



UNIVERSIDAD DEL VALLE

TESIS DE MAESTRÍA

Teoría de Chern-Simons $D=3$ y su Relación con Teoría de Campos Conformes.

Autor:

Diego Fernando RENGIFO

Director:

Dr. Hernan OCAMPO

*Tesis Sometida Como Requisito Parcial Para Obtener
El Título Master en Ciencias- Física*

En El

Grupo de Geometría y Física Teórica
Departamento de Física

16 de febrero de 2014

*“It seems to be one of the fundamental features of nature that fundamental physical laws are described in terms of a mathematical theory of great beauty and power, needing quite a high standard of mathematics for one to understand it. You may wonder: Why is nature constructed along these lines? One can only answer that our present knowledge seems to show that nature is so constructed. We simply have to accept it. One could perhaps describe the situation by saying that God is a mathematician of a very high order, and He used very advanced mathematics in constructing the universe.”*¹

Paul Adrien Maurice Dirac

¹The Evolution of the Physicist's Picture of Nature, Scientific American (1963)

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Resumen

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Física

Master en Ciencias- Física

Teoría de Chern-Simons D=3 y su Relación con Teoría de Campos Conformes.

por Diego Fernando RENGIFO

En este trabajo se calculó el álgebra de Poisson de los generadores de transformaciones gauge usando una definición de generador que no esta reportada en la literatura y fue motivada desde la definición del generador de transformaciones gauge dada en [1] para teoría de YM. Aquí adaptamos dicho resultado a la teoría de Chern-Simons en tres dimensiones y obtenemos resultados bien conocidos, calculados usando otros generadores, que en realidad son la las ecuaciones de ligadura tipo ley de Gauss en nuestro formalismo. Para transformaciones gauge usuales, dicha álgebra llega ha ser un álgebra de Kac-Moody sin necesidad de fijar el gauge como se hace en la literatura y para transformaciones gauge mas generales de la forma $\theta^a = \theta^k A_k^a$, se obtiene un álgebra de Virasoro después de fijar el gauge. Finalmente para esquematizar la relevancia de las álgebras calculadas, se obtendrá la entropía de agujeros negros BTZ vía formula de Cardy, que es un resultado bien conocido pero que aun es genera polémica, en la comunidad científica debido a la no-existencia de una teoría de gravedad cuántica.

Agradecimientos

Existen muchas personas que han influenciado en mi pensamiento tan profesional como personal y que de una u otra forma han contribuido a que este proyecto haya salido adelante. Definitivamente este espacio se queda corto para nombrarlos a todos. Primero que todo quiero agradecer a esa fuerza interior que incluso en los momentos difíciles ha estado ahí para brindar su ánimo y que constantemente me asombra por la armonía de la naturaleza, la vida y la creación en general, gracias Dios. También mi especial agradecimiento a mi director Hernan Ocampo por su paciencia y las discusiones útiles que llevamos a lo largo de todo este proyecto. Gracias al profesor Jorge Zanelli (CECs) por su tiempo y ayuda en discutir sobre la teoría de Chern-Simons. Mi infinita gratitud a la escuela de Villa de Leyva: Geometric, Algebraic and Topological Methods in Quantum Field Theory y en especial a su comité organizador: Sylvie Paycha, Alexander Cardona y Andres Reyes. También a los conferencistas invitados en la versión 2013: profesor Bruno Carneiro da Cunha por sus lecturas sobre BTZ, la fórmula de Cardy y su tiempo a la hora de discutir aspectos del proyecto. Katrin Wendland por las discusiones sobre CFT. También mis agradecimientos especiales a Luis Miguel Solarte por brindarme su ayuda en aspectos complicados de geometría y topología usados en el trabajo, a Mario Fernando Hurtado que siempre ha sido fuente de discusiones útiles en varios campos y por haberme brindado la mano cuando más lo necesitaba, gracias totales.

Gracias a mi novia Diana Penagos por su inmenso amor, comprensión y apoyo incondicional en todo momento a lo largo del trabajo. Gracias a la familia Penagos Calvete, familia Ramirez y Ramirez Barriosnuevos, a mis compañeros del grupo de geometría y física y de maestría: Luz Esther, Sebastian Trujillo, Brayan Diaz, Alberto Giraldo, Diego Obviedo y en especial a Alejandro Gonzales por las discusiones interesantes que tuvimos sobre este proyecto y por revisar el trabajo en busca de errores tipográficos y de redacción.

Estos agradecimientos no estarían completos sin nombrar a mis compañeros de la sala de computo de física teoría, que aunque algunos ya no están siguen los recuerdos de todas las experiencias vividas: Edwin Moncada, Leon Escobar, Abdul Reyes, Angélica Perez. También a mis amigos del pregrado que a pesar de la distancia han estado ahí siempre para apoyarme: Marcela Herrera, Julian Vargas, Jose David Rivera, Carlos Palechor.

Y por último y no menos importante, mi gratitud al departamento de física, en especial a los profesores de la maestría que brindaron lo mejor de su conocimiento para hacer de mí, el profesional que soy hoy en día. Gracias al programa de asistencias de docencia de la Universidad del Valle que me ofreció la estabilidad económica necesaria.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	III
Abreviaciones	VI
1. Generalidades sobre Teoría de Chern-Simons	1
1.1. Introducción a las Clases Características	1
1.1.1. Polinomios Invariantes	2
1.1.2. Clases de Chern	8
1.2. Formas de Chern-Simons	9
1.2.1. Aplicación a la Mecánica Clásica	12
2. Teoría de Chern-Simons en $(2 + 1)$-dimensiones	16
2.1. Análisis Clásico de la Acción de Chern-Simons	16
2.2. Estructura Symplectica y el Algebra de los Generadores.	18
2.2.1. Álgebra de los Generadores de las Transformaciones Gauge	21
2.2.2. Fijación del Gauge	22
2.2.3. Algebra de Kac-Moody	24
3. Gravedad en $(2+1)$-Dimensiones	26
3.1. Gravedad como una Teoría de Chern-Simons	26
3.2. Diferenciabilidad de los Generadores $\tilde{\mathcal{G}}$	29
3.3. Álgebra de Poisson de los Generadores $\tilde{\mathcal{G}}_N$	31
3.4. Álgebra de Virasoro	34
4. Aplicación: Entropía de Agujeros Negros BTZ	39
4.1. Agujeros Negros tipo BTZ	40
4.2. Función de Partición y Formula de Cardy	44
4.3. Entropía de Agujeros Negros BTZ	48
5. Discusión y Conclusiones	51
5.1. Discusión	51
5.2. Conclusiones	52

A. Convenciones	54
------------------------	-----------

Bibliografía	55
---------------------	-----------

Abreviaciones

AdS	A nti d e S itter
BTZ	B añados T eilteboim Z anelli
CFT	C onformal F ield T heory
CS	C hern- S imons
YM	Y ang- M ills
WZW	W ess Z umino W itten

A Mis Padres

Capítulo 1

Generalidades sobre Teoría de Chern-Simons

1.1. Introducción a las Clases Características

En esta sección se desarrollan las herramientas matemáticas básicas para comprender el origen geométrico de las teorías de Chern-Simons. Los conceptos desarrollados aquí no solo se aplican a CS, también a una amplia gama de fenómenos de naturaleza topológica que se encuentran en la física teórica y experimental [2–4]. Entre los mas relevantes son el efecto Aharonov-Bonm, cuantización de la carga de monopolos, instantones, orden topológico, entre otros.

En teoría de haces fibrados principales, la forma local de curvatura $\mathcal{F}$, como su nombre lo indica, tiene información local sobre cómo el haz fibrado se dobla (“se curva”) cuando se pasa de una carta a otra del espacio base. Localmente un haz es trivial pero globalmente no necesariamente lo es, y esto depende sensiblemente del tipo de conexiones que se pueden definir sobre el has principal y que son compatibles con la estructura del mismo. Una pregunta que surge de manera natural es porque introducir haces principales, que en cierto sentido son más complicados que la variedad base original? Una respuesta parcial a esta pregunta la ofrece la teoría de clases características, que nos permitirá construir ciertos invariantes topológicos de variedades, analizando polinomios invariantes (bajo la acción adjunta) definidos sobre haces fibrados principales.

Denotaremos un has fibrado principal como (E, M, G) , donde E es el espacio total, M la variedad base y G el grupo de estructura (que es un grupo de Lie).

¿Porque usar polinomios invariantes?. Existen principalmente dos razones para usarlos:

- 1 $\mathcal{F}$ no esta definido globalmente. La ley de transformación de una carta a otra (de intersección no vacía) se hace mediante la acción adjunta del grupo de estructura G . Por tanto no es una buena estrategia usar $\mathcal{F}$ como medidor de la no trivialidad de un haz.
- 2 Dado un haz fibrado, la conexión compatible con la acción derecha de G y la forma de curvatura respectiva no son únicas. Por lo cual existe redundancia en esta elección.

Estos problemas al mismo tiempo plantean la solución. Ésta consiste en construir una función invariante bajo la acción adjunta de G que permita pasar de una carta a otra sin problemas y la información transportada por dicha función debe ser independiente de la conexión.

1.1.1. Polinomios Invariantes

Como se sabe, $\mathcal{F}$ es una dos-forma con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, por lo tanto antes de tratar el caso general, primero nos enfocaremos en el caso cuando G es un grupo de Lie de matrices.

Definición 1.1. Una función multilineal simétrica G -invariante es una aplicación multilineal:

$$P : \bigotimes_r \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F} \quad \text{donde } \mathbb{F} \text{ es } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}.$$

que satisface:

- P es simétrico para todo i, j :

$$P(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_r) = P(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_r) \quad (1.1)$$

- Para todo $g \in G$, P es invariante, es decir:

$$P(Ad_g(A_1), \dots, Ad_g(A_i), \dots, Ad_g(A_r)) = P(A_1, \dots, A_i, \dots, A_r) \quad (1.2)$$

Ahora, se denotará como $I^r(G)$ al conjunto de todas las funciones simétricas G -invariantes (Que bajo las operaciones usuales llega a ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$). El ejemplo por excelencia es: Sea $G = GL(m, \mathbb{C})$ y consideremos la representación fundamental de

sus elementos, es decir, $A_i \in GL(m, \mathbb{C})$:

$$str(A_1, \dots, A_r) \equiv \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} tr(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r)}) \quad (1.3)$$

donde la suma se realiza sobre el grupo simétrico S_r . Usando las propiedades de la traza es evidente que $str \in I^r(GL(m, \mathbb{C}))$.

Adicional a la suma y la multiplicación por escalares de $\mathbb{F}$, podemos definir un producto sobre la suma directa de los espacios $I^r(G)$: $I^*(G) = \bigoplus_r I^r(G)$. Este espacio vectorial se convierte en un álgebra graduada bajo la multiplicación definida cómo:

Definición 1.2. Sea $P \in I^p(G)$ y $Q \in I^q(G)$, $A_i \in \mathfrak{g}$

$$(P \cdot Q)(A_1, \dots, A_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} P(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(p)}) Q(A_{\sigma(p+1)}, \dots, A_{\sigma(p+q)}) \quad (1.4)$$

Llamaremos a P un polinomio invariante homogéneo de grado r , si es una aplicación $P : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ para la cual se satisface:

$$P(A) = \tilde{P}(A, \dots, A) \quad \text{donde} \quad \tilde{P} \in I^r(G) \quad (1.5)$$

Un polinomio invariante es una suma finita de polinomios invariantes de diferente grado. Un ejemplo de suma importancia para este trabajo es: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con una representación matricial de dimension k , un polinomio invariante es:

$$P(A) = \det \left(I_k + t \frac{iA}{2\pi} \right) = 1 + tP_1(A) + \dots + t^k P_k(A) \quad (1.6)$$

donde $\det$ es el determinante sobre las matrices $k \times k$. En la última línea se realizó la expansión en potencias de t . Es fácil ver que:

$$P_1(A) = \frac{i}{2\pi} tr(A), \quad P_k(A) = \det\left(\frac{i}{2\pi} A\right) \quad (1.7)$$

Por otro lado, dado un polinomio invariante homogéneo P de grado r , se puede construir un polinomio $\tilde{P} \in I^r(G)$ (llamado polarización de P) dado por¹

$$\tilde{P}(A_1, \dots, A_r) = \frac{1}{r!} P(t_1 A_1 + \dots + t_r A_r)|_{t_1, \dots, t_r} \quad (1.8)$$

donde $|_{t_1, \dots, t_r}$ se refiere al coeficiente de la variable $t_1 \dots t_r$.

¹El polinomio invariante homogéneo de grado r , $P(A) = tr(A^r)$, tiene polarización $str(A_1, \dots, A_r)$.

Hasta este punto las variables de los polinomios toman valores en cierta álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Fácilmente se puede generalizar dichos resultados, al caso en que las variables son formas diferenciales $\mathfrak{g}$ -valuadas.

Sea $\tilde{P} \in I^r(G)$, $A_i \in \mathfrak{g}$ y $\eta_i \in \Omega^{p_i}(M)$, entonces se define:

$$\tilde{P}(A_1\eta_1, \dots, A_r\eta_r) \equiv \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}(A_1, \dots, A_r) \quad (1.9)$$

La $\mathfrak{g}$ -invariancia de $\tilde{P}(A_1, \dots, A_r)$ implica la $\mathfrak{g}$ -invariancia de $\tilde{P}(A_1\eta_1, \dots, A_r\eta_r)$. En el caso de polinomios homogéneos invariantes P de grado r , se tiene:

$$P(\eta A) = \left(\bigwedge_r \eta \right) P(A) \quad (1.10)$$

Por r -linealidad, se puede extender a formas más generales que son combinaciones lineales de varias formas diferenciales (por ejemplo combinaciones lineales de una base de T_p^*M). Ahora, se enunciarán dos teoremas importantes como se verá en breve²:

Teorema 1.3. Para $X, A_i \in \mathfrak{g}$ y $\tilde{P} \in I^r(G)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^r \tilde{P}(A_1, \dots, [X, A_i], \dots, A_r) = 0 \quad (1.11)$$

Más generalmente, si $A \in \Omega^p(M, \mathfrak{g})$ y cada $\eta_i \in \Omega^{p_i}(M, \mathfrak{g})$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{p(p_1+\dots+p_{i-1})} \tilde{P}(\eta_1, \dots, [A, \eta_i], \dots, \eta_r) = 0 \quad (1.12)$$

Ahora, debido a que se ha extendido el dominio de los polinomios invariantes a p_i -formas con valores en $\mathfrak{g}$, $\Omega^{p_i}(M, \mathfrak{g})$, podemos usar el cálculo exterior, por lo cual se puede calcular la derivada exterior de $\tilde{P}$, el proceso por el cual se lleva a cabo dicha labor, está dado en el siguiente teorema:

Teorema 1.4. Sea $\tilde{P} \in I^r(G)$ y $\eta_i \in \Omega^{p_i}(M, \mathfrak{g})$ entonces la derivada exterior está dada por:

$$d\tilde{P}(\eta_1, \dots, \eta_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{(p_1+\dots+p_{i-1})} \tilde{P}(\eta_1, \dots, d\eta_i, \dots, \eta_r) \quad (1.13)$$

²La demostración de ambos es bien conocida y esta detallada en [3], así que no vale la pena repetirla aquí.

Como es bien conocido, la forma de curvatura local de un haz G -principal transforma sobre $U \cap V$ mediante la acción adjunta:

$$\mathcal{F}_V = Ad_g(\mathcal{F}_U) \quad \text{donde } g \in G \quad (1.14)$$

Por lo cual, se tiene que cualquier polinomio invariante (bajo la acción adjunta) con variables $\mathcal{F}$ esta definido sobre todo el espacio base M . En este hecho yace la importancia de considerar polinomios invariantes, además si se toma el grado del polinomio adecuadamente, éste se puede integrar sobre M para obtener invariantes topológicos como será descrito en breve.

Con los dos teoremas enunciados arriba se demostrará el teorema de Chern-Weyl:

Teorema 1.5 (Chern-Weyl). *$P(\mathcal{F})$ tiene las siguientes propiedades:*

- 1 $P(\mathcal{F})$ es una forma cerrada, esto es, $dP(\mathcal{F}) = 0$.
- 2 Si el haz G -principal tiene dos conexiones $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, cuyas formas de curvatura son $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, respectivamente, entonces $P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F}_1)$ es una forma exacta.

Demostración. Todo polinomio invariante es la suma de un numero finito de polinomios homogéneos y la derivada exterior es lineal, entonces sólo hay que probar el caso en que $\mathcal{P}$ es homogéneo (grado r). Sea $\mathcal{P}$ la polarización de P , por tanto: $dP(\mathcal{F}) = d\tilde{P}(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F})$, entonces usando el teorema 1.4 y recordando que $\mathcal{F} \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$, se obtiene:

$$dP(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^r \tilde{P}(\mathcal{F}, \dots, d\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) \quad (1.15)$$

pero el teorema 1.3 implica:

$$\sum_{i=1}^r \tilde{P}(\mathcal{F}, \dots, [\mathcal{A}, \mathcal{F}], \dots, \mathcal{F}) = 0 \quad (1.16)$$

sumando ambas ecuaciones y usando la r -linealidad de $\tilde{P}$, se obtiene:

$$dP = \sum_{i=1}^r \tilde{P}(\mathcal{F}, \dots, D\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) \quad (1.17)$$

pero en virtud de la identidad de Bianchi $D\mathcal{F} \equiv d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$, se obtiene la conclusión requerida.

Para demostrar la segunda parte se considera una familia de conexiones parametrizadas por t :

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A} + t\theta \quad \text{donde } \theta = \mathcal{A}' - \mathcal{A} \text{ y } 0 \leq t \leq 1 \quad (1.18)$$

Observar que $\mathcal{A}_t$ es una interpolación (homotopía) entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. La familia de curvaturas generadas por $\mathcal{A}_t$, esta dada por:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F} + tD\theta + t^2\theta \wedge \theta \quad \text{donde} \quad D\theta = d\theta + [\mathcal{A}, \theta] \quad (1.19)$$

Ahora, expresando la diferencia $P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F}_1)$ como:

$$P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F}_1) = \int_0^1 dt \frac{dP}{dt}(\mathcal{F}_t) \quad (1.20)$$

Pero usando 1.4, la simetría de $\tilde{P}$ y la conmutatividad de los productos $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$ (son 2-formas), se llega a :

$$\frac{dP}{dt}(\mathcal{F}_t) = r\tilde{P}\left(\frac{d\mathcal{F}_t}{dt}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t\right) \quad (1.21)$$

Por lo cual, usando (1.19) se llega a:

$$P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F}_1) = r \int_0^1 dt \tilde{P}(D\theta + 2t\theta \wedge \theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \quad (1.22)$$

$$= r \int_0^1 dt \left(\tilde{P}(D\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + 2t\tilde{P}(\theta \wedge \theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \right) \quad (1.23)$$

Ahora la prueba se dirige a demostrar que el integrando de ésta ecuación es una diferencial exacta. Tomando el teorema 1.4 y extrayendo el término $i = 1$ de la suma, se consigue:

$$d\tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}(d\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - \sum_{i=2}^r \tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, d\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.24)$$

Y usado el teorema 1.3 con $\eta_1 = \theta$ y $\eta_i = \mathcal{F}_t$ para $i \geq 2$, se llega a:

$$\tilde{P}([\mathcal{A}, \theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - \sum_{i=2}^r \tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = 0 \quad (1.25)$$

Sumando estas dos ecuaciones y usando la simetría en las $r - 1$ entradas con la variable $\mathcal{F}_t$, se consigue:

$$d\tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}(D\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r - 1)\tilde{P}(\theta, D\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.26)$$

Observar que el primer término del lado derecho es el primer término del integrando (1.22), ahora se encontrara la forma que toma el segundo término. Usando la identidad de Bianchi $D_t\mathcal{F}_t = 0$ es trivial demostrar $D\mathcal{F}_t = -t[\theta, \mathcal{F}_t]$, entonces haciendo uso de este hecho, el segundo término en cuestión, toma la forma:

$$\tilde{P}(\theta, D\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = -t\tilde{P}(\theta, [\theta, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.27)$$

Pero usando el teorema 1.3 con $\eta_1 = \theta = \mathcal{A}$ y $\eta_i = \mathcal{F}_t$ para $i \geq 2$ y separando el término $i = 1$ de la sumatoria se obtiene:

$$\tilde{P}([\theta, \theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - \sum_{i=2}^r \tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, [\theta, \mathcal{F}_t], \dots, \mathcal{F}_t) = 0 \quad (1.28)$$

pero $[\theta, \theta] = 2\theta \wedge \theta$ y de nuevo, usando la simetría en las $r - 1$ entradas con la variable $\mathcal{F}_t$, se llega a:

$$(r - 1)\tilde{P}(\theta, [\theta, \mathcal{F}_t], \dots, \mathcal{F}_t) = 2\tilde{P}(\theta \wedge \theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.29)$$

$$(r - 1)\tilde{P}(\theta, D\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = -2t\tilde{P}(\theta \wedge \theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.30)$$

Donde en la última línea se uso (1.27). Usando este resultado junto con (1.26), se llega a la forma final del integrando (1.22):

$$\tilde{P}(D\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + 2t\tilde{P}(\theta \wedge \theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = d\tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.31)$$

En resumen se ha demostrado que $P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F}_1)$ es exacto!:

$$P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F}_1) = d \left(r \int_0^1 dt \tilde{P}(\theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \right) \quad (1.32)$$

□

Observación: Notar que θ , por ser la diferencia de dos conexiones, transforma bajo la acción adjunta por lo cual el integrando de esta expresión sigue siendo una forma definida globalmente sobre M .

Definición 1.6. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos conexiones que están definidas sobre el mismo has G-principal, y sea $\mathcal{F}_t$ la familia de formas de curvatura generada por la familia de conexiones $\mathcal{A}_t = \mathcal{A} + t(\mathcal{A}' - \mathcal{A})$, $0 \leq t \leq 1$, entonces se llama forma de transgresión a la forma dada por:

$$TP_r(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{F}) = r \int_0^1 dt \tilde{P}(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.33)$$

donde $\tilde{P}$ es un polinomio invariante homogéneo de grado r .

El teorema de Chern-Weyl, implica de inmediato el siguiente resultado, que es un primer ejemplo de un invariante topológico:

Teorema 1.7. Supongamos que el espacio base de un has fibrado es una variedad diferenciable M real, compacta, orientable y sin frontera. Sea P_m un polinomio invariante de grado m entonces

$$\int_M P_m(\mathcal{F}) \quad (1.34)$$

es independiente de la elección de la conexión del haz fibrado.

El teorema de Chern-Weyl también motiva la definición de clases características. Esto se puede apreciar desde el hecho de que la diferencia $\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ es exacta, por lo tanto generan la misma clase de Cohomología de Rham, en otras palabras, sea $\chi_E(P) \equiv [P(\mathcal{F})] \in H^*(M)$ entonces el teorema de Chern-Weyl asegura que ésta clase de equivalencia es independiente de la elección de la conexión. A la clase de equivalencia $\chi_E(P)$ se le llama clase característica del haz principal $P(M, G)$.

1.1.2. Clases de Chern

En esta sección se estudia un ejemplo concreto pero importante de los conceptos introducidos en la sección anterior.

Las clases de Chern se definen para haces vectoriales complejos $\pi : E \mapsto M$ cuya fibra es $\mathbb{C}^k$. Por tanto el grupo de estructura será $GL(k, \mathbb{C})$, pero de la sección anterior se conoce que el determinante genera polinomios invariantes sobre $GL(k, \mathbb{C})$, de la siguiente forma:

$$\det \left(I + t \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) = \sum_{n=1}^k t^n P_n(\mathcal{F}) \quad (1.35)$$

donde $\mathcal{F}$ es la 2-forma de curvatura escrita en forma matricial de tamaño $k \times k$, donde cada entrada de la matriz es una 2-forma. En la práctica calcular dicho determinante es tedioso [3], la forma sencilla de hacerlo es asumiendo que $G = SU(k)$ y los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(k)$ se toman como anti-Hermiticos, por lo cual la matriz $\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}$ es Hermitica y por tanto diagonalizable. Sea $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ la forma diagonal que se obtiene mediante una transformación de semejanza $g^{-1} \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} g$. Entonces:

$$\det(I + D) = \prod_{i=1}^k (1 + \lambda_i) = S_0(\lambda) + S_1(\lambda) + S_2(\lambda) + \dots + S_k(\lambda) \quad (1.36)$$

donde en la ultima linea se ha expandido el producto de los k factores $(1 + \lambda_i)$ y se ha escrito como la suma de funciones simétricas elementales dadas por:

$$S_0(\lambda) = 1, \quad S_1(\lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \quad S_2(\lambda) = \sum_{i < j}^k \lambda_i \lambda_j, \quad S_3(\lambda) = \sum_{i < j < k}^k \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \dots,$$

$$S_k(\lambda) = \prod_{i=1}^k \lambda_i$$

Colocando estas relaciones en términos de $\mathcal{F}$ se obtiene:

$$c_0(\mathcal{F}) = 1, \quad c_1(\mathcal{F}) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr}(\mathcal{F}), \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 (\text{Tr}(\mathcal{F}) \wedge \text{Tr}(\mathcal{F}) - \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})), \dots,$$

$$c_k(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \det(\mathcal{F})$$

donde se ha definido $c_j(E) = P_j(\mathcal{F}) \in H^{2j}(M)$, que usualmente se llama la j -ésima clase de Chern y la clase de Chern total se define como $c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \dots + c_k(E) \in H^*(M)$.

1.2. Formas de Chern-Simons

Esta sección está entre las más importantes del trabajo, ya que definirá el objeto con el cual se trabajará en el resto del proyecto, es decir, las formas de Chern-Simons. Estas aparecieron inicialmente en el contexto matemático en el año 1974 con el trabajo seminal de Shiing-Shen Chern y James Harris Simons [5]. En el contexto de la física teórica, las formas de CS fueron introducidas por primera vez en la discusión de anomalías quirales, que señalaban la violación de la conservación de las corrientes quirales clásicas, el término que precisamente daba cuenta de la no-conservación resulto ser proporcional a la clase de Chern $P_4(\mathcal{F})$ [1].

Como una densidad de Lagrange, la forma de Chern-Simons apareció en trabajos de supergravedad en 11-dim, esta aparición empezó a dar indicios que una teoría definida con una acción exclusivamente del tipo CS es útil como teoría de campos [6, 7].

Las formas de CS no sólo son de utilidad en física de altas energías, también en física de la materia condensada han hecho su debut, como acciones que describen efecto Hall cuántico [8] y en superconductividad [9] e incluso en estadística fraccional [10].

La acción de CS también describe gravedad en (2+1)-dimensiones. El primer trabajo en esta área fue por Achúcarro y Townsend en el contexto de supergravedad [11], pero el trabajo que cambio el panorama completamente fue el artículo de Witten [12], donde describe gravedad en (2+1)-dimensiones como una teoría topológica de campos.

Finalmente, Las acciones de Chern-Simons han aparecido en áreas como teoría de campos conformes, en especial, con teorías de Wess-Zumino-Witten [13] y en matemáticas, como invariantes topológicos de teoría de nudos [14].

Habiendo dado una breve introducción historia, pasamos a definir matemáticamente las formas de CS:

Sea $P_j(\mathcal{F})$ una clase característica arbitraria de grado $2j$. Como se demostró en el teorema 1.4, la forma $P_j(\mathcal{F})$ es cerrada, por tanto en virtud del lemma de Poincaré, se tiene que $P_j(\mathcal{F})$ es localmente exacta, es decir:

$$dP_j(\mathcal{F}) = 0, \quad \text{localmente} \quad P_j(\mathcal{F}) = d\mathcal{C}_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}), \quad \mathcal{C}_{2j-1} \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^{2j-1}(M) \quad (1.37)$$

La forma $\mathcal{C}_{2j-1}$ es llamada forma de Chern-Simons de $P_j(\mathcal{F})$. Para hallar la expresión de $\mathcal{C}_{2j-1}$, se usará el teorema de Chern-Weyl. Ya que $P(\mathcal{F}_2) - P(\mathcal{F})_1 = dTP_j$ es una igualdad global, también será válida localmente, pero cualquier $\mathcal{F}_1$ es trivial localmente, entonces sea U una carta de M , por tanto es posible elegir $\mathcal{F}_1 = 0$ sobre U , dicha elección se puede hacer tomando $\mathcal{A} = 0$ sobre U . Con estas elecciones, la conclusión de Chern-Weyl para $P_j(\mathcal{F})$ toma la forma:

$$P_j(\mathcal{F}) = dTP_j \quad \text{donde} \quad TP_j = j \int_0^1 dt \tilde{P}_j(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.38)$$

ya que $P(0) = 0$ y se ha cambiado la notación de subíndices. Además la familia de homotopía de la conexión toma la forma $\mathcal{A}_t = t\mathcal{A}$ y la familia de la 2-formas de curvatura $\mathcal{F}_t = tdA + t^2\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$.

Ahora se asumirá que el grupo de estructura es algún grupo matricial o tiene una representación matricial, esto permitirá elegir $P_{\mathcal{F}} = \text{Tr}(\mathcal{F}^j)$ cuya polarización, como ya se vio, es $\tilde{P}(\dots) = \text{str}(\dots)$, por tanto sobre U , se tiene la siguiente igualdad:

$$\mathcal{C}_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = j \int_0^1 dt \text{str}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \quad (1.39)$$

Consideremos algunos caso particulares:

- Para $j = 1$ se obtiene:

$$\mathcal{C}_1(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \int_0^1 dt \text{str}(\mathcal{A}) = \text{Tr}(A) \quad (1.40)$$

- Para $j = 2$ se tiene:

$$\mathcal{C}_3(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = 2 \int_0^1 dt \text{str}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t) \quad (1.41)$$

pero la traza simétrizada es:

$$\text{str}(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t + \mathcal{F}_t \wedge \mathcal{A}) = \text{tr}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t) = \text{Tr}(t\mathcal{A} \wedge dA + t^2\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$$

Después de hacer la integral respecto a t , se obtiene:

$$\mathcal{C}_3(\mathcal{A}) = Tr \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right) \quad (1.42)$$

- Caso $j = 3$. En este caso la traza simetrizada es tediosa, pero usando las propiedades de conmutatividad de los productos exteriores de 2-formas, y la propiedad cíclica de la traza, se llega a:

$$str(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t) = Tr(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t \wedge \mathcal{F}_t)$$

Pero usando la forma explicita de $\mathcal{F}_t$ se llega a

$$str(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t) = Tr \left(t^2 \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + 2t^3 d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + t^4 \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right)$$

Por tanto, la forma de Chern-Simons es:

$$\mathcal{C}_5(\mathcal{A}) = Tr \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{3}{2} d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{3}{5} \mathcal{A}^5 \right) \quad (1.43)$$

Entonces, en general se observa que la traza simetrizada siempre se va a simplificar debido a la conmutatividad de las 2-formas $\mathcal{F}_t$, de los productos $\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t$ y a la propiedad cíclica del operador Tr :

$$str(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \frac{1}{j!} (j!) Tr(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_t) = Tr(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_t) \quad (1.44)$$

Entonces finalmente la forma de Chern-Simons adopta la forma:

$$\mathcal{C}_{2j-1}(\mathcal{A}) = j \int_0^1 dt Tr \left(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t^{j-1} \right) \quad (1.45)$$

Para definir una densidad de Lagrange adecuada y poder definir una teoría de campos, esta forma debe integrarse sobre una variedad de dimension $D = 2j - 1$, por tanto en función de la dimension D , la forma de CS es:

$$\boxed{\mathcal{C}_D(\mathcal{A}) = \frac{D+1}{2} \int_0^1 dt Tr \left(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}_t^{(D-1)/2} \right)} \quad (1.46)$$

Y la acción sobre una variedad diferenciable es:

$$S_{CS} = g_{cs} \int_{\mathcal{M}^D} \mathcal{C}_D(\mathcal{A}) \quad (1.47)$$

donde g_{cs} es una constante de acople, que en tres dimensiones se normaliza como $g_{cs} = \frac{k}{4\pi}$, para que las integrales de las clases de Chern tomen valores enteros.

Observaciones

- Las acción de CS requiere un variedad diferenciable de dimension impar.
- Requiere un grupo de estructura G (comúnmente matricial), en cuya álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se pueda tomar la traza.
- Debido a que el origen de esta acción es la teoría de haces fibrados y clases características, la acción de CS es una teoría gauge.

La última afirmación no se puede tomar a la ligera. El hecho de que se halla obtenido la forma de CS localmente (sobre U), implica que es invariante bajo el cambio en la conexión bajo transformaciones gauge locales, pero no necesariamente sea cierto para transformaciones que están definidas globalmente. Por ejemplo bajo una transformación gauge, la acción de CS en $D = 3$, transforma como³

$$S_{cs}[\mathcal{A}'] = S_{cs}[\mathcal{A}] - \frac{k}{12\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} (g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg) + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \text{Tr} (dgg^{-1} \wedge \mathcal{A}) \quad (1.48)$$

Que muestra que S_{cs} no es invariante gauge globalmente. Pero cuando $\mathcal{M}$ es cerrada el término sobre $\mathcal{M}$, es el invariante topológico: “winding number” y es un múltiplo de $2\pi n$ donde $n \in \mathbb{N}$ [3], por tanto en una teoría cuántica donde lo relevante son las amplitudes $e^{iS_{cs}}$ [14], este término no afecta en absoluto. El término de frontera $\partial\mathcal{M}$, no afecta las ecuaciones de movimiento y puede ser ignorado para transformaciones gauge que se anulen sobre $\partial\mathcal{M}$ [15].

Otro aspecto relevante del último término es que bajo una fijación conveniente del gauge, se puede obtener un modelo de Wess-Zumino-Witten que esta relacionado con teoría Lioville [17].

1.2.1. Aplicación a la Mecánica Clásica

La acción de un sistema clásico en la forma de Hamilton-Jacobi es

$$S[q, p] = \int p_i dq^i - H dt \quad \text{donde } i = 1, \dots, N \quad (1.49)$$

donde N es el número de grados de libertad. Realizando las siguientes definiciones:

$$A_i = p_i, \quad A_0 = -H, \quad A_{N+i} = 0$$

es posible escribir la acción en la forma:

$$S[z, \dot{z}] = \int_{\Gamma} A_{\mu} dz^{\mu} \quad \text{donde } \mu = 0, \dots, 2N \quad (1.50)$$

³En cualquier dimensión impar, se sigue observando este hecho, ya que la acción (1.47) depende de $\mathcal{A}$.

Esta formulación de mecánica clásica es conocida como formulación de Chern-Simons en 0+1 dimensiones, ya que el integrando es precisamente $\mathcal{C}_1(\mathcal{A})$. El dominio de integración Γ es cierta subvariedad de dimensión 1 del espacio de fase extendido $\mathcal{M}$ cuyas coordenadas locales están dadas por $z^\mu = (t, q^i, p^i)$.

Parametrizando con cierto parámetro τ , la acción anterior se puede escribir cómo:

$$S[z, \dot{z}] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} A_\mu \dot{z}^\mu d\tau \quad (1.51)$$

Realizando una variación en $\mathcal{M}$, $z^\mu \rightarrow z^\mu + \delta z^\mu$, la variación de la acción toma la forma:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \delta z^\mu + \frac{d}{d\tau} (A_\mu \delta z^\mu) \right) \quad (1.52)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ son las componentes de la forma de curvatura $F = dA$ ⁴.

Usando condiciones de frontera apropiadas el término de frontera se anula⁵. Entonces las ecuaciones de movimiento son:

$$F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu = 0 \quad (1.53)$$

Observar la analogía con el acople en electrodinámica de un campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ y la 4-velocidad del partícula.

Una simetría continua de un sistema clásico es una transformación de coordenadas $z^\mu \rightarrow z^\mu + \delta z^\mu$ que deja invariante el Lagrangiano del sistema. Asumiendo que este es el caso, la variación del Lagrangiano es

$$\delta L = 0 = \frac{\partial L}{\partial z^\mu} \delta z^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} \dot{\delta z}^\mu \quad (1.54)$$

usando $L = A_\mu \dot{z}^\mu$ resulta

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial z^\mu} \dot{z}^\mu + A_\mu \frac{d}{d\tau} (\dot{z}^\mu) = 0 \quad (1.55)$$

Usando 1.53 se tiene $\partial_\mu (A_\nu) \dot{z}^\nu = \partial_\nu (A_\mu) \dot{z}^\nu$ entonces la variación del Lagrangiano se puede obtener como:

$$\delta L = \frac{d}{d\tau} (A_\mu \delta z^\mu) = \frac{d}{d\tau} (Q(z, \dot{z})) \quad (1.56)$$

⁴En tensor antisimétrico también se puede interpretar como la forma symplectica sobre T^*M .

⁵Existen varias elecciones: Condiciones de frontera periódica, anti-periódica, etc.

por tanto, si $\delta L = 0$ entonces $Q(z, \dot{z}) = A_\mu \delta z^\mu$ se conserva!

Observaciones

- La carga que se conserva es igual al término de frontera que aparece en la deducción de las ecuaciones de movimiento
- La Carga que se conserva es la forma de Chern-Simons evaluada a lo largo de la trayectoria real del sistema.

Algunos ejemplos de leyes de conservación:

- Si el sistema posee la simetría:

$$z^0 \rightarrow z^0 + \epsilon^0 \quad \Leftrightarrow \quad t \rightarrow t + \epsilon^0 \quad (1.57)$$

entonces la carga esta dada por:

$$Q = A_0 \epsilon^0 = -H \epsilon^0 \quad (1.58)$$

pero como ϵ^0 es constante y arbitraria, se conserva H , la energía del sistema.

- Para simetrías de la forma $z^i \rightarrow z^i + \epsilon^i \quad \Leftrightarrow \quad q^i \rightarrow q^i + \epsilon^i$, se conserva A_i , es decir el momento generalizado p_i .
- Si el sistema tiene simetría rotacional $z^i \rightarrow \omega_{i,j} z^j$, la ley de conservación asociada es $Q = \frac{1}{2} \omega_{i,j} (p_i q_j - p_j q_i)$ que implica la conservación del momentum angular.

El tensor $F_{\mu\nu}$ es invariante bajo la transformación $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Omega$, esta transformación, explicitamente es:

$$A'_0 = A_0 + \partial_0 \Omega \quad \Leftrightarrow \quad H' = H - \partial_0 \Omega \quad (1.59)$$

$$A'_i = A_i + \partial_i \Omega \quad \Leftrightarrow \quad p'_i = p_i + \partial_i \Omega \quad (1.60)$$

Estas transformaciones inducen un cambio en las coordenadas z^μ dado por:

$$z'^\mu = (t, q_i, p'_i) = (t, q_i, p_i) + (0, 0, \partial_i \Omega) \quad (1.61)$$

Por lo tanto $\delta z^\mu = (0, 0, \partial_i \Omega)$, aplicando este resultado al teorema de Noether, se observa que dicha simetría lleva a una carga conservada nula debido a que $A_{i+N} = 0$.

La razón por la cual esta simetría no lleva a una ley de conservación adicional es que el lagrangiano transforma como:

$$L' = A'_\mu \dot{z}^\mu = A'_0 \dot{z}^0 + A'_i \dot{z}^i = (A_0 + \partial_0 \Omega) \dot{z}^0 + (A_i + \partial_i \Omega) \dot{z}^i \quad (1.62)$$

Pero tal cambio se puede expresar de la forma:

$$L' = A'_\mu \dot{z}^\mu = A_\mu \dot{z}^\mu + \partial_0(\Omega) \dot{z}^0 + \partial_i(\Omega) \dot{z}^i = L + \frac{d}{d\tau}(\Omega) \quad (1.63)$$

donde en el último paso se usó el hecho de que Ω sólo depende de (t, q^i) . Entonces observar que esta es la invariancia que todo sistema clásico posee bajo la adición derivadas totales. El hecho importante aquí es que esa simetría clásica de deriva de la invariancia de las ecuaciones de movimiento bajo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Omega$, que en virtud de la teoría de Chern-Simons, dicha simetría es la simetría gauge de la acción.

Capítulo 2

Teoría de Chern-Simons en (2 + 1)-dimensiones

En este capítulo se usarán las herramientas estándar de teoría clásica de campos para estudiar la estructura algebraica detrás de la teoría de Chern-Simons definida sobre un espacio base es una variedad suave de tres dimensiones y el grupo de estructura es semi-simple. Se analizará la invariancia bajo transformaciones gauge, se hallarán las cargas de Noether de dicha simetría y se hallarán los respectivos generadores. Posteriormente se encontrará la estructura symplectica sobre el espacio de campos gauge y se usará tal estructura para construir el álgebra de los generadores de transformaciones gauge locales que llegará a ser una extensión central del álgebra de Lie del grupo de simetría. Se puede encontrar esta misma línea de razonamiento para teorías de YM en [\[1\]](#).

2.1. Análisis Clásico de la Acción de Chern-Simons

La densidad de Lagrange para CS en coordenadas locales es:

$$\mathcal{L}_{cs} = \frac{k}{4\pi} \text{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\alpha \right) \epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{ donde } \mu, \nu, \alpha = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Tomando la traza y usando las convenciones descritas en el apéndice [A](#), se obtiene

$$\mathcal{L}_{cs} = \frac{kR}{4\pi} \left(A_\mu^a \partial_\nu A_{a\alpha} + \frac{1}{3} f_{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right) \epsilon^{\mu\nu\alpha} \quad (2.2)$$

donde los índices latinos toman valores en $a, b, c = 1, \dots, \dim(G)$.

Realizando una variación sobre el espacio de conexiones y después de algunos pasos elementales, se obtiene:

$$\delta \mathcal{L}_{cs} = \frac{kR}{4\pi} [F_{\nu\alpha}^a \delta A_{a\mu} + \partial_\nu (A_\mu^a \delta A_{a\alpha})] \epsilon^{\mu\nu\alpha} \quad (2.3)$$

de donde se pueden obtener las ecuaciones de movimiento (Curvatura Nula):

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu} = 0 \quad (2.4)$$

Por otro lado desde (2.3) es posible obtener la corriente de la simetría gauge:

$$J^{a\nu} \epsilon_a = \frac{kR}{4\pi} A_\mu^a \delta A_{a\alpha} \epsilon^{\mu\nu\alpha}$$

Para una transformación gauge global $\delta A_\mu^a = -f^a_{bc} A_\mu^b \epsilon^c$, se puede extraer la corriente de Noether, que toma la forma:

$$J^{a\nu} = \frac{kR}{4\pi} f^a_{bc} A_\alpha^b A_\mu^c \epsilon^{\mu\nu\alpha} \quad (2.5)$$

Esta corriente satisface la ecuación de continuidad, ya que al hacer uso de las ecuaciones de movimiento se obtiene la expresión:

$$J^{a\nu} = \frac{kR}{2\pi} \partial_\mu (A_\alpha^a \epsilon^{\mu\nu\alpha}) \quad (2.6)$$

de donde es evidente que $\partial_\nu J^{a\nu} = 0$ debido a la antisimetría del símbolo de Levi-Civita.

La carga está definida como la integral espacial de la componente cero de la corriente, pero en virtud del teorema de Stokes, se llega a la siguiente expresión:

$$\mathcal{Q}^a = \int_\Sigma d^2x J^{a0} = \frac{kR}{2\pi} \int_\Sigma d^2x \partial_\mu (A_\alpha^a \epsilon^{\mu 0\alpha}) = -\frac{kR}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} d\sigma_i A_j^a \epsilon^{ij} \quad (2.7)$$

Ahora pasamos a definir un bracket de Poisson que introduce una estructura simplectica en nuestra teoría. La uno-forma simplectica se define como la componente temporal del término de frontera en la variación general (2.3):

$$w = -\frac{kR}{4\pi} \int_\Sigma d^2x A_i^a \delta A_{aj} \epsilon^{ij} \equiv \int_\Sigma d^2x \Pi^{ai} \delta A_{ai} \quad (2.8)$$

Por tanto el momentum canónico asociado a A_{ai} , es:

$$\Pi^{ai} = \frac{kR}{4\pi} \epsilon^{ij} A_j^a \quad (2.9)$$

Un hecho crucial es que no existe un momentum canónico asociado a A_{a0} . Recordar que un resultado similar se obtiene en electrodinámica y que ese hecho esta estrechamente relacionado a que el fotón (hablando en términos cuánticos) sólo posee dos estados de polarización o en otros términos, que el electromagnetismo es una teoría con ligaduras. Por tanto esperamos que en CS existan ligaduras. Para conocer la forma funcional de estas, se sigue el símil con la teoría de Yang-Mills, la ligadura estará dada por la componente temporal (ya que A_{a0} no tiene dinámica) de las ecuaciones de movimiento (“ley de Gauss”):¹

$$F_{ij}^a = 0 \quad (2.10)$$

O en forma integral:

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_{\mu\nu}^a \theta_a \epsilon^{\mu\nu} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_{ij}^a \theta_a \epsilon^{ij} \quad (2.11)$$

2.2. Estructura Simplectica y el Algebra de los Generadores.

Es posible definir un paréntesis de Poisson sobre el espacio de conexiones (de índice espacial): Sean $F[A_i]$ y $G[A_i]$ funcionales de los campos $\{A_i\}_{i=1,2}$ que se asumen diferenciables²:

$$\{F, G\} = \frac{4\pi}{kR} \int_{\Sigma} d^2x \frac{\delta F}{\delta A_i^a} \epsilon_{ij} \eta^{ab} \frac{\delta G}{\delta A_j^b} \quad (2.12)$$

de donde es evidente que se satisfacen las condiciones de antisimetría, la regla de Leibniz y la identidad de Jacobi. El coeficiente en frente de la integral ha sido puesto de tal forma que se satisfaga las reglas de conmutación canónica:

$$\{A_i^a(x, t), \Pi^{bj}(y, t)\} = \delta_i^j \delta^{ab} \delta^{(2)}(x - y) \quad (2.13)$$

$$\{A_i^a(x, t), A_j^b(y, t)\} = \frac{4\pi}{kR} \epsilon_{ij} \delta^{ab} \delta^{(2)}(x - y) \quad (2.14)$$

donde la última expresión se obtuvo usando (2.9).

Una vez se tenga una estructura de Poisson se puede analizar la estructura algebraica de los generadores de las transformaciones gauge.

Siguiendo de nuevo la analogía con YM [1], se define la siguiente funcional:

¹Electromagnetismo es un caso particular de una teoría de Yang-Mills para el grupo abeliano compacto $U(1)$, [1].

²En el sentido funcional.

$$\boxed{\tilde{\mathcal{G}}(\theta) = -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x (D_i \theta^a + \partial_i \theta^a) A_{aj} \epsilon^{ij}} \quad (2.15)$$

donde D_i es la derivada covariante. Esta funcional es una propuesta de este trabajo y no esta reportada en la literatura consultada.

El hecho importante acerca de esta funcional, es que ella genera las transformaciones gauge locales. Para demostrarlo, primero veamos que $\tilde{\mathcal{G}}(\theta)$ es funcionalmente diferenciable:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}(\theta) &= -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \left(\partial_i \theta^a + f^{abc} A_{bi} \theta_c \right) A_{aj} \epsilon^{ij} - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_i (\theta^a) A_{aj} \epsilon^{ij} \\ \delta \tilde{\mathcal{G}}(\theta) &= -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \left(\partial_i \theta^a + f^{abc} A_{bi} \theta_c \right) \delta A_{aj} \epsilon^{ij} - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x (D_i \theta^a + \partial_i \theta^a) \delta A_{aj} \epsilon^{ij} \\ \delta \tilde{\mathcal{G}}(\theta) &= -\frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x (D_i \theta^a) \delta A_{aj} \epsilon^{ij} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \tilde{\mathcal{G}}(\theta)}{\delta A_{aj}} = -\frac{kR}{4\pi} D_i (\theta^a) \epsilon^{ij} \quad (2.17)$$

En (2.16) se observa que $\tilde{\mathcal{G}}(\theta)$ es diferenciable y su derivada es (2.17). Este resultado contrasta con la literatura [16, 17], ya que en la literatura consultada utilizan otra definición para los generadores y al momento de hacer la variación obtienen términos de frontera que deben ser eliminados. Una forma de eliminarlos es redefiniendo los generadores sumando cierto término de tal forma que la derivada funcional sea bien definida pero dicho término depende de la fijación del gauge, por tanto, por ahora nuestro cálculo es totalmente general.

El paréntesis de Poisson entre los campos A_i^a ya se conoce, sólo resta calcular el paréntesis entre A_i^a y $D_i(\theta^a)$:

$$\{A_i^a, D_j(\theta^b)\} = \{A_i^a, \partial_j(\theta^b)\} + f^b_{cd} \{A_i^a(x, t), A_j^c(y, t)\} \theta^d = \frac{-4\pi}{kR} f^{abc} \epsilon_{ij} \theta_c(x) \delta^{(2)}(x - y) \quad (2.18)$$

donde se ha asumido explícitamente que los parámetros θ son independientes de los campos A_i . Este es el caso de las teorías gauge usuales, más adelante se generalizará esta condición, para poder incluir los difeomorfismos (cuando la teoría de Chern-Simons describe gravedad en (2+1)-dimensiones).

Ahora es posible mostrar porqué $\tilde{\mathcal{G}}(\theta)$ genera transformaciones gauge locales:

$$\{A_i^a(x, t), \tilde{\mathcal{G}}(\theta)\} = \frac{-kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \left(\{A_i^a, D_j \theta^b + \partial_j \theta^b\} A_{bk} + (D_j \theta_b + \partial_j \theta_b) \{A_i^a, A_k^b\} \right) \epsilon^{jk} \quad (2.19)$$

usando (2.14), (2.18) y $\epsilon_{ij}\epsilon^{kj} = \delta_i^k$ se obtiene:

$$\{A_i^a(x, t), \tilde{\mathcal{G}}(\theta)\} = -D_i(\theta^a) = \delta A_i^a \quad (2.20)$$

porque $\delta A_i^a = -D_i(\theta^a)$ ³. Por lo tanto se ha probado que $\tilde{\mathcal{G}}(\theta)$ es el generador de transformaciones gauge.

Una identidad de suma importancia en este trabajo, es la relación existente entre la carga, la ley de Gauss y los generadores. Esta identidad ha sido motivada desde la teoría de Yang-Mills descrita en [1] y precisamente es esta identidad la que motiva la definición de (2.15):

$$F_{ij}^a \epsilon^{ij} \theta_a = 2\partial(\theta_a A_j^a) \epsilon^{ij} - (D_i \theta^a + \partial_i \theta^a) A_{aj} \epsilon^{ij} \quad (2.21)$$

la demostración de esta identidad es fácil, sólo se usa la definición de F_{ij}^a y se realiza una integración por partes.

Multiplicando ambos lados de (2.21) por $\frac{kR}{4\pi}$ se llega a:

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{kR}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} d\sigma_i \theta_a \epsilon^{ij} A_j^a + 2\tilde{\mathcal{G}}(\theta) \quad (2.22)$$

o reescribiéndola como:

$$2\tilde{\mathcal{G}}(\theta) = \mathcal{G}(\theta) - \frac{kR}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} d\sigma_i \theta_a \epsilon^{ij} A_j^a \quad (2.23)$$

$$2\tilde{\mathcal{G}}(\theta) = \mathcal{G}(\theta) + 2\mathcal{Q}(\theta) \quad (2.24)$$

Donde se ha definido:

$$\mathcal{Q} \equiv -\frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} d\sigma_i \theta_a \epsilon^{ij} A_j^a = -\frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \theta_a A^a \quad (2.25)$$

La última expresión es la versión libre de coordenadas. Observar que (2.14) y (2.25) están relacionados, si $\theta^a = cte$ sobre $\partial\Sigma$ entonces $\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\mathcal{Q}^a \theta^a$.

Si se toma el subespacio del espacio de fases donde se satisfacen las ligaduras [18], la ley de Gauss (2.11) se anula y la identidad (2.24) implica que⁴

$$\tilde{\mathcal{G}}(\theta) \approx \mathcal{Q}(\theta) \quad (2.26)$$

³La ley de transformación de los campos gauge es $A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) g^{-1}$ o para transformaciones cercanas a la identidad $A_\mu^g = A_\mu - D_i(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ por tanto $\delta A_i^a = -D_i(\theta^a)$.

⁴Se está usando la notación de Dirac para el signo de igualdad: igualdad débil [19].

2.2.1. Álgebra de los Generadores de las Transformaciones Gauge

Ahora pasamos a calcular el álgebra que satisfacen los generadores (2.15) bajo el paréntesis de Poisson, se verá que esta álgebra en realidad es cerrada y constituye una extensión central del álgebra de Lie de grupo de estructura del has principal [20].

Usando la derivada funcional (2.17) y la definición del paréntesis de Poisson, se obtiene después de algunos cálculos elementales:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x D_k(\eta_a) D_l(\lambda^a) \epsilon^{kl} \quad (2.27)$$

Por simplicidad nos ocuparemos del integrando por ahora (sin tener en cuenta el factor constante), escribiendo este como:

$$\left(\partial_k(\eta_a) D_l(\lambda^a) + f_{abc} A_k^b \eta^c D_l(\lambda^a) \right) \epsilon^{kl} = \quad (2.28)$$

$$\left(\partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) - \partial_k(D_l(\lambda^a)) \eta_a + f_{abc} A_k^b \eta^c D_l(\lambda^a) \right) \epsilon^{kl} = \quad (2.29)$$

$$(\partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) - D_k(D_l(\lambda^a)) \eta_a) \epsilon^{kl} = \quad (2.30)$$

$$\left(\partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) - \frac{1}{2} [D_k, D_l](\lambda^a) \eta_a \right) \epsilon^{kl} \quad (2.31)$$

donde $[,]$ es el conmutador usual. Regresando a la integral se obtiene:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) \epsilon^{kl} - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x [D_k, D_l](\lambda^a) \eta_a \epsilon^{kl} \quad (2.32)$$

El conmutador de las derivadas covariantes esta relacionado con la curvatura, más explícitamente se tiene:

$$[D_k, D_l](\lambda^a) = f^a{}_{bc} F_{kl}^b \lambda^c \quad (2.33)$$

La demostración de esa igualdad es inmediata. Introduciendo este conmutador en la expresión del paréntesis de generadores, se tiene:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) \epsilon^{kl} - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x f^a{}_{bc} F_{kl}^b \lambda^c \eta_a \epsilon^{kl} \quad (2.34)$$

Definiendo $\zeta^a = f^{abc} \eta_b \lambda_c$ y haciendo cambios de índices mudos se obtiene:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) \epsilon^{kl} - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \zeta_a F_{kl}^a \epsilon^{kl} \quad (2.35)$$

pero en el último término se puede usar (2.21) para llegar a:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x (\partial_k(\eta^a D_l(\lambda^a)) + \zeta_a A_l^a) \epsilon^{kl} - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x (D_k \zeta^a + \partial_k \zeta^a) A_l^a \epsilon^{kl} \quad (2.36)$$

Simplificando el término de frontera y observando que el último término es $\tilde{\mathcal{G}}(\zeta)$, finalmente se llega a:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \tilde{\mathcal{G}}(\zeta) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_k (\partial_l(\lambda^a) \eta_a) \epsilon^{kl} \quad (2.37)$$

o en una forma libre de coordenadas:

$$\boxed{\{\tilde{\mathcal{G}}(\eta), \tilde{\mathcal{G}}(\lambda)\} = \tilde{\mathcal{G}}(\zeta) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a} \quad (2.38)$$

donde $\zeta^a = f^{abc} \eta_b \lambda_c$. Observar que el último término es independiente de A_i^a por tanto se dice que dicho término es una extensión central del álgebra de Lie del grupo de estructura:

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T_c \quad (2.39)$$

La ecuación (2.38) es en realidad la versión continua de un álgebra de Kac-Moody [21], que es un indicio de la teoría conforme subyacente en la teoría de Chern-Simons en 3-dimensiones.

2.2.2. Fijación del Gauge

El procedimiento de fijar el gauge es bastante delicado y requiere ciertas hipótesis sobre la topología de M . Primero que todo se asume que M es una variedad diferenciable que puede escribirse como $M \approx \mathbb{R} \times \Sigma$, donde Σ es una variedad suave de dimension 2 simplemente conexa. Esta ultima condición implican que $\partial\Sigma \approx S^1$, [3, 22]. La partición de M como $\mathbb{R} \times \Sigma$ se le llama una foliación y es la hipótesis principal del formalismo (2+1) de relatividad general.

Regresando a la variación general de la densidad Lagrangiana e integrando, se obtiene la variación de la acción que en una forma libre de coordenadas adopta la forma:

$$\delta S_{cs} = \text{Ecuaciones de Movimiento} + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \text{Tr}(A \wedge \delta A) \quad (2.40)$$

Se asume la existencia de un sistema de coordenadas locales $x^\mu = (t, r, \phi)$ de tal forma que la frontera $\partial\Sigma$ es descrita por $r = \text{cte}$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces usando esto se obtiene

que $dr|_{\partial\Sigma} = 0$ y por tanto el término de frontera en la variación (2.40) toma la forma:

$$Tr(A \wedge \delta A)|_{\partial\Sigma} = \frac{1}{2}(A_{a0}\delta A_2^a - A_{a2}\delta A_0^a) \quad (2.41)$$

Este término debe anularse para obtener un problema variacional bien definido, por tanto las condiciones de frontera deben elegirse de tal forma que se anule dicho término. Las posibilidades son:

- $A_t|_{\partial\Sigma} = 0$ En este gauge, la simetría de la teoría (Subgrupo del grupo gauge que deja las condiciones de frontera invariantes) consiste de las transformaciones gauge que son independientes del tiempo en la frontera, ya que

$$\delta A_t^a = -D_t\theta^a = -(\partial_t\theta^a + [A_t, \theta]) = -\partial_t\theta^a = 0 \quad (2.42)$$

por tanto θ y $g = \text{Exp}\{i\theta^a T_a\}$ son independientes del tiempo en $\partial\Sigma$.

- $A_t = A_\phi$ o $A_t = -A_\phi$ sobre $\partial\Sigma$. La primera de estas implica que $\delta A_t = \delta A_\phi$ o explícitamente

$$\partial_t\theta^a + f^{abc}A_{bt}\theta_c = \partial_\phi\theta^a + f^{abc}A_{b\phi}\theta_c \quad (2.43)$$

$$(\partial_t - \partial_\phi)\theta^a = 0 \Rightarrow \theta^a = F(t - \phi, r) = F(x^-, r) \text{ donde } F \in C^1 \quad (2.44)$$

De manera análoga se obtiene en el segundo caso, excepto que $\theta^a = F(t + \phi, r) = F(x^+, r)$.

Usaremos el segundo caso ya que para nuestros propósitos es más adecuado. Las ecuaciones de movimiento, en el lenguaje de la geometría significan que localmente la curvatura es nula y por tanto, si la variedad es simplemente conexa se obtiene:

$$A_i = -\partial_i(g)g^{-1} = g\partial_i(g^{-1}) \quad (2.45)$$

Las condiciones de frontera han dejado de lado A_r , la condición de gauge sobre este campo está dada por $\partial_\phi A_r = 0$, uniendo esta condición con (2.45) se obtiene⁵:

$$g^{-1}\partial_r g = (\partial_\phi g)^{-1}\partial_r g \quad (2.46)$$

Estas ecuaciones son satisfechas si:

$$g(t \pm \phi, r) = a(t \pm \phi)b(r) = a(x^\pm)b(r) \quad (2.47)$$

⁵Esta condición esta inspirada en modelos WZW [21].

usando este Anzats, se obtiene:

$$A_r = b^{-1}(r)\partial_r b(r) \quad (2.48)$$

$$A_\phi = b^{-1}(r)a^-(x^\pm)\frac{da}{d\phi}(x^\pm)b(r) \equiv b^{-1}(r)A(x^\pm)b(r) \quad (2.49)$$

$$A_t = \pm A_\phi \Rightarrow A_t = \mp b^{-1}(r)A(x^\pm)b(r) \quad (2.50)$$

Observar que una vez fijado el gauge aún no se determinan con unicidad los campos A_μ , aún queda una función arbitraria $A(x^\pm)$ por determinar, esto es consecuencia de que las ecuaciones de ligadura son ecuaciones diferenciales y no algebraicas. Esta función restante representa una simetría gauge residual⁶.

Notar que este procedimiento para fijar el gauge también se aplica para transformaciones más generales de la forma $\theta^a = \theta^k A_k^a$, que serán de utilidad en breve. Debido a que la frontera se asume topológicamente equivalente a S^1 y parametrizada por $r : cte$, se puede tomar $A_r^a = \alpha^a : cte$ sobre S^1 , lo que implica una elección de $b(r)$ de la forma:

$$b(r) = e^{\alpha r} \quad (2.51)$$

2.2.3. Algebra de Kac-Moody

Si nos restringimos al subespacio (del espacio de fase) donde se satisfacen las ligaduras, se puede usar (2.26) y el álgebra de generadores se convierte en el álgebra de cargas:

$$\{\mathcal{Q}(\eta), \mathcal{Q}(\lambda)\}^* \approx \mathcal{Q}(\zeta) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a \quad (2.52)$$

donde $\{, \}^*$ denota el paréntesis de Dirac definido sobre la subvariedad donde se satisfacen las ligaduras [18, 19]. Para obtener una forma más familiar de esta álgebra, se hace uso de la fijación del gauge expresada en la sección anterior. Debido a que $dr|_{\partial\Sigma} = 0$, la carga toma la forma:

$$\mathcal{Q}(\theta) = -\frac{kR}{4\pi} \int_{S^1} \theta_a A_\phi^a d\phi = -\frac{kR}{4\pi} b^{-1}(r) \int_{S^1} \theta_a A^a(x^\pm) d\phi b(r) \quad (2.53)$$

Debido a que se esta sobre S^1 es posible hacer desarrollos de Fourier de los campos y los parámetros gauge. Bajo la normalizaciones convenientes, los desarrollos de Fourier

⁶Es decir que es remanente una vez se haya fijado el gauge.

toman la siguiente forma:⁷

$$A^a(x^\pm) = -\frac{2}{kR} \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n^a e^{in\phi} \quad (2.54)$$

$$\theta^a = -\frac{2}{kR} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_n^a e^{in\phi} \quad (2.55)$$

Remplazando estas expresiones en la carga, y después de algunas manipulaciones se obtiene:

$$\mathcal{Q}(\theta) = b^{-1}(r) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{-n} A_n^a \right) b(r) \quad (2.56)$$

De manera análoga se obtiene que la extensión central toma la forma:

$$\int_{S^1} \eta_a d\lambda^a = -2\pi i g_{ab} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} m \eta_{-n}^a \lambda_{-m}^b \delta_{n+m,0} \quad (2.57)$$

Ahora el término $\zeta^a = f^{abc} \eta_b \lambda_c$ debe expresarse en función de los modos de η y λ . Esto se calcula fácilmente y después de algunos cambios de índices, se obtienen los modos de ζ^a :

$$\zeta_k^a = f^a{}_{bc} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n^b \lambda_{k-n}^c \quad (2.58)$$

Sustituyendo todos estos resultados en la expresión (2.52), separando términos que contiene la expresión $\eta_{-n}^a \lambda_{-m}^b$ y eliminado la dependencia de $b(r)$ se llega, finalmente a la forma discreta de (2.52):

$$\{A_{an}, A_{bm}\}^* = f_{abc} A_{n+m}^c + \frac{nkRi}{2} \eta_{ab} \delta_{n+m,0} \quad (2.59)$$

$$\{A_{an}, A_{bm}\}^* = f_{abc} A_{n+m}^c + \frac{nki}{2} g_{ab} \delta_{n+m,0} \quad (2.60)$$

donde se ha usado $g_{ab} = R\eta_{ab}$. La última expresión es la conocida definición de un álgebra de Kac-Moody que se usa como punto de partida para construir teorías conformes con grupo de simetría no-abeliano, esto se realiza mediante la construcción de Sugawara, ver [20, 21].

En resumen en este capítulo se ha construido una definición coherente de los generadores y usando la estructura symplectica, se ha logrado calcular el álgebra de los generadores cuya expresión sobre el espacio físico llega a ser el álgebra de cargas. Una vez fijado el gauge de una manera conveniente, se obtuvo la expresión discreta para dicha álgebra resulto ser la conocida álgebra de Kac-Moody [16, 23].

⁷La dependencia temporal se incluye en los coeficientes.

Capítulo 3

Gravedad en (2+1)-Dimensiones

En este capítulo se estudiará las generalidades de la gravitación en (2+1)-dimensiones y la relación íntima con la teoría de Chern-Simons en (2+1) estudiada en el capítulo anterior. Una vez hecho este enlace, se conocerá que los difeomorfismos en el marco de la teoría de CS, exigen que los parámetros de las transformaciones gauge tenga la estructura particular dada por $\theta^a = \xi^k A_k^a$ [24], es decir que los parámetros dependan de la conexión. En este sentido debemos generalizar los resultados obtenidos en el capítulo anterior para incluir dicha posibilidad [23]. Una vez hecho esto el álgebra de las cargas será un álgebra de Virasoro y por tanto sale a flote la relación directa con CFT.

3.1. Gravedad como una Teoría de Chern-Simons

La gravitación está descrita como una teoría clásica de campos cuya dinámica está regida por la acción de Einstein-Hilbert [25]:

$$S_{EH} = \kappa \int_M d^{(D+1)}X \sqrt{-g} R \quad (3.1)$$

donde M es una variedad Lorentziana de dimension $D+1$ y R es el escalar de curvatura¹.

El interés principal en este trabajo es $D = 2$ ²

$$S_{EH}[g] = \kappa \int_M d^3x \sqrt{-\det(g)} (R - 2\Lambda) \quad (3.2)$$

Las ecuaciones de movimiento de esta acción son las famosas ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.3)$$

¹La gravedad usual se obtiene si $D = 3$ y $\kappa = \frac{c^4}{16\pi G}$

²Se ha incluido la constante cosmológica Λ .

Ahora nuestro objetivo es expresar esta acción en otro lenguaje para hacer el puente con teoría de CS. El lenguaje que utilizaremos fue propuesto por E. Cartan y en cierto sentido es más general que el lenguaje empleado por Einstein en la formulación de su teoría. Para Einstein el objeto principal es el tensor métrico del espacio-tiempo y en él está contenida toda la información sobre la gravedad y la curvatura del espacio. Por otro lado para Cartan el objeto principal son los Vielbeins, es decir los campos que me permiten pasar de un marco localmente plano a uno curvo. La ventaja del último formalismo es que la gravedad se puede interpretar de manera análoga a las teorías gauge, es decir como la “calibración” de cierta simetría global (transformaciones de Lorentz) para convertirla en una simetría local (difeomorfismos). Como es conocido desde YM esto se hace a expensas de la introducción de unos campos que transforman de manera adecuada y la dinámica de esos campos es descrita por la acción de Einstein-Hilbert³. Para más detalles ver [24, 26].

Como se describe en [27], la acción de Einstein-Hilbert en $D = 3$ se puede escribir en la forma:

$$S_{Cartan}[e, \omega] = -\frac{1}{8\pi G} \int_M \left\{ e^a \wedge \left(d\omega_a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^b \wedge \omega^c \right) - \frac{\Lambda}{3!} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right\} \quad (3.4)$$

Donde e^a son llamados los campos dreibein (coframe) y ω^a son llamadas las componentes de la conexión de espín. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen al variar los dreibein e y la conexión de espín ω son, respectivamente:

$$d\omega_a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^b \wedge \omega^c = \frac{\Lambda}{2} \epsilon_{abc} e^b \wedge e^c \quad (3.5)$$

$$T^a \equiv de_a + \epsilon_{abc} \omega^b \wedge e^c = 0 \quad (3.6)$$

De la última ecuación se obtiene de manera natural la condición de torsión nula. Ahora restringiéndonos al caso de constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ y definiendo las siguientes variables⁴:

$$A^{+a} = \omega^a + \frac{1}{l} e^a, \quad A^{-a} = \omega^a - \frac{1}{l} e^a \quad (3.7)$$

La acción toma la siguiente forma después de algunos cálculos:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{l}{32\pi G} \int_M \left(A^{+a} \wedge dA_a^+ + \frac{1}{3} \epsilon_{abc} A^{+a} \wedge A^{+b} \wedge A^{+c} \right) \\ &+ \frac{l}{32\pi G} \int_M \left(A^{-a} \wedge dA_a^- + \frac{1}{3} \epsilon_{abc} A^{-a} \wedge A^{-b} \wedge A^{-c} \right) \\ &- \frac{l}{32\pi G} \int_M d(A^{+a} \wedge A_a^-) \end{aligned}$$

³El principio de equivalencia juega un papel fuerte esta formulación

⁴Se toma el caso de constante cosmológica negativa porque es el único donde existe soluciones tipo agujero negro [28].

pero al comparar con (2.2), se observa que:

$$kR = -\frac{l}{8G} \quad (3.8)$$

$$f_{abc} = \epsilon_{abc} \quad (3.9)$$

Por lo tanto se necesita encontrar un grupo para el cual el álgebra de Lie este dada por⁵

$$[T^a, T^b] = \epsilon^{abc} T_c \quad (3.10)$$

Para resumir, se ha demostrado que la acción de gravedad de Einstein-Hilbert en el formalismo de Cartan con constante cosmológica negativa, se puede ver como una suma de dos copias de la teoría de Chern-Simons:

$$S_{EH} = S_{cs}[A^+] - S_{cs}[A^-] + B.T \quad (3.11)$$

donde el término de frontera se anula usando condiciones de frontera convenientes⁶, [12].

Debido al desacople entre las acciones de CS para A^+ y A^- , se tienen las ecuaciones de movimiento (2.4):

$$F^\pm \equiv dA^\pm + A^\pm \wedge A^\pm = 0 \quad (3.12)$$

Se puede demostrar que estas ecuaciones son equivalentes a (3.5), [29].

Ahora analicemos la forma que toman los difeomorfismos en el lenguaje de la teoría de CS. Usando las propiedades de la derivada de Lie, se puede demostrar que la derivada de Lie en la dirección del campo vectorial ξ^μ (inducido por las funciones suaves sobre M) está dada por:

$$\mathcal{L}_\xi A = i_\xi \cdot F + D_A(i_\xi A) \quad (3.13)$$

donde D_A es la derivada covariante y $i_\xi A$ es el producto interior. Sobre la subvariedad donde se satisfacen la ligaduras esta ecuación es:

$$\mathcal{L}_\xi A \approx D_A(i_\xi A) \quad (3.14)$$

Por lo tanto sobre dicha subvariedad, los difeomorfismos representados en el lado derecho corresponden a transformaciones gauge dadas por:

$$\xi^a = \xi^\mu A_\mu^a \quad (3.15)$$

⁵Un grupo que posee esta álgebra es $SL(2, \mathbb{R})$, que precisamente es el grupo de isometrías de AdS_3 .

⁶Más adelante se especificaran dichas condiciones.

En este sentido es que se tienen que generalizar los resultados del capítulo anterior, ya que han que incluir posibilidad de que los parámetros dependan de los campos A . Dicha generalización no es trivial. Como veremos en breve el generador de transformaciones gauge con este nuevo tipo de parámetros no es diferenciable.

Debido a que A_0 no tiene dinámica, ya que es un multiplicador de Lagrange, no puede incluirse en los parámetros de la transformación gauge ξ^a y deberá ser determinado por nuestro análisis. Por tanto, los parámetros se escribirán:

$$\xi^a = \xi^k A_k^a \quad (3.16)$$

Antes de continuar debemos hacer una aclaración sobre la notación. Los índices $i, j, k, l, \dots$ denotan índices espaciales que toman valores de 1, 2 y como se venía trabajando $a, b, c, d = 1, \dots, \dim(G)$.

3.2. Diferenciabilidad de los Generadores $\tilde{\mathcal{G}}$.

En esta sección se demostrará que la funcional $\tilde{\mathcal{G}}$ no es diferenciable funcionalmente para transformaciones gauge (generalizadas) donde los parámetros ξ^a tengan la estructura $\xi^a = \xi^k A_k^a$, [17].

La funcional está dada por (2.15) y usando $\xi^a = \xi^k A_k^a$ se obtiene:

$$\tilde{\mathcal{G}}(\xi) = -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x (D_i \xi^a + \partial_i \xi^a) A_{aj} \epsilon^{ij} \quad (3.17)$$

$$= -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \left(2\partial_i (\xi^k A_k^a) + f_{abc} A_i^b A_k^c \xi^k \right) A_j^a \epsilon^{ij} \quad (3.18)$$

Realizando la variación respecto a los campos A_i^a , haciendo una integración por partes y cambios de variables mudas, se llega a:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{G}}(\xi) &= -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x (\partial_i (2\xi^k \delta A_k^a A_{aj} \epsilon^{ij}) - 2\xi^j \delta A_j^a \partial_i (A_{ak}) \epsilon^{ik} + \\ &+ f_{abc} \delta A_j^a A_k^c \xi^k A_i^b \epsilon^{ij} - f_{abc} A_i^a \delta A_j^a \xi^j A_k^c \epsilon^{ik}) - \\ &- \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \left(2\partial_i (\xi^k A_k^a) + f_{abc} A_i^b A_k^c \xi^k \right) \delta A_j^a \epsilon^{ij} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agrupando términos de forma conveniente se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{G}}(\xi) = & -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x (\partial_i (2\xi^k \delta A_k^a A_{aj} \epsilon^{ij}) - \xi^j \delta A_j^a (\partial_i (A_k^a) - \partial_k (A_i^a) + f_{abc} A_i^b A_k^c) \epsilon^{ik} + \\ & + f_{abc} A_k^c \xi^k A_i^b \epsilon^{ij} \delta A_j^a - \\ & - \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \left(2\partial_i (\xi^k A_k^a) + f_{abc} A_i^b A_k^c \xi^k \right) \delta A_j^a \epsilon^{ij} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando la definición de la dos-forma de curvatura (2.4) y haciendo uso de la definición de derivada covariante se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{G}}(\xi) = & -\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_i \left(2\xi^k \delta A_k^a A_{aj} \epsilon^{ij} \right) + \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \xi^j F_{ik}^a \epsilon^{ik} \delta A_{aj} - \\ & - \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x D_i (\xi^k A_k^a) \delta A_{aj} \epsilon^{ij} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Contrastando este resultado con el obtenido en (2.16) se observa que se tiene un término adicional dependiente de la curvatura y un término de frontera, este último es el responsable de que la funcional $\tilde{\mathcal{G}}(\theta)$ en este caso no sea diferenciable! La elección $\xi^k|_{\partial\Sigma} = 0$ es inconsistente como se describe en [30].

Como hemos visto $\tilde{\mathcal{G}}(\theta)$ no es diferenciable en virtud del término de frontera, pero aún así podemos renormalizarlo” de tal forma que su variación sea bien definida. Este método estándar en estos casos es descrito en varias publicaciones [23, 31] y en este trabajo se adoptará para suplir nuestras necesidades.

Definimos una nueva funcional de la forma:

$$\tilde{\mathcal{G}}_N \equiv \tilde{\mathcal{G}} + \mathcal{D} \quad (3.22)$$

donde el término $\mathcal{D}$ es de tal forma que su variación cancela el término de frontera indeseado:

$$\delta \mathcal{D} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial_i \left(\xi^k \delta A_k^a A_{aj} \right) \epsilon^{ij} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \xi^k \delta A_k^a A_a \quad (3.23)$$

donde la última expresión es la forma libre de coordenadas⁷. Evidentemente la funcional renormalizada es diferenciable y su derivada funcional es:

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{G}}_N}{\delta A_{aj}} = -\frac{kR}{4\pi} D_i (\xi^k A_k^a) \epsilon^{ij} + \frac{kR}{8\pi} F_{ik}^a \epsilon^{ik} \xi^j \quad (3.24)$$

⁷Este paso tiene un problema no-trivial oculto, se ha asumido la existencia de una funcional cuya variación sea bien definida y por tanto se cancele el término de frontera no deseado, pero dicha existencia depende de la topología o más precisamente, de la cohomología del espacio de campos A , [32].

La nueva funcional genera transformaciones gauge “on shell” ya que :

$$\begin{aligned}\{A_i^a(x), \tilde{\mathcal{G}}_N\} &= \frac{4\pi}{kR} \int_{\Sigma} d^2z \frac{\delta A_i^a(x)}{\delta A_j^b(z)} \epsilon_{jk} \eta^{bc} \frac{\delta \tilde{\mathcal{G}}_N}{\delta A_k^c(z)} \\ \{A_i^a, \tilde{\mathcal{G}}_N\} &\approx -D_i(\xi^k A_k^a) \approx -(\mathcal{L}_{\xi} A^a)_i\end{aligned}\quad (3.25)$$

donde se ha usado (3.14). Por lo tanto, se dice que $\tilde{\mathcal{G}}_N$ genera difeomorfismos sobre la subvariedad donde se satisfacen las ligaduras.

Usando los paréntesis de Poisson (2.12) y la anterior derivada funcional se puede calcular el álgebra de los nuevos generadores.

3.3. Álgebra de Poisson de los Generadores $\tilde{\mathcal{G}}_N$.

La funcional $\tilde{\mathcal{G}}_N$ es la generadora “on shell” de los difeomorfismos, y además es funcionalmente diferenciable. Teniendo en cuenta estas dos propiedades es natural preguntarse que álgebra de Poisson satisface dicha funcional para diferentes parámetros gauge $\lambda^a = \lambda^k A_k^a$ y $\eta^a = \eta^k A_k^a$.

Usando (2.12) y (3.24), se obtiene después de algunas simplificaciones:

$$\begin{aligned}\{\tilde{\mathcal{G}}_N(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_N(\lambda)\} &= \frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x D_i(\eta^a) D_j(\lambda_a) \epsilon^{ij} + \\ &+ \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_{akl} \epsilon^{kl} [D_i(\eta^a) \lambda^i - D_i(\lambda^a) \eta^i] + \\ &+ \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_{akl} \epsilon^{kl} F_{mn}^a \epsilon^{mn} \epsilon_{ij} \eta^i \lambda^j\end{aligned}\quad (3.26)$$

El primer término ya se calculó en el capítulo dos (2.38), su resultado es⁸

$$\frac{kR}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2x D_i(\eta^a) D_j(\lambda_a) \epsilon^{ij} = \tilde{\mathcal{G}}(\zeta) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a \quad (3.27)$$

Para calcular el segundo término, se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned}D_i(\eta^a) \lambda^i &= \left(\partial_i(\eta^k A_k^a) + f^a{}_{bc} A_i^b \eta^k A_k^c \right) \lambda^i \\ &= \partial_i(\lambda^k) A_k^a \eta^i + \lambda^k \partial_i(A_k^a) \eta^i + f^a{}_{bc} A_i^b A_k^c \lambda^k \eta^i\end{aligned}\quad (3.28)$$

⁸aunque en el capítulo dos se calculó para parámetros independientes de la conexión, ese procedimiento también aplica en este caso, como se puede ver relativamente fácil.

intercambiando η y λ , se obtiene para el término dos:

$$\begin{aligned} D_i(\eta^a)\lambda^i - D_i(\lambda^a)\eta^i &= [\lambda, \eta]^k A_k^a + \left(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + f^a{}_{bc} A_i^b A_j^c \right) \lambda^i \eta^j - f^a{}_{bc} A_i^b \eta^i A_k^c \lambda^k \\ &= [\lambda, \eta]^k A_k^a + F_{ij}^a \lambda^i \eta^j - \zeta^a \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se ha usado la definición de la curvatura, $\zeta^a = f^{abc} \eta_b \lambda_c$ y el paréntesis de Lie de campos vectoriales definido por:

$$[\lambda, \eta]^k \equiv \partial_i(\eta^k)\lambda^i - \partial_i(\lambda^k)\eta^i \quad (3.30)$$

Para suavizar la notación se toma $F^a = F_{ij}^a \epsilon^{ij}$, teniendo en cuenta esta definición se llega a:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{G}}_N(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_N(\lambda)\} &= \tilde{\mathcal{G}}(\zeta) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a + \\ &+ \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_a \left([\lambda, \eta]^k A_k^a + F_{ij}^a \lambda^i \eta^j - \zeta^a \right) + \\ &+ \frac{kR}{16\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_a F^a \epsilon_{ij} \eta^i \lambda^j \end{aligned} \quad (3.31)$$

Definiendo $\xi^k \equiv [\lambda, \eta]^k$ y observando que los términos siguientes toman una forma más familiar cuando se usa (2.24):

■

$$-\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_a \zeta^a = -\frac{1}{2} \mathcal{G}(\zeta) = \mathcal{Q}(\zeta) - \tilde{\mathcal{G}}(\zeta) \quad (3.32)$$

■ Teniendo en cuenta que $\xi^a = \xi^k A_k^a$, es fácil ver que:

$$\frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x F_a \xi^a = \frac{1}{2} \mathcal{G}(\xi) \quad (3.33)$$

Regresando al álgebra de Poisson y sustituyendo estos resultados, se obtiene después de cancelar $\tilde{\mathcal{G}}(\zeta)$ y reagrupar términos:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}_N(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_N(\lambda)\} = \frac{1}{2} \mathcal{G}(\xi) + \mathcal{Q}(\zeta) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a + \frac{kR}{8\pi} \int_{\Sigma} F_a \left(F^a \epsilon_{ij} \eta^i \lambda^j + \frac{1}{2} F^a{}_{ij} \lambda^i \eta^j \right) \quad (3.34)$$

Analícemos el término $\mathcal{Q}(\zeta)$:

$$\mathcal{Q}(\zeta) = -\frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \zeta_a A^a = -\frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \left(f_{abc} A_i^a A_j^b A_k^c \right) \eta^j \lambda^k dx^i \quad (3.35)$$

Ahora veamos que el término $f_{abc} A_i^a A_j^b A_k^c$ es nulo. Para probar este hecho primero hay que probar que $Tr([A_i, A_j] A_k) = 0$.

Si $i = j$ evidentemente $Tr([A_i, A_j] A_k) = 0$ entonces el caso que se debe probar es $i \neq j$ pero como $i, j, k = 1, 2$ siempre se tienen las dos posibilidades $k = i$ o $k = j$.

Caso $k = i$:

$$\begin{aligned} Tr([A_i, A_j] A_k) &= Tr([A_i, A_j] A_i) = Tr(A_i A_j A_i) - Tr(A_j A_i A_i) = \\ &= Tr(A_j A_i A_i) - Tr(A_j A_i A_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde en el último paso se ha aplicado la propiedad cíclica del operador de traza.

De manera análoga para $k = j$. Por otro lado, esta traza se puede expresar en funciones de los generadores del álgebra de Lie:

$$\begin{aligned} 0 &= Tr([A_j, A_i] A_k) = Tr\left(A_j^a A_i^b [T_a, T_b] T_d A_i^d\right) = \\ &= A_j^a A_i^b A_k^d f_{abc} Tr(T^c T_d) = f_{abc} A_j^a A_i^b A_k^c \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donde se ha usado $[T^a, T^b] = f^{abc} T_c$, en resumen se ha demostrado que:

$$f_{abc} A_j^a A_i^b A_k^c = 0 \quad (3.38)$$

Por tanto, regresando a la expresión de la carga $\mathcal{Q}(\zeta)$, es evidente que esta es anula.

Ahora realizando la expansión de los índices en la última expresión en (3.34) es fácil ver que este término es nulo. Esto conlleva a que (3.34) adopte una forma más sencilla:

$$\{\tilde{\mathcal{G}}_N(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_N(\lambda)\} = \frac{1}{2} \mathcal{G}(\xi) + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a + \mathcal{O}(F^2)$$

Esta es el álgebra de Poisson que satisfacen los nuevos generadores, por tanto restringiéndose al espacio donde se satisfacen las ligaduras se llega al álgebra de Poisson de las nuevas cargas:

$$\boxed{\{\mathcal{Q}_N(\eta), \mathcal{Q}_N(\lambda)\} \approx \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a} \quad (3.39)$$

Esta expresión contrasta con el álgebra de las cargas obtenida en (2.52), ya que esta nueva álgebra no tiene la forma de una extensión central como en (2.52), pero esta interpretación es equivocada en este caso general ya que ahora los parámetros son dependientes de la conexión, por lo tanto para darle una interpretación a este nuevo resultado debemos separar los términos que dependen de los campos A y los que no dependen, sólo de esta manera podemos obtener una extensión central.

Pero lastimosamente este proceso no se puede realizar sin fijar el gauge, por tanto deben usarse los resultados obtenidos en la sección 2.2.2.

3.4. Álgebra de Virasoro

Haciendo la restricción de la ecuación (3.22) al espacio de la ligaduras, se obtiene la expresión de la carga:

$$\tilde{\mathcal{G}}_N \approx \mathcal{Q}_N \approx \mathcal{Q} + \mathcal{D} \quad (3.40)$$

Ahora es necesario hacer una integración por partes en (3.23) para conseguir una forma más fácil de integrar:

$$\delta \mathcal{D} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \delta \left(\xi^k A_k^a A_a \right) - \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \xi^k A_k^a \delta A_a \quad (3.41)$$

Expandiendo en coordenadas el término $\xi^k A_k^a \delta A_a$ y usando los hechos $A_r^a = \alpha^a : cte$ y $A^a|_{\partial\Sigma} = A_\phi^a d\phi$, se consigue:

$$\xi^k A_k^a \delta A_a = \left(\xi^r \alpha_a \delta A_\phi^a + \xi^\phi A_{a\phi} \delta A_\phi^a \right) d\phi = \delta \left[\left(\xi^r \alpha_a A_\phi^a + \frac{1}{2} \xi^\phi A_{a\phi} A_\phi^a \right) d\phi \right]$$

Con esta expresión, ya se puede integral $\delta \mathcal{D}$ porque:

$$\delta \mathcal{D} = \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \delta \left(\frac{1}{2} \xi^\phi A_{a\phi} A_\phi^a d\phi \right)$$

por lo cual, se llega finalmente a:

$$\mathcal{D} = \frac{kR}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} \xi^\phi A_{a\phi} A_\phi^a d\phi + \mathcal{D}_0$$

donde $\mathcal{D}_0$ es independiente de los A_i . Sustituyendo este resultado en (3.40) y simplificando, se logra obtener (salvo una constante) la expresión para $\mathcal{Q}_N$:

$$\mathcal{Q}_N(\xi) \approx -\frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \left(\xi^r \alpha_a A_\phi^a + \frac{1}{2} \xi^\phi A_{a\phi} A_\phi^a \right) d\phi + \mathcal{D}_0 \quad (3.42)$$

Ahora nos dirigimos a dividir los términos independientes y dependientes de los campos A_i^a en el lado derecho de (3.39). Desarrollando el integrando en componentes, se llega a:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a &= \alpha_a \alpha^a \int_{\partial\Sigma} \eta^r \partial_\phi(\lambda^r) d\phi + \\ &+ \int_{\partial\Sigma} \left[\eta^r \alpha_a \partial_\phi(\lambda^\phi A_\phi^a) + \eta^\phi A_\phi^a \partial_\phi(\lambda^r) \alpha_a + \eta^\phi A_{a\phi} \partial_\phi(\lambda^\phi A_\phi^a) \right] d\phi \end{aligned} \quad (3.43)$$

El primer término ya es independiente de los campos A_i^a , por tanto este será la extensión central buscada. Seguidamente, se transformará el segundo término para escribirlo en función de la carga $\mathcal{Q}_N$. Realizando las derivadas indicadas, haciendo integración por

partes y reorganizando términos se llega a que el segundo término adopta la forma:

$$\begin{aligned}
&= \partial_\phi(\eta^r \alpha_a \lambda^\phi A_\phi^a) + \left(\eta^\phi \partial_\phi(\lambda^r) - \lambda^\phi \partial_\phi(\eta^r) \right) \alpha_a A_\phi^a + \eta^\phi \partial_\phi(\lambda^\phi) A_{a\phi} A_\phi^a + \frac{1}{2} \eta^\phi \lambda^\phi \partial_\phi(A_\phi^a A_{a\phi}) \\
&= \partial_\phi(\cdots) + \left(\eta^\phi \partial_\phi(\lambda^r) - \lambda^\phi \partial_\phi(\eta^r) \right) \alpha_a A_\phi^a + \frac{1}{2} \left(\eta^\phi \partial_\phi(\lambda^\phi) - \lambda^\phi \partial_\phi(\eta^\phi) \right) A_{a\phi} A_\phi^a \\
&= \partial_\phi(\cdots) + [\eta, \lambda]^r \alpha_a A_\phi^a + \frac{1}{2} [\eta, \lambda]^\phi A_{a\phi} A_\phi^a
\end{aligned}$$

En la segunda línea se hizo una integración por partes del último término y se asociaron términos. En la última línea se usó la definición del paréntesis de Lie de campos vectoriales.

Debido a que las funciones sobre S^1 se asumen univaluadas, el término $\partial_\phi(\cdots)$ se anula, por lo tanto la expresión final para el término de la derecha de (3.39) es:

$$\int_{\partial\Sigma} \eta_a d\lambda^a = \alpha_a \alpha^a \int_{\partial\Sigma} \eta^r \partial_\phi(\lambda^r) d\phi + \int_{\partial\Sigma} \left([\eta, \lambda]^r \alpha_a A_\phi^a + \frac{1}{2} [\eta, \lambda]^\phi A_{a\phi} A_\phi^a \right) d\phi \quad (3.44)$$

Esto implica que el álgebra de las cargas nuevas adopta la siguiente expresión:

$$\{\mathcal{Q}_N(\eta), \mathcal{Q}_N(\lambda)\}^* \approx \frac{kR}{4\pi} \alpha_a \alpha^a \int_{\partial\Sigma} \eta^r \partial_\phi(\lambda^r) d\phi + \frac{kR}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \left([\eta, \lambda]^r \alpha_a A_\phi^a + \frac{1}{2} [\eta, \lambda]^\phi A_{a\phi} A_\phi^a \right) d\phi \quad (3.45)$$

O en función de (3.42):

$$\{\mathcal{Q}_N(\eta), \mathcal{Q}_N(\lambda)\}^* \approx -\mathcal{Q}_N([\eta, \lambda]) + \frac{kR}{4\pi} \alpha_a \alpha^a \int_{\partial\Sigma} \eta^r \partial_\phi(\lambda^r) d\phi + \mathcal{D}_0 \quad (3.46)$$

Este resultado es sorprendente, ya que en cierto sentido es un álgebra de Kac-Moody aunque ahora no hay constantes de estructura, en vez de eso, aparece el paréntesis de Lie de campos vectoriales. Esto era de esperarse ya que estamos trabajando con difeomorfismos. Así se puede decir que el álgebra de Poisson de las cargas nuevas constituyen una extensión central (continua) del álgebra de Lie de campos vectoriales. Este resultado es el mismo que se reporta [17, 31].

Bañados y Carlip reportan que existe una sub-álgebra de Lie de los campos vectoriales dada por $(\xi^i) = (-\beta \partial_\phi \xi, \xi)$ donde $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sobre esta sub-álgebra, el álgebra de las cargas llega a ser un álgebra de Virasoro continua, cuya expresión es:

$$\{\mathcal{Q}_N(\eta), \mathcal{Q}_N(\lambda)\}^* \approx -\mathcal{Q}_N([\eta, \lambda]_{sub}) - \frac{kR}{4\pi} \alpha_a \alpha^a \beta^2 \int_{\partial\Sigma} \xi \partial_\phi^3(\xi) d\phi + \mathcal{D}_0 \quad (3.47)$$

donde $[\eta, \lambda]_{sub}$ es la restricción del paréntesis a la sub-álgebra mencionada. Es fácil demostrar que $[\eta, \lambda]^r$ es un término de frontera sobre este sub-espacio y por el carácter univaluado de las funciones se anula. Por tanto $[\eta, \lambda]_{sub} = [\eta, \lambda]^\phi$ y sobre este sub-espacio $[\eta, \lambda]^\phi$ es el paréntesis de Lie sobre las funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

El álgebra (3.47) es la versión continua de un álgebra de Virasoro con carga central $c = -12k\alpha^2\beta^2$. Esto llegara a ser evidente en breve cuando se encuentre la versión discreta.

La carga (3.42) toma la siguiente forma sobre la sub-álgebra mencionada:

$$\mathcal{Q}_N(\xi) = -\frac{kR}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} \xi (2\alpha_a\beta\partial_\phi A_\phi^a + A_{a\phi}A_\phi^a) d\phi + \mathcal{D}_0 \quad (3.48)$$

Tomando la definición de la constante $\mathcal{D}_0$ propuesta por Bañados en [23]:

$$\mathcal{D}_0 = -\frac{kR}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} \xi \alpha^a \beta^2 \quad (3.49)$$

donde $\alpha^2 = \alpha_a\alpha^a$, finalmente se obtiene:

$$\mathcal{Q}_N(\xi) = -\frac{kR}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} \xi (\alpha^a\beta^2 + 2\alpha_a\beta\partial_\phi A_\phi^a + A_{a\phi}A_\phi^a) d\phi \quad (3.50)$$

En este momento ya se puede realizar la expansión en series de Fourier debido a que las integrales están definidas sobre una variedad compacta, esto nos llevará a la versión discreta de (3.47), que será la forma bien conocida del álgebra de Virasoro de la teoría de campos conformes.

Para obtener la versión discreta de (3.47), tomamos las siguientes expansiones en modos de Fourier:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in\phi} &= -\frac{k}{2} (\alpha^2\beta^2 + 2\alpha_a\beta\partial_\phi A_\phi^a + A_{a\phi}A_\phi^a) \\ \theta &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_n e^{-in\phi} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Con base en estas expansiones y usando la ortogonalidad de la base $\{e^{-in\phi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, es fácil demostrar que la carga (3.50) tiene la expansión:

$$\mathcal{Q}_N(\theta) = \frac{R}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n \theta_{-n} \quad (3.52)$$

La expresión del paréntesis de Lie sobre el espacio de funciones es un poco más complicada debido a que deben realizarse varios cambios de índices, su expresión final es:

$$[\eta, \lambda] = [\eta, \lambda]^\phi = \eta\partial_\phi(\lambda) - \lambda\partial_\phi(\eta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\eta, \lambda]_n e^{-in\phi} \quad (3.53)$$

$$[\eta, \lambda]_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} i(2m - n) \eta_m \lambda_{n-m} \quad (3.54)$$

Con esta expresión fácilmente se puede hallar:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_N([\eta, \lambda]) &= \frac{R}{2} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} i(2m+n) L_n \eta_m \lambda_{-n-m} \\ \mathcal{Q}_N([\eta, \lambda]) &= \frac{R}{2} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} i(n-m) L_{n+m} \eta_{-m} \lambda_{-n}\end{aligned}\quad (3.55)$$

donde se han efectuado algunos cambios de índices mudos. Ahora vamos a hallar las expansiones de Fourier del término central, esto se calcula fácilmente usando la ortogonalidad, entonces se obtiene:

$$\int_{\partial\Sigma} \eta \partial_\phi^3(\lambda) d\phi = 2\pi \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} i n^3 \eta_m \lambda_n \delta_{m+n,0} \quad (3.56)$$

El término $\mathcal{D}_0$ adopta la siguiente expansión:

$$\mathcal{D}_0 = -\frac{ikR}{2} \alpha^2 \beta^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \eta_m \lambda_{-m} \quad (3.57)$$

Y finalmente el paréntesis de las cargas se puede expandir como:

$$\{\mathcal{Q}_N(\eta), \mathcal{Q}_N(\lambda)\} = \frac{R^2}{4} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \eta_{-m} \lambda_{-n} \{L_m, L_n\} \quad (3.58)$$

Colocando todos estos resultados en (3.47) y asociando términos semejantes $\eta_{-m} \lambda_{-n}$ se obtiene:

$$\frac{R^2}{4} \{L_m, L_n\} = \frac{iR}{2} (m-n) L_{n+m} - \frac{ikR}{2} \alpha^2 \beta^2 (m^2 - 1) m \delta_{n+m,0} \quad (3.59)$$

O usando la normalización ($R = 2$) de la representación descrita en el apéndice A, finalmente se llega a la versión discreta del álgebra de Virasoro [20, 21, 21]:

$$\boxed{\{L_m, L_n\} = i(m-n) L_{n+m} - ik\alpha^2 \beta^2 m(m^2 - 1) \delta_{n+m,0}} \quad (3.60)$$

De donde se obtiene, comparando con la expresión estándar, la carga central:

$$c = -12k\alpha^2 \beta^2 \quad (3.61)$$

Como se vio en (3.11), la gravedad en (2+1)-dimensiones se puede ver como una suma desacoplada de dos acciones de Chern-Simons. Por lo cual, existe un álgebra de Virasoro para cada acción de CS:

$$\{L_m^\pm, L_n^\pm\} = i(m-n) L_{n+m}^\pm - ik\alpha^2 \beta^2 m(m^2 - 1) \delta_{n+m,0} \quad (3.62)$$

por lo cual, la carga central para cada sector es:

$$\boxed{c^\pm = -12k\alpha^2\beta^2.} \quad (3.63)$$

Para acentuar más la relación con CFT, observemos que si se realiza la expansión de los campos A^a como:

$$A^a = -\frac{1}{k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n^a e^{-in\phi} \quad (3.64)$$

y usando la definición de los modos de Fourier de (3.51):

$$L_n = -\frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha^2 + 2\alpha_a \partial_\phi(A_\phi^a) + A_{a\phi} A_\phi^a) e^{in\phi} d\phi \quad (3.65)$$

se obtiene, después de sustituir el integrando por la expansión pertinente:

$$L_n = -\frac{1}{2k} \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_k^a T_{a(n-k)} - in\alpha_a \beta T_n^a - \frac{k}{2} \alpha^2 \beta^2 \delta_{n,0} \quad (3.66)$$

donde a esta expansión se le conoce como “twisted Sugawara construction” que permite construir un álgebra de Virasoro desde un álgebra de Kac-Moody [21, 33, 34].

Capítulo 4

Aplicación: Entropía de Agujeros Negros BTZ

En este capítulo se hará una aplicación del formalismo desarrollado en los capítulos anteriores. Se estudia cómo la carga central (3.61), vía la formula de Cardy, puede dar cuenta de la entropía de agujeros negros tipo BTZ en (2+1)-dimensiones y este resultado esta en perfecto acuerdo con el resultados de Hawking-Bekestein en $D = 3$ [35, 36].

Este capítulo reforzara la interpretación de gravedad en (2+1)-dimensiones como una teoría de campos topológica del tipo Chern-Simons, ya que en virtud de dicha correspondencia, se podrá calcular la entropía de agujeros negros BTZ¹, [6, 37].

La diferencia más fundamental entre gravedad en (3+1)-dimensiones y (2+1)-dimensiones radica en el hecho de que en (2+1)-dimensiones, el tensor de Riemman depende linealmente del tensor de Ricci, ya que en tres dimensiones se anula el tensor conforme de Weyl implicando la siguiente relación, [3, 37]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R \quad (4.1)$$

Por lo cual, cualquier solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío $R_{\mu\nu} = 0$ llevan a $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ implicando un espacio plano localmente, pero no necesariamente plano globalmente, ya que este último depende de como se hace el "gluing" de las cartas para construir todo el espacio, y si el espacio tiene topología no trivial, dicha variedad no es globalmente plana. Este razonamiento, evidentemente se puede generalizar al caso en que exista una constante cosmológica, llevando ahora a un espacio de curvatura

¹Para estudios posteriores se espera relacionar los resultados del capítulo 3 con sistemas físicos en materia condensada.

localmente constante, pero de nuevo, esta condición no siempre implica que globalmente tenga curvatura constante, [3, 38].

Aunque esta teoría de gravedad de baja dimensionalidad se ve trivial a primera vista, no lo es, ya que existen varios espacios de curvatura constante localmente pero no globalmente [22, 39, 40]. Otra forma de afirmar que la teoría no es trivial, es citar el descubrimiento por parte de Bañados, Teitelboim y Zanelli quienes demostraron en 1992 que existen soluciones, de las ecuaciones de Einstein en (2+1)-dimensiones con constante cosmológica negativa, que son estacionarias, axialmente simétricas y que tiene una singularidad tipo agujero negro. Dichas soluciones se denominan como BTZ, siguiendo las iniciales de sus autores, [41].

4.1. Agujeros Negros tipo BTZ

La forma más general de una métrica axialmente simétrica y estacionaria esta dada por el ansatz:

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + r^2 (d\phi + e^\sigma dt)^2 + e^{2\beta} dr^2 \quad (4.2)$$

donde se han usando coordenadas tipo Schwarzschild (t, ϕ, r) . Ahora usaremos el formalismo de Cartan para encontrar las incógnitas $\alpha(r), \beta(r)$ y $\sigma(r)$. Una base ortonormal (vielbein) $\{e^{\hat{t}}, e^{\hat{\phi}}, e^{\hat{r}}\}$ esta definida por:

$$e^{\hat{t}} = e^\alpha dt, \quad e^{\hat{\phi}} = r (d\phi + e^\sigma dt), \quad e^{\hat{r}} = e^\beta dr \quad (4.3)$$

Las derivadas exteriores de estos campos de vielbein son:

$$de^{\hat{t}} = \alpha' e^{-\beta} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}}$$

$$de^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} e^{-\beta} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}} + r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}} \quad (4.4)$$

$$de^{\hat{r}} = 0 \quad (4.5)$$

Usando el hecho de que la uno-forma de torsión se anula (segunda ecuación en (3.5)) y expresando las formas de espín como combinaciones lineales de la base vielbein, se obtiene²

$$\omega^{\hat{t}} = \frac{r\sigma'}{2} e^{\sigma-\alpha-\beta} e^{\hat{t}} + \frac{e^{-\beta}}{r} e^{\hat{\phi}} \quad (4.6)$$

$$\omega^{\hat{\phi}} = \alpha' e^{-\beta} e^{\hat{t}} - \frac{r\sigma'}{2} e^{\sigma-\alpha-\beta} e^{\hat{\phi}} \quad (4.7)$$

$$\omega^{\hat{r}} = \frac{r\sigma'}{2} e^{\sigma-\alpha-\beta} e^{\hat{r}} \quad (4.8)$$

²El símbolo de Levi-Civita se normaliza como $\epsilon^{t\phi r} = 1$.

Ahora las derivadas exteriores de esas formas son (después de algunos cálculos):

$$\begin{aligned}
 d\omega^{\hat{t}} &= \left[\frac{(r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta})'}{2} e^{-\beta} + \frac{r\sigma'\alpha'}{2} e^{\sigma-\alpha-2\beta} + \sigma' e^{\sigma-\alpha-2\beta} \right] e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}} - \frac{\beta' e^{-2\beta}}{r} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}} \\
 d\omega^{\hat{\phi}} &= \left[(\alpha' e^{-\beta})' + (\alpha')^2 e^{-2\beta} - \frac{(r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta})^2}{2} \right] e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}} - \\
 &\quad - \left[\frac{(r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta})'}{2} e^{-\beta} + \frac{\sigma' e^{\sigma-\alpha-2\beta}}{2} \right] e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}} \\
 d\omega^{\hat{r}} &= 0
 \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Einstein (el primer conjunto en (3.5)), reorganizando términos y usando la independencia lineal de $\{e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}}, e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}}, e^{\hat{\phi}} \wedge e^{\hat{r}}\}$ se llega al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\beta' e^{-2\beta}}{r} - \left(\frac{r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta}}{2} \right)^2 = \Lambda \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta}}{2} \right)' e^{-\beta} + \sigma' e^{\sigma-\alpha-2\beta} = 0 \quad (4.10)$$

$$(\alpha'' - \alpha'\beta' + (\alpha')^2) e^{-2\beta} - \frac{3}{4} (r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta})^2 = -\Lambda \quad (4.11)$$

$$\frac{\alpha' e^{-2\beta}}{r} + \left(\frac{r\sigma' e^{\sigma-\alpha-\beta}}{2} \right)^2 = -\Lambda \quad (4.12)$$

A primera vista este sistema se ve complicado debido a que es un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. Pero en realidad es bastante sencillo, sumando (4.9) y (4.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \alpha' + \beta' &= 0 \\
 \alpha + \beta &= C \\
 \alpha &= -\beta
 \end{aligned}$$

En el último paso se tomó $C = 0$ usando una escala de tiempo conveniente. Como $\alpha = -\beta$, la ecuación (4.10) se reduce a:

$$\frac{r}{2} (\sigma' e^{\sigma})' + \frac{3}{2} \sigma' e^{\sigma} = 0 \quad (4.13)$$

De aquí, se obtiene fácilmente:

$$e^{\sigma} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2 \quad (4.14)$$

Usando este resultado en (4.9) e integrando, se consigue:

$$e^{-2\beta} = \frac{C_1^2}{4r^2} - r^2\Lambda - 2C_3 = e^{2\alpha} \quad (4.15)$$

Colocando estos resultados, en el ansatz (4.2), la métrica toma la forma:

$$ds^2 = - \left(\frac{C_1^2}{4r^2} - r^2\Lambda - 2C_3 \right) dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{C_1}{2r^2} dt + C_2 dt \right)^2 + \frac{dr^2}{\frac{C_1^2}{4r^2} - r^2\Lambda - 2C_3} \quad (4.16)$$

Esta métrica tiene una singularidad tipo agujero negro en $r = 0$ sólo si $\Lambda \equiv \frac{-1}{\ell^2} < 0$, además cuando $r \rightarrow \infty$, esperamos que se desacople t y ϕ lo que implica que $C_2 = 0$:

$$ds^2 = - \left(\frac{C_1^2}{4r^2} + \frac{r^2}{\ell^2} - 2C_3 \right) dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{C_1}{2r^2} dt \right)^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{\ell^2} + \frac{C_1^2}{4r^2} - 2C_3} \quad (4.17)$$

Usando diferentes formalismos descritos en [25, 37, 42], se puede demostrar que $C_1 = 8GJ$ y $2C_3 = 8GM$ donde J y M , son el momentum angular y la masa del agujero negro³. En función de estas constantes, obtenemos la forma final de la métrica:

$$\boxed{ds^2 = - \left(\frac{16GJ^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2} - 8GM \right) dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{4GJ}{r^2} dt \right)^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{\ell^2} + \frac{16GJ^2}{r^2} - 8GM}} \quad (4.18)$$

Esta es la famosa métrica que describe un agujero negro BTZ con superficie de Cauchy r_- y horizonte en r_+ ⁴:

$$r_{\pm}^2 = 4GM\ell \left(1 \pm \left[1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \quad (4.19)$$

Esta métrica, asintóticamente tiene una geometría AdS_3 , pero como es bien conocido [40], que las isometrías de este espacio esta descritas por el grupo $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$, entonces esto justifica la elección (3.10)⁵.

En función de estas superficies podemos escribir los parámetros M y J como:

$$\begin{aligned} M &= \frac{r_+^2 + r_-^2}{8G\ell^2} \\ J &= \frac{r_+ r_-}{4G\ell} \end{aligned} \quad (4.20)$$

³La interpretación de estas constantes se puede obtener usando formalismo ADM como se describe en [37]. además dicha interpretación era de esperar debido a las simetrías que se impusieron en (4.2).

⁴Estas singularidades no son físicas, son singularidades coordenadas, semejante a la singularidad $r = 2M$ en la solución de Schwarzschild, [40].

⁵En realidad la métrica BTZ es el cociente de $AdS_3 / \sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia $\phi \sim \phi + 2\pi$.

Por lo cual, la métrica BTZ puede escribirse como:

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{\ell^2 r^2} dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_+ r_-}{\ell r^2} dt \right)^2 + \frac{\ell^2 r^2}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)} dr^2 \quad (4.21)$$

Realizando el cambio de la coordenada radial mediante (Sólo describe la región $r > r_+$):

$$r^2 = r_+^2 \cosh^2(\rho) - r_-^2 \sinh^2(\rho) \quad (4.22)$$

la métrica BTZ toma una forma más fácil de manejar ($\tau = \frac{t}{\ell}$):

$$ds_{BTZ}^2 = -\sinh^2(\rho) (r_+ d\tau - r_- d\phi)^2 + \cosh^2(\rho) (r_- d\tau - r_+ d\phi)^2 + \ell^2 d\rho^2 \quad (4.23)$$

Ahora, los campos Vielbein en estas coordenadas son:

$$e^{\hat{0}} = \sinh(\rho) (r_+ d\tau - r_- d\phi) \quad (4.24)$$

$$e^{\hat{1}} = \cosh(\rho) (r_- d\tau - r_+ d\phi) \quad (4.25)$$

$$e^{\hat{2}} = \ell d\rho \quad (4.26)$$

Después de un cálculo análogo a (4.4) y (4.6), se obtienen las formas de espín:

$$\omega^{\hat{0}} = \frac{\tanh(\rho)}{\ell} e^{\hat{1}} \quad (4.27)$$

$$\omega^{\hat{1}} = \frac{\coth(\rho)}{\ell} e^{\hat{0}} \quad (4.28)$$

$$\omega^{\hat{2}} = 0 \quad (4.29)$$

Ahora, con estos resultados es posible obtener los coeficientes de la conexión usando (3.7):

$$\pm A^0 = \pm \frac{r_+ \pm r_-}{\ell} (d\tau \mp d\phi) \sinh(\rho) \quad (4.30)$$

$$\pm A^1 = \frac{r_+ \pm r_-}{\ell} (d\tau \mp d\phi) \cosh(\rho) \quad (4.31)$$

$$\pm A^2 = \pm d\rho \quad (4.32)$$

Desde el proceso de fijación de Gauge, asumimos que $\pm A^2 = \pm \alpha^a$, por tanto desde los coeficientes anteriores vemos que:

$$\pm \alpha^a = \pm \delta_2^a \quad (4.33)$$

Por lo cual, se obtiene:

$$\alpha^2 = \eta_{ab} \alpha^a \alpha^b = \eta_{22} = 1 \quad (4.34)$$

Usando estos resultados ($R = 2$), la carga central del álgebra de Virasoro es (para el sector $+$ y $-$):

$$c^{\pm} = -12k\alpha^2 = 12\frac{\ell}{RG8} = \frac{3\ell}{4G} \quad (4.35)$$

Resultado que ha sido obtenido por diferentes métodos: Usando la correspondencia AdS/CFT [43], calculando la anomalía de Weyl [44], y calculando el tensor de estrés efectivo en la frontera [45]. Un resumen de estos y otros métodos es dado en [46].

4.2. Función de Partición y Formula de Cardy

En el capítulo (3), se demostró que el álgebra de las transformaciones gauge que representan a los difeomorfismos, llega hacer un par de álgebras de Virasoro desacopladas, que en forma de conmutadores es:

$$[L_m^+, L_n^+] = (m-n)L_{n+m}^+ + \frac{c^+}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$[L_m^-, L_n^-] = (m-n)L_{n+m}^- + \frac{c^-}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

$$[L_m^+, L_n^-] = 0$$

Observemos que existe una subálgebra de Lie generada por $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$. La importancia de esta yace en el hecho de que estos operadores generan las transformaciones conformes globalmente definidas, en particular, L_{-1} genera traslaciones, L_0 dilataciones complejas y L_1 genera transformaciones conformes especiales. Las transformación más general generada por ellas está dada por [20]:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (4.36)$$

Asumiendo, que la teoría conforme esta definida sobre el 2-toro parametrizado por $\tau = \tau_1 + \tau_2$, la función de partición esta dada por⁶

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = Tr \left(e^{2\pi i \tau L_0} e^{-2\pi i \bar{\tau} \bar{L}_0} \right) \quad (4.37)$$

⁶Si la teoría conforme no esta definida sobre el toro, es posible mapear al toro induciendo un corrimiento en L_0 , [21, 33].

Donde la traza es tomada sobre cualquier base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de la teoría. Para tomar la traza, consideremos los siguientes problemas espectrales:

$$L_0|n\rangle = \Delta|n\rangle \quad (4.38)$$

$$\bar{L}_0|\bar{n}\rangle = \bar{\Delta}|\bar{n}\rangle \quad (4.39)$$

Donde se asumirá que el espectro de L_0 es acotado inferiormente por Δ_0 y además que $\{|n\rangle \otimes |\bar{m}\rangle \mid n, m \in I\}$ constituye un conjunto completo de $\mathcal{H}$:

$$\sum_{n,m \in I} |n\rangle |\bar{m}\rangle \langle \bar{m}| \langle n| = 1 \quad (4.40)$$

Podemos tomar la traza, para obtener:

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{n,m \in I} \langle n| e^{2\pi i \tau L_0} |n\rangle \langle \bar{m}| e^{-2\pi i \bar{\tau} \bar{L}_0} |\bar{m}\rangle \quad (4.41)$$

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\Delta, \bar{\Delta}} \rho(\Delta, \bar{\Delta}) e^{2\pi i \tau \Delta} e^{-2\pi i \bar{\tau} \bar{\Delta}} \quad (4.42)$$

Donde en la ultima linea la suma es sobre el espectro de L_0 y $\bar{L}_0$, por lo tanto aparece la función $\rho(\Delta, \bar{\Delta})$ que da cuenta del degeneramiento para cada par de valores propios $(\Delta, \bar{\Delta})$ ⁷. Definiendo $q = e^{2\pi i \tau}$ y $\bar{q} = e^{-2\pi i \bar{\tau}}$, se tiene:

$$\mathcal{Z}(q, \bar{q}) = \sum_{\Delta, \bar{\Delta}} \rho(\Delta, \bar{\Delta}) q^\Delta \bar{q}^{\bar{\Delta}} \quad (4.43)$$

Esta expresión la podemos interpretar como una expansión en serie de potencias en torno al origen en las variables complejas $(q, \bar{q})$, por tanto se puede extraer la función ρ usando una integral de contorno, hecho que es bien conocido en el análisis complejo:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\gamma \frac{dq}{q^{\Delta+1}} \frac{d\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{\Delta}+1}} \mathcal{Z}(q, \bar{q}) \quad (4.44)$$

donde γ es una curva cerrada en torno a $q = 0$ y $\bar{q} = 0$. A primera vista parece sin utilidad expresar la función ρ de esta manera ya que tampoco se conoce a $\mathcal{Z}(q, \bar{q})$. En este punto yace el resultado sorprendente de Cardy [47, 48]. Es posible analizar asintoticamente dicha integral, ya que el comportamiento a alta energía esta relacionado al comportamiento de baja energía, dicha relación esta dictada por una simetría conocida como invariancia modular. Se puede hacer un análisis exacto de dicha función de partición usando herramientas de la teoría de números analítica, pero dicho análisis esta fuera del alcance de este trabajo [49–52].

⁷Esto es cierto para teorías conformes unitarias, como se asume en este trabajo.

Los estudios de Cardy concluyen que la expresión:

$$\mathcal{Z}_0 \equiv \text{Tr} \left(e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i \bar{\tau} (\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24})} \right) = e^{\frac{c\pi}{6} \tau_2} \mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) \quad (4.45)$$

es un invariante modular. En particular, invariante bajo la transformación $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$, que genera el intercambio de las circunferencias del 2-toro⁸.

El cálculo mostrado a continuación es completamente general y sólo involucra hechos generales de teoría de campos conformes, se seguirá a Carlip [55].

Usando la invariancia modular de $\mathcal{Z}_0$, es fácil demostrar que:

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = e^{\frac{2\pi i c}{24} \tau} e^{-\frac{2\pi i c}{24} \bar{\tau}} e^{\frac{2\pi i c}{24} \frac{1}{\tau}} e^{-\frac{2\pi i c}{24} \frac{1}{\bar{\tau}}} \mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right) \quad (4.46)$$

Por simplicidad de notación suprimiremos la dependencia sobre $\bar{\tau}$, más adelante se recuperara. Cambiando la variable a τ , la densidad de estados toma la forma:

$$\rho(\Delta) = \int d\tau e^{-2\pi i \tau \Delta} e^{\frac{2\pi i c}{24} \tau} e^{\frac{2\pi i c}{24} \frac{1}{\tau}} \mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad (4.47)$$

El hecho relevante para usar la aproximación de punto de silla, es separar el integrando en un factor de fase que oscila rápidamente y una amplitud que varía lentamente. Observemos que para $\Delta \gg \Delta_0$, la fase oscila rápidamente, por lo tanto es permisible aplicar el método si y sólo si, el factor $\mathcal{Z}$ varía lentamente. Se asumirá este hecho⁹ La integral tiene la forma general:

$$I(a, b) = \int d\tau e^{\phi(\tau)} f(\tau) \quad (4.48)$$

donde la fase tiene la forma $\phi(\tau) = 2\pi a i \tau + \frac{2\pi i b}{\tau}$. El punto estacionario de esta función es:

$$\tau_0 = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (4.49)$$

Haciendo la expansión de Taylor de la fase hasta orden dos, se obtiene:

$$\phi(\tau) = \phi(\tau_0) + \frac{1}{2} \phi''(\tau_0) (\tau - \tau_0)^2 + \mathcal{O}(\tau - \tau_0)^3 \quad (4.50)$$

⁸Este hecho esta relacionado a la simetría T, [53, 54].

⁹En breve veremos las condiciones para las cuales esto se satisface.

donde $\phi(\tau_0) = 4\pi i\sqrt{ab}$. Por lo cual, al aplicar el método de punto estacionario, se obtiene¹⁰

$$I(a, b) \approx e^{4\pi i\sqrt{ab}} f(\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\frac{2\pi i b}{\tau_0^3}(\tau - \tau_0)^2} \quad (4.51)$$

$$I(a, b) \approx \sqrt{\frac{\tau_0^3}{2ib}} e^{4\pi i\sqrt{ab}} f(\tau_0) = \left(-\frac{b}{4a^3}\right)^{1/4} e^{4\pi i\sqrt{ab}} f(\tau_0) \quad (4.52)$$

Para nuestro problema particular, $a = \frac{c}{24} - \Delta$ y $b = \frac{c}{24}$, lo que conlleva a $\tau_0 \approx i\sqrt{\frac{c}{24\Delta}} = i\epsilon$ y el método de punto de silla produce¹¹:

$$\rho(\Delta) = C e^{2\pi\sqrt{\frac{\Delta c}{6}}} \mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau_0}\right) \quad (4.53)$$

Para evaluar la fidelidad del método, se tiene que analizar el factor $\mathcal{Z}(-\frac{1}{\tau_0})$. Como $\Delta \gg \Delta_0$, la variable $\epsilon \rightarrow 0$, por tanto:

$$\mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau_0}\right) = \sum_{\Delta} \rho(\Delta) e^{-\frac{2\pi\Delta}{\epsilon}} = \rho(\Delta_0) e^{-\frac{2\pi\Delta_0}{\epsilon}} + \sum_{\Delta > \Delta_0} \rho(\Delta) e^{-\frac{2\pi\Delta}{\epsilon}} \quad (4.54)$$

Para analizar el comportamiento asintótico, se calcula el siguiente limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{Z}\left(\frac{i}{\epsilon}\right) = \begin{cases} \rho(\Delta_0), & \text{si, } \Delta_0 = 0 \\ 0, & \text{si, } \Delta_0 > 0 \end{cases}$$

Observar que no se puede obtener un comportamiento asintótico para el caso $\Delta_0 > 0$. Para extraer un comportamiento asintótico en este caso, se define:

$$\tilde{\mathcal{Z}}(\tau) = \rho(\Delta_0) + \sum_{\Delta > \Delta_0} \rho(\Delta) e^{-2\pi i(\Delta - \Delta_0)\tau} = e^{-2\pi i\Delta_0\tau} \mathcal{Z}(\tau) \quad (4.55)$$

Con esta definición, la ecuación (4.47) se puede escribir:

$$\rho(\Delta) = \int d\tau e^{-2\pi i\Delta_0\frac{1}{\tau}} e^{-2\pi i\tau\Delta} e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} \tilde{\mathcal{Z}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad (4.56)$$

Para aplicar el método de punto de silla se observa que esta integral tiene, de nuevo, la misma forma dada en (4.48) con $a = \frac{c}{24} - \Delta$ y $b = \frac{c}{24} - \Delta_0$. En este caso es evidente que (4.52) implica:

$$\rho(\Delta) \approx \left(\frac{\frac{c}{24} - \Delta_0}{4(\Delta - \frac{c}{24})^3}\right)^{1/4} e^{4\pi i\sqrt{(\frac{c}{24} - \Delta)(\frac{c}{24} - \Delta_0)}} \rho(\Delta_0) \quad (4.57)$$

¹⁰La integral Gaussiana existe como integral impropia si $\Re(\tau) > 0$.

¹¹Se han despreciado términos $\mathcal{O}(\Delta^{-1})$.

Para $\frac{c}{24} \gg \Delta_0$ y $\Delta \gg 1$, se obtiene:

$$\rho(\Delta) \approx \left(\frac{c}{96\Delta^3}\right)^{1/4} e^{2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}}} \rho(\Delta_0) \quad (4.58)$$

O recuperando la contribución de $\bar{\tau}$:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) \approx \left(\frac{1}{96}\right)^{1/2} \left(\frac{c\bar{c}}{\Delta^3\bar{\Delta}^3}\right)^{1/4} e^{2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{\Delta}}{6}}} \rho(\Delta_0, \bar{\Delta}_0) \quad (4.59)$$

Esta es la famosa formula de Cardy. Esta permitirá hallar la entropía de agujeros negros BTZ, en la límite asintótico planteado.

4.3. Entropía de Agujeros Negros BTZ

Lo único que resta para hallar el comportamiento asintótico de la densidad de estados, es hallar los valores propios asociados a los operadores $L_0^\pm$. Para esto se recurre a la definición de los coeficientes de Fourier (ver (3.51)):

$$L_n^\pm = -\frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha^2 + 2\alpha_a \partial_\phi(A_\phi^a) + A_{a\phi} A_\phi^a) e^{in\phi} d\phi \quad (4.60)$$

Por tanto, el coeficiente cero está dado por:

$$L_0^\pm = -\frac{k\alpha^2}{2} - \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} A_{a\phi} A_\phi^a d\phi \quad (4.61)$$

Pero el integrando del último término se puede escribir como:

$$A_{a\phi} A_\phi^a = -\left(\omega_\phi^{\hat{t}} \pm \frac{1}{\ell} e_\phi^{\hat{t}}\right)^2 + \left(\omega_\phi^{\hat{\phi}} \pm \frac{1}{\ell} e_\phi^{\hat{\phi}}\right)^2 + \left(\omega_\phi^{\hat{r}} \pm \frac{1}{\ell} e_\phi^{\hat{r}}\right)^2 \quad (4.62)$$

Usando (4.3) y (4.6), se pueden obtener los coeficientes que aparecen en la expresión anterior, para obtener:

$$A_{a\phi} A_\phi^a = 2C_3 \mp \frac{C_1}{\ell} = 8GM \mp \frac{8GJ}{\ell} \quad (4.63)$$

Este resultado lleva a que los modos cero son:

$$L_0^\pm = \frac{M\ell}{4} \mp \frac{J}{4} - \frac{k\alpha^2}{2} \quad (4.64)$$

Realizando las combinaciones lineales indicadas, se obtienen (Salvo una constante aditiva):

$$L_0^+ + L_0^- = \frac{M\ell}{2} \quad (4.65)$$

$$L_0^- - L_0^+ = \frac{J}{2} \quad (4.66)$$

Resultado que refuerza la interpretación de M (J , resp.), como la masa (momentum angular, resp.), ya que en teoría de campos conformes, esta combinación lineal es el generador de traslaciones (rotaciones, resp.).

Los valores propios de $L_0^\pm$ están dados por:

$$\Delta = \frac{M\ell}{4} - \frac{J}{4} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{32G\ell} \quad (4.67)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{M\ell}{4} + \frac{J}{4} = \frac{(r_+ + r_-)^2}{32G\ell} \quad (4.68)$$

donde se ha usado (4.19).

En este momento ya se tienen todos los datos para calcular la entropía de agujeros negros tipo BTZ.

El argumento de la función exponencial en (4.59) toma el valor:

$$2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{\Delta}}{6}} = \frac{2\pi r_+}{8G} \quad (4.69)$$

donde se usó la carga central dada en (4.35) y los valores propios dados en (4.67). Finalmente la densidad de estados adopta la forma:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) \approx \frac{16G\ell^2}{(r_+^2 - r_-^2)^{3/2}} \exp \frac{2\pi r_+}{8G} \quad (4.70)$$

La entropía en el ensamble microcanónico está dada por:

$$S = \text{Log}(\rho) \quad (4.71)$$

Por lo cual, la entropía de agujeros negros BTZ es:

$$S_{BTZ} = \frac{2\pi r_+}{8G} - \frac{3}{2} \text{Log} \left(\frac{r_+^2 - r_-^2}{G} \right) + \text{Cte} \quad (4.72)$$

O en términos de la gravedad superficial del horizonte r_+ , dada por $\kappa = \frac{r_+^2 - r_-^2}{\ell^2 r_+}$:

$$S_{BTZ} = \frac{2\pi r_+}{8G} - \frac{3}{2} \text{Log} \left(\frac{2\pi r_+}{G} \right) - \frac{3}{2} \text{Log}(\kappa \ell) + \text{Cte} \quad (4.73)$$

El primer término es, salvo un factor $1/2$, la conocida formula de la entropía de Hawking-Bekestein dada por [35, 36]:

$$S_{HB} \sim \frac{A}{4G} \quad (4.74)$$

donde A es el área del horizonte, que en nuestro caso de tres dimensiones, está dada por $A = 2\pi r_+$. El segundo término es una corrección logarítmica reportada en [55]. Correcciones de orden superior se suprimen de manera exponencial como se reporta en [56]. El origen microscópico de esta entropía aún es un problema abierto, ya que aún no se cuenta con una teoría cuántica de gravedad que describa la naturaleza de los estados cuánticos que generan dicha entropía. Existen varias posibles explicaciones, bastante diferentes en naturaleza, pero ninguna es concluyente, aunque producen resultados similares.

El valor obtenido en este trabajo para la entropía, se obtuvo por métodos clásicos, ya que en ningún momento se ha hecho un procedimiento de cuantización, aunque se habría podido realizar por el método de cuantización canónica, ya que se disponía de un álgebra de Poisson, que podría “corresponderse” con un álgebra de conmutadores sobre una C^* -álgebra, pero esto podría llevar a una corrección en la carga central debido a problemas de ordenamiento, ver [55].

El factor $1/2$ adicional requiere algún comentario. Este factor se origina por la elección (no estándar) de la Carga dada en (2.25), esta difiere en un factor de 2 reportada en la literatura, por ejemplo en [31], este valor lleva a un factor de 4 en la carga central lo que implica que el exponente de la formula de Cardy (4.69) lleve un factor de dos, lo que conlleva al resultado comúnmente conocido.

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones

5.1. Discusión

En el capítulo 2 se ha analizado la estructura de Poisson detrás de la teoría de Chern-Simons en 3 dimensiones. Este análisis tuvo como punto de partida la definición del generador de transformaciones gauge dado en la ecuación (2.15). Este generador es una propuesta de este trabajo y no se encuentra reportado en la literatura consultada. Ésta expresión del generador fue motivada por el análisis de la teoría de Yang-Mills que se encuentra descrita en el capítulo de 10 del libro de Nair [1]. Esta expresión del generador se obtiene de manera natural cuando uno trata de modificar el análisis hecho en dicha referencia al caso de teoría gauge del tipo Chern-Simons.

Una vez se tiene el generador, se procedió a calcular su derivada funcional (2.17), que resultó ser bien definida, lo que contrasta con los generadores reportados en la literatura [16, 17, 23] que no tienen derivadas funcionales bien definidas, ya que depende de términos de frontera que dependen de la fijación del gauge.

Luego se procedió a calcular el álgebra de Poisson de los generadores obteniendo el álgebra (2.38). Ésta álgebra es una extensión central del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G que está reportada en la literatura (Álgebra de Kac-Moody continua). Aunque nuestra conclusión es más general ya que (2.38) no depende de la fijación del gauge, debido a que el generador (2.15) es derivable exactamente. Esto sustenta nuestra elección del generador.

Posteriormente se estudió la formulación de gravedad en el contexto de la teoría de CS en el capítulo 3. Esto se hizo pensando en que nuestro generador seguiría funcionando sin fijar el gauge, pero esto no fue posible, ya que la introducción de difeomorfismos hace que el generador ya no sea diferenciable (ver (3.21)). Esta situación es la misma encontrada

en la literatura. Por tanto pasamos a corregir el problema de la diferenciabilidad, usando la definición dada en (3.22). El hecho de incluir difeomorfismo en una teoría física lleva a este tipo de problemas de diferenciabilidad, en este punto radica porque construir una teoría cuántica de gravedad es tan compleja.

En el capítulo 4, se hizo una aplicación del formalismo trabajado en los capítulos anteriores para recalcar que los resultados obtenidos tienen relevancia en problemas de la física actual. En este caso, en el problema de entropía de agujeros negros.

A lo largo del trabajo se hizo explícito la relación de entre la teoría de CS en 3 dimensiones y la teoría de campos conformes en dimensión dos. Cuando esta relación se piensa en el contexto de la gravedad en (2+1)-dimensiones, constituye un ejemplo concreto de la correspondencia AdS/CFT, que es de utilidad en teoría de cuerdas. Además precisamente fue la relación con CFT la que permitió evaluar la entropía de agujeros negros vía la fórmula de Cardy sin hacer uso de los detalles microscópicos del sistema (microestados, etc).

5.2. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han adquirido herramientas matemáticas de cierta relevancia en física, entre estas podemos citar la teoría de haces fibrados principales, clases características, formulación geometría de teorías gauge, estructuras algebraicas (Kac-Moody, Virasoro), entre otras.

Desde el punto de vista de la física se ha adquirido cierta familiaridad con gravitación en (2+1)-dimensiones y su formulación (cuasi-)gauge vía teoría de Chern-Simons. Se ha estudiado teoría de Yang-Mills (aspectos elementales), teoría de campos conformes, agujeros negros tipo BTZ, aspectos elementales de sistemas dinámicos con ligaduras, entre otros.

Entre las conclusiones específicas de este trabajo están:

- Se ha analizado con relativa profundidad la estructura algebraica de la teoría de Chern-Simons y su relación con la teoría de campos conformes vía álgebras de Kac-Moody y Virasoro.
- Se ha dado una definición del generador de transformaciones gauge, que reproduce todos los resultados publicados hasta el momento.
- Se demostró que el álgebra de Kac-Moody continua (2.38) es independiente de la fijación del gauge.

- Se han adaptados los métodos descritos en [1] (para teorías de YM) a teorías de Chern-Simons obteniendo resultados bien conocidos reportados en la literatura.
- Se obtuvo la formula para la entropía de agujeros negros BTZ consistente con el resultado de Hawking-Bekenstein.

Apéndice A

Convenciones

Este apéndice describe las convenciones usadas en este trabajo. Se usará la métrica de Minkowski dada por $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1)$. Desde el capítulo 2 se ha usando la convención de que la métrica de Killing toma la forma $g_{ab} = R\eta_{ab}$, esto siempre es cierto si el grupo de Lie G es simple. Además si el grupo es semi-simple, es posible elegir las constantes de estructura completamente antisimétricas.

Los generadores del grupo $SL(2, \mathbb{R})$ (que es semi-simple) son:

$$T^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde estos satisfacen el álgebra de Lie:

$$[T^a, T^b] = \epsilon^{ab}{}_c T^c \quad (\text{A.2})$$

La convención de signos del símbolo ϵ es: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = 1$. La representación matricial de la Killing es:

$$g^{ab} = \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \eta^{ab} \quad (\text{A.3})$$

Resultado que coincide con el obtenido de la exigencia de que se obtenga un álgebra de Virasoro en (3.60).

Bibliografía

- [1] V. Parameswaran Nair. *Quantum Field Theory, A Modern Perspective*. Springer, New York, primera edicion edition, 2005. ISBN 0-387-21386-4.
- [2] Charles Nash. Differential topology and quantum field theory. 1991.
- [3] Mikio Nakahara. *Geometry, topology, and physics*. CRC Press, 2003.
- [4] Giuseppe Morandi. *The role of topology in classical and quantum physics*, volume 7. Springer, 1992.
- [5] Shiing-Shen Chern and James Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *The Annals of Mathematics*, 99(1):48–69, 1974.
- [6] Jorge Zanelli. Lecture notes on chern-simons (super-) gravities. (february 2008). *arXiv preprint hep-th/0502193*, 2005.
- [7] Jorge Zanelli and Luis Huerta. Introduction to chern-simons theories. *PoS IC-FI2010*, 4, 2010.
- [8] AP Balachandran, L Chandar, and B Sathiapalan. Chern-simons duality and the quantum hall effect. *International Journal of Modern Physics A*, 11(19):3587–3608, 1996.
- [9] Xiao-Gang Wen, Frank Wilczek, and A Zee. Chiral spin states and superconductivity. *Physical Review B*, 39(16):11413, 1989.
- [10] Frank Wilczek. *Fractional statistics and Anyon superconductivity*, volume 5. World Scientific, 1990.
- [11] Ana Achucarro and Paul K Townsend. A chern-simons action for three-dimensional anti-de sitter supergravity theories. *Physics Letters B*, 180(1):89–92, 1986.
- [12] Edward Witten. 2+ 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311(1):46–78, 1988.
- [13] Michiel Bos and VP Nair. U (1) chern-simons theory and $ijc/i_c = 1$ conformal blocks. *Physics Letters B*, 223(1):61–66, 1989.

- [14] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3):351–399, 1989.
- [15] Bruno Zumino, Wu Yong-Shi, and Anthony Zee. Chiral anomalies, higher dimensions, and differential geometry. *Nuclear Physics B*, 239(2):477–507, 1984.
- [16] Maximo Banados. Notes on black holes and three dimensional gravity. *arXiv preprint hep-th/9903244*, 1999.
- [17] S Carlip. Conformal field theory,(2+ 1)-dimensional gravity and the btz black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 22(12):R85, 2005.
- [18] Paul Adrien Maurice Dirac. *Quantum mechanics*. DoverPublications. com, 2001.
- [19] A Wipf. Hamilton’s formalism for systems with constraints. In *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, pages 22–58. Springer, 1994.
- [20] Ralph Blumenhagen and Erik Plauschinn. Introduction. In *Introduction to Conformal Field Theory*, pages 1–3. Springer, 2009.
- [21] Mathieu Pierre Di Francesco, Philippe and David Senechal. *Conformal field theory*. New York: Springer, 1997.
- [22] Boris A Dubrovin, Anatoly T Fomenko, and Sergei P Novikov. Modern geometry—methods and applications. part i, volume 93 of. *Graduate Texts in Mathematics*.
- [23] Maximo Banados. Global charges in chern-simons theory and the 2+ 1 black hole. *Physical Review D*, 52(10):5816, 1995.
- [24] Milutin Blagojevic. *Gravitation and gauge symmetries*. CRC Press, 2010.
- [25] Robert M Wald. General relativity the university of chicago press. *Chicago and London*, 1984.
- [26] Pierre Ramond and HM Fried. Field theory: a modern primer. *Physics Today*, 35: 57, 1982.
- [27] Marián Fecko. *Differential geometry and Lie groups for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [28] D Ida. No black-hole theorem in three-dimensional gravity. *Physical review letters*, 85(18):3758–3760, 2000.
- [29] M. Banados. Three-dimensional quantum geometry and black holes. *Pre-print*, Febrero 1999. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9901148v3>.

- [30] Steven Carlip. Statistical mechanics and black hole thermodynamics. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 57(1):8–12, 1997.
- [31] Thorsten Brotz, Miguel E Ortiz, et al. Boundary dynamics and the statistical mechanics of the 2+ 1-dimensional black hole. *Nuclear Physics B*, 545(1):340–370, 1999.
- [32] Daniel S Freed and Karen K Uhlenbeck. *Instantons and four-manifolds*, volume 1. Springer-Verlag New York, 1984.
- [33] Jürgen Fuchs. *Lectures on conformal field theory and Kac-Moody algebras*. Springer, 1997.
- [34] Emil J Martinec. Conformal field theory, geometry, and entropy. *arXiv preprint hep-th/9809021*, 1998.
- [35] Andrew Strominger and Cumrun Vafa. Microscopic origin of the bekenstein-hawking entropy. *Physics Letters B*, 379(1):99–104, 1996.
- [36] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [37] Steven Carlip and Steven Jonathan Carlip. *Quantum gravity in 2+ 1 dimensions*. Cambridge University Press, 2003.
- [38] Theodore Frankel. *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge University Press, 2004.
- [39] Joseph A Wolf. *Spaces of constant curvature*, volume 372. AMS Bookstore, 2011.
- [40] Øyvind Grøn Si gbjørn Hervik. *Einstein’s General Theory of Relativity*. Springer.
- [41] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849, 1992.
- [42] Norbert Straumann. *General relativity*. Springer, 2013.
- [43] P Kraus. Lectures on black holes and the ads (3). *CFT (2) correspondence arXiv: hep-th/ 0609074*, 2006.
- [44] M Henningson and K Skenderis. The holographic weyl anomaly. *jhep*, 7: Paper 23, 12 pp.(electronic), 199 8. *arXiv preprint hep-th/9806087*, 478.
- [45] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A stress tensor for anti-de sitter gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 208(2):413–428, 1999.
- [46] Maximo Banados and Miguel E Ortiz. The central charge in three-dimensional anti-de sitter space. *Classical and Quantum Gravity*, 16(6):1733, 1999.

- [47] HWJ Blöte, John L Cardy, and MP Nightingale. Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality. *Physical review letters*, 56(7):742, 1986.
- [48] John L Cardy. Operator content of two-dimensional conformally invariant theories. *Nuclear Physics B*, 270:186–204, 1986.
- [49] Robbert Dijkgraaf, Juan Maldacena, Gregory Moore, and Erik Verlinde. A black hole farey tail. *arXiv preprint hep-th/0005003*, 2000.
- [50] Danny Birmingham and Siddhartha Sen. Exact black hole entropy bound in conformal field theory. *Physical Review D*, 63(4):47501, 2001.
- [51] Terry Gannon. *Moonshine beyond the Monster: The bridge connecting algebra, modular forms and physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [52] Klaus Kirsten and Floyd L Williams. *A window into zeta and modular physics*, volume 57. Cambridge University Press, 2010.
- [53] Katrin Becker, Melanie. Becker, and John H Schwarz. *String theory and M-theory*. Cambridge University Press Cambridge, 2006.
- [54] Ralph Blumenhagen, Dieter Lüst, and Stefan Theisen. *Basic concepts of string theory*. Springer, 2012.
- [55] Steven Carlip. Logarithmic corrections to black hole entropy, from the cardy formula. *Classical and Quantum Gravity*, 17(20):4175, 2000.
- [56] Farhang Loran, MM Sheikh-Jabbari, and Massimiliano Vincon. Beyond logarithmic corrections to cardy formula. *Journal of High Energy Physics*, 2011(1):1–26, 2011.