

**ESTIMATIVOS  $L^p$  PARA OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES  
EN  $\mathbb{Z}^n$**

**CARLOS ANDRES RODRIGUEZ TORIJANO**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
SANTIAGO DE CALI**

**2011**

**ESTIMATIVOS  $L^p$  PARA OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES  
EN  $\mathbb{Z}^n$**

**CARLOS ANDRES RODRIGUEZ TORIJANO**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial  
para optar al título de magíster en ciencias-matemáticas.

**JULIO C. DELGADO VALENCIA Ph.D**

Director

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
SANTIAGO DE CALI**

**2011**

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
SANTIAGO DE CALI

CARLOS ANDRES RODRIGUEZ TORIJANO, 1988

ESTIMATIVOS  $L^p$  PARA OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES EN  
 $\mathbb{Z}^n$

**PALABRAS CLAVES:** Operadores pseudo–diferenciales, teoría de operadores, análisis de Fourier, interpolación compleja, teoría de la medida.

# Índice general

|                                                                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Operadores pseudo–diferenciales en <math>\mathbb{R}^n</math></b>                                            | <b>9</b>  |
| <b>2. Operadores pseudo–diferenciales en <math>\mathbb{Z}^n</math></b>                                            | <b>16</b> |
| 2.1. Análisis de Fourier en Grupos ALC y La Definición de Operador Pseudo-Diferencial en $\mathbb{Z}^n$ . . . . . | 17        |
| 2.2. Continuidad $L^p$ . . . . .                                                                                  | 19        |
| 2.3. Operadores tipo débil $(p, q)$ v.s. Continuidad . . . . .                                                    | 25        |
| 2.4. Condiciones necesarias para continuidad y la compacidad . . . . .                                            | 29        |
| 2.5. Expansión asintótica . . . . .                                                                               | 30        |
| <b>Bibliografía</b>                                                                                               | <b>41</b> |

## INTRODUCCIÓN

El estudio de los operadores pseudo—diferenciales tiene sus inicios en los años 60, punto en el cual se empieza a independizar de la investigación de los operadores integrales singulares. Hacia 1957 Alberto Calderón empezó a erigirse como uno de los más influyentes investigadores en esta línea con su prueba del teorema de unicidad local de la solución del problema de Cauchy en ecuaciones diferenciales parciales (PDE). Solomon Grigorievich Mikhlin sería quien en 1936 introduce un concepto que a la larga será el de símbolo de un operador. Alberto Calderón y Antoni Szczepan Zygmund desarrollan la teoría de los operadores de *Calderón – Zygmund*, tomando también parte este último de las primeras escenas de la teoría. En 1963, Michael Atiyah e Isadore Singer presentaron su célebre teorema del índice, pieza clave en la K—teoría, en cuya prueba usan operadores que hoy en día son reconocidos como operadores pseudo—diferenciales. En 1963, Peter Lax propuso algunas representaciones integrales usando las series de Jean Baptiste Joseph Fourier. Poco después Joseph Kohn y Louis Nirenberg presentaron una definición de operadores pseudo—diferenciales mostrando que estos formaban un álgebra y sus resultados fueron aplicados por Peter Lax y Kurt Otto Friedrichs en problemas con frontera en PDE. Estudios relacionados fueron llevados a cabo por Agranovich, Bokobza, Kumano-go, Schwartz, Seeley, y Unterberger.

Lars Hörmander dió un fundamento definitivo a la teoría moderna en 1965, conllevando a un vasto rango de resultados y métodos. Los esfuerzos de Kohn, Nirenberg, y Hörmander dieron nacimiento al cálculo simbólico, el cual es el corazón de la teoría. Desde los años 60 los operadores pseudo—diferenciales han sido ampliamente aplicados en la investigación de las ecuaciones diferenciales parciales proporcionando una mejor aproximación a conceptos como los espacios de Sobolev, soluciones fundamentales, y la teoría del índice de los operadores elípticos.

Existe una teoría general de operadores pseudo—diferenciales sobre variedades diferenciales, el caso particular de los grupos de Lie resulta ser de interés debido a la representación global de los símbolos gracias a la existencia de la transformada de Fourier. La teoría de los operadores pseudo—diferenciales sobre grupos de Lie se ha desarrollado en las últimas tres décadas. El estudio de estos operadores sobre grupos de Lie compactos comenzó de manera sistemática en la última década. Recientemente Ruzhansky y Turunen en [7] y [8]

desarrollaron un método de periodización de problemas inicialmente propuestos en  $\mathbb{R}^n$ , por medio del cual la teoría de los operadores pseudo–diferenciales en el toro puede ser aplicada.

En 2009 aparece un artículo sobre los operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{Z}$ . En este artículo (ver [3]), su autora Shahla Molahajloo muestra algunos estimativos  $L^p$  para el caso de estos operadores. En 2011 el profesor M.W. Wong publica su libro Fourier Discrete Analysis [12] en el cual hace referencia a las teorías de señales y wavelets como motivaciones prácticas para desarrollar el estudio de los operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{Z}$ . Ese mismo año el autor presenta su artículo titulado  **$L^p$ –Estimates for Pseudo–Differential Operators on  $\mathbb{Z}^n$**  (ver [5]), sobre el cual está inspirada la segunda parte de esta tesis.

Un operador pseudo–diferencial en  $\mathbb{R}^n$  es un operador definido por

$$(T_p\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

donde  $p$  es una función compleja medible en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Siempre que  $T_p$  esté bien definido para todo  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  diremos que  $p$  es el símbolo del operador pseudo–diferencial  $T_p$ . El estudio de los símbolos permite obtener información valiosa acerca de sus correspondientes operadores pseudo–diferenciales y los estimativos  $L^p$  son un ejemplo de la eficacia que tiene este método de análisis de operadores. Un estimativo  $L^p$  es una condición suficiente sobre un símbolo  $p$  que asegura la continuidad del operador  $T_p$  de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Uno de los estimativos  $L^p$  más elegantes en la teoría de estos operadores en  $\mathbb{R}^n$  es el siguiente estimativo  $L^2$ .

**Teorema**[1.0.8] Sea  $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ . Si  $p$  satisface que

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n$ , donde  $\langle \xi \rangle = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$  es la notación japonesa introducida en [2]. Entonces  $T_p : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  es continuo.

En esta tesis nos proponemos estudiar los operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$ , hallar estimativos  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  diferentes a los expuestos en [3] y desarrollar un cálculo simbólico para operadores pseudo–diferenciales sobre  $\mathbb{Z}^n$ . Para cada función medible  $\sigma : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f \in L^1(\mathbb{Z}^n)$  definimos el operador  $T_\sigma$  como

$$(T_\sigma f)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f)(\theta) e^{ix\theta} d\mu(\theta),$$

donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue,  $\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \lambda$  y  $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f)(\theta) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} f(y) e^{-iy\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{T}^n$  es la transformada de Fourier de la función  $f$ . La función  $\sigma$  es llamada el símbolo del operador pseudo-diferencial en  $\mathbb{Z}^n$   $T_\sigma$ .

En el primer capítulo de la tesis exponemos los teoremas principales del análisis de Fourier en  $\mathbb{R}^n$  concernientes con el desarrollo de la teoría de operadores pseudo-diferenciales sobre  $\mathbb{R}^n$ . Enunciamos los resultados más importantes de esta teoría y demostramos algunos de ellos con el objetivo de mostrar al lector el espíritu de la misma. En el segundo capítulo damos un vistazo al análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos, luego usamos teoremas de interpolación compleja y algunos resultados de la teoría de la medida para obtener estimativos  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . La compacidad y la continuidad débil de estos operadores también es tratada. Hacia la parte final definimos clases adecuadas de símbolos que permiten tener cálculo simbólico.

En [5] obtenemos, entre otros, los siguientes resultados consignados en esta tesis:

1. Condiciones suficientes sobre el símbolo  $\sigma$  de tal forma que  $T_\sigma$  es continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ .
2. Condiciones suficientes sobre el símbolo  $\sigma$  de tal forma que  $T_\sigma$  es continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^q(\mathbb{Z}^n)$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
3. Demostramos que todo operador lineal de tipo  $(p, q)$ -débil, donde  $p < q$ , es continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ .
4. Demostramos que todo operador lineal de tipo  $(p, r)$ -débil es continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^s(\mathbb{Z}^n)$  donde  $s > r + 1$ .

Dos de los resultados más distintivos de la tesis son los teoremas 2.3.1 y 2.3.2 con los cuales se evidencia el contraste entre la teoría de operadores lineales en  $\mathbb{R}^n$  y en  $\mathbb{Z}^n$ . El aspecto fundamental que produce estas diferencias es el carácter discreto del grupo  $\mathbb{Z}^n$ . Esto tiene importantes implicaciones en términos de los cálculos efectuados en las pruebas de los teoremas y en el hecho de que su grupo dual es compacto. En el punto cúlmen de la tesis definimos una versión discreta del espacio de Schwartz, y un conjunto de clases de símbolos  $\Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$  los cuales nos permite establecer el teorema de expansión asintótica 2.5.3 para el caso de los operadores pseudo-diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$ , corazón del cálculo simbólico.

## RESUMEN

En esta tesis desarrollamos los fundamentos necesarios para tener un cálculo simbólico discreto y hallamos estimativos  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . Se usan teoremas de interpolación compleja y algunos resultados de la teoría de la medida para obtener dichos estimativos  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . La compacidad de estos operadores también es tratada. El estudio de la continuidad tipo- $(p, q)$  de los operadores lineales en  $\mathbb{Z}^n$  enmarca uno de los resultados más relevantes de la investigación.

En la tesis se demuestra una gran variedad de resultados de entre los cuales los teoremas principales son los teoremas 2.3.2 y 2.5.3 pues dan una muestra de que la teoría de los operadores pseudo-diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$  tiene su propia identidad y que está lejos de ser tan sólo una adaptación de la teoría del caso real.

## Capítulo 1

# Operadores pseudo–diferenciales en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo presentaremos los resultados básicos en la dirección de los estimativos  $L^p$  para los operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{R}^n$  con el objetivo de dar al lector una breve introducción al tema. Un estudio detallado de la teoría de los operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{R}^n$  puede iniciarse con la lectura de [8], [9], y [11]. El espacio  $\mathbb{R}^n$  no es el único donde puede hacerse teoría de operadores pseudo–diferenciales, más aún, es posible extender esta teoría a variedades diferenciales compactas reales, o más generalmente a grupos compactos de Lie. El texto de los profesores Ruzhansky y Turunen [8] puede consultarse para conocer la teoría sobre este tipo de operadores.

El análisis de Fourier será nuestro punto de partida puesto que el concepto de operador pseudo–diferencial está inspirado en la representación en forma integral de funciones en el espacio de Schwartz por medio de la transformada de Fourier.

**Definición 1.0.1.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  una función integrable. La transformada de Fourier de  $f$  se define como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

El operador transformada de Fourier tiene las siguientes propiedades generales:

- $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f + \beta \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} g$  donde  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

- $\|\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ .
- $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f(\xi) = 0$  (Rieman – Lebesgue.)
- Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , y  $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$  es el producto convolución de las funciones  $f$  y  $g$ , entonces  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} g(\xi)$ .

Para un estudio detallado del análisis de Fourier real ver [10].

**Definición 1.0.2.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ . Llamamos *multiíndice  $n$ -dimensional* a cada uno de los elementos del conjunto  $\mathbb{N}^n$ . Sean  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  multiíndices,  $f$  una función escalar sobre  $\mathbb{R}^n$ , y  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .
- $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .
- $\partial^{\alpha} f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x)$
- Decimos que  $\alpha \leq \beta$  si y sólo si  $\alpha_i \leq \beta_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definición 1.0.3.** El espacio de **Schwartz**  $S(\mathbb{R}^n)$  es el conjunto de todas la funciones  $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  tales que para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$  se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} \partial^{\beta} f(x)| = p_{\alpha, \beta} < \infty.$$

El espacio de Schwartz posee interesantes propiedades topológicas que establecemos con los siguientes dos teoremas:

**Teorema 1.0.1.** Sean  $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  una función, y  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ . Entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} \partial^{\beta} f(x)| = p_{\alpha, \beta}(f)$$

es una seminorma. Más aún, la topología inducida por el conjunto de seminormas

$$\{p_{\alpha, \beta} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n\}$$

es metrizable y completa, y por tanto  $S(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Fréchet.

*Demostración.* Para una prueba completa ver [4]. A continuación damos un esbozo de la demostración. Sean  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  una función, y  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ . Es claro que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = p_{\alpha, \beta}(f)$$

es una seminorma. Ahora, puesto que el conjunto de seminormas

$$\{p_{\alpha, \beta} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n\}$$

es numerable se concluye que  $S(\mathbb{R}^n)$  es un espacio multinormado por una cantidad numerable de seminormas y por lo tanto es un espacio de Fréchet.  $\square$

**Teorema 1.0.2.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $S(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Fréchet denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .*

*Demostración.* Es suficiente con probar que el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Para esto denotemos por  $\|\cdot\|$  la norma Euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ , y consideremos para cada  $\epsilon > 0$  la función definida por:  $k(x) = \exp(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - \|x\|^2})$  si  $\|x\| < \epsilon$  y  $k(x) = 0$  si  $\|x\| \geq \epsilon$ . Tomemos la función infinitamente diferenciable y con soporte compacto

$$\psi_\epsilon(x) = \frac{k(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx}.$$

Ahora, para  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  una función continua con soporte compacto y  $0 < \epsilon < 1$ , sea

$$f_\epsilon(x) = f * \psi_\epsilon.$$

Esta función es infinitamente diferenciable y  $\text{supp}(f_\epsilon) \subseteq B^c$  donde

$$B = \{x : \forall y \in \text{supp}(f) \|x - y\| \geq 2\}.$$

Después de un cambio de variable adecuado se tiene que  $f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z) \psi_\epsilon(z) dz$  y por consiguiente

$$f(x) - f_\epsilon(x) = \int_{\|z\| \leq \epsilon} (f(x) - f(x - z)) \psi_\epsilon(z) dz.$$

Puesto que  $f$  es uniformemente continua se tiene que para cada  $r > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| = \left| \int_{\|z\| \leq \epsilon} (f(x) - f(x - z)) \psi_\epsilon(z) dz \right| \leq r \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon(z) dz = r$$

siempre y cuando  $\epsilon < \delta$ . Esto dice que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = f(x)$  uniformemente. Para  $\epsilon < \delta$  se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_\epsilon(x)|^p dx = \int_{B^c} |f(x) - f_\epsilon(x)|^p \leq Mr^p$$

para algún  $M > 0$ . Esto último dice que  $f_\epsilon \rightarrow f$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , y por tanto  $C_c(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Por último,  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $C_c(\mathbb{R}^n)$  y esto implica que es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

El espacio de Schwartz es un espacio estable bajo la acción de la transformada de Fourier. El siguiente teorema expresa formalmente esta afirmación.

**Teorema 1.0.3.** *La transformada de Fourier aplica el espacio de Schwartz en él mismo y su inversa está dada por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$ .*

Para una demostración ver [4] y [10].

A continuación motivamos la definición de operador pseudo-diferencial.

Un operador diferencial lineal tiene la forma

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

donde los coeficientes  $a_\alpha$  son funciones definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha$  es un multi-índice. Sea  $\phi$  una función en el espacio de Schwartz, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (P(x, D)\phi)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha \phi)(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \phi)(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\xi^\alpha \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \phi(x)) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \xi^\alpha \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} P(x, \xi) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

donde  $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$  es lo que se denomina el símbolo del operador diferencial. Inspirados en esta interesante observación, llegamos a la definición de operador pseudo-diferencial.

**Definición 1.0.4.** Sea  $p$  una función medible en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  tal que el operador

$$(T_p \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} p(x, \xi) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) d\xi$$

está bien definido sobre  $S(\mathbb{R}^n)$ .  $T_p$  es el operador pseudo-diferencial definido por el símbolo  $p$ .

Se quiere determinar que condiciones deben imponerse sobre la función  $p$  para tener una “buena” teoría de los operadores correspondientes. En particular se desea que las clases a definirse contengan los símbolos necesarios para el estudio de la invertibilidad de ciertos operadores diferenciales. Los estimativos  $L^p$  para los operadores pseudo-diferenciales juegan un papel preponderante en el estudio de la regularidad de las soluciones de una ecuación diferencial.

**Definición 1.0.5** (Clases de Hörmander). Sean  $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ , y  $m \in \mathbb{R}$ . Entonces la clase de Hörmander  $S_{\rho, \delta}^m$  es el conjunto de todas las funciones  $p(x, \xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C^\infty$  que satisfacen

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, m} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n$ , donde  $\langle \xi \rangle = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$  es la notación japonesa introducida en [2].

En adelante, al escribir  $P(x, D) \in OpS_{\rho, \delta}^m$  nos referiremos al operador pseudo-diferencial definido por un símbolo  $p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$ , y diremos que el símbolo y el operador correspondiente son de orden  $m$ . Enunciaremos los teoremas básicos de la teoría de operadores pseudo-diferenciales cuyas pruebas pueden encontrarse en [8]. La primera virtud de la que gozan las clases de símbolos  $S_{\rho, \delta}^m$  es que sus correspondientes operadores tienen a  $S(\mathbb{R}^n)$  como espacio invariante, lo cual se establece en el siguiente teorema. Para una prueba ver [8].

**Teorema 1.0.4.** Sean  $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ ,  $(\delta < 1)$  y  $m \in \mathbb{R}$ . Si  $p \in S_{\rho, \delta}^m$  entonces  $T_p$  aplica  $S(\mathbb{R}^n)$  en  $S(\mathbb{R}^n)$ .

El teorema 1.0.4 nos permite hablar de composición de operadores pseudo–diferenciales con símbolo en  $S_{\rho,\delta}^m$ . La composición de estos operadores resulta ser de nuevo un operador pseudo–diferencial. El enunciado formal de esta aseveración es uno de los teoremas más importantes, el teorema de la expansión asintótica.

**Teorema 1.0.5** (Expansión Asintótica). *Sean  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ ,  $p_1 \in S_{\rho,\delta}^{m_1}$  y  $p_2 \in S_{\rho,\delta}^{m_2}$  dados. Entonces existe un símbolo  $C \in S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2}$  tal que  $T_{p_1} \circ T_{p_2} = T_C$ . Más aún,*

$$C(x, \xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha p_1(x, \xi) D_x^\alpha p_2(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N}$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Esto último se escribe como

$$C(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha p_1(x, \xi) D_x^\alpha p_2(x, \xi),$$

es decir,  $C$  es asintóticamente igual a la expansión del lado derecho.

El problema del operador adjunto de un operador  $P(x, D) \in OpS_{\rho,\delta}^m$  también es abordado y se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1.0.6** (Operador Adjunto). *Sea  $p \in S_{\rho,\delta}^m$  con  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ . Entonces existe un símbolo  $p^* \in S_{\rho,\delta}^m$  tal que  $(P(x, D))^* = P^*(x, D)$ . Más aún se tiene la siguiente expansión asintótica*

$$p^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha p(x, \xi)$$

es decir,

$$p^*(x, \xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha p(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^{m-(\rho-\delta)N}$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ .

La búsqueda de los estimativos  $L^p$ , es decir, de condiciones suficientes a imponerse sobre el símbolo de tal forma que su correspondiente operador sea continuo de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  tiene como uno de sus frutos el siguiente resultado que impone condiciones sobre el orden del símbolo.

**Teorema 1.0.7.** Sean  $Q(x, D) \in OpS_{\rho, \delta}^m$ ,  $\rho > 0$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  y  $m < -n + \rho(n - 1)$ . Entonces

$$Q(x, D) : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

es continuo.

Uno de los teoremas mas elegantes es el estimativo  $L^2$ . Presentaremos la prueba de Hörmander con el objetivo de mostrar al lector un rasgo de la belleza y el espíritu del cálculo pseudo-diferencial.

**Teorema 1.0.8.** Sean  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$  y  $P(x, D) \in OpS_{\rho, \delta}^0$ . Entonces

$$P(x, D) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

es continuo.

*Demostración.* Sean  $P(x, D) \in OpS_{\rho, \delta}^0$  y  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ . Entonces  $(P(x, D))^* \in OpS_{\rho, \delta}^0$  por el teorema 1.0.6, y  $(P(x, D))^*P(x, D) \in OpS_{\rho, \delta}^0$  con símbolo principal  $|p(x, \xi)|^2$  en virtud del teorema 1.0.5. Por lo tanto existe una constante  $C$  tal que  $|p(x, \xi)|^2 < C$ . La función  $q(x, \xi) = \sqrt{C - p(x, \xi)}$  está bien definida y es de orden cero. Sea  $Q(x, D)$  su operador correspondiente. Entonces

$$Q^*Q = C - P^*P + R$$

donde  $R \in OpS_{\rho, \delta}^{-1(\rho - \delta)}$  por 1.0.5. Ahora,

$$\begin{aligned} \|Q(x, D)f\|_{L^2}^2 &= \langle Q^*Q(x, D)f, f \rangle \\ &= C\|f\|_{L^2}^2 - \|P(x, D)f\|_{L^2}^2 + \langle R(x, D)f, f \rangle \leq C\|f\|_{L^2}^2 + \langle R(x, D)f, f \rangle, \end{aligned}$$

así que al probar la continuidad  $L^2$  del operador  $R(x, D)$  habremos terminado la prueba. Se tiene que  $\|R(x, D)f\|_{L^2}^2 \leq M\|R^*R(x, D)f\|_{L^2}^2\|f\|_{L^2}^2$  donde  $R^*R(x, D) \in OpS_{\rho, \delta}^{-2(\rho - \delta)}$ . De manera inductiva puede concluirse que para algún operador  $J$  de orden menor que  $-n + \rho(n - 1)$  se tiene que

$$\|R(x, D)f\|_{L^2}^2 \leq M\|J(x, D)f\|_{L^2}^2.$$

El teorema 1.0.7 nos permite entonces terminar la prueba. □

## Capítulo 2

# Operadores pseudo–diferenciales en $\mathbb{Z}^n$

El concepto de operador *pseudo – diferencial* en  $\mathbb{Z}$  fué introducido en 2009 por Shahla Molahajloo como parte de su tesis doctoral bajo la dirección del profesor Man Wah Wong en un artículo donde muestra algunos estimativos  $L^p$ , ver [3]. En 2011 el profesor M.W. Wong publica su libro Fourier Discrete Analysis [12] en el cual sugiere las teorías de señales y wavelets como motivos prácticos para desarrollar el estudio de los operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$ . Pues bien, en este capítulo desarrollaremos los aspectos básicos de la naciente teoría de operadores pseudo–diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$ . La primera parte, cuyos teoremas principales son los teoremas 2.3.1 y 2.3.2, está basada en el artículo  *$L^p$  – Estimates for Pseudo – Differential Operators on  $\mathbb{Z}^n$*  publicado por el autor en 2011. Primero introduciremos el análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos, luego usaremos teoremas de interpolación compleja y algunos resultados de la teoría de la medida para obtener estimativos  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . Estudiaremos la relación existente entre los operadores de tipo  $(p, q)$ –débil y los operadores continuos. Hacia la parte final definiremos clases adecuadas de símbolos que permiten hacer el cálculo simbólico fundamentado en el teorema 2.5.3. El problema de hallar el operador adjunto de uno de nuestros operadores es resuelto al final del capítulo.

## 2.1. Análisis de Fourier en Grupos ALC y La Definición de Operador Pseudo-Diferencial en $\mathbb{Z}^n$

Iniciamos por precisar el concepto de transformada de Fourier para el caso de los grupos abelianos localmente compactos y enunciamos los teoremas de esta teoría que nos serán de utilidad. Enunciaremos algunos de los pilares fundamentales del análisis de Fourier en grupos. Para un estudio detallado se puede consultar [6].

**Definición 2.1.1.** Sea  $G$  un grupo abeliano localmente compacto (ALC), es decir, dotado de una topología localmente compacta que hace que las operaciones suma  $(x, y) \rightarrow x + y$  e inversión  $x \rightarrow x^{-1}$  sean continuas. Una función compleja  $\gamma$  es llamada un caracter si satisface las condiciones:

1.  $|\gamma(x)| = 1$  para todo  $x \in G$ .
2.  $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$  para todo  $x, y \in G$ .

El grupo dual de  $G$  es el conjunto  $\Gamma$  de los caracteres continuos dotado de la operación  $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$ ,  $x \in G$ ;  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ , y con la topología inducida por la base de abiertos de la forma

$$N(K, r) = \{\gamma : \gamma(x) \in U_r \forall x \in K\}$$

donde  $r > 0$ ,  $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |1 - z| < r\}$  y  $K \subset G$  compacto. Esta topología resulta ser la topología compacto-abierta de la convergencia uniforme sobre compactos.

**Teorema 2.1.1.** El grupo dual de la suma directa de una familia finita de grupos ALC es la suma directa de los correspondientes grupos duales.

**Teorema 2.1.2.** El grupo dual de  $\mathbb{R}$  es  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Supóngase que  $\gamma \in \Gamma$  es un elemento del grupo dual de  $\mathbb{R}$ . Entonces existe una función continua  $f$  tal que  $(x, \gamma) = e^{if(x)}$  y para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene que  $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2\pi k(x, y)$  donde  $k(x, y)$  es una función continua cuya rango está contenido en el conjunto de los números enteros. Es claro que  $k$  es constante y que  $f(0) = nf(0) + k(0, 0)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $f(0) = 0$  y  $K \equiv 0$ . Ahora,  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Esto puede extenderse para  $\lambda \in \mathbb{Q}$  y en virtud de la continuidad de  $f$  podemos concluir que

es una función lineal definida en todo  $\mathbb{R}$  y que por tanto existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = mx$ . Se evidencia que el grupo dual de  $\mathbb{R}$  puede ser identificado con  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $\alpha > 0$ . Entonces el grupo dual de  $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha z : z \in \mathbb{Z}\}$  es  $\frac{1}{\alpha}\mathbb{T} = [\frac{-\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}]$ . Identificamos  $-\pi/\alpha \approx \pi/\alpha$ .*

*Demostración.* Sea  $\gamma$  un caracter en el dual de  $\alpha\mathbb{Z}$ . Entonces, para cada  $\alpha z \in \alpha\mathbb{Z}$  se tiene que  $\gamma(\alpha z) = [\gamma(\alpha)]^z = [e^{i\alpha\theta}]^z$ . Es decir que el caracter está determinado por su valor en  $\alpha$ . Puesto que el conjunto de los diferentes valores complejos de  $\gamma(\alpha)$  es el conjunto

$$\{e^{i\alpha\theta} : \theta \in [\frac{-\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}]\}.$$

Se concluye que el dual de  $\alpha\mathbb{Z}$  puede ser identificado con  $\frac{1}{\alpha}\mathbb{T} = [\frac{-\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}]$ . Identificamos  $-\pi/\alpha \approx \pi/\alpha$ .  $\square$

**Corolario 2.1.1.** *El grupo dual de  $\mathbb{R}^n$  es  $\mathbb{R}^n$ , y el grupo dual de  $\mathbb{Z}^n$  es  $\mathbb{T}^n$ .*

**Teorema 2.1.4.** *Sobre todo grupo abeliano localmente compacto (ALC) existe una única medida regular no negativa invariante bajo traslaciones y no nula. Esta medida es llamada medida de Haar.*

Procedemos a establecer la definición de transformada de Fourier en grupos.

**Definición 2.1.2.** *Sea  $\mu$  la medida de Haar en el grupo ALC  $G$ . Denotamos por  $L^1(G)$  al conjunto de funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $\int_G |f| d\mu < \infty$ . Acordamos escribir  $(x, \gamma) = \gamma(x)$  para  $x \in G$  y  $\gamma \in \Gamma$ . Para cada  $f \in L^1(G)$  la transformada de Fourier de  $f$  es la función definida por*

$$\mathcal{F}_G f(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma) dx \quad \gamma \in \Gamma.$$

De acuerdo a esta definición y al teorema 2.1.3, la transformada de Fourier de una función  $f \in L^1(\mathbb{Z}^n)$  se calcula como

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f)(\theta) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} f(y) e^{-iy\theta}, \quad \theta \in \mathbb{T}^n.$$

En [6] se prueba que el teorema de inversión de Fourier y el teorema de Plancherel también son válidos para el caso de los grupos  $\mathbb{Z}^n$  y  $\mathbb{T}^n$ . De ahora en adelante denotaremos la medida de Haar sobre el toro  $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$  por  $\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \lambda$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue.

**Definición 2.1.3.** *El espacio de Schwartz  $A(\mathbb{Z}^n)$  es el conjunto de funciones  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tales que para todo  $M \geq 0$  se tiene que  $\langle x \rangle^M f \in L^1(\mathbb{Z}^n)$  donde  $\langle x \rangle = (1 + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}$  para cada  $x \in \mathbb{Z}^n$ , y  $\|\cdot\|$  representa la usual norma Euclidian. Es decir que*

$$A(\mathbb{Z}^n) = \bigcap_{0 \leq M} \langle x \rangle^{-M} L^1(\mathbb{Z}^n).$$

**Definición 2.1.4.** *Sea  $\sigma : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible y consideremos  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ . Se define el operador  $T_\sigma$  como*

$$(T_\sigma f)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f)(\theta) e^{ix\theta} d\mu(\theta)$$

*La función  $\sigma$  es llamada el símbolo del operador pseudo-diferencial.*

La definición del espacio de funciones  $A(\mathbb{Z}^n)$  será de gran utilidad cuando abordemos el problema del cálculo simbólico para los operadores pseudo-diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$ . Se mostrará en secciones posteriores que este espacio jugará un papel análogo al espacio de Schwartz en  $\mathbb{R}^n$ . Entre otras cosas, el espacio  $A(\mathbb{Z}^n)$  es denso en  $L^1(\mathbb{Z}^n)$  puesto que contiene todas las funciones de soporte compacto, o finito este caso. Puede verse que si  $g \in S(\mathbb{R}^n)$  entonces la función definida en  $\mathbb{Z}^n$  por  $f = g|_{\mathbb{Z}^n}$  pertenece a  $A(\mathbb{Z}^n)$ .

## 2.2. Continuidad $L^p$

En esta sección estudiaremos condiciones suficientes para la continuidad  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  de estos operadores, es decir, estudiaremos los correspondientes estimativos  $L^p$ . Iniciamos con un lema que muestra los operadores pseudo-diferenciales en  $\mathbb{Z}^n$  como operadores integrales, lo cual será utilizado de forma permanente en este capítulo.

**Lema 2.2.1.** *Sean  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$  y  $\sigma : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\sigma(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{T}^n)$  para cada  $x \in \mathbb{Z}^n$  fijo. Entonces*

$$T_\sigma f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y).$$

*Demostración.* Sea  $\sigma$  una función definida como en el lema. Si  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$  entonces

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\sigma(x, \theta)| |f(y)| d\mu(\theta) < \infty.$$

Los teoremas de Tonelli y Fubini nos permiten aseverar que

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \left( \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} f(y) \right) d\mu(\theta) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y).$$

□

El siguiente resultado establece condiciones suficientes sobre el núcleo de un operador lineal definido sobre un subespacio denso de  $L^1(\mathbb{Z}^n)$  de tal forma que el operador pueda verse como un operador pseudo-diferencial.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $T$  un operador lineal definido sobre un subespacio denso de  $L^1(\mathbb{Z}^n)$  y con valores en el espacio  $B = \{f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Si existe una función  $K : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para cada  $x \in \mathbb{Z}^n$  se tiene que*

$$(K(x, y))_{y \in \mathbb{Z}^n} \in L^1(\mathbb{Z}^n) \text{ y } Tf(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} K(x, y) f(y),$$

*entonces  $T$  es un operador pseudo-diferencial.*

*Demostración.* Sea  $T$  un operador lineal que satisface las hipótesis del teorema. Definamos

$$\sigma(x, \theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} K(x, z) e^{i(z-x)\theta}. \text{ En virtud del lema 2.2.1 se tiene que}$$

$$\begin{aligned} T_\sigma f(x) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} K(x, z) e^{i(z-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y). \end{aligned}$$

Si aplicamos el teorema de Tonelli y las hipótesis sobre el núcleo, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} T_\sigma f(x) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} K(x, z) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(z-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} K(x, y) f(y) = Tf(x). \end{aligned}$$

□

**Observación 2.2.1.** *En particular, si un operador lineal tiene núcleo  $K \in L^1(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ , entonces es un operador pseudo-diferencial. El teorema 2.2.1 muestra que la clase de operadores pseudo-diferenciales es amplia dentro de la clase de operadores lineales en  $\mathbb{Z}^n$ .*

Enunciamos el teorema de interpolación compleja de *Riesz–Thorin* que nos será de utilidad para probar algunos estimativos  $L^p$ .

**Teorema 2.2.2** (Riesz-Thorin). *Sean  $X, Y$  espacios de medida con medidas  $\sigma$ -finitas. Sean  $p_j, q_j, j = 0, 1$ , exponentes en el intervalo  $[1, \infty]$  tales que  $p_0 < p_1$ . Sea  $T$  un operador lineal definido, por lo menos, de un subconjunto de funciones  $L^1(X)$  en el conjunto de funciones medibles sobre  $Y$  y que satisface*

$$\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq M_j \|f\|_{L^{p_j}}.$$

*Si definimos  $p_t$  y  $q_t$  del tal forma que*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$$

$$y$$

$$\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

*Entonces  $T$  puede extenderse a un operador continuo de  $L^{p_t}$  en  $L^{q_t}$ , más aún,*

$$\|Tf\|_{L^{q_t}} \leq M_t \|f\|_{L^{p_t}}$$

*donde  $M_t \leq M_0^{1-t} M_1^t$ .*

**Lema 2.2.2** (Schur). *Sean  $X, Y$  espacios de medida con medidas  $\sigma$ -finitas, y  $K : M \times N \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible tal que*

$$0 < \sup_x \int_Y |K(x, y)| dy < \infty \text{ y } 0 < \sup_y \int_X |K(x, y)| dx < \infty.$$

*Si  $T$  es el operador lineal definido por  $Tf(y) = \int_X K(x, y)f(x)dx$  entonces  $T$  se extiende a un operador continuo de  $L^p(X)$  en  $L^p(X)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*Demostración.* Sean  $X, Y$  espacios de medida,  $K : M \times N \rightarrow \mathbb{C}$ , y  $T$  como en el enunciado. Probaremos que  $T$  es continuo de  $L^1(Y)$  en  $L^1(Y)$ , y de  $L^\infty(Y)$  en  $L^\infty(Y)$ . En primer lugar, para  $f \in L^\infty(Y)$  se tiene que

$$|Tf(y)| \leq \int_X |K(x, y)| dx \sup_x |f(x)| \leq M \|f\|_{L^\infty(Y)},$$

para algún  $M > 0$ , esto dice que  $T$  es continuo de  $L^\infty(Y)$  en  $L^\infty(Y)$ . De otro lado, para  $f \in L^1(Y)$  se tiene que

$$\int_Y |Tf(y)| dy \leq \int_Y \left( \int_X |K(x, y)| |f(x)| dx \right) dy,$$

usando el teorema de Tonelli podemos escribir

$$\int_Y |Tf(y)| dy \leq \int_X |f(x)| \left( \int_Y |K(x, y)| dy \right) dx \leq C \|f\|_1,$$

para algún  $C > 0$ . En virtud del teorema de Riesz–Thorin concluimos que  $T$  se extiende a un operador continuo de  $L^p(X)$  en  $L^p(X)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .  $\square$

**Teorema 2.2.3** ([5] Rodriguez C.A.). *Sea  $\sigma \in L^2(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n)$ . Si  $1 \leq p \leq 2$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces*

$$T_\sigma : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{Z}^n)$$

*es un operador continuo.*

*Demostración.* Sea  $\sigma \in L^2(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n)$ . Usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}^n} |\sigma(x, \theta)| d\mu(\theta) \leq \left( \int_{\mathbb{T}^n} |\sigma(x, \theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} = M$$

para algún  $M > 0$ . Lo que implica que

$$T_\sigma : L^1(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{Z}^n)$$

es continuo. En efecto, si  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$  entonces

$$|T_\sigma f(x)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |\sigma(x, \theta)| |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f(\theta)| d\mu(\theta) \leq M \|f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)}.$$

De otro lado, tenemos que

$$|T_\sigma f(x)|^2 \leq \left( \int_{\mathbb{T}^n} |\sigma(x, \theta)|^2 d\mu(\theta) \right) \left( \int_{\mathbb{T}^n} |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)$$

en virtud de la desigualdad de Hölder. La identidad de Plancherel nos permite concluir que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |T_\sigma f(x)|^2 \leq \|\sigma\|_{L^2(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n)}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{Z}^n)}^2.$$

Esto demuestra que  $T_\sigma : L^2(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{Z}^n)$  es continuo. Ahora, si  $1 \leq p \leq 2$ , y  $q$  satisface que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces  $T_\sigma : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{Z}^n)$  es continuo como consecuencia del teorema de *Riesz – Thorin*.  $\square$

Con el objetivo de enunciar el siguiente teorema introducimos un poco de notación. Sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$  dado. Denotamos  $\mathbb{Z}_0^n = \{x \in \mathbb{Z}^n : \prod_i x_i \neq 0\}$  y  $D_{(x,y)} = \{i : x_i \neq y_i\}$ . Definimos el multiíndice  $\gamma_{(x,y)} = (\gamma_{(x,y)}^1, \dots, \gamma_{(x,y)}^n)$  donde la  $i$  – *componente* está definida por

$$\gamma_{(x,y)}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in D_{(x,y)}^C \\ 2 & \text{si } i \in D_{(x,y)} \end{cases}.$$

Definimos  $\mathfrak{M} = \{\gamma_{(x,y)} : (x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n\}$ .

**Definición 2.2.1.** Sea  $\sigma$  un símbolo, y  $\alpha$  un multiíndice. Diremos que  $\partial^\alpha \sigma$  existe si

$$\frac{\partial^{r_j}}{\partial \theta_j} \sigma(x, (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \pi, \dots, \beta_n)) = \frac{\partial^{r_j}}{\partial \theta_j} \sigma(x, (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, -\pi, \dots, \beta_n))$$

con  $r_j \leq \alpha_j$ ,  $|\beta_m| \leq \pi$ ,  $x \in \mathbb{Z}^n$  y  $1 \leq j \leq n$ .

**Teorema 2.2.4** ([5] Rodriguez C.A.). Sea  $\sigma$  un símbolo tal que  $\partial^\gamma \sigma(x, \theta)$  existe para todo multi índice  $\gamma \in \mathfrak{M}$  y todo  $x \in \mathbb{Z}^n$ .  $T_\sigma$  es un operador acotado de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ , si existen constantes  $M_1 \geq 0$ ,  $M_2 < 1$ , y  $M_3 \geq 0$  tales que las siguientes condiciones se satisfacen:

$$i. \quad |\int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) d\mu(\theta)| \leq M_1, \text{ para todo } x \in \mathbb{Z}^n.$$

$$ii. \quad |\int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma_{(x,x-y)}} \sigma(x, \theta) e^{-iy\theta} d\mu(\theta)| \leq C \prod_{i \in D_{(y,0)}} |y_i|^{M_2} \text{ siempre que } |y| \geq M_3.$$

*Demostración.* Sean  $\sigma$  un símbolo que satisface las condiciones del teorema, y  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ . Se probará que  $T_\sigma$  es acotado de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en para  $1 \leq p < \infty$ . Para  $x \in \mathbb{Z}^n$  fijo sea  $F_x(y, \theta) = f(y) \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta}$ . Entonces

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} F_x(y, \theta) d\mu(\theta).$$

Puesto que  $\sigma(x, \cdot)$  es continuo para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$  se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} |F_x(y, \theta)| d\mu(\theta) = \int_{\mathbb{T}^n} |\sigma(x, \theta)| d\mu(\theta) \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} |f(y)| < \infty.$$

El teorema de Tonelli permite afirmar que

$$(T_\sigma f)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y).$$

Por lo tanto el kernel de  $T_\sigma$  está dado por

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta).$$

Usando integración por partes sucesivamente, para  $x \neq y$ , se tiene que

$$K(x, y) = -\frac{1}{\prod_{j \in D(x, y)} (x_j - y_j)^2} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, y)} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta), \quad (2.1)$$

esto implica que

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} |K(x, y)| &\leq |K(x, x)| + \sum_{y \neq x} \left| \frac{1}{\prod_{j \in D(x, y)} (x_j - y_j)^2} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, y)} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right| \\ &\leq |K(x, x)| + C + \sum_{l \in \mathbb{Z}_0^n, |l| \geq M_3} \frac{1}{\prod_j (l_j)^{2-M_2}} < \infty, \end{aligned}$$

si se hace el cambio de variables  $l = x - y$  y se toma

$$C = \sum_{l \in \mathbb{Z}_0^n, |l| < M_3} \frac{1}{\prod_i l_i^2} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, x-l)} \sigma(x, \theta) e^{-il\theta} d\mu(\theta).$$

De la misma forma se concluye que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |K(x, y)| < \infty.$$

El lema de Schur permite concluir la prueba. □

**Observación 2.2.2.** *Molahajloo probó en [3] (teorema 3.2) que la existencia de una función  $w \in L^1(\mathbb{Z})$  tal que*

$$|\mathcal{F}_{\mathbb{S}^1} \sigma(x, y)| \leq C \|w(y)\|; \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

*es una condición suficiente para asegurar la continuidad  $L^p(\mathbb{Z})$  para todo  $1 \leq p < \infty$ .*

## 2.3. Operadores tipo débil $(p, q)$ v.s. Continuidad

Dedicaremos esta sección a probar que bajo ciertas condiciones un operador de tipo  $(p, q)$ -débil definido en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  es continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . Para ello introducimos en primera instancia el concepto de operador de tipo  $(p, q)$ -débil.

**Definición 2.3.1.** Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios de medida y  $T$  un operador definido de  $L^p(X, \mu)$  en el espacio de las funciones medibles de  $Y$  en  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $T$  es de tipo débil  $(p, q)$  o  $(p, q)$ -débil, para  $q < \infty$ , si

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left( \frac{C\|f\|_p}{\lambda} \right)^q.$$

Análogamente decimos que  $T$  es de tipo fuerte  $(p, q)$  si  $T$  es continuo de  $L^p(X)$  en  $L^q(Y)$ .

Puede probarse fácilmente que todo operador lineal de tipo fuerte  $(p, q)$  es de tipo débil  $(p, q)$ . Por otro lado la afirmación recíproca no es cierta en general, lo cual justifica el término "débil", en efecto, la función maximal de Hardy–Littlewood definida por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)| dy$$

donde  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  y  $|B_r|$  denota la medida de Lebesgue de la bola Euclidiana de radio  $r$  centrada en el origen, es un importante ejemplo de un operador sublineal de tipo débil  $(1, 1)$  que no es de tipo fuerte  $(1, 1)$ . Para una demostración de este hecho ver [1], donde el lector también encontrará una prueba del siguiente lema:

**Lema 2.3.1.** Sean  $(X, \mu)$  un espacio de medida,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible, y  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  una función diferenciable, creciente y tal que  $\phi(0) = 0$ . Defínase

$$a_f(\lambda) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

Entonces

$$\int_X \phi(|f(x)|) d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda) a_f(\lambda) d\lambda.$$

Este lema nos permite obtener el primer resultado de esta sección.

**Teorema 2.3.1** ([5] Rodriguez C.A.). Sea  $T$  un operador lineal definido en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  y con valores en el espacio de funciones  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $T$  es un operador  $(p, q)$ -débil y  $p > q \geq 1$ , entonces

$$T : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{Z}^n)$$

es continuo.

*Demostración.* Sean  $p > q \geq 1$ , y  $T$  un operador  $(p, q)$ -débil. Entonces

$$\vartheta\{y \in \mathbb{Z}^n : |Tf(y)| > \lambda\} \leq \left(C \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{\lambda}\right)^q$$

para todo  $\lambda > 0$  y algún  $C > 0$ . Sea  $f \in L^p(\mathbb{Z}^n)$  una función tal que  $\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} = 1$ . Haciendo  $\phi(\lambda) = \lambda^p$  en el lema 2.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}^p &= p \int_0^\infty \vartheta\{y \in \mathbb{Z}^n : |(Tf)(y)| > \lambda\} \lambda^{p-1} d\lambda \\ &\leq pC^q \int_0^{2C} \lambda^{p-q-1} d\lambda = pC^q \frac{(2C)^{p-q}}{p-q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} \neq 0$  entonces  $\|T(\frac{f}{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}})\|_p^p \leq pC^q \frac{(2C)^{p-q}}{p-q}$ , esto implica que

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} \leq \left(pC^q \frac{(2C)^{p-q}}{p-q}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}.$$

□

**Observación 2.3.1.** El teorema 2.3.1 no es cierto en general, de hecho en el caso real si  $\sigma(x, \xi)$  se define por

$$\sigma(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xi, & \text{si } 0 < |x| \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{1}{x^4} \frac{1}{\xi}, & \text{si } |x| \geq 1, |\xi| \geq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y si consideramos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1]^c \end{cases}$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |T_\sigma f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \sigma(x, \xi) e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right|^2 dx =$$

$$\int_{0 < |x| \leq 1} \frac{1}{|x|} \left| \int_0^1 e^{ix\xi} (1 - e^{-i\xi}) d\xi \right|^2 dx + \int_{1 < |x|} \frac{1}{x^8} \left| \int_{1 < |\xi|} e^{ix\xi} (1 - e^{-i\xi}) \frac{1}{\xi^3} d\xi \right|^2 dx.$$

Algunos cálculos muestran que la primera integral diverge, y que por tanto  $T_\sigma$  no aplica  $L^2(\mathbb{R})$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , sin embargo  $T_\sigma : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$  es continuo porque

$$\|T_\sigma f\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\sigma(x, \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{3}{4}} dx \right]^{\frac{2}{3}},$$

y la última integral es convergente.

Como consecuencia del teorema 2.3.1 obtenemos el siguiente estimativo:

**Corolario 2.3.1.** Sea  $2 < p < \infty$  dado. Si  $\sigma$  cumple que

$$\left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right)_{(x,y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n} \in L^q(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces  $T_\sigma : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{Z}^n)$  es continuo.

*Demostración.* Sea  $2 < p < \infty$ , y  $q$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} |T_\sigma f(x)|^q &= \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y) \right|^q \\ &\leq \left( \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right| |f(y)| \right)^q \\ &\leq \left( \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right|^q \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}^q \end{aligned}$$

en virtud de la desigualdad de Hölder. De aquí que

$$\|T_\sigma\|_{L^q(\mathbb{Z}^n)} \leq M \|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}$$

para algún  $M > 0$ . Puesto que  $A(\mathbb{Z}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ ,  $T_\sigma$  puede extenderse continuamente a todo  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . El teorema 2.3.1 nos permite concluir la prueba.  $\square$

**Teorema 2.3.2** ([5] Rodríguez C.A.). Sea  $T$  un operador lineal definido de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en el espacio de funciones complejas con dominio en  $\mathbb{Z}^n$ . Si  $T$  es un operador  $(p, q)$ -débil para  $q \geq 1$ , entonces

$$T : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{Z}^n)$$

es acotado para todo  $r > q + 1$ .

*Demostración.* Sean  $f \in L^p(\mathbb{Z}^n)$ ,  $r > q + 1$ , y  $T$  un operador lineal  $(p, q)$ -débil. Entonces para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$\vartheta\{x \in \mathbb{Z}^n : |(Tf)(x)| > \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k}\} \leq Ck^q, \text{ para algún } C > 0.$$

Consideremos dos casos: si  $C < 1$  entonces, para  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \vartheta\{x \in \mathbb{Z}^n : \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k} \leq |(Tf)(x)| \leq \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k-1}\} &\leq Ck^q \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |(Tf)(x)|^r &\leq \sum_{k=2}^{\infty} Ck^q \left( \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k-1} \right)^r = C\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}^r \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^q}{(k-1)^r}. \end{aligned}$$

En el caso en que  $1 \leq C$ ,  $\vartheta\{x \in \mathbb{Z}^n : \|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} \leq |(Tf)(x)| \leq 2C^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}\} \leq C$  porque

$$\vartheta\{x \in \mathbb{Z}^n : 2C^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} \leq |(Tf)(x)|\} = 0.$$

$$\text{Por lo tanto, } \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |(Tf)(x)|^r \leq C\|f\|_p^r \left( (2C^{\frac{1}{q}})^r + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^q}{(k-1)^r} \right).$$

La teoría de series nos lleva a la conclusión de la prueba puesto que  $r > q + 1$ .  $\square$

Una modificación en las hipótesis del teorema 2.3.2 nos permite obtener el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.3.** *Si  $q \geq 1$ , y  $T$  es un operador lineal tal que*

$$\vartheta\{x \in \mathbb{Z}^n : \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k} \leq |(Tf)(x)| \leq \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k-1}\} \leq C(k^q - (k-1)^q)$$

*para  $k \in \mathbb{Z}$  mayor que 2, entonces  $T : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{Z}^n)$  es continuo para todo  $r > q$ .*

*Demostración.* La prueba de este teorema es similar a la del teorema 2.3.2. Sean  $q \geq 1$ , y  $T$  un operador lineal tal que

$$\vartheta\{x \in \mathbb{Z}^n : \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k} \leq |(Tf)(x)| \leq \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k-1}\} \leq C(k^q - (k-1)^q)$$

Entonces

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |(Tf)(x)|^r \leq \sum_{k=2}^{\infty} C(k^q - (k-1)^q) \left( \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}}{k-1} \right)^r \leq M\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}^r \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{q-1}}{(k-1)^r},$$

para alguna constante  $M$  positiva. La teoría de series nos lleva a la conclusión de la prueba.  $\square$

## 2.4. Condiciones necesarias para continuidad y la compacidad

En esta sección presentamos algunas condiciones necesarias para la continuidad  $L^p$  de un operador pseudo-diferencial en  $\mathbb{Z}^n$ . De igual forma se probará un teorema respecto de la compacidad de un operador lineal. Iniciamos con la definición del operador diferencias en  $\mathbb{Z}^n$  el cual toma el papel de un operador diferencial en  $\mathbb{R}^n$ . Probaremos que este operador resulta ser pseudo-diferencial.

**Definición 2.4.1.** Sea  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función,  $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  el vector de  $\mathbb{R}^n$  cuya coordenada no nula es 1 y está en la posición  $j$ -ésima. Sea  $k = (k_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n$ . Se define el operador de diferencias por

$$\Delta_{x_j} f(x) = f(x + e_j) - f(x).$$

En general, para un multiíndice dado  $\alpha$  se define

$$\Delta^\alpha = \Delta_{x_1}^{\alpha_1} \dots \Delta_{x_n}^{\alpha_n}.$$

**Lema 2.4.1** ([5] Rodriguez C.A.). El símbolo del operador diferencias  $\Delta^\alpha$  en  $\mathbb{Z}$  es

$$\sigma(x, \theta) = (e^{i\theta} - 1)^\alpha,$$

donde  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ , y  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Más aún, si  $b : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función sumable tenemos la formula

$$\int_{\mathbb{T}^n} (e^{i\theta} - 1)^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} b)(\theta) e^{ix\theta} d\mu(\theta) = \Delta^\alpha b(x).$$

*Demostración.* Sean  $b : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  una función sumable y  $k \in \mathbb{N}$  dado. Si  $c(x) = b(x + k)$ , entonces  $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} c)(\theta) = e^{ik\theta} (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} b)(\theta)$ . En efecto, puesto que

$$\Delta^\alpha b(x) = \sum_{k \leq \alpha} (-1)^{\alpha-k} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!(k)!} b(x+k)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} \Delta^\alpha b)(\theta) &= \left( \sum_{k \leq \alpha} (-1)^{\alpha-k} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!(k)!} e^{ik\theta} \right) \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} b(\theta) \\ &= (e^{i\theta} - 1)^\alpha \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} b(\theta). \end{aligned}$$

La fórmula de inversión de Fourier nos permite concluir. □

**Teorema 2.4.1** ([5] Rodriguez C.A.). Si  $T_\sigma : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{Z}^n)$  es continuo entonces

$$\left( \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right)_{x \in \mathbb{Z}^n} \in L^r(\mathbb{Z}^n)$$

para todo  $y \in \mathbb{Z}^n$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \mathbb{Z}^n$ . Consideremos la función  $f_y \in L^p(\mathbb{Z}^n)$  definida por  $f_y(x) = 1$  si  $x = y$ , y  $f_y(x) = 0$  si  $x \neq y$ . Entonces

$$|T_\sigma f_y(k)|^r = \left| \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{ix\theta} e^{-iy\theta} d\mu(\theta) \right|^r.$$

La hipótesis de continuidad nos lleva a la conclusión de la prueba.  $\square$

**Teorema 2.4.2** ([5] Rodriguez C.A.). Sean  $\epsilon > 0$ , y  $m \in \mathbb{N}$  dados. Si  $T : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{Z}^n)$  es un operador compacto entonces existe una función  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\|Tf\|_{L^r(\mathbb{Z}^n)} < \epsilon$  y tal que  $\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} = 2m$ .

*Demostración.* Sean  $\epsilon > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  dados. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  denotemos

$$C_m^k = \{i \in \mathbb{N} : m(k-1) \leq i < mk\},$$

y definamos la función  $g_m^k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  como  $g_m^k(n) = 1$  siempre y cuando  $n \in C_m^k$ , y  $g_m^k(n) = 0$  en cualquier otro caso. Ahora, consideremos la sucesión  $(f_m^k)_{k \in \mathbb{N}}$  donde  $f_m^k : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  está definida por  $f_m^k(l_1, \dots, l_n) = g_m^k(l_1)$  si  $(l_1, \dots, l_n) \in C_m^k \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ , y cero en otro caso. La hipótesis de compacidad implica la existencia de una subsucesión  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  tal que

$$\|Tf_m^{k_r} - Tf_m^{k_s}\|_{L^r(\mathbb{Z}^n)} < \epsilon, \text{ donde } r, s \geq M.$$

Por último, escojamos  $f = f_m^{k_M} - f_m^{k_{M+1}}$ , entonces  $\|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} = 2m$  y  $\|T_\sigma f\|_{L^r(\mathbb{Z}^n)} < \epsilon$ .  $\square$

## 2.5. Expansión asintótica

Esta sección está dedicada a construir una versión discreta del teorema de expansión asintótica para el caso real. Podemos pensar en definir clases de símbolos  $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{Z}^n)$  de

manera análoga a las clases  $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ . Tal definición no resulta ser tan directa debido a que el grupo dual de  $\mathbb{Z}^n$  es compacto, veamos esto: supongamos que definimos

$$S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{Z}^n) = \{\sigma : |D^\beta \Delta^\alpha \sigma(x, \theta)| \leq C_{\alpha,\beta,\sigma} \langle \theta \rangle^{m-\rho|\alpha|+\beta|\alpha|}\}.$$

Si  $\sigma \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{Z}^n)$  entonces

$$|D^\beta \Delta^\alpha \sigma(x, \theta)| \leq C_{\alpha,\beta,\sigma} \langle \theta \rangle^{m-\rho|\alpha|+\beta|\alpha|} \leq \left( \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \langle \theta \rangle \right)^{m-l} C_{\alpha,\beta,\sigma} \langle \theta \rangle^{l-\rho|\alpha|+\beta|\alpha|}$$

para toda pareja de multi-índices  $(\alpha, \beta)$ . Esto dice que  $\sigma \in S_{\rho,\delta}^l(\mathbb{Z}^n)$ , y que por tanto todas estas clases son iguales. En el caso real, las clases de *Hörmander* fueron inspiradas por el símbolo del operador diferencial presente en la ecuación del calor. En nuestro caso tenemos que el símbolo del operador diferencias en el caso particular de  $\mathbb{Z}$  es  $a(x, \theta) = e^{i\theta} - 1$ . Este operador aplica  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  de manera continua para todo  $p \geq 1$ , así que en este sentido no hay nada más que investigar sobre estos símbolos. Sinembargo, una ligera adaptación de una clase de las llamadas "*funciones test*" usadas en la teoría de los espacios de Sobolev en  $\mathbb{R}^n$  nos servirá como inspiración. De hecho la función definida por

$$\phi_m(x, \xi) = \begin{cases} \langle x \rangle^m e^{\frac{-1}{h(x, \theta)}}, & \text{si } 0 < |\theta| \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 \leq |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

donde  $m \in \mathbb{R}$ , y  $h(x, \theta) = \cos(\pi/\langle x \rangle) - \cos(\theta\pi/\langle x \rangle)$ , tiene las siguientes propiedades:

- [i]  $|\phi_m(x, \theta)| \leq M \langle x \rangle^m$  sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ , para alguna constante  $M \geq 0$ .
- [ii]  $\int_{\mathbb{T}} \phi_m(x, \theta) e^{ir\theta} d\mu(\theta) = \frac{-1}{r^k} \int_{\mathbb{T}} \partial_\theta^k \phi_m(x, \theta) e^{ir\theta} d\mu(\theta)$  para todo  $r \in \mathbb{Z}$  diferente de 0, y  $x \in \mathbb{Z}$ .
- [iii]  $|\partial_\theta^k \phi_m(x, \theta)| \leq C(k) \langle x \rangle^{m-k}$  para alguna constante  $C > 0$  dependiente de  $k$ , y todo  $x \in \mathbb{Z}^n$ .
- [iv] El operador  $T_{\phi_m}$  es continuo de  $L^p(\mathbb{Z})$  en  $L^p(\mathbb{Z})$  para todo  $p \geq 1$ , si y sólo si  $m \leq 0$ .

La prueba de los items [i], [ii], y [iii] se obtiene de cálculos directos. Se evidenciará en la demostración del teorema 2.5.1 una prueba del item [iv]. Hemos alcanzado uno de los puntos más importante de esta tesis. Ahora tenemos todos los componentes y motivaciones para dar una definición de clases de símbolos que nos permitirán fundamentar un cálculo simbólico discreto. La siguiente definición caracteriza estos símbolos:

**Definición 2.5.1.** Sea  $m \in \mathbb{R}$  dado. Definimos la clase  $\Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$  como

$$\Sigma^m(\mathbb{Z}^n) = \{\sigma : |\partial^\alpha \Delta^\beta \sigma(x, \theta)| \leq C \langle x \rangle^{m-|\alpha|+|\beta|}\},$$

donde  $C = C(m, \max_i \alpha_i, |\alpha|, \sigma)$  es constante. La diferenciabilidad de las funciones es tomada en el sentido de la definición 2.2.1. Definimos  $\Sigma^{-\infty}(\mathbb{Z}^n) = \bigcap_m \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ .

Puede probarse que  $\Sigma^{m_1}(\mathbb{Z}^n) \subseteq \Sigma^{m_2}(\mathbb{Z}^n)$  siempre que  $m_1 \leq m_2$  y que  $a.b \in \Sigma^{m_1+m_2}(\mathbb{Z}^n)$  siempre que  $a \in \Sigma^{m_1}(\mathbb{Z}^n)$  y  $b \in \Sigma^{m_2}(\mathbb{Z}^n)$ . Para iniciar el estudio de estas clases de símbolos probaremos que sus correspondientes operadores inducidos dejan invariante el espacio  $A(\mathbb{Z}^n)$ . Antes introduzcamos un poco de notación. Para  $(x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$  fijo y  $N \in \mathbb{N}$  dado, denotamos por  $\mathfrak{M}^N(x, y)$  el conjunto de multiíndices cuya  $i$ -ésima componente es cero siempre que  $x_i = y_i$ , y las componentes no nulas son todas iguales a  $N$ . De ahora en adelante las desigualdades expuestas en las demostraciones se entenderán salvo constantes con el objetivo de descargar la notación.

**Proposición 2.5.1.** Sea  $m \in \mathbb{R}$ . Si  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$  entonces  $T_\sigma$  aplica  $A(\mathbb{Z}^n)$  en  $A(\mathbb{Z}^n)$ .

*Demostración.* Sean  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq M$ , y  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . Entonces

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) d\mu(\theta) f(x) + \sum_{x \neq y} \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) f(y),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |\langle x \rangle^M T_\sigma f(x)| &\leq |\langle x \rangle^M f(x)| \left| \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) d\mu(\theta) \right| + \sum_{x \neq y} |\langle x \rangle^M \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) f(y)| \\ &\leq |\langle x \rangle^{m+M} f(x)| + \sum_{y \neq x} \left| \frac{\langle x \rangle^M}{(x-y)^{\alpha(x,y)}} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\alpha(x,y)} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) f(y) \right| \\ &\leq |\langle x \rangle^{m+M} f(x)| + \sum_{y \neq x} \langle x \rangle^{M+m-|\alpha(x,y)|} |f(y)| \frac{1}{|(x-y)^{\alpha(x,y)}|} \\ &\leq |\langle x \rangle^{m+M} f(x)| + \sum_{y \neq x} |f(y)| \langle x \rangle^{M+m-|\alpha(x,y)|} \end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene porque  $|(x - y)^\alpha| \geq 1$ . Escojamos  $\alpha(x, y) \in \mathfrak{M}^N(x, y)$  para  $N$  suficientemente grande, de tal forma que al sumar sobre la variable  $x$  se obtiene que

$$\|\langle x \rangle^M T_\sigma f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)} \leq \sum_x |\langle x \rangle^{m+M} f(x)| + \|f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)} \sum_x \langle x \rangle^{m+M-N} < \infty.$$

Puesto que hemos escogido  $M > 0$  arbitrariamente, concluimos que  $T_\sigma f \in A(\mathbb{Z}^n)$ .  $\square$

**Teorema 2.5.1.** *Si  $\sigma \in \Sigma^0(\mathbb{Z}^n)$  entonces  $T_\sigma : L^p(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{Z}^n)$  es acotado para todo  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demostración.* Sean  $\sigma \in \Sigma^0(\mathbb{Z}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , y  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ . Entonces

$$T_\sigma f(x) = f(x) \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) d\mu(\theta) + \sum_{z \neq x} \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-z)\theta} d\mu(\theta) f(z).$$

El operador  $H_1 f(x) = f(x) \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) d\mu(\theta)$  es claramente continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . Consideremos el operador

$$H_2 f(x) = \sum_{z \neq x} \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-z)\theta} d\mu(\theta) f(z)$$

y probemos que es continuo de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} |H_2 f(x)|^p &\leq \left( \sum_{z \neq x} \frac{1}{|(x-z)^{\alpha(x,z)}|} \langle x \rangle^{-|\alpha(x,z)|} |f(z)| \right)^p \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)}^p \left( \sum_{z \neq x} \frac{1}{|(x-z)^{\alpha(x,z)}|^q} \langle x \rangle^{-q|\alpha(x,z)|} \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  en virtud de la desigualdad de Hölder. Si consideramos  $\alpha(x, z) \in \mathfrak{M}^N(x, z)$  con  $N$  suficientemente grande como para asegurar que  $\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \langle x \rangle^{-pN} < \infty$  y también que

$\sum_{l \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{1}{|\prod_i l_i|^{qN}} < \infty$ , entonces

$$\|H_2 f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{Z}^n)} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \langle x \rangle^{-pN} \right) \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{1}{|\prod_i l_i|^{qN}} \right)^{\frac{p}{q}},$$

donde hemos hecho  $l = x - z$ . Se ha probado que  $T_\sigma$  es la suma de funciones continuas de  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  en  $L^p(\mathbb{Z}^n)$  y por tanto la prueba a concluido.  $\square$

**Observación 2.5.1.** *El teorema 2.5.1 no es cierto si  $m > 0$ , de hecho, la función  $a(x, \theta) = \langle x \rangle^m$  pertenece a la clase  $\Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . La función  $f(x) = \frac{1}{\langle x \rangle^{m+1}}$  pertenece a  $L^1(\mathbb{Z})$ , sin embargo la función  $\langle x \rangle^m f$  no es sumable. Alentamos al lector a reflexionar ahora sobre la prueba del ítem [iv] en el listado de propiedades de la función  $\phi_m$  definida al inicio de la sección.*

En [8] se demuestra una versión discreta de la conocida serie de Taylor para funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^n$ . Para ello los autores introducen la siguiente notación: para  $x \in \mathbb{Z}^n$  y  $\alpha$  un multiíndice dado, se denota  $x^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1)} \dots x_n^{(\alpha_n)}$ , donde  $x_j^{(0)} = 1$  y

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}(x_j - k) = x_j(x_j - 1) \dots (x_j - k).$$

Con esta notación se tiene que  $\Delta^\gamma x^{(\alpha)} = \alpha^{(\gamma)} x^{(\alpha-\gamma)}$  en analogía con el caso euclidiano.

**Teorema 2.5.2** (Expansión en serie de Taylor discreta). *Sea  $b : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces*

$$b(l+x, \theta) = \sum_{|\alpha| < M} \frac{1}{\alpha!} l^{(\alpha)} \Delta^\alpha b(x, \theta) + R_M(x, l, \theta),$$

donde el residuo satisface que

$$|\Delta_x^\omega R_M(x, l, \theta)| \leq \sum_{|\alpha|=M} \frac{1}{\alpha!} |l^{(\alpha)}| \max_{\nu \in Q(l)} |\Delta^{\alpha+\omega} b(x+\nu, \theta)|.$$

y

$$Q(l) = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu_j| \leq |l_j|\}.$$

Antes de enunciar el teorema central de esta sección estableceremos una fórmula útil.

**Lema 2.5.1.** *Sean  $m \in \mathbb{R}$  y  $a \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . Entonces*

$$\partial^\alpha a(x, \theta) = \sum_l (il)^\alpha e^{i\theta l} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l)$$

para todo multiíndice  $\alpha$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . La fórmula de inversión de Fourier nos permite establecer que

$$a(x, \theta) = \sum_l \left( \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{-i\eta l} d\mu(\eta) \right) e^{i\theta l}.$$

Puesto que  $a \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ , esta serie es absolutamente convergente y se nos permite derivar respecto de la variable de Fourier. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\partial^\alpha a(x, \theta) &= \sum_l \left( (il)^\alpha \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{-i\eta l} d\mu(\eta) \right) e^{i\theta l} \\ &= \sum_l (il)^\alpha e^{i\theta l} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l).\end{aligned}$$

□

**Definición 2.5.2.** Sean

$$P_M(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq M} c_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

un polinomio complejo de orden  $M$ , y  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . Definimos el operador diferencial respecto de la variable toroidal  $P_M(\partial)$  por

$$P_M(\partial)\sigma = \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq M} c_{k_1, \dots, k_n} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} \sigma.$$

La definición 2.5.2 y el lema 2.5.1 nos llevan de manera inmediata al siguiente corolario,

**Corolario 2.5.1.** Sean  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  un multiíndice,  $m \in \mathbb{R}$ , y  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . Entonces existe un único polinomio  $P_M$ , de orden  $M = |\alpha|$ , tal que

$$\sum_l i^{|\alpha|} l^{(\alpha)} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l) = P_\alpha(\partial)\sigma$$

**Teorema 2.5.3** (Expansión Asintótica Discreta). Sean  $a \in \Sigma^{m_1}(\mathbb{Z}^n)$  y  $b \in \Sigma^{m_2}(\mathbb{Z}^n)$  símbolos discretos. Entonces existe un símbolo  $c \in \Sigma^{m_1+m_2}(\mathbb{Z}^n)$  tal que  $T_a \circ T_b = T_c$  donde  $c$  satisface

$$c(x, \theta) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \Delta^\alpha b(x, \theta) P_\alpha(\partial) a(x, \theta) \in \Sigma^{-\infty}(\mathbb{Z}^n)$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sea  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ , entonces

$$T_a f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-y)\eta} f(y) d\mu(\eta)$$

$$T_b f(y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} b(y, \theta) e^{i(y-z)\theta} f(z) d\mu(\theta).$$

De aquí que

$$\begin{aligned} T_a \circ T_b f(x) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-y)\eta} \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} b(y, \theta) e^{i(y-z)\theta} d\mu(\theta) f(z) \right) d\mu(\eta) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-y)\eta} b(y, \theta) e^{i(y-z)\theta} d\mu(\theta) d\mu(\eta) f(z). \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-y)\eta} d\mu(\eta) \right) \left( \int_{\mathbb{T}^n} b(y, \theta) e^{i(y-z)\theta} d\mu(\theta) \right) f(z). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Estudiemos la convergencia absoluta de esta serie. Tenemos que

$$\sum_{y, z} = \sum_{y \neq x, y=z} + \sum_{y \neq x, y \neq z} + \sum_{y=x, z}.$$

En el caso  $\sum_{y \neq x, y \neq z}$  podemos escribir (2.2) como

$$\begin{aligned} &\sum_{y \neq x, y \neq z} \left( \frac{(-1)^{\gamma(x, y)}}{(i(x-y))^{\gamma(x, y)}} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, y)} a(x, \eta) e^{i(x-y)\eta} d\mu(\eta) \right) \times \\ &\left( \frac{(-1)^{\alpha(z, y)}}{(i(y-z))^{\alpha(z, y)}} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\alpha(z, y)} b(y, \theta) e^{i(y-z)\theta} d\mu(\theta) \right) f(z), \end{aligned}$$

donde en principio  $\gamma(x, y) \in \mathfrak{M}^N(x, y)$  y  $\alpha(z, y) \in \mathfrak{M}^N(z, y)$  para algún  $N$ . Lo interesante es que existe  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $\gamma_i(x, y) > N$  para  $i \in D_{(x, y)}$  y  $\alpha_i(z, y) > N$  para  $i \in D_{(z, y)}$  implica que

$$\sum_{y \neq x, y \neq z} \langle x \rangle^{m_1 - |\gamma(x, y)|} \langle y \rangle^{m_2 - |\alpha(z, y)|} \frac{1}{|(y-z)^{\alpha(z, y)}|} \frac{1}{|(x-y)^{\gamma(x, y)}|} |f(z)| < \infty.$$

Con lo cual podemos asegurar la convergencia absoluta de esta parte de la serie.

En el caso  $\sum_{y \neq x, y=z}$ , al hacer  $y = z = l$  en (2.2), es equivalente a estudiar la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{x \neq l \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-l)\eta} d\mu(\eta) \int_{\mathbb{T}^n} b(l, \theta) d\mu(\theta) f(l).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{x \neq l \in \mathbb{Z}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-l)\eta} d\mu(\eta) \int_{\mathbb{T}^n} b(l, \theta) d\mu(\theta) \right| |f(l)| \\ & \leq \sum_{x \neq l \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|(x-l)^{\alpha(x,l)}|} \langle x \rangle^{m_1 - |\alpha(x,l)|} \langle l \rangle^{m_2} |f(l)| < \infty \end{aligned}$$

siempre que se escoja  $\alpha(x, l) \in \mathfrak{M}^N(x, l)$  con  $N$  suficientemente grande. También puede argumentarse usando el hecho de que  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ .

En el último caso,  $\sum_{y=x, z}$ , tenemos que los términos de (2.2) en módulo están acotados por

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) d\mu(\eta) \right| \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} b(x, \theta) e^{i(x-z)\theta} d\mu(\theta) \right| |f(z)| \\ & \leq \langle x \rangle^{m_1} \left( \langle x \rangle^{m_2} f(x) + \sum_{z \neq x} \frac{1}{|(x-z)^{\alpha(x,z)}|} \langle x \rangle^{m_2 - |\alpha(x,z)|} |f(z)| \right) < \infty \end{aligned}$$

para  $\alpha(x, z) \in \mathfrak{M}^N(x, z)$  con  $N$  suficientemente grande.

Hemos establecido la convergencia absoluta de 2.2. El teorema de Tonelli nos permite entonces escribir

$$T_a \circ T_b f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \left( \sum_y b(y, \theta) \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-y)(\eta-\theta)} d\eta \right) e^{i(x-z)\theta} f(z) d\mu(\theta),$$

y por tanto el símbolo de la composición debe ser

$$\begin{aligned} c(x, \theta) &= \sum_y b(y, \theta) \int_{\mathbb{T}^n} a(x, \eta) e^{i(x-y)(\eta-\theta)} d\eta \\ &= \sum_y b(y, \theta) e^{-i\theta(x-y)} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, y-x) \\ &= \sum_l e^{il\theta} b(l+x, \theta) \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l), \quad (l = y-x). \end{aligned}$$

En virtud del teorema 2.5.2 tenemos que

$$c(x, \theta) = \sum_l \left( \sum_{|\alpha| < M} \frac{1}{\alpha!} l^{(\alpha)} \Delta^\alpha b(x, \theta) \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l) e^{il\theta} \right) + \sum_l e^{il\theta} R_M(x, l, \theta) \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l).$$

La primera suma es igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\alpha| < M} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \Delta^\alpha b(x, \theta) \sum_l i^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(k, l) e^{il\theta} l^{(\alpha)} \\
&= \sum_{|\alpha| < M} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \Delta^\alpha b(x, \theta) P_\alpha(\partial) a(x, \theta).
\end{aligned}$$

Analicemos la función  $c_M(x, \theta) = \sum_l e^{il\theta} R_M(x, l, \theta) \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l)$ . Por un lado, para cada  $l$  fijo se tiene que  $R_M(x, l, \theta) \in \Sigma^{m_2}(\mathbb{Z}^n)$  por ser una suma finita de elementos de  $\Sigma^{m_2}(\mathbb{Z}^n)$ , y  $|\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} a(x, l)| = \frac{1}{|l^{\gamma(x, l)}|} |\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, l)} a(x, l)|$  para  $\gamma(x, l) \in \mathfrak{M}^N(x, y)$  con  $N \in \mathbb{N}$ . De otro lado observemos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, l)} a(x, l) \in \Sigma^{m_1 - |\gamma(x, l)|}(\mathbb{Z}^n)$ , por lo tanto, para  $\alpha$  y  $\beta$  multiíndices se tiene que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \Delta^\beta c_M(x, \theta)| &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{l^{\gamma(x, l)}} |\partial^\alpha \Delta^\beta (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \partial^{\gamma(x, l)} a(x, l) R_M(x, l, \theta) e^{il\theta})| \\
&\leq \sum_l \frac{1}{l^{\gamma(x, l)}} \langle x \rangle^{m_1 + m_2 - |\gamma(x, l)|} \\
&\leq \langle x \rangle^{m_1 + m_2 - N} \sum_l \frac{1}{l^{\gamma(x, l)}}
\end{aligned}$$

Donde  $\alpha(x, l) \in \mathfrak{M}^N(x, y)$ . Ahora, para cada  $m \in \mathbb{R}$  existe  $N$  lo suficientemente grande que nos permite asegurar que  $c_M \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$  usando el estimativo de arriba.  $\square$

En esta última parte estamos interesados en hallar el operador adjunto de un operador pseudo-diferencial en  $\mathbb{Z}^n$ . El siguiente teorema resuelve este problema

**Teorema 2.5.4.** *Sean  $m < 0$  y  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . Entonces el operador adjunto de  $T_\sigma$  es un operador pseudo-diferencial, el símbolo de  $T_\sigma^*$  es*

$$\sigma^*(x, \theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \bar{\sigma}(z, \eta) e^{i(x-z)\eta} d\eta \right) e^{i(z-x)\theta}$$

*Demostración.* Sean  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$  y  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$ , puesto que  $m < 0$  tiene sentido hablar de la existencia de un operador adjunto en virtud del teorema 2.5.1. Tenemos que  $T_\sigma f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} k(x, y) f(y)$  donde  $k(x, y) = \int_{\mathbb{T}^n} \sigma(x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta)$  es el kernel del operador. Por lo tanto

$$T_\sigma^* f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \bar{\sigma}(y, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right) f(y).$$

Puesto que la familia  $(\int_{\mathbb{T}^n} \bar{\sigma}(y, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta)) \in L^1(\mathbb{Z}^n)$  para cada  $x \in \mathbb{Z}^n$  se concluye del teorema 2.2.1 que  $T_\sigma^*$  es un operador pseudo-diferencial y su símbolo es

$$\sigma^*(x, \theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} \bar{\sigma}(z, \eta) e^{i(x-z)\eta} d\eta \right) e^{i(z-x)\theta}.$$

□

**Proposición 2.5.2.** Sean  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , y  $\sigma \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$ . Si  $\sigma_\epsilon \in \Sigma^m(\mathbb{Z}^n)$  satisface que

$$|\partial^\alpha(\sigma(x, \theta) - \sigma_\epsilon(x, \theta))| \leq \epsilon \langle x \rangle^{m-|\alpha|}$$

para todo  $(x, \theta) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{T}^n$  y todo multiíndice  $\alpha$ . Entonces para todo  $f \in A(\mathbb{Z}^n)$  se tiene que

$$\|T_{\sigma-\sigma_\epsilon} f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)} \leq \epsilon \|\langle x \rangle^m f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)}.$$

*Demostración.* Sean  $m, \epsilon, \sigma$ , y  $\sigma_\epsilon$  como en el lema. Para  $x, y \in \mathbb{Z}^n$  diferentes, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{T}^n} (\sigma(x, \theta) - \sigma_\epsilon(x, \theta)) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right| \\ &= \left| \frac{1}{((x-y)^{\alpha(x,y)})} \int_{\mathbb{T}^n} \partial^{\alpha(x,y)} (\sigma(x, \theta) - \sigma_\epsilon(x, \theta)) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right|, \end{aligned}$$

luego

$$\left| \int_{\mathbb{T}^n} (\sigma(x, \theta) - \sigma_\epsilon(x, \theta)) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right| \leq \epsilon \frac{\langle x \rangle^{m-|\alpha(x,y)|}}{|(x-y)^{\alpha(x,y)}|}.$$

Aquí  $\alpha(x, y) \in \mathfrak{M}^N(x, y)$ , y  $N$  es un natural arbitrario. Al hacer  $N \rightarrow \infty$  se evidencia que

$$\left| \int_{\mathbb{T}^n} (\sigma(x, \theta) - \sigma_\epsilon(x, \theta)) e^{i(x-y)\theta} d\mu(\theta) \right| = 0$$

siempre que  $x \neq y$ .

Entonces  $T_{\sigma-\sigma_\epsilon} f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} (\sigma(x, \theta) - \sigma_\epsilon(x, \theta)) d\mu(\theta) f(x)$ , y por lo tanto

$$\|T_{\sigma-\sigma_\epsilon} f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)} \leq \epsilon \|\langle x \rangle^m f\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)}.$$

□

**Observación 2.5.2.** *La definición de los espacios de Sobolev  $W^{k,p}(\mathbb{Z}^n)$  como el conjunto de funciones  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $f$  y todas sus derivadas de orden menor o igual que  $k$  pertenecen a  $L^p(\mathbb{Z}^n)$ , no es adecuada. Basta con que se analice el caso unidimensional. En efecto, si  $g \in L^p(\mathbb{Z})$  entonces la función  $h$  definida por  $h(x) = g(x+1)$  es  $p$ -sumable. De aquí que  $\Delta g \in L^p(\mathbb{Z},)$  y esto dice que  $W^{k,p}(\mathbb{Z}^n) = L^p(\mathbb{Z}^n)$ .*

# Bibliografía

- [1] Duoandikoetxea, J.; Fourier Analysis, volume 29, American Mathematical society, 2000.
- [2] Kumano-go, H; Pseudo-differential Operators, Iwanami, Tokyo 1974.
- [3] Molahajloo, S.; Pseudo-Differential operators on  $\mathbb{Z}$ , Operator Theory: Advances and Applications, vol 205, pages 213 to 221, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 2009.
- [4] Restrepo G.; Introducción al Análisis Funcional, programa editorial Universidad del Valle, Cali ,2010.
- [5] Rodriguez Torijano, C.A.;  $L^p$ – Estimates for Pseudo–Differential Operators on  $\mathbb{Z}^n$ , Journal of Pseudo–Differential Operators and Applications, Volume 2, Number 3, pages 367-375, Springer–Verlag, 2011.
- [6] Rudin, W.; Fourier Analysis on Groups, number 12, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, New York-london,1962.
- [7] Ruzhansky M. and Turunen V.; Quantization of Pseudo-diferencial Operators On the Torus, Numerical Functional Analysis and Optimization, Volume 30, Issue 9, Pages 1098 to 1124, 2009.
- [8] Ruzhansky M. and Turunen V.; Pseudo-differential Operators, Monograph Appeared in Birkhäuser, Basel, 2010.
- [9] Stein, E.; Harmonic Analysis, Princeton university Press, 1993.
- [10] Stein, E. and Shakarchi, R.; Fourier Analysis, Princeton university Press, 2003.

- [11] Wong M.W., An Introduction to Pseudo-Differential Operators, World Scientific, 1991.
- [12] Won M.W., Discrete Fourier Analysis, York University, Editorial Birkäuser, volume 5, Canada, 2011.