APORTES A LA ENSEÑANZA DE LA HIDRÁULICA: UN ANÁLISIS HISTÓRICO DE JOHANN BERNOULLI

JUAN CARLOS TOVAR LÓPEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
2017



APORTES A LA ENSEÑANZA DE LA HIDRÁULICA: UN ANÁLISIS HISTÓRICO DE JOHANN BERNOULLI

JUAN CARLOS TOVAR LÓPEZ

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física

DIRECTOR:
DR. EDWIN GERMÁN GARCÍA ARTEAGA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
2017

Pero hay otros protagonistas, cada uno aportó una idea esclarecedora, realizó una observación sustanciosa o menor, en suma un trabajo coral, que se escenifica en un personaje, el que pone la bandera al hacer cima. No se trata, pues, de relatar el logro aislado y solitario de un espíritu iluminado por una inspiración brillante, como se suele presentar. La "escala" imaginaria creció con los travesaños o peldaños que muchos fueron construyendo, a medida que los escaladores ascendían, soporte frágil, fabricado de pequeñas etapas intermedias de logros.

Rosa María Herrera, 2012

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos a:

A mis padres Juan Carlos y Maritza, mis tías Nubia y Carmen, mi abuela Aida y a mi novia Diana por su amor, apoyo incondicional y dedicación durante mi formación personal y profesional. Gracias a su compañía logré culminar esta etapa de mi vida.

Al profesor Edwin Germán García por la dedicación y compromiso durante la elaboración de este trabajo de investigación, además de sus orientaciones que contribuyeron al desarrollo del mismo.

Finalmente, a la Universidad del Valle por la educación recibida a lo largo de mi formación profesional.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN 10

ABSTRACT 11

INTRODUCCIÓN 12

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 14

1.1 Planteamiento del problema 14

1.2 Objetivos 20

1.2.1 Objetivo general 20

1.2.2 Objetivos específicos 20

1.3 Antecedentes 21

CAPÍTULO 2: EL DESARROLLO DE LA HIDRÁULICA HASTA FINALES DEL SIGLO XVII 30

2.1 La domesticación del agua en las antiguas civilizaciones: Mesopotamia y Egipto 30

2.2 La concepción de los fluidos en la antigua Grecia 33

2.3 El nacimiento de la hidrostática 40

2.4 La experimentación como base de la ciencia: Leonardo Da Vinci y Galileo Galilei 42

2.5 Las primeras leyes de la hidráulica 50

2.6 El desarrollo de la hidráulica en Francia: Edme Mariotte y Blaise Pascal 54

2.7 Isaac Newton y su estudio sobre los fluidos 64

CAPITULO 3: JOHANN BERNOULLI Y SU OBRA *HYDRAULICS* 76

3.1 Definiciones y lemas 77

3.2 Tratamiento del movimiento del agua a través de recipientes y conductos cilíndricos que están compuestos por varios tubos cilíndricos unidos sucesivamente entre sí 80

3.2.1 Flujo a través de dos tubos de diferente tamaño conectados horizontalmente 81

3.2.2 Flujo a través de dos tubos de diferente tamaño conectados en forma de codo. 84

3.2.2.1 Velocidad del líquido en el tubo horizontal cuando comienza a moverse desde el reposo 87

3.2.2.2 Velocidad del líquido en el tubo horizontal a medida que el tubo vertical se vacía 88

3.2.3 Flujo a través de tres o más tubos de diferente tamaño 90

3.2.3.1 La fuerza que acelera el líquido en las transiciones de tres tubos 90

3.2.3.2 Fuerza requerida para acelerar el líquido desde el reposo en tres tubos de diferente tamaño 92

3.2.3.3 La fuerza que acelera el líquido en tubos inclinados 93

3.2.4 Sobre la presión en la base de un recipiente cilíndrico debida al flujo de un líquido a través de un orificio 95

CAPÍTULO 4: ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA HIDRÁULICA 100

Situación 1 105

Situación 2 106

Situación 3 107

Situación 4 109

Situación 5 110

Situación 6 110

Situación 7 111

CONCLUSIONES 115

REFERENCIAS 119

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. “El remolino de Johann Bernoulli” (Ulazia, 2015, p. 168). 25

Figura 2. Comportamiento de un líquido al salir por un agujero ubicado en el fondo del recipiente que lo contiene, según Daniel Bernoulli (Pedroza, Ortiz y Martínez, 2007, p. 43). 27

Figura 3. El Shaduf como instrumento para la recolección de agua (Barret, 2008). 32

Figura 4. “Dibujo de Leonardo que muestra una caída de agua desde un recipiente a cuatro alturas diferentes” (Michelena, 1997, p. 19). 44

Figura 5. Propagación de ondas originadas por obstáculos en una corriente de agua (Michelena, 1997, p. 42). 45

Figura 6. Dos planos inclinados AC y DC con la misma altura CB. 48

Figura 7. “Tubo de flujo con área de sección cambiante” (Young y Freedman, 2009, p. 467).... 51

Figura 8. Experimentos de Torricelli con chorros de agua. 52

Figura 9. Experimento de Torricelli con mercurio (Pérez, 2005, p. 3). 53

Figura 10. Instrumento de Mariotte para la medición de la fuerza ejercida por los ríos (Calero, 2008, p. 68). 55

Figura 11. Instrumentos para la medición de la deflexión ocasionada por un chorro de agua (izquierda) y un chorro de aire (derecha) (Rouse e Ince, 1975, p. 65). 57

Figura 12. "Nueva máquina para multiplicar fuerzas" (Pascal, 1973, p. 30). 59

Figura 13. Vasos comunicantes 60

Figura 14. Rotación de un fluido con falta de lubricidad (Newton, p. 597). 72

Figura 15. La catarata de Newton (Newton, p. 539). 73

Figura 16. Proceso de *traslación* de fuerzas. 79

Figura 17. Flujo a través de dos tubos conectados horizontalmente (Bernoulli, 1968, p. 356).... 81

Figura 18. Flujo a través de dos tubos conectados en forma de codo. 84

Figura 19. Flujo a través de tres tubos de diferente tamaño (Bernoulli, 1968, p. 368). 90

Figura 20. Flujo a traves de tubos inclinados (Bernoulli, 1968, p. 376). 93

Figura 21. Componente de la aceleración de una capa de líquido en un tubo diagonal. 94

Figura 22. Flujo a través de un orificio ubicado en el costado de un recipiente cilíndrico. 95

Figura 23. Descarga a través de dos tubos de diferente diámetro. 105

Figura 24. Tubos de igual dimensión conectados en forma de codo con ángulo obtuso y ángulo recto 106

Figura 25. Recipiente a diferentes alturas. 108

Figura 26. Conductos de tres y dos tubos cilíndricos conectados. 109

Figura 27. Conducto conformado por tres tubos cilíndricos de diferente diámetro. 111

RESUMEN

Generalmente, la enseñanza de la hidráulica en las instituciones de educación media es limitada, enfocándose en temáticas fundamentales como fluido, presión, la ley de la continuidad y el principio de Bernoulli; temáticas que si bien hacen parte de las bases de la hidráulica, el modo en que son enseñadas moviliza procesos de memorización y aplicación de algoritmos para solución de situaciones problema, ignorando que la hidráulica constituye una de las ramas de la física que mayor incidencia tiene en la vida cotidiana del estudiante. Situación que hunde sus raíces en la restringida formación que reciben los docentes de física respecto a esta disciplina, quienes en ejercicio, atendiendo a su formación universitaria recurren a los métodos empleados por sus profesores o a libros de texto para enseñar las temáticas propias de la hidráulica. En consecuencia, se hace ineludible la necesidad de encontrar nuevos elementos que fortalezcan los procesos de enseñanza de esta rama de la física. Una herramienta que usualmente se ignora es la historia de la hidráulica, desconociendo que en esta se pueden encontrar aquellos elementos de causalidad que contribuyeron a su desarrollo y establecimiento como disciplina científica, los cuales podrían brindar valiosas experiencias que posibiliten el mejoramiento de la enseñanza de la misma. Por lo cual, en búsqueda de algunos elementos que permitan nutrir dichos procesos de enseñanza, en el presente trabajo de investigación se realiza un recorrido histórico a través de los estudios realizados por algunos de los personajes más influyentes en el desarrollo de la hidráulica, en especial, el estudio que llevó a cabo el matemático y físico suizo Johann Bernoulli a través de su obra *Hydraulics*.

Palabras clave: hidráulica, Johann Bernoulli, historia y enseñanza de la física.

ABSTRACT

In general, the teaching of hydraulics in secondary education institutions is limited, focusing on fundamental subjects such as fluid, pressure, the law of continuity and the Bernoulli principle; topics that, although they form part of the bases of the hydraulics, the way in which they are taught mobilizes processes of memorization and application of algorithms for the solution of problematic situations, ignoring that the hydraulics is one of the branches of the physics that more incidence has the daily life of students. This situation is rooted in the restricted training received by teachers of physics with respect to this discipline, who in exercise, following their university training, resort to the methods used by their teachers or textbooks to teach the topics of hydraulics. Consequently, it becomes inescapable the need to find new elements that strengthen the teaching processes of this branch of physics. A tool that is usually ignored is the history of hydraulics, ignoring that in this one can find those elements of causality that contributed to its development and establishment as a scientific discipline, which could provide valuable experiences that enable the improvement of the teaching of the same. Therefore, in the search for some elements that are pending in the teaching processes, in the present research work a historical tour is made through the studies carried out by some of the most influential people in the development of hydraulics, in particular, the study carried out by the Swiss mathematician and physicist Johann Bernoulli through his work *Hydraulics*.

Keywords: hydraulics, Johann Bernoulli, history and teaching of physics.

INTRODUCCIÓN

Pese a que la física nació de la necesidad del hombre por comprender algunos fenómenos de su cotidianidad, es una de las disciplinas que más ha sido relegada en las instituciones educativas siendo reducida a la memorización de algoritmos y asumida como una asignatura más, ajena a la cotidianidad de los estudiantes. Situación que no es ajena a cada una de las ramas que conforman esta ciencia.

Desde el agua que sale del grifo hasta el aire acondicionado, la hidráulica se constituye como una de las áreas de la física que ha permeado el quehacer diario del hombre a lo largo de la historia; mecanismos producto del desarrollo práctico y teórico que dieron paso al nacimiento de la hidráulica como disciplina científica. Es por ello, que en la actualidad resulta paradójico que se conozca poco sobre esta disciplina y la relevancia que tiene en aspectos que aparentemente son externos a la física como la construcción y funcionamiento del acueducto de una residencia.

La enseñanza de la hidráulica tiende a limitarse a la exposición de sus leyes fundamentales, enfocándose particularmente en sus modelaciones matemáticas, que aunque son importantes, hacen percibir a la hidráulica y a la física en general como una aplicación de la matemática. Además, atendiendo a la estrecha relación entre la hidráulica y los fenómenos a los que los estudiantes se enfrentan diariamente, la actividad experimental ha sido relegada a imaginar los fenómenos, en lugar de modelarlos y analizarlos. Por ende, se hace necesario cambiar la manera en que se enseña esta disciplina y buscar alternativas que ayuden a enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la misma.

Para cumplir este objetivo existen diversos caminos, cada uno con sus bifurcaciones, de los cuales uno de los que menos se tiene presente es estudiar los diversos elementos de causalidad que

dieron pasó al establecimiento científico de la hidráulica. La historia, empleada de manera adecuada, se constituye en una rica fuente de experiencias que contribuirían a cambiar la manera tradicional de percibir la física y enseñarla como un acumulado de leyes y ecuaciones. Esto se debe a que la historia evidencia que la hidráulica, al igual que otras disciplinas, no compone un producto que surgió completamente elaborado, sino que a través de observaciones, experimentos y errores, ha evolucionado para convertirse en la disciplina sólida que se conoce en la actualidad; evolución de la cual se pueden encontrar valiosos elementos que nutran la enseñanza de esta disciplina.

Así, realizando un análisis histórico contextualizado a la obra *Hydraulics* de Johan Bernoulli, quien fue uno de los grandes matemáticos del siglo XVIII que aportó al desarrollo de la hidráulica, se rastrearán algunos aspectos de carácter conceptual y experimental que pueden contribuir a la enseñanza de la hidráulica desde las bases de la educación, que son los docentes de física en formación. Para esto, se recurrirá a fuentes primarias y secundarias que permitan estudiar cómo era el estudio de la hidráulica antes de Johann Bernoulli; posteriormente, se analizarán los elementos que brindó Johann al buscar fundamentar los resultados que sus antecesores asumían como válidos a través de la experiencia, y de este último análisis se extraerán elementos que podrían aportar al mejoramiento de la enseñanza de la hidráulica en las instituciones de educación superior, particularmente en los programas académicos de formación de docentes de física.

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Generalmente la enseñanza de la física se limita a la presentación de ecuaciones o fórmulas matemáticas que modelan determinado fenómeno o concepto físico a presentar, brindando así una definición matemática del concepto e ignorando su naturaleza física. Seguido a esto, se realiza un experimento que demuestra la validez de dicha expresión matemática y se plantea un ejemplo donde se deben emplear las ecuaciones para resolver algorítmicamente un problema físico sin comprender la esencia de la situación propuesta.

Este modelo tradicional conlleva a que el aprendizaje por parte del estudiante se limité a la memorización de expresiones matemáticas que deben ser empleadas en la solución de problemas físicos (Méndez, 2012), ocasionando que el estudiante tenga una concepción matemática hacia la física considerándola como una ciencia compleja y abstracta, que sólo se aplica en la solución de situaciones propuestas en el salón de clase y que no tiene relación alguna con los fenómenos a los que se enfrenta en su cotidianidad, desconociendo la naturaleza empírica de esta ciencia. Sin embargo, pese a las numerosas investigaciones que buscan potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la física apelando a la comprensión significativa de los fenómenos y conceptos, el modelo tradicional de su enseñanza aún perdura en la mayoría de las aulas de clase (Ruiz, 2005).

Respecto al papel de las prácticas experimentales o de laboratorio, estas tienen un papel secundario en el modelo tradicional, debido a que las pocas prácticas que se realizan están enfocadas a corroborar las leyes o teorías establecidas con anterioridad, verificando que las fórmulas expuestas efectivamente se satisfacen dejando de lado el estudio del fenómeno físico. Como sostienen Carrascosa, Gil, Vilches y Valdés (2006):

> *Tal vez el problema principal no sea el del número de prácticas realizadas, sino la naturaleza de las mismas… ante todo, el carácter de simple receta, su énfasis, casi exclusivo, en la realización de mediciones y cálculos,… la ausencia de muchos de los aspectos fundamentales para la construcción de conocimientos científicos tales como la discusión de la relevancia del trabajo a realizar y el esclarecimiento de la problemática en que se inserta, la participación de los estudiantes en el planteamiento de hipótesis y el diseño de los experimentos, el análisis de los resultados obtenidos, etc.* (p. 161).

Lo anterior pone en cuestión el papel formador y motivador que tradicionalmente se les adjudica a los trabajos prácticos de laboratorio (Gil y Gonzales, 1993), puesto que la manera como se suelen presentar estas prácticas hacen que el estudiante se desmotive frente a estas, debido a su carácter altamente procedimental que omite lo conceptual y lo fenomenológico; lo que nuevamente contribuye a la visión equívoca de la física mostrándola como una ciencia en la que lo importante es el resultado.

Esta manera de enseñar abarca cada una de las disciplinas de estudio de la física, desde las que estudian fenómenos más cercanos a la cotidianidad del estudiante como la termodinámica, hasta disciplinas en las que la naturaleza del fenómeno no es tan evidente e intuitiva como sucede con el electromagnetismo. Ante lo cual los profesores tienden a dar sus clases de manera algorítmica, explicando el concepto, proporcionando las ecuaciones, realizando ejemplos y talleres que preparen al estudiante en la ejercitación y aplicación de ecuaciones, todo ello sin tener en cuenta que cada disciplina tiene su propia naturaleza y particularidades que hacen que los procesos de enseñanza carezcan de linealidad ante la enseñanza de las diversas áreas de estudio.

Una de las disciplinas que se presenta con frecuencia en la cotidianidad del estudiante es la mecánica de fluidos, sin embargo, en su enseñanza se hace énfasis en la hidrostática y se relega la hidráulica, siendo los fenómenos propios de esta última con los que los estudiantes se enfrentan comúnmente en su contexto extraescolar, pues se pueden apreciar en las tuberías de agua de una vivienda, en la circulación y el proceso de respiración del cuerpo humano, además de sus aplicaciones en la industria, particularmente en el diseño de barcos y aviones, entre otras utilidades que permiten cuestionarse sobre la importancia de enseñar y aprender hidráulica en las instituciones tanto de educación superior como de educación media. No obstante, si se enseña hidráulica, esta se restringe a la presentación de las fórmulas que modelan la *Ley de la Continuidad* y el *Principio de Bernoulli* sin reflexionar sobre la esencia de estas dos leyes fundamentales. A partir de esto, surge la necesidad de replantear la manera en que se debería enseñar la hidráulica propendiendo por la comprensión significativa de los fenómenos propios de esta disciplina y las leyes que la rigen, en lugar del aprendizaje memorístico y algorítmico de sus fórmulas.

Por esta razón se han realizado diversas investigaciones sobre la manera en que se enseña la hidráulica y las herramientas que contribuirían al mejoramiento de dicho proceso, algunas de las cuales han arrojado como resultado que al momento de introducir la hidráulica en los cursos de física universitarios, los estudiantes tienden a tener dificultades con las características propias de los fluidos en movimiento. Por ejemplo Fraser, Pillay, Tjatindi y Case (2007) afirman que ciertas dificultades que presentan los estudiantes frente al aprendizaje de la hidráulica están vinculadas tanto con el concepto de presión, cuando el fluido está en movimiento, como con el flujo a través de tuberías cuyo diámetro no es constante.

Por su parte, Homsy (2001) sostiene que las dificultades frente a la hidráulica que presentan los estudiantes están relacionadas con la dependencia del fluido de una amplia gama de parámetros

tales como la geometría del recipiente en el que se desplaza, la presión interna, la densidad y la velocidad. Pero para Homsy la mayor dificultad se debe al paso de lo discreto a lo continuo al introducir la hidráulica, debido a que los estudiantes provienen del estudio de una dinámica de lo discreto donde los cuerpos u objetos que se estudian tienen una forma rígida e invariante; lo que condiciona y limita al estudiante al enfrentarse a un fluido en movimiento. Además, aunque los fluidos en movimiento hacen parte de la cotidianidad del estudiante, algunos de los resultados que se deducen de estos atentan contra la concepción intuitiva del estudiante, como cuando se cree que la fuerza gravitacional es la única causante de que se escape el fluido de un tazón lleno de agua a través de un orificio abierto en su costado; causando así, problemas en la comprensión de los conceptos y leyes propias de la hidráulica al relacionarlas con la perspectiva empírica del estudiante.

Todo lo anterior refleja que la enseñanza tradicional de la física no desarrolla el carácter científico en el estudiante, esto es, el estudiante no cuestiona los conceptos enseñados y tampoco establece una relación entre sus conocimientos previos y lo que está por aprender. Lo que implica, en el sentido de Ausubel (1980), que el estudiante no construye un aprendizaje significativo, ya que los conceptos aprendidos no son ligados unos con otros. A esto, Cardona E., Cardona M. y Serna (2014) añaden que la forma en que se suelen presentar los conceptos, excluye su epistemología y su desarrollo histórico, lo que evidencia una postura positivista de la ciencia presentándola como una fábrica que produce verdades acabadas e irrefutables.

Es respecto a la disociación entre el concepto físico y su desarrollo histórico, que ha surgido una línea de investigación, que por el contrario muestra que la historia de la ciencias es una fuente valiosa de herramientas para potenciar el proceso de enseñanza de la misma, y como menciona Kuhn (2006), si “se considerase como algo más que un acervo de anécdotas o como algo más que

mera cronología, la historia podría provocar una transformación decisiva en la imagen de la ciencia que ahora nos domina" (p. 57).

Efectivamente, si se indaga en la historia de la física, se encuentra que esta, al igual que otras ciencias como la biología y la matemática, surgió de la búsqueda incesante del hombre por conocer y explicar todas aquellas situaciones con las que se enfrentaba en su cotidianidad. De las necesidades prácticas del hombre surgió la necesidad de experimentar y formular hipótesis frente a los fenómenos propios de la hidráulica para posteriormente establecer estos resultados a partir de teorías y fórmulas matemáticas que permitieran generalizarlos y modelarlos; razón por la cual se hace evidente la necesidad de conocer el devenir histórico de los conceptos físicos para nutrir la enseñanza de los mismos en pro del aprendizaje significativo de estos, como lo menciona García y Cerquera:

> *En los últimos años las investigaciones en el campo de la enseñanza de las ciencias muestran un espacio de reflexión significativo en la pertinencia y uso de la historia de las ciencias, campo que posibilita al maestro construir elementos de análisis para establecer relaciones más dinámicas con el conocimiento científico, pues tradicionalmente su radio de acción se ha reducido a transmitir y no a contextualizar los saberes de las ciencias en el ámbito educativo* (2004, p. 43).

Por lo tanto, la historia de las ciencias y en particular la historia de la física es una herramienta potencial para su enseñanza, así lo evidencian diversos autores que muestran como resultado de sus investigaciones algunas de las ventajas que trae la implementación de la historia de la física en el aula de clases; algunas de estas son:

- La historia de las ciencias humaniza la ciencia, tornándola más atractiva para el estudiante, ya que le permite conectarse personalmente, contextualizare y verse influenciado culturalmente por esta (Matthews, 1994).
- La historia de la física estimula el pensamiento crítico de los estudiantes hacia lo enseñado, puesto que muestra cómo los conceptos y teorías físicas que en su momento eran verdades científicas, han tenido que ser reevaluadas y transformadas (Godoy, 2013).
- La historia de las ciencias permite recopilar las experiencias que realizaron los científicos en su época y que los llevaron a plantear sus hipótesis, de tal manera que los estudiantes al enfrentarse a una situación física se arriesguen a formular sus propias soluciones o interpretaciones (Castiblanco y Nardi, 2013).

La historia del desarrollo de la hidráulica se remonta a las antiguas civilizaciones, puesto que en la construcción de las ciudades, el suministro de agua a cada uno de los hogares se convirtió en un asunto primordial para la población, por ello los ingenieros de aquella época realizaban estudios para la construcción de obras civiles como acueductos, sistemas de riego para las plantaciones, pequeñas represas o diques para detener las inundaciones. Sin embargo, los conocimientos que tenían dichos ingenieros eran de carácter práctico y se limitaban a la generalización empírica de las técnicas para la construcción de estos sistemas de acueducto, deberían pasar varios siglos para que el hombre se interesara por analizar científicamente estas nociones intuitivas para dar vida a la hidráulica y en general a la mecánica de fluidos; no fue sino hasta el siglo XVII cuando Isaac Newton presenta una majestuosa obra titulada *Philosophieae Naturalis Principia Mathematica* que cambiaría la forma de ver el mundo, incluida la manera en que se estudiaban los fluidos. En el siglo XVIII basados en los trabajos de Newton y Leibniz, unos de los primeros en plasmar de forma teórica la mecánica de fluidos fueron Johan Bernoulli y su

hijo Daniel, ambos de manera magnifica la desarrollan y describen en dos grandes obras; sin embargo, Johann es quien lo presenta de forma más concreta y clara en su obra *Hydraulics*.

Con lo plasmado anteriormente acerca de los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la hidráulica y los aportes que realiza la historia de las ciencias en particular la historia de la física a su enseñanza, un análisis histórico de la hidráulica desarrollada por Johann Bernoulli puede contribuir a potenciar la enseñanza de esta disciplina, mostrando su génesis, desarrollo contextual, actividades experimentales **y** problemáticas a las que se enfrentó; por lo cual cabe preguntarse:

¿Qué elementos puede proporcionar un análisis histórico de Johann Bernoulli para potenciar la enseñanza de la hidráulica?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Brindar elementos a los docentes en formación para la enseñanza de la hidráulica a partir de un análisis histórico de Johann Bernoulli.

1.2.2 Objetivos específicos

- Establecer las problemáticas contextualizadas previas a la obra de Johann Bernoulli, que conllevaron al surgimiento de la hidráulica como disciplina científica.
- Realizar un análisis histórico del contenido referente a la hidráulica plasmado en el capítulo I de la obra *Hydraulics* de Johann Bernoulli.
- Identificar elementos que contribuyan a la enseñanza de la hidráulica desde la historia de las ciencias y la actividad experimental.

1.3 Antecedentes

Desde perspectivas como la historia, la epistemología y la filosofía de las ciencias, son numerosas las investigaciones que se han realizado respecto a la mecánica de fluidos, en particular, sobre la hidráulica. La mayoría de estas, exponen los aspectos prácticos, teóricos, contextuales, epistemológicos y filosóficos que contribuyeron al establecimiento de la hidráulica como un campo de la física. Además, estas investigaciones evidencian que la hidráulica al igual que otras ramas de la física, no ha tenido un desarrollo lineal y que surgió como respuesta a las preguntas que el hombre se ha planteado en torno a las características y el comportamiento de fenómenos de su cotidianidad que involucran a los fluidos en movimiento.

Un estudio reciente sobre la historia de la hidráulica es el que ha realizado el docente cubano Félix Riaño, que con el propósito de aportar a la enseñanza de esta rama de la mecánica de fluidos, llevó a cabo un análisis histórico en el que da a conocer ciertos aspectos teóricos, prácticos y contextuales poco conocidos del desarrollo de la hidráulica, los cuales argumenta ser erróneamente omitidos en su enseñanza, pese a que pueden contribuir a la motivación para el aprendizaje de los conceptos y leyes de la hidráulica por parte del estudiante. Es así como Riaño distribuye su trabajo de investigación en tres artículos: *El nacimiento de la hidrodinámica teórica (2014), El nacimiento de la hidráulica experimental (2015) y La hidráulica experimental en el siglo XVIII en Francia (2016).*

En el primer artículo, Riaño realiza una breve descripción de la vida y obra de Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Jean Le Rond D'Alambert y Alexis Claude Clairaut, cuatro grandes matemáticos del siglo XVIII cuyos aportes a la hidráulica hicieron que esta surgiera como un nuevo campo teórico y práctico de la física. De esta manera, muestra como Daniel Bernoulli al

considerar el fluido como un conjunto de partículas minúsculas que ejercen fuerza interna (presión) entre sí y contra las paredes del recipiente que lo contiene, obtiene un enunciado general de lo que actualmente es conocido como el *Principio de Bernoulli*[1]. Mientras que Euler, basado en sus estudios sobre el movimiento de un fluido ideal, deduce las denominadas *ecuaciones de Euler del movimiento de los fluidos* y a su vez introduce el concepto de presión que se convierte en una noción trascendental para la hidráulica y en general para la mecánica de fluidos; con esto, Euler logra establecer de manera más precisa y detallada el actual Principio de Bernoulli.

El propósito del segundo artículo, es mostrar algunos aspectos relevantes que dieron origen a la hidráulica experimental durante los siglos XVI y XVII. Para ello, parte de dos grandes científicos que comenzaron a establecer la experimentación y la observación como base del rozamiento científico, Leonardo Da Vinci y Galileo Galilei. Ambos afirman que tanto la experimentación como la observación juegan un papel preponderante a la hora de analizar un fenómeno natural, puesto que estos contribuyen a la confrontación de las hipótesis y a la vez pueden dar origen a nuevas interrogantes que conllevan a una mejor comprensión de dicho fenómeno; es por esto que la experimentación y la observación surgen como parte fundamental del conocimiento.

Posteriormente, continúa con Benedetto Castelli y Evangelista Torricelli, discípulos de Galileo, quienes siguiendo el método científico establecido por su mentor, enuncian respectivamente dos leyes fundamentales de la hidráulica, la *Ley de la Continuidad*[2] y el cálculo

[1] Cabe que aclarar que de acuerdo con Riaño (2014), Daniel Bernoulli sólo establece una relación entre la fuerza interna (presión) y velocidad de un fluido, de echo afirma que "nadie puede decir cómo y cuándo se le atribuyó a Daniel Bernoulli la autoría de lo que hoy conocemos como el teorema que lleva su nombre" (p. 72).

[2] Investigaciones recientes muestran que la *Ley de la Continuidad* fue expuesta de forma básica por Leonardo Da Vinci en uno de sus escritos. Sin embargo, dicho escrito fue encontrado casi tres siglos después de que Leonardo los escribiera.

de la velocidad de salida de un líquido por un agujero en el fondo de un recipiente, conocido actualmente como el *Teorema de Torricelli*. Es precisamente Torricelli, quien además de probar que el aire es un fluido gaseoso que rodea la superficie de la tierra, teniendo un comportamiento similar a un mar de agua, consigue explicar varios fenómenos referentes al aire e incluso logra medir la presión atmosférica gracias a la invención del barómetro de mercurio; lo que a su vez dio paso a la demostración de la existencia del vacío. Finalmente, Riaño concluye con dos grandes físicos, Edme Mariotte, quien es reconocido por establecer la ley de la elasticidad de los gases, y Doménico Guglielmini, quien realizó el primer tratado sobre la hidráulica fluvial. Así mismo, ambos desarrollaron diversos tratados y experimentos sobre el comportamiento del agua en canales, tuberías y ríos, los cuales conformaron parte de los cimientos para posteriores trabajos sobre hidráulica de ingenieros y científicos como Newton, quien cita parte del trabajo elaborado por Mariotte en su *Principia*.

Por último, en el tercer artículo, y como una continuación de lo expuesto en el segundo, Riaño expone los principales aportes que realizaron a la hidráulica experimental durante el siglo VXIII los franceses Henri De Pitot, Antoine Chezy, Charles Bossut, Jean Charles Borda, Pierre Luis Georges Du Buat y Charles Augustin Coulomb. Este grupo de físicos e ingenieros franceses perfeccionaron y ampliaron los resultados conocidos hasta el momento sobre el comportamiento de los fluidos en movimiento, en especial el de los líquidos, pues entre sus estudios resalta el análisis que realizan sobre la pérdida de carga o la resistencia de un líquido al desplazarse por canales, tuberías o desagües. Incluso, extienden este análisis a la resistencia que experimenta un objeto con determinada forma geométrica cuando se desplaza en un líquido; arrojando como conclusión que la resistencia sobre los cuerpos se incrementa a medida que los canales son más

estrechos, resultados que contribuyeron a la mejora del diseño de barcos e invenciones de máquinas hidráulicas.

Por otro lado, partiendo de que el alumno debe entrenarse en la construcción de modelos mentales contextualizándolos en determinada área de estudio, en este caso en la mecánica de fluidos, Alain Ulazia (2015), realiza un análisis histórico de esta rama de la física para mostrar cómo la analogía[3] junto con otros instrumentos heurísticos le permitieron a científicos como Daniel y Johann Bernoulli realizar modelos mentales sobre problemas complejos referentes a la hidráulica, logrando solucionarlos de una forma más sencilla. De acuerdo con esto, Ulazia afirma que dichas analogías y modelos mentales se pueden introducir estratégicamente en el aula de clase, cuando se presente un experimento o un problema físico, de tal forma que el estudiante entienda la manera en la que los científicos lo afrontaron, y así, llegado el momento en el que éste se enfrente por sí mismo a un problema físico, cree sus propias estructuras mentales para resolverlo. Es por esto, que en su artículo *La analogía provocativa como estrategia pedagógica: el caso de la historia de la mecánica de fluidos*, se exponen dos analogías realizadas por Daniel y Johann Bernoulli para vislumbrar cómo estos eruditos, elaborando experimentos mentales, afrontan por separado dos problemas cuya solución práctica se dificulta de acuerdo a las herramientas experimentales con las que se contaban en aquella época.

Por ejemplo, Ulazia trae a colación la analogía que realiza Johann Bernoulli cuando se cuestiona sobre cómo es que el flujo del agua a través de un tubo que de repente disminuye de diámetro permanece constante luego de dicha constricción. Johann, no había podido resolver este problema hasta que un día observó cómo se formaban remolinos en un río cuando este pasaba de

[3] Ulazia define la analogía como un metaoperador que participa desde el exterior teórico de la configuración de un problema, más que desde el interior, es decir, la analogía, en el marco de la resolución de problemas conlleva a un cambio en la representación del problema.

una zona amplia a una más angosta, lo que para él significo la solución a su problema. Imaginó que también debían formarse remolinos en el tránsito del tubo de mayor al de menor diámetro, ocasionando que el flujo se acelerara, conservando así el movimiento continuo del agua (Figura 1). Es así, como "el remolino del rio se convierte en una fuente analógica transferida a la zona de transición de los conductos activando esquemas mentales visuales en forma de corrientes o trayectorias de flujo" (p. 167). Por ende, es este tipo de acciones las que realizaron los científicos cuando se enfrentaron a diversos problemas y que se suelen omitir al presentar sus resultados, las que demuestran que "la historia de las ciencias es un referente importante para la formación de maestros" (p. 164), puesto que este tipo de acciones se pueden convertir en herramientas didácticas, que al ser tratadas adecuadamente, podrían posibilitar una mejor comprensión de del quehacer científico.

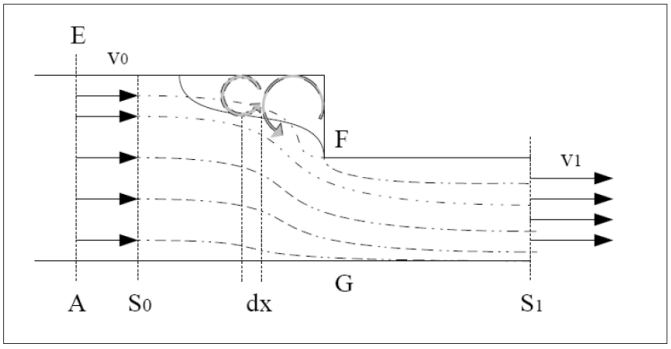


Figura 1. "El remolino de Johann Bernoulli" (Ulazia, 2015, p. 168).

No obstante, algunos autores realizan un análisis histórico enfocado a un concepto o una ley en particular, evidenciando sus orígenes y la evolución que ha tenido durante el transcurso del tiempo desde diversas perspectivas que surgen en relación con su comprensión. Este el caso de Edmundo Pedroza, Josefina Ortiz y Francisco Martínez, quienes en el 2007, con el propósito de mostrar los aspectos más relevantes del *Principio de Bernoulli* y la ecuación que lo representa, elaboran un análisis histórico de este y lo comparten a través de su artículo *Historia del teorema*

de Bernoulli. Dicho análisis inicia con Benedetto Castelli, quien en el siglo XVI logra establecer la que actualmente es conocida como la *Ley de la Continuidad* o del Caudal, cuya deducción contrario a lo que se esperaría, la realiza observando el método que emplean los joyeros para adelgazar un hilo de oro haciéndolo pasar a través de un orifico de menor diámetro, midiendo la velocidad del hilo antes y después de cruzar el orifico. Por medio de estas observaciones, Castelli notó que la velocidad del hilo aumentaba después de pasar por el orificio; sin embargo, tanto el peso como el volumen del hilo permanecían constantes. Fue así, como realizando experimentaciones con tubos y analizando el cauce de los ríos comprobó que lo mismo ocurría con los líquidos. Hecho que no sólo influiría en el establecimiento del *Principio de Bernoulli*, sino que también evidencia que no siempre los conceptos propios de una disciplina se originan en el interior de la misma.

Luego, los autores hacen mención a Evangelista Torricelli quien inspirado en los trabajos de Galileo Galilei sobre la caída de los graves logra plantear el enunciado de lo que hoy en día se conoce como el *Teorema de Torricelli*; además, plantea un problema que se torna fundamental para el estudio de la hidráulica en el siglos XVII y XVIII: ¿Cómo se comporta un líquido cuando se hace un agujero en el fondo del recipiente que lo contiene?

Isaac Newton se enfrentó a dicho problema postulando su idea sobre las cataratas, que consistía en que al abrir un agujero en el fondo del recipiente que contiene al líquido, el movimiento de este al interior del recipiente es similar al de una catatara. Idea que es refutada experimentalmente por Daniel Bernoulli, afirmando que no se forman cataratas al interior del recipiente, sino que el líquido se comporta como si estuviera compuesto por tubos infinitamente pequeños que lo transportan desde la superficie hasta el orifico (Figura 2). Es este problema, y en particular, el análisis de cómo es el comportamiento del agua cuando sale por un agujero en el

fondo de un recipiente que la contiene, es el que lleva a Daniel a establecer la relación entre la presión y la velocidad de un fluido en movimiento.

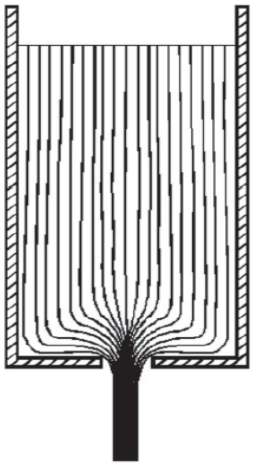


Figura 2. Comportamiento de un líquido al salir por un agujero ubicado en el fondo del recipiente que lo contiene, según Daniel Bernoulli (Pedroza, Ortiz y Martínez, 2007, p. 43).

Finalmente, Johann Bernoulli retoma el problema y le da una nueva perspectiva al introducir lo que denominó como líneas de corriente, reescribiendo la relación obtenida por su hijo Daniel, resultado que posteriormente sería bautizado como el *Principio de Bernoulli*. Con esto, los autores concluyen que a pesar de que a Daniel le es atribuida la autoría de dicho principio, esta debería ser de su padre, pues es él quien le da una mejor explicación y comprende lo que este realmente significa.

A su vez, Ángel Enrique Romero, Luz Dary Rodríguez y Yirsen Aguilar, en su trabajo denominado *La formalización del estado de equilibrio de los fluidos: El concepto de presión interna como variable de estado* (2008), teniendo como objetivo proporcionar algunos elementos para la enseñanza y formalización de la hidráulica, realizan un análisis histórico y epistemológico referente a un concepto fundamental para esta disciplina, el concepto de presión interna. De acuerdo con los autores, el concepto de presión usualmente se suele definir como la fuerza ejercida

por unidad de área, significado que deriva de la dinámica de objetos o cuerpos rígidos; sin embargo, a partir del análisis histórico-epistemológico realizado a los trabajos sobre hidráulica que llevó a cabo Leonhard Euler, los autores demuestran que él no considera la presión como la fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene, sino como una variable de estado del fluido mismo, esto debido a que:

> *Euler caracteriza localmente el medio fluido no solo en términos de su densidad* $q = q(x, y, z)$*, sino también en términos de la presión al considerarla igualmente como una función escalar de las coordenadas espaciales* $p = p(x, y, x)$*. Para Euler, la constancia en todo punto de la función presión,* $p = p\,(x, y, z) = cte$*, es la condición que define el equilibrio del fluido; inversamente, la variación de esta función,* $dp(x, y, z)$*, es la expresión que sintetiza la dinámica del medio fluido. De allí que podamos afirmar que el concepto de presión interna de Euler se configura como una verdadera variable de estado del sistema fluido* (p. 120).

Así, con este análisis histórico-epistemológico de los trabajos de Euler, los autores evidencian cómo la presión es descrita como una magnitud escalar que caracteriza el estado mecánico del fluido, mientras la fuerza no es más que una derivación de las interacciones debido a la diferencia de presiones entre dos puntos contiguos del fluido.

En consecuencia, los estudios mencionados anteriormente contribuyen teórica y metodológicamente al presente trabajo de investigación, debido a que se dedican al análisis histórico y epistemológico de conceptos tales como flujo, presión y perdida de carga; leyes como la de la *Continuidad* y el *Teorema de Torricelli*, que son fundamentales para el estudio de la hidráulica, mostrando que estos no provienen de un origen inmediato, sino de un proceso evolutivo

que usualmente se suele omitir en la enseñanza de esta disciplina. Además, evidencian cómo la experimentación realizada por científicos como Johann Bernoulli, hace parte fundamental de la edificación de esta rama de la mecánica de fluidos; lo que implica que algunas de estas experimentaciones pueden ser recontextualizadas en el aula de clases, de tal manera que se conviertan en una potente herramienta didáctica que permita potenciar el proceso de enseñanza de la hidráulica.

CAPÍTULO 2: EL DESARROLLO DE LA HIDRÁULICA HASTA FINALES DEL SIGLO XVII

2.1 La domesticación del agua en las antiguas civilizaciones: Mesopotamia y Egipto

El agua, se ha constituido como un elemento esencial para la vida humana. Desde los inicios de la humanidad desempeñó un rol preponderante en el acceso del hombre a dos de las fuentes más preciadas para su subsistencia, como lo es la hidratación y la alimentación. Motivo por el cual, se empezaron a construir asentamientos cerca de fuentes hídricas como ríos y lagos, que permitían obtener beneficios alimenticios a partir de la pesca y la caza, debido a que los animales también necesitan del agua. De igual manera, con el desarrollo de la agricultura también surge la necesidad del agua para la permanencia de los cultivos, y con la emergencia de la comunicación nace el uso de las fuentes fluviales como vías de transporte, eventos que indirectamente se constituyeron como las raíces que cimentaron la edificación de las primeras civilizaciones.

Una de las primeras grandes civilizaciones del hombre fue Mesopotamia, la cual se estableció en el territorio comprendido entre los ríos Tigris y Éufrates, región calurosa y árida debido a que la precipitación de las lluvias durante todo el año es menor a 200 mm, razón por la cual la agricultura no era una tarea fácil de llevar a cabo a pesar de contar con dos grandes ríos (Margueron, 2002). De hecho, estos grandes afluentes eran peligrosos en la temporada de lluvia, pues a pesar de que esta era corta, era suficiente para hacer que estos se desbordaran, ocasionando inundaciones en los pequeños pueblos aledaños, arrasando a su paso con los cultivos y el ganado.

Con el propósito de solucionar estas problemáticas, los ingenieros de la época se dieron a la tarea de diseñar y construir diques, casas elevadas y canales para el riego de los cultivos, que permitieran evitar no sólo los estragos de los periodos de invierno, sino también situaciones tan

cotidianas como transportar el agua en vasijas desde el río. Dichos canales eran construidos de tal forma que tenían cierto desnivel para que el agua transitara de forma continua; asimismo, contaban con diques en forma de compuerta para provocar inundaciones sobre los cultivos de forma controlada. De esta manera, dichos canales no sólo aliviaron el problema del riego, sino que también surgieron como un medio para el transportarse de forma rápida y eficaz. Hechos que demuestran que los mesopotámicos tenían un conocimiento intuitivo respecto a la flotabilidad y el desplazamiento sobre la superficie del agua para el diseño de barcos, lo que les permitió optimizar diversas labores propias de su cotidianidad.

Una situación similar sucedió en otra de las primeras grandes civilizaciones, la civilización egipcia, que se estableció a orillas del río Nilo, región de características similares a la de Mesopotamia, pues también es una región árida donde la agricultura sólo se podía desarrollar en la temporada posterior a la época invernal, debido a que el río Nilo se desbordaba e inundaba el valle, situación que los egipcios aprovechaban para la siembra. No obstante, la escasez de alimentos durante el verano era una situación que se debía solventar, por ello, con el propósito de extender sus cultivos, los egipcios desarrollaron una serie de canales para transportar el agua; incluso, de forma ingeniosa construyeron reservorios de agua para el cual los ingenieros encerraban un área determinada con muros de arcilla y rocas, de tal forma que cuando el río se desbordaba el agua que ingresaba en dicha construcción era retenida al cerrar las compuertas ubicadas en los muros (Albo, 2008). Dichas construcciones permitieron la permanencia temporal de los cultivos, además de controlar el cauce de los ríos en torno a las necesidades del pueblo egipcio.

A raíz de esto, se tendería a pensar que las problemáticas del pueblo egipcio fueron solucionadas a través de la construcción de diques; sin embargo, durante el verano, cuando el nivel

del Nilo descendía, causaba que el caudal por los canales disminuyera considerablemente, problema que nuevamente debía solucionarse para el mantenimiento continuo de los cultivos. Motivo por el cual, surgieron instrumentos como el *Shaduf* (Figura 3), con el que se podía bombear agua hacia los canales y llenar vasijas fácilmente.

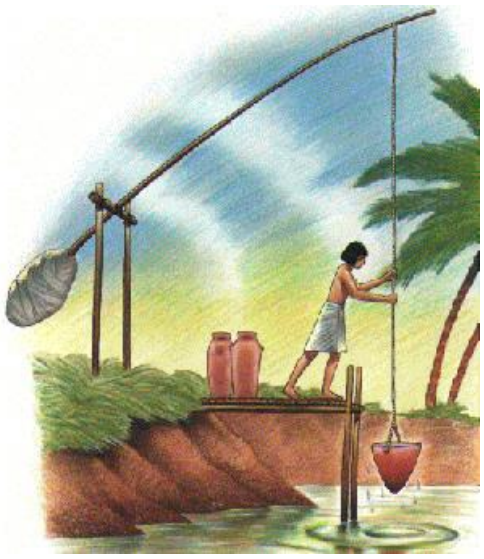


Figura 3. El Shaduf como instrumento para la recolección de agua (Barret, 2008).

Aun así, los problemas del hombre no sólo se han limitado a la búsqueda de vivienda, alimentación y fuentes de hidratación, también hunden sus raíces en aspectos tan cotidianos como la medición del tiempo. Con el correr de los años, la medición del tiempo pasó de ser una curiosidad a convertirse en una necesidad inmediata para el hombre, necesidad bajo la cual florecieron instrumentos como el reloj de sol en el antiguo Egipto; pero al caer la noche o cuando los días estaban nublados estos perdían su eficacia, lo que condujo al desarrollo de otras formas de medir el tiempo, fue así como nació la medición del tiempo a partir del agua. El mecanismo era

simple, una vasija con agujero en su parte inferior por donde salía el agua y el nivel del agua indica el tiempo[4] transcurrido debido a grabados en su interior.

Pero el empleo del agua por parte de los egipcios no sólo se restringió al tiempo y la agricultura, los egipcios también marcaron hito en el diseño de embarcaciones propulsadas por remos; principalmente, el desarrollo de la vela, aprovechado así la acción del viento, todo esto con el fin de transportar mercancía y como medio de transporte.

Es así, que gracias al dominio del agua, las técnicas de regadío y trasporte fluvial, se solucionaron los problemas de alimentación y mercancía en algunas de las antiguas civilizaciones como Mesopotamia y Egipto, siendo la domesticación del agua una etapa importante para comienzo de las llamadas sociedades hidráulicas (Margueron, 2002). Sin embargo, dicho conocimiento sobre el diseño y la construcción de sistemas de riego y embarcaciones fruto del empirismo, fue perfeccionado, comunicado y trasmitido de generación en generación de forma práctica sin formalización alguna (Rouse e Ince, 1975). De modo que, la relevancia del agua para el hombre contribuyó notablemente al desarrollo de las civilizaciones y tecnologías, pero dicho desarrollo sentaba sus cimientos en las necesidades prácticas del hombre, pues hasta el momento, no se percibía un interés intelectual frente al comportamiento del agua en todos aquellos fenómenos cotidianos para los egipcios y mesopotámicos.

2.2 La concepción de los fluidos en la antigua Grecia

Cuestiones como ¿Cuál es el origen del cosmos? ¿De qué está compuesto? ¿Cómo funciona?, comenzaron a inquietar al hombre, quien a su vez trató de encontrarles una respuesta racional dejando de lado aspectos asociados a la teología y mitología. Dichas preocupaciones por

[4] Cabe aclarar que los egipcios consideraban que el día estaba constituido como en la actualidad por 24 horas.

el cosmos caracterizaron el conjunto de las escuelas filosóficas de la antigua Grecia denominadas presocráticas.

Tales de Mileto, catalogado como uno de los primeros filósofos de la historia y quien funda la escuela Jónica, trata de resolver dichas cuestiones afirmando que el elemento del cual está constituido o fundamentado todo en el cosmos es el agua, argumentando que ésta se puede encontrar en las tres formas de materia existente, gaseoso, líquido y sólido; respecto a lo cual Aristóteles en su obra *Metafísica* interpreta que tal vez lo que condujo a Tales a realizar tal postulado fue la estrecha relación que tiene el agua con la vida (Bernabé, 2001).

Intrigado por la misma cuestión, Anaxímenes, integrante de la escuela Jónica, a diferencia de Tales postula que el elemento fundamental es el aire (*Aer*). Además de la existencia de un elemento primordial (*Archê*), Anaxímenes notó que el cambio también es parte fundamental del cosmos; y de los cambios del aire se pueden obtener los demás elementos; así, de la rarefacción del aire surgía el fuego, mientras que de su condensación se creaban nubes que a su vez generaban el agua, de la cual emanaba la tierra. Lo cual evidencia que Anaxímenes da una superioridad ontológica del aire sobre el agua (Posada, 2009).

De esta forma, se puede apreciar cómo los filósofos buscan respuestas a dichas cuestiones a partir de lo que percibían a través de sus sentidos, es decir, tratan de dar explicaciones desde su sentido común; sin embargo, dos escuelas presocráticas realizan un cambio rotundo en cuanto a la concepción que el hombre tiene sobre el cosmos. Por un lado, la escuela Pitagórica a partir de los desarrollos en aritmética y geometría, comienzan a notar cierta conexión entra las matemáticas y la naturaleza, siendo unos de sus descubrirnos más famosos la relación existente entre las notas musicales y las proporciones de una cuerda. Siendo este tipo de resultados, los que llevan a los

pitagóricos a afirmar que la naturaleza está en completa relación con las matemáticas, conjetura que de acuerdo con De la Torre (2002) muestra que "la naturaleza tiene una estructura racional al alcance de los seres humanos y que el lenguaje de las matemáticas es el más apropiado para idealizar la enorme complejidad de los fenómenos naturales y reducirlos a una simplicidad aprehensible" (p, 84).

Por otro lado, la escuela Atomista fundada por Leucipo y Demócrito, establece una teoría que se adelanta más de dos mil años a las teorías modernas, estos filósofos postulan que todo en el cosmos está constituido por partículas tan pequeñas que son imposibles de percibir por medio de la visión humana, denominadas átomos (*Átomon*). Estas partículas además de ser infinitas e indestructibles, cuentan con una cantidad también infinita de formas y tamaños que al combinarse dan como resultado los diversos seres existentes en el cosmos. Otra característica de dichas partículas es el constante movimiento inherente en el que permanecen, desplazamiento posible debido al vacío existente entre cada partícula; descripción que muestra al cosmos como un proceso mecánico (Bernabé, 2001).

No obstante, todas estas concepciones sobre el cosmos no satisfacían a Aristóteles, aunque toma de estas algunas hipótesis. Por lo cual, al igual que sus antecesores considera que cualquier cuerpo está constituido por la combinación de los cuatro elementos fundamentales, fuego, aire, agua y tierra; pero a diferencia de los antiguos pensadores, para Aristóteles ninguno de estos elementos era más primordial que los otros; de hecho, estos sólo se encontraban en el mundo *sublunar*, el cual describía como el espacio esférico comprendido entre centro de la tierra y los confines de la luna, mundo en el que todo es caos y desorden. Por otro lado, el espacio donde se encuentran la luna, el sol, los otros planetas y las estrellas, lo denominó el mundo *supralunar*, en el cual todo es perfecto, siendo el movimiento eterno y perfecto el movimiento circular uniforme

de dichos cuerpos celestes, cuyo espacio entre estos está ocupado por un elemento perfecto más sutil que el aire, al cual bautizo como éter.

Adicionalmente, Aristóteles consideraba que todo en la naturaleza se podía explicar a través del movimiento y el cambio. En cuanto al movimiento, Aristóteles además del reposo, afirma que hay dos tipos de movimiento, el *movimiento natural*, que es el movimiento innato de los elementos fundamentales; así, el movimiento natural del aire y del fuego es hacia arriba, mientras que el movimiento natural del agua y la tierra es hacia abajo, dirigido hacia el centro de la Tierra. Logrando así, una explicación acerca del peso y la levedad de los cuerpos, siendo no otra cosa más que una *dynamis* interna de estos (Guthrie, 1995). De igual forma, el quinto elemento, el *éter*, también posee un movimiento natural, que por supuesto al estar en el mundo de lo perfecto, es circular. Entretanto el *movimiento violento*, es aquel que se origina en un cuerpo de forma artificial debido a la acción externa de otro cuerpo que cambia la tendencia natural del primero, obligándolo a desplazarse, por ejemplo, un hombre al mover una mesa produce un movimiento violento debido al empuje que hace sobre esta. Sin embargo, Aristóteles afirma que para que haya dicho desplazamiento, esta acción o fuerza debe vencer la resistencia que se opone al movimiento, manifestando de esta manera que todo cuerpo presenta una oposición al movimiento que está estrechamente ligada con el medio en el que este se desplaza.

Es así como Aristóteles formula nuevas hipótesis frente a la explicación del cosmos, rechazando algunas de las ideas de sus antecesores que habían marcado hito hasta su época. Una de estas fue la existencia del vacío postulada por la escuela Atomista, por lo cual con el objetivo de demostrar la imposibilidad de dicha concepción, Aristóteles comienza a realizar afirmaciones establecidas en su obra *Física* (1998), partiendo de la caracterización de lo que significa espacio o lugar:

> *… el lugar existe parece claro por la sustitución de un cuerpo por otro, pues allí donde ahora hay agua luego habrá aire cuando el agua haya salido del recipiente, y más adelante algún otro cuerpo ocupará el mismo lugar. Este lugar, entonces, parece distinto de todos los cuerpos que llegan a estar en él y se reemplazan, pues allí donde ahora hay aire había agua. De ahí que pueda parecer claro que el lugar o el espacio hacia el cual o desde el cual los cuerpos han cambiado sea distinto de ellos* (p. 222).

> *El lugar posee ciertamente las tres dimensiones, longitud, anchura y profundidad, las mismas por las que todo cuerpo es determinado; pero es imposible que el lugar sea un cuerpo, porque entonces habría dos cuerpos en el mismo lugar* (p. 224).

> *Por su propia naturaleza no puede ser un elemento ni estar constituido por elementos, ni corpóreos ni incorpóreos; posee ciertamente magnitud, pero no es un cuerpo* (p. 225).

> *Admitamos pues, que el lugar es lo que primeramente contiene aquello de lo cual es lugar, y no es parte de la cosa contenida; además, el lugar primario no es ni menor ni mayor que la cosa contenida; además, un lugar puede ser abandonado por la cosa contenida y es separable de ella, y todo lugar posee un arriba y un abajo, y por naturaleza cada uno de los cuerpos permanece o es llevado a su lugar propio, y esto se cumple hacia arriba o hacia abajo* (p. 234).

Con estas consideraciones Aristóteles llega a la conclusión de que el lugar es “el límite del cuerpo continente que está en contacto con el cuerpo contenido” (p. 239); es decir, para Aristóteles el lugar no es más que un límite entre lo que es contenido y lo que lo contiene, así, en la ilustración

de la jarra, el lugar del agua o el aire no es más que el límite entre este (cuerpo contenido) y la jarra (continente).

De este modo, a través del concepto de lugar, Aristóteles niega toda posibilidad de la existencia del vacío, ya que el vacío definido por Leucipo y Demócrito como la ausencia total de contenido, va en contra de la definición del espacio como el límite cualitativo de un contenido real (Arrillaga, 1976). Pero más que contradecir definiciones, Aristóteles emprende la búsqueda de comprobar la inexistencia del vacío a través del análisis del movimiento de un cuerpo, para lo cual formula las siguientes experimentaciones mentales:

> *Si un cuerpo A se desplazará a través del medio B en el tiempo C, y a través del medio D (que es menos denso) en el tiempo E; si las longitudes de B y D son iguales, los tiempos C y E serán proporcionales a la resistencia del medio. Sean entonces B agua y D aire; en cuanto que el aire es más ligero y menos corpóreo que el agua, A pasará más rápidamente a través de D que a través de B. Habrá entonces entre ambas velocidades la misma proporción que aquella por la que el aire se diferencia del agua. De esta manera, si el aire es dos veces más sutil que el agua, A pasara a través de B en el doble de tiempo que a través de D, y por tanto el tiempo C será el doble que el tiempo E* (p. 225).

A lo cual, Aristóteles agrega la siguiente afirmación respecto a la resistencia de los cuerpos en movimiento:

> *Y siempre, cuanto más incorpóreo y menos resistente y más divisible sea el medio a través del cual el cuerpo se desplaza, tanto más rápidamente lo atravesará* (p. 225).

Con esto Aristóteles afirma que hay una igualdad entre la proporción de los tiempos y la oposición al movimiento en determinados medios, es decir, que la proporción entre los tiempos que un cuerpo tarda en desplazarse a través del agua y el aire, es igual a la proporción entre las resistencias de ambos medios. Sin embargo, como en el vacío no existe materia alguna, no hay resistencia, de modo que no sería posible establecer una relación entre la resistencia del medio de desplazamiento y el tiempo que éste tarda, por lo que Aristóteles concluye que el movimiento de los cuerpos en el vacío es un absurdo. Más aún, Aristóteles agrega que si se admitiese el vacío y el movimiento en este, se sabe que un cuerpo se mueve más rápido que otro, dividiendo el medio ya sea por su peso, forma o fuerza de arrojamiento, pero en el vacío no habría resistencia que superar, por lo que los cuerpos independientemente de su forma, peso o fuerza de arrojamiento tendrían siempre la misma velocidad, lo que es imposible. Incluso, menciona que "nadie podría decir por qué un cuerpo movido se detendrá, luego o tendrá que permanecer en reposo o se desplaza forzosamente hasta el infinito" (p. 254). Por lo cual, como menciona Pineda (2009, p. 231), "resulta paradójico que Aristóteles llegue a la ley de la movimiento inercial fundamentada por Galileo y Newton mucho después, para exhibirla como la prueba de la imposibilidad de la existencia del vacío".

Es a partir de la imposibilidad del vacío en la naturaleza, que Aristóteles explica otras problemáticas, como la justificación del movimiento de proyectiles cuando estos no eran empujados por otros cuerpos mientras estaban en el aire. Dicha explicación radica en que el aire desplazado por la parte frontal del proyectil, ocupaba inmediatamente el lugar que acababa de desocupar el proyectil en su desplazamiento, siendo esto lo que lo impulsaba continuamente durante su vuelo.

Como resultado, aunque Aristóteles no evidencia un interés intelectual frente al comportamiento de los fluidos y sus características, da un gran paso a lo que a dinámica se refiere, cuestionándose sobre el movimiento de las cosas, caracterizando la densidad y la resistencia del medio, además de su concepción sobre la inexistencia del vacío, una idea que perduraría por más de quince siglos. Todo esto a partir de una física cualitativa y teórica, derivada de la observación, el empirismo y el razonamiento.

2.3 El nacimiento de la hidrostática

Posteriormente, con las conquistas de Alejandro Magno comenzó la expansión territorial de Grecia, lo que llevó a que se convertirse en una nación potencia en la que Alejandría surge como su más grande centro de aprendizaje, lugar que fue la cuna grandes pensadores como Euclides y Arquímedes. Este último, podría catalogarse como uno de los primeros personajes que emplea las matemáticas para formular y validar algunos fenómenos propios de la hidrostática, puesto que empleando el método axiomático de Euclides, logra describir cualitativa y cuantitativamente la flotabilidad de los cuerpos en un fluido en reposo.

Para ello, Arquímedes parte del estudio del equilibrio de algunas figuras geométricas como paralelogramos, triángulos y segmentos parabólicos, empleando la propiedad que había denominado como el *Principio de la palanca*, trabajo consignado en su obra S*obre el equilibrio de los planos o el centro de gravedad de los planos*. Como el titulo lo expone, este tratado está dedicado al estudio del centro de gravedad de algunos objetos geométricos, concepto que paradójicamente no define en esta obra, de lo cual se podría inferir que tal vez lo haya definido en algún escrito extraviado; trabajo el cual pudo conducir a Arquímedes a cuestionarse por qué algunos objetos al sumergirse en un fluido no se hunden totalmente sino que permanecen en reposo

en la superficie o se sumergen parcialmente. No obstante, la historia no brinda evidencias de ello y dichas afirmaciones se restringen a ser conjeturas del pasado.

Lo cierto es que Arquímedes en su tratado constituido por dos volúmenes, titulado *Sobre los cuerpos flotantes*[5], fundamenta la flotación de los cuerpos al sumergirse en fluidos, los cuales los caracteriza de la siguiente manera:

> *Postulado I. Supongamos que un fluido es de tal carácter que, sus partes son uniformes y continuas, la parte que se empuja menos se conduce por lo que se empuja más; y que cada una de sus partes es empujada por el fluido que está por encima de ella en una dirección perpendicular si el fluido se hunde en cualquier cosa o se comprime por otro* (p. 538).

A partir de este postulado, se introduce una serie de proposiciones que se demuestran empleando la lógica Aristotélica adoptada por Euclides en los *Elementos*; proposiciones de las cuales se destacan las proposiciones IV, V, VI y VII:

> *Proposición IV. Un sólido más ligero que un fluido, si se sumerge en él, no se sumerge completamente, sino que parte de él se proyectará sobre la superficie* (p. 539).

> *Proposición V. Cualquier sólido más ligero que un fluido, si se coloca en el fluido, al estar sumergido el peso del sólido será igual al peso del fluido desplazado* (p. 540).

[5] Descritos en Adler, 1994

> *Proposición VI. Si un sólido más ligero que un fluido se sumerge forzosamente en él, el sólido será empujado hacia arriba por una fuerza igual a la diferencia entre su peso y el peso del fluido desplazado* (p. 540).
>
> *Proposición VII. Un sólido más pesado que un fluido, si se coloca en él, desciende al fondo del fluido, y el sólido, cuando se pesa en el fluido, será más ligero que su peso real por el peso del fluido desplazado* (p. 541).

Estas proposiciones componen lo que en la actualidad se conoce como *El principio de Arquímedes*, uno de los principios fundamentales de la hidrostática, reconocido por la célebre leyenda de Arquímedes y el problema de la corona. Consecuentemente, Arquímedes se ocupa del análisis de la flotabilidad y la condición de equilibrio de cuerpos con figuras geométricas particulares como los casquetes de paraboloides y de esferas.

De esta manera, Arquímedes abre un nuevo camino hacia el estudio de la hidrostática, debido a que no se limita a reflexionar cualitativa y metódicamente sobre sus fenómenos, sino que busca validarlos a partir del lenguaje de las matemáticas, dando paso a la formalización de la física y su establecimiento como disciplina científica; además de exaltar la relación entre las matemáticas y la naturaleza que conformaba la filosofía insigne de la escuela Pitagórica.

2.4 La experimentación como base de la ciencia: Leonardo Da Vinci y Galileo Galilei

Con el surgimiento del Imperio Romano y su eventual expansión en la que Grecia quedó absorbida, el conocimiento científico que se venía desarrollando en la diversas escuelas filosóficas se vio frenado, pero aquellos conocimientos prácticos y teóricos ya existentes fueron adquiridos por los romanos. A causa de dicho crecimiento Roma, se transformó en una metrópolis en la que el abastecimiento de agua se convirtió en una prioridad, por lo que se vieron en la obligación de

transportar agua desde otros lugares. Para esto construyeron grandes sistemas de acueductos, fuentes públicas y alcantarillados[6] que además de mortero estaban constituidos por tuberías de metales como plomo, cobre, bronce y otros materiales como la arcilla y piedra, que eran dispuestas de acuerdo a la presión que debían soportar. Situación que evidencia que el conocimiento empírico sobre el manejo y transporte de agua, estaba en esplendor, debido a que para la construcción de dichos sistemas, los ingenieros romanos debieron tener conocimientos asociados a la pendiente, la resistencia y su relación con la velocidad del flujo, pues de lo contrario el eficaz funcionamiento de estas obras no hubiera sido posible.

El desarrollo práctico del imperio romano continúo avanzando paulatinamente durante un extenso periodo de tiempo, en el que se puede destacar la invención de maquinaria accionada por corrientes de agua y aire, tal como funciona un molino. Sin embargo, la reflexión racional frente a los desarrollos prácticos fue escasa, acusándose por lo general al dogmatismo de la iglesia cristiana y la filosofía aristotélica por el poco desarrollo científico realizado durante este periodo de tiempo. Aun así, algunos pensadores comenzaron a cuestionar las teorías impuestas por el escolasticismo, formulando nuevas conjeturas que empezaron a permear en la civilización romana progresivamente; por ejemplo, Nicolás Copérnico y su hipótesis sobre el sistema solar heliocéntrico, fundamentada posteriormente por Johannes Kepler. Teorías que generaron una ruptura entre el escolasticismo y la reflexión intelectual, dando paso al nuevo despertar de la ciencia en el cual se destacan los aportes de Leonardo Da Vinci y Galileo Galilei.

Pese a que no se puede afirmar que Leonardo Da Vinci fue el primero en postular que la observación y la experimentación deben ser la base de la ciencia, lo que sí se sabe es que fue una

[6] Algunas de estos sistemas hídricos aún se pueden apreciar en la actualidad como por ejemplo en el Parque de los acueductos en Roma.

idea que defendió y aplicó en cada uno de los diversos campos de conocimiento en los que incursionó. Algunos de estos campos fueron la arquitectura y la ingeniería, de hecho una de sus principales obras civiles fue la desviación de una fracción del rio Arno[7], a través de un canal cuya longitud aproximada era de 84 Km, con el objetivo de que este funcionara como una fuente para irrigar los cultivos, accionar molinos, además de que fuese una vía de transporte para la comunidad aledaña a dicho canal.

Como se expuso anteriormente, la construcción de canales para el transporte de agua requiere de ciertos conocimientos sobre la pendiente y la resistencia, además de su relación con la velocidad y cantidad de caudal; conocimientos que evidentemente Leonardo poseía, debido a que la hidráulica era otra de las áreas de conocimiento que le cautivaba. Pero Da Vinci fue más allá de estas cuestiones, pues a partir de la observación comenzó a percibir la existencia de otros fenómenos relacionados con el movimiento del agua, los cuales empieza a reproducir y analizar a partir de la experimentación.

Además de analizar diversos fenómenos como el salto hidráulico, la conducción de agua por medio de tubos, el movimiento y vuelo de proyectiles, uno de los eventos que más llamó su atención, es el asociado con los chorros de agua que salen a través de orificios ubicados a diferente altura en un recipiente (Figura 4). Es así, como emplea la experimentación para establecer la relación que existe entre la altura del agujero y el alcance del chorro de agua que sale de este.

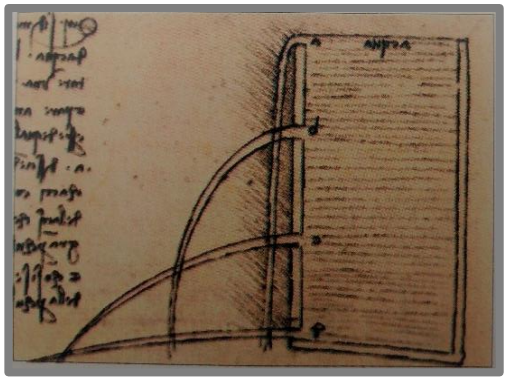


Figura 4. "Dibujo de Leonardo que muestra una caída de agua desde un recipiente a cuatro alturas diferentes" (Michelena, 1997, p. 19).

[7] Este rio atraviesa varias regiones de Italia como La Toscana, Florencia y Pisa.

Sin embargo, uno de sus trabajos más sobresalientes se debió a su interés por el flujo de agua a través de canales abiertos, incluyendo el análisis de ríos. En primera instancia, Leonardo se percata de que dependiendo de la forma geométrica y la posición en la que se ubique un cuerpo que obstaculice parte del flujo de agua, se forman diversas ondulaciones sobre la superficie de la misma (Figura 5), incluso advierte que:

> *La velocidad de propagación de las ondulaciones (superficiales) siempre excede considerablemente a la que posee el agua, porque el agua generalmente no cambia de posición; así como el trigo en un campo, aunque permanece fijo en el suelo, asume bajo la impulsión del viento la forma de las olas que recorren el campo* (Rose e Ince, 1957, p. 49).

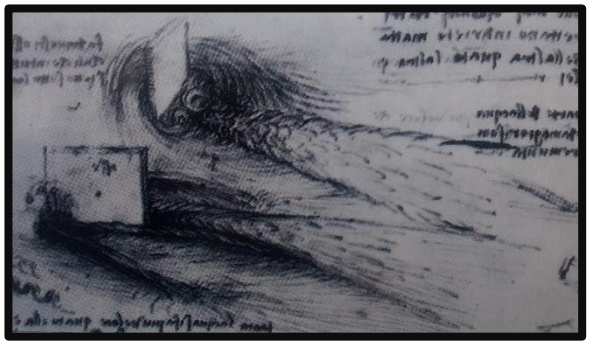


Figura 5. Propagación de ondas originadas por obstáculos en una corriente de agua (Michelena, 1997, p. 42).

Respecto al análisis de los ríos, Da Vinci afirma que "el agua de los ríos rectos es más rápida cuanto más lejos está de las paredes, debido a las resistencias" (p. 49), continúa argumentado que debido a la poca resistencia que proporciona el aire comparada con la de la tierra o la del material del canal, el agua que transita tanto en un canal como en un río se mueve más rápido en la superficie que en el fondo. Hecho que demuestra que Leonardo también se interesó por el estudio de la resistencia que se produce en el agua en movimiento; problemática que como ya se ha mencionado, siempre se ha tenido en cuenta para el diseño de los canales. Pero más interesante aún son las conclusiones a las que llega en este análisis en torno al caudal de los ríos:

> *Un río en cada parte de su longitud en un tiempo igual da paso a una cantidad igual de agua, cualquiera que sea el ancho, la pendiente, la rugosidad, la tortuosidad* (p. 49).

> *Un río de profundidad uniforme tendrá un flujo más rápido en la sección más estrecha que en la más ancha, en la medida en que el ancho mayor sobrepasa el menor* (p. 50).

Afirmaciones, que como se puede notar no son más que una anticipación, aunque de forma cualitativa, de la actual *Ley de la Continuidad*, que sería establecida más de un siglo después.

Por otro lado, Galileo Galilei, aunque no se enfoca en el comportamiento de los fluidos, realiza un brillante trabajo referente a la cinemática que posteriormente influiría en el desarrollo de la hidráulica. Su preocupación radica en que no encuentra satisfactoria la explicación que da Aristóteles al movimiento natural de los cuerpos, es decir, para Galileo el hecho de que los cuerpos caigan hacia abajo al ser soltados no es algo que dependa exclusivamente del peso de estos, es más, para Galileo el peso no conforma el causante fundamental de este fenómeno. Razón por la que emprende un camino basado en la observación y la experimentación para la consecución de una explicación más clara y precisa de la caída libre de los cuerpos.

Primero que todo, inicia con un análisis de la cinemática de los cuerpos, específicamente el movimiento uniforme, el cual Galileo (1945) lo define como:

> *Entiendo como movimiento uniforme aquel cuyos espacios, recorridos por un móvil en cualesquiera tiempos iguales, son entre si iguales* (p. 200).

De manera que Galileo considera un movimiento uniforme como aquel en el que desplazamiento de un móvil es directamente proporcional al tiempo, por lo que si un móvil en un tiempo *t* recorre una distancia *x*, entonces en un tiempo 2*t*, el móvil habrá recorrido una distancia 2*x*. En seguida, formula su primera proposición en cuanto al movimiento uniforme:

> *Si un móvil, que marcha con movimiento uniforme y con velocidad constante, recorre dos espacios, los tiempos de los trayectos son entre sí como los espacios recorridos* (p. 201).

Para demostrar este teorema Galileo emplea elementos propios de la geometría Euclidiana, probando que efectivamente en un movimiento uniforme con velocidad constante se satisface la proporción $\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_1}{t_2}$, donde t_1 y t_2 son los tiempos de recorrido de los desplazamientos x_1 y x_2 respectivamente. Luego de otras cinco proposiciones con las que fundamenta aún más el movimiento uniforme, Galileo procede a analizar el movimiento uniforme acelerado, en el que se encuentra incluido el movimiento de los cuerpos en caída libre. De nuevo, comienza por la definición de dicho tipo de movimiento:

> *Llamamos movimiento igualmente o uniformemente acelerado aquel que, partiendo del reposo, va adquiriendo incrementos iguales de velocidad durante tiempos iguales* (p. 216).

Para el análisis de este movimiento Galileo establece como base la experimentación y observación del movimiento de una esfera sobre un plano inclinado, advirtiendo que tanto la esfera como el plano no deben tener ningún defecto y estar bastante pulidos con el fin de minimizar lo más posible la fricción entre estos. Así, considerando como único axioma el que la velocidad adquirida por un móvil que se desplaza por diversos planos es la misma sólo cuando estos tienen

la misma altura (Figura 6), logra probar experimental y matemáticamente varias proposiciones en la que sobresale la segunda:

> *Si un móvil con movimiento uniforme acelerado desciende desde el reposo, los espacios recorridos por él en tiempos cualesquiera, están entre sí como la razón al cuadrado de los mismos tiempos, es decir como los cuadrados de esos tiempos* (p. 221).

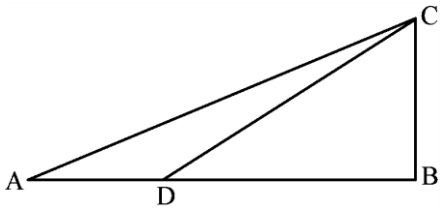


Figura 6. Dos planos inclinados AC y DC con la misma altura CB.

Para ilustrar la anterior proposición, como lo expone Sepúlveda (2003), si suponemos que el plano AC de la figura 4 tiene una longitud *l*, y una esfera soltada desde C recorre la longitud *l* en un tiempo *t*, Galileo notó que la esfera recorre *l*/4 en *t*/2, *l*/9 en *t*/3 y *l*/16 en *t*/4, por lo que la relación entre *l* y *l*/4 es 4, mientras que la relación entre los tiempos es 2; la relación entre *l* y *l*/9 es 9 y la relación entre los tiempos es de 3. Así, de forma general Galileo encontró que en el movimiento uniforme acelerado se da la relación $\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$, lo que indica que el desplazamiento es directamente proporcional al cuadrado del tiempo.

De hecho, a través de sus experimentaciones Galileo se percata de que al cambiar la esfera por una más pesada, los resultados que había obtenido permanecían invariantes, es decir, que independientemente del peso de la esfera esta tardará el mismo tiempo en recorrer la longitud del plano inclinado. Incluso, cambiando las inclinaciones del plano obtenía que el movimiento era independiente del peso; por lo que supuso que al poner el plano de forma perpendicular, esto es, un cuerpo en caída libre, el peso no influiría en el tiempo de caída del mismo. A esto Galileo agrega que la diferencia entre la velocidad de la caída de cuerpos de diferente peso se debe a factores como la resistencia que opone el medio a dicho desplazamiento, por lo que los cuerpos

caen más rápido en cuanto menos denso sea el medio, para esto Galileo idea el siguiente experimento: Si se toma un recipiente completamente lleno de mercurio y se dejan caer dos cuerpos de diferente peso, el primero que llega al fondo es efectivamente el que más peso tiene, que es lo que afirmaba Aristóteles, pero si se cambia el mercurio por el agua la diferencia en la velocidad de caída cambia, siendo esta vez un poco menor a la anterior, y si se hace la misma prueba en el aire la diferencia entre las velocidades de caída de los cuerpos es aún menor; por lo cual, si el medio fuese el vacío los cuerpos caerían con la misma velocidad:

> *Es mi intención declarar que no es la diversidad de peso la causa de las diferentes velocidades de los móviles distintos en gravedad, sino que estas diferencias dependen de accidentes exteriores y en particular de la resistencia del medio; de modo que eliminada ésta, todos lo móviles se moverían con los mismos grados de velocidad* (p. 102).

Así pues, Galileo encuentra en la experimentación y la observación una novedosa herramienta para explicar la caída de los cuerpos, mostrando que esta es totalmente independiente de su peso, deponiendo así la teoría Aristotélica. Luego de esto, Galileo dirige su mirada al movimiento de los proyectiles, también conocido como movimiento parabólico, el cual afirma está compuesto por los dos movimientos anteriormente estudiados; de modo que, un proyectil se desplaza horizontalmente con un movimiento uniforme y verticalmente con un movimiento uniformemente acelerado, los cuales son independientes entre sí, pero cuya composición da como resultado un movimiento parabólico, aseveración que constituye el primer postulado propio de este tipo de movimiento.

Es de esta manera, como Galileo Galilei junto a Leonardo Da Vinci, comenzaron a establecer un nuevo método científico en el que resalta la importancia del razonamiento a partir de la experimentación y la observación, para buscar la comprensión de los fenómenos presentes en la naturaleza, libre de la intuición que mana del empirismo presente en las antiguas civilizaciones.

2.5 Las primeras leyes de la hidráulica

El legado de Galileo lo siguieron dos de sus discípulos Benedetto Castelli y Evangelista Torricelli, quienes continuaron el método establecido por su maestro para el estudio de los fenómenos de la naturaleza, en particular, aquellos relacionados con los fluidos en movimiento.

El amplio conocimiento que tenía Castelli acerca del flujo de agua por los ríos, canales y tuberías, lo llevo a ser consejero de obras hidráulicas en algunas provincias italianas, por lo que su estudio estaba presente en la construcción de puentes, canales para la irrigación de cultivos, desviaciones y nivelaciones de ríos. Especialmente, la construcción de canales para el riego de cultivos de propiedad privada, le implicaba un costo al propietario por el caudal que transitaría por dichos canales, por lo que era importante construir canales con las medidas adecuadas para obtener el caudal deseado. Castelli, en sus investigaciones y experimentaciones notó que para medir el caudal de un canal o de un rio, no basta con medir solamente el área transversal de estos sino que también es necesario conocer la velocidad con la que circula el agua en dichas áreas. Estos conocimientos fueron presentados por Castelli en su tratado titulado *Della misura dell'acque correnti*[8], en el que se encuentran tres proposiciones (citadas por Rouse e Ince, 1957, p. 59) en las que plasma lo anteriormente mencionado:

[8] Sobre la medición de las aguas corrientes.

Secciones del mismo río descargan cantidades iguales de agua en tiempos iguales, incluso si las secciones mismas son desiguales.

Dadas dos secciones de un río, la proporción de la cantidad de agua que pasa por la primera sección a la que pasa por la segunda, es proporcional a la relación de la primera y segunda sección y a la relación de la primera y segunda velocidad.

Dadas dos secciones desiguales por las cuales pasan cantidades iguales de agua, las secciones son recíprocamente proporcionales a las velocidades.

Sin duda, estas afirmaciones son similares a las que había declarado Leonardo Da Vinci en su análisis sobre el movimiento de agua en canales y ríos; sin embargo, lo más probable es que Castelli haya descubierto este principio de forma independiente debido a que los escritos de Leonardo nunca fueron publicados además de permanecer un tiempo extraviados (Rouse e Ince, 1957), por lo que Castelli fue catalogado como el que estableció la actual *Ley de la Continuidad*[9], principio que describe la conservación de la masa en los fluidos ya que establece que la cantidad de fluido en un conducto cerrado debe permanecer constante. Por lo cual, si dos secciones transversales A_1 y A_2 de un fluido en movimiento llevan una rapidez v_1 y v_2 respectivamente (Figura 7), se cumple que $A_1 v_1 = A_2 v_2$, es decir, que el producto Av permanece constante, lo que indica que el caudal o la taza de flujo es invariante.

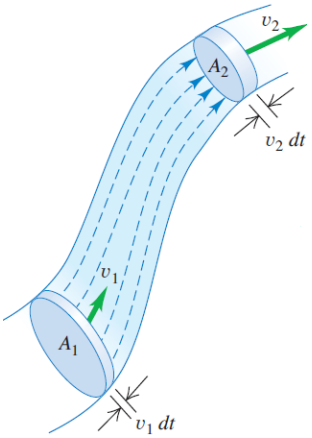


Figura 7. "Tubo de flujo con área de sección cambiante" (Young y Freedman, 2009, p. 467).

Por su parte, Torricelli intrigado con el trabajo de su maestro sobre el movimiento de los proyectiles continuó con la misma línea de estudio, adicionando una problemática en particular, el

[9] Debe tenerse en cuenta que en esta ley tal como se describe se considera que el fluido en cuestión es incomprensible.

comportamiento de los chorros de agua, pues en observaciones similares a las que realizó Leonardo Da Vinci sobre los chorros de agua, notó que estos describen una trayectoria similar a la de los proyectiles cuando el agujero está en el costado del tanque contenedor. Su análisis se basó en experimentos con agujeros a diversas alturas y en el fondo de la vasija contenedora, en los cuales, como resultado más sobresaliente encontró que la rapidez con la que sale el agua es proporcional a la raíz cuadrada de la altura entre el agujero y superficie del agua, en otras palabras, que la rapidez del agua es la misma que tendría un cuerpo que cae desde dicha altura (Figura 8), como lo afirma el mismo Torricelli (citado por Calero, 2008, p. 271):

> *Las aguas que salen violentamente tienen el mismo impulso [velocidad] en el punto de salida que cualquier cuerpo pesado o una gota de la misma agua, tendría si cayeran naturalmente de la superficie más alta del agua al orificio de salida.*

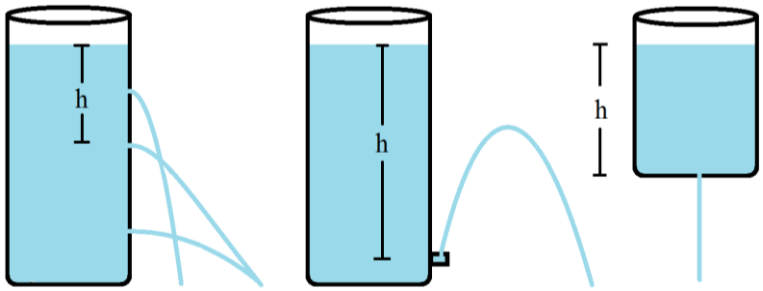


Figura 8. Experimentos de Torricelli con chorros de agua.

Actualmente, el resultado al que llegó Torricelli es enunciado como el *Teorema de Torricelli* y se describe matemáticamente como $v = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura entre la superficie del agua y el orificio de salida, v es la velocidad de salida del fluido y g la aceleración gravitacional; sin embargo, es necesario aclarar que la constante de proporción $\sqrt{2g}$ fue introducida décadas después, además este teorema es válido sólo cuando el agujero de salida del chorro es pequeño comparado con el tanque contenedor (Calero, 2008).

Otro importante trabajo que realizó Torricelli fue el que hizo con el barómetro, cuya invención le es atribuida, y aunque el objetivo principal no era medir la presión atmosférica, esta surgió como parte de los resultados obtenidos. El problema que Torricelli junto con su compañero Vincenzo Viviani deseaban analizar y de alguna forma solventar, es el por qué el agua no supera cierta altura ni con ayuda de las bombas hidráulicas. Como era habitual, la experimentación hacía parte del proceso de análisis científico de Torricelli, quien retomando el experimento realizado por Viviani, utilizando mercurio en vez de agua, Torricelli tomó un tubo de cristal sellado por un lado y lo llenó completamente de mercurio, sellando la parte abierta del tubo con su mano lo introdujo en un recipiente que también contenía mercurio (Figura 9), al destapar el tubo, observó que la columna de mercurio al interior del tubo descendió hasta alcanzar cierta altura. Realizando una y otra vez este proceso, cambiando parámetros como la longitud, la inclinación y la forma de del tubo, Torricelli observó que altura de la columna de mercurio siempre era la misma.



Figura 9. Experimento de Torricelli con mercurio (Pérez, 2005, p. 3).

Torricelli interpretó que esto era causado porque el aire debía ejercer una fuerza sobre la superficie del líquido en la vasija que hace que la columna se mantenga elevada; concluyendo que

el aire se comporta como un mar ejerciendo presión sobre todo lo que rodea. No obstante, otra importante cuestión que surgió durante la experimentación era que si la parte al interior del tubo estaba vacía, a lo que Torricelli mencionó que aunque no hubiera la posibilidad de que estuviera totalmente vacío, pues podría contener vapor de mercurio, era una forma de obtener un buen vacío, y que con unas excelentes mejoras del proceso de la experimentación se podría obtener un vacío perfecto (Herrera, 2012).

De esta manera, Castelli y Torricelli comienzan a desarrollar las primeras leyes que describen el movimiento del agua, desarrolladas a partir de la experimentación; además, emplean resultados propios de otras disciplinas de la física para describir y validar resultados propios de la hidráulica. Tal fue la magnitud de estos, que el estudio de esta disciplina científica transcendió las fronteras de Italia llegando a remotas provincias de Francia, cuna de personajes que tuvieron una gran influencia en el desarrollo de la hidráulica.

2.6 El desarrollo de la hidráulica en Francia: Edme Mariotte y Blaise Pascal

Como ya se expuso, el desarrollo del conocimiento práctico de la hidráulica llevó a la invención de maquinaria accionada por corrientes de agua o aire como los molinos, por lo que se debió tener presente cual era el flujo ideal de agua o viento para hacer que este se moviera, además del número de paletas y los ángulos a los que debían ubicarse.

Edme Mariotte considerado como el padre del método experimental en Francia debido a su amplio trabajo, dedicación y perfección (Rouse e Ince, 1957), se cuestiona sobre cómo es que el agua o el aire hacen mover las paletas de un molino y cómo la velocidad con la que estos se mueven influye en dicho movimiento. Primero que todo, Mariotte comienza con experimentaciones en los ríos con el fin de medir la fuerza que ejercen sobre las paletas de las

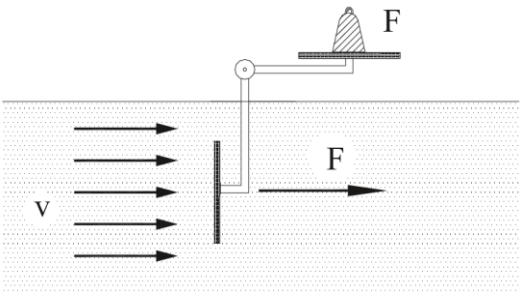


Figura 10. Instrumento de Mariotte para la medición de la fuerza ejercida por los ríos (Calero, 2008, p. 68).

ruedas hidráulicas y cómo varia esta con la velocidad del rio, para esto, diseña una especie de balanza, que posee una palanca en uno de los brazos que es introducida al rio, mientras que en el otro brazo se ubicaba el peso que equilibraba la fuerza que experimenta la placa (Figura 10); así, con el equilibrio de fuerzas lograba medir la fuerza que ejercía el rio sobre la palanca. Así mismo, introduciendo al rio flotadores separados una cierta distancia y enlazados entre sí, observó que el rio posee una mayor rapidez en la superficie, la cual disminuye a medida que se acerca al fondo o a las orillas (dato que ya había sido observado por Leonardo Da Vinci), lo que también sucedía con la magnitud de la fuerza; por lo que afirma que las aspas de un molino experimentan una fuerza de proporción directa a la velocidad con la que fluye el rio.

A su vez, Mariotte observa que el movimiento de las aspas de una rueda hidráulica también se puede analizar a través de un chorro de agua que las golpea haciendo que la rueda gire, por lo que se enfoca en el análisis del impacto de los chorros de agua, estableciendo así, como lo denomina Calero (2008) una mecánica de los chorros de agua. Eventualmente, Mariotte comienza describiendo cómo sucede el impacto o choque de un chorro de agua contra un cuerpo sólido, considerando que un chorro de agua no choca otro cuerpo tal como lo haría un cuerpo solido:

> *Porque el agua es fluida y está compuesta por un número infinito de pequeños corpúsculos que se deslizan sobre una antera, como si fueran pequeños granos de arena, sólo los primeros que se mueven adelante pueden ejercer la primera fuerza sobre los cuerpos que encuentran, y rebotan o se separan antes de que los otros como ellos en puedan tener un impacto en su turno* (citado por Calero, 2008, p. 65).

Es decir, que aunque Mariotte considera que un objeto que es impactado por un chorro de agua actúa igual a como si fuera impactado por objeto sólido, el chorro de agua no se comporta igual a un sólido al impactar otro objeto, pues este está compuesto por pequeñas partículas las cuales si se comportan como solidos al chocar, rebotando y chocando con las partículas posteriores o saliendo desviadas para todos lados, minimizando el impacto neto del chorro. Con esto, Mariotte define un chorro de agua como un conglomerado de corpúsculos que se mueve en conjunto siguiendo una dirección axial determinada por su sección y longitud (Calero, 2008). Luego, brinda lo que puede catalogarse como los cinco postulados de su mecánica de los chorros (citados por Rouse e Ince, 1957, p. 66):

I. *Los chorros no producen impacto por la acción de todas sus partes como lo hacen los cuerpos sólidos.*
II. *El agua que es descargada desde el fondo de un depósito a través de una abertura circular producirá un equilibrio por impacto con un peso igual al de un cilindro de agua que tiene para base esa abertura y para la altura la que hay entre el centro de la abertura y la parte superior superficial del agua.*
III. *Dos chorros de agua de igual tamaño que surgen de pequeñas aberturas en la base de varias tuberías llenas de agua a diferentes alturas, producirán equilibrio con pesos que son proporcionales a las alturas.*
IV. *Los chorros de agua de velocidad desigual soportarán por sus pesos de impacto que son proporcionales a los cuadrados de estas velocidades.*
V. *Los chorros de la misma velocidad a partir de diferentes aberturas soportarán por sus pesos de impacto que son proporcionales a los cuadrados de los diámetros de las aberturas.*

Como se percibe el análisis de los chorros de agua es similar al trabajo que realizó en los ríos, incluso podría catalogarse como una teorización de este, ya que en el cuarto postulado, afirma que la fuerza ejercida por un chorro de agua es proporcional al cuadrado de la rapidez de esta. No obstante, aunque se menciona que el estudio es referente al agua, Mariotte también realiza un análisis del comportamiento de los chorros de aire, los cuales producía a través de fuelles corroborando que para estos también se aplican los cinco postulados. Todo este análisis de los chorros de agua y aire, lo llevo a cabo a través de instrumentos (Figura 11) cuyo funcionamiento era similar al que uso en su estudio a los ríos. De hecho, en este análisis relaciona la resistencia que experimenta un cuerpo sumergido en una corriente con los chorros, afirmando que la resistencia que experimenta un cuerpo sumergido se compara con la acción producida cuando es impactada por un chorro.

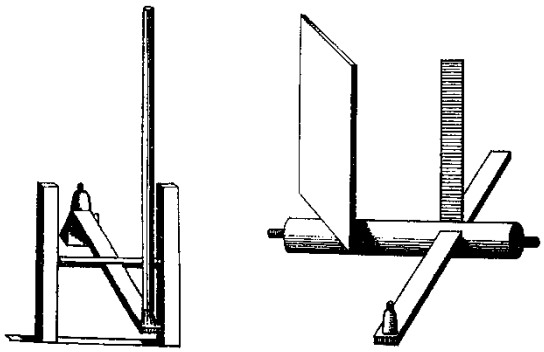


Figura 11. Instrumentos para la medición de la deflexión ocasionada por un chorro de agua (izquierda) y un chorro de aire (derecha) (Rouse e Ince, 1975, p. 65).

Por otra parte, Mariotte corroboró experimentalmente la *Ley de la Continuidad* y el *Teorema de Torricelli* utilizando otros líquidos como mercurio y alcohol, indicando así que estas leyes son independientes del líquido en cuestión. Es más, respecto a la última ley, encontró en sus experimentaciones que entre mayor es el orificio de salida mayor es la descarga del líquido contenido en un recipiente, algo aparentemente evidente, pero lo justificó sosteniendo que cuando

el orificio es pequeño el líquido al interior del recipiente experimenta una resistencia a sí mismo al tratar de fluir; además, el chorro pequeño encuentra una mayor resistencia debido el aire circundante, resistencias que se minimizan a medida que el orificio se hace más grande. Llevando su análisis de los líquidos en movimiento a través de conductos, afirmó que la resistencia a fluir de un líquido se debía también a la curvatura de los conductos, por lo que aconsejó realizar instalaciones de tubería lo más rectas posibles para lograr un flujo óptimo.

Cabe señalar que además de los chorros de aire, Mariotte realizó otros trabajos con gases, entre los que se destaca la relación que halló (al igual que el inglés Robert Boyle) entre el volumen y la presión en un gas, propiedad que actualmente es conocida como la *Ley de Boyle – Mariotte*, la cual describe la relación inversamente proporcional entre el volumen y la presión en un gas a temperatura constante. Estos estudios sobre los gases condujeron a Mariotte a concluir que los gases y los líquidos tienen características y comportamientos similares, por lo que afirma pueden estudiarse en conjunto y no como dos entes disímiles.

En cuanto a su compatriota y contemporáneo Blaise Pascal además de aportar a las matemáticas realizó un trabajo majestuoso en el marco del desarrollo de la hidráulica, en el cual la experimentación desempeñó un papel trascendental. La diversidad de experimentos llevados a cabo por Pascal, algunos hasta de tipo mental como lo menciona Koyré (1978), con tubos, jeringas, sifones y fuelles de diversas longitudes y tamaños, junto con el estudio de varios fluidos como agua, mercurio, leche, vino, aceite y aire, lo llevaron a consolidar dos grandes conclusiones, primero que los líquidos se comportan equilibradamente y segundo, que no hay aberración alguna hacia el vacío por parte de la naturaleza, sino que esta no es más que una consecuencia del equilibrio entre los fluidos.

La primera conclusión a la que llegó Pascal, se dio a partir de diversos experimentos con recipientes tubulares, de los cuales se destaca el que denominó como *máquina para multiplicar fuerzas*, la cual consiste en un recipiente lleno de agua con dos aberturas, una más grande que la otra en la que se encuentran sendos pistones (Figura 12). Pascal propuso que una de las aberturas fuese cien veces más grande que la otra y a partir de la experimentación con esta máquina, expresa las siguientes relaciones:

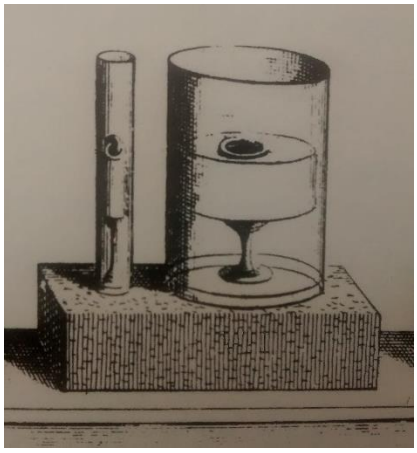


Figura 12. "Nueva máquina para multiplicar fuerzas" (Pascal, 1973, p. 30).

Si se coloca un peso de una libra en el pistón pequeño este descenderá un centímetro, acción que ocasiona una ascendencia de una altura de 1/100 cm en el pistón grande elevando consigo un peso de 100 libras. Por lo que la primera relación que se evidencia en esta máquina es que los pesos o fuerzas sobre los pistones son inversamente proporcionales al desplazamiento. De igual forma se deduce que los desplazamientos son inversamente proporcionales a las áreas de las aperturas. Y de estas dos relaciones se concluye que las fuerzas son proporcionales a las áreas de las aberturas, siendo está la relación que se debe cumplir para que un líquido esté en equilibrio (García, 2009). Con esto Pascal (1973) afirma que "un recipiente lleno de agua constituye un nuevo principio mecánico y una nueva máquina que multiplicará fuerzas a cualquier cantidad deseada" (p. 6), principio que actualmente es el fundamento de máquinas hidráulicas como prensas hidráulicas, frenos del carro, puertas hidráulicas o elevadores.

Pero para lograr el equilibrio que se expresa en la tercera relación, necesariamente alguna magnitud debe permanecer constante, que para Pascal es la presión, pues afirma que "la presión sobre un líquido es transmitida sobre cada parte del recipiente con la misma magnitud debido a la

continuidad y fluidez del agua". Conclusión que actualmente es conocida como el *Principio de Pascal*[10].

Seguido a esto, Pascal dedujo que está es la razón por la cual al llenar de agua un recipiente con dos aperturas tubulares esta alcanza la misma altura en ambos tubos, de hecho afirma que:

> *...si en lugar de los tubos que hemos representado en estas dos aberturas se les han adaptado otros dos receptáculos, anchos en lugares y estrechos en otra parte - en suma, irregulares a lo largo de sus longitudes -, entonces se vierten líquidos en las alturas especificadas arriba, estos líquidos estarán tan equilibrados en estos tubos irregulares como en el regular, porque es su altura y no su ancho que determina la presión de los líquidos* (1973, p. 12).

Así, Pascal establece la actual *Ley de los vasos comunicantes* la cual describe que un fluido homogéneo el cual se vierte en un recipiente compuesto por tubos de diferente longitud y forma conectados inferiormente, alcanzará la misma altura en cada uno de los tubos (Figura 13). Aunque al verter dos líquidos distintos, Pascal encontró que estos están en equilibrio cuando sus respectivos pesos son proporcionales a sus alturas.

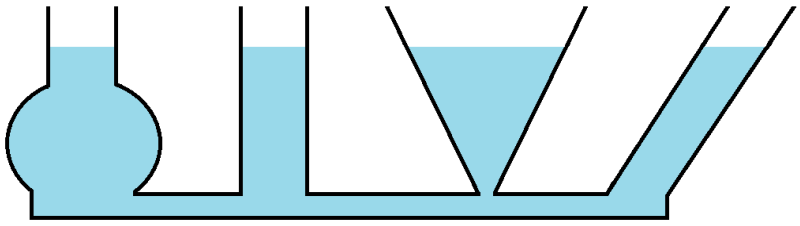


Figura 13. Vasos comunicantes

[10] Actualmente a este enunciado del principio de pascal se le ha adicionando que el fluido debe ser incomprensible.

Posteriormente, la cuestión que atrajo la atención de Pascal giró alrededor de la presión que experimenta un cuerpo sumergido en un líquido en estado de equilibrio. Nuevamente la experimentación juega un papel importante, Pascal comenzó a introducir objetos a un recipiente que contiene un líquido, notando que un cuerpo sumergido experimenta presión en la totalidad de su superficie, la cual aumenta a medida que el objeto se hunde. Para ello, tomó un globo ligeramente inflando y lo introdujo en un tanque de agua, con el que encontró que a medida que se sumergía cada vez más, el volumen de este disminuía, mientras que al ascender su volumen aumentaba.

Estos resultados, expuestos en su tratado *Sobre el equilibrio de los líquidos*, fueron establecidos con el propósito de demostrar la existencia del vacío, puesto que Pascal no concordaba con que el vacío era aborrecido por la naturaleza, más bien, consideraba que este estaba relacionado con la actividad del aire, en especial, con el peso de la masa este. Por ello, para demostrar su hipótesis realiza diversos experimentos, además de varias analogías entre el comportamiento del aire y los líquidos. Uno de estos experimentos responde a la cuestión de por qué no se puede abrir un fuelle cuando se sella su boca; Pascal toma un fuelle con la boca sellada y lo introduce en un tanque con agua y trata de abrirlo. Así haciendo una observación similar a la de Arquímedes, Pascal notó que cuando se logra abrir el fuelle el nivel del agua aumenta, por lo que deduce que dicha resistencia a abrir el fuelle se debe al peso del líquido por encima de este, el cual es necesario vencer para poder abrir el fuelle; situación que también sucede cuando el fluido es el aire. De hecho menciona:

> *Ahora lo que decimos sobre el agua debe ser tomado para aplicar a cualquier otro líquido: si el fuelle se pone en un recipiente lleno de vino, se experimentará la misma resistencia a su apertura; igualmente con leche, aceite, mercurio e incluso con*

> *cualquier otro líquido. Por lo tanto, es una regla general y un efecto necesario del peso de los líquidos, que si un fuelle está tan sumergido en cualquiera de ellos que el líquido es excluido de su interior, el peso del líquido por encima hace imposible abrir el fuelle sin superar una resistencia debido al hecho de que tiene que ser levantado. Aplicando esta regla general al aire en particular, se sigue como una consecuencia que cuando un fuelle está sellado de tal manera que excluye todo el aire, el peso del aire anterior impide su apertura sin superar alguna resistencia ya que no se puede abrir sin levantar la masa de aire* (1973, p. 36).

De esta manera, Pascal comienza a afirmar que lo que es atribuido al aborrecimiento de la naturaleza hacia el vacío, no es más que una ley fundamental de la naturaleza relacionada con el peso de los fluidos. Por otro lado, en esta misma afirmación se puede percibir que para Pascal el aire y los líquidos tienen características en común, idea que también había manifestado Mariotte.

Continuando con las experimentaciones, Pascal toma diversas jeringas las cuales difieren en diámetro y tamaño, procediendo de igual forma como lo hizo con el fuelle, da la misma explicación al porque es difícil jalar el embolo cuando se sella la apertura de la jeringa; pero en esta ocasión logra obtener un vacío aparente de distinto tamaño y afirma que "estos experimentos bastan para hacer ver manifiestamente que la naturaleza puede soportar y soporta en efecto un espacio, todo lo grande que se quiera, vacío de todas las materias que conocemos y que son perceptibles por nuestro sentidos" (2012, p. 826). Además, a partir de esta experimentación Pascal logra mostrar que la "fuerza" del vacío no es proporcional al tamaño de este y por lo tanto no es ilimitada.

Si bien hasta el momento Pascal había obtenido grandes resultados por medio de sus experimentaciones, el experimento que consolidó la existencia del vacío fue el que llevó a cabo con el barómetro de mercurio, es decir, el mismo que había realizado Torricelli, sólo que esta vez se llevó a cabo en la cima de una montaña y al pie de la misma. El razonamiento de Pascal consistía en que si el aire se comporta como un mar de agua en el que a mayor profundidad mayor es la presión, por ende al pie de la montaña la presión del aire debe ser mayor que en la cima de esta; de tal manera que si el peso del aire es la causa de que la columna de mercurio se mantenga elevada, dicha columna debe tener una mayor altura al pie de la montaña. Hipótesis que había enunciado debido a un experimento análogo al experimento del globo introducido en un tanque con agua, en el que toma un globo, lo infla al pie de una montaña y al subir a la cima nota que su volumen ha aumentado. Al llevar a cabo el experimento con el barómetro de mercurio, efectivamente, la hipótesis de Pascal fue corroborada y concluyó que:

> *La presión del aire es la única causa de la suspensión del mercurio, y no el horror al vacío, ya que es muy cierto que hay mucho más aire que pesa al pie de la montaña que en su cima; mientras que no podríamos decir que la naturaleza aborrece más el vacío al pie de la montaña que en su cima* (2012, p. 827).

A esto, agrega que la variación de la altura respecto al nivel del mar, hace que los fenómenos relacionados con el peso de la masa del aire también varíen, así por ejemplo, el separar dos objetos bien pulidos es más fácil en la cima de una montaña que al pie de esta; incluso, afirma que si realizara el experimento del barómetro en un cuarto en el no haya nada de aire, la columna de mercurio no se mantendría elevada en el tubo.

Con esto Pascal demuestra definitivamente la posibilidad de la existencia del vacío en la naturaleza, que es inactivo y que los efectos que se le atribuían se pueden explicar a través del equilibrio o desequilibrio de los fluidos, cambiando así la teoría establecida por los filósofos de la antigua Grecia.

Así pues, Mariotte y Pascal ampliaron aún más la experimentación y refinaron sus experimentaciones en el campo de la hidráulica. Sin embargo, el escaso desarrollo que las matemáticas presentaban hasta aquella época imposibilitaba el desarrollo teórico y la consecuente formalización de la hidráulica como disciplina científica, problemática que se solventaría con el desarrollo del cálculo y la fundamentación de la mecánica por parte de Isaac Newton.

2.7 Isaac Newton y su estudio sobre los fluidos

Considerado como uno de los más grandes científicos de la historia, Isaac Newton logra interpretar y reformular algunos de los trabajos de sus antecesores tanto en mecánica como en matemáticas; sin embargo, Newton reconoce los aportes de sus predecesores afirmando: “si he visto más lejos es porque estoy sentado en hombros de gigantes”. Es así, como su trabajo se suele catalogar como uno de los más relevantes, por un lado, debido a que logra fundamentar matemáticamente la mecánica, describiendo y unificando de manera precisa el movimiento de los cuerpos celestes y terrestres, lo que se creía una imposibilidad ya que se consideraba que ambos eran movimientos disímiles; por otro lado, el cálculo, como una nueva rama de la matemática que desarrolla paralelamente con el alemán Gottfried Leibniz, se convierte en una potente herramienta para la formalización de las teorías físicas obtenidas a partir de la experimentación.

El cálculo diferencial e integral que se conoce actualmente, corresponde respectivamente al método de las fluxiones y las fluxiones inversas llevado a cabo por Newton y que presidió a su

célebre obra, *Principios Matemáticos De La Filosofía Natural* (2011). Paradójicamente, en esta obra, Newton se basa en métodos geométricos en lugar del método de fluxiones, tan solo emplea este último en una sección del Libro I, denominada *Del método de las razones primeras y últimas por cuyo medio se demuestra lo que sigue*, en el que se limita a demostrar una cuantas proposiciones que le sirven de base para el desarrollo de esta obra. De forma general, como lo describe Recalde (2017), el método de las fluxiones surge a partir de la emergencia de un objeto matemático que dé cuenta de la variación en general; puesto que Newton desde una interpretación de la variación más desde el campo de la física que de la misma geometría, comenzó a visualizar la generación de los objetos geométricos a partir de la variación del movimiento en función del tiempo.

Como se mencionó anteriormente, el desarrollo del cálculo fue de vital importancia para formalización de las leyes y teorías físicas, en particular, fue una gran herramienta para la formalización de la hidráulica, debido a que el método de los infinitesimales proporcionó una eficaz herramienta para estudiar el comportamiento de los fluidos, y por medio de estos, calcular magnitudes como la velocidad y la aceleración de los fluidos que fluyen a través de conductos. Aunque cabe a aclarar que la cúspide de la formalización de la hidráulica a partir del cálculo se dio a mediados del siglo XVIII por notables matemáticos como Leonhard Euler, Jean le Rond D'Alamber, Alexis Claude Clairaut, Daniel y Johann Bernoulli.

En cuanto a los *Principia*, Newton desarrolla esta obra siguiendo una estructura similar a la de los *Elementos* de Euclides, partiendo de definiciones y axiomas o leyes del movimiento, que posteriormente usa en la demostración de teoremas y proposiciones que distribuye en tres libros. En el primer libro, estudia fenómenos mecánicos como el movimiento de los cuerpos rígidos, la fuerza centrípeta y las trayectorias en forma de curvas cónicas; mientras que en el segundo libro,

analiza los fluidos en estado de equilibrio y en movimiento, además del movimiento de los cuerpos sumergidos en estos. Ambos libros llevan el mismo nombre (*Sobre el movimiento de los cuerpos*) a pesar de la diferencia en su contenido temático, lo que posiblemente podría indicar que Newton consideraba que los sólidos y los fluidos están sujetos a las mismas leyes pese a sus particularidades (Calero, 2008). En el tercer libro titulado *Sobre el sistema del mundo*, expone lo referente al movimiento de los cuerpos celestes del cual deviene la *Ley de gravitación universal*.

En relación con el fundamento de los *Principia*, Newton presenta las siguientes definiciones:

> *Definición I. La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente* (p. 121).
>
> *Definición II. La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente* (p. 122).

La primera definición no es otra cosa que la definición de masa o cuerpo como también lo denomina Newton, en función de la relación entre la densidad y el volumen ($m = \rho V$). Entretanto, la segunda definición conocida como *Impetu* o *Momentum* es la actual *Cantidad de movimiento* (P) que suele expresar matemáticamente como $P = mv$[11]. Seguido a esto Newton distingue tres tipos de fuerza:

[11] Esta es la expresión de la cantidad de movimiento en la mecánica clásica, la cual difiere en la mecánica relativista y la mecánica cuántica.

> *Definición III. La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo* (p. 122).
>
> *Definición IV. La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo* (p. 123).
>
> *Definición V. La fuerza centrípeta es aquella en virtud de la cual los cuerpos son atraídos, empujados, o de algún modo tienden hacia un punto como a un centro* (p. 123).

Newton afirma que "la *fuerza ínsita* también puede llamarse con toda propiedad fuerza de inercia" (p. 122), siendo esta una fuerza propia del cuerpo proporcional a la masa que siempre trata de que éste se mantenga en el mismo estado de reposo o de movimiento, lo que indica que la masa surge como una medida de la inercia. Respecto a la *fuerza impresa*, menciona que esta es sólo una acción que produce el cambio de estado de un cuerpo, pero que no permanece en él, puesto que lo que hace que este permanezca en el nuevo estado es consecuencia únicamente de la inercia; dicha fuerza se origina de un golpe, una presión, una *fuerza centrípeta*, siendo la gravedad y el magnetismo un tipo de esta última. Hay tres definiciones más que hacen alusión a la *fuerza centrípeta*, la cual es de vital importancia para el objetivo de la obra, la *Ley de la gravitación universal*; de modo que, establece las tres leyes o axiomas del movimiento:

> *Ley I. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado* (p. 135).

> *Ley II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime* (p. 136).
>
> *Ley III. Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: O sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas* (p. 136).

Cabe resaltar que de las tres leyes, la primera ley evidencia que Newton presenta un gran avance teórico frente a los antiguas pensadores, pues con esta muestra que en una ausencia total de fuerzas, el reposo y el movimiento uniforme de un cuerpo son ontológicamente equivalentes, pues no habría manera de distinguir si "realmente" un cuerpo está en movimiento o en reposo (Sepúlveda, 2002). Y aunque como lo afirma Granés (2005) esta ley no se cumple en el mundo tangible, de ninguna forma la invalida, sino que por el contrario el hecho de que esta no se cumpla incita a la búsqueda de las fuerzas que impiden la preservación del estado.

Continuando con el segundo libro de los *Principia*, este es uno de los que más se adentra a la teoría hidráulica al dedicarse al estudio del comportamiento de los fluidos y el movimiento de los cuerpos en los medios resistentes; sin embargo, con las ediciones de los *Principia* este es el libro que fue objeto de la mayoría de transformaciones por parte de su autor, lo que indica que Newton también se debió percatar de la complejidad del estudio de los fluidos (Calero, 2008). Razón por la que comienza este libro definiendo qué es un fluido:

> *Fluido es todo cuerpo cuyas partes ceden a la aplicación de cualquier fuerza, y, al ceder, se mueven entre sí con facilidad* (p. 482).

Aunque esta definición abarca tanto a los líquidos como al aire, Newton los distingue, primero introduce la noción de *fluido elástico* en la proposición XXII (p. 494), en la que menciona

que un fluido compuesto por partículas las cuales huyen las unas de las otras componen un *fluido elástico*, luego menciona: "…si tales sistemas fuesen elásticos, como nuestro aire" (p. 528), donde pone en evidencia que el aire, siendo un fluido que cumple a cabalidad las propiedades expuestas, constituye un *fluido elástico*. En relación a los líquidos, Newton se refiere a estos como medios continuos cuyas partículas que lo componen no tienen la tendencia de alejarse entre sí: "… en medios continuos como el agua, el aceite caliente, el mercurio en los cuales el globo [esfera] no incide inmediatamente sobre las partículas del fluido generadoras de resistencia, sino que más bien presiona a las siguientes, éstas a su vez a las siguientes, y así sucesivamente" (p. 538). Es así como Newton considera que los líquidos y el aire son entes diferentes pero ambos hacen parten del universo de los fluidos, idea que compartían Mariotte y Pascal; además, se puede apreciar que Newton tenía una concepción corpuscular de los fluidos, similar a lo plasmado en su teoría acerca de la naturaleza de la luz.

Luego de esta definición pasa inmediatamente a demostrar la proposición en la que se establece que el cambio de presión en un líquido hará que este este se mueva, teoría que posteriormente sería estudiada en detalle por el matemático y físico suizo Leonhard Euler (Romero, Rodríguez y Aguilar, 2008). Proposición que se presenta a continuación:

> *Proposición XIX. Teorema XIV. Todas las partes de un fluido homogéneo e inmóvil encerrado en un vaso cualquiera inmóvil y comprimido por todos lados (sin tomar en cuenta ni la condensación ni la gravedad ni fuerza centrípeta alguna) soportan igual presión por todas partes y permanecen en sus lugares sin que dicha presión origine movimiento alguno* (p. 482).

Continúa así con el apartado encaminado hacia el estudio de la hidrostática, en el que a partir de proposiciones y corolarios realiza afirmaciones como: un cuerpo que sea más grave que el fluido se hundirá y si es más leve pues flotará, y un cuerpo sufre presión por todos lados al introducirse a un fluido. Posteriormente, comienza a demostrar que la densidad de un fluido es proporcional a la compresión de sus partes, esto es, que un fluido es más denso entre más comprimido esté.

En seguida, Newton se aventura a indagar respecto a la problemática asociada a la resistencia que experimenta un cuerpo que se mueve en un fluido, aunque primero afirma que es equivalente que un cuerpo se mueva en un fluido en reposo a que el cuerpo esté en reposo y sea el fluido el que esté en movimiento. Para esto, realiza varios experimentos con péndulos de esferas, los cuales hace oscilar en aire, agua y mercurio, igualmente estudia la caída libre de esferas en dichos medios. Lo primero que Newton observa es que la resistencia es proporcional a la densidad de los medios, así por ejemplo, si se tienen dos recipientes sellados que contienen aire, uno con el doble de capacidad que el otro, un cuerpo en movimiento experimentará menos resistencia en el recipiente de mayor tamaño. Además, en la descripción de dichos experimentos Newton introduce el concepto de *tenacidad*, el cual describe como la característica de algunos fluidos que tienen cierta resistencia a fluir, lo que actualmente se conoce como *viscosidad*:

> *… por los [experimentos] ya descritos consta suficientemente que la resistencia de los cuerpos velozmente movidos es proporcional aproximadamente a la densidad de los fluidos en que se mueven. No digo exactamente. Pues, los líquidos más tenaces, a igual densidad, sin duda resisten más que los más líquidos, como el aceite frio más que el caliente, el caliente más que el agua de lluvia, el agua más que el espíritu del vino. Pero los líquidos que suelen ser bastante fluidos como el aire, agua dulce,*

> *salada, espíritu de vino, mercurio… que son tan fluidos que permiten, al ser agitados en los vasos observar durante largo tiempo el movimiento, y cuando se derraman se producen fácilmente, no me cabe duda de que la regla resultante bastante exacta* (p. 522).

De modo que se tendería a pensar que los resultados que obtuvo este célebre pensador tan sólo se limitaron a observaciones cualitativas no ajenas a las deducidas por su predecesores; sin embargo, el experimento con péndulos lo condujeron a nuevas conclusiones que reafirman su premura por fundamentar sus resultados de manera cuantitativa. Así, prueba que la resistencia está relacionada con el cuadrado de la velocidad del cuerpo que se mueve, y variando el diámetro de la esfera nota además que la resistencia también está relacionada con el cuadrado de éste, todo esto lo resume en el corolario V de la proposición XXXV:

> *Corolario V. La resistencia del globo [esfera] está en razón compuesta del cuadrado de la velocidad, del cuadrado del diámetro y de la densidad del medio* (p. 537).

Continuando con el estudio de la resistencia que experimentan los objetos en movimiento en un fluido, Newton realiza otro experimento en el cual ubica una esfera y un cilindro en un canal por el que circula agua, y analizando el comportamiento de estos mientras fluye el agua, deduce que dichos sólidos sólo experimentan fricción en la parte frontal que colisiona con el flujo del agua, así, en el caso del cilindro afirma que:

> *Lema V. Si un cilindro se desplaza uniformemente en la dirección de su longitud, la resistencia que sufre no cambia en absoluto aumentando o disminuyendo la longitud y, por tanto, es igual a la resistencia que sufriría un círculo descrito con el mismo*

> *diámetro y que se desplazase a la misma velocidad según la línea recta perpendicular a su plano* (p. 548).

Por otro lado, en otra experimentación, en este caso de carácter mental, Newton considera un fluido contenido en el interior de un cilindro infinito que gira sobre su eje longitudinal con velocidad angular constante; describe que el fluido también gira alrededor de dicho eje pero que debido a la falta de *lubricidad* de este, se comienzan a formar cilindros concéntricos de fluido (Figura 14) a causa de la resistencia que se ocasiona por la variación de la velocidad angular del fluido con el inverso del cuadrado del radio. Como resultado, Newton introduce el concepto de *lubricidad*, que como se puede percibir hace referencia a la espeses de un fluido. Por consiguiente Newton hace hincapié en que existe una característica de los fluidos vinculada a su resistencia a fluir; pero como lo menciona Calero (2008), es tal vez la falta de un conocimiento preciso sobre los fenómenos de la viscosidad, el cual Newton mismo estaba fundando, el que lo llevo a nombrar como *tenacidad* y *lubricidad* a todos aquellos fenómenos ligados a la viscosidad, considerando que se trataban de fenómenos distintos.

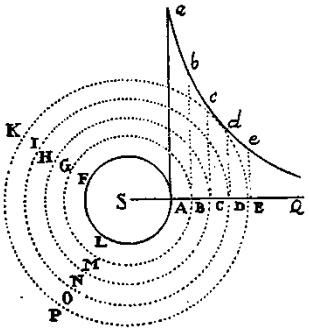


Figura 14. Rotación de un fluido con falta de lubricidad (Newton, p. 597).

Retomando la afirmación "… en medios continuos como el agua, el aceite caliente, el mercurio en los cuales el globo [esfera] no incide inmediatamente sobre las partículas del fluido generadoras de resistencia, sino que más bien presiona a las siguientes, éstas a su vez a las siguientes, y así sucesivamente", a parte de la caracterización de los líquidos, Newton también describe la resistencia que se produce debido al ímpetu de las partículas que constituyen los fluidos continuos, pues cuando un objeto se mueve en un fluido, imprime una cantidad de movimiento sobre las partículas que va chocando, y a su vez estas partícula imprimen una cierta cantidad de

movimiento sobre las que están a su lado, y así sucesivamente; pero de acuerdo con su tercer axioma o ley del movimiento, dichas partículas imprimen la misma cantidad de movimiento en sentido inverso, siendo la suma total de estos movimientos inversos la resistencia que experimenta dicho cuerpo. Por lo cual, en cuanto a la resistencia que experimenta un cuerpo que se mueve en un fluido Newton distingue dos tipos, una debida a la densidad y otra debida al ímpetu del medio.

Como lo mociona Pedroza, Ortiz y Martínez (2007), Newton también analiza cómo es el flujo de agua a través de un agujero ubicado en el fondo de un recipiente cilíndrico, análisis del cual concluye, en contraste con las ideas de Torricelli, que la velocidad con la que el agua sale por el agujero es la misma que tendría un cuerpo que cae desde la mitad de la altura del nivel del agua. Pero debido a las críticas que obtuvo en la primera edición de los *Principia*, Newton realizó nuevamente el experimento, y al obtener los mismos resultados que consiguió Torricelli reformuló dicha conclusión en las siguientes ediciones; aunque la manera en que interpretaba el comportamiento del agua como una catarata al interior del recipiente (Figura 15) no fue reformada.

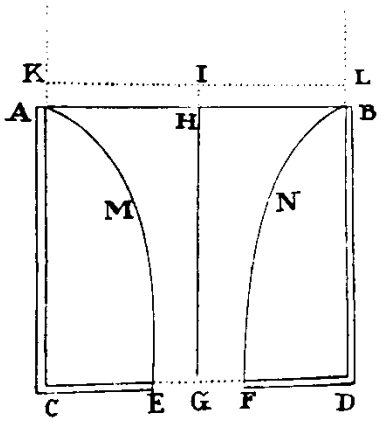


Figura 15. La catarata de Newton (Newton, p. 539).

Posteriormente, Newton estudia la formación y el comportamiento de las ondas en la superficie de los fluidos, logrando mostrar que la velocidad de la onda varía con la raíz cuadrada de su longitud, relación que le facilita obtener magnitudes como longitudes de onda y tiempos de propagación de la misma. Incluso, Newton considera que aunque una onda es una propagación a través de la superficie de un fluido, las partículas que componen el fluido que se encuentran en esta, no se desplazan junto con la ola, sino que su movimiento es de vaivén como el de un péndulo y se torna perpendicular al desplazamiento de la onda:

> *Proposición XLVII. Teorema XXXVII. Al propagarse los impulsos a través de un fluido, cada una de las partículas del fluido que van y vienen con un movimiento reciproco muy breve, se aceleran y se retardan siempre de acuerdo con la ley de oscilación del péndulo* (p. 583).

Estudio con el cual, Newton concluye su análisis sobre el comportamiento de los fluidos y por ende el segundo libro de los *Principia*.

En cuanto al tercer libro, no es otra cosa que la aplicación de lo expuesto en los dos anteriores libros al estudio del movimiento de los cuerpos celestes. Libro en el que enuncia la *Ley de la gravitación universal*. Y partir de esta demuestra que el sol y la luna son los causantes de las mareas, analiza las *Leyes de Kepler*, las trayectorias de los planetas y los cometas alrededor del sol, entre otros fenómenos gravitacionales, que aunque son causa de la gravedad, Newton culmina su obra afirmando que aunque ha logrado exponer como consecuencia de la gravedad diversos fenómenos tanto celestes como terrestres, admite no tener hipótesis alguna de lo que esta es.

En definitiva, Newton, establece sus cuatro leyes del movimiento y las definiciones de los conceptos de masa, inercia, fuerza y fluido; además, logra fundamentar y estructurar la mecánica, consolidándola como una disciplina científica. Por otro lado, sus trabajos sobre la resistencia y la viscosidad de los fluidos, se constituyen como nuevas bases que fundamentan y contribuyen a la edificación de la hidráulica, cimientos que no sólo se forjan con la observación y la experimentación, sino que también son validados por medio de las herramientas que brindó el cálculo a las matemáticas de la época.

No obstante, aunque se han presentado algunos de los trabajos correspondientes a la amplia gama de aportes al desarrollo de la hidráulica hasta finales del siglo XVII, se puede apreciar, como

lo afirma Calero (2008) que el desarrollo de la hidráulica se ha dado a través de dos líneas o problemáticas. Una de estas problemáticas es denominada como *el problema de la descarga*, el cual hace referencia a cómo es la descarga, movimiento o flujo de los fluidos a través de tubos, ríos y canales; problemática en la que resaltan los trabajos de Castelli y Torricelli. Entre tanto, la segunda problemática está relacionada con la resistencia que experimenta un cuerpo que se mueve en un fluido, cuestión denominada como *el problema de la resistencia* y en la que se distingue el trabajo de Newton y Mariotte.

Uno de los personajes que se cautiva por la primera problemática descrita es el matemático y físico suizo Johann Bernoulli, quien analiza el movimiento de los fluidos a través de conductos de diversa forma y tamaño, tomando como base el fundamento de la mecánica establecido por Newton y el cálculo desarrollado por Leibniz. De manera que, Johann Bernoulli se encamina a abrir una nueva brecha en el estudio de la hidráulica buscando complementar prolijamente los resultados de antecesores evitando las ambigüedades a las que puede conducir la mera intuición.

CAPITULO 3: JOHANN BERNOULLI Y SU OBRA *HYDRAULICS*

Johann Bernoulli fue un célebre matemático suizo que aunque en su juventud estudió medicina en la Universidad de Basilea, su pasión por las matemáticas lo condujo a desligarse casi por completo de su profesión como médico. Dedicándose así, al estudio de esta ciencia y a su enseñanza, pues gracias a su habilidad como matemático fue profesor en diversas universidades, además de convertirse en miembro de prestigiosas academias científicas como la de París, Londres y Berlín.

Cautivado por los trabajos desarrollados por Leibniz acerca del cálculo, estableció una gran amistad con él que le permitió adentrarse en el basto mundo del cálculo infinitesimal y lo suscitó a contribuir ampliamente a esta nueva rama de la matemática. Sin embargo, los aportes de Johann no se restringieron al cálculo diferencial e integral, sino que también aportó a la edificación de otras ramas de la matemática como la probabilidad, la geometría, las ecuaciones diferenciales y las derivadas parciales; además de incurrir en disciplinas propias de la física como la óptica, la cinemática y la mecánica de fluidos.

Hydraulics (1968), es el nombre con el que Johann Bernoulli bautiza su obra publicada en el año 1732[12] dedicada al estudio de la hidráulica. En esta, analiza el movimiento del agua a través de conductos de diferentes formas y tamaños empleando prolijamente las leyes de la mecánica de Newton, además del cálculo diferencial e integral desarrollado por Leibniz. Johann divide su obra en dos capítulos, el primero, que es el objeto de estudio del presente trabajo de investigación, es titulado *Tratamiento del movimiento del agua a través de recipientes y conductos cilíndricos que*

[12] Esta fecha de publicación es controversial debido a la disputa que tenía Johann con su hijo Daniel Bernoulli, quien había publicado en 1738 la obra *Hydrodinamics* que también aborda temas propios de la hidráulica, por lo que Johann dio la orden a la editorial de fechar el año 1732 en la portada de *Hydraulics* con el objetivo de destacarse como el precursor en el estudio de esta disciplina (Sánchez y Valdés, 2001).

están compuestos por varios tubos cilíndricos unidos sucesivamente entre sí, que como su nombre lo indica, trata sobre el movimiento del agua a través de tubos cilíndricos de diferente diámetro conectados entre sí. Mientras que en el segundo capítulo se ocupa del movimiento del agua a través de conductos de cualquier forma, lo que evidencia que este último capítulo no es más que una generalización del primero, por lo cual lo titula *Sobre el método directo y universal para resolver todos los problemas hidráulicos cualesquiera que puedan ser formados y propuestos relacionados con el flujo de agua a través de conductos de cualquier forma*.

3.1 Definiciones y lemas

De acuerdo con los preceptos brindados por Aristóteles, toda obra científica debe poseer una base teórica que contribuya a que su contenido sea consistente y razonable; estatuto que en *Hydraulics* no se obvia. En el prefacio de su obra, Johann parte mencionando que no pretende dedicarse al estudio de la hidrostática puesto que en esta ya se han establecido sus leyes y principios; situación distinta en la hidráulica, pues como afirma Johann, "seguramente esta Ciencia comúnmente llamada *Hidráulica*, es extremadamente difícil y hasta este momento no ha sido sometida a las leyes y reglas de la mecánica. Cualquier material que los autores hayan escrito sobre este asunto, se basa sólo en la experiencia o en teorías totalmente inciertas, carentes de fundamento" (p. 351). Lo que evidencia que para Johann el escaso desarrollo teórico de la hidráulica no se debe al poco estudio de esta disciplina, sino a la dificultad que conlleva aplicar las leyes de la mecánica a los fluidos en movimiento.

No obstante, Johann sostiene haber encontrado la explicación al porqué es tan difícil aplicar con éxito los principios de la dinámica a los fluidos que se mueven a través de conductos. Expone que dicha dificultad reside en la omisión de la formación de una *garganta* al interior del conducto,

que aunque tiene un tamaño pequeño, requiere de una fuerza o presión que no se debe eludir puesto que es la causante de que el fluido se acelere cuando este pasa de un conducto a otro de diferente área transversal. Así, dicha garganta se forma cuando un fluido pasa de un conducto más ancho a uno más estrecho y viceversa; en el primer caso la garganta se forma antes de dicha transición, mientras que en el segundo caso después de la transición.

En seguida, Johann expone las definiciones o lemas que constituyen la base teórica de su obra, los cuales recopila tanto de la dinámica como de la hidrostática.

Las primeras dos definiciones están relacionadas con los conceptos de fuerza y aceleración, esta última es considerada por Johann como una fuerza, ya que la bautiza como *fuerza de aceleración*, y es la que imprime una velocidad a un cuerpo en un tiempo determinado; mientras que denomina como *fuerza motriz* a la que actúa en un cuerpo que está en movimiento o en reposo ocasionando que este se acelere, desacelere o cambie su dirección de movimiento. De esto se puede deducir que Johann considera que la fuerza siempre ocasiona una acción que modifica o genera el movimiento de un cuerpo.

La relación de estas dos fuerzas y la masa involucrada es la que muestra Newton por medio de su segundo axioma de movimiento, y que Johann retoma al aseverar que la fuerza motriz es proporcional al producto entre la masa y la fuerza de aceleración; por lo que la fuerza motriz dividida entre la fuerza de aceleración da como resultado la masa, mientras que dividida por la masa da como resultado la fuerza de aceleración.

En lo que respecta a la gravedad, Johann menciona que esta ocasiona una aceleración natural constante g en lo cuerpos de masa m que caen libremente, razón por la cual los cuerpos se aceleran continua y uniformemente a medida que descienden. Al mismo tiempo, esta aceleración

provoca una fuerza motriz mg de magnitud constante que actualmente es conocida como el peso de un cuerpo.

Por otra parte, Johann sostiene que en la abstracción un fluido contenido en un recipiente de cualquier forma se puede dividir en capas infinitamente pequeñas y que cada una de estas ejerce una fuerza o presión sobre la capa que le subyace, equivalente al peso o la presión que generaría un cilindro del mismo fluido con base igual al área de la capa y altura igual a la profundidad de la misma (Figura 16).

Luego, introduce una definición esencial para el desarrollo de su obra. En esta menciona que la presión que ejerce una capa sobre otra puede ser desligada de esta última y ser trasladada a la superficie del fluido, proceso al que denomina *Traslación*, que aunque es poco explicitado, no es más que el *Principio de Pascal* expuesto anteriormente. Retomando el ejemplo que proporciona Johann: si una capa de fluido con área A_2 (Figura 16) ejerce una presión W y el área de la superficie del fluido es A_1, entonces de acuerdo con el *Principio de Pascal* o proceso de *traslación* se tiene que $\frac{F}{W} = \frac{A_1}{A_2}$, donde F es la fuerza sobre la superficie, lo que implica que $F = \frac{A_1}{A_2} W$. Sin embargo, cabe aclarar que en *Hydraulics* no hay ninguna mención o cita referente al trabajo de Pascal.

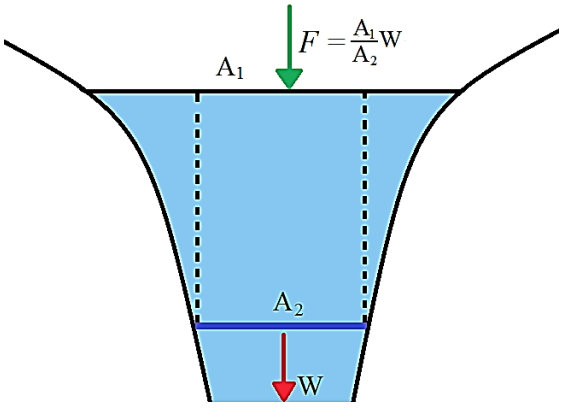


Figura 16. Proceso de *traslación* de fuerzas.

A continuación, Johann dedica un apartado a advertir al lector respecto a las idealizaciones que hace en torno al movimiento del agua a través de conductos, como la omisión de la fricción de las paredes de estos, la adhesión del agua, el movimiento imperfecto de esta y la *tenacidad*[13] de las partículas del líquido que no permite que estas se separen. Además, señala que las capas de agua siempre se deben considerar perpendiculares a la dirección del movimiento de esta; incluso, introduce lo que podría considerarse como otra definición, puesto que denomina como *líneas centrales* a las líneas que conectan el centro de masa de cada una de las capas de agua, que acuerdo con Pedroza, Ortiz y Martínez (2007) estas en la actualidad son denominadas *líneas de corriente*. No obstante, Johann aclara que aunque él analiza el movimiento del agua a través de conductos, sus resultados son igualmente aplicables a otros líquidos que cumplan con las idealizaciones anteriores.

3.2 Tratamiento del movimiento del agua a través de recipientes y conductos cilíndricos que están compuestos por varios tubos cilíndricos unidos sucesivamente entre sí

Pese a que ya se tenía una idea del comportamiento de los líquidos al fluir a través de conductos, Johann quiso dar un paso más adelante estudiando el movimiento del líquido a través de tuberías y recipientes en los cuales, los conductos cilíndricos que los componen poseen diferentes áreas transversales. Sin embargo, no basta con exponer los resultados que arrojaron las investigaciones de este pensador, por tanto se hace imperioso analizar las situaciones y el análisis de las mismas que se lleva a cabo en el primer capítulo de *Hydraulics*.

[13] Recuerde que el concepto de tenacidad es introducido por Newton para referirse a lo que actualmente es conocido como viscosidad.

3.2.1 Flujo a través de dos tubos de diferente tamaño conectados horizontalmente

La primera situación que planea Johann Bernoulli está relacionada con el flujo de un líquido homogéneo[14] a través de dos tubos de diferente tamaño conectados de forma horizontal (Figura 17). Para el análisis de esta situación Johann realiza dos suposiciones: la primera, consiste en que el líquido es impulsado por una fuerza o presión p que presiona uniformemente la superficie AE del líquido y que de acuerdo con la hidrostática[15] se extiende instantemente a la superficie GF del líquido contenido en el tubo GC; por lo que el líquido se mueve en el sentido AB, es decir, del tubo de mayor al de menor diámetro. La segunda suposición es que el conducto siempre está lleno del líquido debido al flujo continuo del mismo.

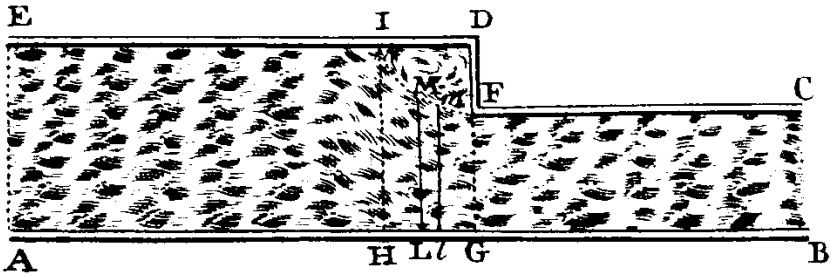


Figura 17. Flujo a través de dos tubos conectados horizontalmente (Bernoulli, 1968, p. 356)

De acuerdo con la *Ley de la Continuidad*, la velocidad del líquido debe cambiar de manera recíproca a las áreas transversales de los tubos; no obstante, este cambio de velocidad no es súbito sino gradual, en este caso, de menor a mayor velocidad. Esto indica que el líquido debe comenzar a acelerarse a medida que se acerca al orificio GF. Johann supone que el líquido comienza a acelerarse desde una distancia pequeña HG, aumentando su velocidad hasta alcanzar la velocidad constante con la que el líquido se desplaza por el tubo GC. Es ahí donde Johann afirma que dicha

[14] Es decir, un líquido puro sin mezclas de otro líquido.
[15] Particularmente por el P*rincipio de Pascal*.

aceleración, se debe a la creación de una garganta $IFGH$ a lo largo de longitud indefinidamente pequeña HG, por la cual debe pasar y acelerarse continuamente el líquido; mientras que la pequeña sección IFD de líquido se mantendrá en perpetuo reposo si el flujo de líquido permanece contante.

En cuanto a la naturaleza de la curva FMI que define la garganta, Johann afirma que esta no es de vital interés, pues como se mostrará luego, la fuerza requerida para acelerar el líquido a través de la garganta no depende de esta curva. Es esta fuerza la que Johann considera que es erróneamente ignorada, y que por el contrario, para él es la clave para la aplicación exitosa de las leyes de la dinámica a los fluidos que fluyen a través de conductos no uniformes.

Por ende, el objetivo es encontrar esa la ley de la aceleración del líquido, en otras palabras, la presión o fuerza p que ocasiona la aceleración del líquido en la situación anteriormente expuesta. Para alcanzar dicho propósito, Johann lleva a cabo el siguiente procedimiento:

Sea la abscisa $HL = x$, $Ll = dx$ un *elemento*[16] de la abscisa y el área transversal $LM = A_G$ de la garganta, la cual varía con la longitud de esta. Sea A_1 el área transversal AE o HI del tubo HE, A_2 el área transversal BC o GF del tubo GC, v la velocidad del líquido en el tubo GC y v' la velocidad del líquido en el tubo HE. De acuerdo con la *Ley de la Continuidad*, $v'A_1 = vA_2$, de donde $v' = \frac{A_2}{A_1}v$. De manera análoga, la velocidad del líquido en cualquier parte $LMml$ de la garganta será $u = \frac{A_2}{A_G}v$.

Sea a la aceleración de la capa Lm de líquido a través de la garganta, entonces de las leyes de la dinámica se tiene que $a = \frac{du}{dt}$ y $u = \frac{dx}{dt}$, de donde se obtiene $adt = du$ y $dt = \frac{dx}{u}$, por lo que $adx = udu$ y multiplicando esta última expresión por A_G, se tiene que $aA_G dx = A_G udu$. Note

[16] Johann denomina *elemento* a lo que actualmente es conocido como un infinitesimal.

que $A_G dx$ es la masa por unidad de densidad[17] de la capa de líquido $LMml$, por lo tanto, la fuerza que impulsa dicha capa es $A_G udu$. Como mencionó Johann anteriormente, esta fuerza es generada por una sola fuerza p existente en el tubo HE que se aplica uniformemente al área transversal AE. Así, realizando el proceso de *traslación*[18], se encuentra que la fuerza en el tubo HE será $A_1 udu$. Por lo que sumando cada una de las velocidades que adquiere el líquido a lo largo de la garganta se obtiene:

$$\int_{v\prime}^{v} A_1 udu = A_1 \int_{\frac{A_2}{A_1}v}^{v} udu = \frac{1}{2}A_1 v^2 - \frac{(A_2 v)^2}{2A_1} = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right) v^2$$

Es decir, "que $\left(\frac{{A_1}^2-{A_2}^2}{2A_1}\right) v^2$ designa la fuerza motriz en el tubo HE, requerida únicamente para crear la aceleración en la garganta para cambiar de la menor velocidad a la mayor, lo que debe hacerse para que el líquido pueda fluir hacia el tubo más estrecho GC" (p. 359).

Con esto, Johann llega a dos conclusiones: la primera es que la naturaleza de la curva IMF y por ende la longitud de la garganta, no intervine en absoluto en la determinación de la fuerza que genera el movimiento del líquido a través de la misma. Mientras que la segunda conclusión a la que llega Johann, es que si se dan todas las condiciones mencionadas anteriormente, es decir, si el flujo de líquido permanece constante en el conducto, originando velocidades constantes tanto en el tubo ancho como en el más estrecho, y la fuerza o presión p es la causante de que el líquido se acelere en la transición de los tubos, entonces "es claro que la fuerza p se aplica únicamente para formar la garganta y mantenerla en su estado apropiado, por consiguiente" (p. 359):

[17] Johann desarrolla toda la obra considerando la masa por unidad de densidad.

[18] Recuerde que el proceso de *traslación* es equivalente al *Principio de Pascal*, para este caso, si *F* es la fuerza en el tubo *HE*, entonces por dicho principio se cumple que: $\frac{F}{A_G udu} = \frac{A_1}{A_G}$, de donde se concluye que $F = A_1 udu$.

$$p = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right) v^2 \qquad (1)$$

De modo que en esta primera situación Johann considera que hay una presión que conduce a la creación de una garganta en la transición de dos tubos de diferente tamaño, la cual acelera el líquido hasta que alcanza una velocidad constante.

La expresión matemática de esta presión, indica que esta depende de las áreas transversales de los conductos por la que fluye el líquido, por lo que su magnitud aumenta en la medida en la que el área transversal del tubo GC disminuye, de hecho, se puede apreciar que esta fuerza y por ende la *garganta* sólo se generan cuando hay un cambio de sección trasversal del conducto; lo que conlleva a declarar que en un tubo de sección transversal uniforme el líquido se mueve debido a la segunda ley Newton. Por otro lado, se aprecia que la velocidad con la que el líquido fluye en el tubo GC depende de la presión p, por lo que a mayor presión mayor será la velocidad del líquido en dicho tubo, velocidad que también depende de las áreas transversales de los conductos. Por lo tanto, la descarga de un líquido a través de un conducto está determinada por el área transversal del mismo.

3.2.2 Flujo a través de dos tubos de diferente tamaño conectados en forma de codo.

En la segunda situación que propone Johann, se analiza cómo es el flujo de un líquido a través de dos tubos de diferente tamaño conectados en forma de codo, siendo el tubo vertical el de mayor diámetro (Figura 18).

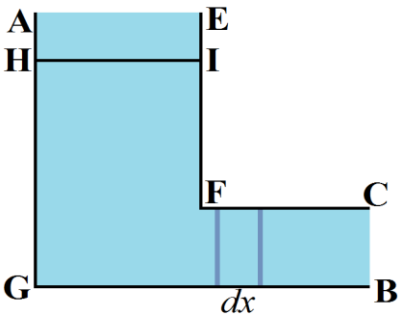


Figura 18. Flujo a través de dos tubos conectados en forma de codo.

Este análisis está encaminado a describir la velocidad determinada por una altura *z* en el tubo vertical con la que el

líquido fluirá a través del tubo horizontal GC. En primera instancia, Johann supone que los tubos siempre están completamente llenos de líquido; además, considera que la fuerza p es el peso de la columna de líquido contenida en el tubo vertical GE, es decir, que en este caso la garganta y la aceleración del líquido en todo el conducto es debida al peso de la porción de líquido contenido en el tubo vertical. Por lo que si se considera la altura, $GA = h$, las áreas transversales $AE = A_1$ y $BC = A_2$, entonces $p = gA_1h$ es el peso (por unidad de densidad) del líquido contenido en el tubo GE, y de acuerdo con lo realizado en la situación anterior (Ecuación 1) se tiene que:

$$gA_1h = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right)v^2 \tag{2}$$

Por otro lado, los resultados de Galileo complementados posteriormente por Newton, muestran que si un cuerpo cae libremente desde una altura z se tiene que $g = \frac{dv}{dt}$ y $v = \frac{dz}{dt}$, de donde se obtiene que $gdt = dv$ y $dt = \frac{dz}{v}$, entonces $gdz = vdv$. Considerando que una capa líquido desciende desde el reposo, es decir que su velocidad inicial es cero y que durante el trayecto z alcanza una velocidad v, se obtiene $gz = \frac{1}{2}v^2$, por lo que $v^2 = 2gz$. Sustituyendo esto en (2), se obtiene que $gA_1h = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right)2gz$, de donde:

$$z = \left(\frac{{A_1}^2}{{A_1}^2 - {A_2}^2}\right)h \tag{3}$$

Por lo tanto, la velocidad del líquido en el tubo horizontal está dada por:

$$v = \sqrt{2gz} = \sqrt{2gh\left(\frac{{A_1}^2}{{A_1}^2 - {A_2}^2}\right)} \tag{4}$$

A este resultado en el cual la fuerza p esta designada sólo para la formación de la garganta, Johann le da el carácter de teorema, del cual a partir de la variación de los parámetros del conducto

se obtienen diferentes resultados respecto a la velocidad del líquido en el tubo horizontal. Así, si la abertura BC es muy pequeña comparada con el área transversal AE, de tal forma que A_2 puede ser obviada con respecto a A_1, se obtendrá que $z = h$, lo que indica que la velocidad del líquido que fluye por el tubo horizontal será la que obtiene un cuerpo que cae libremente desde la altura $EF \approx AG$. De modo que, dicha velocidad está dada por $v = \sqrt{2gh}$, lo que no es otra cosa que el *Teorema de Torricelli*; razón por la cual Johann afirma que: "este es un teorema muy conocido, que hasta ahora no se había demostrado a parir de principios dinámicos… que se creía correcto sólo para un pequeño orificio ubicado en *F*" (p. 359). De esta manera, a través de principios dinámicos Johann logra demostrar la hipótesis de Torricelli.

En cambio, entre más grande sea el área A_2 mayor será la velocidad de descarga del líquido en el tubo horizontal, de tal forma que si $A_1 = A_2$, dicha velocidad será infinita. Mientras que si el área A_2 del tubo horizontal es mayor que el área A_1 del tubo vertical, la velocidad será negativa, lo que para Johann indica la creación de una garganta que desacelera el flujo del líquido.

Esto evidencia que aunque Johann trata de mostrar que la velocidad del líquido en el tubo horizontal depende de una altura de caída en el tubo vertical, termina demostrando que esta altura está dada en términos de las áreas transversales de los tubos, por lo que nuevamente evidencia que la velocidad del líquido depende de las áreas transversales del conducto por donde circula. No obstante, si dichas áreas permanecen constantes se observa que la velocidad del líquido en el tubo horizontal es constante, tal como lo establece la *Ley de la Continuidad*.

3.2.2.1 Velocidad del líquido en el tubo horizontal cuando comienza a moverse desde el reposo

Ahora, considerando que el líquido se comienza a mover desde el reposo y que la fuerza p no sólo está designada para la formación de la garganta, sino que también debe acelerar el líquido tanto en el tubo vertical como en el horizontal, entonces para hallar la fuerza total p se debe hallar cada una de estas fuerzas.

El procedimiento que Johann sigue es hallar aceleración del líquido en cada tubo, la cual multiplicada por la masa de líquido que se acelera, da como resultado la fuerza buscada que cambia el estado de movimiento del líquido; procedimiento que realiza a partir de las definiciones explicitadas anteriormente.

Así, si una capa de líquido recorre una distancia dx (Figura 18) en el tubo horizontal durante un pequeño tiempo dt, de igual forma durante el mismo intervalo de tiempo una capa de líquido ubicada en AE se habrá desplazado una distancia dx'. De este modo, con ayuda de las leyes de la dinámica y el cálculo infinitesimal Johann encuentra que la fuerza que acelera la masa de líquido $A_2 l$ desde el reposo es $A_2 l \frac{vdv}{dx}$, la cual siendo *trasladada* al tubo vertical es $A_1 l \frac{vdv}{dx}$, donde l es la longitud del tubo FB; mientras que la fuerza que acelera la masa de líquido $A_1 h$ en el tubo vertical es $A_2 h \frac{vdv}{dx}$. Por ende, la suma de las fuerzas que aceleran el líquido a través de la garganta, el tubo vertical y el tubo horizontal (*trasladada* al tubo vertical), será la fuerza total p:

$$p = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right) v^2 + (A_1 l + A_2 h)\frac{vdv}{dx} \qquad (5)$$

Pero como se había supuesto que p es el peso de la columna del líquido contenido en el tubo vertical, es decir $p = gA_1h$ y teniendo en cuenta que $gdz = vdv$, de donde $gz = \frac{1}{2}v^2$; realizando las respectivas sustituciones en la ecuación 5, se obtiene que:

$$gA_1h = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{A_1}\right)zg + (A_1l + A_2h)\frac{gdz}{dx}$$

Johann soluciona esta ecuación diferencial encontrando que la altura z desde la que debe descender el líquido partiendo del reposo para que obtenga la velocidad v en tubo horizontal está dada por:

$$z = \left(\frac{{A_1}^2h}{{A_1}^2 - {A_2}^2}\right)\left(1 - 1/e^{({A_1}^2 - {A_2}^2)x/(A_2h + A_1l)A_1}\right) \qquad (6)$$

Este es un resultado más general que el que Johann denominó como teorema, ya que si $x = \infty$ se obtiene que $z = \left(\frac{{A_1}^2h}{{A_1}^2 - {A_2}^2}\right)$ y si a esto se adiciona que A_2 es muy pequeño comparado con A_1, entonces $z = h$, donde se obtiene el *Teorema de Torricelli*. Esto indica que a medida que x aumenta, es decir, a medida que el líquido se aleja de la garganta o de la transición de las áreas, se acelera hasta que alcanza una velocidad constante. Resultado que anteriormente se había supuesto a partir de la experimentación y la observación por parte de Da Vinci y Castelli, y que condujeron a la *Ley de la Continuidad.*

3.2.2.2 Velocidad del líquido en el tubo horizontal a medida que el tubo vertical se vacía

Considérese ahora que el líquido en el tubo vertical parte del reposo, pero a diferencia del caso anterior, no permanece lleno sino que este se vacía a medida que fluye el líquido, así la superficie AE (Figura 18) desciende continuamente; además, supóngase que el tubo horizontal esta

inicialmente lleno de líquido hasta C. Nuevamente, supóngase que una capa de líquido se ha desplazado durante un pequeño tiempo t una distancia x en el tubo horizontal. Esto indica que una capa de líquido en el tubo vertical ha recorrido una distancia $EI = \frac{A_2}{A_1}x$ en dicho tiempo, siendo HI la superficie del líquido en el tubo vertical después del desplazamiento. Así, la columna de líquido en el tubo vertical es $GI = A_1h - A_2x$, cuyo peso es $g(A_1h - A_2x)$ que se denominó como p. De manera análoga al procedimiento que empleó en la situación anterior Johann encuentra que la fuerza que acelera el líquido en este tubo es $(A_1h - A_2x)\frac{A_2vdv}{A_1dx}$.

Por otro lado, en el tubo horizontal la masa de líquido que se acelera en este caso es $A_2l + A_2x$, por lo que la fuerza en este tubo es $(l + x)A_2\frac{vdv}{dx}$, que por el proceso de *traslación* al tubo vertical es igual a $(l + x)A_1\frac{vdv}{dx}$. Por lo que sumando las tres fuerzas que se generan en la garganta y en los tubos, e igualándolas a $g(A_1h - A_2x) = p$, se obtiene que:

$$\left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right)v^2 + (l + x)A_1\frac{vdv}{dx} + (A_1h - A_2x)\frac{A_2vdv}{A_1dx} = p = g(A_1h - A_2x)$$

Y realizando las sustituciones habituales $gdz = vdv$ y $gz = \frac{1}{2}v^2$, se obtiene

$$\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{A_1}z + (l + x)A_1\frac{dz}{dx} + (A_1h - A_2x)\frac{A_2dz}{A_1dx} = A_1h - A_2x \qquad (7)$$

Luego de un proceso largo y laborioso de integración y algebra de la ecuación 7 se obtiene que z está dada por:

$$z = \frac{(A_1h - \frac{1}{2}A_2x)A_1x}{(A_1l + A_2h)A_1 + \left({A_1}^2 - {A_2}^2\right)x}$$

Si se considera la existencia de un tapón en la conexión de los tubos, inicialmente el tubo horizontal estará vacío, lo que indica que $l = 0$, pero al quitar dicho tapón durante un periodo de tiempo la superficie del líquido desciende hasta el fondo del tubo vertical, es decir cuando $x = \frac{A_1}{A_2}h$, así se obtendrá que $z = \frac{1}{2}h$, es decir, "que la velocidad del líquido en el tubo después del agotamiento total del tubo vertical será la que un peso [cuerpo] adquiriría al caer desde la mitad de la altura del recipiente" (p. 368). Resultado que había obtenido Newton, pero que interpreto de otra manera afirmado que el *Teorema de Torricelli* era erróneo, lo que lo llevó a disputas con sus colegas hasta que fue corregido en la posteriores ediciones de los *Principia*.

3.2.3 Flujo a través de tres o más tubos de diferente tamaño

Ahora se trata de analizar cómo es el flujo de un líquido a través de un conducto conformado por tres tubos cilíndricos de diferente tamaño conectados de forma horizontal, tal como se ilustra en la figura 19.

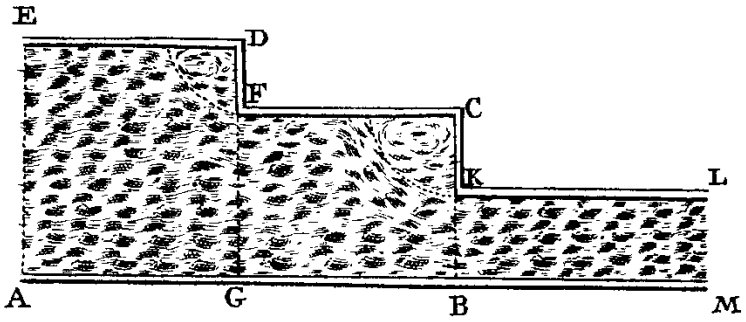


Figura 19. Flujo a través de tres tubos de diferente tamaño (Bernoulli, 1968, p. 368).

3.2.3.1 La fuerza que acelera el líquido en las transiciones de tres tubos

Con el fin de hallar la fuerza total que ocasiona el movimiento del líquido a través del conducto, considere que el conducto EM permanece constantemente lleno de líquido de tal forma

que alcanza velocidades constantes en cada uno de los tubos y que p es la fuerza que actúa uniformemente sobre la sección EA. Por las razones expuestas en la primera situación se forman dos gargantas, una en la transición GF y otra en la transición BK, las cuales requieren de su propia fuerza para generarse y acelerar el líquido.

Sean $A_1 = AE$, $A_2 = GF$ y $A_3 = BK$ las áreas transversales de los tubos AD, GC y BL respectivamente. Sea v la velocidad del líquido en el tubo BL, por lo que la velocidad en el tubo GC es $u = \frac{A_3}{A_2} v$. Así, de acuerdo con el razonamiento de la primera situación habrá una fuerza en la superficie AE requerida para formar una garganta a través de GF dada por:

$$\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1} u^2 = \frac{(A_1 A_3)^2 - (A_2 A_3)^2}{2A_1 {A_2}^2} v^2$$

En cuanto a la fuerza requerida para formar la garganta a través de BK, esta está dada por $\frac{{A_2}^2 - {A_3}^2}{2A_2} v^2$, que al ser *trasladada* a la superficie AE es $\frac{A_1 {A_2}^2 - A_1 {A_3}^2}{2{A_2}^2} v^2$. De este modo, la suma de estas fuerzas es la fuerza total p.

$$p = \frac{(A_1 A_3)^2 - (A_2 A_3)^2}{2A_1 {A_2}^2} v^2 + \frac{A_1 {A_2}^2 - A_1 {A_3}^2}{2{A_2}^2} v^2 = \frac{{A_1}^2 - {A_3}^2}{2A_1} v^2$$

Este resultado indica que el líquido se mueve a través de los tubos de la misma manera que si el segundo tubo hubiera sido retirado y, a pesar de que se forman dos gargantas, el líquido se acelera como si hubiera solo una. De hecho, Johann afirma que este resultado se obtiene independientemente del número de tubos que haya ya que siempre se podrá reducir a la situación de dos tubos conectados, el primero y el ultimo tubo, siendo este último el de menor tamaño.

3.2.3.2 Fuerza requerida para acelerar el líquido desde el reposo en tres tubos de diferente tamaño

Posteriormente, Johann supone que los tres tubos están completamente llenos de líquido, pero a diferencia del caso anterior, este comienza a fluir desde el reposo, por lo que la fuerza p no es sólo para la generación de la garganta sino que también debe acelerar el líquido en cada uno de los tubos, escenario que no plantea en la primera situación donde considera dos tubos conectados en forma horizontal.

Estableciendo l_1, l_2 y l_3 como las longitudes y A_1, A_2 y A_3 las áreas transversales respectivas de los tres tubos, Johann realiza un procedimiento similar al que realiza en la situación del tubo conectado en forma de codo para hallar la fuerza total p. Suponiendo que en un pequeño tiempo dt una capa de líquido en el tercer tubo (el más pequeño de los tres) recorre una pequeña distancia dx, y nuevamente a partir de los principios de la dinámica y con la ayuda del cálculo infinitesimal encuentra que la fuerza que acelera la masa de líquido $A_3 l_3$ es $A_3 l_3 \frac{vdv}{dx}$, mientras que la fuerza que acelera la masa de líquido $A_2 l_2$ en el segundo tubo es $A_2 l_2 \frac{vdv}{dx}$, y ambas fuerzas *trasladadas* al primer tubo son respectivamente $\frac{A_1 A_3 l_3 vdv}{A_3 dx}$ y $\frac{A_1 A_3 l_2 vdv}{A_2 dx}$. Por último, la masa de líquido $A_1 l_1$ del primer tubo es acelerada debido a la fuerza $\frac{A_1 A_3 l_1 vdv}{A_1 dx}$; por lo tanto, al sumar cada una de estas fuerzas junto con la fuerza para la generación de la única garganta que se forma, se obtiene la fuerza total p:

$$p = \frac{{A_1}^2 - {A_3}^2}{2A_1} + \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3}\right) A_1 A_3 \frac{vdv}{dx}$$

Y si los tubos son rígidos, es decir, que su forma permanece constante, entonces $K = \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3}$ es una constante. Por lo tanto:

$$p = \frac{{A_1}^2 - {A_3}^2}{2A_1} + KA_1A_3\frac{vdv}{dx}$$

Evidenciando nuevamente que la descarga de un líquido a través de un número indeterminado de tubos, se reduce al caso de dos tubos conectados, siendo los tubos conectados el primero y el último de dicho sistema. Más aún, Johann encuentra que si se tienen tres o más tubos conectados de los cuales el primero es vertical y los otros de forma horizontal, el análisis del flujo del líquido a través de tal conducto se reduce al caso de la segunda situación, es decir, a dos tubos conectados en forma de codo, donde se considera el ultimo de todos como el tubo horizontal.

3.2.3.3 La fuerza que acelera el líquido en tubos inclinados

Ahora, Johann considera una situación en la que se hallan tres tubos de diferente tamaño conectados de tal forma que el primer tubo está ubicado verticalmente y los otros dos están ubicados de forma inclinada, como se muestra en la figura 20.

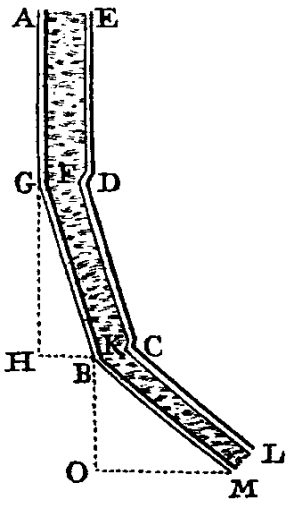


Figura 20. Flujo a traves de tubos inclinados (Bernoulli, 1968, p. 376).

Suponga que los tubos están completamente llenos de líquido y que este fluye debido a su propio peso en cada uno de los tubos, los cuales *trasladados* al primer tubo y sumados darán como resultado la fuerza total p, que nuevamente es la que se quiere obtener. Si se considera $AE = A_1$, $GD = A_2$ y $BC = A_3$ como las áreas transversales respectivas de los tubos AD, GC y BL, entonces el peso del líquido en el tubo AD es gA_1AG.

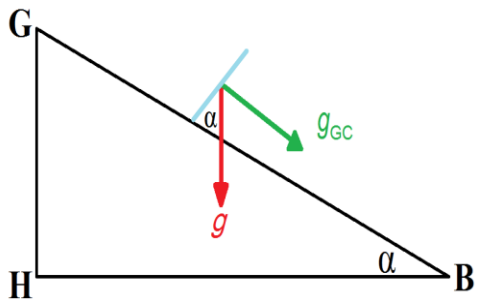


Figura 21. Componente de la aceleración de una capa de líquido en un tubo diagonal.

Ahora se debe hallar la componente de la gravedad que acelera el líquido por el tubo GC. Para que ello, considere una capa de líquido que desciende por la diagonal GB (Figura 21), la cual forma un ángulo $GBH = \alpha$ con la horizontal, ángulo que forma la gravedad con el plano de la capa de líquido, por lo que con aplicaciones trigonométricas se encuentra que la componente de la gravedad g_{GC} que acelera el líquido en este tubo es $g\frac{GH}{GB}$, y esta multiplicada por la masa A_2GB de líquido da como resultado la componente del peso del líquido en dicho tubo, que es gA_2GH. Procediendo de manera similar, se encuentra que la componente del peso del líquido en el tubo BL, está dada por gA_3BO. Y estos pesos *trasladados* al primer tubo son respectivamente gA_1GH y gA_1BO.

Así, la fuerza total p está dada por:

$$p = gA_1(AG + GH + BO)$$

Note que $AG + GH + BO = h$ es la altura desde la que la superficie AE del líquido desciende. Por lo tanto:

$$p = gA_1h$$

Esto significa que en este caso, la fuerza total p no es más que el peso total del líquido contenido en tubo cilíndrico vertical de altura h y área transversal A_1, por lo que esta fuerza es proporcional a la cantidad de líquido, que a su vez depende de las dimensiones del conducto por el que fluye.

A esto, Johann adiciona que si se ubicaran diversos tubos en forma de U o que si fuese un solo tubo en dicha forma, cierta cantidad de líquido que desciende por la parte izquierda o derecha del conducto se acelera debido a su peso, y como producto de dicha aceleración el líquido subiría por la parte opuesta a la cual descendía; pero a medida que asciende se desacelera hasta que su velocidad es nula, hecho que se da cuando liquido alcanza la altura inicial que tenía en la sección de la que parte, y de ahí nuevamente se vuelve a acelerar debido a su peso, es decir, que el movimiento del líquido en un conducto en forma de U es oscilatorio y, a su vez perpetuo si se consideran las idealizaciones necesarias.

Por lo tanto, Johann concluye que no hay dificultad alguna a la hora de analizar el flujo de un líquido a través de un número indeterminado de tubos ubicados de cualquier forma, pues dicho análisis se reduce a casos más simples como el de dos tubos conectados ya sea en forma horizontal o en forma de codo.

3.2.4 Sobre la presión en la base de un recipiente cilíndrico debida al flujo de un líquido a través de un orificio

En esta situación Johann se propone describir cómo es la presión que experimenta un recipiente cilíndrico debido al líquido que fluye a través de un orificio ubicado en un costado de este (Figura 22).

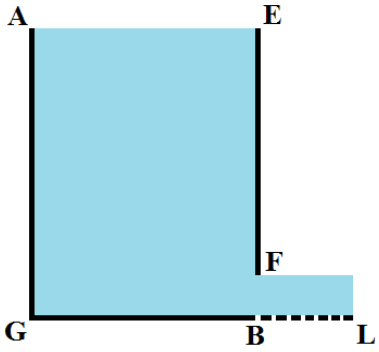


*Figura 22***.** Flujo a través de un orificio ubicado en el costado de un recipiente cilíndrico.

Para alcanzar dicho objetivo, Johann supone que el recipiente cilíndrico AB de altura $AG = h$ y área transversal $AE = A_1$ está constantemente lleno de líquido, el cual se comienza a mover debido a la descarga que se produce a través del orificio BF de área A_2. Luego supone que después de algún tiempo, el fluido que se descarga a través de dicho orifico a recorrido una distancia $BL = x$ alcanzando una velocidad v, formando un cilindro líquido[19] de base A_2 y longitud x. Después de un instante de tiempo dicho cilindro se desplaza una distancia y, por lo que la longitud total del líquido que ha fluido es $x + y$, alcanzando ahora una velocidad u. Si se considera que el líquido está libre de toda gravedad y que la única fuerza que presiona la base del recipiente es la que se deriva del movimiento del líquido, entonces esta fuerza experimenta una fuerza ejercida por la base del recipiente de igual magnitud tal como lo describe la tercera ley de Newton, la cual ocasiona que el líquido se desacelere; desaceleración que multiplicada por la masa $A_1 h$ de líquido dará la presión sobre la base del recipiente.

Esta situación se torna similar a la situación de dos tubos de diferente tamaño conectados en forma de codo en la que el líquido comienza a fluir desde el reposo, por ende, se retoma la ecuación 5 que describe la fuerza total p que ocasiona que el líquido fluya:

$$p = \left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right) v^2 + (A_1 l + A_2 h)\frac{v dv}{dx}$$

Sin embargo, como no hay un tubo conectado al recipiente, entonces $l = 0$ y como no se ha considerado el peso del líquido entonces $p = g A_1 h = 0$. Reemplazando además $v = u$ y $dx = dy$ pues en este caso la variable es y, mientras que x es constante. Así se tiene que:

[19] Johann considera que el líquido que fluye por el orificio BF se desplaza como si se moviera a través de un tubo aunque este no esté.

$$\left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1}\right)u^2 + A_2 h\frac{udu}{dy} = 0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial Johann encuentra que $u^2 = v^2 e^{-({A_1}^2 - {A_2}^2)y/A_1 A_2 h}$, de la cual al ser derivada considerando v constante se obtiene que:

$$udu = -v^2 dy\left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2A_1 A_2 h}\right)/e^{({A_1}^2 - {A_2}^2)y/A_1 A_2 h} \tag{8}$$

Este resultado es propicio para el propósito de Johann, hallar la aceleración del líquido en el recipiente cilíndrico. Objetivo que alcanza con su usual procedimiento a partir de las leyes de la dinámica y el cálculo infinitesimal, siendo $\frac{A_2 udu}{A_1 dy}$ la aceleración del líquido en el recipiente. Por lo que si esta es la aceleración del líquido, entonces la desaceleración del líquido producida por la base del recipiente, de acuerdo con la tercera ley de Newton es $-\frac{A_2 udu}{A_1 dy}$. Por lo tanto, si se multiplica (8) por $-\frac{A_2}{A_1 dy}$, se tiene que la desaceleración del líquido debido a la base del recipiente es:

$$-\frac{A_2 udu}{A_1 dy} = v^2\left(\frac{{A_1}^2 - {A_2}^2}{2{A_1}^2 h}\right)/e^{({A_1}^2 - {A_2}^2)y/A_1 A_2 h} \tag{9}$$

Antes de que el líquido cilíndrico se desplace, es decir, cuando $y = 0$, de acuerdo con el *Teorema de Torricelli* su velocidad está dada por $v^2 = 2gz$, pero se tiene que el valor de la altura z desde la cual el líquido comenzaría a descender para alcanzar la velocidad v cuando el líquido parte del reposo está dada por $z = \left(\frac{h{A_1}^2}{{A_1}^2 - {A_2}^2}\right)\left(1 - 1/e^{({A_1}^2 - {A_2}^2)x/A_1 A_2 h}\right)$. Por lo que haciendo estas sustituciones en (9) se tiene que la desaceleración del líquido está dada por $g\left(1 - 1/e^{({A_1}^2 - {A_2}^2)x/A_1 A_2 h}\right)$; la cual multiplicada por la masa $A_1 h$ de líquido da como resultado

$gA_1h\left(1-1/e^{\left({A_1}^2-{A_2}^2\right)x/A_1A_2h}\right)$, que de acuerdo con Johann es la presión sobre la base del recipiente que surge debido al movimiento del líquido.

Pero si ahora si se considera el peso del líquido en el recipiente que actúa vertical y constantemente sobre la base ya sea si el líquido está en movimiento o en reposo, se obtiene la presión total sobre la base del recipiente:

$$gA_1h+gA_1h\left(1-1/e^{\left({A_1}^2-{A_2}^2\right)x/A_1A_2h}\right)$$

De la cual puede apreciar que esta presión depende de la cantidad de líquido y del desplazamiento del mismo después de su salida por el agujero ya que si $x=\infty$, la presión en la base será $2gA_1h$, es decir, que la máxima presión que experimenta la base del recipiente será equivalente al doble del peso del líquido del recipiente. Mientras que la mínima presión que experimenta dicha base, esto es cuando $x=0$, será gA_1h, lo que es cierto pues antes de que fluya el líquido la presión que experimenta la base del recipiente es debida solo a liquido contenido en este.

La pregunta ahora gira entorno a si la presión que la columna del líquido sobre la base del recipiente varía cuando esta está en reposo o en movimiento. Respecto a lo cual Johann afirma que la mayoría de personas creen que si es diferente la presión; sin embargo, él demuestra que esto no es así y que la presión que ejerce la columna de líquido en movimiento o en reposo es la misma.

Se sabe que el líquido en el recipiente es acelerado por una fuerza que es la presión que experimenta la base del recipiente. En el proceso anterior se encontró que una de las componentes de la aceleración del líquido en movimiento es $g\left(1-1/e^{\left({A_1}^2-{A_2}^2\right)x/A_1A_2h}\right)$, que es la

desaceleración que ejerce la base, por lo que la otra componente de la aceleración del líquido debe ser de mayor magnitud que esta, de tal forma que el líquido sea acelerado hacia abajo.

Con su proceder habitual, Johann encuentra que dicha componente es $g/e^{(A_1{}^2-A_2{}^2)x/A_1A_1h}$. De esta manera, la suma de estas dos componentes se deduce que la aceleración del líquido es g, y esta multiplicada por la masa de líquido A_1h que se acelera da como resultado que la fuerza que acelera el líquido es gA_1h, que es la presión que experimenta la base del recipiente, que no es otra que el peso de la columna de líquido, la misma presión que experimenta la base cuando el líquido está en reposo. Es así como Johan demuestra que sim importar si el fluido está en movimiento o en reposo, la presión que experimenta la base del recipiente debido al líquido contenido en este es la misma.

Con esto Johann finaliza el primer capítulo de su obra *Hydraulics* y procede a analizar el flujo de un líquido a través de conductos de cualquier forma, que es la temática del segundo capítulo.

CAPÍTULO 4: ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA HIDRÁULICA

La historia de la física se ha constituido como una valiosa herramienta que permite no sólo conocer los elementos de causalidad que contribuyeron al establecimiento de diversas teorías, sino que a través de dichos elementos se pueden enriquecer los procesos de enseñanza de la física. Tales elementos se pueden clasificar según tres vertientes que han influido significativamente en el estudio de esta ciencia: En primera instancia, se encuentran aquellas problemáticas a las que se enfrentaron los científicos antes de empezar a indagar acerca de la explicación de los fenómenos de su entorno. Luego, se encuentran las teorías propuestas por los científicos que resultan de la búsqueda de respuestas ante dichas problemáticas. Por último, la experimentación que contribuyó a la formulación, replanteamiento y reprobación de teorías propuestas por cada uno de los personajes que han aportado al establecimiento de la física como disciplina científica.

Se esperaría que cada una de estas vertientes permeara en las practicas pedagógicas de los docentes de física; sin embargo, suelen ser ignoradas, propendiendo por una enseñanza basada en el aprendizaje de algoritmos y la asunción de resultados sin verificación alguna, causando una ruptura entre la didáctica de la física y la esencia de la misma. Extrañamente, las áreas de la física que son más símiles a la cotidianidad de los estudiantes, son las que generalmente se restringen a la teorización y la resolución de problemas a través de una lista de fórmulas, áreas en que las que se incluye hidráulica.

De este modo, se evidencia la imperiosa necesidad de indagar acerca de nuevos elementos que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de la física; elementos cuyo índole puede variar de acuerdo al área de investigación en que se sitúen, entre estos, la historia y epistemología de la física. Razón por la cual, es importante escudriñar en la historia de la hidráulica desde sus primeros

visos hasta mediados del siglo XVIII, analizando los trabajos que llevaron a cabo algunos de los célebres pensadores que aportaron al desarrollo de esta rama de la física; para determinar así, las distintas problemáticas que condujeron a su establecimiento como disciplina científica. Problemáticas que pueden ser estudiadas y contextualizadas por los docentes de física para potenciar sus procesos de enseñanza.

El análisis histórico del desarrollo de la hidráulica revela que esta surge a partir de la necesidad del hombre por controlar el flujo de agua para optimizar sus labores diarias. Hecho que dio paso a la producción de conocimientos empíricos que fueron empleados en la agricultura, la ganadería y los sistemas de acueducto y alcantarillado; y que además, se convirtieron en un aspecto esencial dentro del acervo cultural de civilizaciones como la mesopotámica y la egipcia.

Pero a medida que avanzaba el tiempo, el razonamiento del hombre no sólo se limitó a la búsqueda de soluciones a las situaciones de su entorno, sino que comenzó cuestionarse motivado por la curiosidad de comprender los fenómenos de su cotidianidad. Este interés no fue indiferente a los fenómenos hidráulicos, puesto que se empezaron a llevar acabo cuestionamientos que movilizaron la formulación de hipótesis sobre la naturaleza y el comportamiento de los líquidos y gases, tal como sucedió en algunas escuelas filosóficas de la antigua Grecia.

Por otra parte, además de sus aportes a la construcción de conceptos alusivos al vacío, la dinámica de los cuerpos y el funcionamiento del cosmos, Aristóteles funda los principios de la lógica aristotélica que sienta precedentes tanto en las matemáticas como en la física. Es así, como la lógica aristotélica demanda que una disciplina científica se fundamente no sólo a través de observaciones y experiencias, sino que también recurra a procedimientos basados en el razonamiento lejanos de cualquier viso de intuición. Exigencia bajo la cual, Arquímedes, Leonardo

Da Vinci, Galileo Galilei, Evangelista Torricelli, Benedetto Castelli, Edme Mariotte, Blaise Pascal, Isaac Newton y Johann Bernoulli, empiezan a construir los cimientos que conformarían el edificio de la hidráulica; retomando, contradiciendo, demostrando y reformulando ideas de sus antecesores, empleando elementos propios de las matemáticas y la investigación científica que permitirían obtener resultados cada vez más sólidos y veraces frente la mecánica de fluidos.

En este análisis histórico se puede apreciar cómo algunos de estos pensadores se preocuparon por tratar de comprender el movimiento de los fluidos a través de conductos cerrados y abiertos; mientras que otros, se restringieron a analizar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos que se mueven dentro de un fluido. Como lo afirma Calero (2008), el surgimiento de la hidráulica hasta mediados del siglo XVIII gira en torno a estas dos problemáticas particulares, denominadas el *problema de la descarga* y el *problema de la resistencia* respectivamente.

Paradójicamente, ambas problemáticas, y en general, la historia de la hidráulica se constituye como un valle desconocido para los docentes en formación, siendo estos elementos imprescindibles en la evolución de dicha disciplina. Por consiguiente, es importante que los docentes en formación conozcan y comprendan los elementos de causalidad que permitieron la fundamentación de la hidráulica, atendiendo a los fenómenos y preguntas que suscitaron el estudio de la dinámica de los fluidos; y de esta manera, levantar un puente entre la cotidianidad del estudiante, el objeto de estudio de la hidráulica y la naturaleza de la misma, teniendo en cuenta que este conocimiento permite comprender el contexto científico en el que se encuentra inmerso cualquier obra o resultado científico.

Así pues, se puede apreciar que Johann Bernoulli, cautivado por el comportamiento de los líquidos se enfrenta al problema de la descarga, cuestionándose acerca del comportamiento del

flujo de un líquido a través de conductos cilíndricos que cambian súbitamente de diámetro, lo cual es plasmado en el primer capítulo de su obra *Hydraulics*; en la que recurriendo al cálculo y a las leyes del movimiento formuladas por Isaac Newton pudo estudiar los líquidos al considerarlos como entes propios de la abstracción que se podían dividir en partes infinitesimales, rigurosidad y formalismo que utilizó para cimentar y justificar sus resultados. Sin embargo, aunque en este primer capítulo Johann recurre a métodos formales, indagando a fondo en este se pudieron hallar algunos elementos que constituirían una herramienta valiosa para que los docentes en formación mejoren su proceso de enseñanza en torno a la hidráulica.

El estudio de la descarga implica magnitudes físicas básicas relacionadas con el movimiento de un líquido como velocidad, aceleración y fuerza, las cuales sin excepción Johann analiza en su obra, preguntándose cómo es la velocidad del líquido antes, durante y después de la transición de las áreas transversales, cambio, que se debe a una aceleración del líquido, la cual a su vez y de acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton debe ser ocasionada por una fuerza que actúa uniformemente sobre la área transversal del líquido; incluso adiciona una cuestión más en la que se pregunta por la presión que experimenta la base de un conducto debido al líquido en movimiento. Todo esto se lo pregunta cuando la descarga del líquido es a través de dos tubos conectados de forma horizontal y en forma de codo, tanto cuando el líquido parte del reposo como cuando este ya lleva un tiempo fluyendo. Inclusive, expande dicho análisis al cuestionarse ¿Cómo cambia el comportamiento del fluido si hay más de dos tubos conectados?

La descripción y análisis del primer capítulo de *Hydraulics* evidencia que buscando las respuestas a las cuestiones mencionadas anteriormente, Johann logra exponer que cada una de las magnitudes físicas presentes en estas situaciones está ligada a las áreas transversales de los

conductos, siempre y cuando se excluyan la viscosidad, la adhesión del líquido a las paredes, la fricción entre el líquido y la turbulencia.

Esta conclusión a la que llega Johann se constituye como uno de los principales elementos que se obtiene del análisis de su trabajo que contribuye a la enseñanza de la hidráulica, debido a que más que el interés por las expresiones matemáticas que modelan dichas magnitudes relacionadas con la descarga de los líquidos, lo que realmente es significativo es lo que dichas expresiones dan a entender; en este caso, que el comportamiento de un líquido a través de conductos que cambian abruptamente de diámetro está determinado por el área transversal de estos. Así por ejemplo, cuando un líquido pasa de un conducto de mayor a menor diámetro el líquido se acelera, lo que implica que en el tubo de menor diámetro su velocidad es mayor, mientras que cuando el líquido pasa de un tubo de menor a uno de mayor diámetro, sucede todo lo contrario, el líquido se desacelera indicando que las demás magnitudes reducen su magnitud.

Por otra parte, otro de los elementos a resaltar es el hecho de que el análisis de la descarga de un líquido cuando hay más de dos tubos cilíndricos conectados horizontalmente o en forma de codo cuyos diámetros disminuyen progresivamente, se puede siempre reducir al caso de dos tubos conectados, siendo estos el de mayor y el menor diámetro. Esto debido a que se tendería a pensar que estos casos serían bastantes extensos y complejos de analizar, aumentado su dificultad a medida que se incrementa la cantidad de tubos conectados; sin embargo, y contrario a lo que dicta la intuición, dicho análisis se simplifica al simple caso de dos tubos conectados, sin importar la cantidad de tubos que inicialmente estén acoplados.

Así pues, estos dos elementos que proporciona Johann Bernoulli configuran un conocimiento fundamental en torno al flujo de un líquido a través de conductos que cambian

abruptamente de diámetro, los cuales deben tener presentes los docentes y deben procurar que sus estudiantes comprendan la explicación subyacente a estos fenómenos, a través de la correcta interpretación de las expresiones matemáticas y el uso de experiencias que permitan la construcción de tal conocimiento.

Por otro lado, en el proceder de Johann se observa que recurre primordialmente a la *Ley de la Continuidad* y el *Principio de Pascal*; lo que se puede interpretar como que estas dos leyes son fundamentales para el estudio de los fluidos, en particular de los líquidos. Y aunque estas dos leyes por lo general son enseñadas, desde la perspectiva de este trabajo se hace énfasis en que la enseñanza de estas no se enfoque sólo a sus expresiones matemáticas, sino que enseñen desde otras perspectivas que puede aportar la historia de la hidráulica.

De este modo, teniendo en cuenta la necesidad de nutrir los procesos de enseñanza de la hidráulica a continuación se proponen algunas situaciones que se podrían implementar en las aulas de clase por los docentes de física para lograr dicho objetivo.

Situación 1

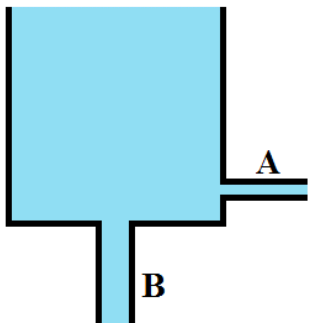


Figura 23. Descarga a través de dos tubos de diferente diámetro.

De acuerdo con la situación mostrada en la figura 23 donde se muestra un recipiente con dos tubos de descarga, ¿En cuál de los dos tubos, A o B, la velocidad con la que el líquido sale es

mayor? En esta situación se pone en cuestionamiento el conocimiento de los estudiantes acerca de la velocidad de un líquido y su relación con dos de las leyes fundamentales que implican la velocidad de un líquido, el Teorema de Torricelli y la Ley de la Continuidad. En esta situación se puede apreciar que el tubo de mayor diámetro B está a una mayor profundidad que el tubo A, entonces de acuerdo con el Teorema de Torricelli la velocidad del líquido debe ser mayor en el tubo B; sin embargo, como el tubo A tiene menor diámetro que el tubo B de acuerdo con lo expresa la ley de la continuidad el líquido en dicho tubo debe fluir con mayor velocidad que en el tubo B.

El análisis al trabajo de Johann ayuda a dar una respuesta en esta situación, pues él logra mostrar en la situación de dos tubos conectados en forma de codo, que la velocidad con la que el líquido se desplaza por el tubo horizontal está determinada por la altura desde la que desciende, y como el tubo A esta a menor profundidad que el tubo B, entonces la velocidad en dicho tubo es menor debido a que el agua ha descendido desde una menor altura.

A esto se puede añadir otras cuestiones que favorezcan a más a la comprensión de esta situación y las leyes involucradas, tales como ¿Qué sucede si los tubos están a la misma profundidad? Si ambos tubos estuvieran ubicados en el fondo del recipiente y se comienza a vaciar el recipiente de tal forma que justo debajo de cada uno de los tubos hay un recipiente ¿Cuál de los dos recipientes tendrá más liquido?

Situación 2

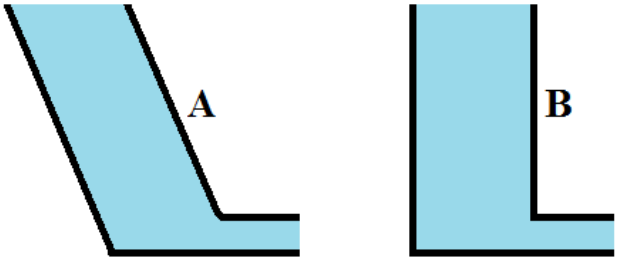


Figura 24. Tubos de igual dimensión conectados en forma de codo con ángulo obtuso y ángulo recto.

En esta situación se tienen dos conductos cilíndricos conectados en forma codo, uno en forma de ángulo obtuso y el otro en forma de ángulo recto (Figura 24). Si los tubos horizontales tienen el mismo diámetro y tanto el tubo A como el tubo B tienen el mismo diámetro ¿cuál es la velocidad del líquido en cada uno de los tubos horizontales si desciende de la misma la altura?

Esta situación resulta peculiar debido a que uno de los tubos está ubicado de forma diagonal, por lo cual los estudiantes tendrían a pensar que el líquido desciende más rápido o más lento, por ende dirán que el líquido en el tubo horizontal es más rápido o más lento según el anterior criterio.

No obstante, Johann muestra que cuando se tienen varios tubos de diferente diámetro conectados en forma diagonal, la fuerza que impulsa el líquido es equivalente al peso del líquido contenido en un cilindro cuya altura sea la que suman las alturas de los tubos conectados y cuya área es igual a la del tubo de mayor diámetro (véase el apartado 3.2.3.3). Por lo que en este caso al tener el tubo A y el tubo B las mismas dimensiones, la cantidad de líquido contenido en estos es la misma, y por ende la fuerza que mueve la columna de líquido es la misma en ambos casos, su propio peso, y así la velocidad del líquido es la misma en ambos tubos horizontales. De hecho, Galileo había demostrado en sus experiencias con los planos inclinados que la velocidad con la que desciende un cuerpo sobre un plano inclinado es la misma a la de aquel que cae desde la misma altura del plano, en cada una de las distintas alturas de sus recorridos.

Situación 3

El teorema de Torricelli que Johann demuestra a partir de principios dinámicos, afirma que la velocidad con la que un líquido sale por agujero en el fondo o en el costado de un recipiente depende de la altura de la cual comienza a descender dicho líquido. En ese sentido vale preguntar

si ¿a medida que un recipiente se ubique más alto como lo muestra la figura 25 más rápido saldrá el líquido?

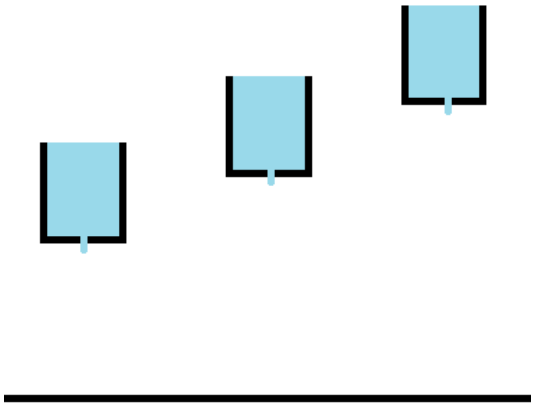


Figura 25. Recipiente a diferentes alturas.

Esta situación va encaminada a la comprensión del teorema de Torricelli, la cual es una experiencia que puede ser realizada por el propio estudiante, puesto que puede tomar un recipiente y abrir un pequeño orificio ya sea en el fondo o el costado de este. Seguido a esto, el estudiante puede establecer tres o más alturas diferentes y tomar el tiempo que tarda en vaciarse el recipiente en cada una de las alturas, ya que si a mayor altura mayor será velocidad con la que el líquido sale por el orificio, se esperaría que el envase ubicado a mayor altura se vaciara primero.

Por otra parte, con el ánimo de ver si las dimensiones del recipiente influyen en la velocidad de salida del agujero se pueden plantear otras situaciones, por ejemplo, tomar dos recipientes que cuyas longitudes sean distintas, pero que la altura del líquido contenido sean la misma, o se podrían tomar recipientes con forma cilíndrica, cubica y esférica y analizar si la forma geométrica afecta en la velocidad de salida del líquido.

Esta práctica y sencilla experiencia pude contribuir a la compresión del teorema de Torricelli, pues con esta se hace hincapié en que la altura a la que esta ley hace referencia no es a

la que se encuentra el recipiente ni a la forma o longitud del mismo, sino que es la altura o profundidad existente entre la superficie del líquido contenido en el recipiente y el orificio por el que este sale.

Situación 4

El análisis que realiza Johann referente a cómo es la descarga de un líquido a través de varios tubos cilíndricos de diferente diámetro conectados entre sí, es una situación que puede ser trasladada al aula de clases; pues se pensaría que esta situación es bastante compleja, sin embargo, como lo muestra Johann, sin importar el número de tubos que estén conectados, de tal forma que su diámetro vaya disminuyendo, el análisis de esta situación siempre se podrá reducir a la situación de dos tubos conectados, los cuales serían el primero y el último del ensamble.

Una forma de mostrar lo anterior, es a través de elaboración de dos conductos con la ayuda de tubos tal como se muestra en la figura 26, los cuales al llenarse de un líquido se puede comprobar que en ambos casos el líquido tarda el mismo tiempo en vaciarse, lo que indica que el segundo no parece provocar alguna alteración en el flujo del líquido, reduciéndose así a al caso de dos tubos conectados.

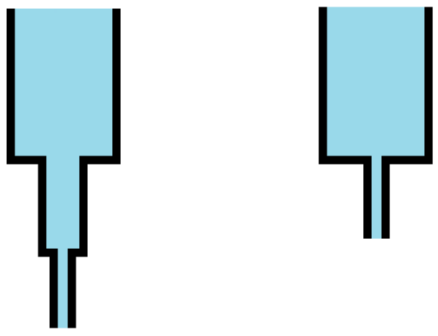


Figura 26. Conductos de tres y dos tubos cilíndricos conectados.

No obstante, las variaciones de algunos parámetros contribuirán a una mejor comprensión del comportamiento de los líquidos en esta situación, por lo que cabría plantearse cuestiones como: ¿Cambia el comportamiento del líquido en los conductos si uno de los tubos cuyo diámetro es el más grande tiene una mayor longitud que el otro? ¿Y si en vez de la altura lo que cambia es el diámetro siendo uno mayor que el otro? ¿Qué sucede si la longitud del tubo del medio se duplica o se acorta?

Situación 5

Otra situación bastante provechosa está relacionada con la presión que soporta la base de un recipiente cuando el líquido en su interior está en reposo o en movimiento, pues como menciona Johann, se cree que la presión sobre la base del recipiente en ambos casos es diferente, ya que se considera que cuando el líquido está en movimiento dicha presión es menor o mayor; pero, como lo muestra Johann, la presión que experimenta la base es la misma sea que el líquido este en movimiento o en reposo, siendo esta causada por el peso del líquido contenido en dicho recipiente.

Situación 6

Aunque se ha hecho énfasis en el estudio de experiencias que movilicen la comprensión de fenómenos propios de la hidráulica, no se pretende dejar de lado los elementos matemáticos que contribuyen al estudio de dichos fenómenos. Por lo cual, se propone una situación matemática sencilla donde el estudiante debe analizar el comportamiento del flujo de un líquido y su relación con las áreas de un conducto.

La siguiente situación está diseñada para que el estudiante a través del conocimiento previo de la ley de la continuidad, haga uso de esta y de su expresión matemática analice la relación entre el flujo de un líquido y las áreas del conducto, mientras que por otro lado esta situación permite al

estudiante observar y concluir sobre la pertinencia del tubo 2 (Figura 27), es decir, a través de esta situación el propio estudiante podrá demostrar que el tubo 2 no afecta el movimiento del líquido en lo que respecta a su velocidad, tal como lo hace Johann.

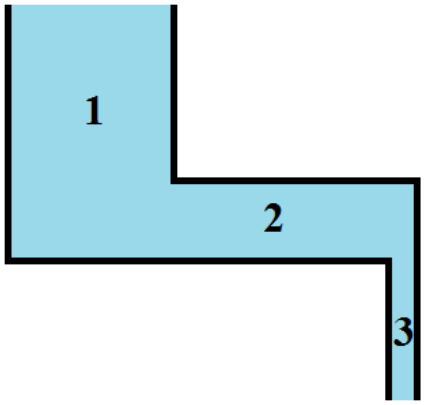


Figura 27. Conducto conformado por tres tubos cilíndricos de diferente diámetro.

Si se realiza una conexión de tubos cilíndricos de diferente diámetro de tal forma que se forma el conducto que se muestra en la figura 27 ¿Cuál debe ser la proporción entre las áreas del primer el tercer tubo para que la velocidad con la que el líquido salga del tercer sea 4 veces más rápido que en el primer tubo? ¿Si el tubo 2 tuviese el mismo diámetro que el tubo numero 3 cambiaría la velocidad del líquido?

Situación 7

Los libros de física usualmente muestran un cambio gradual del área transversal de un conducto (véase la figura 7), obviando que los cambios súbitos de área transversal que constituyen una valiosa herramienta para analizar. Por lo que la situación consiste en estudiar qué ocurre con un líquido cuando hay una transición abrupta del área transversal en un conducto, Johann se imaginó que se formaba una garganta que funcionaba como un embudo, ¿qué se imaginan los estudiantes que sucede con un líquido en la transición de los conductos?

De acuerdo con lo que los estudiantes se imaginen se les puede variar también la forma en la que se conectan los tubos de diferente área transversal así como lo hace Johann, por ejemplo, si se les pregunta qué se imaginan que sucede con el líquido cuando los tubos se conectan horizontalmente, habría que preguntarles si sucede lo mismo cuando los tubos se conectan en forma de codo. De igual manera, cabría preguntar si lo que se imaginan que ocurre cuando el líquido pasa de un tubo de mayor a uno de menor diámetro, sucede en el caso contrario. Estas preguntas surgieron al analizar el trabajo de Johann, pues aunque él se imagina la garganta en cada transición sólo la expone en la forma en que los tubos se conectan horizontalmente cuando el líquido fluye del tubo de mayor diámetro al de menor diámetro, aunque en los otros casos que analiza la supone pero no la ilustra.

Se les pude mencionar a los estudiantes que Johann Bernoulli, se imaginó que en la transición de diámetros se forma una garganta que funciona como un embudo; pero más que una imaginación, como lo menciona Ulazia (2015), lo que realiza Johann es una analogía, puesto que observaba que cuando un río pasaba de un sector ancho a uno estrecho, se formaban remolinos antes de la transición, de lo cual dedujo la idea para estudiar lo que sucede en los cambios abruptos de las áreas transversales de los conductos, cuyos resultados fueron plasmados en *Hydralics*.

De este modo, se podría solicitar a los estudiantes que busquen en la cotidianidad situaciones en que se forman tales remolinos cuando un líquido pasa de un conducto de mayor diámetro a uno de menor diámetro o viceversa. Para ilustrar esto, algunas situaciones en las que se puede percibir la formación de remolinos es cuando se vacía un tanque, un lavaplatos, cuando se vacían las bañeras o el sanitario.

Además, se podría preguntar a los estudiantes en qué situaciones de su cotidianidad encuentran cambios súbitos del diámetro de los conductos de tubería y cuál sería su función. Así, se pueden encontrar cambios abruptos de área transversal en las boquillas de las mangueras, las cuales se gradúan para que el chorro de agua salga con más velocidad, siendo la graduación la boquilla lo que cambia el área transversal del conducto e influyen en la velocidad con la que sale el agua. Otro ejemplo, es la hidrolavadora, cuyo funcionamiento se puede ver como una aplicación de lo desarrollado por Johann, pues en su mecanismo la presión que hace que el agua se desplace por los conductos es proporcionada por el motor eléctrico que junto con el cambio de diámetro de los conductos hacen el chorro de agua salga con una gran velocidad y así sea más fácil lavar los pisos o autos.

Otro instrumento altamente usado en el campo de la salud que cambia súbitamente de área transversal es la jeringa, con la cual se puede experimentar, además por su característica transparencia permite observar que sucede con el líquido en su interior.

De esta manera, al llenar una jeringa con un líquido, es decir, el caso en el que se tendría una expansión súbita del área transversal del conducto, se observa que si el pistón es halado rápidamente, el líquido no se mueve con la misma velocidad del pistón, siendo mucho más lento, tal como lo afirma la ley de la continuidad y a lo que Johann Bernoulli afirma ser la consecuencia de una garganta que desacelera el líquido. Por otra parte, al presionar el embolo se observa que entre más presión se haga más rápido sale el líquido, tal como lo expone Johann afirmando que el cuadrado de la velocidad es proporcional a la presión que se ejerce sobre el líquido.

Lo anterior se puede hacer con el objetivo de resaltar la relación intrínseca entre la física y la cotidianidad del estudiante, ya que usualmente este la considera como una ciencia abstracta y

compleja, debido al alto contenido matemático, memorístico y algorítmico que se suele adjudicar en las instituciones de educación media y superior.

CONCLUSIONES

Sin discusión alguna, la comprensión de conocimientos teóricos respecto a la física es algo que efectivamente los docentes de esta disciplina deben recibir en su formación, no sólo porque son un aspecto esencial dentro de su formación, sino que también constituyen la herramienta a partir de la cual el docente puede nutrir sus procesos de enseñanza velando por el aprendizaje eficaz de sus estudiantes. Sin embargo, la poca formación que tienen algunos docentes respecto a la enseñanza y la didáctica de la física causa que al ejercer su profesión se enfoquen en enseñar recurriendo al modelo universitario con el cual fueron educados, limitándose a recitar leyes, fórmulas, conceptos y ejemplos ideales, eludiendo la esencia experimental y fenomenológica de la física. Algunos docentes recurren a libros de texto, no analizan la pertinencia de los mismos y los emplean como un manual que en lugar de potenciar la enseñanza de los conceptos físicos, se convierten en un libro más para la resolución de problemas aplicando los algoritmos expuestos por el profesor.

Las consecuencias de esta enseñanza tradicionalista se reflejan en la poca comprensión que tienen los estudiantes ante una situación física, pueden solucionar con solvencia un problema que requiera de la aplicación de fórmulas, pero al proponerles un modelo experimental asociado al mismo concepto se les dificulta explicarlo teniendo en cuenta las leyes que lo rigen. Razón por la cual, se hace necesario hallar nuevas alternativas que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de la física manteniendo un equilibrio entre la teoría y la experiencia, aspectos que conforman la naturaleza del estudio científico dentro de la física.

Una de esas es alternativas es la historia de la física, puesto que un análisis histórico ya sea de una rama, concepto o ley física permite comprender la naturaleza del mismo, las problemáticas

que permitieron su formulación y establecimiento, además de las teorías e interpretaciones que favorecieron su construcción como un fenómeno, concepto o área de esta ciencia.

No obstante, no basta con conocer dichas problemáticas, sino que es necesario otorgarles un rol significativo dentro de las metodologías de enseñanza de la física, puesto que pueden ser presentadas en el aula de clases como una fructuosa forma de comenzar un tema partiendo con cuestiones como: ¿Por qué es necesario estudiar tema? ¿Cuál es la importancia de este? ¿Cómo surge? para que de esta manera, los estudiantes puedan construir dichos conocimientos.

Para el caso particular de la hidráulica, las problemáticas que dieron origen a esta disciplina científica denominadas como *el problema de la descarga* y *el problema de la resistencia* (Calero, 2008), referentes al comportamiento del movimiento de los líquidos y el comportamiento de un cuerpo sumergido en un fluido en movimiento, son conocimientos que debe poseer el docente de física.

Por otra parte, en la búsqueda de la solución a estas problemáticas, es decir, en el proceso de construcción de conocimiento, los científicos que afrontaron dichas problemáticas realizaron diversas actividades que suelen dejarse en el olvido, tales como el planteamiento de hipótesis, la formulación de aseveraciones y la realización de prácticas experimentales, sin saber que estas se transformarían en valiosos elementos para la historia de la física. Elementos que, no se suelen encontrar en los libros de texto tradicionales de física, ni se dictan en los cursos universitarios de física y, que al ser recontextualizados contribuyen a la construcción del conocimiento en el aula de clases y el enriquecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la física.

Entre estos elementos se encuentran los de carácter experimental, pero no se trata de que estas experiencias se hagan con el fin de comprobar una ley o concepto físico, sino que como lo

afirma Iglesias (2004), se trata de que la práctica experimental se convierta en un eje de reflexión que permita construir un conocimiento a partir de variaciones que conduzcan al estudiante a reflexionar y darle un significado a aquello que se le está enseñando. Perspectiva bajo la cual se plantearon las situaciones anteriormente propuestas, por medio de las cuales se espera que el estudiante construya un conocimiento sobre el comportamiento de los líquidos a través de conductos cuyo diámetro cambia repentinamente.

Particularmente, el análisis de las obras originales de los científicos que aportaron al desarrollo de la física como disciplina científica es de destacar, puesto que por lo general se suele resaltar sólo la conclusión más relevante que expone el científico en su obra, creyendo que este es su único aporte, y por ende lo que se debe enseñar. Sin embargo, el analizar el sendero que siguió cada uno de estos personajes para obtener tales resultados se están recogiendo algunos elementos que a través de la transposición didáctica pueden ser provechosos para la enseñanza de la física.

Es así como el análisis de la obra *Hydraulics* de Johann Bernoulli, quien en cuanto a la hidráulica es reconocido por ser uno de los que plasmó el Principio de Bernoulli, arrojó algunos elementos que son beneficiosos para la enseñanza de la hidráulica, los cuales están relacionados con conceptos y leyes que anteceden dicho principio asociados al comportamiento de los líquidos a través de conductos cilíndricos, pese a tratarse de una obra con alto contenido teórico y formal.

Es por esto, que la historia de la física es una disciplina a resaltar que no se debe dejar de lado en la formación de docentes, puesto que como se ha mencionado esta proporciona múltiples elementos que permiten potencializan los procesos de enseñanza. Razón por la cual, debería hacer parte de los currículos de las licenciaturas vinculadas a la enseñanza de la física, de tal manera que los docentes en formación comprendan la importancia y utilidad que se pueden obtener a través de

la historia de la ciencia; incluso, los docentes en ejercicio cuya formación careció del estudio de la historia de la física, deberían escudriñar en libros propios de esta disciplina que le brinden la posibilidad de enriquecer la enseñanza de la física, dejando de lado los modelos tradicionales que evidentemente no han permeado en el aprendizaje de los estudiante.

Finalmente, como el objetivo de este trabajo de investigación es mostrar algunos elementos derivados de un análisis histórico que pueden tener presentes los docentes de física al enseñar conceptos propios de la hidráulica, este puede ser retomado y aplicado, de tal forma que los elementos aquí propuestos puedan ser presentados a los docentes en formación o en las intuiciones de educación media, con el fin de obtener una evaluación de los mismos, examinando su pertinencia y eficacia dentro de la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

REFERENCIAS

Adler, M. J. (1994). The works of Archimedes including the method. En: *Great books of the western world* (Vol. 10) (pp. 397 – 592). Chicago: Encyclopædia Britannica.

Albo, M. M. (2008). *Historia de Egipto: Día a día en el antiguo Egipto*. Madrid: Libsa.

Aristóteles. (1998). *Física* (Guillermo De Echandia, trad.). España: Editorial Gredos.

Arrillaga, R. (1976). *La filosofía griega: Introducción al pensamiento moderno*. España: Ediciones de la Revista de Occidente.

Ausubel, D. P. (1980). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Barret, T. (2008). *Egyptian Farming: Shaduf* [imagen]. Recuperado de: https://www.flickr.com/photos/kardon/albums/72157604025186778

Bernabé, A. (2001). *De Tales a Demócrito: Fragmentos presocráticos*. 2 Ed. Madrid: Alianza Editorial.

Bernoulli J. (1968). Hydraulics. En: *Hydrodynamics by Daniel Bernoulli & Hydraulics by Johann Bernoulli* (Thomas Carmody y Helmut Kobus, tras.) (pp. 343 – 451). New York: Dover Publications.

Calero, J. S. (2008). *The genesis of fluid mechanics, 1640 – 1780* (Veronica Watson, tras.). Dordrech, Netherlands: Springer.

Cardona, E., Cardona, M. y Serna, T. (2014). *Hacía un aprendizaje significativo del concepto de presión hidrostática*. Proyecto de investigación. Colombia: Universidad de Antioquía, Facultad de Educación. Recuperado de: http://200.24.17.68:8080/jspui/bitstream/123456789/579/1/JD0892.pdf

Carrascosa, J., Gil, D., Vilches, A. y Valdés, P. (2006, Agosto). Papel de la actividad experimental en la educación científica. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. 23 (2), 157 – 181.

Castiblanco, O. y Nardi, R. (2013, Abril). Uso de la historia en la enseñanza de la didáctica de la física. *Revista virtual Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias,* 8 (2), 50 – 60. Recuperado de: http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5139/6860

De la Torre, A. (2009). Pitágoras. En: Muñoz, C. E. y Morales, C. A., *La antigua Grecia: Sabios y saberes* (pp. 72 – 84). Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Fraser, D., Pillay, R., Tjatindi, L., y Case, J. (2007). Enhancing the Learning of Fluid Mechanics Using Computer Simulations. *Journal Of Engineering Education*, *96* (4), 381 – 388.

Galilei, G. (1945). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* (José San Román Villasante, trad.). Buenos Aires: Editorial Losada.

García, E. G. (2009). *Historia de las ciencias en textos para la enseñanza neumática e hidrostática: perspectivas socioculturales*. Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.

García, E. G. y Cerquera, M. Y. (2004). La óptica de Huygens en el dominio de la visión mecanicista: consideraciones históricas en la enseñanza de las ciencias. En: Zambrano, A. C. *Tendencias, modelos, epistemologías y enseñanza de las disciplinas en la formación de los estudiantes* (pp. 43 – 52). Colombia: Universidad Del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Gil, D. y González, E. (1993). Las prácticas de laboratorio de física en la formación del profesorado: Un análisis crítico. *Revista de enseñanza de la física*. 6 (1), 47 – 61.

Godoy, O. L. (2013, Noviembre). Importância da história e a filosofia das ciencias no ensino da física. *Trabajo presentado en: IX Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (IX ENPEC)* de la Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências (ABRAPEC), Águas de Lindóia. Sao Pablo, Brasil.

Granés, J. (2005). Los *Principia* y la gravitación. En: *Isaac Newton, obra y contexto: Una introducción* (pp. 181 – 237). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Guthrie, W. K. (1995). *Los filósofos griegos: De Tales a Aristóteles* (Florentino Torner, trad.). 2 Ed. México: Fondo de Cultura Económica.

Herrera, R. M. (2012, Abril). Historias de matemáticas: Historia del experimento barométrico. *Revista Pensamiento Matemático*. 2 (1). Recuperado de: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_2/historias_barometrico.pdf

Homsy, G. M. (2001, Junio). Multi-media fluid mechanics. *American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition*. American Society for Engineering Education. Albuquerque, New Mexico.

Iglesias, M. (2004, Agosto). El giro hacia la práctica en filosofía de la ciencia: Una perspectiva de la actividad experimental. *Opción*. 20 (44), 98 – 119.

Koyré, A. (1978). Pascal como científico. En: *Estudios de historia del pensamiento científico*. 2 Ed. México: Siglo XXI Editores.

Kuhn, T. S. (2006). *La estructura de las revoluciones científicas* (Carlos Solís, trad.). 3 ed. México: Fondo de Cultura Económica.

Margueron, J. C. (2002). *Los Mesopotámicos*. Madrid: Cátedra.

Matthews, M. R. (1994). Historia, filosofía y enseñanza de las ciencias: la aproximación actual. *Revista Historia y epistemología de las ciencias*. 12 (2), 255 – 277.

Méndez, D. (2012). El aprendizaje cooperativo y la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la física. *Educación y futuro*, (27), 179 – 200. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4060944

Michelena, S. E. (1997). *Apuntes sobre los dibujos hidráulicos de Leonardo Da Vinci*. Caracas: HIDROVEN.

Newton, I. (2011). *Principios matemáticos de la filosofía natural* (Eloy Rada García, trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Pascal, B. (1973). *The physical treatises of Pascal: The equilibrium of liquids and the weight of the mass of the air* (Alexander e Isodere Spiers, trans.). New York: Octagon Books.

Pascal, B. (2012). Obras físicas (Carlos Dampierre, trad.). En: Pascal B. y Villar, A., *Los provinciales: Opúsculos, cartas, pensamientos, obras matemáticas y obras físicas* (pp. 761 – 836). Madrid: Editorial Gredos.

Pedroza, E., Ortiz, J. y Martínez, F. (Abril, 2007). Historia del Teorema de Bernoulli. Acta Universitaria, 17 (1), 39 – 35. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41617103

Pérez, J. R. (16 de abril de 2005). Evangelista Torricelli: De la bomba de agua a la invención del barómetro. *El Día*. Recuperado de: http://www.divulgameteo.es/uploads/Torricelli-bar%C3%B3metro.pdf

Pineda, G. (2009). La física de Aristóteles. En: Muñoz, C. E. y Morales, C. A., *La antigua Grecia: Sabios y saberes* (pp. 228 – 234). Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Posada, M. C. (2009). Anaxímenes de Mileto. En: Muñoz, C. E. y Morales, C. A., *La antigua Grecia: Sabios y saberes* (pp. 23 – 30). Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Rachewiltz, B. (1994). *Los antiguos egipcios*. Barcelona: Plaza & Janés.

Recalde, L. C. (2017). El programa matemático de Newton. En: *Lecturas de historia de las matemáticas* (pp. 237 – 240). Colombia: Universidad del Valle, en prensa.

Riaño, F. V. (Agosto, 2014). El nacimiento de la hidrodinámica teórica. *Revista de Ingeniería Hidráulica y Ambiental (RIHA)*, 35 (2), 66 – 78.

Riaño, F. V. (Diciembre, 2015). El nacimiento de la hidráulica experimental. *Revista de Ingeniería Hidráulica y Ambiental (RIHA)*, 36 (3), 48 – 60.

Riaño, F. V. (Diciembre, 2016). La hidráulica experimental durante el siglo XVIII en Francia. *Revista de Ingeniería Hidráulica y Ambiental (RIHA)*, 37 (3). 113 – 126.

Romero, A., Rodríguez, L. y Aguilar, Y. (2008). La formalización del estado de equilibrio de los fluidos: El concepto de presión interna como variable de estado. En: Ayala, M. M., Romero, A. E., Malagón, J. F, Rodríguez, L. D., Aguilar Y. y Garzón, M., *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos* (pp. 105 – 127). Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Rouse, H. e Ince, S. (1957). *History of hydraulics*. USA, Iowa: Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa.

Ruiz, J. C. (2005). *Alternativa metodológica para la formación integral de los estudiantes desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física*. (Tesis Doctorado en Ciencias Pedagógicas), Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte y Loynáz, Camagüey. Recuperado de: http://www.eumed.net/tesis-doctorales/2011/jcrm/ficha.htm

Sánchez, C. y Valdés, C. (2001). Johann el pendenciero y los desafíos variacionales. En: *Los Bernoulli Geómetras y viajeros* (pp. 117 – 165). España: Nivola.

Sepúlveda, A. (2003). *Los conceptos de la física: Evolución histórica*. Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Ulazia, A. M., (Octubre, 2015). La analogía provocativa como estrategia pedagógica: el caso histórico de la mecánica de fluidos. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (3), 159 – 174.

Young, H. y Freedman, R. (2009). *Sears – Zemansky física universitaria* (Vol. 1). 12 Ed. México: Pearson Educación.