

Sobre un ideal de operadores con parámetros, una función de Orlicz y un número real

Walter Andrés Acevedo Nanclares

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Recibido Dic. 14, 2005

Aceptado May. 11, 2006

Abstract

In 1985 Matter introduced the ideal $\mathcal{P}_{p\sigma}$ of $p\sigma$ -absolutely continuous operators with parameters $1 \leq p < \infty$ and $0 \leq \sigma < 1$ (see [2] and [3]). In 1997 Sánchez [12] presented a new characterization of $\mathcal{P}_{p\sigma}$ by means of an associated tensor norm. In this paper we generalize $\mathcal{P}_{p\sigma}$ (in case $p \neq 1$), defining an operator ideal $\mathcal{P}_{H\sigma}$ with parameters, an Orlicz function H and a real number $0 \leq \sigma < 1$. Then we define a tensor norm associated to the ideal and using $\mathcal{P}_{H\sigma}$ we characterize the topological dual of the tensor product of any pair of Banach spaces.

Keywords: Tensor products, Operators, Ideals, Orlicz spaces.

AMSC(2000): Primary 46A32 Secondary: 46E30, 47B10.

Resumen

En 1985 Matter introdujo el ideal $\mathcal{P}_{p\sigma}$ de operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos con parámetros $1 \leq p < \infty$ y $0 \leq \sigma < 1$ (ver [2] y [3]). En 1997 Sánchez [12] presenta una nueva caracterización de $\mathcal{P}_{p\sigma}$, mediante la definición de una tensornorma asociada. En el presente trabajo se generaliza $\mathcal{P}_{p\sigma}$ (para el caso $p \neq 1$) definiendo un ideal de operadores $\mathcal{P}_{H\sigma}$ con parámetros, una función de Orlicz H y un real $0 \leq \sigma < 1$; se define una tensornorma asociada al ideal y mediante $\mathcal{P}_{H\sigma}$ se caracteriza el dual topológico del producto tensorial entre espacios de Banach.

Palabras y frases claves: Productos tensoriales, Ideales, Operadores, espacios de Orlicz.

1. Introducción

Algunos de los temas que actualmente son considerados propios de la teoría de ideales de operadores, se remontan a principios del siglo XX, pero propiamente la teoría es sistematizada por Pietsch en la década de los setenta (ver [10]). Desde que Grothendieck introdujo la teoría de normas tensoriales en su obra principal, *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* ([8]), se visualiza la relación de ésta con la construcción de ideales de operadores asociados a normas tensoriales y viceversa. Lo anterior se manifiesta claramente en la obra de Defant y Floret ([1]), donde no sólo se muestra la profunda relación entre ambas teorías sino que se presenta una teoría conjunta.

Como antecedente de éste trabajo se tiene la definición del ideal de operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos denotado por $\mathcal{P}_{p\sigma}$, presentada por Matter en [2] y la caracterización de dicho ideal obtenida en la tesis doctoral de Enrique Sánchez ([12]). Para lograr la caracterización mencionada, fué necesaria la definición de una norma tensorial con parámetros $1 \leq p < \infty$ y $0 \leq \sigma < 1$ asociada al ideal.

Dado que la definición de Matter y el trabajo de Enrique Sánchez involucran resultados sobre los espacios de sucesiones ℓ_p y que la generalización natural de estos espacios son los espacios de sucesiones de Orlicz ℓ_H ; nosotros nos interesamos en dar una generalización de $\mathcal{P}_{p\sigma}$ (para el caso $p \neq 1$) definiendo un ideal de operadores $\mathcal{P}_{H\sigma}$, con parámetros una función de Orlicz H y un real $0 \leq \sigma < 1$. Posteriormente definimos una tensornorma $g_{H\sigma}$ y para cada par de espacios de Banach (E, F) caracterizamos los espacios complección $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ y dual $(E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$, éste último en términos de $\mathcal{P}_{H\sigma}$.

2. Conceptos básicos y notación

Cuando hagamos referencia a un espacio vectorial, supondremos que el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ será el cuerpo de escalares. No obstante, todos los resultados son válidos, con procedimiento análogo, si el cuerpo de escalares es complejo. Dados dos espacios de Banach E y F , denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de operadores lineales y continuos de E en F . Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, el operador adjunto de T será $T' \in \mathcal{L}(F', E')$. Necesitamos mencionar ahora algunos conceptos preliminares.

Los espacios de sucesiones de Orlicz son una generalización natural de los espacios ℓ_p , y tienen una estructura topológica y geométrica muy rica; pueden poseer propiedades que no tienen los espacios ℓ_p ordinarios. Damos a continuación algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios de Orlicz de acuerdo a [5] y [11].

Una función de Orlicz H es una función definida para $x \geq 0$, continua, convexa, no decreciente, con $H(0) = 0$ y $H(x) > 0$ para $x > 0$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \infty$. Si H es función de Orlicz, denotamos por ℓ_H al espacio de sucesiones de Orlicz, es decir, al espacio de sucesiones reales (α_i) , tales que existe $\rho > 0$ para el cual $\sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{|\alpha_i|}{\rho}) < \infty$; dotado de la norma $\Pi_H((\alpha_i)) := \inf\{\rho > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{|\alpha_i|}{\rho}) \leq 1\}$. Si $1 < p < \infty$ y particularmente $H(x) = |x|^p$ para cada real x , entonces ℓ_H coincide (isométricamente) con el espacio de sucesiones ℓ_p .

Se dice que una función de Orlicz H satisface la condición Δ_2 en 0 si $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{H(2x)}{H(x)} < \infty$, en tal caso la clausura en ℓ_H del espacio generado por los vectores unitarios e_i coincide con ℓ_H .

Si H es una función de Orlicz, existe otra denotada por H^* y definida para cada $y \geq 0$ por $H^*(y) = \sup\{xy - H(x) : x \geq 0\}$, denominada función complementaria de H . A partir de H^* se puede dotar a ℓ_H de otra norma $\|\cdot\|_H$, usualmente llamada norma de Orlicz, que se define para cada (α_i) en ℓ_H por $\|(\alpha_i)\|_H = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(|\beta_i|) \leq 1\}$.

Las normas $\Pi_H(\cdot)$ y $\|\cdot\|_H$ son equivalentes, pero no iguales. Además, si H tiene la propiedad Δ_2 en 0, se verifica que ℓ'_H es isomorfo a ℓ_{H^*} . Para tener una isometría entre estos dos espacios es necesario tomar $\Pi_H(\cdot)$ en ℓ_H

y $\|\cdot\|_{H^*}$ en ℓ_{H^*} , (ver [11], pp. 58-61 y [5], pp. 147-148).

Siguiendo el proceso expuesto en ([11];62), pero tomando como espacio medida $\mathbb{N}$ y una medida puramente atómica con átomos de medida uno, se puede establecer la siguiente desigualdad de Hölder: Para (a_i) en ℓ_H y (b_i) en ℓ_{H^*} , se cumple

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \min \{ \pi_H((a_i)) \| (b_i) \|_{H^*}, \pi_{H^*}(a_i) \| (b_i) \|_H \}$$

En adelante, cuando hagamos referencia a un espacio de Orlicz ℓ_H supondremos que la función de Orlicz H satisface la condición Δ_2 en 0, y además supondremos siempre que la función de Orlicz esta normalizada, es decir, $H(1) = 1$.

Sobre productos tensoriales de espacios de Banach, remitimos al lector a [1] y damos a continuación algunas ideas que necesitaremos.

Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo $\mathbb{R}$, denotamos por $B(E, F)$ el espacio de aplicaciones bilineales y continuas de $E \times F$ en $\mathbb{R}$. Cada elemento $(x, y) \in E \times F$ define una forma lineal canónica sobre $B(E, F)$ denotada por el símbolo $x \otimes y$ y definida para cada $\varphi \in B(E, F)$ por $\langle x \otimes y, \varphi \rangle := \varphi(x, y)$. Se llama producto tensorial de los espacios vectoriales E y F y, se denota $E \otimes F$, al subespacio vectorial del dual algebraico de $B(E, F)$ generado por el conjunto de formas lineales $x \otimes y$ con $x \in E$ y $y \in F$. Los elementos de $E \otimes F$ se llaman tensores y cada uno admite representaciones de la forma $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Dados los espacios vectoriales E, F, G, H y las aplicaciones lineales $A : E \rightarrow F$ y $B : G \rightarrow H$ se llama producto tensorial de aplicaciones a la aplicación $A \otimes B : E \otimes G \rightarrow F \otimes H$ definida para cada $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ en $E \otimes G$ por $(A \otimes B)(z) = \sum_{i=1}^n A(x_i) \otimes B(y_i) \in F \otimes H$.

Cuando en el producto tensorial de dos espacios E y F se tenga definida una norma α , nos referiremos al espacio vectorial normado como $E \otimes_{\alpha} F$ y a su complección como $E \widehat{\otimes}_{\alpha} F$. A la norma de un elemento cualquiera $z \in E \otimes F$, la denotaremos por $\alpha(z; E, F)$ o por $\alpha(z)$. Una norma α definida en el producto tensorial $E \otimes F$ se dice que es razonable si verifica que $\alpha(x \otimes y) = \|x\|_E \|y\|_F$ para todo $x \in E, y \in F$, y que para todo $x' \in E'$ y $y' \in F'$, $x' \otimes y' \in (E \otimes_{\alpha} F)'$ y $\|x' \otimes y'\|_{(E \otimes_{\alpha} F)'} = \|x'\|_{E'} \|y'\|_{F'}$.

Una norma tensorial α es un functor que hace corresponder a cada par de espacios normados (E, F) una norma sobre $E \otimes F$ formando un nuevo espacio normado.

Se dice que una norma tensorial α es un tensor norma si verifica que para cada par de espacios normados E y F , $\alpha(\cdot, E, F)$ es una norma razonable en $E \otimes F$, y además satisface la Propiedad métrica de las aplicaciones, esto es, dados los espacios normados E_1, E_2, F_1, F_2 y las aplicaciones $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$, $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$, se debe tener que $A \otimes B \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_{\alpha} E_2, F_1 \otimes_{\alpha} F_2)$ y que

$$\|A \otimes B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

De acuerdo a [1], el siguiente es un criterio equivalente a la definición de tensor norma: Sea α una asignación que a cada pareja de espacios normados E y F en cierta clase de espacios $\mathcal{A}$, que contenga a la clase de espacios de dimensión finita, le hace corresponder una función real $\alpha(\cdot; E, F)$. α es una tensor norma en $\mathcal{A}$ si y sólo si verifica las siguientes propiedades:

- a) $\alpha(\cdot; E, F)$ es una seminorma en $E \otimes F$ para todo E y F en $\mathcal{A}$.
- b) $\alpha(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$.
- c) Se cumple la propiedad métrica de las aplicaciones en $\mathcal{A}$.

En 1969 Pietsch muestra la relevancia de la noción de ideales de operadores, en los años siguientes, investiga todos los aspectos de la teoría abstracta de ideales de operadores, que aparecen en la monografía “Operators ideals” [10]. Presentamos ahora algunas nociones fundamentales de esta teoría.

Un ideal de operadores entre espacios de Banach es un functor $\mathfrak{A}$ que asocia a cada par de espacios de Banach E y F un subconjunto $\mathfrak{A}(E, F)$ de $\mathfrak{L}(E, F)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones: para espacios de Banach arbitrarios E, F, G y H

- 1. $\forall x' \in E', \forall y \in F \quad x' \otimes y \in \mathfrak{A}(E, F)$.
- 2. $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{A}(E, F) \quad S_1 + S_2 \in \mathfrak{A}(E, F)$.
- 3. $\forall R \in \mathfrak{L}(G, H), \forall S \in \mathfrak{A}(F, G), \forall T \in \mathfrak{L}(E, F) \quad R \circ S \circ T \in \mathfrak{A}(E, H)$.

En tal caso, para cada par de espacios de Banach (E, F) , a $\mathfrak{A}(E, F)$ se le llama componente del ideal $\mathfrak{A}$ respecto a E y F . Es claro que la componente $\mathfrak{A}(E, F)$ de $\mathfrak{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{L}(E, F)$.

Sea $\mathfrak{A}$ un ideal y α un functor que asocia a cada componente $\mathfrak{A}(E, F)$ una norma (cuasinorma ó seminorma), tal que para cada R en $\mathfrak{L}(G, H)$, S en $\mathfrak{A}(F, G)$ y T en $\mathfrak{L}(E, F)$ se verifica que $\alpha(R \circ S \circ T) \leq \|R\| \alpha(S) \|T\|$. A la pareja $(\mathfrak{A}, \alpha)$ se le llama ideal normado (cuasinormado o seminormado).

En los espacios de sucesiones escalares $\ell_p(E)$ y $\ell_p[E]$, débilmente p -sumables y fuertemente p -sumables de E denotamos las respectivas normas por:

$$\varepsilon_p((x_i)) = \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, x' \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \pi_p((x_i)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

A continuación recordamos las definiciones de algunos ideales de operadores a los que haremos referencia en éste artículo.

- 1. Sean E, F espacios de Banach. Un operador $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ es p -absolutamente sumante de E en F si existe $C > 0$ tal que para toda sucesión (x_i) débilmente p -sumable en E , es decir con $\varepsilon_p((x_i)) < \infty$, se cumple que $\pi_p((Tx_i)) \leq C \varepsilon_p((x_i))$. El ideal de operadores p -absolutamente sumantes denotado por $\mathcal{P}_p$ se define; tomando para cada par de espacios de Banach E y F la respectiva componente $\mathcal{P}_p(E, F)$ como el espacio de

operadores p -absolutamente sumantes de E en F , con norma definida para cada $T \in \mathcal{P}_p(E, F)$ por $P(T) = \inf C$ sobre todas las constantes C que satisfagan la definición.

2. Matter [2]. Sean E, F espacios de Banach, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \sigma < 1$. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es $p\sigma$ -absolutamente continuo si existe un espacio de Banach G y un operador $S \in \mathcal{P}_p(E, G)$ tal que $\|Tx\| \leq \|Sx\|^{1-\sigma}\|x\|^\sigma$. Designaremos el ideal de operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos por $\mathcal{P}_{p\sigma}$ donde cada componente respecto a espacios de Banach E y F es el respectivo espacio de operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos de E en F , denotado por $\mathcal{P}_{p\sigma}(E, F)$, con norma definida para $T \in \mathcal{P}_{p\sigma}(E, F)$ por $P_{p\sigma}(T) = \inf P_p(S)$ sobre todas las aplicaciones S que verifican la definición.

3. Operadores $H\sigma$ -absolutamente sumantes.

Matter demostró varias caracterizaciones para los operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos, de las cuales destacamos la siguiente probada en [2]. Sea $T : E \longrightarrow F$ un operador entre dos espacios de Banach. $T \in \mathcal{P}_{p\sigma}(E, F)$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión finita $x_1, \dots, x_n$ se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq C \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}.$$

Además, $P_{p\sigma}(T)$ es el ínfimo sobre todas las constantes C admisibles en la desigualdad anterior.

Dados $1 < p < \infty$, $0 \leq \sigma < 1$, q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y denotando

$$\delta_{p\sigma}((x_i)) = \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}},$$

en [12] se introduce una tensornorma definida para cada $z \in E \otimes F$, por $g_{p\sigma}(z; E, F) = \inf \sum_{i=1}^n \pi_p((x_i)) \delta_{q\sigma}((x_i))$ sobre todas las representaciones de z como $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Mediante $g_{p\sigma}$ se prueba el siguiente resultado de caracterización (para el caso $p \neq 1$): Para cada par de espacios de Banach E, F , se verifica $(E \otimes_{g_{p\sigma}} F)' = \mathcal{P}_{p\sigma}(F, E')$ isométricamente.

Buscamos generalizar el resultado anterior, para lo cual definiremos el espacio de operadores $\mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$, donde H es una función de orlicz con condiciones adecuadas, y $0 \leq \sigma < 1$. Análogamente, definimos una tensornorma tal que el dual topológico del producto tensorial entre dos espacios de Banach, dotado con la norma correspondiente a la tensornorma, se pueda caracterizar mediante $\mathcal{P}_{H\sigma}$.

Sean $0 \leq \sigma < 1$, H y H^* dos funciones de Orlicz complementarias y E un espacio de Banach. Se define el espacio $\ell_H[E]$ de las sucesiones fuertemente H -sumables de E como el espacio de sucesiones (x_i) de E tales que $(\|x_i\|) \in \ell_H$, dotado con la topología de la norma $\pi_H((x_i)) = \pi_H((\|x_i\|))$. Consideremos al conjunto de sucesiones (x_i) de E tales que para cada $x' \in B_{E'}$, la sucesión $(|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma) \in \ell_H$ y denotemos $\delta_{H\sigma}((x_i)) = \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)\|_H$

Definición 1. Sean E, F espacios de Banach, H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero y $0 \leq \sigma < 1$. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es $H\sigma$ -absolutamente sumante de E en F si existe una constante $C > 0$ tal, que para toda sucesión finita $x_1, \dots, x_n$ se verifica $\|((T(x_i)))\|_H \leq C\delta_{H\sigma}((x_i))$. Denotaremos $\mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ al espacio de los operadores $H\sigma$ -absolutamente sumantes de E en F con norma definida para cada $T \in \mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ por $\mathbf{P}_H(T) := \inf C$ donde el ínfimo se toma sobre todas las constantes C admisibles en la desigualdad anterior.

Siguiendo los pasos de la prueba de que $\mathcal{P}_{p\sigma}$ es un ideal de operadores entre espacios de Banach ([12]), se puede probar que la clase de los espacios $\mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ también lo es. Denotaremos dicho ideal por $\mathcal{P}_{H\sigma}$.

Matter denominó operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos a los elementos de $\mathcal{P}_{p\sigma}(E, F)$ porque además son absolutamente continuos en el sentido de Niculescu ([4]), pero como nosotros no hemos probado que los elementos de $\mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ sean absolutamente continuos, preferimos denominar a estos operadores $H\sigma$ -absolutamente sumantes.

Definición 2. Sea $0 \leq \sigma < 1$ y sean H y H^* un par de funciones de Orlicz complementarias tales que H tiene la propiedad Δ_2 en cero y de modo que $H(1) = 1$. Para cada par de espacios de Banach E y F y para cada $z \in E \otimes F$ definimos

$$g_{H\sigma}(z; E, F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{i,j})) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \otimes y_{i,j} \right\}$$

Antes de probar que $g_{H\sigma}$ es una tensornorma, notemos que si $E = F = \mathbb{R}$, entonces para una sucesión de reales (β_i) se tiene que $\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) = \|((\beta_i))\|_{H^*}$. En efecto, como $E' = \mathbb{R}$, entonces $\{\|\beta\| : \beta \in E', \|\beta\| \leq 1\}$ coincide con $\{|\beta| : \beta \in \mathbb{R}, |\beta| \leq 1\}$ y $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha\beta$, de manera que

$$\delta_{H^*\sigma}((\beta_{i,j})) \leq \sup_{\|x'\|_E \leq 1} |x'|^{1-\sigma} \|(\beta_{i,j})\|_{H^*} \leq \|(\beta_{i,j})\|_{H^*}$$

además, $\|(\beta_i)\|_{H^*} \leq \delta_{H^*\sigma}((\beta_i))$ ya que $x' = 1$ es uno de los valores admisibles en la definición de $\delta_{H^*\sigma}((\beta_i))$.

Teorema 1. $g_{H\sigma}$ es una tensor norma.

Demostración. Para esta prueba, usaremos el criterio que mencionamos en la sección anterior.

a. Para probar que $g_{H\sigma}(\cdot; E, F)$ es una seminorma en $E \otimes F$ sólomente veremos la desigualdad triangular ya que por la definición de $g_{H\sigma}$ las demás propiedades son inmediatas. Sean $\epsilon > 0$ y $z, w \in E \otimes F$ con representaciones $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \otimes y_{i,j}$ y $w = \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \otimes y_{i,j}$ que cumplan las desigualdades

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j})_{j=1}^{k_i}) &< g_{H\sigma}(z; E, F) + \epsilon/2 \\ \sum_{i=1+n}^{m+n} \pi_H((x_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j})_{j=1}^{k_i}) &< g_{H\sigma}(w; E, F) + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Consideremos la representación de $z + w$ dada por $z + w = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \otimes y_{i,j}$. De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} g_{H\sigma}(z + w; E, F) &\leq \sum_{i=1}^{n+m} \pi_H((x_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j})_{j=1}^{k_i}) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \pi_H((x_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j})_{j=1}^{k_i}) \\ &< g(z; E, F) + \epsilon/2 + g(w; E, F) + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Dado que ϵ es arbitrario se tiene

$$g_{H\sigma}(z + w; E, F) \leq g_{H\sigma}(z; E, F) + g_{H\sigma}(w; E, F).$$

Estableciendo así que $g_{H\sigma}(z; E, F)$ es una seminorma.

b. Veamos que $g_{H\sigma}(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$. Como para una sucesión de reales (β_i) , se tiene $\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) = \|((\beta_i))\|_{H^*}$, con $H(1) = 1$ se tiene $\pi_H((1, 0, 0, 0, \dots)) = \|(1, 0, 0, 0, \dots)\|_{H^*} = 1$ y así para $1 \otimes 1$ tenemos,

$$g_{H\sigma}(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \pi_H((1, 0, 0, \dots)) \delta_{H^*\sigma}((1, 0, 0, \dots)) = 1.$$

De otro lado, si $1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \otimes \beta_{i,j} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ es cualquier representación de $1 \otimes 1$, se tiene

$$\begin{aligned} 1 = |\langle 1 \otimes 1, 1 \otimes 1 \rangle| &= \left| \left\langle 1 \otimes 1, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \otimes \beta_{i,j} \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \beta_{i,j} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} |\alpha_{i,j} \beta_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n \pi_H((|\alpha_{i,j}|)) \|(|\beta_{i,j}|)\|_{H^*} \end{aligned}$$

obteniendo así $1 \leq \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha_{i,j})) \delta_{H^*\sigma}((\beta_{i,j}))$ y tomando ínfimo sobre todas las representaciones de $1 \otimes 1$ tenemos $1 \leq g_{H\sigma}(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R})$, probando así la igualdad.

c. Veamos ahora que $g_{H\sigma}$ satisface la propiedad métrica de las aplicaciones. Sean $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$, $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ y la aplicación $A \otimes B : E_1 \otimes_{g_{H\sigma}} E_2 \rightarrow F_1 \otimes_{g_{H\sigma}} F_2$. Si $B = 0$ es claro que $\|A \otimes B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Supongamos que $B \neq 0$, de esta manera, para y' en la bola unidad de F'_2 se tiene $\frac{B'(y')}{\|B'\|} \in E'_2$ con $\|\frac{B'(y')}{\|B'\|}\| \leq 1$ y además $\|B'\| = \|B\|$. Entonces para cada $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \otimes y_{i,j} \in E_1 \otimes E_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{H^*\sigma}(B(y_{i,j})) &= \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \|(|\langle B(y_{i,j}), y' \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{i,j})\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &= \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \|(|\langle y_{i,j}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{i,j})\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &= \|B'\| \cdot \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| |\langle y_{i,j}, \frac{B'(y')}{\|B'\|} \rangle|^{1-\sigma} \left\| \frac{B(y_{i,j})}{\|B'\|} \right\|^\sigma \right\|_{H^*} \\ &\leq \|B\| \cdot \sup_{\|w'\|_{E'_2} \leq 1} \|(|\langle y_{i,j}, w' \rangle|^{1-\sigma} \|y_{i,j}\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &\leq \|B\| \delta_{H^*\sigma}(y_{i,j}) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g_{H\sigma}((A \otimes B)(z); F_1, F_2) &\leq \sum_{i=1}^n \pi_H((A(x_{i,j})_{j=1}^{k_i})) \delta_{H^*\sigma}((B(y_{i,j})_{j=1}^{k_i})) \\ &\leq \|A\| \|B\| \sum_{i=1}^n \pi_H((\|x_{i,j}\|_{j=1}^{k_i})) \delta_{H^*\sigma}((\|y_{i,j}\|_{j=1}^{k_i})) \end{aligned}$$

tomando ínfimo sobre todas las representaciones de z se tiene $g_{H\sigma}((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \leq \|A\| \cdot \|B\| g_{H\sigma}(z; E_1, E_2)$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|A \otimes B\| &= \sup_{g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \leq 1} g_{H\sigma}((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \\ &\leq \sup_{g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \leq 1} \|A\| \cdot \|B\| g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \leq \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

Así que $\|A \otimes B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. De esta forma $g_{H\sigma}(z; E, F)$ es una tensor-norma. $\square$

En adelante escribiremos $g_{H\sigma}(z)$ en lugar de $g_{H\sigma}(z; E, F)$, si no hay lugar a confusión.

Teorema 2. *Todo elemento z de $E \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ admite representación de la forma*

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) < \infty \quad (1)$$

además

$$g_{H\sigma}(z) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \right\} \quad (2)$$

tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de z que cumplan la condición anterior.

Demostración. Veamos que cualquier serie del tipo mencionado es convergente en $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ y por tanto define un elemento de la complección.

Primero verifiquemos para cada natural i , la convergencia de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ en $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$, es decir, que la respectiva sucesión de sumas parciales es de Cauchy. Para $n > m$ se tiene

$$\begin{aligned} g_{H\sigma} \left(\sum_{j=m+1}^n x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &\leq \pi_H \left((x_{ij})_{j=m+1}^n \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=m+1}^n \right) \\ &\leq \pi_H \left((x_{ij})_{j=m+1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=m+1}^{\infty} \right) \end{aligned}$$

y el último término de la desigualdad anterior se puede hacer tan pequeño como se quiera, ya que $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) < \infty$, por tanto

- Si $\delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) = 0$, se tiene $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) = 0$.
 - Si $\delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) = \infty$, se tiene $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) = 0$ y así
- $$\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) = 0.$$

Ahora observe que si $\delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) > 0$, se tiene $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) \in \mathbb{R}^+$ entonces, $\lim_{j \rightarrow \infty} \pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) = 0$, luego dado $\epsilon > 0$, existe un natural m_i tal que

$$\pi_H \left((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty} \right) < \frac{\epsilon}{\delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right)}$$

y como $\delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty} \right) \leq \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right)$ se consigue que

$$\pi_H \left((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty} \right) < \epsilon \quad \text{para } n \geq m \geq m_i.$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} g_{H\sigma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} g_{H\sigma} \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^m \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^m \right) \leq \pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Ahora, la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ también es de Cauchy ya que

$$\begin{aligned} g_{H\sigma} \left(\sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &\leq \sum_{i=m+1}^n g_{H\sigma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) < \epsilon \end{aligned}$$

para m suficientemente grande por la condición (1). Además se cumple que

$$\begin{aligned} g_{H\sigma}(z) &= g_{H\sigma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{H\sigma} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{H\sigma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \end{aligned}$$

de lo cual $g_{H\sigma}(z) \leq \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \}$ Recíprocamente, veamos que para $z \in E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ hay una representación de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$$

que satisface la condición (1). En efecto, como $z \in E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ es punto límite de $E \otimes_{g_{H\sigma}} F$, luego existe una sucesión de Cauchy $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en $E \otimes_{g_{H\sigma}} F$ que converge a z , es decir, que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $g_{H\sigma}(u_n - z) < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe una sucesión $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $g_{H\sigma}(u_{k_n} - u_{k_{n+1}}) \leq \frac{\epsilon}{3(2^{n+2})}$. Claramente $z = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n}$. Renombrando $w_n = u_{k_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ se sigue que

$$\begin{aligned} z &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(w_0 + \sum_{k=1}^n (w_k - w_{k-1}) \right) \\ &= w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (w_k - w_{k-1}) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $w_0 \in E \otimes_{g_{H\sigma}} F$ y $(w_n - w_{n-1}) \in E \otimes_{g_{H\sigma}} F$, tienen representación en $E \otimes_{g_{H\sigma}} F$, de la forma: $w_0 = \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_0,i} x_{ij}^0 \otimes y_{ij}^0$ y $(w_n - w_{n-1}) =$

$\sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_{ni}} x_{ij}^n \otimes y_{ij}^n$ con los x_{ij}^0 , y_{ij}^0 , x_{ij}^n y y_{ij}^n escogidos de tal manera que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_0} \pi_H \left((x_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0i}} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0i}} \right) &< g_{H\sigma}(w_0) + \frac{\epsilon}{3}, \\ \sum_{i=1}^{k_n} \pi_H \left((x_{ij}^n)_{j=1}^{m_{ni}} \right) \delta_{H^* \sigma} \left((y_{ij}^n)_{j=1}^{m_{ni}} \right) &< g_{H\sigma}(w_n - w_{n-1}) + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})}, \\ &\text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La convergencia de $z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_{n,i}} x_{ij}^n \otimes y_{ij}^n$ está garantizada por la construcción, además

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_n} \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{m_{n,i}}) \varepsilon_{H^*}((y_{ij})_{j=1}^{m_{n,i}}) &< g_H^c(w_n - w_{n-1}) + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3(2^{n+1})}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Redenominemos ahora los términos de la serie que define a z de la siguiente manera. Consideremos $p_0 = 1$, $p_1 = k_0, \dots$, $p_n = \sum_{q=0}^{n-1} k_q$ para cada natural n .

1. Para $s = 1, 2, \dots, p_1$, y $t = 1, 2, \dots, m_{0,s}$, sean $r_s := m_{0,s}$ y $u_{st} \otimes v_{st} := x_{st}^0 \otimes y_{st}^0$.
2. Para $s = p_1 + 1, \dots, p_2$ y $t = 1, \dots, m_{1,s-p_1}$, sean $r_s := m_{1,s-p_1}$ y $u_{st} \otimes v_{st} := x_{s-p_1,t}^1 \otimes y_{s-p_1,t}^1$.
3. Para $s = p_2 + 1, \dots, p_3$ y $t = 1, \dots, m_{2,s-p_2}$, sean $r_s := m_{2,s-p_2}$ y $u_{st} \otimes v_{st} := x_{s-p_2,t}^2 \otimes y_{s-p_2,t}^2$.

En general, si $s = p_n + 1, \dots, p_{n+1}$ y $t = 1, \dots, m_{n,s-p_n}$ denotamos $r_s := m_{n,s-p_n}$, y $u_{st} \otimes v_{st} := x_{s-p_n,t}^n \otimes y_{s-p_n,t}^n$. De esta manera z se puede representar por

$z = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{r_s} u_{st} \otimes v_{st}$, veamos que esta representación cumple la condición (1), en efecto $\sum_{s=1}^{\infty} \pi_H((u_{st})_{t=1}^{r_s}) \delta_{H^* \sigma}((v_{st})_{t=1}^{r_s})$ se puede escribir de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{k_0} \pi_H((u_{st})_{t=1}^{r_s}) \delta_{H^*\sigma}((v_{st})_{t=1}^{r_s}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=p_n+1}^{p_{n+1}} \pi_H((u_{st})_{t=1}^{r_s}) \delta_{H^*\sigma}((v_{st})_{t=1}^{r_s}) = \\
& \sum_{i=1}^{k_0} \pi_H\left((x_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0,i}}\right) \delta_{H^*\sigma}\left((y_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0,i}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \pi_H\left((x_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}}\right) \delta_{H^*\sigma}\left((y_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}}\right) \\
& < g_{H\sigma}(w_0) + \frac{\epsilon}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{3(2^{n+1})} \\
& \leq g_{H\sigma}(w_0 - z) + g_{H\sigma}(z) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < g_{H\sigma}(z) + \epsilon < \infty
\end{aligned}$$

así, $\sum_{s=1}^{\infty} \pi_H((u_{st})_{t=1}^{r_s}) \delta_{H^*\sigma}((v_{st})_{t=1}^{r_s}) < g_{H\sigma}(z) + \epsilon$ y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario se obtiene

$$\inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \right\} \leq g_{H\sigma}(z)$$

lo que permite concluir la igualdad. $\square$

Ahora caracterizamos los elementos del espacio $(E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$ para dos espacios de Banach E y F .

Teorema 3. *Para todo par de espacios de Banach E y F , $(E \otimes_{g_{H\sigma}} F)' = \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$ isométricamente.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$ y definimos $\phi_T : E \otimes_{g_{H\sigma}} F \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $z \in E \otimes F$ con $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \otimes y_{ij}$, como $\langle \phi_T, z \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle$

Por definición de producto tensorial ϕ_T está bien definida con independencia de la representación elegida para z . Vamos a ver que $\phi_T \in (E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$.

De la definición es claro que ϕ_T es lineal, veamos que es continua en el producto tensorial, esto es, que existe $C > 0$ tal que $|\langle \phi_T, z \rangle| \leq C g_{H\sigma}(z)$, en efecto,

$$\begin{aligned}
|\langle \phi_T, z \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} |\langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \|x_{ij}\| \|T(y_{ij})\| \leq \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) (\|T(y_{ij})\|)_{H^*} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) (\mathbf{P}_{H^*}(T) \|y_{ij}\|)_{H^*} = \mathbf{P}_{H^*}(T) \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})).
\end{aligned}$$

Por tanto $|\langle \phi_T, z \rangle| \leq \mathbf{P}_{H^*}(T) \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij}))$ y tomando ínfimo sobre todas las representaciones de z se sigue que $|\langle \phi_T, z \rangle| \leq \mathbf{P}_{H^*}(T) g_{H\sigma}(z)$. Así, $\phi_T \in (E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$ con $\|\phi_T\| \leq \mathbf{P}_{H^*}(T)$.

Recíprocamente consideremos $\phi \in (E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$ de manera que podemos definir $T_\phi : F \rightarrow E'$ tal que para cada $x \in E$, $y \in F$ $\langle T_\phi(y), x \rangle = \langle \phi, x \otimes y \rangle$. Veamos que $T_\phi \in \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$.

Consideremos $(y_n)_{n=1}^\infty \in F$ con $\delta_{H^*\sigma}((y_n)) < \infty$. Como $B_{E'}$ es débilmente densa en $B_{E''}$, dado $\epsilon > 0$ y (ϵ_n) con $\|(\epsilon_n)\|_{H^*} \leq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_E$ tal que $\|T_\phi(y_n)\| \leq |\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle| + \epsilon \epsilon_n$.

De otro lado, por las condiciones impuestas a H se tiene $(\ell'_H, \Pi_H)' = (\ell_{H^*}, \|\cdot\|_{H^*})$ isométricamente. Por tanto, si $B = (b_n) \in \ell_H$ con $\Pi_H(B) \leq 1$ entonces, $B \in \ell'_H$. Ahora, teniendo en cuenta que para cada n , $\|b_n x_n\| \leq \|b_n\|$, es fácil ver que $\sum_{n=1}^\infty b_n x_n \otimes y_n \in E \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$. Además,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \|T_\phi(y_n)\| b_n &= \sum_{n=1}^\infty \langle T_\phi(y_n), x_n b_n \rangle = \langle \phi, \sum_{n=1}^\infty b_n x_n \otimes y_n \rangle \\ &\leq \|\phi\| g_{H\sigma}(\sum_{n=1}^\infty b_n x_n \otimes y_n) \leq \|\phi\| \pi_H((b_n x_n)) \delta_{H^*\sigma}((y_n)) \\ &\leq \|\phi\| \pi_H((b_n)) \delta_{H^*\sigma}((y_n)) \leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|(\|T_\phi(y_n)\|)\|_{H^*} &\leq \|(|\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle| + \epsilon \epsilon_n)\|_{H^*} \\ &\leq \sup\{\sum_{n=1}^\infty \|T_\phi(y_n)\| b_n : \Pi_H((b_n)) \leq 1\} + \epsilon \\ &= \sup\{\|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)) : \Pi_H((b_n)) \leq 1\} + \epsilon \\ &= \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario tenemos que $\|(\|T_\phi(y_n)\|)\|_{H^*} \leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n))$ y así $T_\phi \in \mathbb{B}_{H^*\sigma}(F, E')$ con $\mathbf{P}_{H^*}(T_\phi) \leq \|\phi\|$. $\square$

4. Reconocimientos

Los autores agradecemos a la Universidad EAFIT haber hecho posible la realización de este artículo.

Referencias

- [1] Defant, A. and Floret, K.: Tensor norms and operator ideals. North Holland Math. Studies. Amsterdam. 1993.
- [2] Matter U. . Absolutely continuous operators and super-reflexivity. Inaugural dissertation. Zurich. (1985).

- [3] Matter U. . Factoring through interpolation spaces and super-reflexive Banach spaces. *Rew. Roumane Matth. Pures Appl.* 34, (1989) 147-156.
- [4] Nicolescu, C.P. Absolute continuity and weak compactness. *Bulletin of the American Mathenatical Society*, 81 1064-1066. 1975
- [5] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg. 1977
- [6] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces II*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg. 1979.
- [7] Loaiza, G., López Molina, J.A., Rivera, M.J.: Characterization of the Maximal Ideal of Operators Associated to the Tensor Norm Defined by an Orlicz Function. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (Journal for Analysis and its Applications)* 20(2001) no.2, 281–293
- [8] A. Grothendieck. *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* (1956), 1-79.
- [9] A. Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*. *Mem. Amer. Math. Soc.* 16 (1955).
- [10] Pietsch, A.: *Operator Ideals*. North Holland Math. Library. Amsterdam, New York. 1980.
- [11] Rao, M. M. y Ren, Z.D.: *Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekker Inc. 1991.
- [12] Sánchez Pérez, E. A. : *Ideales de operadores absolutamente continuos y normas tensoriales asociadas*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia. 1997.
- [13] Schaefer, H. H.: *Banach lattices and positive operators*. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1974.

Dirección de los autores: Walter Andrés Acevedo Nanclares Universidad EAFIT, Medellín, Colombia. wacevedo@eafit.edu.co — Gabriel Ignacio Loaiza Ossa Universidad EAFIT, Medellín, Colombia. gloaiza@eafit.edu.co