

Estimativo al primer valor propio para superficies mínimas compactas inmersas en $\mathbb{S}^{n+1}(n \geq 2)$

ANDRÉS JULIÁN CASTRILLÓN VÁSQUEZ

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magister en Matemáticas

Dirigido por:

PhD. GONZALO GARCIA CAMACHO.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2014

26 de septiembre de 2014

Dedicatoria

...A mis padres y a Ale.

Agradecimientos

Principalmente agradezco al profesor Gonzalo Garcia Camacho por su paciencia, tolerancia y sabiduría; a mis padres por su apoyo, a Alejandra Ortiz por su amor brindado, A mis compañeros por sus amenos y únicos momentos.

Índice general	II
Lista de figuras	IV
Introducción	VI
1. Preliminares	1
1.1. Variedades	1
1.1.1. Variaciones de área	6
1.1.2. Laplaciano	8
2. Estimación del primer valor propio	11
2.1. Formula de Reilly	11
2.2. El estimativo de Choi-Wang del primer valor propio	15
2.3. Estimación del primer valor propio de hipersuperficies mínimas en $\mathbb{S}^{n+1}$. .	18
3. Superficies mínimas simétricas	26
3.1. Cono asociado	26
3.2. Propiedad de las dos piezas	29
3.3. Superficies de Lawson	33
3.3.1. Principio de reflexión	33
3.3.2. Construcción de $\xi_{m,k}$	33
3.3.3. Grupo G	35

Índice de figuras

1.1.	superficies M_s	6
3.1.	Cono asociado a M	27
3.2.	esfera máxima	31
3.3.	Superficie fundamental	33
3.4.	Generación de todos los puntos por medio de reflexiones	37
3.5.	Cuadrantes en el plano	42
3.6.	$p \in \text{int}P$	43
3.7.	F disjunto de ∂D	44
3.8.	$P \setminus N$	44

Resumen

En 1982 el profesor Shing Tung Yau conjetura que el primer valor propio $\lambda_1(M)$ del laplaciano de una hipersuperficie sin borde, orientable, mínima y conexa inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}$ es igual a n . En 1983 Hyeong In Choi y Ai-nuig Wang prueban que $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$; en el año 2004 Huang Xuango demuestra que la conjetura de Yau se cumple para $n \geq 3$, y en el año 2007 Jaig Young Choe junto con Mart Soret demuestran que si $M \subset \mathbb{S}^3$ es una superficie simétrica, entonces $\lambda_1 = 2$.

En este trabajo presentamos los conceptos básicos de geometría diferencial necesarios para demostrar con detalle los resultados de Choi y Wang, junto con los de Barros y Bessa; al igual que el teorema 3.3.2 del artículo de Choe and Soret el cual menciona que el primer valor propio $\lambda_1(M) = 2$ donde M es la superficie de Lawson $\xi_{m,k}$.

Introducción

Dada la importancia de los valores propios del Laplaciano de una variedad mínima para conocer ciertas características de la curvatura de la misma, estimar estos valores propios se convierte en un problema típico de la geometría Riemanniana. Al considerar M como una hipersuperficie mínima, compacta y encajada en $\mathbb{S}^{n+1}$ Sing- Tung Yau en el año 1982 conjeturó que el primer valor propio distinto de cero del problema

$$\Delta_M \varphi + \lambda \varphi = 0. \tag{1}$$

es $\lambda_1(M) = n$. En 1982 Choi y Wang demuestran que $n/2$ es una cota inferior para el primer valor propio no nulo; este fue mejorado por Barros y Bessa demostrando que $\lambda_1(M) > n/2$. En el año 2004 Huang Xuango demuestra que el primer valor propio del laplaciano sobre una hipersuperficie mínima, compacta y encajada M es $\lambda_1(M) = n$ para n para $n \geq 3$.

La conjetura de Yau sigue abierta; sin embargo se han realizado estudios sobre ella y obtenido algunos resultados importantes. Dentro de estos resultados se encuentra el publicado en el artículo "*First Eigenvalue of simetric minimal surfaces*" realizado por Jaigyoung Choe y Marc Soret en el año 2007, donde demuestran que la conjetura tiene validez para $n = 2$ si la variedad M es simétrica. Para lograr este resultado Choe y Soret hacen uso de la propiedad de las dos piezas mencionada por Ros en [14] donde se dice que cualquier 2-ecuador en una 3- esfera divide cualquier superficie mínima en dos piezas conexas. Un claro ejemplo de estas superficies son la familia de superficies mínimas creadas por Lawson en 1970, las cuales son esencialmente el continuo reflejo de una superficie fundamental

a través de segmentos de geodésica en la esfera tres dimensional $\mathbb{S}^3$, estas superficies se denominan $\xi_{m,k}$.

Este trabajo se encuentra dividido en tres partes. En la primera encontrará los elementos básicos para abordar la lectura de los otros dos capítulos; en la segunda parte se reúnen los estudios realizados sobre los artículos de Hyeong In Choy - Ai-Nung Wang y Barros- Bessa en los cuales se aborda la estimación de una cota inferior para el primer valor propio no nulo del laplaciano para hipersuperficies compactas, mínimas encajas en $\mathbb{S}^n$. En la ultima parte se aborda con detalle el articulo de Choe Jaigyoung y Soret Marc, donde se estudia el comportamiento de la conjetura de Yau en superficies simétricas; hacemos un particular énfasis en las superficies de Lawson $\xi_{m,k}$

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo, introducimos los conceptos básicos de geometría, necesarios para abordar la lectura de este trabajo.

1.1. Variedades

Una variedad M de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff en el que cada punto de M , tiene un entorno homeomórfico a $\mathbb{R}^n$, además es localmente compacto y localmente conexo.

En este trabajo consideraremos como variedades aquellos subconjuntos de un espacio euclídeo ($\mathbb{R}^n$) que localmente son la imagen inversa de una función diferenciable que no tiene singularidades, específicamente utilizaremos la siguiente definición:

Definición 1.1.1. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, diremos que M es una variedad m -dimensional en $\mathbb{R}^n$ si para todo $p \in M$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a p y $n - m$ funciones diferenciables $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) $M \cap U = \{x \in U : f_i(x) = f_i(p) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - m\}$.

(b) Los vectores $\nabla f_1(x), \nabla f_2(x), \dots, \nabla f_{n-m}(x)$ son linealmente independientes para todo $x \in M \cap U$.

Definición 1.1.2. Diremos que η es una aplicación de Gauss sobre M si $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una función tal que

$$(i) \quad \langle \eta(p), \eta(p) \rangle = 1$$

$$(ii) \quad \langle v, \eta(p) \rangle = 0 \text{ para todo } v \in T_p M.$$

Como vimos anteriormente, la aplicación η siempre existe puntualmente; pero en el caso en que exista una aplicación de Gauss diferenciable la variedad M se denomina *orientable*, en caso contrario se denomina *no orientable*. Aunque localmente siempre se puede definir η de manera diferenciable y extender a un campo vectorial normal N en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 1.1.3. Una **Conexión afín** D sobre una variedad diferencial M es una aplicación

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M) &\longrightarrow \mathfrak{N}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow D_X Y \end{aligned}$$

considerando $f, g \in \mathcal{D}(M)$, D satisface las siguientes propiedades:

1. $D_{fX+gY} Z = fD_X Z + gD_Y Z.$
2. $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z.$
3. $D_X(fY) = fD_X Y + X(f)Y.$

Sea $f : M^n \longrightarrow M^{n+m=k}$ una inmersión. Entonces, para cada $p \in M$, existe un abierto $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ es una subvariedad de $\overline{M}$.

Consideremos $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ extensiones locales a $\overline{M}$ de X, Y respectivamente, definimos el campo vectorial sobre $\overline{M}$ normal a M

$$B(X, Y) = \overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y \tag{1.1}$$

Afirmación 1. $B(X, Y)$ no depende de la extensión $\overline{X}$ y $\overline{Y}$.

Demostración. Supongamos que $\overline{X}_1$ y $\overline{Y}_1$ son otras dos extensiones de X y Y respectivamente, observe que

$$\left(\overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y \right) - \left(\overline{D}_{\overline{X}_1} \overline{Y}_1 - D_X Y \right) = \overline{D}_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y} - \overline{Y}_1$$

sabemos que sobre M $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ y $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$, de esta forma $B(X, Y)$ esta bien definida. ■

Denotaremos por $\chi(U)^\perp$ los campos vectoriales diferenciales sobre U que son normales a $f(U)$.

Proposición 1.1.1. Si $X, Y \in \chi(U)$, la aplicación $B : \chi(U) \times \chi(U) \longrightarrow \chi(U)^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = \overline{D_X} \overline{Y} - D_X Y$$

es bilineal y simétrica.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}(U)$ ($\mathcal{D}(U)$ denota en anillo de funciones reales de clase c^∞) sabemos que

$$B(fX, Y) = \overline{D_{fX}} \overline{Y} - D_{fX} Y$$

por ser D una conexión afín, tenemos que

$$\begin{aligned} B(fX, Y) &= f \overline{D_X} \overline{Y} - f D_X Y \\ &= f \left(\overline{D_X} \overline{Y} - D_X Y \right) \\ &= f B(X, Y). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \overline{D_X} \overline{fY} - D_X fY \\ &= \overline{fD_X} \overline{Y} + \overline{X(f)} \overline{Y} - f D_X Y - X(f)Y, \end{aligned}$$

se sabe que sobre M se tiene que $f = \overline{f}$ y $X(f) = \overline{X}(\overline{f})$, entonces

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= f \overline{D_X} \overline{Y} - f D_X Y \\ &= f B(X, Y); \end{aligned}$$

luego $B(X; Y)$ es bilineal.

Ahora, para mostrar que $B(X, Y)$ es simétrica hacemos

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{D_X} \overline{Y} - \overline{D_Y} \overline{X},$$

y

$$[\overline{Y}, \overline{X}] = \overline{D_Y} \overline{X} - \overline{D_X} \overline{Y},$$

de igual forma

$$[X, Y] = D_Y X - D_X Y.$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \overline{D_Y} \overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - (D_Y X + [X, Y]) \\ &= \overline{D_Y} \overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - D_Y X - [X, Y]; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B(Y, X) &= \overline{D_X} \overline{Y} + [\overline{Y}, \overline{X}] - (D_X Y + [Y, X]) \\ &= \overline{D_X} \overline{Y} + [\overline{Y}, \overline{X}] - D_X Y - [Y, X]; \end{aligned}$$

pero sobre M sabemos que

$$[X, Y] = [\overline{X}, \overline{Y}],$$

luego,

$$B(X, Y) = \overline{D_Y} \overline{X} - D_Y X = B(Y, X)$$

demostrando así la simetría de B . ■

Definición 1.1.4. *La forma cuadrática definida sobre $T_p M$ donde M es una variedad diferencial, esta dada por*

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(X, Y) = \langle S_\eta(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), \eta \rangle \quad (1.2)$$

es llamada la segunda forma fundamental.

Dado que $B(X, Y)$ es simétrica, se tiene que $\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(X, Y)$ también lo es.

Proposición 1.1.2. *Si $p \in M$, $x \in T_p M$ y $\xi \in (T_p M)^\perp$. Consideramos N una extensión local de ξ normal a M , entonces*

$$S_\xi(x) = -\overline{D_x} N. \quad (1.3)$$

Demostración. Sea $y \in T_p M$, si X, Y son extensiones locales de x y y respectivamente, los cuales son tangentes a M . Sabemos que $\langle N, Y \rangle = 0$, por tanto

$$\langle \overline{D_X} N, Y \rangle + \langle N, \overline{D_X} Y \rangle = 0 \quad (1.4)$$

luego,

$$\langle \overline{D_X} N, Y \rangle = -\langle N, \overline{D_X} Y \rangle \quad (1.5)$$

así,

$$\langle Y, \overline{D}_X N \rangle = -\langle \overline{D}_X Y, N \rangle \quad (1.6)$$

como $\langle S_\xi(x), Y \rangle = \langle B(X, Y)(p), N \rangle$, entonces tenemos

$$\langle S_\xi(x), Y \rangle = \langle \overline{D}_X Y - D_X Y, N \rangle_{(p)} \quad (1.7)$$

$$= \langle \overline{D}_X Y, N \rangle_{(p)} - \langle D_X Y, N \rangle_{(p)} \quad (1.8)$$

dado que $D_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\langle D_X Y, N \rangle = 0$. De aquí,

$$\langle S_\xi(x), Y \rangle = \langle \overline{D}_X Y, N \rangle_{(p)} \quad (1.9)$$

$$= -\langle Y, \overline{D}_X N \rangle_{(p)} \quad (1.10)$$

$$= -\langle \overline{D}_X N, Y \rangle_{(p)} \quad (1.11)$$

de aquí se concluye que

$$S_\xi(x) = -\overline{D}_x N. \quad (1.12)$$

■

Observación 1. $S_\xi(x) = -\overline{D}_x N$ también es conocido como el operador de forma de una variedad M en el punto p .

Definición 1.1.5. Sea $M^n \subset N^{n+1}$ una hipersuperficie de una variedad Riemanniana N , entonces la curvatura media de M esta dada por

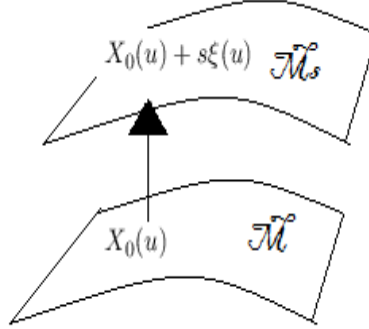
$$H = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_j, e_j) \quad (1.13)$$

donde $\{e_i\}$ con $i = 1, \dots, n+1$ es un marco ortonormal en una vecindad de $p \in M$, donde $e_{n+1} = \eta$.

Observación 2. Se dice que M es una mínima si la curvatura media H es igual a cero.

Definición 1.1.6. Sea (M, g) una variedad riemanniana, ∇ la conexión Riemanniana de M y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, el tensor de curvatura se define como:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Figura 1.1: superficies M_s

Definición 1.1.7 (Tensor de Ricci). *La primera contracción del tensor de curvatura con respecto a la métrica g es llamado el tensor de Ricci y se denota $Ric(X, Y)$.*

Así: $Ric(X, Y) = \sum_i g(R(X, Y_i)X, Y_i)$ donde $\{Y_i\}$ es un conjunto de campos ortonormales.

En este trabajo, el siguiente teorema, nos ayuda a determinar una primera cota para λ_1 .

Teorema 1.1.1 (Teorema de Reilly). *Si M es una variedad compacta con borde no vacío N . Asuma que existe una constante $C^2 > 0$ tal que $Ric \geq (n-1)c^2g$ (donde g es la métrica sobre M) y la primera curvatura media de N en M es no positiva. Entonces el primer valor propio λ_1 de Δ satisface la desigualdad $\lambda_1 \geq nc^2$. Sin embargo $\lambda_1 = nc^2$ si y solo si M es isométrico a un hemisferio de la esfera euclidiana $S^n(c^2)$ de radio $1/c$.*

1.1.1. Variaciones de área

Para trabajar con superficies estables, es necesario abordar el concepto de variación de área; para esto escribimos los siguientes resultados.

Consideremos una variedad M en $\mathbb{R}^n$. Si ξ es un campo normal a M y M_s es la imagen de M bajo la siguiente función uniparamétrica $\varphi_s(X) = X + s\xi(x)$,

para $x \in M$; parametrizamos M_s así:

$$X(s, u) = X_0(u) + s\xi(u) \quad (1.14)$$

el funcional de área esta dado como

$$A(s) = \int_{\Omega} \|\partial_1 X \wedge \partial_2 X \wedge \cdots \wedge \partial_k X\| du_1 du_2 \cdots du_k. \quad (1.15)$$

Observemos el funcional de área para $k = 2$.

$$A(s) = \int_{\Omega} \|\partial_1 X \wedge \partial_2 X\| du_1 du_2 \quad (1.16)$$

$$= \int_{\Omega} \langle \partial_1 X \wedge \partial_2 X, \partial_1 X \wedge \partial_2 X \rangle^{1/2} du_1 du_2. \quad (1.17)$$

Sin pérdida de generalidad, consideremos $\|\partial_1 X_0 \wedge \partial_2 X_0\| = 1$ y observe que

$$\frac{d}{ds}[\partial_i X] = \frac{d}{ds}[\partial_i(X_0(u) + s\xi(u))] \quad (1.18)$$

$$= \partial_i \xi(u). \quad (1.19)$$

Por tanto, al calcular la primera variación tenemos

$$A'(0) = \int_{\Omega} 2 \left[\frac{1}{2} \frac{\langle \partial_1 \xi(u) \wedge \partial_2 X_0, \partial_1 X_0 \wedge \partial_2 X_0 \rangle}{\|\partial_1 X_0 \wedge \partial_2 X_0\|} \right] du_1 du_2 \quad (1.20)$$

$$+ \int_{\Omega} 2 \left[\frac{1}{2} \frac{\langle \partial_1 X_0 \wedge \partial_2 \xi(u), \partial_1 X_0 \wedge \partial_2 X_0 \rangle}{\|\partial_1 X_0 \wedge \partial_2 X_0\|} \right] du_1 du_2. \quad (1.21)$$

así, en general

$$A'(0) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \langle \partial_1 X_0 \wedge \partial_2 X_0 \wedge \cdots \wedge \partial_j \xi \wedge \partial_k X_0, \partial_1 X_0 \wedge \cdots \wedge \partial_k X_0 \rangle du_1 du_2 \cdots du_k \quad (1.22)$$

al denotar $E_j = \partial_j X_0$, se llega a que $\partial \xi = -S_{\xi} E_j$, y de esta forma logramos escribir la primera variación de área como

$$A'(0) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \langle E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge -S_{\xi} E_j \wedge \cdots \wedge E_k, E_1 \wedge \cdots \wedge E_k \rangle du_1 du_2 \cdots du_k. \quad (1.23)$$

De aquí se observa que

$$\langle E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge -S_{\xi} E_j \wedge \cdots \wedge E_k, E_1 \wedge \cdots \wedge E_k \rangle = \langle -S_{\xi} E_j, E_j \rangle \quad (1.24)$$

de esta forma, se puede escribir la primera variación de área así:

$$A'(0) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \langle -S_{\xi} E_j, E_j \rangle du_1 du_2 \cdots du_k. \quad (1.25)$$

Es decir,

$$A'(0) = - \int_{\omega} \text{Tr}(S_{\xi}(x)) dA. \quad (1.26)$$

Proposición 1.1.3. [12] Sea M una variedad en $\mathbb{R}^n$, y ξ un campo ortonormal a M ; La segunda variación de área de M esta dada como:

$$A''(0) = \int_{\Omega} \left[\|\nabla f\|^2 - \left(\|\mathbb{I}\mathbb{I}_v\|^2 + \langle Ric v, v \rangle |f|^2 \right) \right] dA \quad (1.27)$$

donde $\mathbb{I}\mathbb{I}_v$ es la segunda forma fundamental.

Definición 1.1.8. Una variedad M es estable si su segunda variación de área es no negativa.

1.1.2. Laplaciano

El primer valor propio λ_1 de Δ sobre una variedad M sin borde, esta definido como

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in C^1(M), \int_M \phi = 0} \frac{\int_M |\nabla \phi|^2}{\int_M \phi^2}$$

Sabemos que si ϕ es una función propia con valor propio λ , entonces

$$\Delta \phi + \lambda \phi = 0. \quad (1.28)$$

Definición 1.1.9. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces el conjunto nodal de f es el conjunto $f^{-1}[0]$, y el dominio nodal de f son las componentes de $\overline{M} \setminus f^{-1}[0]$.

Teorema 1.1.2 (Courant). [3] Sea $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ una lista de valores propios de 1.28 y $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ una base ortonormal completa de $L^2(M)$ donde ϕ_j es una función propia con valor propio λ_j , $j = 1, 2, \dots$. Entonces el número de dominios nodales de ϕ_k es menor o igual a k .

Corolario 1. Si un dominio Ω in M es un dominio nodal de una función propia de algún valor propio λ , entonces λ es el menor valor propio para el problema de valores propios de Ω cuyo borde original es $\partial\Omega \cap \partial M$, y se anula en $\partial\Omega \cap M$.

Corolario 2. ϕ_1 tiene signo constante; λ_1 tiene multiplicidad 1, ϕ_2 tiene precisamente 2 dominios nodales. λ_1 es caracterizado como el único valor propio con función propia de signo constante.

Es claro ver esto; pues ϕ_2 tiene a los mas dos dominios nodales, dado que ϕ_1 y ϕ_2 son ortogonales y ϕ_1 es de signo constante sobre todo M , se tiene que

$$\int_M \phi_1 \phi_2 = 0.$$

Teorema 1.1.3 (Identidad de Green). Sean $w, l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, si $M \subset \mathbb{R}^3$, es una variedad diferenciable compacta con borde ∂M , entonces:

$$\int_M \langle \nabla w, \nabla l \rangle + \int_M w \Delta l = \int_{\partial M} w \frac{\partial l}{\partial \eta} \quad (1.29)$$

Proposición 1.1.4. Sea M una hipersuperficie compacta, conexa y orientable inmersa en una variedad Riemanniana compacta, conexa y orientable N , entonces M divide a N en dos componentes conexas Ω_1 y Ω_2 tal que $M = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$.

Proposición 1.1.5. Sea M una variedad Riemanniana de dimensión n . Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$(\Delta f)^2 \leq n \|D^2 f\|^2.$$

Demostración. Sabemos que $f_{i,j} = D^2 f(v_i, v_i)$ y que $\|D^2 f\|^2 = \sum_{ij}^n f_{ij}^2$, procedamos por inducción para realizar la prueba. Si $n = 2$, tenemos:

$$\begin{aligned} (\Delta f)^2 &= (f_{11} + f_{22})^2 \\ &= f_{11}^2 + 2f_{11}f_{22} + f_{22}^2 \\ &\text{y} \\ \|D^2 f\|^2 &= f_{11}^2 + f_{12}^2 + f_{21}^2 + f_{22}^2 \\ 2\|D^2 f\|^2 &= 2f_{11}^2 + 2f_{12}^2 + 2f_{21}^2 + 2f_{22}^2 \\ 2\|D^2 f\|^2 - (\Delta f)^2 &= f_{11}^2 + 2f_{12}^2 + 2f_{21}^2 - 2f_{11}f_{22} + f_{22}^2 \\ &= (f_{11}^2 + 2f_{11}f_{22} + f_{22}^2) + 2f_{12}^2 + 2f_{21}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

así, $(\Delta f)^2 \leq 2\|D^2 f\|^2$.

si $n = k$ (para cualquier $k \in \mathbb{N}$), supongamos que:

$$(\Delta f)^2 \leq k \|D^2 f\|^2 \quad (1.30)$$

es decir,

$$\left(\sum_{i=1}^k f_{ii} \right)^2 \leq k \left(\sum_{i=1}^k f_{ii}^2 \right) \quad (1.31)$$

y hagamos $n = k + 1$, así se tiene que:

$$\begin{aligned} (\Delta f)^2 &= (f_{11} + f_{22} + \cdots + f_{k+1,k+1})^2 \\ &= (f_{11} + f_{22} + \cdots + f_{k,k})^2 + 2(f_{11} + f_{22} + \cdots + f_{k,k})f_{k+1,k+1} + f_{k+1,k+1}^2 \end{aligned}$$

de aquí, usando 1.31 se tiene que

$$(\Delta f)^2 \leq k \sum_{i=1}^k f_{ii}^2 + 2 \sum_{i=1}^k f_{ii} f_{k+1,k+1} + f_{k+1,k+1}^2$$

teniendo en cuenta que $(f_{ii} - f_{k+1,k+1})^2 \geq 0$ para todo $i := 1, \dots, k$, entonces $2f_{ii}f_{k+1,k+1} \leq f_{ii}^2 + f_{k+1,k+1}^2$; luego,

$$2 \sum_{i=1}^k f_{ii} f_{k+1,k+1} \leq \left(\sum_{i=1}^k f_{ii}^2 \right) + k f_{k+1,k+1}^2$$

así,

$$\begin{aligned} (\Delta f)^2 &\leq k \sum_{i=1}^k f_{ii}^2 + \sum_{i=1}^k f_{ii}^2 + k f_{k+1,k+1}^2 + f_{k+1,k+1}^2 \\ (\Delta f)^2 &\leq (k+1) \sum_{i=1}^k f_{ii}^2 + (k+1) f_{k+1,k+1}^2 \\ (\Delta f)^2 &\leq (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} f_{ii}^2 \\ (\Delta f)^2 &\leq (k+1) \|D^2 f\|^2 \end{aligned}$$

luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(\Delta f)^2 \leq n \|D^2 f\|^2$. ■

Teorema 1.1.4. *[Principio del máximo en $\mathbb{S}^3$]. Sea $M \subset \mathbb{S}^3$ una superficie mínima compacta. Es conocido que M debe ser orientable y que $\mathbb{S}^3 \setminus M$ es la unión de dos abiertos conexos W_1 y W_2 . Si $\Sigma \subset \overline{W_1}$ (o en $\overline{W_1}$) es una superficie mínima, entonces $\Sigma \subset M$ ó $\Sigma \cap M = \emptyset$.*

CAPÍTULO 2

Estimación del primer valor propio

En este capítulo, primero se deducirá un caso especial de la formula de Reilly; luego siguiendo a Choi-Wang [10] usaremos esta fórmula para encontrar una cota inferior del primer valor propio del Laplaciano para una hipersuperficie mínima inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}$. Finalmente, siguiendo a Barros-Bessa [15] se encontrará una desigualdad del tipo Poincare para una solución f de un problema de Dirichlet, en un dominio de $\mathbb{S}^{n+1}$ cuya frontera es una superficie mínima; como consecuencia se encontrará de nuevo el resultado de Choi-Wang, ligeramente mejorado.

2.1. Formula de Reilly

Sea Ω una variedad de dimensión n con borde suave $\partial\Omega$. Sea f una función suave definida sobre Ω y suave en el borde. Escribiremos $\varphi = f|_{\partial\Omega}$ y $u = (\partial f / \partial \eta)|_{\partial\Omega}$, donde η representa el vector normal exterior. También consideraremos $\overline{\Delta}f$ al Laplaciano de f con respecto a la métrica Riemanniana de Ω , y $\overline{\nabla}f$ al gradiente de f ; mientras que Δg y ∇g representarán el Laplaciano y gradiente de g con respecto a $\partial\Omega$ respectivamente.

Sean $X, Y \in T_p\Omega$ y definimos el tensor Hessiano como

$$(\overline{D}^2 f)(X, Y) = X(Yf) - (\overline{D}_X Y)f, \quad (2.1)$$

donde X, Y son extensiones arbitrarias a un campo vectorial cerca a p .

Denotaremos a $\overline{D}_x Y$ como la derivada covariante de la conexión sobre Ω y se considerará el

marco ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ con $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ tangente a $\partial\Omega$ con $p \in \partial\Omega$.

Teorema 2.1.1. (*Fórmula de Reilly*)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\overline{\Delta}f)^2 - |\overline{D}^2 f|^2 &= \int_{\Omega} Ric(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\Delta\varphi + nHu)u - \langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle + \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \end{aligned}$$

donde $Ric(\cdot)$ representa el tensor de Ricci y H la curvatura media de la variedad.

Demostración. Sea Ω una variedad Riemanniana n -dimensional; f una función es suave definida en Ω . La formula de Bochner esta dada por

$$\langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta}f), \overline{\nabla}f \rangle = \frac{1}{2} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla}f\|^2 - \|\overline{D}^2 f\|^2 - Ric(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f), \quad (2.2)$$

luego,

$$\frac{1}{2} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla}f\|^2 - \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta}f), \overline{\nabla}f \rangle = \|\overline{D}^2 f\|^2 + Ric(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f), \quad (2.3)$$

y

$$\frac{1}{2} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla}f\|^2 - \sum_{i=1}^n (\overline{\Delta}f)_i f_i = \|\overline{D}^2 f\|^2 + Ric(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f). \quad (2.4)$$

Integrando sobre Ω , tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla}f\|^2 - \sum_{i=1}^n (\overline{\Delta}f)_i f_i = \int_{\Omega} \|\overline{D}^2 f\|^2 + Ric(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f). \quad (2.5)$$

Como $\|\overline{D}^2 f\|^2 = \sum_{i,j}^n f_{i,j}^2$ y $\langle \nabla u, \eta \rangle = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, entonces

de la de Green 1.1.3 se tiene

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla}f\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \|\overline{\nabla}f\|^2}{\partial \eta},$$

y

$$\int_{\Omega} \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta}f), \overline{\nabla}f \rangle + \int_{\Omega} \overline{\Delta}f \cdot \overline{\Delta}f = \int_{\partial\Omega} \overline{\Delta}f \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

De aquí, se sigue que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla}f\|^2 - \int_{\Omega} \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta}f), \overline{\nabla}f \rangle - \int_{\Omega} (\overline{\Delta}f)^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \|\overline{\nabla}f\|^2}{\partial \eta} - \int_{\partial\Omega} \overline{\Delta}f \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad (2.6)$$

y por tanto

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla} f\|^2 - \int_{\Omega} \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f), \overline{\nabla} f \rangle = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \|\overline{\nabla} f\|^2}{\partial \eta} - \overline{\Delta} f \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] + \int_{\Omega} (\overline{\Delta} f)^2. \quad (2.7)$$

Haciendo $\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^n (f_i)^2$, $\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{ii}$ y $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f_n$, se tiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \|\nabla f\|^2}{\partial \eta} - \Delta f \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^n (f_i)^2 - f_n \sum_{i=1}^n f_{ii} \quad (2.8)$$

Ahora,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^n (f_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n f_i f_{in} \quad (2.9)$$

Reemplazando 2.9 en 2.8 tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \|\nabla f\|^2}{\partial \eta} - \Delta f \frac{\partial f}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n f_i f_{in} - f_n \sum_{i=1}^n f_{ii} \quad (2.10)$$

y por tanto de 2.7 se sigue

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla} f\|^2 - \int_{\Omega} \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f), \overline{\nabla} f \rangle = \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=1}^n f_i f_{in} - f_n \sum_{i=1}^n f_{ii} \right] + \int_{\Omega} (\overline{\Delta} f)^2. \quad (2.11)$$

Así,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\Delta} \|\overline{\nabla} f\|^2 - \int_{\Omega} \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f), \overline{\nabla} f \rangle = \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} - f_n \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} \right] + \int_{\Omega} (\overline{\Delta} f)^2. \quad (2.12)$$

Ahora, si $i \neq n$, como $f_{ij} = \overline{D}^2 f(v_i, v_j)$ y

$$\overline{D}^2 f(X, Y) = X(Yf) - (\overline{D}_X Y)f, \quad (2.13)$$

entonces

$$\begin{aligned} f_{in} &= \overline{D}^2 f(e_i, e_n) = e_i(e_n f) - (\overline{D}_{e_i} e_n) f \\ &= e_i f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \overline{D}_{e_i} e_n, e_j \rangle e_j f \\ &= u_i - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(e_i, e_j) [f|_{\partial\Omega}]_j \end{aligned}$$

de esta manera llegamos a que

$$f_{in} = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h(e_i, e_j) \varphi_j, \quad (2.14)$$

donde $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_i, e_j) = h_{ij}$.

Por otro lado; sabemos que $nH = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_i, e_i)$. y que $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(v, w) = \langle \bar{D}_v e_n, w \rangle$, de esta manera $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_i, e_i) = \langle \bar{D}_{e_i} e_n, e_i \rangle$ y $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_i, e_i) f = \langle \bar{D}_{e_i} e_n, e_i \rangle f$. Al considerar $(D_{e_i} e_i) = (\bar{D}_{e_i} e_i)^\top$ la proyección sobre $\partial\Omega$, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\bar{D}_{e_i} e_i - D_{e_i} e_i) f = \sum_{i=1}^{n-1} (\langle \bar{D}_{e_i} e_i, e_n \rangle e_n) f \quad (2.15)$$

$$= - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{D}_{e_i} e_n, e_i \rangle e_n f \quad (2.16)$$

$$= - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_i, e_i) u \quad (2.17)$$

$$= -nHu \quad (2.18)$$

de esta manera se observa que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} = \sum_{i=1}^{n-1} [e_i(e_i f) - (\bar{D}_{e_i} e_i) f] \quad (2.19)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} [e_i(e_i) f - (D_{e_i} e_i) f - [\bar{D}_{e_i} e_i f] + D_{e_i} e_i f] \quad (2.20)$$

$$= \Delta(f|_{\partial\Omega}) - \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{D}_{e_i} e_i f - D_{e_i} e_i f] \quad (2.21)$$

$$= \Delta(f|_{\partial\Omega}) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(e_i, e_i) e_n f \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} = \Delta\varphi + nHu. \quad (2.23)$$

Entonces; de la igualdad anterior, 2.12 y 2.14, se sigue

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \bar{\Delta} |\bar{\nabla} f|^2 - \sum_{i=1}^n f_i (\bar{\Delta} f)_i = \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=n}^{n-1} f_i f_{in} - f_n \sum_{i=n}^{n-1} f_{ii} \right] + \int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2 \quad (2.24)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=n}^{n-1} f_i \left(u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} \varphi_j \right) - f_n (\Delta \varphi + nHu) \right] + \int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2 \quad (2.25)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=n}^{n-1} f_i u_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i h_{ij} \varphi_j - u (\Delta \varphi + nHu) \right] + \int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2. \quad (2.26)$$

Como $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij} f_i f_j$, tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \bar{\Delta} |\bar{\nabla} f|^2 - \sum_{i=1}^n f_i (\bar{\Delta} f)_i = \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=n}^{n-1} f_i u_i - \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) - u (\Delta \varphi + nHu) \right] + \int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2 \quad (2.27)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle - \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) - u (\Delta \varphi + nHu) \right] + \int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2 \quad (2.28)$$

De la igualdad anterior y 2.4, se sigue

$$\int_{\Omega} \|D^2 f\|^2 + Ricc(\bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f) = \int_{\partial\Omega} \left[\langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle - \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) - u (\Delta \varphi + nHu) \right] + \int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2. \quad (2.29)$$

En consecuencia

$$\int_{\Omega} (\bar{\Delta} f)^2 - \|D^2 f\|^2 = \int_{\Omega} Ricc(\bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f) + \int_{\partial\Omega} \left[-\langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle + \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) + u (\Delta \varphi + nHu) \right]. \quad (2.30)$$

■

2.2. El estimativo de Choi-Wang del primer valor propio

En el teorema siguiente seguiremos a Choi-Wang [10] para encontrar una cota inferior para el primer valor propio del Laplaciano de una superficie mínima inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}$. Mas adelante, siguiendo a Barros-Bessa mostraremos que la desigualdad es estricta en el caso de la esfera.

Teorema 2.2.1. [10] Sea M una hipersuperficie compacta, mínima, orientable, inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ de dimensión n . Entonces $\lambda_1(M) \geq \frac{n}{2}$. Donde $\lambda_1(M)$ es el primer valor propio del Laplaciano de M .

Demostración. Sea φ la primera función propia de M es decir $\Delta\varphi + \lambda_1\varphi = 0$ donde $\lambda_1 = \lambda_1(M)$. La superficie M divide a $\mathbb{S}^{n+1}$ en dos componentes conexas, abordaremos una de ellas como Ω .

Sea f la solución al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \bar{\Delta}f = 0, & \text{sobre } \Omega; \\ f|_M = \varphi \end{cases} \quad (2.31)$$

Es conocido que

$$(\bar{\Delta}f)^2 \leq n|\bar{D}^2f|^2, \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{\Delta}f)^2}{n} &\leq |\bar{D}^2f|^2, \\ (\bar{\Delta}f)^2 - \frac{(\bar{\Delta}f)^2}{n} &\geq (\bar{\Delta}f)^2 - |\bar{D}^2f|^2, \\ &\quad \text{y} \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)(\bar{\Delta}f)^2 &\geq (\bar{\Delta}f)^2 - |\bar{D}^2f|^2 \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{n-1}{n}\right)(\bar{\Delta}f)^2 \geq \int_{\Omega} (\bar{\Delta}f)^2 - |\bar{D}^2f|^2 \quad (2.33)$$

de la formula de Rielly 2.30 tenemos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{n-1}{n}\right)(\bar{\Delta}f)^2 \geq \int_{\Omega} Ricc(\bar{\nabla}f, \bar{\nabla}f) + \int_{\partial\Omega} \left[-\langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle + \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) + u(\Delta\varphi + nHu) \right], \quad (2.34)$$

donde $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}|_{\partial\Omega}$.

Puesto que $Ricc(\bar{\nabla}f, \bar{\nabla}f) \geq n\|\bar{\nabla}f\|^2$ y M es mínima se tiene que:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{n-1}{n}\right)(\bar{\Delta}f)^2 \geq \int_{\partial\Omega} \left[-\langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle + \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla f, \nabla f) + u(\Delta\varphi) \right] + \int_{\Omega} n\|\bar{\nabla}f\|^2. \quad (2.35)$$

Dado que $\bar{\Delta}f = 0$ en Ω , entonces:

$$0 \geq \int_{\partial\Omega} \left[-\langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle + \mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(\nabla f, \nabla f) + u(\Delta\varphi) \right] + \int_{\Omega} n \|\bar{\nabla}f\|^2. \quad (2.36)$$

Por otra parte, conocemos que $\Delta\varphi + \lambda_1\varphi = 0$, es decir $\Delta\varphi = -\lambda_1\varphi$, luego se observa que:

$$\int_{\partial\Omega} (\Delta\varphi)u - \langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle = \int_{\partial\Omega} \left((\Delta\varphi)u + (\Delta\varphi)u \right) = 2 \int_{\partial\Omega} (\Delta\varphi)u. \quad (2.37)$$

por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega} (\Delta\varphi)u - \langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle = \int_{\partial\Omega} -2\lambda_1\varphi u \quad (2.38)$$

reemplazando en 2.36, tenemos:

$$0 \geq \int_{\Omega} n |\bar{\nabla}f|^2 + \int_{\partial\Omega} (-2\lambda_1\varphi u) + \int_{\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(\nabla\varphi, \nabla\varphi). \quad (2.39)$$

Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_\eta(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \geq 0$, pues de lo contrario trabajamos con Ω_2 .

En consecuencia,

$$\int_{\Omega} n |\bar{\nabla}f|^2 - \int_{\partial\Omega} 2\lambda_1\varphi u \leq 0$$

Sabemos que $\varphi u = f \frac{\partial f}{\partial \eta}$ en $\partial\Omega$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \varphi u = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad (2.40)$$

$$= \int_{\Omega} |\bar{\nabla}f|^2 + \int_{\Omega} f \bar{\Delta}f \quad (2.41)$$

$$= \int_{\Omega} |\bar{\nabla}f|^2. \quad (2.42)$$

Se sigue que

$$0 \geq \int_{\Omega} n |\bar{\nabla}f|^2 - \int_{\partial\Omega} 2\lambda_1\varphi u = \int_{\Omega_1} n |\bar{\nabla}f|^2 - \int_{\Omega_1} 2\lambda_1 |\nabla f|^2 \quad (2.43)$$

$$= \int_{\Omega} (n - 2\lambda_1) |\bar{\nabla}f|^2 \leq 0 \quad (2.44)$$

luego, $n - 2\lambda_1 \leq 0$, es decir $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$.

■

2.3. Estimación del primer valor propio de hipersuperficies mínimas en $\mathbb{S}^{n+1}$

Sea Ω un dominio de $\mathbb{S}^{n+1}$ cuyo borde M es una hipersuperficie mínima. Sea f una solución del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \bar{\Delta}f = 0, & \text{en } \Omega; \\ f = \varphi, & \text{en } M. \end{cases} \quad (2.45)$$

donde φ es la función propia, $u = \partial f|_{\partial\Omega}$ con η normal exterior a Ω

Teorema 2.3.1. [15] Si f es la solución del problema de Dirichlet 2.45, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$p(t) = (2\lambda_1(M) - n)\|\bar{\nabla}f\|^2.t^2 + 2\lambda_1(M)\|f\|^2.t + \frac{n}{n+1}\|f\|^2 \geq 0, \quad (2.46)$$

donde $\|\cdot\|$ denota la L^2 norma sobre Ω .

Demostración. Supongamos que $t \neq 0$, y consideremos el problema:

$$\begin{cases} \bar{\Delta}g = f, & \text{en } \Omega \\ g = t\varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.47)$$

aplicando Green, se llega a

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} = \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}f \rangle + \int_{\Omega} f \bar{\Delta}f \quad (2.48)$$

como $\bar{\Delta}f = 0$ en Ω , entonces:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} = \int_{\Omega} \|\bar{\nabla}f\|^2 \quad (2.49)$$

por otro lado

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial \eta} = \int_{\Omega} f \bar{\Delta}g + \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}g \rangle \quad (2.50)$$

de donde

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial \eta} = \int_{\Omega} f^2 + \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}g \rangle \quad (2.51)$$

de igual forma, se tiene que:

$$t \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} = \int_{\partial\Omega} t\varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (2.52)$$

$$= \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (2.53)$$

$$= \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}g \rangle + \int_{\Omega} g \bar{\Delta}f \quad (2.54)$$

$$t \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} = \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}f, \bar{\nabla}g \rangle \quad (2.55)$$

De esta igualdad y 2.49 se sigue

$$\int_{\Omega} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} g \rangle = t \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (2.56)$$

la desigualdad de Holder implica

$$\left(\int_{\Omega} |\bar{\nabla} g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} g \rangle = t \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (2.57)$$

elevando al cuadrado a ambos lados se tiene:

$$\int_{\Omega} |\bar{\nabla} g|^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \geq t^2 \left(\int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \right)^2 \quad (2.58)$$

dividiendo ambas partes de la desigualdad por $\int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2$, se tiene

$$\int_{\Omega} |\bar{\nabla} g|^2 \geq t^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (2.59)$$

De la igualdad 2.50 y 2.52 se sigue que

$$t \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial \eta} = t \left[\int_{\Omega} f^2 + t \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f \rangle \right] \quad (2.60)$$

$$= t \int_{\Omega} f^2 + t^2 \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f \rangle \quad (2.61)$$

$$= t \int_{\Omega} f^2 + t^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (2.62)$$

Aplicando ahora la formula de Reilly a g y se tiene:

$$\int_{\Omega} (\bar{\Delta} g)^2 = \int_{\Omega} |\bar{D}^2 g|^2 + \int_{\Omega} Ric(\bar{\nabla} g, \bar{\nabla} g) + \int_{\partial\Omega} 2u \Delta g + \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla g, \nabla g) + \int_{\partial\Omega} n H u^2 \quad (2.63)$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla g, \nabla g) \geq 0$, de esta manera $\int_{\partial\Omega} B(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \geq 0$; De aquí, al usar la desigualdad 1.1.5 y la formula de Reilly se tiene

$$\int_{\Omega} (\bar{\Delta} g)^2 \geq \int_{\Omega} \frac{1}{n+1} (\Delta g)^2 + \int_{\Omega} Ricc(\bar{\nabla} g, \bar{\nabla} g) + 2 \int_{\partial\Omega} u \Delta g \quad (2.64)$$

Es conocido que en la esfera

$$\int_{\Omega} Ricc(\bar{\nabla} g, \bar{\nabla} g) = \sum_i^k \sum_j^k R_{ij} g_i g_j \quad (2.65)$$

$$= n \int_{\Omega} (\bar{\nabla} g)^2. \quad (2.66)$$

Luego,

$$\int_{\Omega} (\overline{\Delta g})^2 \geq \int_{\Omega} \frac{1}{n+1} (\overline{\Delta g})^2 + n \int_{\Omega} (\overline{\nabla} g)^2 + 2 \int_{\partial\Omega} u \Delta g, \quad (2.67)$$

de donde

$$\frac{n+1}{n+1} \int_{\Omega} (\overline{\Delta g})^2 - \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} (\overline{\Delta g})^2 \geq n \int_{\Omega} (\overline{\nabla} g)^2 + 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial v} \Delta t \varphi. \quad (2.68)$$

De aquí,

$$\frac{n}{n+1} \int_{\Omega} (\overline{\Delta g})^2 \geq n \int_{\Omega} (\overline{\nabla} g)^2 + 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial v} \Delta t \varphi \quad (2.69)$$

Por la desigualdad 2.58, dado que $\overline{\Delta g} = f$ y $\Delta \varphi = -\lambda_1(M)\varphi$ entonces se logra que

$$\frac{n}{n+1} \int_{\Omega} f^2 \geq nt^2 \int_{\Omega} (\overline{\nabla} f)^2 - 2t \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial v} \lambda_1(M)\varphi \quad (2.70)$$

$$(2.71)$$

ahora, al usar la igualdad 2.62 se tiene

$$\frac{n}{n+1} \int_{\Omega} f^2 \geq nt^2 \int_{\Omega} (\overline{\nabla} f)^2 - 2\lambda_1 \left[t \int_{\Omega} f^2 + t^2 \int_{\Omega} |\overline{\nabla} f|^2 \right], \quad (2.72)$$

de donde se sigue

$$\left[2\lambda_1(M) - n \right] t^2 \int_{\Omega} |\overline{\nabla} f|^2 + 2\lambda_1(M)t \int_{\Omega} f^2 + \frac{n}{n+1} \int_{\Omega} f^2 \geq 0. \quad (2.73)$$

Por lo tanto

$$p(t) = \left[2\lambda_1(M) - n \right] t^2 \int_{\Omega} |\overline{\nabla} f|^2 + 2\lambda_1(M)t \int_{\Omega} f^2 + \frac{n}{n+1} \int_{\Omega} f^2 \geq 0. \quad (2.74)$$

■

Corolario 3. Sean M una hipersuperficie mínima orientable de $\mathbb{S}^{n+1}$ y $\lambda_1(M)$ el primer valor propio no cero del Laplaciano. Considere el problema (2.45) y su solución f , entonces $\|\overline{\nabla} f\|^2 \geq (n+1)\|f\|^2$.

Demostración. Al calcular el discriminante $d(p)$ de $p(t)$ obtenemos

$$d(p) = (2\lambda_1(M))^2 \|f\|^4 - 4(2\lambda_1(M) - n) \left(\frac{n}{n+1} \right) \|f\|^2 \|\overline{\nabla} f\|^2 \quad (2.75)$$

como $p(t) \geq 0$, entonces $d(p) \leq 0$; así

$$(2\lambda_1(M))^2 \|f\|^4 - 4(2\lambda_1(M) - n) \left(\frac{n}{n+1}\right) \|f\|^2 \|\bar{\nabla} f\|^2 \leq 0 \quad (2.76)$$

$$\text{de donde, } \lambda_1^2(M) \|f\|^4 \leq (2\lambda_1(M) - n) \left(\frac{n}{n+1}\right) \|f\|^2 \|\bar{\nabla} f\|^2 \quad (2.77)$$

$$\text{y } \frac{(n+1)\lambda_1^2(M) \|f\|^2}{n} \leq (2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 \quad (2.78)$$

$$\text{en consecuencia } \frac{(n+1)\lambda_1^2(M) \|f\|^2}{n} - 2\lambda_1(M) \|\bar{\nabla} f\|^2 + n \|\bar{\nabla} f\|^2 \leq 0 \quad (2.79)$$

de esta manera se tiene que

$$\lambda_1(M) \geq \frac{2\|\bar{\nabla} f\|^2 - \sqrt{4\|\bar{\nabla} f\|^4(1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla} f\|^2})}}{2(\frac{n+1}{n})\|f\|^2} \quad (2.80)$$

luego,

$$1 - \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla} f\|^2} \geq 0.$$

■

El siguiente resultado permite encontrar una cota inferior del primer valor propio.

Corolario 4. [15] Sean M una hipersuperficie mínima orientable de $\mathbb{S}^{n+1}$ y $\lambda_1(M)$ el primer valor propio no cero del Laplaciano. Considere el problema (2.45) y su solución f . Si

$$\rho(f) = \frac{2\|\bar{\nabla} f\|^2 - (n+1)\|f\|^2 - 2\|\bar{\nabla} f\|^2 \sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla} f\|^2}}}{(n+1)\|f\|^2}. \quad (2.81)$$

entonces,

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\rho(f), \quad (2.82)$$

y $0 < \rho(f) \leq 1$

Demostración. Considere la funcional

$$\delta(f) = \frac{2\|\bar{\nabla} f\|^2 - 2\|\bar{\nabla} f\|^2 \sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla} f\|^2}}}{2(\frac{n+1}{n})\|f\|^2} - \frac{n}{2}. \quad (2.83)$$

Entonces,

$$\delta(f) = \frac{2\|\bar{\nabla}f\|^2 - 2\|\bar{\nabla}f\|^2 \sqrt{1 - (n+1) \frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}} - (n+1)\|f\|^2}{2\left(\frac{n+1}{n}\right)\|f\|^2}. \quad (2.84)$$

Observe que $\delta(f) = \frac{n}{2}\rho(f)$.

Supongamos que $\rho(f) \leq 0$, es decir

$$\rho(f) = \frac{2\|\bar{\nabla}f\|^2 - (n+1)\|f\|^2 - 2\|\bar{\nabla}f\|^2 \sqrt{1 - (n+1) \frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}}}{(n+1)\|f\|^2} \leq 0 \quad (2.85)$$

luego

$$\left(\frac{1}{2} \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} - 1\right)^2 \leq \left(1 - \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}\right). \quad (2.86)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{4} \left(\frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}\right)^2 - \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} + 1 \leq 1 - \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} \quad (2.87)$$

y de aquí,

$$\frac{1}{4} \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} \leq 0, \quad (2.88)$$

lo cual no puede ser. Por tanto $\rho(f) > 0$.

Supongamos

$$\rho(f) = \frac{2\|\bar{\nabla}f\|^2 - (n+1)\|f\|^2 - 2\|\bar{\nabla}f\|^2 \sqrt{1 - (n+1) \frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}}}{(n+1)\|f\|^2} > 1, \quad (2.89)$$

luego

$$-\sqrt{1 - \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}} > \frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} - 1 \quad (2.90)$$

de donde

$$\frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} \left(\frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} - 1\right) > 0 \quad (2.91)$$

lo cual implica $\frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} > 1$; esto es una contradicción, pues $\frac{(n+1)\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} \leq 1$. Así De esta manera se tiene que $0 < \rho(f) \leq 1$.

Así,

$$\frac{n}{2}\rho(f) = \delta(f) = \frac{2\|\bar{\nabla}f\|^2 - 2\|\bar{\nabla}f\|^2 \sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}}}{2(\frac{n+1}{n})\|f\|^2} - \frac{n}{2} \leq \lambda_1(M) - \frac{n}{2} \quad (2.92)$$

por tanto

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\rho(f) \quad (2.93)$$

■

Corolario 5. Si f es la solución del problema de Dirichlet 2.45, $\|\bar{\nabla}f\|^2 = (n+1)\|f\|^2$ si y solo si $\rho(f) = 1$.

Demostración. Observe que $\rho(f) = 1$ si se cumple que,

$$2\|\bar{\nabla}f\|^2 - 2\|\bar{\nabla}f\|^2 \sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}} - (n+1)\|f\|^2 = (n+1)\|f\|^2 \quad (2.94)$$

$$2\|\bar{\nabla}f\|^2 \left[1 - \sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}} \right] = 2(n+1)\|f\|^2. \quad (2.95)$$

de aquí,

$$1 - \sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}} = \frac{2(n+1)\|f\|^2}{2\|\bar{\nabla}f\|^2} \quad (2.96)$$

$$\sqrt{1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}} = 1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}, \quad (2.97)$$

elevando al cuadrado a ambos lados y trasponiendo términos se tiene

$$\left(1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}\right) \left((n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}\right) = 0 \quad (2.98)$$

por tanto,

$$1 - (n+1)\frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2} = 0 \quad (2.99)$$

y

$$(n+1)\|f\|^2 = \|\bar{\nabla}f\|^2. \quad (2.100)$$

■

Corolario 6. *Si f es la solución del problema de Dirichlet 2.45, entonces f satisface la siguiente desigualdad:*

$$\|\bar{D}^2 f\|^2 > \frac{n(n+1)}{4} \|f\|^2. \quad (2.101)$$

Demostración. De la desigualdad 2.74 se tiene que

$$\frac{n}{n+1} \int_{\Omega} f^2 \geq nt^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 - 2\lambda_1(M) \left[t \int_{\Omega} f^2 + t^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \right] + \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) t^2. \quad (2.102)$$

Definamos la función $\tilde{p}(t)$ como

$$\tilde{p}(t) = \frac{n}{n+1} \int_{\Omega} f^2 - nt^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 + 2\lambda_1(M) \left[t \int_{\Omega} f^2 + t^2 \int_{\Omega} |\bar{\nabla} f|^2 \right] - \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) t^2. \quad (2.103)$$

Agrupando términos tenemos que

$$\tilde{p}(t) = \left[(2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 - \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \right] t^2 + 2\lambda_1(M) \|f\|^2 t + \frac{n}{n+1} \|f\|^2 \quad (2.104)$$

al calcular el discriminante de $\tilde{p}(t)$ tenemos:

$$4\lambda_1^2(M) \|f\|^4 - 4 \left[(2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 - \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \right] \frac{n}{n+1} \|f\|^2 \leq 0. \quad (2.105)$$

Luego,

$$\left[(2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 - \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \right] \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1^2(M) \|f\|^2 \quad (2.106)$$

Por otro lado, usando la formula de Reilly se tiene que:

$$0 = \|\bar{D}^2 f\|^2 + n \|\bar{\nabla} f\|^2 + \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + 2 \int_{\partial\Omega} u \Delta\varphi \quad (2.107)$$

$$= \|\bar{D}^2 f\|^2 + n \|\bar{\nabla} f\|^2 + \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) - 2\lambda_1(M) \int_{\partial\Omega} \varphi u. \quad (2.108)$$

Usando 2.49 se tiene,

$$0 = \|\bar{D}^2 f\|^2 + n \|\bar{\nabla} f\|^2 + \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) - 2\lambda_1(M) \int_{\Omega} \|\bar{\nabla} f\|^2 \quad (2.109)$$

$$\geq \|\bar{D}^2 f\|^2 + n \|\bar{\nabla} f\|^2 + \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) - 2\lambda_1(M) \|\bar{\nabla} f\|^2. \quad (2.110)$$

de donde se observa que

$$\|\bar{D}^2 f\|^2 \geq (2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 - \int_{\partial\Omega} \mathbb{I}\mathbb{I}_{\eta}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \quad (2.111)$$

ahora, usando 2.106 se llega a

$$\|\bar{D}^2 f\|^2 \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1^2(M) \|f\|^2. \quad (2.112)$$

Ahora, como $\lambda_1(M) > \frac{n}{2}$; se concluye que:

$$\|\bar{D}^2 f\|^2 \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1^2(M) \|f\|^2 > \frac{n+1}{n} \frac{n^2}{4} \|f\|^2 \quad (2.113)$$

$$> \frac{n(n+1)}{4} \|f\|^2. \quad (2.114)$$

■

CAPÍTULO 3

Superficies mínimas simétricas

Choe y Soret, demuestran que la conjetura de Yau se satisface si la variedad M además de ser mínima, compacta y encajada en $\mathbb{S}^3$, también es simétrica; más generalmente, si M es una superficie mínima inmersa en $\mathbb{S}^3$, invariante bajo un grupo de reflexiones que forman una teselación de $\mathbb{S}^3$ por medio de tetraedros, se probará basándose en el artículo [1] que si la superficie fundamental de M solución del problema de Plateau es simplemente conexa y tiene cuatro ejes, también se satisface que $\lambda_1(M) = 2$.

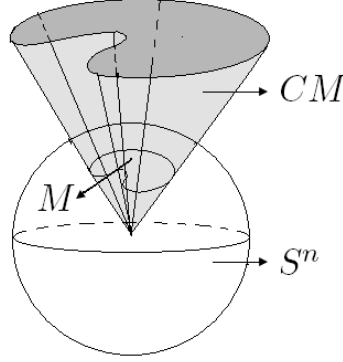
3.1. Cono asociado

Si $M \subset S^n$ es una variedad $(n-1)$ -dimensional compacta definimos el cono asociado a M como el conjunto $CM = \{tx \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in \mathbb{R}^+, x \in M\}$.

Afirmación 2. *CM es una variedad n -dimensional en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración: Observe que decir $CM = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{x}{\|x\|} \in M\}$ es equivalente a decir que $CM = \{tx \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in \mathbb{R}^+, x \in M\}$; lo cual implica que si $y_0 \in CM$ entonces $x_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|} \in M$ y así, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, con $x_0 \in U$ y $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- (i) $M \cap U = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = f(x_0) \wedge \|x\| = 1\}$.
- (ii) $\nabla f(x)$, $\nabla \|x\|$ son linealmente independientes para $x \in M \cap U$.

Figura 3.1: Cono asociado a M

Consideremos $U' = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{x}{\|x\|} \in U\}$, U' es abierto y contiene a y_0 ; ya que $\frac{y_0}{\|y_0\|} \in U$. Consideremos también $g : U' \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, por $g(z) = f(\frac{z}{\|z\|})$; note que:

$$g(y_0) = f\left(\frac{y_0}{\|y_0\|}\right) = f(x_0).$$

Demostremos que $CM \cap U' = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(z) = f(x_0)\}$.

Sea $z \in CM \cap U'$, entonces $\frac{z}{\|z\|} \in M$ y $\frac{z}{\|z\|} \in U$, es decir $\frac{z}{\|z\|} \in M \cap U$; luego:

$$f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = f(x_0) = g(z).$$

Ahora sea $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $g(z) = f(x_0)$, esto es $f(\frac{z}{\|z\|}) = f(x_0)$, ya que $\|\frac{z}{\|z\|}\| = 1$, entonces $\frac{z}{\|z\|} \in M \cap U$, por lo tanto $z \in CM$ y $z \in U'$; o mejor, $z \in CM \cap U$. Así CM es una variedad n -dimensional contenida en $\mathbb{R}^{n+1}$. ■

Teorema 3.1.1. $M^{n-1} \subset S^n$ es una hipervariiedad mínima en S^n , si y solo si, CM es una hipervariiedad mínima en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración: Primero se demostrará que:

$$T_{tx}CM = T_xM \oplus \text{gen}\{x\} \quad (3.1)$$

Para esto basta demostrar que $T_xM \oplus \text{gen}\{x\} \subset T_{tx}CM$; pues $T_xM \oplus \text{gen}\{x\}$ y $T_{tx}CM$ son subespacios n -dimensionales de $\mathbb{R}^{n+1}$, así $T_xM \oplus \text{gen}\{x\} = T_{tx}CM$.

Sea $v \in T_xM$, por tanto existe $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, tal que, $\psi(0) = x$ y $\psi'(0) = v$, a partir de esta curva, podemos definir otra curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow CM$, donde $\beta(s) = (\psi(\frac{s}{t}))$; vemos que $\beta(0) = t(\psi(0)) = tx$ y $\beta'(s) = t \cdot \frac{1}{t} \cdot \psi'(\frac{s}{t})$, reemplazando $s = 0$ tenemos que $\beta'(0) = \psi'(0) = v$, de aquí $v \in T_{tx}CM$.

Ahora tomando $x \in \text{gen}\{x\}$, podemos considerar $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que, $\gamma(s) = (s+t)x$, entonces $\gamma(0) = tx$ y $\gamma'(0) = x$, así $x \in T_{tx}CM$; por lo tanto, $T_xM \oplus \text{gen}\{x\} \subset T_{tx}CM$ y de acuerdo a la observación inicial tenemos que $T_xM \oplus \text{gen}\{x\} = T_{tx}CM$.

Considerando la aplicación de Gauss de $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definimos la aplicación de Gauss $\bar{\eta} : CM \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ así:

$$\bar{\eta}(tx) = \eta(x).$$

Veamos que $\bar{\eta}$ esta bien definida:

1. $\bar{\eta}$ existe para todo $tx \in CM$; pues $\eta(x)$ existe para todo $x \in M$.
2. $\|\bar{\eta}(tx)\| = \|\eta(x)\| = 1$ para todo $tx \in CM$.
3. Si $w \in T_{tx}CM$, entonces podemos escribir $w = u + \lambda x$ donde $u \in T_xM$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, esto en virtud de la descomposición del espacio tangente demostrada inicialmente. Así:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}(tx), w \rangle &= \langle \bar{\eta}(tx), u \rangle + \langle \bar{\eta}(tx), \lambda x \rangle \\ &= \langle \eta(x), u \rangle + \lambda \langle \eta(x), x \rangle \end{aligned}$$

Pero $\langle \eta(x), u \rangle = 0$; pues $\eta \in (T_xM)^\perp$. De otro lado, tenemos que $\mathbb{R}^{n+1} = T_x\mathbb{R}^{n+1}$ se puede escribir como suma directa de dos espacios ortogonales, particularmente se tiene que $\mathbb{R}^{n+1} = T_xS^n \oplus \text{gen}\{x\}$. Como $M \subset S^n$, entonces $T_xM \subset T_xS^n$; luego T_xM es ortogonal a $\text{gen}\{x\}$, por tanto se tiene que $\langle \eta(x), x \rangle = 0$, logrando así demostrar que $\langle \bar{\eta}(tx), w \rangle = 0$. Sabemos que $d\bar{\eta}_{tx} : T_{tx}CM \rightarrow T_{tx}CM$ y $d\eta_x : T_xM \rightarrow T_xM$; y en virtud de la descomposición de $\mathbb{R}^{n+1}$ se obtiene que $d\bar{\eta}_{tx}(w) = d\bar{\eta}_{tx}(u + \lambda x) = d\bar{\eta}_{tx}(u) + \lambda d\bar{\eta}_{tx}(x)$ donde $u \in T_xM$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinamos $d\bar{\eta}_{tx}(u)$ por medio de la curva definida anteriormente $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow CM$ dada por $\beta(s) = t\psi(\frac{s}{t})$, así, $\beta(0) = t\psi(0) = tx$ y $\beta'(s) = t\psi'(\frac{s}{t})\frac{1}{t} = \psi'(\frac{s}{t})$, y al evaluar en $s = 0$ tenemos que $\beta'(0) = \psi'(0) = v$, luego,

$$\begin{aligned} d\bar{\eta}(u) &= \frac{d\bar{\eta}(\beta(s))}{ds} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d\eta(t\psi(\frac{s}{t}))}{ds} \Big|_{s=0} \\ &= d\eta_x(\psi(\frac{s}{t}))ds \\ &= d\eta_x(\psi'(0))ds \\ &= d\eta_x(u) \end{aligned}$$

De otro lado, tomando la curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow CM$ definida por $\beta(s) = (t+s)x$ obtenemos $\beta(0) = tx$ y $\beta'(0) = x$. Así,

$$\begin{aligned} d\bar{\eta}_{tx}(x) &= \frac{d\bar{\eta}(\beta(s))}{ds} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d\bar{\eta}((t+s)x)}{ds} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d\eta(x)}{ds} \Big|_{s=0} = 0. \end{aligned}$$

Así el operador de forma $\bar{S}_{tx}(w) = \bar{S}_{tx}(u + \lambda x) = d\eta_x(u) + 0$, es decir, $\bar{S}_{tx}(u + \lambda x) = S_x(u)$. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de $T_x M$, tal que $S_x(v_i) = \lambda_i v_i$, lo cual implica que $S_{tx}(v_i) = \frac{1}{t} \lambda_i v_i$; por tanto $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$ para $i := 1, \dots, (n-1)$ y $S_{tx}(x) = -d\eta_{tx}(x) = 0$. Por tanto x es un vector propio de $\bar{S}_{tx}$ con valor propio cero; es decir $\bar{\lambda}_n(tx) = 0$, así tenemos, que la curvatura media en $tx \in CM$ es:

$$\begin{aligned} \bar{H}(tx) &= \frac{\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i(tx)}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(x) + 0}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(x) \\ &= \frac{(n-1)}{n} H(x) \end{aligned}$$

Así, $\bar{H}(tx) = \frac{n-1}{n} H(x)$ y $H(x) = \frac{n}{n-1} \bar{H}(tx)$, de donde claramente se puede deducir que $H(x) = 0$ si y solo si, $\bar{H}(tx) = 0$, es decir que M es una hipervariiedad mínima si y solo si CM es una hipervariiedad mínima en $\mathbb{R}^{n+1}$. ■

3.2. Propiedad de las dos piezas

Ross en [14] muestra que cualquier 2-ecuador en una 3-esfera divide cada superficie mínima compacta en dos piezas conexas, esta propiedad es conocida como propiedad de las dos piezas y en este trabajo se usará para estimar el primer valor propio de 1.28 en las superficies de Lawson.

Por otro lado, consideremos Σ una subvariedad mínima n -dimensional de $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ donde cada X de Σ se puede ver como $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$; Al considerar Σ mínima en $\mathbb{S}^{m-1}$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ un marco ortonormal en una vecindad de Σ , conociendo que

$\Delta X = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X$, tenemos que:

$$\nabla_{e_i} [\langle \nabla_{e_i} X, X \rangle] = \langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X \rangle + \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X, X \rangle$$

$$e_i \langle \nabla_{e_i} X, X \rangle - \langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X \rangle = \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X, X \rangle$$

sabemos que $\langle \nabla_{e_i} X, X \rangle = 0$, pues $\langle X, X \rangle = 1$. Así

$$\langle \Delta X, X \rangle = \sum_{i=1}^n -\langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X \rangle \quad (3.2)$$

$$= -n \quad (3.3)$$

Al ser $\sum$ mínima, por 3.1.1 sabemos que el cono asociado a $\sum$ también sería mínima; por observación (6,10) de [13] se tiene que $\Delta X = 0$ en $\sum$; dado que S^{m-1} es mínima, entonces $\Delta X = 0$ en S^{m-1} , por tanto ΔX no tiene componentes sobre $T_x S^{m-1}$, luego ΔX es perpendicular a S^{m-1} , es decir todas sus componentes se encuentran en $\text{gen}\{x\}$; o lo que es lo mismo $\Delta X \parallel X$; luego, por 3.2 tenemos que al ser colineales ΔX con X , entonces existe λ tal que $\Delta X = \lambda X$, luego

$$\langle \Delta X, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle \quad (3.4)$$

$$= \lambda \langle X, X \rangle = -n \quad (3.5)$$

así, $\lambda = -n$, luego $\Delta X = -nX$ es decir $\Delta X + nX = 0$.

Además, hemos concluido que las funciones coordenadas euclidianas $x_1, x_2, \dots, x_m$ de $\mathbb{R}^m$ son funciones propias de Δ con valor propio n sobre $\sum^n$.

Dado un vector $v \in \mathbb{S}^{n+1}$, se define $\mathbb{S}^n(v) = \{p \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}$

Escogemos v de tal manera que $\mathbb{S}^n(v)$ sea la esfera maximal. y Consideremos $f(p) = \langle v, p \rangle$ para todo $p \in \sum$. Es claro que si $p \in \partial \sum$, entonces $\langle v, p \rangle = 0$, es decir $f(p) = 0$. Ahora si $p \in \sum$ y consideramos $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ donde $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ es un marco ortonormal en $T_p \mathbb{S}^{n+1}$ y $a_i \in \mathbb{R}$.

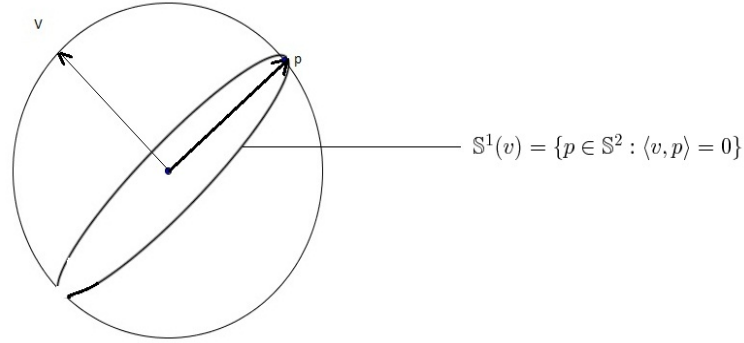


Figura 3.2: esfera máxima

$f(p) = \langle p, \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \rangle$, luego

$$\begin{aligned}
 \Delta f(p) &= \Delta \sum_{i=1}^{n+1} a_i \langle e_i, p \rangle \\
 &= \Delta \sum_{i=1}^n a_i f_i(p) \\
 &= -n \sum_{i=1}^n a_i f_i(p) \\
 &= -n f(p)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

luego, si $p \in \Sigma$, entonces

$$\Delta f(p) + n f(p) = 0, \tag{3.7}$$

Es decir que cualquier función $F(X) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m$ sobre Σ es una función propia del Laplaciano con valor propio n .

Diremos que

$$H_+(v) := \left\{ p \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle p, v \rangle > 0 \right\}$$

y

$$H_-(v) := \left\{ p \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle p, v \rangle < 0 \right\}$$

Lemma 3.2.1. *Si el borde de una hipersuperficie mínima estable Σ^n en $\mathbb{S}^{n+1}$ vive en una esfera maximal, entonces Σ es totalmente geodésica.*

Demostración del lema. Sabemos que si Σ es estable, entonces la segunda variación de área es no negativa. Ahora, dado que Σ es mínima, para cualquier función f sobre Σ tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A = - \int_{\Sigma} f \Delta f + [n + \|\mathbb{H}\|^2] f^2 dA \geq 0$$

luego

$$\int_{\Sigma} f \Delta f + [n + \|\mathbb{H}\|^2] f^2 dA \leq 0$$

donde σ es la segunda forma fundamental. Escogemos v de tal manera que $\mathbb{S}^n(v)$ sea la esfera maximal de la hipótesis.

Consideremos $f(p) = \langle v, p \rangle$ para todo $p \in \Sigma$; se tiene 3.7

$$\Delta f(p) + n f(p) = 0 \tag{3.8}$$

De aquí tenemos:

$$\int_{\Sigma} f \Delta f + [n + \|\mathbb{H}\|^2] f^2 dA = \int_{\Sigma} -n f^2 + \|\mathbb{H}\|^2 f^2 + n f^2 dA \tag{3.9}$$

$$= \int_{\Sigma} \|\mathbb{H}\|^2 f^2 dA \leq 0 \tag{3.10}$$

Si suponemos que $\|\mathbb{H}\|^2 \neq 0$, se tiene que $f = 0$ en Σ , lo cual no puede ser. Por tanto solo queda considerar que $\|\mathbb{H}\|^2 = 0$, luego Σ es totalmente geodésica. ■

Es claro que al considerar $\Sigma \subset S^3$ como una hipersuperficie de S^3 definida por una función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k$ donde k es una constante, se divide S^3 en dos componentes conexas, una $W_1 = \{x \in S^3 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) > k\}$ y la otra $W_2 = \{x \in S^3 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) < k\}$; teniendo en cuenta esta observación, se pasa a la construcción de variedades simétricas mínimas; pero antes se quiere mencionar el siguiente teorema,

Teorema 3.2.1. *Cualquier esfera maximal $\mathbb{S}^2(v)$ en $\mathbb{S}^3$ divide una hipersuperficie Σ de $\mathbb{S}^3$ en dos componentes conexas.*

La prueba de este teorema se realiza en detalle en [16], considerando primero que Σ es un ecuador $\mathbb{S}^2(w)$ con $w \neq v$; y después que Σ no es un ecuador.

3.3. Superficies de Lawson

3.3.1. Principio de reflexión

En esta sección se muestra un método para la construcción de superficies mínimas; en particular se construye una familia de superficies $\xi_{m,k}$ ($m, k \in \mathbb{N}$), las cuales son compactas orientables y de genero mk . Para iniciar la construcción se parte de una superficie fundamental $\mathcal{M}_{m,k}$ la cual es solución del problema de Plateau (el cual consiste en determinar una superficie con la menor área bordeada por una curva de Jordan preescrita) considerando la curva $\Gamma \subset S^3$, después se refleja esta solución a través de segmentos de geodésica en S^3 que hacen parte de su frontera.

Teorema 3.3.1. *Sea M una superficie mínima de clase C^2 y frontera ∂M . Si ∂M contiene un arco geodésico γ , entonces M puede ser extendida como una superficie analítica, a lo largo de cada componente no trivial de $\partial M \cap \gamma$ por reflexión geodésica.*

Este teorema que se menciona con detalle en [5] garantiza que al existir una geodésica $\gamma \subset S^3$ tal que $\gamma \cap \partial M = \bar{\gamma}$, donde $\bar{\gamma}$ es un segmento de geodésica en γ , entonces, al unir M con $r_{\bar{\gamma}}(M)$ se obtiene una superficie analítica mínima.

3.3.2. Construcción de $\xi_{m,k}$

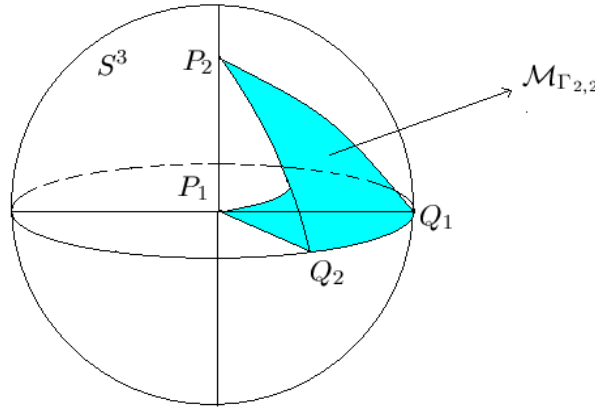


Figura 3.3: Superficie fundamental

En virtud del teorema anterior, procedemos a construir las superficies de Lawson $\xi_{m,k}$, ($m, k \in \mathbb{N}$).

La construcción inicia considerando las circunferencias

$$C_1 = \{x \in S^3 : x_1 = x_2 = 0\} \text{ y}$$

$$C_2 = \{x \in S^3 : x_3 = x_4 = 0\}.$$

Sean los puntos $P_1, P_2 \in C_1$ y $Q_1, Q_2 \in C_2$ donde $P_1Q_1P_2Q_2$ forman un polígono geodésico que se llamará $\Gamma_{m,k}$, donde la distancia entre P_1 y P_2 es $\frac{\pi}{m+1}$, se denotará por β y la distancia entre Q_1 y Q_2 es $\frac{\pi}{k+1}$, que será θ . Suponiendo que e_2 y e_4 son vértices del polígono $\Gamma_{m,k}$, particularmente se hace $P_1 = e_4$ y $Q_1 = e_2$; dado que los planos que contienen a C_1 y C_2 las cuales son ortogonales, entonces se tiene que $P_2 = \sin\beta e_3 + \cos\beta e_4$ y $Q_2 = \sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$. Sea $\mathcal{M}_{m,k}$ la superficie en S^3 solución al problema de Plateau con borde $\Gamma_{m,k}$; de aquí se tendrá que $\mathcal{M}_{m,k}$ (llamada también superficie fundamental) es mínima y $\partial(\mathcal{M}_{m,k}) = \Gamma_{m,k}$. Se denotarán las geodésicas que pasan por P_1 y Q_1 , Q_1 y P_2 , Q_2 y P_2 , Q_2 y P_1 por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 respectivamente.

Se simbolizará por $G_{\Gamma_{m,k}}$ al conjunto de reflexiones geodésicas que se aplican a la superficie fundamental, logrando

$$\xi_{m,k} = \bigcup_{g \in G_{\Gamma_{m,k}}} g(\mathcal{M}_{m,k}).$$

Lemma 3.3.1. *Sea G un grupo de reflexiones en $\mathbb{S}^{n+1}$. Asuma que una hipersuperficie $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$ es invariante bajo G . Si el primer valor propio del laplaciano sobre Σ es menor que n , entonces la primer función propia debe ser invariante bajo G .*

Demostración. Sea $\sigma \in G$ la reflexión a través de una gran esfera $\mathbb{S}^n(v)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ para algún $v \in \mathbb{S}^{n+1}$; y sea ϕ una función propia de Σ cuyo primer valor propio correspondiente es λ_1 , y consideremos

$$\psi(x) := \phi(x) - \phi \circ \sigma(x).$$

Si ψ es la función nula, entonces es claro que ϕ es invariante bajo σ ; Ahora, si $\psi \neq 0$, tenemos:

$$\lambda_1 \psi(x) = \lambda_1 \phi(x) - \lambda_1 \phi \circ \sigma(x)$$

y

$$\Delta \psi(x) = \Delta \phi(x) - \Delta \phi \circ \sigma(x).$$

Sabemos que $\sigma_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son transformaciones lineales, entonces

$$\Delta \phi \circ \sigma(x) = (\Delta \phi) \circ \sigma(x)$$

Así,

$$\Delta\psi(x) = \Delta\phi(x) - (\Delta\phi) \circ \sigma(x) \quad (3.11)$$

$$= -\lambda_1\phi(x) + \lambda_1\phi \circ \sigma(x) \quad (3.12)$$

$$= -\lambda_1(\phi(x) - \phi \circ \sigma(x)) \quad (3.13)$$

$$= -\lambda_1\psi(x). \quad (3.14)$$

Por otro lado, supongamos que $p \in \sum \cap \mathbb{S}^n$, de esta manera $\phi(p) = \phi \circ \sigma(p)$ entonces:

$$\psi(p) = 0.$$

Consideremos ahora D_1 y D_2 como las componentes conexas de $\sum \setminus \mathbb{S}^n(v)$. Supongamos que ψ es positiva en D_1 y negativa en D_2 ; y definimos $\xi(x) = \langle a, x \rangle$ donde $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ es fijo y $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $(a_1, a_2, \dots, a_{n+2})$ es normal a $\mathbb{S}^n$; se puede escoger a tal que $\xi(x) > 0$ en D_1 .

Sabemos que $\xi = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n+2}x_{n+2}$ y ξ es una función propia de $\sum$ con valor propio n . También se sabe que $\xi = 0$ si $x \in \mathbb{S}^n(v)$.

Como $\lambda_1 < n$, por teorema de Courant se tiene que $\langle \xi, \psi \rangle = 0$; es decir $\xi \perp \psi$, como $\xi > 0$ en D_1 y $\psi > 0$ en D_1 , se tendría que

$$\int_{D_1 \cup D_2} \psi \xi > 0 \quad (3.15)$$

lo cual no puede ser, dada la ortogonalidad de las dos funciones propias; por esto se tiene que $\psi = 0$ sobre $\sum$, es decir $\phi(x) = \phi \circ \sigma(x)$ para $x \in \sum$. ■

3.3.3. Grupo G

Para empezar a estudiar el grupo de reflexiones, empezaremos hablando de que es una reflexión geodesica.

Definición 3.3.1. Sea γ una geodésica en $\mathbb{S}^3$, definimos por reflexión geodésica a lo largo de γ a la función $r_\gamma : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ definida por $r_\gamma(x) = u_1 - u_2$; donde $x = u_1 + u_2$ y u_1, u_2 son las componentes tangencial y normal de x respecto al único plano donde se encuentra γ .

Es importante ver que

$$r_\gamma(x) = u_1 - u_2 \quad (3.16)$$

$$= 2u_1 - (u_1 + u_2) \quad (3.17)$$

$$= 2u_1 - x. \quad (3.18)$$

también se tiene que

$$\begin{aligned} r_\gamma(x + y) &= r_\gamma((u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)), \\ &= r_\gamma((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)), \\ &= (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), \\ &= (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2), \\ &= r_\gamma(x) + r_\gamma(y). \end{aligned}$$

de igual forma:

$$\begin{aligned} r_\gamma(\alpha x) &= r_\gamma(\alpha(u_1 + u_2)), \\ &= r_\gamma(\alpha u_1 + \alpha u_2), \\ &= \alpha u_1 - \alpha u_2, \\ &= \alpha r_\gamma(x). \end{aligned}$$

Lo que demuestra que r_γ es una transformación lineal.

Ahora calculemos $\langle r_\gamma(x), r_\gamma(y) \rangle$ y $\langle x, y \rangle$, teniendo en cuenta que $\langle u_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

$$\begin{aligned} \langle r_\gamma(x), r_\gamma(y) \rangle &= \langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \\ &= \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_2, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle \\ &= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \langle u_1 + u_2, v_1 + v_2 \rangle \\ &= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_1, v_2 \rangle + \langle u_2, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle; \\ &= \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle \end{aligned}$$

es decir:

$$\langle r_\gamma(x), r_\gamma(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

De donde se concluye que r_γ es una isometría (conserva ángulos y distancias).

También se puede notar que $r_{\gamma_i}^{-1} = r_{\gamma_i}$.

Las geodésicas en $\mathbb{S}^n$ son circunferencias que se pueden obtener mediante la intersección de espacios vectoriales de dimensión dos en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la esfera n-dimensional, una geodésica $\gamma(t)$ que pasa por $p \in \mathbb{S}^n$ cuando $t = 0$, con velocidad $v \neq 0$, con $v \in T_p\mathbb{S}^n$ se puede parametrizar por

$$\gamma(t) = p \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t) \quad (3.19)$$

De esta manera se observa que para toda geodésica existen $p, v \in \mathbb{S}^3$ tal que $\langle p, v \rangle = 0$ tal que $\gamma \subset \text{gen}\{p, v\}$.

Consideremos P_1, P_2, Q_1, Q_2 y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ como lo hacemos en la sección 3.3.2 y las geodésicas $\gamma_{i,j}$ como las reflexiones sobre la geodésicas contenidas en el generado de P_i, Q_j . Obsérvese que al tomar P_i, Q_j y aplicar las reflexiones geodésicas sobre los segmentos de geodésica que forman la frontera de la superficie fundamental (teniendo en cuenta que esta aplicación tiene como puntos fijos a P_i, Q_j que generan el plano en el cual se encuentra contenida la geodésica sobre la cual se realiza la reflexión), se logra mostrar a través cálculos directos que: Al tener todas las posibles composiciones de las anteriores reflexiones, logramos obtener desde Q_1 hasta $Q_{j+2(k+1)} = Q_1$, y desde P_1 hasta $P_{i+2(m+1)} = P_1$.

Representando gráficamente esta idea:

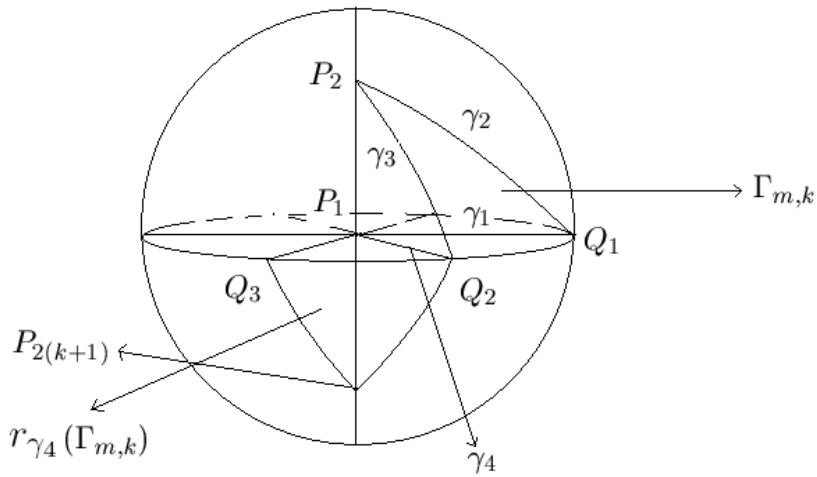


Figura 3.4: Generación de todos los puntos por medio de reflexiones

Denotamos como $G_{\Gamma_{m,k}}$ al conjunto generado por los movimientos $r_{\gamma_{i,j}}$ de $\Gamma_{2,2}$, donde

$r_{\gamma_{i,j}} : \mathcal{M}_{\Gamma_{m,k}} \longrightarrow S^n$ es una reflexión y γ un segmento de geodésica contenido en $\Gamma_{m,k}$; por tanto $r_{\gamma_{i,j}}$ denotara una reflexión geodésica de $\mathcal{M}_{\Gamma_{m,k}}$.

Utilizando la definición (3.3.1), para $x \in \mathbb{R}^4$ hacemos:

$$\begin{aligned} r_{\gamma_1} &= 2(\langle x, P_1 \rangle P_1 + \langle x, Q_1 \rangle Q_1) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_1} &= 2(\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), e_4 \rangle e_4 + \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), e_2 \rangle e_2) - (x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \Rightarrow r_{\gamma_1} &= 2((0, x_2, 0, x_4)) - (x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \Rightarrow r_{\gamma_1} &= (-x_1, x_2, -x_3, x_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\gamma_2} &= 2(\langle x, P_2 \rangle P_2 + \langle x, Q_1 \rangle Q_1) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_2} &= 2(\langle x, \sin\beta e_3 + \cos\beta e_4 \rangle (\sin\beta e_3 + \cos\beta e_4) + \langle x, e_1 \rangle e_1) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_2} &= 2(0, x_2, x_3 \sin^2\beta + x_4 \cos\beta \sin\beta, x_3 \sin\beta \cos\beta + x_4 \cos^2\beta - x_4) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_2} &= (-x_1, x_2, -x_3 \cos 2\beta + x_4 \sin 2\beta, x_3 \sin 2\beta + x_4 \cos 2\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\gamma_3} &= 2(\langle x, P_2 \rangle P_2 + \langle x, Q_2 \rangle Q_2) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_3} &= 2(\langle x, \sin\beta e_3 + \cos\beta e_4 \rangle (\sin\beta e_3 + \cos\beta e_4) + \\ &\quad \langle x, \sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \rangle (\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_3} &= 2(x_1 \sin^2\theta + x_2 \cos\theta \sin\theta, x_1 \sin\theta \cos\theta + x_2 \cos^2\theta, \\ &\quad x_3 \sin^2\beta + x_4 \cos\beta \sin\beta, x_3 \sin\beta \cos\beta + x_4 \cos^2\beta) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_3} &= (-x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta, x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta, \\ &\quad -x_3 \cos 2\beta + x_4 \sin 2\beta, x_3 \sin 2\beta + x_4 \cos 2\beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\gamma_4} &= 2(\langle x, P_1 \rangle P_1 + \langle x, Q_2 \rangle Q_2) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_4} &= 2(\langle x, e_4 \rangle e_4 + \langle x, \sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \rangle (\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_4} &= 2(x_4 + (x_1 \sin^2\theta + x_2 \cos\theta \sin\theta, x_1 \sin\theta \cos\theta + x_2 \cos^2\theta, 0, 0)) - x, \\ \Rightarrow r_{\gamma_4} &= 2(-x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta, x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta, -x_3, x_4). \end{aligned}$$

Con las siguientes matrices cuadradas de orden dos, podemos redefinir las reflexiones pertenecientes a $G_{\Gamma_{m,k}}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} \text{ y veamos que}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \text{ y } AC = \begin{pmatrix} -\cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix}.$$

Al igual que en [5] denotamos $(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, para X, Y matrices cuadradas. entonces podemos observar que :

$$(A, A)x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A, A)x = r_{\gamma_1}(x)$$

$$(A, AC)x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} 2\beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \cos 2\beta + x_4 \operatorname{sen} 2\beta \\ x_3 \operatorname{sen} 2\beta + x_4 \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A, AC)x = r_{\gamma_2}(x)$$

$$(AB, AC)x = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} 2\beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB, AC)x = \begin{pmatrix} -x_1 \cos 2\theta + x_2 \operatorname{sen} 2\theta \\ x_1 \operatorname{sen} 2\theta + x_2 \cos 2\theta \\ -x_3 \cos 2\beta + x_4 \operatorname{sen} 2\beta \\ x_3 \operatorname{sen} 2\beta + x_4 \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB, AC)x = r_{\gamma_3}(x)$$

$$(AB, A)x = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \cos 2\theta + x_2 \operatorname{sen} 2\theta \\ x_1 \operatorname{sen} 2\theta + x_2 \cos 2\theta \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB, A)x = r_{\gamma_4}(x).$$

Si $r_\gamma \in G_{\gamma_{m,k}}$ entonces r_γ es una composición finita de $r_{\gamma_1}, r_{\gamma_2} r_{\gamma_3} r_{\gamma_4}$, así,

$$G_{\gamma_{m,k}} = \operatorname{gen}\{r_{\gamma_1}, r_{\gamma_2} r_{\gamma_3} r_{\gamma_4}\};$$

y en virtud de los cálculos anteriores

$$G_{\Gamma_{m,k}} = \text{gen}\{(A, A), (AB, A), (A, AC), (AB, AC)\}.$$

Pero observe que

$$\begin{aligned} (A^2, A^2) &= (B^{k+1}, I) = (I, C^{m+1}) = I, \\ (AB, A) &= (A, A)(B, I), (A, AC) = (A, A)(I, C), (AB, AC) = (A, A)(B, I)(I, C), \end{aligned} \quad (3.20)$$

por tanto

$$G_{\Gamma_{m,k}} = \text{gen}\{(A, A), (B, I), (I, C)\}.$$

luego este conjunto esta conformado por todos los elementos de la forma $(A, A)^i$ donde $i = 0, 1$, $(B, I)^{j_1}$ donde $j_1 = 0, 1, \dots, k$ y $(I, C)^{j_2}$ donde $j_2 = 0, 1, \dots, m$, así, el conjunto $G_{\Gamma_{m,k}}$ tiene $2(m+1)(k+1)$ elementos, y se puede ver como:

$$G_{\Gamma_{m,k}} = \{(A^i B^{j_1}, A^i C^{j_2}) \mid 0 \leq i \leq 1, 0 \leq j_1 \leq k, 0 \leq j_2 \leq m\}. \quad (3.21)$$

Cuadrantes generalizados

Consideramos como $C_{1,1}$ la región convexa en S^3 del polígono geodésico Γ_1 . Es posible generar una partición de S^3 en conjuntos isométricos a $C_{1,1}$, es decir de cierta forma estamos realizando una teselación a S^3 . Para lograr eso consideramos puntos igualmente espaciados P_i y Q_j , con $i = 1, 2, \dots, 2m+2$ y $j = 1, 2, \dots, 2k+2$, donde:

$$\begin{aligned} d(P_i; P_{i+1}) &= \theta = \pi/(m+1) \text{ y} \\ d(Q_j; Q_{j+1}) &= \beta = \pi/(k+1). \end{aligned}$$

Así lograremos obtener todos los puntos P_i y Q_j , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_i &= [\text{sen}(i-1)\beta]e_3 + [\text{cos}(i-1)\beta]e_4 \text{ y} \\ Q_j &= [\text{sen}(j-1)\theta]e_1 + [\text{cos}(j-1)\theta]e_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dados estos puntos P_i, Q_j definimos:

Definición 3.3.2. Llamaremos *cuadrantes generalizados*, a los conjuntos $C_{i,j}$ de la forma:

$$C_{i,j} = \left\{ \frac{x}{|x|} \in S^3 \mid x = t_1 P_i + t_2 Q_j + t_3 P_{i+1} + t_4 Q_{j+1}, \sum_{s=1}^4 t_s = 1; \forall s, t_s \geq 0 \right\}. \quad (3.23)$$

Proposición 3.3.1. Si $g \in G_{\Gamma_{m,k}}$ tal que $g(C_{1,1}) = C_{1,1}$, entonces $g = \text{id}$.

Demostración: Proposición 2.2.5 de [11]. ■

Al considerar $g = (AB^i, AC^j)$, al tener que $B^i = \begin{pmatrix} \cos 2i\theta & -\sin 2i\theta \\ \sin 2i\theta & \cos 2i\theta \end{pmatrix}$ y

$C^j = \begin{pmatrix} \cos 2j\beta & -\sin 2j\beta \\ \sin 2j\beta & \cos 2j\beta \end{pmatrix}$, vemos que:

$$AB^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2i\theta & -\sin 2i\theta \\ \sin 2i\theta & \cos 2i\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2i\theta & \sin 2i\theta \\ \sin 2i\theta & \cos 2i\theta \end{pmatrix}; \quad (3.24)$$

$$AC^j = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2j\beta & -\sin 2j\beta \\ \sin 2j\beta & \cos 2j\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2j\beta & \sin 2j\beta \\ \sin 2j\beta & \cos 2j\beta \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow (AB^i, AC^j)C_{1,1} = \begin{pmatrix} -\cos 2i\theta & \sin 2i\theta & 0 & 0 \\ \sin 2i\theta & \cos 2i\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2j\beta & \sin 2j\beta \\ 0 & 0 & \sin 2j\beta & \cos 2j\beta \end{pmatrix} C_{1,1}. \quad (3.26)$$

Por definición 3.3.2 $C_{1,1} = t_1P_1 + t_2Q_1 + t_3P_2 + t_4Q_2$, entonces:

$$C_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} t_4 \sin \theta \\ t_4 \cos \theta + t_2 \\ t_3 \sin \beta \\ t_1 + t_3 \cos \beta \end{pmatrix} : t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1, t_i \geq 0 \right\}. \quad (3.27)$$

Luego;

$$(AB^i, AC^j)C_{1,1} = \begin{pmatrix} -t_4 \sin(2i+1)\theta + t_2 \sin 2i\theta \\ t_4 \cos(2i+1)\theta + t_2 \cos 2i\theta \\ -t_3 \sin(2j+1)\beta + t_1 \sin 2j\beta \\ t_3 \cos(2j+1)\beta + t_1 \cos 2j\beta \end{pmatrix} = C_{2i+1, 2j+1} = C_{1,1}. \quad (3.28)$$

Es importante observar que cualquier reflexión $g \in G$, aplicada a $C_{1,1}$, en términos de cuadrantes generalizados nos permite obtener solo cuadrantes $C_{r,s}$ donde r, s son ambos impares. luego para todo $g \in G_{\Gamma_{m,k}}$, $g(C_{1,1}) = C_{i,j}$ donde $i+j$ es par. Al crear $\xi_{m,k}$ por medio de reflexiones geodésicas sobre segmentos de geodésica contenidos en $\mathcal{M}_{m,k} \subset C_{1,1}$, tenemos que $g(\mathcal{M}_{m,k}) \subset g(C_{1,1})$, dejando así los cuadrantes $C_{i,j}$ con $i+j$ impar sin una cubierta contenida en $\xi_{m,k}$; luego, $\xi_{m,k} \cap \text{int}C_{i,j} = \emptyset$ para $i+j = \text{impar}$.

La figura 3.5, muestra para m, k pares, la geodésicas como parejas ordenas (P_i, Q_j) , y las

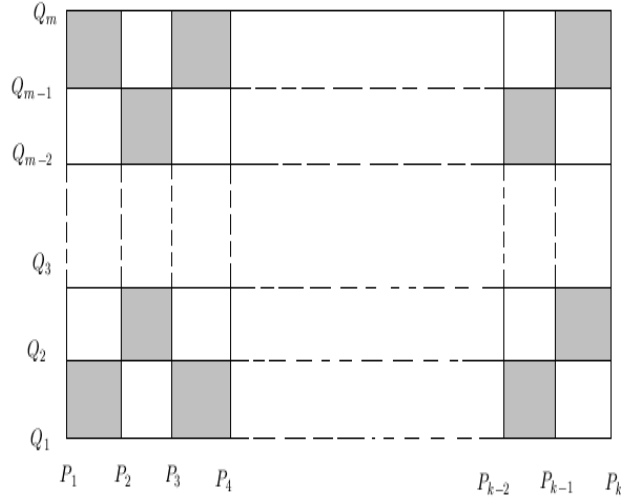


Figura 3.5: Cuadrantes en el plano

que son de color gris tiene intersección no vacía con $\xi_{m,k}$. Observe que solo los cuadrantes con suma de índice par cumplen esta condición.

Observación 3. Considerando $H = \{r_{\gamma_i}(C_{1,1}) : r_{\gamma_i} \in G_{\gamma_{m,k}}\}$, se puede observar que $[G : H] = 2$, y de manera sencilla también se tiene que

$$r_{\gamma_i} \circ r_{\gamma_i} \circ r_{\gamma_i}^{-1}(C_{1,1}) = r_{\gamma_i} \circ r_{\gamma_i} \circ r_{\gamma_i}(C_{1,1}) \in H \quad (3.29)$$

luego H es un subgrupo normal de $G_{\Gamma_{m,k}}$.

Teorema 3.3.2. Sea Σ una superficie compacta mínima en $\mathbb{S}^3$ la cual es invariante bajo un grupo G de reflexiones. Supongamos que el dominio fundamental de G es un tetraedro T . Si la pieza fundamental $P = \Sigma \cap T$ es simplemente conexa y tiene cuatro aristas, entonces el primer valor propio del laplaciano sobre Σ es 2.

Demostración. Empezaremos mostrando que:

Sea Σ una superficie compacta mínima en $\mathbb{S}^3$ invariante bajo reflexiones de un grupo G, ψ una función propia con valor propio λ_1 sobre Σ y N el conjunto nodal de ψ , Considere $P = \Sigma \cap T$ con T un tetraedro, entonces N contiene un punto interior de P y $P \setminus N$ tiene al menos dos componentes conexas.

Ahora, supongamos que $\lambda_1 < 2$, sea ψ una función propia con valor propio λ_1 sobre Σ y $N \subset \Sigma$ el conjunto nodal de ψ . Sabemos que ψ es invariante bajo G_σ . Supongamos

que N no contiene puntos interiores a P , es decir $\bar{P} \cap N \subset \partial P$; sabemos que al ser λ_1 el primer valor propio diferente de cero, por teorema de Courant se tiene que la función propia asociada a λ_1 sería la primera función propia de signo no constante; siendo esto así, ψ tiene dos dominios nodales D_1 y D_2 .

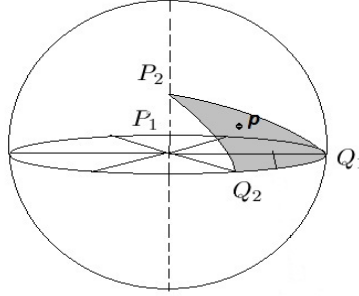


Figura 3.6: $p \in \text{int}P$

Podemos considerar $\partial T = \bigcup \gamma_i$, $i = 1, \dots, n$. De esta manera sabemos que

$$\partial\left(\sum \cap T\right) = \partial P$$

como T es el dominio fundamental de la teselación se tendrá que $\partial\left(\sum \cap T\right) = \partial T$; de esta forma, aplicando el corolario 1 a N , se tendrá que D_1 y D_2 se anulan en $N = \sum \cap \mathbb{S}^2(v)$ tal que $\partial\gamma_i \subset \mathbb{S}^n(v)$, para algún i .

Partiendo de este hecho, podemos definir $\xi(x) = \langle x, v \rangle$ con $x \in \mathbb{S}^3$ de tal forma que $\xi(x) > 0$ en D_1 al igual que ψ y $\xi(x) < 0$ en D_2 al igual que ψ , se sabe que ξ es una función propia con valor propio 2; al saber que ψ y ξ son funciones propias de valores propios diferentes, estas dos funciones son perpendiculares. Así, llegamos a una contradicción al igual que se llega en la demostración del lemma 3.3.1. Por tanto, N contiene al menos un punto interior de P . De aquí se puede ver

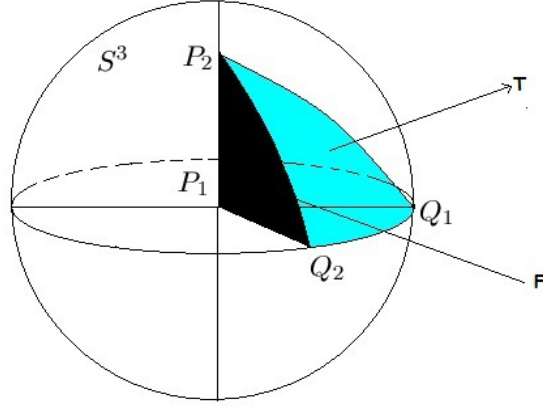
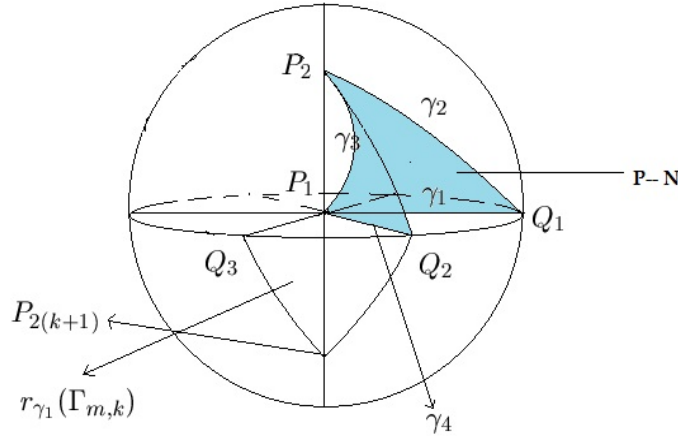
$$P \setminus N = [D_1 \cap P] \cup [D_2 \cap P] \quad (3.30)$$

Donde es claro que $[D_1 \cap P]$, $[D_2 \cap P]$ son disjuntos; así $P \setminus N$ no es conexo.

A continuación, se estima el primer valor propio en superficies simétricas inmersas en $\mathbb{S}^3$.

A continuación recordamos que

se ha supuesto que el primer valor propio del Laplaciano $\lambda_1 < 2$, sea ψ una función propia con valor propio λ_1 sobre $\sum$ y $N \subset \sum$ el conjunto nodal de ψ . Ahora, sea F una cara del

Figura 3.7: F disjunta de ∂D Figura 3.8: $P \setminus N$

tetraedro T y D una componente de $P \setminus N$ tal que $\partial D \cap F = \emptyset$; sin perdida de generalidad podemos tomar $T = C_{1,1}$. (de la definición 2.5.1 de [11]).

Sea $\mathbb{S}^2(v_1)$ con $v_1 \in \mathbb{R}^4$ una gran esfera la cual contiene F , y llamamos $\hat{D}$ al reflejo de D a través de $\mathbb{S}^2(v_1)$, observe que es suficiente ver $\hat{D} = r_{\gamma_i} D$ para algún $i = 1, 2, 3, 4$, donde $\gamma_i \subset \mathbb{S}^2(v_1)$ y γ geodésica. Considere D_1 como la componente de $\Sigma \setminus N$ tal que $D \subset D_1$, D_2 la componente de $\Sigma \setminus N$ tal que $r_{\gamma_i}(D_1) = D_2$ que contiene a $\hat{D}$, y D_3 la intersección con $\mathbb{S}^2(v_1)$ de estas dos componentes.

Es claro que si $p \in D_3$, se tendrá que $r_{\gamma_i}(p) \in D_3$; además, dado que r_{γ} es isometría, se tienes que $d(p, \gamma) = d(\gamma, r_{\gamma_i}(p))$ es decir D_3 es simétrica con respecto a $\mathbb{S}^2(v_1)$.

Supongamos ahora que $D_1 = D_2$; también asumamos que p y $r_{\gamma_i}(p) = p'$ están en D_1 . Como D_1 y D_2 son componentes conexas de $\Sigma \setminus N$, consideramos una curva continua

$\psi \subset D_1$ que une p con p' y $\psi \cap N = \emptyset$.

Según la sección 2,4 de [11] se define $G_{m,k} = \text{gen}\{r_{\gamma_1}, r_{\gamma_2}, r_{\gamma_3}, r_{\gamma_4}\}$; considerando r_{γ_i} con $i = 1, 2, 3, 4$ las aristas del tetraedro geodésico T . Consideremos H el subgrupo de G generado por las reflexiones de T a través de sus diferentes arcos geodésicos ; por observación 3, se tiene que H es un subgrupo normal de G . Gracias a la ecuación (2.16) tenemos que $[G : H] = 2$, pues las imágenes de estas reflexiones solo generan

$$\bigcup_{g \in G} C_{2i+1, 2j+1} \quad (3.31)$$

La cual es una teselación de $\mathbb{S}^3$ sin los cuadrantes $C_{2i, 2j}$ para todo i, j . De igual manera al considerar $T_2 : \{C_{1,1} U r_{\gamma(C_{1,1})}\}$ con $C_{1,1} \neq r_{\gamma(C_{1,1})}$ y $\hat{H} = \{r_{\gamma_i}(T_2) : r_{\gamma_i} \in G\}$, dicho de otra manera,

$$\hat{H} = \{r_{\gamma_i}(C_{1,1}) \cup r_{\gamma_i}(r_{\gamma_j(C_{1,1})})\} \quad (3.32)$$

$$= \{r_{\gamma_i}(C_{1,1}) \cup r_{\gamma_k}(C_{1,1})\} \quad (3.33)$$

se puede ver que como H es normal, también lo es $\hat{H}$.

Ahora definamos una curva $\tau \subset C_{1,1}$ y un conjunto $\tilde{r} = \{\sigma(\tau) \cap T_2 : \sigma \in H\}$, es claro que $\tau \cap N \neq \emptyset$; pues $r_{\gamma_i}(D_1) = D_2$ lo cual implicaría que $D_1 \neq D_2$.

Ahora, supongamos que $D_1 = D_3$. Como D_1 es una componente conexa, podemos definir una curva τ' tal que una dos puntos cualquiera $q \in D_1$ y $q' \in D_3$. Al saber que D_1 y D_3 son componentes de $\sum \setminus N$, se sabe que $\tau' \cap N = \emptyset$. Se sabe que $D_1 \cap \mathbb{S}^2(v) \subset D_3$ y $D_2 \cap \mathbb{S}^2(v) \subset D_3$; pero se acaba de demostrar que $D_1 \neq D_2$, entonces $D_1 \neq D_3$.

De manera análoga se demuestra que $D_3 \neq D_2$; luego, ψ tiene por lo menos tres dominios nodales D_1, D_2 y D_3 ; lo cual es una contradicción al teorema de Courant, ya que el número de dominios nodales de ψ debe ser menor o igual a 2.

Por tanto, el primer valor propio del Laplaciano es $\lambda_1 = 2$. ■

Observación 4. *Por construcción de $\xi_{m,k}$ sabemos que la curva de jordan $\Gamma_{m,k}$ es un tetraedro geodésico y al considerar Σ como la superficie mínima solución al problema de Plateu también se tiene que $\Sigma \cap \Gamma_{m,k}$ tienen 4 aristas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 las cuales son como el la sección 3.3.2; aplicando el teorema 3.3.2 de esta manera podemos concluir que el primer valor propio del Laplaciano de las superficies $\xi_{m,k}$ es $\lambda_1 = 2$.*

Bibliografía

- [1] Choe Jaigyoung y Soret Marc . First eigenvalue of symmetric minimal surfaces in S^3 ; The Annals of Mathematics; volumen 58, número 1, páginas 269 – 281, 2009.
- [2] Bline Lawson. Complete minimal surfaces in S^3 ; The Annals of Mathematics; volumen 92, número 3, páginas 335 – 374.
- [3] Chavel Isaac. *Eigenvalues in Riemannian geometry* ; Academic press, inc, New York, 1984.
- [4] Manfredo P. Do Carmo. *Riemannian geometry*; Birkhäuser, Boston , 1992.
- [5] Mesa Heber. *Superficies mínimas algebraicas de grado 4 en S^3* ; Tesis de maestría, Universidad del Valle, 2005.
- [6] Mesa Heber y Castrillón Andrés Julián . *Algebricidad de los ejemplos de Lawson*; Revista matemáticas enseñanza universitaria; volumen 1, número 2, páginas 79 – 88 2011.
- [7] Perdomo Oscar Mario *Minimal hypersurfaces in R^n as regular values of a function*; universidad industrial de santander: 2004.
- [8] Xuanguo Huang . *The first eigenvalue for compact minimal embedded hypersurface in S^{n+1} ($n \geq 3$) is n* ; Institute of mathematics, Fudan University, Shanghai-China; 2004.
- [9] Morgan Frank . *Geometric measure theory a beginner's guide.*; Department of Mathematics, Williams College, Williamstown-Massachusetts, Academic Press 1988.

-
- [10] Hyeong In Choi, Ai-Nung Wang. *A firsts eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces*; University of Chicago, Taywan University, 1983.
 - [11] Castrillón Andrés Julián. *Conjetura álgebraica de Lawson* ;Tesis, Universidad del Valle, 2008.
 - [12] Taylor, Michael. *Partial differential equations II*; Springer, 1996.
 - [13] Taylor, Michael. *Partial differential equations III*; Springer, 1996.
 - [14] Ros Antonio. *A Two-Piece property for compact minimal surfaces in a Three-sphere*; Indiana University, Mathematics Journal, vol 44 N° 2, 1995.
 - [15] Abdenago Barros, G. Pacelli Bessa. *Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$* ; Universidad Federal do Ceará, Campus do Pici. Fortaleza.
 - [16] Suarez Johan. *Análisis de superficies mínimas en $\mathbb{S}^3$ cuando las divide un ecuador*; Tesis, Universidad del Valle, 2004.
 - [17] Hirsch M.W. *Differential topology*; Springer-Verlag, New York, 1976.

Índice alfabético

- Área
 - Segunda variación, 8
- aplicación de Gauss, 1
- conexión afín, 2
- cono
 - asociado, 26, 27
 - teorema de, 27
- cuadrante
 - generalizado, 40
- Curvatura
 - media, 5
- Geodesica
 - totalmente, 32
- Green
 - Identidad, 9
- grupo
 - diedrico, 38
- grupo de reflexiones, 40
- Nodal
 - Conjunto, 8
 - dominio, 8
- Operador de forma, 5
- plano
 - tangente
 - igualdad, 27
- Primer valor propio
 - Estimación para variedades simétricas, 42
- Reflexión
 - Geodesica, 35
- Reilly
 - fórmula, 12
- solución
 - problema de Plateau, 34
- superficie
 - fundamental, 34
- teorema
 - del cono, 27
- variedad, 1
 - orientable, 2