarrow \lambda_{G(B)} \\
F(A) & \xrightarrow{F(\gamma_{dom})} & FG(B) \lrcorner \bar{\lambda}_B \\
\searrow (\gamma_{dom})^{*2} & \lrcorner & \downarrow \varphi_B \\
& & B
\end{array}$$

Por lo tanto se cumple el diagrama de la figura 1.16. ■

Con esta proposición se puede observar cómo la equivalencia entre las homotopías adjuntas mostrada en la sección anterior, es igual a una biyección entre los conjuntos $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\lambda}(f), g)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(f, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g))$ para $f, g \in ObjMor1_{\mathcal{A}}$, puesto que se tiene una correspondencia biunívoca entre los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
\downarrow \lambda_A & \lrcorner & \downarrow 1_B \\
F(A) & \xrightarrow{H} & B
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
1_A \uparrow & \lrcorner & \uparrow \bar{\lambda}_B \\
A & \xrightarrow{K} & G(B)
\end{array}$$

que es igual a una correspondencia biunívoca entre

$$\begin{array}{ccc}
A & & B \\
\downarrow \lambda_A & \searrow f & \\
F(A) & \xrightarrow{H} & B
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& & B \\
& \nearrow f & \uparrow \bar{\lambda}_B \\
A & \xrightarrow{K} & G(B)
\end{array}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis de la proposición 1.3.1, en este trabajo demostraremos que $(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}})$ es un par adjunto por medio de la construcción de un isomorfismo natural entre $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\lambda}(f), g)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(f, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g))$ para $f, g \in ObjMor\mathcal{A}$. Sin embargo para que este isomorfismo natural de cuenta de la equivalencia entre las homotopías adjuntas, λ tendría que ser un isomorfismo natural. Posteriormente demostramos si $\lambda : F_1 \longrightarrow F_2$ es un isomorfismo natural entonces $(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}})$ en general es un par adjunto.

Teorema 1.3.2. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$ una adjunción y $\lambda \in \text{Trans}(1, F)$ entonces $(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}})$ es un par adjunto.

Demostración. Para $f, g \in \text{ObjMor}\mathcal{A}$, ($f : A_1 \rightarrow A_2$ y $g : B_1 \rightarrow B_2$) definimos $\text{Hom}_{\text{Mor}\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\lambda(f), g) \xrightarrow{\chi(f, g)} \text{Hom}_{\text{Mor}\mathcal{A}}(f, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g))$ como sigue:

Para $(\alpha_{dom}, \alpha_{cod}) = \alpha \in \text{Hom}_{\text{Mor}\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\lambda(f), g)$, es decir que se cumple

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B_1 \\ \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow g \\ A_2 & & \\ \downarrow \lambda_{A_2} & & \\ F(A_2) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B_2 \end{array}$$

definimos $\chi(f, g)(\alpha) = (\bar{\sigma}_{B_1} \circ \alpha_{dom}, \alpha_{cod} \circ \lambda_{A_2})^4$, lo cual corresponde al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \xrightarrow{\lambda_{A_2}} & F(A_2) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B_2 \\ \uparrow f & & & & \uparrow g \\ & & & & B_1 \\ & & & & \uparrow \bar{\lambda}_{B_1} \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B_1 & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{B_1}} & G(B_1) \end{array}$$

Veamos que $\chi(f, g)$ es una transformación natural para $f, g \in \text{ObjMor}\mathcal{A}$. Para $\eta : \hat{f} \rightarrow f$ donde $\hat{f} : \hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2$ y para $\gamma : g \rightarrow \hat{g}$ donde $\hat{g} : \hat{B}_1 \rightarrow \hat{B}_2$ verifiquemos que el siguiente diagrama es conmutativo

⁴La transformación natural σ es la que consideramos al principio de esta sección

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\lambda(f), g) & \xrightarrow{\delta(f, g)} & Hom_{Mor\mathcal{A}}(f, \mathcal{G}_\lambda(g)) \\
\downarrow Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\lambda(\eta), \gamma) & & \downarrow Hom_{Mor\mathcal{A}}(\eta, \mathcal{G}_\lambda(\gamma)) \\
Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\lambda(\hat{f}), \hat{g}) & \xrightarrow{\delta(\hat{f}, \hat{g})} & Hom_{Mor\mathcal{A}}(\hat{f}, \mathcal{G}_\lambda(\hat{g}))
\end{array}$$

Figura 1.17

Sea $\alpha \in Hom_{Mor\mathcal{A}}(\mathcal{F}_\lambda(f), g)$ entonces la composición

$$[Hom_{Mor\mathcal{A}}(\eta, \mathcal{G}_\lambda(\gamma)) \circ \delta(f, g)](\alpha)$$

corresponde al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
\hat{A}_2 & \xrightarrow{\eta_{cod}} & A_2 & \xrightarrow{\lambda_{A_2}} & F(A_2) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B_2 & \xrightarrow{\gamma_{cod}} & \hat{B}_2 \\
\uparrow \hat{f} & & \uparrow f & & & & \uparrow g & & \uparrow \hat{g} \\
\hat{A}_2 & \xrightarrow{\eta_{dom}} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B_1 & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{B_1}} & G(B_1) & \xrightarrow{G(\gamma_{dom})} & G(\hat{B}_1) \\
& & & & & & \uparrow \bar{\lambda}_{B_1} & & \uparrow \bar{\lambda}_{\hat{B}_1}
\end{array}$$

Figura 1.18

Luego por λ y $\bar{\sigma}$ ser transformaciones naturales se cumple

$$\begin{array}{ccc}
\hat{A}_2 & \xrightarrow{\eta_{cod}} & A_2 \\
\hat{\lambda}_{A_2} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \lambda_{A_2} \\
F(\hat{A}_2) & \xrightarrow{F(\eta_{cod})} & F(A_2)
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
B_1 & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{B_1}} & G(B_1) \\
\gamma_{dom} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(\gamma_{dom}) \\
\hat{B}_1 & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{\hat{B}_1}} & G(\hat{B}_1)
\end{array}$$

así el diagrama de la figura 1.18 es equivalente con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\hat{A}_2 & \xrightarrow{\hat{\lambda}_{A_2}} & F(A_2) & \xrightarrow{F(\eta_{cod})} & F(A_1) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B_2 & \xrightarrow{\gamma_{cod}} & \hat{B}_2 \\
\downarrow \hat{f} & & \downarrow f & & & & \uparrow g & & \uparrow \hat{g} \\
\hat{A}_2 & \xrightarrow{\eta_{dom}} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B_1 & \xrightarrow{\gamma_{dom}} & \hat{B}_1 & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{\hat{B}_1}} & G(\hat{B}_1) \\
& & & & & & \uparrow \bar{\lambda}_{B_1} & & \uparrow \bar{\lambda}_{\hat{B}_1}
\end{array}$$

Figura 1.19

y este último corresponde a la composición $\left[\delta(\hat{f}, \hat{g}) \circ Hom f(\mathcal{F}_\lambda(f), g) \right] (\alpha)$, así el diagrama de la figura 1.17 es conmutativo y por lo tanto χ es una transformación natural.

La inversa de χ para $(\beta_{dom}, \beta_{cod}) \in Hom_{Mor \mathcal{A}}(f, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g))$ está dada por

$$\chi^{-1}(f, g)(\beta_{dom}, \beta_{cod}) = (\bar{\lambda}_{B_1} \circ \beta_{dom}, \beta_{cod} \circ \sigma_{A_2})$$

es decir

$$\begin{array}{ccccc}
A_1 & \xrightarrow{\beta_{dom}} & G(B_1) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_{B_1}} & B_1 \\
\downarrow f & & & & \downarrow g \\
A_2 & & \mathcal{U} & & \\
\downarrow \lambda_{A_2} & & & & \\
F(A_2) & \xrightarrow{\sigma_{A_2}} & A_2 & \xrightarrow{\beta_{dom}} & B_2
\end{array}$$

Luego por el teorema 1.1.2, χ^{-1} es una transformación natural, así χ es un isomorfismo natural, por lo tanto $(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}})$ es un par adjunto. ■

Tomando $f = 1_A$ y $g = 1_B$ en el isomorfismo definido en este teorema, obtenemos la siguiente correspondencia

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B \\
\downarrow 1_A & \lrcorner & \downarrow 1_B \\
A & & F(A) \\
\downarrow \lambda_A & & \uparrow 1_A \\
F(A) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\lambda_A} & F(A) & \xrightarrow{\alpha_{cod}} & B \\
\uparrow 1_A & & \lrcorner & & \uparrow 1_B \\
A & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B & \xrightarrow{\bar{\sigma}_B} & G(B) \\
& & & \uparrow \bar{\lambda}_B & \\
& & & B &
\end{array}$$

Figura 1.20

El último de ellos es igual al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B \\
\uparrow 1_A & \lrcorner & \uparrow \bar{\lambda}_B \\
A & \xrightarrow{\lambda_A} F(A) \xrightarrow{\alpha_{cod}} B \xrightarrow{\psi^2_B} GF(B) \xrightarrow{G(\sigma_B)} G(B)
\end{array}$$

Figura 1.21

en efecto, por el diagrama derecho de la figura 1.20 $\alpha_{cod} \circ \lambda_A = \alpha_{dom}$ y por definición $\bar{\sigma}_B = G(\sigma_B) \circ \psi^2_B$ ⁵, ahora el diagrama de la figura 1.21 es igual al siguiente

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha_{dom}} & B \\
\uparrow 1_A & \lrcorner & \uparrow \bar{\lambda}_B \\
A & \xrightarrow{\psi^2_A} GF(A) \xrightarrow{G(\sigma_A)} G(A) \xrightarrow{G(\lambda_A)} GF(A) \xrightarrow{G(\alpha_{cod})} G(B)
\end{array}$$

Esta última igualdad se obtiene usando el hecho de que ψ^2 y σ son transformaciones naturales. Ahora en este último diagrama se puede observar que si

⁵ ψ^2 es la transformación de adjunción correspondiente a F y G

$\lambda_A \circ \sigma_A = 1_A$ entonces $\chi(1_A, 1_B) = \delta(1_A, 1_B)$, ya que $G(\alpha_{cod}) \circ \psi_A^2 = (\alpha_{cod})^*$. Con esta condición, la adjunción mencionada en el teorema 1.3.2 daría cuenta de la equivalencia entre las homotopías adjuntas mostrada en la sección anterior, así con esto surge la siguiente duda ¿Que propiedades se cumplen si $\lambda_A \circ \sigma_A = 1_A$, para todo $A \in \text{Obj } \mathcal{A}$, es decir si λ es un isomorfismo natural⁶?. Una propiedad que se cumple es que $(\mathcal{F}_\lambda, G_\lambda)$ es en general un par adjunto, esto se presenta en el siguiente teorema realizado en este trabajo.

Teorema 1.3.3. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías, $\mathcal{A} \xrightarrow{F_i} \mathcal{B} \xrightarrow{G_i} \mathcal{A}$ para $i = 1, 2$ dos adjunciones y $\lambda \in \text{Trans}(F_1, F_2)$ tal que existe $\sigma : F_2 \rightarrow F_1$ que cumple que $\sigma_A \circ \lambda_A = 1_{F_1(A)}$ y $\lambda_A \circ \sigma_A = 1_{F_2(A)}$ para $A \in \text{Obj } \mathcal{A}$ entonces $(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda)$ es un par adjunto.

Demostración. Se define $\psi_f : f \rightarrow \mathcal{G}_\lambda \mathcal{F}_\lambda(f)$ para todo $f \in \text{Obj Mor } \mathcal{A}$ ($f : A_1 \rightarrow A_2$) por

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\psi^1_{A_1}} & G_1 F_1(A_1) & \xrightarrow{\bar{\sigma}_{F_1(A_1)}} & G_2 F_1(A_1) \\
 \downarrow f & \wr & \downarrow G_1 F_1(f) & \wr & \downarrow \bar{\lambda}_{F_1(A_1)} \\
 & & & & G_1 F_1(A_1) \wr \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{F}_\lambda(f)) \\
 & & & & \downarrow G_1(\mathcal{F}_\lambda(f)) \\
 A_2 & \xrightarrow{\psi^1_{A_2}} & G_1 F_1(A_2) & \xrightarrow{G_1(\lambda_{A_2})} & G_1 F_2(A_2)
 \end{array}$$

Figura 1.22

es decir $\psi_f = (\bar{\sigma}_{F_1(A_2)} \circ \psi^1_{A_2}, G_1(\lambda_{A_2}) \circ \psi^1_{A_2})$.

Verifiquemos que ψ es una transformación natural. Sea $\eta = (\eta_{dom}, \eta_{cod})$ perteneciente a $\text{Hom}_{\text{Mor } \mathcal{A}}(f, h)$, para $f : A_1 \rightarrow A_2$ y $h : H_1 \rightarrow H_2$, entonces se cumple

⁶Recordemos que al principio de este capítulo se consideró que $\sigma \circ \lambda = 1$

$$\begin{array}{ccc}
f & \xrightarrow{\psi_f} & \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}(f) \\
\eta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}(\eta) \\
h & \xrightarrow{\psi_h} & \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}(h)
\end{array}$$

Figura 1.23

En efecto, el diagrama de la figura 1.23 es igual a

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 & & & & \\
\eta_{dom} \downarrow & \searrow \psi^1_{A_1} & & \eta_{cod} \downarrow & \searrow \psi^1_{A_2} & & \\
& G_1 F_1(A_1) & \xrightarrow{G_1 F_1(f)} & G_1 F_1(A_2) & & & \\
H_1 & \xrightarrow{h} & H_2 & & & & \\
\downarrow \psi^1_{H_1} & \searrow \bar{\sigma}_{F_1(A_2)} & \downarrow \psi^1_{H_2} & & & & \\
& G_1 F_1(H_1) & \xrightarrow{G_1 F_1(h)} & G_1 F_1(H_2) & & & \\
& \searrow \bar{\sigma}_{F_1(H_1)} & & & & & \\
& G_2 F_1(A_1) & \xrightarrow{G_2 F_1(f)} & G_2 F_1(A_2) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_{F_2(A_2)}} & G_1 F_2(A_2) & \\
& \downarrow G_2 F_1(\eta_{dom}) & \downarrow G_2 F_1(\eta_{cod}) & \downarrow G_2 F_2(\eta_{cod}) & \downarrow G_1 F_2(\eta_{cod}) & & \\
& G_2 F_1(H_1) & \xrightarrow{G_2 F_1(h)} & G_2 F_2(H_2) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_{F_2(H_2)}} & G_1 F_2(H_2) & \\
& & & & & &
\end{array}$$

Figura 1.24

donde este último es conmutativo.

Por otro lado definimos $\varphi_g : \mathcal{F}_{\bar{\lambda}}\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g) \longrightarrow g$ para g perteneciente a $ObjMor\mathcal{B}$ ($g : B_1 \longrightarrow B_2$) por

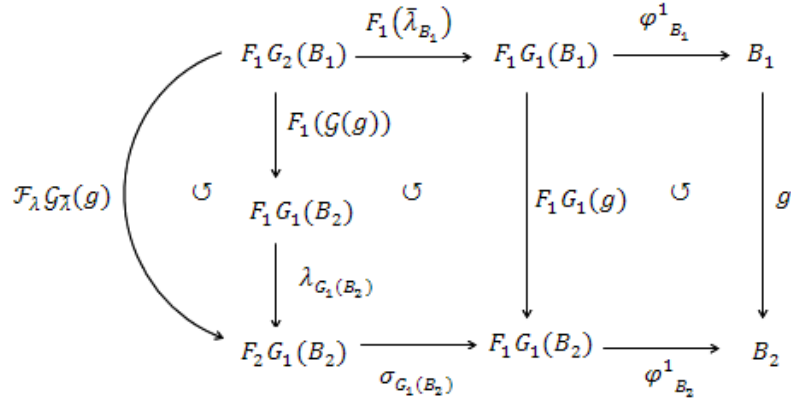


Figura 1.29

es decir $\varphi_g = (\varphi^1_{B_2} \circ F_1(\bar{\lambda}_{B_2}), \varphi^1_{B_2} \circ \sigma_{G_1(B_2)})$.

Verifiquemos que φ es una transformación natural. Sea $\gamma = (\gamma_{dom}, \gamma_{cod})$ perteneciente a $Hom_{Mor\mathcal{B}}(g, l)$, para $g : B_1 \longrightarrow B_2$ y $l : L_1 \longrightarrow L_2$, entonces se cumple

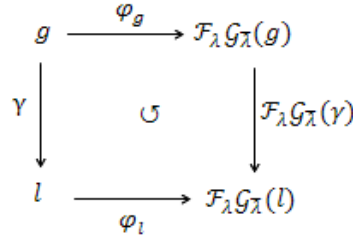


Figura 1.30

En efecto el diagrama de la figura 1.30 es igual a

$$\begin{array}{ccccccccc}
& F_1(\psi_{A_1}^1) & & F_1(\bar{\sigma}_{F_1(A_1)}) & & F_1(\bar{\lambda}_{F_1(A_1)}) & & \varphi_{F_1(A_1)}^1 & \\
F_1(A_1) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_1(A_1) & \longrightarrow & F_1 G_2 F_1(A_1) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_1(A_1) & \longrightarrow & F_1(A_1) \\
\mathcal{F}_\lambda(f) \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{F}_\lambda \mathcal{G}_\lambda \mathcal{F}_\lambda(f) & & & & \downarrow \mathcal{F}_\lambda(f) \\
& F_2(\psi_{A_2}^1) & & F_2 G_1(\lambda_{A_2}) & & \sigma_{G_1 F_2(A_2)} & & \varphi_{F_2(A_2)}^1 & \\
F_2(A_2) & \longrightarrow & F_2 G_1 F_1(A_2) & \longrightarrow & F_2 G_1 F_2(A_2) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_2(A_2) & \longrightarrow & F_2(A_2)
\end{array}$$

Figura 1.32

Nótese que la parte superior del diagrama de la figura 1.32 es la función identidad de $F_1(A_1)$ (e.d. $1_{F_1(A_1)}$) puesto $\sigma \circ \lambda = 1$ entonces $\bar{\lambda} \circ \bar{\sigma} = 1$ (proposición 1.1.3) y por hipótesis (F_1, G_1) es un par adjunto entonces $\varphi_{F_1(A_1)}^1 \circ F_1(\psi_{A_1}^1) = 1_{F_1(A_1)}$ (proposición 1.1.2). Por otro lado, la parte inferior del diagrama de la figura 1.32 es igual a $\lambda_{A_2} \circ \sigma_{A_2}$, esto se ve reflejado en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
& F_2(\psi_{A_2}^1) & & F_2 G_1(\lambda_{A_2}) & & \sigma_{G_1 F_2(A_2)} & & \varphi_{F_2(A_2)}^1 \\
F_2(A_2) & \longrightarrow & F_2 G_1 F_1(A_2) & \longrightarrow & F_2 G_1 F_2(A_2) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_2(A_2) & \longrightarrow & F_2(A_2) \\
\sigma_{A_2} \downarrow & \wr & \sigma_{G_1 F_1(A_2)} \downarrow & \wr & \sigma_{G_1 F_2(A_2)} \downarrow & \wr & 1_{F_2(A_2)} & \nearrow & \\
& F_1(\psi_{A_2}^1) & & F_1 G_1(\lambda_{A_2}) & & \varphi_{F_2(A_2)}^1 & & & \\
F_1(A_2) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_1(A_2) & \longrightarrow & F_1 G_1 F_2(A_2) & \longrightarrow & F_2(A_2) & \wr & \\
& & \wr & F_1 G_1(\sigma_{A_2}) \downarrow & \wr & \sigma_{A_2} \downarrow & & \nearrow & \\
& & & F_1 G_1 F_1(A_2) & \longrightarrow & F_1(A_2) & & & \\
& & & & & & & \nearrow & \\
& & & & & & & & \lambda_{A_2}
\end{array}$$

En este diagrama claramente se ve que

$$\varphi_{F_2(A_2)}^1 \circ \sigma_{G_1 F_2(A_2)} \circ F_2 G_1(\lambda_{A_2}) \circ F_2(\psi_{A_2}^1) = \lambda_{A_2} \circ \varphi_{F_1(A_2)}^1 \circ F_1(\psi_{A_2}^1) \circ \sigma_{A_2}$$

luego (F_1, G_1) es un par adjunto entonces $\varphi_{F_1(A_2)}^1 \circ F_1(\psi_{A_2}^1) = 1_{F_1(A_2)}$ (proposición 1.1.2) y por hipótesis $\lambda \circ \sigma = 1$ entonces

$$\varphi_{F_2(A_2)}^1 \circ \sigma_{G_1 F_2(A_2)} \circ F_2 G_1(\lambda_{A_2}) \circ F_2(\psi_{A_2}^1) = 1_{F_2(A_2)}$$

Por lo tanto $\varphi_{\mathcal{F}_\lambda(f)} \circ \mathcal{F}_\lambda(\psi_f) = 1_{\mathcal{F}_\lambda(f)}$ y con esto $(\)_* \circ (\)^* = 1$.

2. Análogamente se demuestra que $(\)^* \circ (\)_* = 1$. Para esto utilizamos la proposición 1.1.2, ítem 1, es decir, demostrar que $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(\varphi_g) \circ \psi_{\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g)}$ es igual a $1_{\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g)}$ para todo $g \in \text{ObjMor}\mathcal{B}(g : B_1 \longrightarrow B_2)$. La composición $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(\varphi_g) \circ \psi_{\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g)}$ corresponde al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \psi^1_{G_2(B_1)} & & \bar{\sigma}_{F_1 G_2(B_1)} & & G_2 F_1(\bar{\lambda}_{B_1}) & & G_2(\varphi^1_{B_1}) & \\
 G_2(B_1) & \longrightarrow & G_1 F_1 G_2(B_1) & \longrightarrow & G_2 F_1 G_2(B_1) & \longrightarrow & G_2 F_1 G_1(B_1) & \longrightarrow & G_2(B_1) \\
 \downarrow \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g) & & \downarrow \psi^1_{G_1(B_2)} & & \downarrow G_1(\lambda_{G_2(B_2)}) & & \downarrow G_1(\sigma_{G_1(B_2)}) & & \downarrow G_1(\varphi^1_{B_2}) \\
 & \psi^1_{G_1(B_2)} & & G_1(\lambda_{G_2(B_2)}) & & G_1(\sigma_{G_1(B_2)}) & & G_1(\varphi^1_{B_2}) & \\
 G_1(B_2) & \longrightarrow & G_1 F_1 G_1(B_2) & \longrightarrow & G_1 F_2 G_1(B_2) & \longrightarrow & G_1 F_1 G_1(B_2) & \longrightarrow & G_1(B_2)
 \end{array}$$

Figura 1.33

Nótese que la parte inferior del diagrama de la figura 1.33 es la función identidad de $G_1(B_2)$ (e.d. $1_{G_1(B_2)}$), puesto que $\sigma \circ \lambda = 1$ y por hipótesis (F_1, G_1) es un par adjunto entonces $G_1(\varphi^1_{B_2}) \circ \psi^1_{G_1(B_2)} = 1_{G_1(B_2)}$ (proposición 1.1.2). Por otro lado, la parte superior del diagrama de la figura 1.33, es igual a $\bar{\sigma}_{B_1} \circ \bar{\lambda}_{B_1}$, esto se ve reflejado en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \psi^1_{G_2(B_1)} & & \bar{\sigma}_{F_1 G_2(B_1)} & & G_2 F_1(\bar{\lambda}_{B_1}) & & G_2(\varphi^1_{B_1}) & \\
 G_2(B_1) & \longrightarrow & G_1 F_1 G_2(B_1) & \longrightarrow & G_2 F_1 G_2(B_1) & \longrightarrow & G_2 F_1 G_1(B_1) & \longrightarrow & G_2(B_1) \\
 \bar{\lambda}_{B_1} \downarrow & \wr & \downarrow G_1 F_1(\bar{\lambda}_{B_1}) & \wr & \downarrow G_2 F_1(\bar{\lambda}_{B_1}) & \wr & \downarrow 1_{G_2(B_1)} & \nearrow & \\
 G_1(B_1) & \longrightarrow & G_1 F_1 G_1(B_1) & \longrightarrow & G_2 F_1 G_1(B_1) & \longrightarrow & G_2(B_1) & \wr & \\
 & & \searrow 1_{G_1 F_1 G_1(B_1)} & & \downarrow \bar{\lambda}_{F_1 G_1(B_1)} & & \downarrow G_1(\varphi^1_{B_1}) & \nearrow \bar{\sigma}_{B_1} & \\
 & & & & G_1 F_1 G_1(B_1) & \longrightarrow & G_1(B_1) & &
 \end{array}$$

Por este último diagrama tenemos que

$$G_2(\varphi^1_{B_1}) \circ G_2 F_1(\bar{\lambda}_{B_1}) \circ \bar{\sigma}_{F_1 G_2(B_1)} \circ \psi^1_{G_2(B_1)} = \bar{\sigma}_{B_1} \circ G_1(\varphi^1_{B_1}) \circ \psi^1_{G_1(B_1)} \circ \bar{\lambda}_{B_1}$$

luego (F_1, G_1) es un par adjunto entonces $G_1(\varphi_{B_1}^1) \circ \psi_{G_1(B_1)}^1 = 1_{G_1(B_1)}$ (proposición 1.1.2) y por hipótesis $\lambda \circ \sigma = 1$ entonces

$$G_2(\varphi_{B_1}^1) \circ G_2 F_1(\bar{\lambda}_{B_1}) \circ \bar{\sigma}_{F_1 G_2(B_1)} \circ \psi_{G_2(B_1)}^1 = 1_{F_2(A_2)}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(\varphi_g) \circ \psi_{\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g)} = 1_{\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}(g)}$$

y con esto $(\)^* \circ (\)_* = 1$.

Así por 1 y 2 $(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathcal{G}_{\bar{\lambda}})$ es un par adjunto. ■

Este teorema aplicado en sistemas homotópicos solo produce homotopía trivial. En efecto, sea $\eta = (F, d^0, d^1, s)$ donde $d_A^0 \circ s_A = 1_A$ y $s_A \circ d_A^0 = 1_{F(A)}$, entonces d^0 es la transformación natural inversa de s . Por otro lado si también se cumple que $d_A^1 \circ s_A = 1_A$ y $s_A \circ d_A^1 = 1_{F(A)}$ entonces d^1 es la transformación natural inversa de s , por lo tanto $d^0 = d^1$ y este sistema homotópico solo produce homotopía trivial, es decir $f \stackrel{\eta}{\sim} f$. Por lo tanto descartamos que la equivalencia de las homotopías adjuntas sea equivalente a la adjunción de los funtores $\mathcal{F}_{\lambda}$ y $\mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$, puesto que solo se demostró que son adjuntos si λ es un isomorfismo natural. Sin embargo la equivalencia de las homotopías adjuntas pudo explicarse por medio de la proposición 1.3.1.

Queda abierta la pregunta de si estos funtores son adjuntos sin λ ser un isomorfismo natural, así la equivalencia de las homotopías adjuntas sería un caso de particular de adjunción.

Capítulo 2

Homotopía en los Grupos Abelianos Simpliciales

En este capítulo se demuestra la equivalencia de la homotopía a derecha y a izquierda en los conjuntos simpliciales ($\Delta^\circ Set$) usando el teorema 1.2.1, es decir, veremos que $\Delta^\circ Set$ cumple las hipótesis de este teorema. Además mostraremos que en los grupos abelianos simpliciales ($\Delta^\circ Ab$) la homotopía es una relación de equivalencia.

2.1. La Categoría Δ

Se define el conjunto $\Delta = \{[n] : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ donde $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ y para $[n], [m] \in \Delta$ definimos el conjunto

$$Hom_\Delta([n], [m]) = \{f : [n] \rightarrow [m] \mid f \text{ es creciente}\}$$

Recordemos que f es creciente si para $x < y$, $f(x) \leq f(y)$. Consideremos estos morfismos junto con las siguientes propiedades:

1. Para $[n], [m], [z] \in \Delta$ definimos

$$\begin{aligned} Hom([n], [m]) \times Hom([m], [z]) &\longrightarrow Hom([n], [z]) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Esto está bien definido ya que si f y g son dos funciones tales que $f \in Hom([n], [m])$ y $g \in Hom([m], [z])$ entonces $g \circ f : [n] \rightarrow [z]$. Ahora sean $x, y \in [n]$ tal que $x \leq y$, como f es creciente entonces $f(x) \leq f(y)$,

luego $f(x), f(y) \in [m]$ y g es creciente entonces $g(f(x)) \leq g(f(y))$ por tanto $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$ así que $g \circ f$ es una función creciente que va desde $[n]$ a $[z]$. Entonces $g \circ f \in \text{Hom}([n], [z])$. En algunas ocasiones denotaremos la composición $g \circ f$ como gf .

Por otro lado sean $([a], [b]) \neq ([c], [d])$ con $[a], [b], [c], [d] \in \Delta$. Es claro que $\text{Hom}([a], [b]) \cap \text{Hom}([c], [d]) = \emptyset$, ya que si dos funciones tienen su dominio ó codominio distintos entonces las funciones son diferentes.

2. Sea $[n] \in \Delta$ el morfismo identidad $1_{[n]}$ es

$$\begin{aligned} 1_{[n]} : [n] &\rightarrow [n] \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{C} = (\text{Obj}\Delta, \text{Mor}_\Delta)$ donde $\text{Obj}\Delta = \Delta$ y $\text{Mor}_\Delta = \text{Hom}([n], [m])$ para todo $[n], [m] \in \Delta$, entonces por 1, 2 y 3 $\mathcal{C}$ es una categoría, llamaremos a $\mathcal{C}$ la categoría Δ .

Recordemos lo siguiente:

1. Un morfismo f perteneciente a $\text{Hom}([n], [m])$ se dice *epimorfismo* si para todo $\delta, \eta \in \text{Hom}([m], [c])$ tal que si $\delta \circ f = \eta \circ f$ entonces $\delta = \eta$.
2. Un morfismo f perteneciente a $\text{Hom}([n], [m])$ se dice *monomorfismo* si para todo $\alpha, \beta \in \text{Hom}([c], [n])$ tal que si $f \circ \alpha = f \circ \beta$ entonces $\alpha = \beta$.
3. Un morfismo h perteneciente a $\text{Hom}([n], [m])$ que sea monomorfismo y epimorfismo se llama un *isomorfismo*.
4. Sean $[n], [m] \in \text{Obj}\Delta$ entonces si existe un isomorfismo $f \in \text{Hom}([n], [m])$ se dice que $[n]$ es isomorfo a $[m]$ y se simboliza $[n] \cong [m]$.

En la categoría Δ

1. Los epimorfismos son las funciones crecientes sobreyectivas. En efecto, sea $f \in \text{Hom}([n], [m])$ una función sobreyectiva y $\delta, \eta \in \text{Hom}([m], [c])$ tal que $\delta \circ f = \eta \circ f$ entonces $\forall y \in [m]$ existe un $x \in [n]$ tal que $f(x) = y$, así $\delta(y) = \delta(f(x)) = (\delta \circ f)(x) = (\eta \circ f)(x) = \eta(f(x)) = \eta(y)$ por tanto $\eta = \delta$.

2. Los monomorfismos son las funciones inyectivas. En efecto, para una función inyectiva $f \in \text{Hom}([n], [m])$ y $\alpha, \beta \in \text{Hom}([m], [c])$ tal que $f \circ \alpha = f \circ \beta$ entonces $\forall x, y \in [n]$ se tiene que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, así para $\forall z \in [c]$ se tiene que $(f \circ \alpha)(z) = (f \circ \beta)(z)$ entonces se cumple que $f(\alpha(z)) = f(\beta(z))$ así $\alpha(z) = \beta(z)$, por lo tanto $\alpha = \beta$.
3. Los isomorfismos son las funciones identidad, ya que en Δ un isomorfismo σ de $[n]$ a $[m]$ sería una función creciente sobreyectiva e inyectiva, la cual solo puede existir si $n = m$ y σ es la función identidad.

Consideremos los siguientes morfismos:

- $\delta_n^i \in \text{Hom}([n-1], [n])$ es el monomorfismo que no toma el valor $i \in [n]$ es decir, para $j \in [n-1]$

$$\delta_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

- $\sigma_n^i \in \text{Hom}([n+1], [n])$ es el epimorfismo que toma dos veces el valor $i \in [n]$. es decir, para $j \in [n]$

$$\sigma_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Observación 2.1.1. Los monomorfismos y epimorfismos generan todos los morfismos de la categoría Δ , esta afirmación se demuestra en el siguiente teorema, el cual fue tomado del libro *calculus of fractions and homotopy theory*[2].

Teorema 2.1.1. *Todo morfismo $\varphi \in \text{Hom}([m], [n])$ puede ser escrito como composición de epimorfismos y monomorfismo de forma única como sigue:*

$$(**) \varphi = \delta_{m-t+s}^{i_s} \delta_{m-t+(s-1)}^{i_{s-1}} \cdots \delta_{m-t+1}^{i_1} \sigma_{m-t+1}^{j_t} \sigma_{m-(t-1)}^{j_{t-1}} \cdots \sigma_{m-2}^{j_2} \sigma_{m-1}^{j_1}$$

donde $n = m - t + s$ y $n \geq i_s > \dots > i_1 \geq 0$, $0 \leq j_t < \dots < j_1 < m$.

Demostración. ¹ Como φ es creciente tomamos $j_t < j_{t-1} < \dots < j_1$ los elementos pertenecientes a $[m]$ tales que $\varphi(j) = \varphi(j+1)$ y sean $i_1 < i_2 < \dots < i_s$

¹Esta demostración es tomada del libro *Calculus of Fractions and Homotopy Theory* de P. Gabriel and M. Zisman. Lema 2.2, pag 24.

elementos pertenecientes a $[n]$ tales que no pertenecen al conjunto de imágenes de φ . Así con los primeros morfismos (σ) hago que la función no sea inyectiva permitiendo que la imagen de los superíndices y de sus sucesores sean las mismas y con los últimos morfismos (δ) hago que la función no tome los valores dados en sus superíndices. Así obtenemos el morfismo φ . ■

Veamos un ejemplo para ilustrar la construcción de la demostración:

Ejemplo 2.1.1. Sea $\varphi \in \text{Hom}([4], [6])$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & x = 0, 2, 4. \\ x - 1 & x = 1, 3. \end{cases}$$

se tiene que $t = 2$ donde $j_2 = 0$, $j_1 = 2$ ya que $\varphi(0) = \varphi(1)$ y $\varphi(2) = \varphi(3)$, también se tiene que $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$, $i_4 = 6$ donde $s = 4$.

Por lo tanto $\varphi = \delta_6^6 \delta_5^5 \delta_4^3 \delta_3^1 \sigma_2^0 \sigma_3^2$.

Las funciones δ_n^i y σ_n^i satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}^j \delta_n^i &= \delta_{n+1}^i \delta_n^{j-1} \quad i < j \\ \sigma_n^j \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1} \quad i \leq j \\ \sigma_{n-1}^j \delta_n^i &= \begin{cases} \delta_{n-1}^i \sigma_{n-2}^{j-1} & i < j \\ 1_{[n-1]} & i = j \text{ ó } i = j + 1 \\ \delta_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-2}^j & i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Objetos Simpliciales

Se procederá a definir conjunto simplicial como una unión de conjuntos, los cuales cumplen ciertas propiedades que se mencionarán a continuación y posteriormente se mostrará, tomando como referencia el libro de Peter May [3], que los conjuntos simpliciales pueden ser definidos por medio de la categoría Δ con lo que se denomina objeto simplicial.

Definición 2.2.1. Un *Conjunto simplicial* X es dado por una sucesión de conjuntos $\{X_q\}$, $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (un elemento de X_q es llamado q -simplejo de X) junto con funciones $\partial_i : X_{q+1} \rightarrow X_q$ con $i = 0, 1, \dots, q + 1$ llamadas *caras*

y $s_i : X_q \rightarrow X_{q+1}$ con $i = 0, 1, \dots, q$ llamadas *degeneraciones*, las cuales cumplen las siguientes **propiedades combinatorias**:

$$\begin{aligned}\partial_i \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_i, \text{ si } i < j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i, \text{ si } i \leq j \\ \partial_i s_j &= s_{j-1} \partial_i, \text{ si } i < j \\ \partial_j s_j &= \text{identidad} = \partial_{j+1} s_j \\ \partial_i s_j &= s_j \partial_{j-1}, \text{ si } i > j + 1\end{aligned}$$

Definición 2.2.2. Un *objeto simplicial* en una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor contravariante $(F : \Delta \rightarrow \mathcal{C})$. Los elementos del conjunto $F([n])$ son llamados *n-simplejos* y las funciones $\partial_i = F(\delta_i)$ y $s_i = F(\sigma_i)$ satisfacen las propiedades combinatorias de la definición de conjuntos simpliciales.

Observación 2.2.1. Todo conjunto simplicial K determina un funtor contravariante $(F : \Delta \rightarrow \mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es la categoría de los conjuntos junto con las reglas $F([n]) = K_n$ y $F(\varphi) = s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_t} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{s-1}} \partial_{i_s}$, para $\varphi \in \text{Hom}([m], [n])$, esto permite que un conjunto simplicial pueda ser identificado con un objeto simplicial en la categoría de los conjuntos. Si la categoría $\mathcal{C}$ es la de los grupos abelianos entonces sus objetos simpliciales se dicen *grupos abelianos simpliciales*².

Las conexiones entre conjuntos simpliciales son llamadas funciones simpliciales definidas como sigue.

Definición 2.2.3. Si X y Y son conjuntos simpliciales, se define una *función simplicial*, digamos $f : X \rightarrow Y$, como una familia de funciones

$$f_n : X_n \rightarrow Y_n$$

donde se cumple que

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ \partial_i \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\partial}_i \\ X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ s_i \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \hat{s}_i \\ X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} \end{array}$$

²Un grupo abeliano simplicial se expresa también como en la definición 2.2.1 con la diferencia en que los X_q son grupos abelianos y las caras y degeneraciones son homomorfismos entre grupos abelianos.

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir $f_{n-1} \circ \partial_i = \hat{\partial}_i \circ f_n$ y $\hat{s}_j \circ f_{n-1} = f_n \circ s_j$.

Definición 2.2.4. Denotamos como $\Delta[n]$ al conjunto simplicial definido por la siguiente composición

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{i} & \text{Set} & \xrightarrow{\text{Hom}_\Delta(., [n])} & \text{Set} \\ & & & \searrow & \uparrow \\ & & & \Delta[n] & \end{array}$$

donde $(\Delta[n])_m = \text{Hom}_\Delta([m], [n])$, y para $f \in \text{Hom}_\Delta([a], [b])$,

$$\begin{aligned} (\Delta[n])(f) : \text{Hom}_\Delta([b], [n]) &\longrightarrow \text{Hom}_\Delta([a], [n]) \\ \tau &\longmapsto \tau \circ f \end{aligned}$$

1. Un q -simplejo es un morfismo $\mu : [q] \longrightarrow [n]$ ó también puede ser representado como una $q + 1$ -*upla* $(a_0, \dots, a_q)$ tal que $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_i \leq a_{i+1} \leq \dots \leq a_q \leq n$, donde $a_j = \mu(j)$ para $j \in [q]$.
2. $\partial_q^i(\mu) = (\mu \circ \delta_q^i)$ ó equivalentemente

$$\partial_q^i(a_0, \dots, a_q) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_q).$$

3. $s_q^i(\mu) = \mu \circ \sigma_q^i$ ó equivalentemente

$$s_q^i(a_0, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

El conjunto simplicial $\Delta[n]$ es el n -*simplejo estándar* y el mismo tiene un elemento canónico de dimensión n , el cual es $1_{[n]}$ ó $(0, \dots, n)$. Denotamos por I al 1 -*simplejo estándar* ($\Delta[1]$) el cual será utilizado en homotopía simplicial.

Definición 2.2.5. Si X y Y son conjuntos simpliciales, el *producto* de X y Y es el conjunto simplicial $X \times Y$ dado por:

1. $(X \times Y)_q = X_q \times Y_q$.
2. Las caras son el producto $\partial_i \times \hat{\partial}_i$ para $i = 0, 1, \dots, q + 1$ (∂_i y $\hat{\partial}_i$ son las caras correspondientes a X y Y respectivamente),

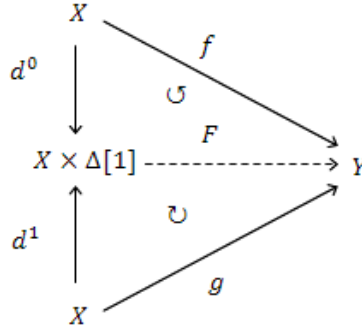
3. Las degeneraciones son el producto $s_i \times \hat{s}_i$ para $i = 0, 1, \dots, q$ (s_i y $\hat{s}_i$ son las degeneraciones correspondientes a X y Y respectivamente).

Ahora con los conjuntos simpliciales, con 1-simplejo estándar y con el producto de conjuntos simpliciales, veamos cuando dos funciones simpliciales son homótopas a izquierda.

Definición 2.2.6. (Homotopía en conjuntos simpliciales). Si X, Y son conjuntos simpliciales y $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones simpliciales, entonces f y g son homótopas a izquierda ($f \stackrel{\eta}{\sim} g$) si existe $F : X \times \Delta[1] \rightarrow Y$ tal que para un simplejo cualquiera de X , digamos γ (e.d. $\gamma \in X_q$), se tiene:

1. $F_q(\gamma, (0, 0, \dots, 0)) = f_q(\gamma)$,
2. $F_q(\gamma, (1, 1, \dots, 1)) = g_q(\gamma)$,

es decir, que se cumple



donde $d^i : X \rightarrow X \times \Delta[1]$ es la función simplicial tal que $d_q^i(\gamma) = (\gamma, \overline{i_q})$ ($\overline{i_q} : [q] \rightarrow [1]$ es la función constante de valor i) para $i = 0, 1$.

La función simplicial F se llama una **homotopía** de f a g .

Es claro que todo grupo abeliano simplicial es un conjunto simplicial, por lo tanto, también en $\Delta^\circ Ab$ están las funciones simpliciales (Definición 2.1.3.) y producto de grupos abelianos simpliciales (Definición 2.2.4.). Pero con la homotopía a derecha en los grupos abelianos simpliciales existe el problema de que $A \times \Delta[1]$ no es un grupo abeliano simplicial cuando A lo es. Esto

da lugar a utilizar el teorema 1.2.1, es decir, la homotopía a derecha con un funtor $G : \Delta^\circ Set \longrightarrow \Delta^\circ Set$ que sea adjunto a

$$\begin{aligned} F : \Delta^\circ Set &\longrightarrow \Delta^\circ Set \\ A &\longmapsto A \times \Delta[1] \end{aligned}$$

y que $G(A)$ sea un grupo abeliano simplicial cuando A lo sea.

A continuación se definirá un funtor G , tomando como referencia el seminario de Moore [4], tal que $G(A)$ sea abeliano simplicial cuando A lo sea, y que sea adjunto a F .

Definición 2.2.7. Para X y Y dos conjuntos simpliciales, el conjunto simplicial Y^X es definido como sigue:

1. $(Y^X)_q = Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[q], Y)$
2. las caras $\partial_i : (Y^X)_q \longrightarrow (Y^X)_{q-1}$ para $i = 0, \dots, q$ están dadas como sigue

$$\begin{aligned} \partial_i : Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[q], Y) &\longrightarrow Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[q-1], Y) \\ X \times \Delta[q] \xrightarrow{\alpha} Y &\longmapsto X \times \Delta[q-1] \xrightarrow{1_X \times \tilde{\delta}^i} X \times \Delta[q] \xrightarrow{\alpha} Y \end{aligned}$$

donde $\tilde{\delta}^i : \Delta[q-1] \longrightarrow \Delta[q]$ esta definida como sigue

$$\begin{aligned} \Delta[q-1]_n &\xrightarrow{\tilde{\delta}_n^i} \Delta[q]_n \\ \rho &\longmapsto \delta_q^i \circ \rho \end{aligned}$$

Las degeneraciones $s_i : (Y^X)_{q-1} \longrightarrow (Y^X)_q$ para $i = 0, \dots, q-1$ están dadas como sigue

$$\begin{aligned} s_i : Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[q-1], Y) &\longrightarrow Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[q], Y) \\ X \times \Delta[q-1] \xrightarrow{\beta} Y &\longmapsto X \times \Delta[q] \xrightarrow{1_X \times \tilde{\sigma}^i} X \times \Delta[q-1] \xrightarrow{\beta} Y \end{aligned}$$

donde $\tilde{\sigma}^i : \Delta[q] \longrightarrow \Delta[q-1]$ esta definida como sigue

$$\begin{aligned} \Delta[q]_n &\xrightarrow{\tilde{\sigma}_n^i} \Delta[q-1]_n \\ \lambda &\longmapsto \sigma_q^i \circ \lambda \end{aligned}$$

Observación 2.2.2. Para $Y \in \Delta^\circ \text{Set}$ se tiene que:

1. $Y^{\Delta[0]} \cong Y$.
2. $Y \times \Delta[0] \cong Y$.

Definición 2.2.8. Para $X \in \Delta^\circ \text{Set}$ y $f \in \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(K, Y)$ definimos dos funtores covariantes $F, G : \Delta^\circ \text{Set} \longrightarrow \Delta^\circ \text{Set}$ como siguen

- $F(X) = X \times \Delta[1]$ y $F(f) = f \times 1_{\Delta[1]}$.
- $G(X) = X^{\Delta[1]}$ y $G(f) : K^{\Delta[1]} \longrightarrow Y^{\Delta[1]}$ donde:

$$\begin{aligned} (G(f))_n : \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times \Delta[1], K) &\longrightarrow \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times \Delta[1], Y) \\ \beta &\longmapsto f \circ \beta \end{aligned}$$

Se procederá a presentar el concepto de funtor singular y la realización geométrica³, y veremos como estas definiciones en un caso particular dan cuenta de la adjunción de F y G .

2.3. Funtor potencia y producto

En esta sección se demuestra que el funtor producto y el funtor potencia son adjuntos por medio de la adjunción del funtor singular y de la realización geométrica, es decir, se demuestra que para un modelo particular $(\tilde{\Delta} \times \overline{A})$ la realización geométrica es el funtor producto y el singular es el funtor potencia. Para esto empezaremos mostrando la definición de funtor singular y de realización geométrica, tomando como referencia una publicación del profesor Ruiz [6].

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $Y : \Delta \longrightarrow \mathcal{A}$ un funtor covariante, se define el *Funtor Singular* $S_Y : \mathcal{A} \longrightarrow \Delta^\circ \text{Set}$ por

$$\begin{aligned} A &\longmapsto S_Y(A) : \Delta \longrightarrow \text{Set} \\ A_1 \xrightarrow{f} A_2 &\longmapsto S_Y(f) : S_Y(A_1) \longrightarrow S_Y(A_2) \end{aligned}$$

³Aquí se da por conocido que el funtor singular y la realización geométrica son funtores adjuntos.

donde

1.

$$\begin{aligned} S_Y(A) : \Delta &\longrightarrow Set \\ [n] &\longmapsto Hom_{\mathcal{A}}(Y([n]), A) \\ [p] \xrightarrow{w} [q] &\longmapsto S_Y(A)(w) : Hom_{\mathcal{A}}(Y([q]), A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(Y([p]), A) \end{aligned}$$

y para $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(Y([q]), A)$ se define $S_Y(A)(w)(\alpha) = \alpha \circ Y(w)$

2.

$$\begin{aligned} (S_Y(f))_n : Hom_{\mathcal{A}}(Y([n]), A_1) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(Y([n]), A_2) \\ \beta &\longmapsto f \circ \beta \end{aligned}$$

Por otro lado se define la *Realización Geométrica* $R_Y : \Delta^{\circ}Set \longrightarrow \mathcal{A}$ por

$$\begin{aligned} X &\longmapsto \left(\bigcup_n X_n \times Y([n]) \right) / t \\ X \xrightarrow{f} K &\longmapsto R_Y(f) : R_Y(X) \longrightarrow R_Y(K) \end{aligned}$$

donde para $w : [n] \longrightarrow [m]$, $x \in X_m$, $y \in Y_n$, t es la relación de equivalencia dada por $(X(w)(x), y) \sim (x, Y(w)(y))$.

La anterior relación de equivalencia se puede representar graficamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} & (X(w)(x), y) & \\ & X_n \times Y_n & \\ X(w) \uparrow & & \downarrow Y(w) \\ & X_m \times Y_m & \\ & (x, Y(w)(y)) & \end{array}$$

y $R_Y(f)$ está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R_Y(f) : \left(\bigcup_n X_n \times Y([n]) \right) / t &\longrightarrow \left(\bigcup_n K_n \times Y([n]) \right) / t \\ [x, y] &\longmapsto [f_n(x), y] \end{aligned}$$

donde $[x, y]$ denota la clase de equivalencia de la pareja (x, y) .

Observación 2.3.1. Para el funtor

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} : \Delta &\longrightarrow \Delta^\circ Set \\ [n] &\longmapsto \Delta[n] \\ [p] \xrightarrow{w} [q] &\longmapsto \Delta[p] \xrightarrow{\tilde{\Delta}(w)} \Delta[q] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\Delta}(w) \right)_n : Hom_\Delta([n], [p]) &\longrightarrow Hom_\Delta([n], [q]) \\ \alpha &\longmapsto w \circ \alpha \end{aligned}$$

se tiene que $S_{\tilde{\Delta}} : \Delta^\circ Set \longrightarrow \Delta^\circ Set$ es el funtor identidad. Puesto que si $X \in \Delta^\circ Set$, entonces por definición

$$(S_{\tilde{\Delta}}(X))_n = Hom_{\Delta^\circ Set}(\Delta[n], X)$$

Por otro lado $(X^{\Delta[0]})_n = X_n$, luego

$$(X^{\Delta[0]})_n = Hom_{\Delta^\circ Set}(\Delta[n] \times \Delta[0], X) = Hom_{\Delta^\circ Set}(\Delta[n], X)$$

por lo tanto $(S_{\tilde{\Delta}}(X))_n = X_n$, con esto aplicando la definición de funtor singular se cumple que $S_{\tilde{\Delta}}(f) = f$ para $f \in Mor \Delta^\circ Set$.

Como $(R_{\tilde{\Delta}}, S_{\tilde{\Delta}})$ es un par adjunto, y el adjunto del funtor identidad es el mismo, entonces $R_{\tilde{\Delta}}(X) = X$ (e.d. $\left(\bigcup_n X_n \times \Delta[n] \right) / t = X$) y $R_{\tilde{\Delta}}(f) = f$.

En la siguiente proposición realizada en este trabajo, mostraremos cómo el funtor singular y la realización geométrica del modelo $\tilde{\Delta} \times \bar{A}$ son iguales a los funtores G y F , respectivamente, dados en la definición 2.2.8.

Proposición 2.3.1. Sea $A \in \Delta^\circ \text{Set}$, y el funtor

$$\begin{aligned} \bar{A}: \Delta &\longrightarrow \Delta^\circ \text{Set} \\ [n] &\longmapsto A \\ \alpha &\longmapsto 1_A \end{aligned}$$

Entonces:

1. $S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X) = X^A$ y $R_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X) = X \times A$, para $X \in \Delta^\circ \text{Set}$
2. $(S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(f))_n(\beta) = f \circ \beta$, y $R_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(f) = f \times A$, para $f \in \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(K, Y)$
y $\beta \in \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times A, K)$

Demostración

Mostremos 1. Sea $X \in \Delta^\circ \text{Set}$, entonces por la definición 2.3.1

$$(S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X))_n = \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}((\tilde{\Delta} \times \bar{A})([n]), X)$$

luego $(\tilde{\Delta} \times \bar{A})([n]) = \Delta[n] \times A$ entonces

$$(S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X))_n = \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times A, X)$$

ahora por la definición 2.2.7

$$(X^A)_n = \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times A, X)$$

entonces

$$(S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X))_n = (X^A)_n$$

por otro lado por la definición 2.3.1 de realización geométrica

$$R_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X) = \left(\bigcup_n X_n \times (\Delta[n] \times A) \right) / t$$

como A no varía, entonces la relación de equivalencia no afecta ya que se estaría aplicando el funtor identidad de A (e.d. 1_A), graficamente lo anterior quiere decir lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & X_n \times (Y_n \times A) & \\ \uparrow X(w) & & \downarrow Y(w) \quad \downarrow 1_A \\ & X_m \times (Y_m \times A) & \end{array}$$

así $R_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X) = \left[\left(\bigcup_n X_n \times \Delta[n] \right) / t \right] \times A$, luego por la observación 2.3.1 $\left(\bigcup_n X_n \times \Delta[n] \right) / t = X$, por lo tanto $R_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(X) = X \times A$.

Mostremos 2. Sea $f \in \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(K, Y)$, entonces $S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(f)$ en su nivel n está dado como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} (S_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(f))_n : \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times A, K) &\longrightarrow \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(\Delta[n] \times A, Y) \\ \beta &\longmapsto f \circ \beta \end{aligned}$$

por otro lado, estudiar

$$R_{\tilde{\Delta} \times A}(f) : \left(\bigcup_n X_n \times \Delta[n] \right) / t \times A \longrightarrow \left(\bigcup_n K_n \times \Delta[n] \right) / t \times A$$

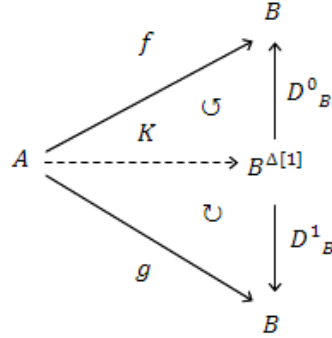
se reduce a estudiar

$$R_{\tilde{\Delta}}(f) : \left(\bigcup_n X_n \times \Delta[n] \right) / t \longrightarrow \left(\bigcup_n K_n \times \Delta[n] \right) / t$$

luego por la observación 2.3.1 $R_{\tilde{\Delta}}(f) = f$, por lo tanto $R_{\tilde{\Delta} \times \bar{A}}(f) = f \times 1_A$. ■

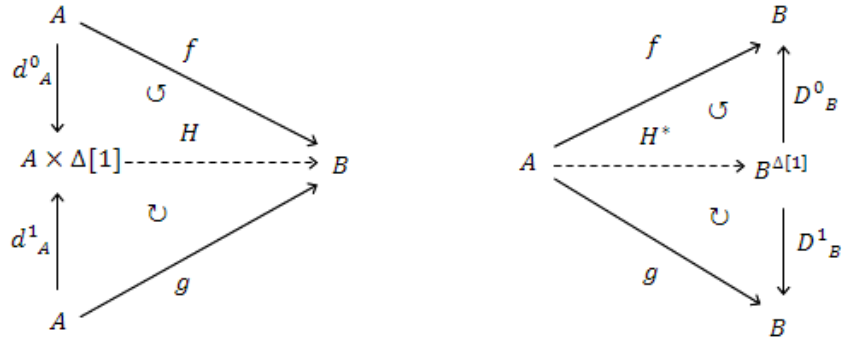
Retomando los funtores F y G dados en la definición 2.2.8 y en la proposición 2.3.1, tomando a $A = \Delta[1]$ se concluye que $S_{\tilde{\Delta} \times \Delta[1]} = G$ y $R_{\tilde{\Delta} \times \Delta[1]} = F$, esto quiere decir que (F, G) es un par adjunto. Con esto podemos dar una relación de Homotopía en $\Delta^\circ \text{Set}$ que sea equivalente a la mostrada en la definición 2.2.6. Lo anterior se presenta por medio del siguiente corolario realizado en este trabajo.

Corolario 2.3.1. *Si X y Y son conjuntos simpliciales y $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones simpliciales, entonces f y g son homótopas si existe una función $K : X \longrightarrow Y^{\Delta[1]}$ que cumple lo siguiente:*



donde $D^i = \overline{d^i}$ ⁴.

Demostración. Por la proposición 2.3.1 se tiene que (F, G) es un par adjunto entonces por el teorema 1.2.1 concluimos que los siguientes diagramas son equivalentes:



■

Teorema 2.3.1. Si A es un grupo abeliano simplicial, entonces A^X es un grupo abeliano simplicial para todo conjunto simplicial X .

Demostración. $(A^X)_n = \text{Hom}_{\Delta^\circ \text{Set}}(X \times \Delta[n], A)$, ahora si $f, g : T \longrightarrow A$ son funciones simpliciales (T conjunto simplicial), entonces se puede definir

$$f + g : T \longrightarrow A$$

⁴ d^i es la función dada en la definición 2.2.6.

por medio de $(f + g)_n : T_n \longrightarrow A_n$, con

$$(f + g)_n = f_n + g_n : T_n \longrightarrow A_n$$

De manera evidente esta suma es asociativa, conmutativa, modulativa e invertiva, así que $Hom_{\Delta^\circ Set}(T, A)$ es un grupo abeliano, en particular

$$Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[n], A)$$

es un grupo abeliano.

Sea $w : [n] \longrightarrow [m]$ un morfismo de la categoría Δ , entonces por observación 2.3.1

$$\tilde{\Delta}w : \Delta[n] \longrightarrow \Delta[m]$$

y $1_X \times \tilde{\Delta}(w) : X \times \Delta[n] \longrightarrow X \times \Delta[m]$, luego $w^* : (A^X)_m \longrightarrow (A^X)_n$ definido como sigue

$$\begin{aligned} w^* : Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[m], A) &\longrightarrow Hom_{\Delta^\circ Set}(X \times \Delta[n], A) \\ (X \times \Delta[m] \xrightarrow{\alpha} A) &\longmapsto \left(X \times \Delta[n] \xrightarrow{1_X \times \tilde{\Delta}(w)} X \times \Delta[m] \xrightarrow{\alpha} A \right) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos abelianos porque la composición distribuye sobre la suma. Así que w^* es un homomorfismo de grupos abelianos, por lo tanto A^X es un grupo abeliano simplicial. ■

Observación 2.3.2. Con la homotopía a derecha en los grupos abelianos simpliciales (Homotopía equivalente mostrada en el corolario 2.3.1) damos salida al problema del cilindro definido en la homótopa a izquierda ($F(A) = A \times \Delta[1]$) por medio del funtor potencia ($G(A) = A^{[1]}$), puesto que tomando a $X = \Delta[1]$ en teorema 2.3.1, entonces $A^{\Delta[1]}$ es un grupo abeliano.

2.4. Relación de arco conexidad

En esta sección se definirá tomando como referencia la publicación del Profesor Carlos Ruiz [7] la relación de arco conexidad en los conjuntos simpliciales la cual es relación de equivalencia en los grupos abelianos simpliciales. Esta relación de arco conexidad es equivalente a la relación de homotopía con lo cual se demuestra que la homotopía es relación de equivalencia en los grupos abelianos simpliciales. Esta equivalencia fue demostrada por el profesor Roberto Ruiz.

Definición 2.4.1. (Arco conexidad en un conjunto simplicial A).

Sea A un conjunto simplicial, definimos lo siguiente:

1. A_0 es el conjunto de *puntos de A*.
2. A_1 es el conjunto de *arcos de A*. ($\partial_0(\alpha), \partial_1(\alpha)$ son los *extremos* de α).
3. Si x, y son puntos de A , entonces se dice que x esta arco conectado con y si y solo si existe $z \in A_1$ tal que $\partial_0(z) = x$ y $\partial_1(z) = y$ y se simboliza $x \stackrel{a}{\sim} y$.

Cuando A es un grupo abeliano simplicial, existe el conjunto de los arcos conexos con 0, digamos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in A_0 \mid \exists z \in A_1 \text{ tal que } \partial_0(z) = x \text{ y } z \in \text{Ker} \partial_1\} \\ &= \{x \in A_0 \mid \exists z \in \text{Ker} \partial_1 \text{ tal que } \partial_0(z) = x\} \end{aligned}$$

Teorema 2.4.1. B es un subgrupo de A_0 .

Demostración. Es evidente que $0 \in B$, además si $x, y \in B$ entonces existe $z_1, z_2 \in \text{Ker} \partial_1$ tal que $\partial_0(z_1) = x$ y $\partial_0(z_2) = y$. Por tanto $z_1 - z_2 \in \text{Ker} \partial_1$ y $\partial_0(z_1 - z_2) = \partial_0(z_1) - \partial_0(z_2) = x - y$. Por tanto B es cerrado para $-$ entonces B es un subgrupo de A_0 . ■

Observación 2.4.1. El subgrupo B de A_0 define una relación de equivalencia compatible con la operación de A_0 : $x \sim y$ si y solo si $x - y \in B$. Por tanto $x \sim y$ si y solo existe $z \in \text{Ker} \partial_1$ tal que $\partial_0(z) = x - y$.

Teorema 2.4.2. las relaciones $\stackrel{a}{\sim}$ y $\sim$ son iguales.

Demostración

1. $\stackrel{a}{\sim} \implies \sim$. Suponga que $x \stackrel{a}{\sim} y$. Entonces existe un arco z tal que $\partial_0(z) = x$ y $\partial_1(z) = y$. Tomemos $z - s_0(y)$, veamos que $z - s_0(y) \in \text{Ker} \partial_1$:

$$\partial_1(z - s_0(y)) = \partial_1(z) - \partial_1 s_0(y) = y - y = 0.$$

Ahora $\partial_0(z - s_0(y)) = \partial_0(z) - \partial_0 s_0(y) = x - y$. Por lo tanto $x \sim y$.

2. $\sim \implies \stackrel{a}{\sim}$. Suponga que $x \sim y$, es decir que existe $z \in \text{Ker} \partial_1$ tal que $\partial_0(z) = x - y$, así que $\partial_1(z) = 0$ y además

$$x = \partial_0(z) + y = \partial_0(z) + \partial_0 s_0(y) = \partial_0(z + s_0(y)),$$

claramente $z + s_0(y) \in A_1$ y tiene imagen por ∂_0 igual a x . Veamos la imagen por ∂_1 : $\partial_1(z + s_0(y)) = \partial_1(z) + \partial_1 s_0(y) = 0 + y = y$, por tanto $x \stackrel{a}{\sim} y$.

■

Así la relación de arco conexidad de un grupo abeliano simplicial es una relación de equivalencia compatible con la estructura de grupo:

$$x \stackrel{a}{\sim} y \text{ y } z \stackrel{a}{\sim} w \implies x + z \stackrel{a}{\sim} y + w$$

Corolario 2.4.1. *Las componentes arco conexas de A forman un grupo abeliano, $[x] = x + B = x + \partial_0(\text{Ker } \partial_1)$.*

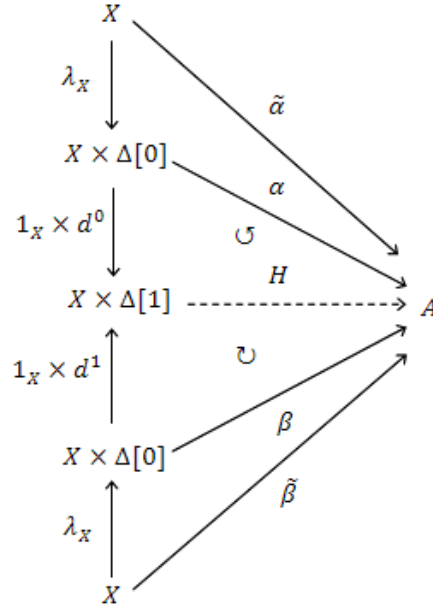
Observación 2.4.2. Note que

$$(A^X)_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ab}}(X \times \Delta[0], A) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ab}}(X, A).$$

Si $\alpha, \beta \in (A^X)_0$ entonces $\alpha, \beta : X \times \Delta[0] \longrightarrow A$ y se tiene que si $\alpha \stackrel{a}{\sim} \beta$ entonces existe $H \in (A^X)_1$ tal que $\partial_0(H) = \alpha$ y $\partial_1(H) = \beta$. Es decir, que

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \Delta[0] & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 1_X \times d^0 \downarrow & \curvearrowright & \\
 X \times \Delta[1] & \xrightarrow{H} & A \\
 1_X \times d^1 \uparrow & \curvearrowright & \\
 X \times \Delta[0] & \xrightarrow{\beta} & A
 \end{array}$$

Como $\Delta[0]$ es objeto final entonces $X \times \Delta[0] \stackrel{\lambda_X}{\cong} X$ es un isomorfismo natural y se identifica X con $X \times \Delta[0]$, es decir



Por lo tanto $\tilde{\alpha} \stackrel{h}{\sim} \tilde{\beta}$.

Teorema 2.4.3. $\tilde{\alpha} \stackrel{h}{\sim} \tilde{\beta}$ si y solo si $\alpha \stackrel{a}{\sim} \beta$ en A^X .

La homotopía que se trabajó en esta sección es la homotopía a izquierda y esta resulta ser relación de equivalencia en los grupos abelianos, pero recordemos que en la homotopía a izquierda en $\Delta^\circ Ab$ resulta el problema de que el cilindro $A \times \Delta[1]$ no es un grupo abeliano y que se dio salida a este problema con la homotopía a derecha, pues estas son equivalentes. Por lo tanto con la homotopía a derecha bien definida en los grupos abelianos simpliciales y siendo esta equivalente a la homotopía a izquierda la cual es relación de equivalencia en $\Delta^\circ Ab$ se concluye el siguiente teorema.

Teorema 2.4.4. La homotopía en $\Delta^\circ Ab$ es una relación de equivalencia.

Capítulo 3

Teorema de Moore para Homotopía

Moore en su seminario en Princeton [4], trabajó los conjuntos simpliciales, mostrando sus propiedades. También definió cuando dos funciones simpliciales son homótopas y con esto demostró que para que dos funciones simpliciales fueran homótopas, es suficiente y necesario que exista una familia de funciones k_i que cumplen ciertas condiciones, las cuales presentó en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.(Teorema de Moore para Homotopía) *Si X y Y son conjuntos simpliciales y $f, g : X \longrightarrow Y$ son funciones simpliciales, entonces f y g son homótopas si y solo si existen funciones $k_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$, definidas para $i = 0, 1, \dots, q$ y todo $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que:*

1. $\partial_0 k_0 = g$,
2. $\partial_{q+1} k_q = f$,
3. $\partial_i k_j = k_{j-1} \partial_i \quad i < j$,
4. $\partial_{j+1} k_{j+1} = \partial_{j+1} k_j$,
5. $\partial_j k_j = k_j \partial_{i-1} \quad \text{para } i > j + 1$,
6. $s_i k_i = k_{j+1} s_i \quad \text{para } i \leq j$,
7. $s_i k_j = k_j s_{i-1} \quad \text{para } i > j$.

Para dar explicación de donde surgía esta familia $k_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$, se propuso que surgía de la función de homotopía $K : X \longrightarrow Y^{\Delta[1]}$, pues que se pensaba que $(Y^{\Delta[1]})_q$ era igual a Y_{q+1} , para todo $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y con esto

$$K_q : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$$

como el caso de Moore.

Aunque para el nivel cero es claro este desfase, pues $(Y^{\Delta[1]})_0$ por definición es $Hom_{\Delta \circ Set}(\Delta[1] \times \Delta[0], Y)$ que es igual a $(Y^{\Delta[0]})_1$ el cual es igual a Y_1 (Observación 2.2.2 ítem 1). No es claro que suceda en general, es decir, para $q > 0$. Por esta razón se descarto esta opción y en cambio se estudió el conjunto simplicial $X \times \Delta[1]$ y se encontró una explicación de donde surge esta familia de funciones k_i , lo cual ocurre por medio de la descomposición de cada nivel q de $X \times \Delta[1]$ en una reunión disjunta finita ($q + 2$ -veces) de copias de X_q . Esta descomposición la mostramos en la siguiente observación.

Observación 3.1. Por definición $(\Delta[1])_q = Hom_{\Delta}([q], [1])$ y los morfismos en la categoría Δ son crecientes, entonces para $\alpha \in (\Delta[1])_q$, tal que $\alpha \neq \bar{1}_q$ y $\alpha \neq \bar{0}_q^{-1}$, existe $0 \leq i \leq q - 1$, tal que para $x \in [q]$, se cumple que

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq i \\ 1 & \text{si } x > i \end{cases}$$

Estas últimas funciones las denotaremos como $(\alpha_i)_q$. Por ejemplo, veamos para $q = 3$. El conjunto $(\Delta[1])_3 = Hom_{\Delta}([3], [1])$, es el que contiene las funciones crecientes del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ al conjunto $\{0, 1\}$, las cuales listamos a continuación:

1. $\bar{1}_3 = (1, 1, 1, 1)$
2. $(\alpha_0)_3 = (0, 1, 1, 1)$
3. $(\alpha_1)_3 = (0, 0, 1, 1)$
4. $(\alpha_2)_3 = (0, 0, 0, 1)$
5. $\bar{0}_3 = (0, 0, 0, 0)$

¹ $\bar{0}_q$ es la función de valor constante 0 y $\bar{1}_q$ es la función de valor constante 1

es decir que $(\Delta[1])_3 = \{\bar{1}_3, (\alpha_0)_3, (\alpha_1)_3, (\alpha_2)_3, \bar{0}_3\}$. Así sucede en general. Para $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que

$$(\Delta[1])_q = \{\bar{1}_q, (\alpha_0)_q, \dots, (\alpha_{q-1})_q, \bar{0}_q\}$$

así, para un conjunto simplicial X , se cumple la siguiente igualdad

$$X_q \times \Delta[1]_q = X_q \times \{\bar{1}_q\} \bigcup X_q \times \{(\alpha_0)_q\} \bigcup \dots \bigcup X_q \times \{(\alpha_{q-1})_q\} \bigcup X_q \times \{\bar{1}_q\}$$

Por otro lado, para un conjunto unitario $*$, el producto $X_q \times *$ es isomorfo a X_q , por lo tanto

$$X_q \times \Delta[1]_q \cong \bigcup_{i=0}^{q+1} X_q$$

es decir que el q -ésimo nivel del conjunto simplicial $X \times \Delta[1]$, es $q+2$ -copias disjuntas del nivel q del conjunto simplicial X . Veamos ahora que pasa con las caras y degeneraciones del conjunto simplicial $X \times \Delta[1]$.

Definimos la función

$$\hat{I}_q : X_q \longrightarrow \underbrace{X_q \overset{\circ}{\bigcup} X_q \overset{\circ}{\bigcup} \dots \overset{\circ}{\bigcup} X_q}_{q+2-\text{veces}}$$

para $x \in X_q$, como $\hat{I}_q(x) = (0, 0, \dots, 0, \overset{I}{\hat{x}}, 0, \dots, 0)$, donde 0 es el elemento neutro en el grupo abeliano X_q , es decir, $\hat{I}_q$ es la inclusión de X_q en la I -ésima posición, para $I = 0, \dots, q+2$,

1. Sean $\partial_i : X_{q+1} \longrightarrow X_q$ con $i = 0, \dots, q+1$, las caras correspondientes al conjunto simplicial X , entonces las caras

$$\tilde{\partial}_i : \bigcup_{i=0}^{q+2} X_{q+1} \longrightarrow \bigcup_{i=0}^{q+1} X_q$$

en cada copia de X_{q+1} , es decir $\tilde{\partial}_i(\hat{I}_{q+1}(x))$ para $x \in X_{q+1}$, quedan definidas como sigue

$$\tilde{\partial}_i(\hat{I}_{q+1}(x)) = \begin{cases} (0, \dots, 0, \overset{I}{\hat{\partial}_i(x)}, 0, \dots, 0) & \text{si } I < i+1 \vee I = q+2 \\ (0, \dots, 0, \overset{I-1}{\hat{\partial}_i(x)}, 0, \dots, 0) & \text{si } i+1 \leq I < q+2 \end{cases}$$

2. Sean $s_i : X_q \longrightarrow X_{q+1}$ con $i = 0, \dots, q$, las degeneraciones correspondientes al conjunto simplicial X , entonces las degeneraciones

$$\tilde{s}_i : \bigcup_{i=0}^{q+1} X_q \longrightarrow \bigcup_{i=0}^{q+2} X_{q+1}$$

en cada copia de X_q , es decir $\tilde{s}_i(\hat{I}_q(x))$ para $x \in X_q$, quedan definidas como sigue

$$\tilde{s}_i(\hat{I}_q(x)) = \begin{cases} (0, \dots, 0, \hat{s}_i^I(x), 0, \dots, 0) & \text{si } I \leq i \\ (0, \dots, 0, \hat{s}_i^{I+1}(x), 0, \dots, 0) & \text{si } I > i \end{cases}$$

Con esto tenemos una representación equivalente del conjunto simplicial $(X \times \Delta[1])_q$.

Ahora mostremos como surgen las funciones k_i mencionadas en el teorema de Moore (Teorema 3.1) a partir de una homotopía (H) de f a g .

Con la observación 3.1 tenemos que H_q es una función de $\underbrace{X_q \overset{\circ}{\bigcup} \dots \overset{\circ}{\bigcup} X_q}_{q+2-\text{veces}}$ a

Y_q entonces las funciones k_i para $i = 0, \dots, q$, se definen como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{X_{q+1} \overset{\circ}{\bigcup} X_{q+1} \overset{\circ}{\bigcup} \dots \overset{\circ}{\bigcup} X_{q+1}}_{q+3-\text{veces}} & \xrightarrow{H_{q+1}} & Y_{q+1} \\ \uparrow \widehat{i+1}_q & & \nearrow k_i \\ X_{q+1} & & \\ \uparrow s_i & & \\ X_q & & \end{array}$$

Por otro lado, la condición necesaria del teorema de Moore, se demuestra de la siguiente forma.

Dado $k_i : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$ que satisface las propiedades presentadas en el teorema 3.1 (1 - 7), se define

$$H_q : X_q \times (\Delta[1])_q \longrightarrow Y_q$$

de la siguiente forma:

$$H_q(x, \beta) = \begin{cases} \partial_0 k_0(x) & si \ \beta = \bar{1}_q \\ \partial_{i+1} k_i(x) & si \ \beta = (\alpha_i)_q \\ \partial_q k_q & si \ \beta = \bar{0}_q \end{cases}$$

es decir

$$H_q(x, \beta) = \begin{cases} g_q(x) & si \ \beta = \bar{1}_q \\ \partial_{i+1} k_i(x) & si \ \beta = (\alpha_i)_q \\ f_q & si \ \beta = \bar{0}_q \end{cases}$$

Conclusiones

Se realizó una demostración de la equivalencia de las homotopías adjuntas y se mostró que esta equivalencia se cumple en los conjuntos simpliciales, donde en los grupos abelianos simpliciales la relación de homotopía es de equivalencia. También se mostró que la equivalencia de las homotopías adjuntas se puede presentar como una biyección entre dos funtores $\mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_\lambda$ definidos por una transformación natural λ .

En la homotopía a derecha no se obtuvo el desfase en el co-cilindro, es decir, $(Y^{\Delta[1]})_q = Y_{q+1}$, donde con este desfase y con la equivalencia de las homotopías adjuntas se proponía dar una explicación de donde surgía la familia de funciones k_i presentadas en el teorema de Moore. Sin embargo se demostró que esta familia de funciones se obtienen al representar el nivel q del conjunto simplicial $X \times \Delta[1]$ como una unión disjunta finita ($q + 2 - veces$) del nivel q del conjunto simplicial X .

Bibliografía

- [1] Bucur, Ion., and Deleanu, Aristide with the collaboration of Hilton, Peter J. *Introduction to the theory of categories and functors*, Jhon Wiley and sons Ltda, 1968.
- [2] Gabriel, P., and Zisman, M. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Springer-Verlag New York Inc. 1967.
- [3] May, J. Peter. *Simplicial Objects in Algebraic Topologic*. D. Van Nostrand Company. Canada, 1967.
- [4] Moore, J. C. *Seminar on algebraic homotopy theory*. Notas de lectura. Princeton University, 1956.
- [5] Ruiz, Roberto. *Homotopical Algebra*. Universidad del Valle, 2003.
- [6] Ruiz, Roberto. *Overview on models in homotopical algebra*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Volumen XXVIII, Bogota D.C, Colombia, Marzo del 2004.
- [7] Ruiz, Carlos. *Any equivalence relation is a simplicial homotopy*. Rev. Col. Mat. Volumen 1976, Página, 151-160.