



**Unidad didáctica para la enseñanza y comprensión de la relación entre área y volumen en
grado sexto de la básica secundaria**

Rhandy Estevenson Camayo Erazo

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de educación en ciencias, tecnologías y culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024



**Unidad didáctica para la enseñanza y comprensión de la relación entre área y volumen en
grado sexto de la básica secundaria**

Rhandy Estevenson Camayo Erazo

Trabajo de grado para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Tutor:

Mg. Jose Luis Vasquez Tigreros

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de educación en ciencias, tecnologías y culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024

Agradecimientos

Agradezco a mi alma mater, la Universidad Del Valle, por abrirme sus puertas y poder vivir esta experiencia que ha sido muy significativa en mi proceso de formación personal y profesional. A mis maestros de la Facultad que gracias a ellos me guiaron en este proceso con mucha entrega, calidez y su saber. A mis evaluadores con sus aportes se pudo lograr culminar este trabajo.

A mi tutor, Jose Luis Vasquez Tigreros, por su entrega y acompañamiento a lo largo de este proceso, el tiempo que dedico con paciencia y dedicación, sus sugerencias. Muchísimas gracias por contribuir en mi proceso con mucha calidez y compromiso hasta el último momento.

A mi familia, mi madre que me motiva siempre y me ha brindado su apoyo incondicional durante todo este tiempo, esto demuestra que todo se puede lograr; a mis hermanos que me siguen la corriente en cualquier idea que se me ocurra sin cuestionar y siempre que pueden también me brindan su apoyo; a mi hijita Luna que ya no se encuentra en este plano terrenal, pero estuvo cerca mío hasta su último momento.

A mis compañeros, Marlen, Ashley, Vila que siempre me brindaron su compañía, su paciencia y calidad humana, sin ellos este proceso no hubiera sido fácil; a Jhon Edison y Daniel Posada que sin importar el día o la hora siempre estaban disponibles para explicarme cualquier duda. Siempre voy a estar agradecido con todos ustedes, los admiro tanto, he aprendido mucho de ustedes.

Resumen

El siguiente trabajo de grado tiene como fin presentar el diseño de una Unidad Didáctica para la enseñanza y comprensión de la relación entre área y volumen en grado sexto de la básica secundaria. Dicha propuesta se basa en un enfoque de resolución de problemas que se lleva a cabo en tres fases: *Fase pre-activa* en la que se establece la fundamentación teórica y metodológica del modelo local de análisis didáctico a través de una Unidad Didáctica, *Fase interactiva* en la que se realiza el diseño detallado de las situaciones y actividades de la Unidad Didáctica; finalmente durante la *Fase post-activa*, se analiza retrospectivamente el conocimiento didáctico en términos de comprensiones y limitaciones sobre el diseño realizado.

Esta propuesta busca fortalecer el conocimiento didáctico de los docentes y proporcionar un marco teórico que permita analizar los conocimientos didácticos relacionados con el diseño de las situaciones y tareas de una Unidad Didáctica, con el fin de facilitar el aprendizaje significativo de las relaciones de área y volumen en los estudiantes.

Palabras clave: *Unidad didáctica, Resolución de problemas, relaciones de área y volumen, conocimiento didáctico.*

Tabla de contenido

Contenido

Introducción.....	10
Antecedentes.....	12
Tratamiento de la medida.....	13
Relación área y volumen.....	15
Aproximación desde lo visual.....	16
Capítulo I. Planteamiento del Problema.....	19
1.1 El problema de estudio.....	19
1.2 Objetivos.....	23
General.....	23
Objetivos específicos.....	23
1.3 Justificación.....	23
Capítulo II - Marco Teórico.....	27
2.1 Formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas.....	27
2.2 Análisis didáctico y organizadores del currículo.....	28
2.2.1 Modelo local de análisis didáctico.....	31
2.2.2 Unidad didáctica.....	33
2.3 Enfoque para la enseñanza y comprensión basado en la resolución de problemas.....	34
2.4 Visualización en la enseñanza de la geometría.....	35
Capítulo III - Marco Metodológico.....	38
3.1 El Análisis didáctico como metodología de investigación.....	38
3.1.1 Modelo local de Análisis Didáctico.....	38
Fases de la investigación de diseño.....	42
Capítulo IV - Reflexiones finales.....	43
4.1. Organización de la Unidad Didáctica.....	44
4.2. Conclusiones sobre el estudio.....	47
OE1:.....	48
OE2:.....	49
OE3:.....	50
Referencias bibliográficas.....	52
Anexos.....	55

Lista de tablas

Tabla 1. Clasificación cognitiva del contenido de área y volumen	38
Tabla 2. ADCg de la relación entre el área y el volumen	40
Tabla 3. Fases de investigación de diseño	42
Tabla 4. OE Objetivos específicos	45

Lista de figuras

Figura 1. Mapa conceptual Análisis Didáctico	34
Figura 2. Estructura conceptual relación de área y de volumen.	39

Introducción

El presente trabajo de grado tiene como objetivo diseñar una Unidad Didáctica a partir de sustentos teóricos que articulen la resolución de problemas para comprender las relaciones de área y volumen en el grado sexto de básica secundaria. Para ello, se revisarán algunos desarrollos epistemológicos, históricos, curriculares, cognitivos y didácticos relacionados con la relación entre las magnitudes de área y volumen.

En el primer capítulo, se realiza una aproximación a la problemática asociada con los conocimientos didácticos del profesor de matemáticas, para diseñar una Unidad Didáctica que favorezca la comprensión de la relación entre las magnitudes de área y volumen. Por ello, se revisan antecedentes nacionales e internacionales, aspectos relacionados con el planteamiento de la pregunta problema, el objetivo general, los objetivos específicos asociados con la caracterización del conocimiento didáctico desarrollado a partir del diseño de una Unidad Didáctica basada en la resolución de problemas para la comprensión de la relación entre área y volumen y la justificación que da los argumentos que evidencian la importancia de entender estas estructuras conceptuales.

En el segundo capítulo, se describe el marco conceptual centrado en aspectos sobre conocimiento didáctico, la resolución de problemas, las relaciones de área y volumen, y los desarrollos teóricos en los que se basa la Unidad Didáctica. Este capítulo relaciona las bases teóricas descritas, para el diseño de la Unidad Didáctica y su relación con el modelo local de Análisis Didáctico propuesto.

En el tercer capítulo, se aborda la metodología utilizada en el diseño de la Unidad Didáctica de acuerdo con los dos momentos de inicio (Análisis de contenido y Análisis cognitivo) del Análisis Didáctico. Además, en este apartado se describe el diseño de las situaciones y actividades propuestas, las estrategias y recursos didácticos previstos para la enseñanza de la relación del área y volumen.

En el cuarto capítulo, se presentan las conclusiones obtenidas a partir del conocimiento didáctico desarrollado a través del diseño de la Unidad Didáctica. Se realiza una reflexión crítica sobre las decisiones tomadas en el proceso del diseño y se analizan posibles limitaciones que podrían surgir a la hora de su implementación. También se destacan aportes del modelo local de

análisis didáctico para favorecer el aprendizaje de la relación del área y volumen en los estudiantes de grado sexto de la básica secundaria.

Algunas de las reflexiones ocasionadas con el desarrollo de este trabajo centran su atención en la importancia de un modelo local de Análisis Didáctico que articule los conocimientos didácticos, disciplinares, curriculares y fenomenológicos que garanticen una aproximación a las ideas intuitivas de los estudiantes a partir de su contexto; por otro lado con el diseño de la Unidad Didáctica se detalla cómo se construyó y cómo el profesor pudo ir corrigiendo algunos errores y mejorar la comprensión para los estudiantes; además junto con el análisis retrospectivo generado durante el diseño de la Unidad Didáctica se reflexiona sobre posibles dificultades que pueden surgir en el diseño y en su implementación y se proponen mejoras basadas en la planificación junto con las actividades propuestas.

Al final del trabajo se incluye la Unidad Didáctica organizada en situaciones y actividades que vinculan diferentes materiales didácticos como parte de los anexos.

Antecedentes

En el siguiente apartado se presentan algunos antecedentes que evidencian aspectos relacionados con el problema propuesto en este estudio, en el marco del campo denominado Educación Matemática.

Se identifican algunos estudios que se han realizado sobre la enseñanza y el aprendizaje del área y el volumen con el fin de identificar el tratamiento que se ha realizado sobre esta problemática en términos del desarrollo del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas para planificar una Unidad Didáctica centrada en la resolución de problemas para la comprensión de la relación entre área y volumen.

Al respecto, Chamorro (1991) menciona que el concepto de magnitud está ausente en los currículos, lo que provoca que no se construyan tareas que trabajen con estos términos, ya que se trabaja muy rápido la comparación a través de la medida. Esto quiere decir que no tiene sentido iniciar a la medida si no se sabe qué se puede y qué no se puede medir. Para los estudiantes la magnitud se trata de saberes didácticamente invisibles, cuyo aprendizaje se deja a la entera responsabilidad de ellos mismos, sin que se intervenga sobre lo que están trabajando.

Así mismo, Del Olmo, Moreno y Gil (1993) expresan que las magnitudes y la medida deberían permanecer en la enseñanza por distintas razones: ya que no se concibe una educación que logre preparar los niños para que se enfrenten a necesidades cotidianas y que esto tenga problemas con lo referente a la medida, porque la medida es un tópico en el que confluyen aspectos geométricos, aritméticos, de resolución de problemas y por la cantidad de destrezas y habilidades que se desarrollan a partir de situaciones asociadas a aspectos espaciales y métricos.

Al respecto, Del Olmo et al (1993) explica que la medida es bastante compleja de entender y que no se limita al simple uso de fórmulas, y que los niños no suelen entender las fórmulas como una herramienta para calcular áreas.

Estos autores mencionan una diferencia entre estos términos, entendiendo superficie para designar dicha cualidad y área para su medida, conceptos que se tratan en este estudio para establecer las relaciones de área y volumen a partir de situaciones presentes en nuestra vida cotidiana.

Para Del Olmo et al (1993) la enseñanza del área parte de la percepción de la cualidad que se quiere medir, por ello, se requiere de estimar comparando dos o más objetos respecto a dicha cualidad, finalmente, se emplean comparaciones con unidades fijas sobre el objeto a medir para asignar una cuantificación de la “unidad de medida” en relación con la magnitud a comparar. En este último proceso de cuantificación con unidades fijas se requiere el uso de unidades flexibles que posibiliten descomponerse en unidades más pequeñas procurando que el área se exprese de manera exacta a través de números reales positivos.

También es necesario hablar sobre la cuantificación de áreas y volúmenes en contextos de medida. Al respecto, Chamorro (2003) destaca la utilidad de la medida no sólo en el contexto social, sino también en el matemático:

...la medida de magnitudes constituye un bloque de contenidos tradicionalmente tratado en la Enseñanza Primaria como Secundaria, ninguna reforma del currículum ha dejado fuera a este núcleo temático de gran utilidad en la vida práctica de cualquier ciudadano. Pero es que, además de esta utilidad, si se analiza desde un punto de vista matemático, qué conocimientos hay detrás de la medida de magnitudes, encontramos conceptos refinados y complejos que han sido incorporados a las matemáticas superiores de manera muy reciente. Nos referimos, evidentemente, a la teoría de la medida, de gran importancia en matemática (p. 222).

En la Unidad Didáctica se justifica por un lado que la enseñanza de las magnitudes de área y volumen es importante en el currículo y por otro lado sugiere que la enseñanza de magnitudes debe estar presente en distintos niveles educativos y preparar a los estudiantes desde temprana edad a reconocer las magnitudes y su importancia en la vida y la práctica.

Tratamiento de la medida

Al respecto, Barrantes, Barrantes y Zamora (2020) destacan la importancia de la medida y su historia, para analizar los distintos planes de estudio de cualquier país, en los que está presente el tema de la medida. Solamente hablando de las actividades que se realizan durante el transcurso de un día, se puede notar cómo la medida, su cálculo y la estimación están presentes en las actividades de la vida cotidiana.

Recalde (2009) explica que la medida está estrechamente relacionada con dos conceptos clave: magnitud y cantidad; cita a Aristóteles para señalar que una magnitud es una cantidad que puede ser medida, dado que "...la medida es, en efecto, aquello por medio lo cual se conoce la cantidad" (p. 104). Se refiere a que la magnitud de cualquier propiedad, puede ser medida o comparada y la cantidad es el valor numérico que representa la medida de una magnitud. Para el diseño de la Unidad Didáctica se tiene en cuenta esta teoría y su relación con la cantidad, lo que puede aportar a los estudiantes que los conceptos de área y volumen no son solo simples operaciones, sino que también tienen en cuenta la teoría de la medida y la importancia de enseñar esta misma de manera más comprensiva y no solo como una operación matemática.

Así mismo, Piaget y otros (1984 como se citó en Del Olmo et al., 1993) realizó diversas experiencias sobre conservación de cantidades continuas. En una de ellas se hace un estudio sobre conservación de líquidos que son trasvasados a recipientes con distintas formas, concluyendo, que a partir de los seis y medio a los ocho años el niño reconoce que la cantidad de líquido permanece constante, aunque se vierta en un recipiente con distinta forma. Si aceptamos los resultados esenciales de estas experiencias podemos argumentar que el niño a partir de dicha edad está en condiciones de reconocer cuando dos recipientes tienen la misma capacidad y por tanto, de adquirir el concepto de capacidad. Se quiere que los estudiantes estén listos cognitivamente para entender distintos conceptos como el de conservación, volumen y medida, así cuando se trabaje en esta etapa de desarrollo de las actividades, estén aptos para aprender sobre la relación entre el área y volumen.

Al respecto, Luelmo (2001, como refiere en Sevillano, 2014) en su trabajo de grado expresa que muchos estudios ponen de relieve la dificultad de la medida, como campo complejo donde confluyen operaciones mentales y lógicas, habilidades espaciales, gráficas, numéricas y estimaciones. También nos advierte sobre los riesgos de adelantar su formalización, como suele ser habitual: primar excesivamente la asignación numérica frente a la comparación de magnitudes; introducir rápidamente las unidades estándar, sin antes haber trabajado con una amplia variedad, entre ellas las antropométricas que serán en el futuro un preciso instrumento para estimar; usar casi de modo exclusivo fórmulas sobre mediciones directas en el caso de áreas, volúmenes y ángulos, por citar algunos ejemplos (del Olmo, 1989; Chamorro y otros, 1988; Castro y otros, 1989). En la Unidad Didáctica se quiere trabajar la medida de forma que se

tengan bases en la comprensión espacial y cognitiva, para poder ir construyendo el significado de las magnitudes a trabajar antes de aplicar una fórmula.

Relación área y volumen

De igual manera Del Olmo et al. (1993) destacan que, así como en el estudio del área, el estudio del volumen se inicia localizando los términos propios del lenguaje que expresan la cualidad de los cuerpos. Además, estos autores presentan una idea que plantea la relación entre capacidad y volumen, el primero asociado con el espacio vacío con la posibilidad de llenarse, mientras que el segundo el espacio ocupado por un objeto, por lo que hay que recurrir a la relación capacidad-volumen para comprender que las posiciones y formas de los objetos determinan estas magnitudes. Delimitar qué es capacidad y qué es volumen ayuda a evitar confusiones entre estos términos y que el docente guíe a los estudiantes de una manera correcta al explicar cada magnitud, en la Unidad Didáctica se trabajan ejercicios para reforzar estos conceptos teóricos con la práctica.

Igualmente, Guaquez y Velandia (2019) en su trabajo de grado explican que el concepto de volumen se empieza por la conservación y esta se logra entre los siete y once años, aunque hay otras opiniones que sugieren edades de 12 a 13 años. Por lo tanto, se sugiere trabajar en estos procesos desde los primeros grados de escolaridad, planteando diferentes situaciones. Pero antes de abordar actividades relacionadas con el proceso de conservación, es esencial construir el concepto de magnitud, específicamente en este caso, el volumen. Este paso implica que los estudiantes comprendan y sean capaces de manipular y comparar volúmenes de objetos. Después de que los estudiantes han experimentado la percepción y comparación de volúmenes, se busca desarrollar la capacidad de conservación. La conservación se refiere a la capacidad de ciertas características de los cuerpos para no cambiar, a pesar de manipulaciones o cambios, lo cual puede ser perceptivamente engañoso.

De esta manera Obando et al (2006) explica que son varias las dificultades que los estudiantes presentan a la hora de resolver situaciones que involucran la conservación de dicha magnitud, pero una de las más frecuentes se relaciona con la altura, ya que los estudiantes piensan que a mayor altura mayor volumen, sin prestar mayor atención al diámetro que se está trabajando. Esto quiere decir que los estudiantes no relacionan base y altura si no que solo lo que

ven a simple vista. Para trabajar dichas situaciones pueden o no ser expresados mediante fórmulas, también pueden estar limitados por diferentes tipos de superficies. Para comprender el volumen el currículo escolar primero realiza una aproximación sobre los cuerpos geométricos, en los que se puede distinguir tres dimensiones.

Por su parte, Nagles y Rivera (2021) en su trabajo de grado recomiendan que para superar las dificultades presentes en el proceso de aprendizaje y de enseñanza de la medida hay que considerar las relaciones entre las áreas y volúmenes con la cotidianidad, lo cual: “No parece tenerse en cuenta por muchos docentes de matemáticas, pues generalmente los estudiantes se ven sometidos a procesos de medición con instrumentos refinados y complejos, más aún se ven en tareas de conversión de unidades, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sus medidas y sin darse cuenta de la necesidad misma de medir”. Los docentes deben emplear distintas situaciones más didácticas y que estén relacionadas con la vida cotidiana para que los estudiantes puedan asimilar de manera más sencilla la relación entre área y volumen vinculados con experiencias cercanas.

Aproximación desde lo visual

Duval (2004, como se citó en Bonelo y Bahamón, 2015) expresa que se podría caer en el error de pensar que si los estudiantes tienen previamente las propiedades matemáticas de las figuras (definiciones, teoremas, axiomas, etc.) podrán trabajar sobre las figuras, entenderlas y construir ideas sobre ellas. Esta creencia marca un camino de dificultades para el estudiante, quien es el que por primera vez se relaciona con las ideas geométricas, a diferencia del maestro quien ya tiene una experiencia y una relación distinta con estas ideas.

Bonelo y Bahamón (2015) explican que el aprendizaje de las matemáticas y en particular el aprendizaje de la geometría constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como lo son la visualización, la construcción y el razonamiento. La particularidad del aprendizaje en geometría hace que estas actividades cognitivas que requieren de la utilización de sistemas de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes, centre su interés en la distinción del objeto matemático y su representación para darle sentido a su comprensión.

Por ello, estos autores explican la teoría de Duval (2004)

... que propone una organización para las actividades geométricas que se realizan en clase, agrupándolas en cuatro categorías de acuerdo con el papel que juegan las figuras y a la manera en la que, llevado el estudiante a generar un proceso cognitivo, se genera así un panorama de lo que se puede considerar maneras clásicas de hacer que los estudiantes entren en los conceptos geométricos. La clasificación de estas actividades geométricas se hace con base a cuatro criterios, los tres primeros tienen que ver directamente con las figuras; en estos es necesario separar dos procesos cognitivos que habitualmente operan unidos, estos son: la identificación perceptiva de las formas visuales de una “figura-dibujo” y la identificación interpretativa de los objetos y de las situaciones representadas. El cuarto criterio se relaciona con la manera en la que se necesita o no, la utilización de figuras y la toma en cuenta de las propiedades geométricas representadas o implícitamente manipuladas. Es entonces de esta manera que al dar una clara caracterización sobre las formas de visualización y las formas en que se trabaja cognitivamente en geometría (p. 23).

Las cuatro entradas descritas anteriormente (botánico, agrimensor geómetra, constructor e inventor manitas) no son consecutivas, para el estudio de la geometría en la escuela. La primera, consiste principalmente en reconocer perceptivamente las formas elementales usadas en la geometría plana elemental, llevando a que las propiedades geométricas sean características visuales. Se trata de encontrar diferencias entre formas que representan similitudes (un cuadrado y un rectángulo, por ejemplo); la segunda, plantea la necesidad de aprender a medir las longitudes sobre un terreno en el suelo, o la distancia entre dos puntos marcados y de transportarlas sobre un dibujo que adquiere el estatuto plano; la tercera, vincula la actividad de exploración a partir del uso de un instrumento o herramienta que guía el trazo del estudiante, esta noción le da al estudiante la oportunidad de construir una figura que represente propiedades geométricas; finalmente, la cuarta entrada propone actividades que exigen la capacidad para la reconstrucción visual de las formas elementales de una figura, situación que permite obtener la reconfiguración o la figura demandada mediante la utilización heurísticas de las figuras.

Las anteriores entradas pretenden fortalecer las destrezas matemáticas asociadas con el trabajo icónico y el no icónico. Este estudio busca enfocarse en lo no icónico que es donde el autor trabaja la visualización y el razonamiento. Estas cuatro entradas clásicas a los procesos cognitivos de las representaciones geométricas definen una perspectiva particular de ver las

figuras, al mismo tiempo, hacen una agrupación a la manera de aproximarnos al entendimiento de las propiedades geométricas a través de diversas tareas.

Con estos estudios se busca identificar cuál ha sido el tratamiento que se le ha dado a la problemática de estudio a nivel internacional, nacional y local. Así como, reconocer algunos alcances que permitan diseñar una unidad didáctica que relacione el área y volumen en propuestas de enseñanza centradas en la construcción de las magnitudes de área y de volumen más que en la cuantificación o el cálculo a partir de la aplicación de fórmulas.

Varios de los referentes descritos anteriormente se consideran para el diseño de la Unidad Didáctica, así entonces de Chamorro (1991) se parte de la comprensión de las magnitudes antes de introducir fórmulas, lo cual fundamenta el enfoque de la Unidad Didáctica, que busca que los profesores al desarrollar la Unidad construyan con los estudiantes gradualmente el concepto de área y volumen; al respecto, Del Olmo et al. (1993) plantean la necesidad de partir de la percepción y comparación de cualidades medibles, utilizando estimaciones y manipulaciones antes de aplicar fórmulas, condición que se tiene en cuenta en las actividades de la propuesta educativa; por su parte, Duval (2004) explica que la visualización es esencial para que los estudiantes desarrollen el pensamiento espacial, por ello, todas las actividades propuestas consideran la visualización como una habilidad necesaria para comprender la relación entre área y volumen; Finalmente, Nagles y Rivera (2021) subrayan la importancia de conectar estos conceptos de magnitud de área y volumen con situaciones cotidianas, como se muestra en todas las situaciones planteadas que favorecen el aprendizaje significativo y contextualizado.

Capítulo I. Planteamiento del Problema

Desde la antigüedad la geometría se ha constituido en un referente y una herramienta básica para interpretar el mundo y los objetos que lo componen, así mismo, se ha usado como un instrumento para entender y desarrollar diversas disciplinas que modelan el espacio que percibimos, trabajando con objetos ideales que componen el entorno y sus espacios. Hoy en día en el currículo escolar de matemáticas en Colombia se presenta el desarrollo del pensamiento espacial y el pensamiento métrico a partir del cálculo, a través de fórmulas y números, así como la conversión de unidades de medida, entre otras. Esta práctica impide comprender, justificar y utilizar (que) en la resolución de problemas en situaciones relativas a la relación entre área y volumen, a partir de las dimensiones de figuras y sólidos geométricos que posibilitan ser compuestas y descompuestas en partes.

Enseñar y comprender las ideas asociadas a la geometría y la magnitud en la escuela no ha sido sencillo, ya que muchos estudiantes muestran limitaciones como: dificultad para comprender la relación entre magnitudes (para nuestro caso de área y de volumen), escasa experiencia resolviendo problemas y razonando en situaciones que posibiliten dar sentido y uso a los conceptos, nociones y aplicaciones métricas y geométricas, mecanizar y replicar fórmulas para resolver problemas de medida, sin razonar sobre cómo se interpretan las magnitudes en cuerpos geométricos.

Seguidamente, se describe el problema relacionado con la comprensión, sentido y usos de área y volumen, a partir de sus significados y aplicaciones desde una perspectiva de relación funcional.

1.1 El problema de estudio

En este estudio se asume el sentido espacial como un modo intuitivo de entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y sus representaciones, que implica emplear relaciones y conceptos asociados a los pensamientos espacial y métrico de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas. El desarrollo de este sentido posibilita que los estudiantes comprendan y desarrollen habilidades de pensamiento en relación con los desarrollos espaciales, para comprender, usar y transformar los objetos en el plano y el espacio. Al comprender y aplicar las

relaciones y conceptos asociados a los pensamientos espacial y métrico se puede modelar el espacio que percibimos, esto deja claro que basarse únicamente en medidas, no es una razón suficiente para justificar que se está aprendiendo geometría, de acuerdo con los procesos enseñanza y aprendizaje del concepto de área relacionados con los pensamientos métrico y espacial (MEN, 1998).

Las actividades de la vida diaria asociadas con las compras en el supermercado, con la cocina, con los deportes, con la lectura de mapas, con la construcción, etc., acercan a los escolares a la medición y les permiten desarrollar muchos conceptos y destrezas matemáticas como la del uso de la estimación, mediciones más precisas, uso correcto de las unidades métricas. La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica.

Por otra parte, según el MEN (1998) “No es extraño, en nuestro medio, introducir a los niños y a las niñas en el mundo de la medida con instrumentos refinados y complejos descuidando la construcción de la magnitud objeto de la medición y la comprensión y el desarrollo de procesos de medición cuya culminación sería precisamente aquello que hemos denunciado como prematuro” (p. 41). Esto quiere decir, que en el entorno o contexto en el que se encuentran los estudiantes, es común que se enfrenten desde temprana edad a instrumentos de medición avanzados y complicados, que dificultan el entendimiento y construcción de la magnitud que se está referenciando. En otras palabras, los estudiantes pueden estar utilizando herramientas sofisticadas sin tener una comprensión adecuada de la cantidad o propiedad que están midiendo, ya que no se está dando suficiente importancia a la comprensión y desarrollo de los procesos de medición y esto implica que se está llegando a una asignación numérica en el proceso de medición de manera prematura.

Osborne (1976 como se citó en MEN, 1998), expresa que “...en las escuelas actuales, gran parte de lo que se aprende sobre medición es de naturaleza puramente incidental. Los conceptos de medida aparecen en situaciones cuyo propósito es enseñar y aprender sobre el número. Se supone que la medida es intuitiva y está lo suficientemente poseída y comprendida por los alumnos como para servir de marco intuitivo en cuyo seno explicar las operaciones

aritméticas. Tal presunción ha de ser puesta en tela de juicio. Además, la naturaleza de la forma en que los niños aprenden a medir y se valen de medidas en el contexto de esta transferencia exige cuidadosa atención” (p. 41).

En la actualidad la comprensión y uso de habilidades asociadas a los desarrollos métricos y geométricos se han vuelto necesarias para razonar, resolver y justificar situaciones cotidianas como el envasado de productos, la cantidad de líquido a utilizar en un laboratorio, las formas de los recipientes para optimizar algunos productos líquidos, entre otros. Al respecto, Moreno, Gil y Montoro (2015) afirman que *“Medir es una de las “actividades universales”, junto con contar, localizar, diseñar, jugar y explicar, comunes a todo grupo social”*. Así entonces, el desarrollo de la habilidad de medir debe considerar la construcción personal de la magnitud a través de tareas que relacionan la motivación del escolar a partir de estrategias didácticas que involucren objetos matemáticos y geométricos en el contexto sociocultural, para favorecer la comprensión de estos desarrollos.

Al respecto, Turégano (1986) menciona que las magnitudes y medidas en las aulas de matemáticas, deben aproximarse a través de cuerdas, varillas, recipientes diversos, balanzas estudiantes, cintas de sastre, cronómetros etc., que permitan acercar de un modo más eficaz a “lo que llamamos medir”. Es curioso y a la vez rigurosamente cierto, que la mayoría de las medidas las hacen los estudiantes de modo teórico; es decir, es como aprender a tocar guitarra sin guitarra. Esto significa que, al aprender teóricamente magnitudes y medidas sin apoyo de materiales o herramientas concretas o instrumentos, se puede limitar el sentido y uso que los estudiantes requieren desarrollar mediante la experiencia y la comprensión práctica que implica medir y resolver problemas utilizando las medidas.

El problema asociado con la construcción de magnitudes por parte de los estudiantes se relaciona con las estrategias y tareas que se desarrollan en el proceso de enseñanza, debido a que no se construyen caminos para fundamentar la pertinencia y eficacia de algunas fórmulas para calcular áreas, sino que se presentan como mecanismos para medir las áreas y volúmenes. Según Del Olmo et al. (1993) los estudiantes prefieren utilizar estrategias asociadas al conteo de patrones o reiteración de modelos que cubren un área. Es decir, los estudiantes utilizan estrategias ligadas a sus procesos de conteo mientras desarrollan la comprensión de estrategias más refinadas para calcular las áreas y volúmenes con exactitud. Así mismo, se requieren

actividades prácticas que favorezcan el sentido y uso de esta habilidad (percepción y medición) como parte de las actividades o materiales didácticos (materiales no estructurados) que sirven como herramienta para mediar el paso del conteo a la medida y para despertar el interés de estos.

Debido a ello, es complejo para un niño que se le presenten actividades sobre el área y volumen basadas en fórmulas y algoritmos mecánicos que limitan el reconocimiento de aspectos como: atributos comparables, variables, dependencias, co-determinaciones en áreas y volúmenes, ya que

...la medida ha estado fuertemente ligada a la numeración decimal, y el área de las superficies no se mide efectivamente, si no que se calcula utilizando diferentes recursos como recubrimientos y mediante expresiones algebraicas. Como resultado de este tipo de enseñanza, muchos estudiantes que terminan la educación primaria tienen una imagen primitiva del área, generalmente ligada a una fórmula, lo que les impide admitir la congruencia de superficies de distinta forma, así como poder determinar el área de superficies no rectilineamente limitadas. (Turégano, 1986, p, 10).

En consecuencia, se busca determinar algunos elementos epistemológicos, fenomenológicos, curriculares y didácticos que le permitan al profesor diseñar propuestas curriculares que favorezcan el sentido, uso y relación del área y volumen, para la comprensión de los estudiantes. De esta forma, se espera estimular el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el aprendizaje personal de las medidas y el uso de estrategias de medición que no se basen solo en números y fórmulas.

Con base en estos argumentos para la comprensión de la relación entre las magnitudes de área y de volumen descritas anteriormente, se plantea la siguiente pregunta problema ***¿Qué conocimientos didácticos se desarrollan a partir del diseño de una Unidad Didáctica que promueva la construcción y relación entre área y volumen, a través de la resolución de problemas sobre situaciones de medida en el grado sexto de básica secundaria?***

1.2 Objetivos

General

Caracterizar los conocimientos didácticos que se desarrollan a partir del diseño de una Unidad Didáctica que integre fenómenos que promuevan la resolución de problemas sobre la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.

Objetivos específicos

1. Fundamentar un modelo local de Análisis Didáctico en relación con dimensiones epistemológicas, fenomenológicas, matemáticas y curriculares, sobre la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.
2. Diseñar una Unidad Didáctica basada en la resolución de problemas para favorecer la comprensión sobre la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.
3. Analizar retrospectivamente las comprensiones y limitaciones que se generen durante el diseño de una Unidad didáctica que articule la resolución de problemas y el razonamiento para la enseñanza y comprensión de la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.

1.3 Justificación

Considerando que este trabajo de grado a partir de un diseño que pretende generar una Unidad Didáctica que promueva la enseñanza y el aprendizaje con sentido a través de la articulación entre la resolución de problemas sobre la relación entre área y volumen. Se describen a continuación algunos argumentos que evidencian la importancia de comprender estas estructuras conceptuales y sus relaciones para desarrollar propuestas significativas que posibiliten razonar y resolver problemas en situaciones de la escuela, así como en el mundo real.

El sentido de la medida supone un proceso complejo que se inicia con la percepción y comparación de cualidades medibles y se completa con técnicas de medición y estrategias de estimación en situaciones contextualizadas. En la magnitud área, la importancia concedida al uso de fórmulas, incluso en los niveles tempranos, obstaculiza el desarrollo del sentido de la medida en los estudiantes, así como limita la comprensión de las magnitudes por parte de estos. Codina,

Romero y Abellan (2017) a través de un experimento de enseñanza llevado a cabo en una clase de cuarto de Educación Primaria, exploran potencialidades y dificultades que emergen al implementar una secuencia didáctica para la introducción de la magnitud del área. En las conclusiones de este estudio se reconoce que los estudiantes trabajan de forma colaborativa resolviendo tareas contextualizadas encaminadas a promover la comprensión de las principales unidades de área y de las relaciones entre ellas.

La estimación como habilidad mental operativa vinculada a la resolución de situaciones de medición juega un papel fundamental para comprender la medida sin ayuda de instrumentos. Al respecto, Del Olmo et al. (1993) expresan que la estimación es la medida “a ojo” de una determinada cualidad medible de un objeto, que sería como una “conjetura” pero que puede ser educada, pero que no se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo o que los adultos y profesores no están educados ni tienen desarrollada esta habilidad. Además, (Corberán, 1996) en su tesis doctoral explica que los errores cometidos por los alumnos con el uso de fórmulas para calcular áreas son usuales, así como su dificultad para saber utilizar en áreas de superficies. También explica que los alumnos que han memorizado las fórmulas para calcular áreas tienen grandes dificultades para aplicarlas en la resolución de problemas.

En la educación matemática la enseñanza de áreas y volúmenes es un tema importante y fundamental para el desarrollo de habilidades y destrezas que permitan generar sentido de las matemáticas en diferentes situaciones tanto académicas, personales y en general del mundo real. El desarrollo de la geometría a partir de creencias epistemológicas y didácticas que centran la atención en la medición a partir del cálculo numérico, descuidando el proceso histórico que llevó a la construcción de la magnitud y la reflexión sobre unos procesos de visualización, conservación y estimación de la magnitud, limita el significado y sentido que los estudiantes desarrollan al construir la medición a partir de razonamientos de utilidad y de estimación empleando diferentes estrategias de conteo de patrones no estandarizados.

Al revisar las expectativas de aprendizaje se identifica que el currículo propuesto para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia (MEN, 2006) proponen el desarrollo del pensamiento métrico a partir de situaciones problema que posibiliten acciones para: la construcción de los conceptos de cada magnitud, la comprensión de los procesos de

conservación de magnitudes, la estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo y lo discreto”, la apreciación del rango de las magnitudes, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos, la diferencia entre la unidad y el patrón de medida, la asignación numérica, y el papel del trasfondo social de la medición, mediante el uso significativo de sistemas de medidas. Así entonces, en este estudio se pretende abordar la reflexión-práctica sobre la construcción de los conceptos sobre área y volumen a partir de la relación entre estas magnitudes al considerar diferentes objetos geométricos. Asimismo, los referentes curriculares (MEN, 2006) expresan que el desarrollo del pensamiento métrico está relacionado con actividades de la cotidianidad que todo sujeto social requiere al realizar compras, preparar recetas, practicar deportes, interpretar mapas, realizar construcciones, empaclar objetos, entre otras múltiples situaciones que aproximan a los ciudadanos a desarrollar habilidades de medición y estimación de magnitudes.

Para el desarrollo del pensamiento métrico y sistemas de medidas en el ciclo educativo comprendido entre el grado sexto y séptimo los referentes curriculares (MEN, 2006) proponen algunas expectativas de aprendizaje referidas al uso de técnicas y herramientas que favorezcan la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas establecidas, calcular áreas y volúmenes mediante la composición y descomposición de figuras y cuerpos, así como, resolver y formular problemas que solicitan emplear técnicas de estimación. Estas destrezas asociadas al sentido y significado de las magnitudes (área y volumen) a partir situaciones que requieran de la resolución, formulación y razonamiento sobre estas magnitudes y su relación son las que se pretenden analizar críticamente desde los instrumentos, conocimientos y propuestas orquestadas desde este trabajo de grado.

En conclusión, en este trabajo se quiere abordar la relación entre el área y volumen a través de un diseño didáctico experimental que facilite al estudiante comprender de manera práctica el uso y relación entre el área y volumen para generar reflexiones críticas que los profesores que orientan las matemáticas pueden considerar para el desarrollo de su quehacer profesional. Asimismo, con el diseño de la Unidad Didáctica se pretende reflexionar sobre las situaciones y recursos didácticos que los profesores pueden gestionar para fomentar la innovación práctica desde experiencias formativas distintas a la tradicional que reducen la comprensión de las medidas al uso de algoritmos y fórmulas para determinar una cantidad

“exacta” de magnitud, cuando lo que se solicita es la construcción con sentido de las magnitudes a partir de sus propiedades y relaciones con las cualidades de figuras y objetos geométricos.

Capítulo II - Marco Teórico

En la siguiente sección, se presentan los conceptos básicos que fundamentan la propuesta de Modelo local del análisis didáctico, entendido como un dispositivo que posibilita orquestar los conocimientos didácticos identificados a través de los organizadores propios del Análisis Didáctico que sustentan la propuesta concretada en la Unidad didáctica entendida aquí como un dispositivo de concreción, reflexión-crítica y formación de profesores que orientan los aprendizajes y comprensiones del área de matemáticas, específicamente en la relación entre el área y volumen desde la base de la comprensión basada en la resolución de problemas y el razonamiento matemático.

2.1 Formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas

“La formación de profesores deberá ser entendida como un proceso a través del cual un sujeto se hace profesional en un campo disciplinar específico: la Educación Matemática” (MEN, 1998, p. 98).

Ser profesor de matemáticas no significa únicamente tener conocimientos matemáticos, sino que también requiere de una preparación profesional e integral que aborde diferentes acciones entre las que se destacan: evidenciar un conocimiento didáctico del contenido en su práctica, generar una comprensión sobre el currículo escolar, reconocer las formas de aprendizajes de sus estudiantes, diseñar propuestas de enseñanza acordes al contexto escolar, reconocer las situaciones y entornos sociales que favorecen la comprensión de los contenidos escolares, entre otros. De acuerdo con Bedoya (2011) estos conocimientos contribuyen significativamente a una formación necesaria y adecuada, y se adquieren a través de un proceso complejo, cuya etapa inicial pasa por el estudio y por la construcción de significados básicos y fundamentales de diferentes tipos de conocimientos de carácter multi y pluridisciplinar por parte tanto de los futuros profesores de matemáticas, como de los profesores en ejercicio.

La formación del profesor va ligada a su trabajo y esta formación nunca está completa, ya que siempre debe estar en constante actualización, para brindar una formación adecuada y contextualizada a sus estudiantes. Por ello es importante que los profesores consideren su enfoque educativo incluyendo actividades que sean adicionales a la matemática.

Tal como explica Hidalgo, S. G. (2016) la importancia de la formación permanente radica en que este proceso conduce al mejoramiento de su formación y práctica profesional como docente de matemáticas. Esto es a veces difícilmente entendible por profesores de matemáticas (que pueden pasarse años y años sin conocer mejoras en su profesión, creyendo que ya han llegado al máximo de formación posible), pero sobre todo por las instituciones encargadas de la planificación de la educación (matemática), que no consideran que sea necesario hacer nada por mejorarla.

De esta manera, no confundir la formación en matemáticas con la formación en profesor de matemáticas, ya que la formación del profesor de matemáticas es un proceso constante que abarca tanto la preparación matemática, la didáctica, historia y otros aspectos como el currículo relacionado con las competencias profesionales. Al respecto Hidalgo. (2016) menciona que un profesor de matemáticas en un determinado centro escolar y en un sistema (público o privado) de enseñanza, exigirá conocer adecuadamente estos procesos mencionados y el currículo correspondiente, sobre todo los objetivos formativos que se pretenden y con ellos como referente construir el currículo para la formación en matemáticas.

En conclusión, se espera que el profesor de matemáticas desarrolle a través de su proceso y experiencia formativa unos conocimientos didácticos, matemáticos, reflexivos, críticos y autónomos que caracterizan su práctica profesional. Estos conocimientos didácticos deberán situarse en el dominio sobre las matemáticas escolares, su didáctica y pedagogía. Para ello, se requiere que el plan formativo centrado en estos conocimientos esté integrado con las cualidades mencionadas a partir de los conocimientos locales del objeto matemático de enseñanza, saberes y competencias sobre los siguientes tópicos: I) Análisis didáctico y los organizadores del currículo, II) Modelo local de análisis didáctico y III) diseño de Unidades Didácticas.

2.2 Análisis didáctico y organizadores del currículo

El Análisis Didáctico se entiende en este estudio como una metodología de investigación, formación y reflexión crítica que tiene como finalidad indagar acerca de los diferentes componentes que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, Bedoya (2011) describe el Análisis didáctico como un constructo pluridisciplinar que se basa en la descripción de la manera de abordar de forma ideal la realización de actividades de diseño

curricular a nivel local. Se caracteriza como proceso y resultado de la articulación y concreción en la práctica de las competencias profesionales relacionadas con los conocimientos disciplinares, curriculares, epistemológicos, cognitivos e instruccionales, o en pocas palabras, los conocimientos didácticos referidos anteriormente.

Para Bedoya (2011) el análisis didáctico se compone por los siguientes conocimientos: (a). Tiene un conocimiento disciplinar de referencia (el conocimiento didáctico o de la disciplina Didáctica de las Matemáticas); (b). Tiene una utilidad práctica (diseño, puesta en práctica y evaluación del currículo y de las actividades, propuestas y unidades didácticas); (c). Su puesta en juego se enmarca en una estructura analítica, la del análisis didáctico (AD), que es la expresión local o micro del diseño curricular global y es el medio gracias al cual es posible pasar de diseños centrados en una secuenciación de contenidos a diseños parciales que tienen en cuenta distintas dimensiones.

Lo anterior, indica que el Análisis Didáctico funciona como una herramienta que centra su atención en los desarrollos curriculares para permitir a los educadores matemáticos diseñar y desarrollar propuestas curriculares y didácticas que favorezcan el diseño, la innovación y la formación profesional de los educadores de matemáticas. Así entonces, (Rico, 1997; 1998 como se citó en Bedoya, 2011) explica que desde la concepción de Análisis Didáctico se concibe el currículo como un conjunto de agentes, conocimientos y actividades que estructuran un plan de formación y desarrollo, el cual contempla, explícitamente los siguientes elementos:

1. El conjunto de personas a formar o formarse (profesores y alumnos).
2. El tipo de formación que se quiere proporcionar.
3. La institución social en la que se lleva a cabo la formación.
4. Las necesidades que se quieren cubrir y
5. Los mecanismos de control y valoración.

En particular, las funciones del currículo de matemáticas deben consistir en ofrecer propuestas concretas y sistemáticas sobre:

- Modos de entender, caracterizar y trabajar con el conocimiento matemático.

- Concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas: ¿Cómo se produce? ¿Cómo aprenden los profesores y alumnos?
- Concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas: ¿En qué consiste la enseñanza de la matemática?
- Maneras de evaluar (valorar y controlar) los conocimientos y procesos de los aprendizajes alcanzados.

Bajo esta concepción innovadora del currículo se infiere que para que el futuro profesor obtenga una formación profesional adecuada que le permita concretar las funciones del currículo y realizar los diferentes tipos de análisis y actividades didácticas que su labor profesional le exigen, la preparación debe hacerse de manera sistémica, estructurada y continuada, a través de planes de formación rigurosos y debidamente diseñados, planificados, implementados y evaluados empíricamente.

Los organizadores del currículo son aquellos criterios a los que acude un profesor de matemáticas para planificar y concretar sus propuestas de enseñanza. De acuerdo con Bedoya (2011) refiere que los organizadores del currículo son sistemas de conocimientos que fundamentan los significados y usos de los conocimientos matemáticos escolares. La propuesta de los organizadores del currículo de matemáticas proporciona a la comunidad de educadores matemáticos un marco teórico y metodológico más amplio en su generalidad, pero específico en los aspectos profesionales relacionados con la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas.

Los organizadores del currículo de matemáticas se enmarcan en una estructura analítica, la del análisis didáctico, que es la expresión local o micro del diseño curricular global y es el medio gracias al cual es posible pasar de diseños en una secuenciación de contenidos a diseños que tienen en cuenta distintas dimensiones. De acuerdo con lo anterior, los organizadores del currículo juegan un papel fundamental en el análisis didáctico como propuesta de formación, ya que garantizan un marco teórico y metodológico más amplio para el diseño y desarrollo de propuestas curriculares y didácticas con sentido y significado. “La propuesta de los organizadores proporciona a la comunidad de educadores matemáticos un marco teórico y metodológico más amplio en su generalidad, pero específico en los aspectos profesionales

relacionados con la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas” (Bedoya, 2011, p. 5). Dichos organizadores del currículo se articulan en este estudio a través de un modelo local de Análisis Didáctico que se concreta y sintetiza a partir de un contexto que vincula los elementos y conocimientos sistémicos descritos en este apartado.

2.2.1 Modelo local de análisis didáctico

El modelo local de análisis didáctico es una propuesta que se enfoca en la concreción del currículo en un contexto y contenido específico, con el objetivo de diseñar y desarrollar propuestas curriculares y didácticas más efectivas. Este modelo se basa en la noción de "organizadores del currículo de matemáticas", que son sistemas de conocimientos que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos escolares. Existen cuatro organizadores didácticos que estructuran el modelo local de análisis didáctico a partir de conocimientos especializados que sustentan las propuestas curriculares que se evidencian en el diseño, la formación y la práctica del profesor de matemáticas, ellos son:

- ***Análisis conceptual o de contenido:*** vincula los conocimientos disciplinares, epistemológicos, fenomenológicos e históricos de la estructura formal del contenido matemático escolar, de sus definiciones, representaciones y aplicaciones. En este organizador se destacan conceptos, hechos, procedimientos y propiedades que posibilitan comprender la estructura conceptual, que para este estudio está asociada con la relación entre el área y volumen que se tratarán a continuación.
- ***Análisis cognitivo:*** se enfoca en las competencias, errores y dificultades que pueden presentarse en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

El análisis cognitivo se refiere a guiar y comprender hasta qué punto se deben aprender ciertos conocimientos sobre un tema específico. Para llevar a cabo este proceso, se utilizan tres categorías.

La primera categoría se refiere a lo que se espera del aprendizaje de los estudiantes y sobre qué tanto están abordando los temas, esto con el fin de determinar si se aprende a corto o largo plazo para poder saber si su nivel de aprendizaje va con lo establecido por el sistema educativo. Y que en cada nivel educativo se requiere identificar al menos sus

prioridades cognitivas, determinar su objetivo y alcance, y organizar y relacionar todo esto con los temas.

La segunda categoría se centra en las dificultades de aprendizaje, ya sean teóricas o experimentales, conocidas o desconocidas, y en los errores que se puedan presentar en estas prácticas. También se analizan los errores que puedan surgir en el aprendizaje de los estudiantes y cómo superarlo.

La tercera categoría se enfoca en las tareas que retan al estudiante a responder distintas preguntas con el fin de que se logre aprender de los errores. Las tareas matemáticas relacionadas con un tema y su relación con los contenidos y lo que se espera de ellas.

En este sentido el análisis cognitivo se refiere a la organización y comprensión de las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, las dificultades de aprendizaje que pueden surgir y los problemas que puedan surgir de las tareas que se les presentan. Este análisis busca determinar con estas categorías lo que requiere investigar y qué tanto se debe aprender y con qué propósito.

- ***Análisis curricular:*** se enfoca en las concreciones curriculares y el modelo didáctico pedagógico.

El análisis curricular se refiere al proceso de examinar y evaluar el currículo educativo, es decir, los planes de estudio, los objetivos de aprendizaje, los contenidos, las metodologías y las evaluaciones utilizadas en un sistema educativo o institución. El análisis curricular busca identificar fortalezas y debilidades en el currículo existente, así como proponer mejoras y ajustes para garantizar una educación de calidad y relevante para los estudiantes. Este análisis puede incluir la revisión de estándares educativos, la alineación con las necesidades y demandas de la sociedad, y la consideración de enfoques pedagógicos y teorías de aprendizaje.

Todos estos conocimientos se interrelacionan y se conectan con los diferentes componentes del análisis didáctico y los organizadores del currículo, para lograr una planificación curricular más significativa y contextualizada. Según Bedoya (2011) asimismo, estas concreciones permiten el diseño y experimentación de la Unidad didáctica que se presenta a continuación.

2.2.2 Unidad didáctica

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula se desarrolla a través de unidades de formación y de trabajo, estas unidades de trabajo se denominan Unidades didácticas. Al respecto, Rico y Segovia (2001) plantean que una Unidad didáctica es una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado. Las unidades didácticas deben contener los instrumentos de planificación en su grado más concreto para poder detectar cómo se va produciendo el proceso de enseñanza y aprendizaje para facilitar la retroalimentación del profesor y los estudiantes.

La Unidad didáctica se refiere a la organización de sesiones de enseñanza centradas en un tema específico de matemáticas en el ámbito escolar, con el objetivo de alcanzar ciertos niveles de comprensión predeterminados. Referentes como (Bedoya, 2011; Rico y Segovia. 2001) ponen de manifiesto una estructura organizativa de una Unidad didáctica. Al respecto, sugieren la siguiente estructura:

- Título.
- Presentación y descripción general (Tipo de actividad, temporalización, etc.).
- Análisis curricular (concreciones curriculares, modelo didáctico pedagógico).
- Objetivos (generales y específicos).
- Recursos (humanos, bibliográficos, tecnológicos, etc.)
- Análisis didáctico de contenido.
- Análisis cognitivo (competencias, errores y dificultades).
- Análisis de instrucción: Orientaciones didácticas (basadas en el modelo didáctico pedagógico).
- Secuencia de actividades (Actividades de introducción, motivación y diagnóstico; actividades de desarrollo; actividades de evaluación y actividades de apoyo y ampliación).
- Reflexión autocrítica y evaluación de la unidad.
- Referencias bibliográficas.

La Unidad Didáctica diseñada en este estudio pretende articular los usos y significados asociados con el área y volumen, así como sus relaciones a partir de un enfoque de enseñanza y comprensión basado en la resolución de problemas y el razonamiento matemático.

2.3 Enfoque para la enseñanza y comprensión basado en la resolución de problemas

La resolución de problemas en la Educación es un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático en los niños, a partir de situaciones problema en diferentes contextos. Al respecto, Rodríguez y Gómez (2016) refieren que la resolución de problemas significativos contribuye a desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior y descubrir un repertorio de estrategias que preparan al estudiante para resolver nuevos problemas. Así entonces los niños desarrollan comprensión de conceptos matemáticos al participar de manera activa en la resolución de problemas.

En este sentido, (Polya, 1981 como se citó en Pochulu y Rodriguez, 2015) define que un problema es “...significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (p. 154). Dentro de este marco, el docente invita a los estudiantes a reflexionar sobre cómo introducir la resolución de problemas en el contexto de la enseñanza de las matemáticas en la educación y la importancia del desarrollo de las habilidades matemáticas a través de la resolución de problemas.

Además, los futuros maestros tienen la oportunidad de proponer e inventar problemas tanto aislados como en el marco de la realización de unidades didácticas, ya que es una disposición matemática que los profesores han de cultivar y desarrollar.



Figura 1. Mapa conceptual Análisis Didáctico

2.4 Visualización en la enseñanza de la geometría

Según Duval (2004) la visualización es el primer proceso cognitivo asociado a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, al estudiar la visualización se va a entender el camino de los sentidos y la percepción, así como la diferencia entre los problemas espaciales y geométricos. La visualización ayuda a los escolares a distinguir entre problemas espaciales, que impliquen la percepción de objetos y problemas geométricos, que impliquen la comprensión de propiedades.

Al respecto, Duval (2004) destaca dos formas de ver, relacionadas con la visualización: la visualización icónica y la no icónica. La primera se refiere al observar las figuras como un todo, lo que puede dificultar la comprensión de las figuras y sus propiedades. En relación con la

segunda, implica la capacidad de percibir las propiedades individuales de las figuras y su relación con otras propiedades.

La visualización promueve en los estudiantes el razonamiento para comprender conceptos de una manera más fácil, permitiendo distinguir entre problemas espaciales y geométricos, también permite que los estudiantes analicen las propiedades de las figuras geométricas y las relaciones que puedan tener. Con esto, los estudiantes pueden usar la visualización para desarrollar habilidades que les permitan diferenciar distintos tipos de problemas geométricos y mejorar su capacidad para poder resolverlos.

2.5 Relación de las magnitudes de área y volumen

Según Del Olmo et al. (1993) la definición de magnitud se asocia con un conjunto que tiene una relación de orden, en el que se emplean operaciones de suma y producto que cumplen propiedades como: asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y distributiva, además, menciona que el producto es cancelativo y se define el producto por un número natural. Así entonces, se concibe la magnitud como una propiedad física (abstracta de los objetos) que posibilita establecer operaciones de estructura aditiva y multiplicativa (estructura algebraica), así como la cuantificación de patrones de medida que requiere del uso de técnicas, instrumentos o expresiones que posibiliten comparar dicha propiedad.

En la cuantificación del área y según Del Olmo et al. (1993) se plantea el área como una cualidad de los objetos, que puede cuantificarse y compararse. Al respecto, “...algunos autores que establecen diferencias entre área y superficie, entendiendo superficie para designar dicha cualidad y área para su medida” (Del Olmo et al., 1993, p. 15). Esto quiere decir, que cuando se habla de magnitud nos referimos al tamaño de un objeto en términos de su cuantificación utilizando unidades de medida. En este sentido, se puede decir que la magnitud de área se refiere a la característica de un objeto y también para describir su medida.

El volumen se entiende como una capacidad que expresa la medida del tamaño de cuerpos. Además, el volumen y capacidad aparecerán como sinónimos, cuando usualmente se suele entender el volumen como espacio ocupado y la capacidad como espacio vacío con posibilidad de ser llenado, según Del Olmo et al. (1993). Esto quiere decir que el volumen es el espacio de un objeto que está determinado por la unión de diferentes superficies o caras, mientras que la capacidad es un espacio que permite ser llenado.

Para entender la relación entre el área y volumen se puede pensar en cómo se construye el volumen a partir de áreas. La relación entre estas dos magnitudes se puede dar según su altura, teniendo en cuenta el área de sus caras con su altura. Esto quiere decir que encontrar el volumen de un cuerpo geométrico implica considerar el área de sus caras se relacionan con su altura. Esta relación área-volumen ayuda a entender cómo cambia un objeto desde distintas perspectivas.

Capítulo III - Marco Metodológico

El diseño metodológico que se presenta a continuación se basa en el ciclo de análisis didáctico como metodología de investigación para el diseño experimental de una unidad didáctica que posibilite articular un modelo local de análisis didáctico y los organizadores curriculares de este, en relación con el área y el volumen a partir de un enfoque de enseñanza y comprensión apoyado en la resolución de problemas y el razonamiento matemático descritos en el marco teórico.

3.1 El Análisis didáctico como metodología de investigación

El análisis didáctico como una metodología de investigación se basa en la articulación de diferentes análisis, como el análisis conceptual y de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo; estos análisis se realizan en un ciclo de manera secuencial y se retroalimentan entre sí, siguiendo un proceso que permite profundizar en el estudio de los contenidos matemáticos escolares y su enseñanza.

Esta metodología de investigación desglosa el contenido matemático en partes simples para su estudio y comprensión, y luego se sintetizan los resultados obtenidos para organizar y planificar la enseñanza de dicho contenido Rico (2013). Además, se utiliza un sistema de categorías específicas para el análisis de contenido que permiten identificar y comprender los diferentes aspectos y significados de los conceptos matemáticos. La metodología de investigación del análisis didáctico se caracteriza por su método, repetitivo y basado en la articulación de diferentes análisis, con el objetivo de profundizar en el estudio de los contenidos matemáticos escolares y su enseñanza.

3.1.1 Modelo local de Análisis Didáctico

A continuación, se presentan algunas consideraciones que se toman como punto de partida en cada uno de los organizadores curriculares descritos en el Marco teórico de este estudio y que fundamentan el diseño, gestión práctica y reflexiva sobre el desarrollo del sentido, significado y comprensión de la relación entre el área y el volumen.

3.1.1.1. Análisis de contenido.

Para profundizar en el análisis de contenido sobre la relación de área y volumen de la propuesta que se presenta en este estudio, se requiere identificar los hechos, conceptos y estructuras sobre los distintos tipos de contenido. En la siguiente tabla se destacan algunas nociones, conceptos, habilidades y propiedades de las magnitudes de área y volumen.

Tabla 1. Clasificación cognitiva del contenido de área y volumen

Hechos Atributos medibles, sólidos y polígonos, medir, patrón arbitrario y estandarizado, instrumento de medida Conceptos Magnitud Unidad de medida Cantidades discretas y cantidades continuas Patrón de medición Instrumento de medición Superficie Volumen Polígono Sólido Estructuras (M, +) y (M, x) Semigrupos conmutativos. (M, ≤) Orden total y arquimédiano. (M, +, x, ≤) Semianillo arquimédiano.	Destrezas Clasificar, comparar y ordenar Diferenciar sólidos y polígonos Reconocer atributos medibles Repartir equitativamente Razonamiento Deductivo e inductivo: para encontrar el área de figuras basándose en principios geométricos y definiciones de sus propiedades. Espacial: para visualizar y manipular figuras en el plano 2d\3d Analogico: para inferir similitudes en el cálculo de volúmenes o el área de figuras y sólidos. Estrategias Completar la figura con unidades de medida Conversión de unidades Calcular una medida Estimar Uso de estrategias de medida Emplear instrumentos estandarizados Uso de fórmulas para calcular el área y el volumen. Descomposición de figuras. Resolución de problemas que involucren requieran cálculos de áreas o volumen.
---	--

En la siguiente estructura conceptual se puede encontrar conceptos, procedimientos y sus relaciones con el área y el volumen. En dicha estructura se muestran algunas opciones sobre su

aprendizaje y su trayectoria con algunos conceptos que se pueden abordar durante el desarrollo de la Unidad Didáctica.

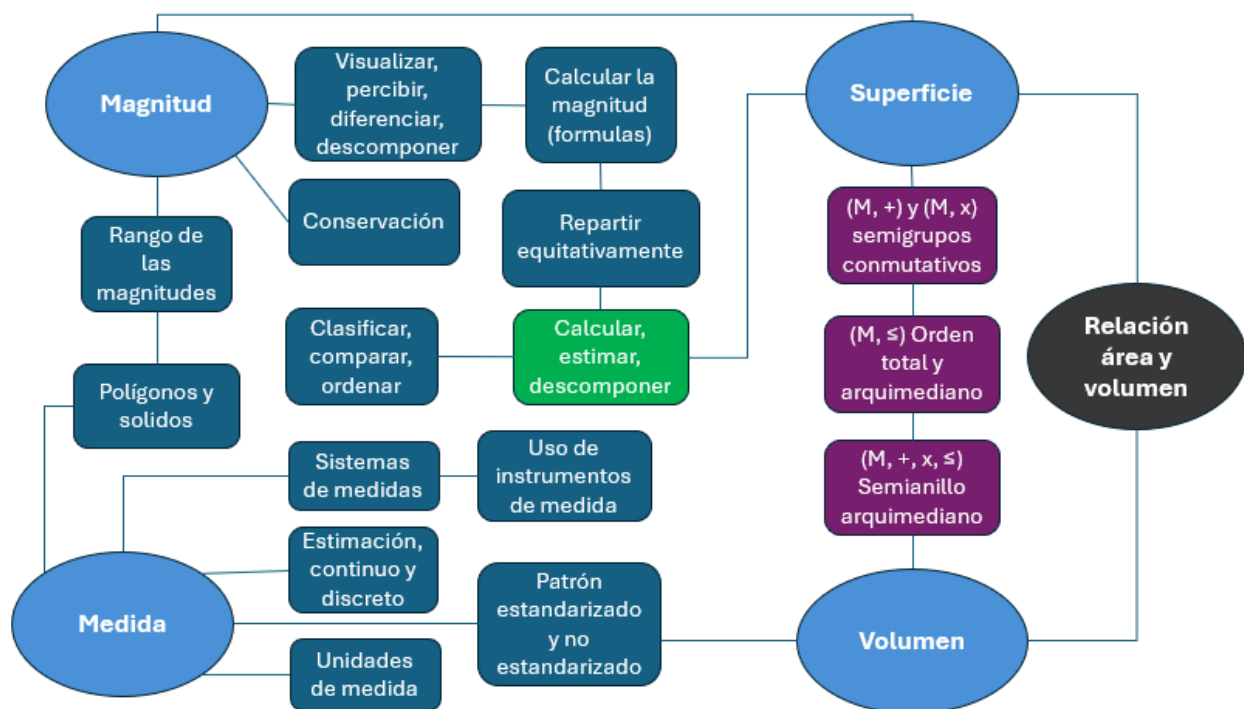


Figura 2. Estructura conceptual relación de área y de volumen.

3.1.1.2. Análisis cognitivo.

El análisis cognitivo es una herramienta que atiende el aprendizaje que deberían saber los estudiantes y los errores que pueden incurrir en el proceso educativo. También como un proceso educativo en la formación de profesores teniendo en cuenta las expectativas de aprendizaje, los errores y dificultades que enfrentan los estudiantes, así como las oportunidades de aprendizaje que puedan surgir en el aula. Con esto el profesor puede identificar que requiere de más atención y lograr adaptar una estrategia pedagógica para abordar la necesidad de los estudiantes.

Tabla 2. ADCg de la relación entre el área y el volumen

Análisis Didáctico Cognitivo - ADCg		
Estándares básicos de competencia DBA de grado sexto	Problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje	Recomendaciones para su enseñanza
Calcular áreas y volúmenes a través de la re-composición y descomposición de figuras y cuerpos.	La elección de la unidad de medida. La medida se confunde frecuentemente con la precisión en la medición.	Actividades que permitan a los escolares manipular y comparar objetos, distinguir cualidades, usar intermediarios, desarrollar estrategias de estimación, buscar referentes, seleccionar la unidad adecuada, usar instrumentos de medida, descomponer y recomponer figuras, y aplicar fórmulas.
Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.	Experiencia limitada o inapropiada en el aprendizaje de contenidos, conocimiento incompleto de conceptos, poca experiencia realizando mediciones, junto con actitudes negativas hacia la comprensión de la magnitud.	La construcción de los conceptos de cada magnitud; la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes; y la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.	Aprenden la idea de unidad de medida con unidades no convencionales y aplican estrategias de medición directa. Relacionan la longitud, la superficie o el volumen de un objeto con su aspecto o con su posición.	Los estudiantes deben adquirir habilidades para determinar la cantidad cuadrados que forman una figura mediante distintas técnicas, como unidades cuadradas, geoplano o con ayuda de papel. Estos métodos de medición implican aprender a descomponer, recomponer, completar y superponer formas geométricas.

Al llevar a cabo el análisis cognitivo se espera que el profesor pueda identificar las expectativas de aprendizaje asociadas al tema objeto de enseñanza y hacerse consciente de las limitaciones y errores que los estudiantes puedan manifestar, así como diseñar propuestas educativas innovadoras que permitan aprender las necesidades de aprendizaje y las limitaciones de los escolares.

También, el análisis cognitivo contribuye a que el profesor adquiera herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan tomar decisiones que favorezcan la comprensión de los estudiantes y el aprendizaje significativo de las matemáticas.

3.1.1.3. Análisis didáctico sobre la comprensión de los estudiantes

Se entiende la evaluación sobre un proceso que da información sobre formación alcanzada y progreso del estudiante logrando un objetivo (López, 2015) explica que la evaluación debe estar integrada en el proceso y aprendizaje y que al finalizar la etapa educativa los estudiantes deben desarrollar capacidades necesarias para:

- Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado en forma de tabla o gráfica.
- Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
- Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (imposible, seguro o posible, con mayor o menor probabilidad de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado (p, 341).

Al respecto, López (2015) menciona que el proceso evaluativo debe garantizar que los estudiantes logren los objetivos propuestos por el docente en su proceso de instrucción. Para lograr esto, se plantea una manera de evaluar con tareas y preguntas en la que el estudiante tendrá que dar su respuesta y el profesor tiene que interpretarla, y de acuerdo con eso se le asigna un valor y se registran los datos para finalmente tomar decisiones de las respuestas.

Fases de la investigación de diseño

Tabla 3. Fases de investigación de diseño

Investigación de diseño	Análisis didáctico	Objetivos desarrollados
Fase I: Preactiva	La articulación del modelo local de análisis didáctico.	Fundamentar un modelo local de análisis didáctico que integre los conocimientos didácticos relacionados con los organizadores del currículo.
Fase II: Interactiva	Diseño de la unidad didáctica fundamentada en el modelo local de análisis didáctico.	Diseñar una unidad didáctica que articule la resolución de problemas para la enseñanza y comprensión de la relación entre el área y volumen.
Fase III: Post-activa	Síntesis crítica sobre el proceso de fundamentación y diseño de la Unidad didáctica.	Analizar retrospectivamente las comprensiones y limitaciones derivadas del diseño de la unidad didáctica.

Capítulo IV - Reflexiones finales

En el siguiente capítulo se presentarán las reflexiones finales sobre el diseño de la Unidad Didáctica para la enseñanza y comprensión de la relación entre las magnitudes de área y de

volumen en el grado sexto de básica secundaria. Estas reflexiones se organizan en torno a los objetivos específicos planteados al inicio del trabajo, analizando los resultados del diseño de la Unidad Didáctica y aprendizajes desarrollados.

4.1. Organización de la Unidad Didáctica

La organización de la Unidad Didáctica para la enseñanza y comprensión de la relación entre el área y el volumen se fundamenta en una serie de actividades diseñadas para servir de guía a los docentes en su práctica y construir la magnitud desde cero junto con los estudiantes. A continuación, se presenta una explicación detallada de las actividades y objetivos de cada sesión, las situaciones que surgieron y las razones que sustentan la organización de la trayectoria de la Unidad Didáctica.

Para la organización de las sesiones se pensó en cuatro sesiones de trabajo con su respectiva valoración. Cada sesión consta de unas actividades que fueron pensadas para que el docente pueda organizarse de una manera más práctica y construir la magnitud de área y volumen en sus estudiantes.

La sesión 1 se llama "Explorando tus saberes", se diseñó con el objetivo de evaluar los conocimientos previos de los estudiantes sobre la construcción de las magnitudes de área y volumen. La razón para esta sesión fue comenzar con actividades donde el profesor realiza una evaluación diagnóstica para comprender el punto de partida de los estudiantes. Esto permite identificar las ideas previas y los conocimientos adquiridos a lo largo de su formación escolar. Esta información es un punto de partida para que el docente pueda empezar a construir la magnitud de área y volumen, ajustar las actividades si es necesario y poder cumplir con las necesidades pedagógicas de los estudiantes y el contexto.

Durante esta sesión, los estudiantes trabajan en actividades de clasificación de figuras geométricas, comparación de las formas de las figuras con objetos cotidianos, la construcción de la magnitud, estrategias para medir dichos objetos y su cálculo. Esto permite observar cómo los estudiantes pueden abordar estas magnitudes y qué estrategias podrían usar para resolver este tipo de problemas. Al final de cada actividad se realizará una valoración, la cual es fundamental para que el docente pueda identificar el aprendizaje y conocimientos que han desarrollado durante la sesión. Además, permite que el docente trabaje sobre los errores y dificultades que

puedan surgir, ajustándose a cada necesidad. Para el caso de esta sesión, se busca evaluar la construcción de la magnitud de área y volumen.

La sesión 2 se llama "Midiendo el mundo a tu alrededor". Se diseñó con el objetivo de construir los conceptos de área y volumen utilizando materiales manipulativos y visuales. La razón para esta sesión es establecer una comprensión de los conceptos fundamentales mediante el uso de estos materiales, ya que los estudiantes, al trabajar con ellos, podrán identificar características como (las caras de los objetos, aristas, su volumen en el caso de que sean grandes o pequeños, etc.) y así poder reconocerlos más fácilmente.

Durante esta sesión, los estudiantes participan en actividades más prácticas usando materiales cotidianos para empezar a medir (objetos fáciles de manipular como una caja de cartón, papel y lana) con instrumentos de medida que no son flexibles. También van a comparar áreas y volúmenes para empezar a reconocer que estos se pueden medir sin necesidad exclusiva de una unidad de medida. Además, el docente puede guiar al estudiante para que reconozca que la magnitud de área y volumen tienen muchas cosas en común, como, por ejemplo, que la magnitud de área se puede emplear en el volumen.

Para la valoración de esta sesión, se busca que el docente pueda determinar en qué medida los estudiantes han comprendido y construido los conceptos de área y volumen. Además, se evaluará si los estudiantes ya entienden el uso de patrones e instrumentos de medida distintos a los habituales y cómo aplican estos conocimientos en la medición de área y volumen.

La sesión 3 se llama "Comparando áreas y volúmenes". Se diseñó con el objetivo de utilizar las ideas relacionadas con el área y el volumen de sólidos, mediante la comparación de sólidos e instrumentos que permitan cuantificar la magnitud. La razón para esta sesión es que, a través de la estimación de medidas y basándose en un patrón de medida, los estudiantes puedan calcular estas medidas. Para lograr esto, el profesor debe brindar material manipulativo con medidas divisibles por el objeto a medir, para que los estudiantes puedan dar respuestas exactas. El docente también trabajará la diferencia entre la capacidad, que se refiere al espacio que puede ser ocupado, y el volumen, que es el espacio que ocupa un objeto.

Durante esta sesión, se trabaja en actividades prácticas con cajas y medidas fijas. El docente guiará a los estudiantes para que empiecen a medir teniendo en cuenta un patrón de medida, donde puedan comparar con otras medidas, también comparar algunos volúmenes y

capacidades. En estas actividades, el docente puede darle muchos usos a las cajas para que los estudiantes logren medir y calcular distintas magnitudes de áreas y volúmenes. Por ejemplo, en lugar de usar agua, se pueden llenar las cajas grandes con cajas más pequeñas o contar cuántas cajas de una medida muy pequeña caben en una caja de una medida más grande en su superficie.

Para la valoración de esta sesión, el docente observará si los estudiantes pueden comparar medidas con distintos patrones y si pueden calcular estas medidas. También se comparará la magnitud de área con el volumen, midiendo las caras de las cajas junto con su volumen, y a través de la resolución de problemas, se podrá relacionar la magnitud de área y volumen en ejercicios teóricos.

La sesión 4 se llama "Conectando áreas y volúmenes". Se diseñó con el objetivo de reconocer cómo se relacionan las magnitudes de área y volumen en distintos problemas de medidas. La razón para esta sesión es proporcionar retroalimentación detallada sobre la comprensión de la construcción de la magnitud de área y volumen. Para esto, se trabajará midiendo distintos objetos, usando un referente de medida hecho por los estudiantes para que se apropien de medir sin depender de un referente fijo. De esta manera, podrán reconocer la relación entre estas magnitudes en contextos de la vida real.

Durante esta sesión, se trabajan en actividades de medida, magnitud de área, magnitud de volumen y cómo se relacionan. El docente encargado debe guiar a los estudiantes por medio de preguntas problema, como, por ejemplo: ¿si sumara el área de las caras de un cubo cómo se podría calcular su volumen? También se invita a que den definiciones de la relación entre la magnitud de área y volumen con actividades prácticas, como construir una estructura del mismo volumen con distinta área y discutir con los estudiantes qué pasa con en un caso de estos con sus medidas.

Para la valoración de esta sesión, el docente busca evaluar todo lo aprendido en las sesiones anteriores y detectar posibles dificultades en el diseño de la Unidad. Se propone que los estudiantes trabajen en grupos para realizar actividades prácticas y responder preguntas problemáticas, por ejemplo ¿qué cambios harías para aumentar o disminuir el área de un objeto manteniendo el mismo volumen?, ¿Puedes descomponer una estructura en dos o más estructuras pequeñas? ¿Cambia su área y volumen? Con el fin de discutir y socializar la relación entre la

magnitud de área y volumen. Finalmente, se compartirán las conclusiones con toda la clase para proporcionar retroalimentación sobre la construcción de estas magnitudes y su relación.

4.2. Conclusiones sobre el estudio

En este apartado se presentan las conclusiones derivadas del diseño de la Unidad Didáctica ¹, empleada en este estudio como una unidad guía para que el profesor pueda orientar su práctica educativa, así como analizar las interacciones entre las situaciones, las consignas, el objeto matemático, los recursos didácticos y devoluciones que hace el estudiante.

A continuación, en la tabla 4 se describen los objetivos de este estudio, sobre los cuales se proponen las conclusiones relacionadas con la fundamentación, diseño y reflexión profesional sobre la Unidad Didáctica producto de este estudio.

Tabla 4. OE Objetivos específicos

Objetivo específico (OE)	Descripción general de los objetivos específicos.
OE1	Fundamentar un modelo local de Análisis Didáctico en relación con dimensiones epistemológicas, fenomenológicas, matemáticas y curriculares, sobre la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.
OE2	Diseñar una Unidad Didáctica basada en la resolución de problemas para favorecer la comprensión sobre la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.
OE3	Analizar retrospectivamente las comprensiones y limitaciones que se generen durante el diseño de una Unidad didáctica que articule la resolución de problemas y el razonamiento para la enseñanza y comprensión de la relación entre área y volumen en el grado sexto de básica secundaria.

A continuación, se presenta el resultado obtenido de cada OE que se logró identificar y trabajar a lo largo del diseño de la Unidad Didáctica.

¹ Unidad Didáctica denominada Más allá de las fórmulas - Relación-área y volumen se presenta como parte de los anexos de este estudio

OE1:

El modelo local de Análisis Didáctico le permite al profesor identificar en qué situaciones los conceptos de área y volumen adquieren un significado y sentido en el aprendizaje de los estudiantes, esto permite aproximar la comprensión de los estudiantes de manera contextualizada para poder resolver problemas a partir de estos desarrollos en diferentes situaciones de medida. Igualmente, este modelo favorece la capacidad de planificar para que el profesor desarrolle y organice las tareas de una propuestas de enseñanza a partir de una estructura conceptual que relacione los conceptos, hechos, nociones, propiedades, representaciones y relaciones asociados a las magnitudes de área y volumen. A través de esta metodología de planificación asociada a un modelo local de Análisis Didáctico, el profesor puede adaptar sus estrategias didácticas para abordar las dificultades, errores y obstáculos que presentan los estudiantes, esto con el fin de mejorar la comprensión de las actividades y fortalecer el rol de los profesores como mediador del aprendizaje y la comprensión.

El modelo local de Análisis Didáctico se concretó a partir de la documentación consultada en relación con el área y el volumen de autores como (Del Olmo et al., 1993; Chamorro, 2003; Bonelo y Bahamón, 2015). Este diseño representa un avance para el profesor de matemáticas porque propone trabajar en el aula de manera práctica, motivando a los estudiantes a usar materiales manipulativos y del entorno, así como a resolver problemas que favorecen la construcción de la magnitud y sus relaciones. Este modelo local de Análisis Didáctico proporciona una base fundamentada para abordar la construcción de la magnitud de área y volumen, con el objetivo de que la comunidad de profesores y estudiantes comprendan la relación entre estas magnitudes y su aplicación en distintas áreas de conocimiento.

El análisis cognitivo y de contenido desempeñan un papel fundamental en el diseño de la Unidad Didáctica, porque posibilita reconocer los diferentes fenómenos que generan significados y sentidos de las magnitudes de área y volumen, así como su relación. Además, se reconocen las limitaciones, errores y obstáculos que se han estudiado sobre el aprendizaje de estos objetos de enseñanza, también conocer las expectativas y oportunidades de aprendizaje que disponen los profesores a partir de los materiales y recursos que existen en el contexto. Esto facilita la adaptación de las actividades y proporciona retroalimentación para que el docente mejore tanto en la práctica como en el método de enseñanza.

OE2:

Para el diseño de la Unidad Didáctica, se tuvieron en cuenta algunos referentes como (Pochulu y Rodriguez, 2015; Del Olmo et al., 1991; Bonelo y Bahamón, 2015; Bedoya, 2011; Rico y Segovia, 2001) quienes mencionan aspectos clave para promover planeaciones curriculares que atiendan a la resolución de problemas, como una estrategia crucial para desarrollar el conocimiento matemático a partir de tareas con diferentes niveles de desempeño y con múltiples representaciones que favorecen la comprensión de las magnitudes y sus relaciones. Así entonces, la resolución de problemas es el eje que permite que los estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento matemático, para comprender y aplicar las relaciones de área y volumen en diferentes contextos.

El diseño de las tareas, que conforman la Unidad Didáctica, considera la visualización como un proceso cognitivo que favorece la enseñanza de la geometría a partir del reconocimiento de atributos, magnitudes, aplicaciones y relaciones que se requieren para ampliar el sentido espacial y el métrico como lo proponen Duval (2004), citado en Bonelo y Bahamón (2015). Además, la visualización icónica y no icónica, como se menciona en el marco teórico, se propone en las tareas propuestas en la Unidad Didáctica, para permitir que los estudiantes puedan reconocer la relación entre el área y volumen mediante la observación de formas y manipulación de figuras.

Durante el diseño de la Unidad Didáctica se abordan algunos desafíos, como la selección de tareas para las actividades, la formulación de preguntas problema y el uso de materiales didácticos que permitieran construir la magnitud de área y volumen desde un enfoque constructivo, sin depender exclusivamente de fórmulas. Al enfrentar estas dificultades durante el diseño de la Unidad Didáctica se busca garantizar que las actividades ofrezcan un aprendizaje gradual, asegurando que el docente pueda planificar teniendo en cuenta las dificultades que puedan surgir con los estudiantes.

Otro reto identificado es la tendencia a diseñar las tareas pensando que el enfoque de la Unidad es hacia los estudiantes y no hacia los profesores. Esto limita el tratamiento de la Unidad Didáctica, ya que se conciben las actividades como si se fueran a implementar directamente con los estudiantes, sin considerar que otros docentes tendrán acceso primero a la Unidad Didáctica. Esto puede afectar el desarrollo de las actividades, ya que no se tiene en cuenta el análisis de

contenido, el análisis cognitivo, los aspectos fenomenológicos y contextuales necesarios para proponer tareas de aprendizaje y comprensión en el aula de clase.

El diseño de la Unidad Didáctica permitió como profesional integrar conocimientos teóricos y prácticos sobre la enseñanza de la magnitud de área y volumen. Este proceso facilitó trabajar con modelos didácticos que promuevan la resolución de problemas y mejorar competencias como: la planificación, desarrollando habilidades para organizar el contenido en una secuencia lógica y coherente, para que las actividades promuevan un aprendizaje progresivo, incorporar métodos interactivos y manipulativos que permitan un enfoque más dinámico que estimule la capacidad de los estudiantes para abordar problemas desde diferentes perspectivas, ajustar actividades y metodologías según las necesidades y contexto de los estudiantes para permitir al docente manejar el aula de una mejor manera. Así, reflexionar sobre las dificultades y limitaciones que se puedan enfrentar mientras se trabajan diferentes actividades sobre la relación de área y volumen.

OE3:

El análisis retrospectivo del diseño de la Unidad Didáctica permite identificar las comprensiones y limitaciones que puedan surgir en la práctica. En el proceso del diseño de la Unidad Didáctica, se construyó una base teórica para poder comprender el desarrollo didáctico sobre las magnitudes de área y volumen desde una perspectiva epistemológica y curricular. Este marco teórico guió la planificación hacia la resolución de problemas y visualización para que estuvieran reflejados en las actividades propuestas. A partir de esta base, se pasó a un enfoque práctico, donde el reto fue trasladar la teoría a actividades manipulativas para facilitar su comprensión. Durante este proceso, resultaron dificultades, como la selección de tareas y la creación de actividades que fueran adaptadas a la práctica donde no se tuviera que involucrar fórmulas.

Durante el diseño de la Unidad Didáctica, se desarrollaron conocimientos que contribuyeron al crecimiento como docente, conocimientos como la planificación, que permite una mayor habilidad para organizar contenidos de manera secuencial para que las actividades tengan una progresión lógica y logren facilitar la comprensión de los conceptos. También, desarrollar estrategias didácticas para diseñar actividades manipulativas y visuales que promuevan el aprendizaje como una alternativa distinta a la tradicional (teórica, uso de fórmulas)

por ejemplo, al integrar materiales que permitan explorar para este caso la magnitud del área y volumen y su relación de manera tangible.

Otro conocimiento que se alcanzó fue la anticipación de errores y dificultades que podría enfrentar el docente, por ejemplo, que se confunda área y superficie o capacidad y volumen, donde no se lograra visualizar la diferencia de estos conceptos en las actividades diseñadas. Finalmente, se adquirió una comprensión más profunda de cómo conectar la teoría con la práctica. El proceso de trabajar las teorías en experiencias de aprendizaje distintas, ayudó a fortalecer la capacidad de tomar decisiones pedagógicas como docente.

El diseño de la Unidad Didáctica permitió como docente reflexionar sobre muchas dificultades que se presentan en el proceso de planificación, por ejemplo, la selección de tareas que permitan formular preguntas que promuevan el pensamiento crítico, teniendo un equilibrio en lo teórico y práctico. Aunque la teoría ofrezca una base sólida, trasladarla al contexto del aula requiere un enfoque distinto donde se pueden encontrar con limitaciones mediante ajustes en las actividades y poder evitar posibles confusiones durante la implementación.

Finalmente, al no haber implementado esta Unidad Didáctica, el proceso fue principalmente de planificación y prevención de problemas. En este sentido, se aprendió a anticipar dificultades que surgen en la realización de actividades, para esto no se puede basar solo en la teoría, sino saber cómo las actividades prácticas pueden ayudar a fortalecer el conocimiento con el fin de lograr que el docente tenga más interacción y respuestas de parte del estudiante.

Referencias bibliográficas

- Bahamón, L, y Bonelo, A. (2015). *Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un experimento de enseñanza*. Trabajo de pregrado. Universidad Del Valle
- Barrantes López, M., Barrantes Masot, C., y Zamora Rodríguez, V. (2020). *Didáctica de la medida en Primaria* (1.ª ed.). Universidad de Extremadura.
- Bedoya, E. (2011). Formación de profesores de matemáticas: conocimiento y análisis didáctico, Univalle. Documento no publicado.
- Chamorro, M. C., Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Chamorro, M. C. (2003): *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice.
- Codina, A., Romero, I., y Abellán, C. (2017). Sentido de la medida y magnitud superficie: un experimento de enseñanza con alumnado de primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 28-55.
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. (Tesis de doctorado, Universidad de Valencia) España.
- Del Olmo, M. A., Moreno, M. F., y Gil, F. (1993). Aportaciones sobre la adquisición del concepto de área. En M. A. del Olmo, M. F. Moreno y F. Gil, *Superficie y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* (pp. 15 - 46). Madrid: Editorial Síntesis.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y una quinta. En M. d. Ciencia, Números, formas y volúmenes en el entorno del niño (págs. 159 - 188). Madrid: secretaría general técnica.
- Godino, J., Ruiz, F., Roa, R. y Cid, E. y Batanero, Carmen y Font, V. (2004). *Didáctica De la matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Guaquez, K, y Velandia, P. (2019). *Un aporte didáctico para la enseñanza del concepto de volumen*. Trabajo de pregrado. Universidad Del Valle

Hidalgo, S. G. (2016). Algunas consideraciones sobre la formación del profesorado de matemáticas. *Investigaciones en didáctica de la matemática: homenaje a Moisés Coriat* (p. 9). Editorial Comares.

López, M. J. G. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (p. 323-341). Pirámide.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencia en matemática*. Bogotá: Magisterio.

Moreno, M. F., Gil, F., y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores, Martínez, L. Rico, Romero (Coord.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (147-168). España: Ediciones Pirámide.

Nagles, N, y Rivera, C. (2021). *Un recurso educativo abierto para la enseñanza del área como magnitud en quinto grado de primaria*. Trabajo de pregrado. Universidad Del Valle

Rodriguez, M. A. (2015). Resolución de problemas. *Educación Matemática Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Universitaria Villa María. (p, 153)

Recalde, L. C. (2009). Los axiomas de la cantidad de holder y la fundamentación del continuo lineal. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XVII (2) 101-121

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales: *Revista Suma*, 7-23.

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Editorial Comares.

Rodríguez, E. y Gómez, J. (2016). *La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial del profesorado de educación infantil*. *Investigaciones en didáctica de la matemática*, (p. 5). Editorial Comares.

Sevillano, C. (2014). *Propuesta de enseñanza del proceso de medida de longitudes y áreas a partir de la articulación entre lo métrico y lo numérico*. Trabajo de pregrado. Universidad Del Valle.

Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (10), 9-28.

Unidad Didáctica: Más allá de las fórmulas - relación entre área y volumen

A continuación, se presentan cuatro sesiones propuestas para favorecer la comprensión de la relación entre las magnitudes de área y volumen. El tiempo estimado de duración de cada una de las sesiones es de 60 minutos, durante los cuales se realizará un trabajo que articula materiales, destrezas visuales, resolución de problemas y razonamiento sobre las características de algunas figuras y cuerpos geométricos.

Materiales y recursos didácticos:

- Objetos de uso habitual con formas de figuras geométricas
- cajas de cartón, pitillos, madejas de lanas, fichas de trabajo, plantillas de figuras geométricas, regla, tijeras, lápices y plastilina.

Objetivo Gral. de la UD

Identificar los usos y significados de las magnitudes de área y volumen a partir de habilidades asociadas con la visualización, el razonamiento y la resolución de problemas en diferentes situaciones prácticas o de la vida cotidiana.

Objetivos específicos:

- Construir el concepto de las magnitudes de área y de volumen.
- Distinguir entre unidad y patrón de medida.
- Utilizar modelos visuales y manipulativos para comprender los conceptos de área y volumen, y su relación.
- Resolver situaciones problema a partir de la relación entre área y volumen.

Secuencia de actividades

El diseño de esta Unidad Didáctica se propone a partir de cuatro situaciones que toman en consideración los conocimientos previos de los estudiantes, así como las decisiones y respuestas a situaciones de la vida real, que junto a sus propias experiencias permiten la interacción del estudiante, el saber matemático y el profesor. En estas situaciones los estudiantes trabajan en equipos para fomentar el aprendizaje, la discusión y el debate. En cada sesión se realizará una valoración que permite reajustar las propuestas, decisiones y actividades atendiendo a las características del contexto, por ello las propuestas encontradas aquí son susceptibles de modificación, por parte de los profesores.

Las actividades incluyen:

- Situación diagnóstica
- Introducciones prácticas
- Situaciones de desarrollo
- Situaciones de exploración y ampliación en otros campos
- Actividades de evaluación.

Unidad didáctica Más allá de las fórmulas - relaciones entre área volumen

Sesión 1: Explorando tus saberes

Duración: 60 minutos

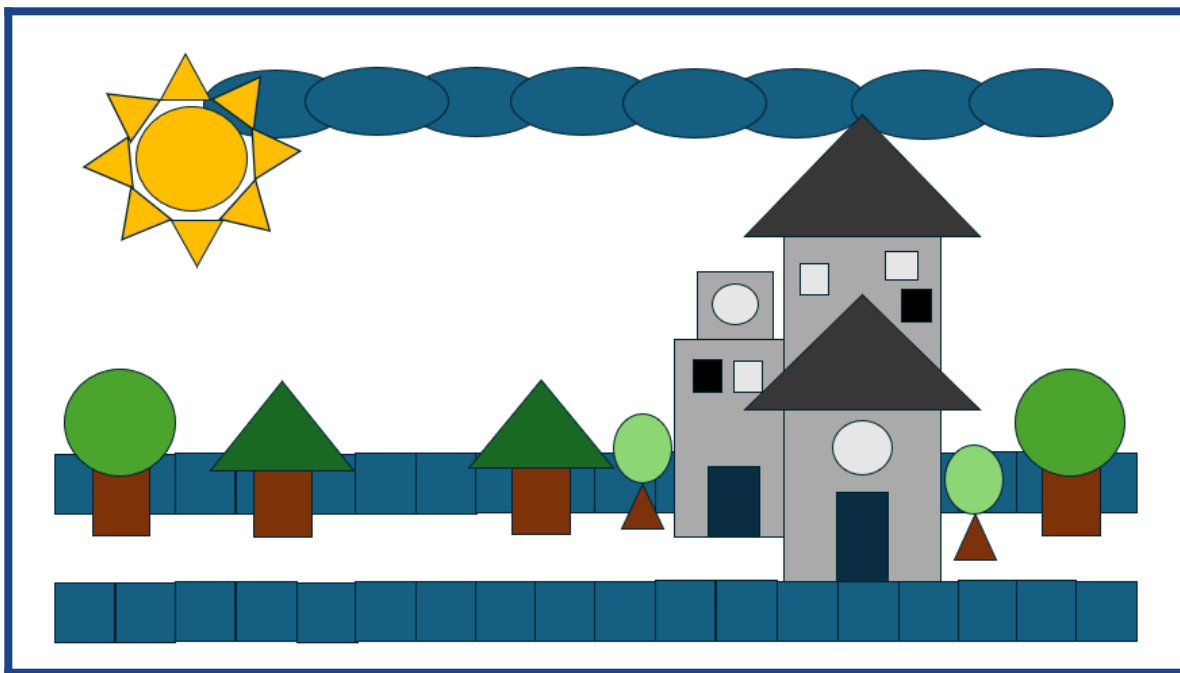
Materiales:

- Ficha de trabajo proporcionada por el profesor
- Cuaderno de los estudiantes
- Pitillos (10 pitillos por estudiante) y plastilina para la valoración.

Objetivo: Identificar qué saberes tienen los estudiantes en relación con las figuras geométricas.

Situaciones:

1. En la siguiente situación deberás observar la imagen e identificar las figuras geométricas que reconozcas.

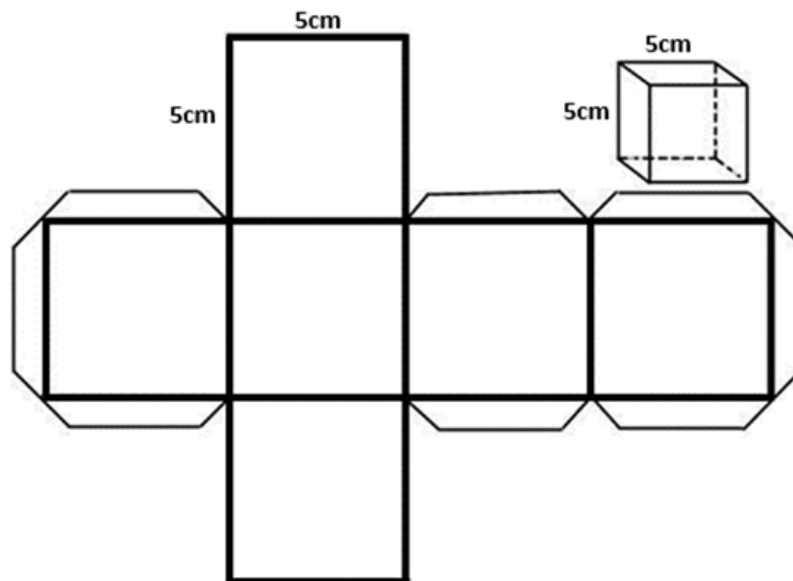


- En tu cuaderno escribe el nombre de cada una de las figuras que reconozcas.
- Utilizando figuras geométricas que reconoces crea otra imagen similar.

2. En la siguiente tabla deberás relacionar los objetos de la vida real que tengan la misma forma de las formas geométricas vistas.

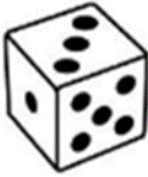
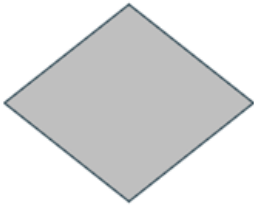
Objeto de la vida real	Formas geométricas

- ¿Qué estrategias podrías utilizar para medir los lados de las figuras que reconociste?
 - ¿Cómo podrías calcular esta medida?
3. En tu casa recorta y arma el sólido geométrico con las medidas que se muestran en el siguiente molde.

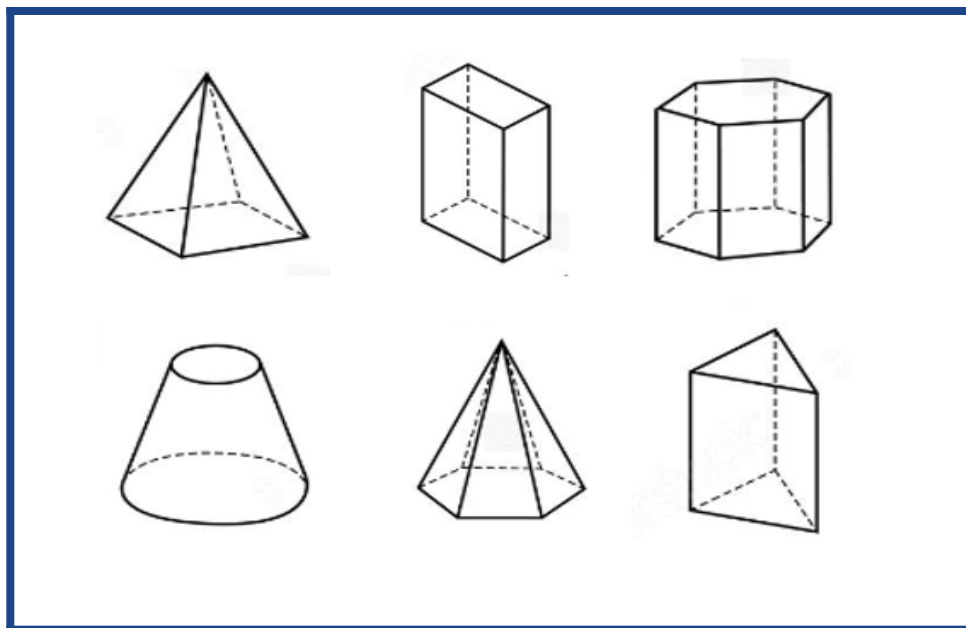


Valoración: En este momento de la sesión se busca evaluar los conocimientos y aprendizajes que los estudiantes han desarrollado en relación con las figuras geométricas y sus formas. Para ello, se utilizan las siguientes preguntas de reflexión:

- a. ¿Qué características tiene una figura de forma cuadrada? (**lados, vértices, ángulos**)
- b. ¿Qué diferencias tiene una figura de forma triangular y una de forma cuadrada? (**lados, vértices, ángulos**)
- c. Observa las siguientes imágenes y escribe debajo de cada una si es una figura plana o un sólido.

- d. Utilizando los pitillos que se entregaron en la clase arma dos de las estructuras de las siguientes representaciones de la imagen.



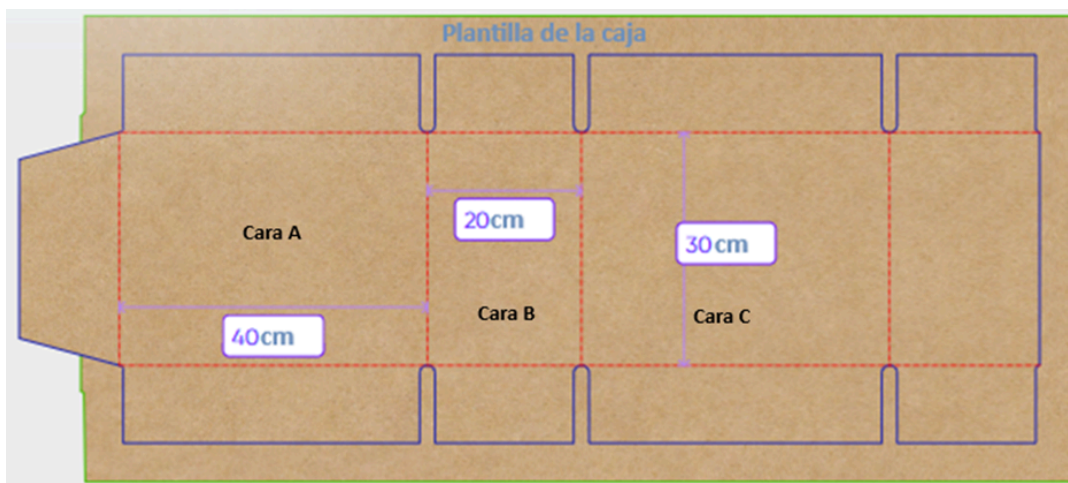
Sesión 2: Midiendo el mundo a tu alrededor

Duración: 60 minutos

Materiales:

- Una caja cartón con las medidas de: 40 cm x 20 cm x 30 cm (si no se consigue se puede elaborar)
- Ficha de trabajo
- Una madeja de lana, tijeras y regla.

Objetivo: Establecer comparaciones entre las longitudes (perímetros) de las caras de las cajas.



Nota: recuerde que se debe mostrar a los estudiantes las cajas de cartón, se sugiere que los estudiantes las puedan tocar y observar. Luego, se realizan preguntas para iniciar.

Situaciones:

1. Observa y manipula las cajas de cartón y responde:
 - ¿Cuántas caras tiene la caja?
 - ¿Qué formas tienen esas caras?
 - ¿Cómo podríamos llamar a los bordes donde se une una cara con otra?
 - ¿Cómo crees que se llaman las puntas donde se unen las cuatro caras?
2. Para la siguiente actividad se hará uso de una hoja de papel en forma cuadrada, la doblamos y formamos una figura triangular, esto se hace para identificar cuántas veces cabe la figura triangular en una de las caras de la caja.
 - ¿Cuántas veces cabe la hoja de forma triangular en la cara C?
 - ¿Qué relación identifican en la cantidad de hojas de forma cuadrada y la cantidad de hojas de forma triangular que se utilizaron para cubrir las superficies de las cajas?
3. Para la siguiente actividad se hará uso de la lana, pedir que corten las lanas en distintos tamaños. Se pide que midan los contornos de las caras de las cajas. Comparar los contornos de las dos cajas con las lanas. Usar otro objeto, por ejemplo, un libro y medirlo con la lana y preguntar diferencias o similitudes.
 - ¿Qué se puede comparar o medir con la lana?

Nota: La idea es que sean los estudiantes los que deduzcan si con la lana se puede medir los bordes y si esos bordes se pueden sumar. Además, tener en cuenta que para esta actividad los estudiantes ya deben reconocer el perímetro.

4. Se va a realizar una salida del aula para reconocer objetos que se puedan medir utilizando la lana como instrumento de medida.

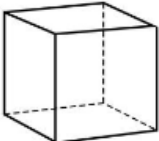
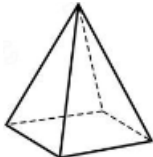
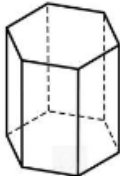
Nota: aclarar que las unidades e instrumentos no son flexibles por lo tanto hay espacios que no puedo calcular. Tener en cuenta que la lana del contorno hay que amarrarla para crear un patrón de medida que no tiene una forma específica.

- Con el patrón de medida nuevo, hay que pedir que un grupo mida la puerta y otro grupo el tablero y apuntar los datos obtenidos en el cuaderno o ficha de trabajo, luego se puede explicar que se debe medir con un patrón de medida.

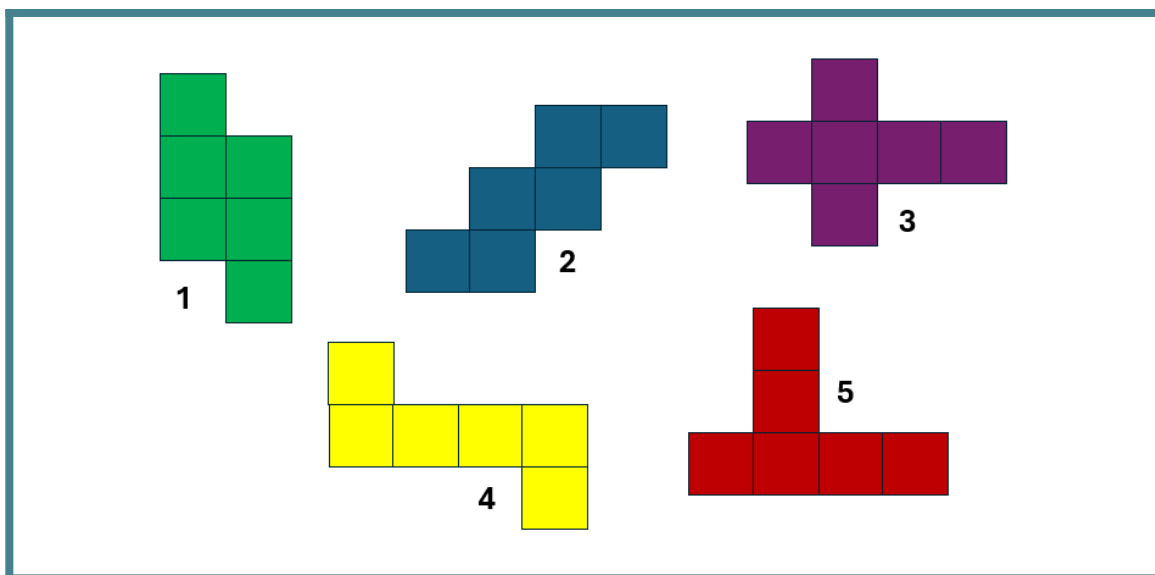
Valoración: En este momento de la sesión se busca evaluar los conocimientos y aprendizajes, que los estudiantes han desarrollado en relación con los patrones de medida usados. Para esto se utilizan las siguientes actividades y preguntas de reflexión.

***Nota:** Para esta valoración el profesor debe presentar la ficha de trabajo con las actividades y preguntas, se realizará de manera grupal e individual.*

a. Completa la información requerida en el siguiente cuadro.

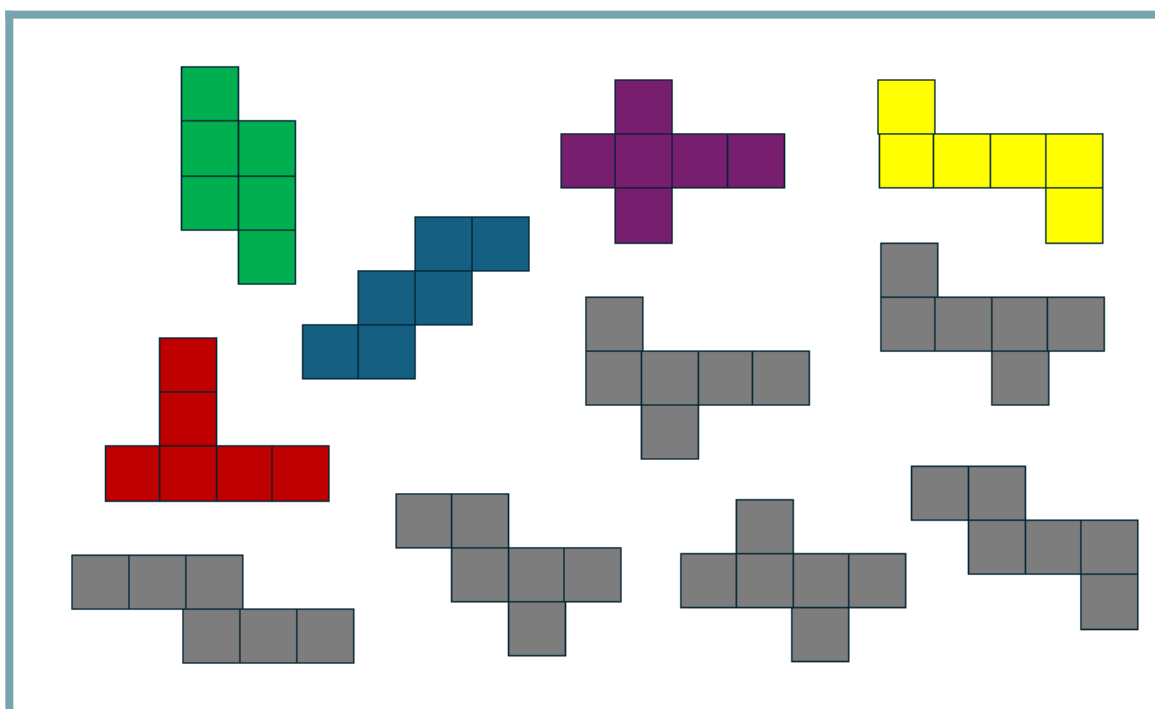
Cuerpo geométrico	No vertices	No aristas	No caras
 Cubo			
 Pirámide			
 Prisma			

b. Las siguientes figuras se han obtenido uniendo 6 cuadrados, sin recortar ni armar ¿Cuál crees que sirva para desarrollar planos de un cubo?



- c. Las figuras que señalaste ¿Eran desarrollos planos del cubo?
- d. Intenta otros desarrollos planos distintos a los anteriores (hay once posibles), y dibuja el molde correspondiente.

Nota: Las siguientes imágenes corresponden a los once planos posibles que pueden dibujar los estudiantes, son de guía para que compares con ellos.



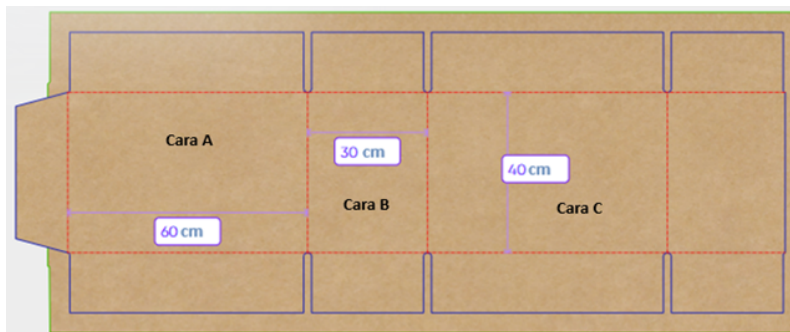
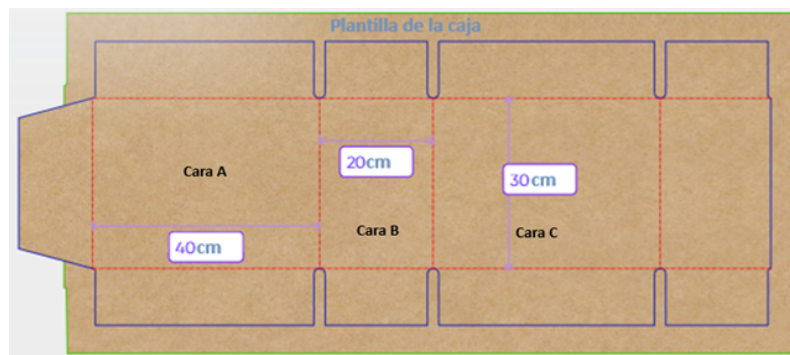
Sesión 3: Comparando áreas y volúmenes

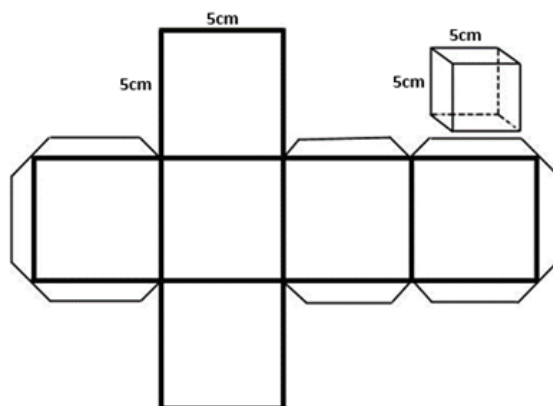
Duración: 60 minutos

Objetivo: Utilizar las ideas relacionadas con el área y el volumen de sólidos, mediante la comparación de sólidos e instrumentos que permitan cuantificar la magnitud.

Materiales:

- Caja cartón 40 cm x 20 cm x 30 cm y 60 cm x 30 cm x 40 cm (si no se consigue se puede elaborar).
- Hojas de papel de 10 cm x 10 cm y 5 cm x 5 cm.
- Tijeras, regla y 96 cubos de 5cm en cada una de sus dimensiones.





Situaciones:

1. Preguntas para fomentar la discusión:

- ¿Cómo describirías las caras externas de la caja?
- ¿Qué formas tiene la caja?
- Se pide a los estudiantes que estimen cuántas veces cabe la hoja de papel (papel que tenga 10 cm de lado y lado) en las caras exteriores de la caja.
- Si quieres medir con la misma unidad (hojas de papel de 5 cm x 5 cm) una caja de (60cmx30cmx40cm) ¿Cuántas unidades de hoja de papel caben en la caja?

Nota: recuerde que con una caja de las que se tiene o se arma, podemos calcular el área contando la cantidad de cuadrados de papel que necesitamos para cubrirla. Para hacer esto, podemos hacer la actividad en dos partes. La primera utilizando la caja física y usando la hoja de papel guía (la hoja debe tener unas dimensiones divisibles exactamente con el objeto a medir) y la segunda dibujando el molde de la caja y luego contar el número de cuadrados que tocan la superficie de la caja.

2. Para la siguiente actividad continúa haciendo preguntas:

- ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre las cajas de 40 cm x 20 cm x 30 cm con respecto a la caja de 5 cm x 5 cm x 5 cm?
- ¿Si tengo una caja de 10 cm x 2,5 cm x 2,5 cm ocuparía el mismo espacio que la caja de 5 cm x 5 cm x 5 cm?
- Se pide que llenen las cajas con cubos pequeños y contar cuántos cubos aproximadamente se necesitan para llenar una caja y las dos cajas.

Valoración: En este momento de la sesión se busca evaluar los conocimientos y aprendizajes que los estudiantes han desarrollado con relación al comparar sólidos. Se preguntará las estrategias utilizadas y se responderá en el cuaderno.

- a. Si tengo un pliego de papel de 20 cm x 40 cm ¿Será suficiente para cubrir en su totalidad la superficie de alguna de las cajas?
- b. Calcula el número de pliegos del mismo papel que necesitas para cubrir la totalidad de las dos cajas.
- c. ¿Qué relación encuentran entre el área total de las caras de las cajas con el volumen de la caja?
- d. ¿Puedes usar la misma estrategia para medir cualquier cosa? justifica tu respuesta.
- e. Dibujen un plano para una caja que pueda contener 20 cubos con dimensiones de 7cm x 7 cm, debes indicar las medidas de la nueva caja. Arma el molde de la caja y cómo quedarían sus nuevas dimensiones.

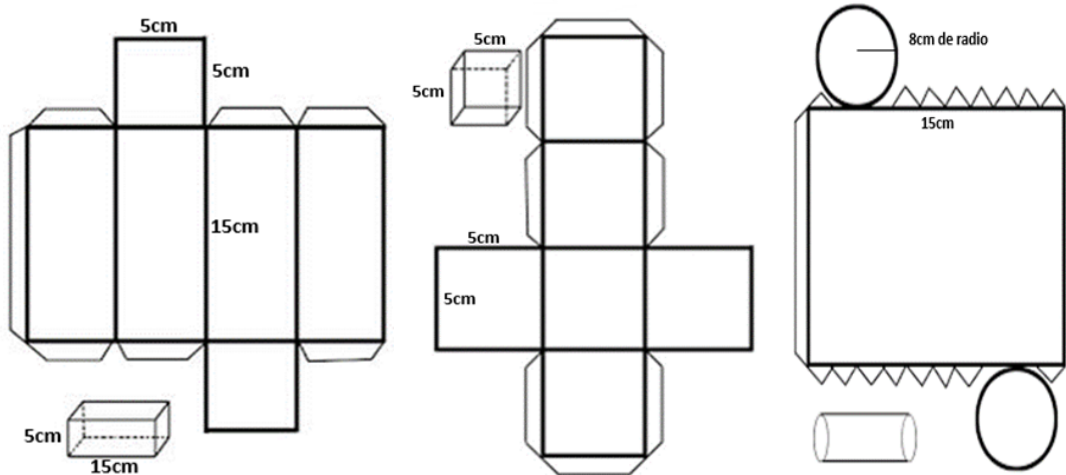
Sesión 4: Conectando áreas y volúmenes

Duración: 60 minutos

Objetivo: Reconocer para que se relaciona el área y el volumen en distintos problemas.

Materiales:

- Para esta actividad se llevarán las figuras de sólidos geométricos ya armadas de distintos tamaños, 4 o 5 de cada uno para trabajar en grupos. (las medidas pueden ser modificadas al gusto del profesor, a partir de eso sacar el área de cada cara y volumen de la figura)



Situaciones:

1. Busca tres unidades de medida distintas en objetos distintos. Ejemplos de objetos: celular, libros.

Nombre del objeto a medir	Medida con Objeto 1	Medida con objeto 2	Medida con objeto 3

2. ¿Podrías emplear otro referente de medidas? Construye con tus compañeros de grupo otro referente de unidades para medir.
3. Con el nuevo referente de medida llena la siguiente tabla.

Referente de medida	Objeto a medir

4. ¿Podemos usar este referente nuevo para medir cualquier objeto?
5. Actividad de estimación (brindar una caja con valores distintos, para medir el volumen de ese objeto)

Valoración: En este momento de la sesión se busca evaluar los conocimientos y aprendizajes, que los estudiantes han desarrollado para relacionar el área y el volumen:

Nota: Para la valoración se debe llevar la ficha de trabajo con las actividades y preguntas.

- a. Tomando como unidad el cuadro de puntos negros y después el rayado, halla el área de todas las figuras de la cuadrícula.

	Figuras		
	A		
	B		
	C		
	D		

Imagen retomada de Espeso (1996).

- b. Mira y arma una torre parecida en tu grupo y responde las siguientes preguntas.



- ¿Cuántos cubos usarías para armar una torre nueva?
- ¿Qué espacio ocupan cada una en el suelo?
- ¿Ocupan el mismo espacio si se apilan de distintas formas?
- ¿Cuántas caras y aristas son visibles en tu nueva estructura y cuantas caras y aristas están ocultas?
- ¿Cuántas caras y aristas se ven desde arriba?
- ¿Cuántas caras y aristas se ven de lado?
- Si el área de cada cara es 1 cm^2 , Calcular el área visible en tu estructura.
- ¿Cómo relacionan las sumas de las caras con el volumen de la estructura?
- Compara la estructura con la de otro grupo ¿son iguales en volumen y en área?
Escribe las diferencias.
- Si sumas las áreas de todas las caras de los cubos individuales que forman su estructura, ¿cómo se compara con el área superficial total de la estructura ensamblada?
- ¿Qué cambios harías para aumentar o disminuir el área de un objeto manteniendo el mismo volumen?
- ¿Puedes descomponer tu estructura en dos o más estructuras pequeñas? ¿Cambia su área y volumen?

Nota: Discutir con los estudiantes qué forma tendría una mejor área según un volumen dado.

- ¿Qué has aprendido sobre la relación entre el área de las caras y el volumen?
- Construir varias estructuras que sumen el mismo volumen, compara las áreas de cada estructura.