

SISTEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES CON RESTRICCIONES

JAIRO DUQUE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA.

RESUMEN

Este trabajo fue presentado en el VII encuentro de la escuela regional de matemáticas; en él se usa el método de los elementos finitos para aproximar sistemas elípticos semilineales de ecuaciones diferenciales con restricción para los cuales el término correspondiente a la presión no es el multiplicador de Lagrange; tales sistemas aparecen en el diseño de semiconductores donde la dinámica del flujo de la reacción química está gobernada por las ecuaciones compresibles de Navier-Stokes. Finalmente, se aplica el método discutido a este modelo compresible.

Palabras Claves: Ecuaciones diferenciales elípticas, ecuaciones semilineales, elementos finitos, condición Inf-Sup.

Introducción

El objetivo del presente trabajo es aproximar sistemas de ecuaciones diferenciales elípticos de la forma

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ij}^{\alpha\beta}(x, u)\partial_i u^\alpha(x)) - \partial_i(b_i^\beta(x, u)p(x)) = f^\beta(x, u) & \text{en } \Omega, \\ \partial_i c_i(x, u) = 0 & \text{en } \Omega, \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

donde $\beta = 1, \dots, N$ y se ha utilizado la notación de Einstein para la suma: sobre todo índice latino repetido se efectúa una suma de 0 a 2 y sobre los índices griegos repetidos sumatoria desde 1 a N . Esta clase de sistemas aparece con frecuencia en el área de la ingeniería a cuando se modelan flujos con número Mach pequeño; nosotros estudiaremos una versión simplificada de las ecuaciones compresibles de Navier–Stokes que describe el flujo de un gas con presión dominante y pequeño número Mach ($M < 0.1$).

Nosotros empezamos con el caso lineal debido a que la mayoría de nuestros resultados están relacionados con la linealización del sistema semilineal (1).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 . Para las funciones desconocidas $u(x) = (u^1, \dots, u^N)^T(x) \in \mathbb{R}^N$, $p(x) \in \mathbb{R}$ consideramos el sistema de ecuaciones parciales

$$Au + Bp = f \text{ en } \Omega, \quad Cu = g \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} (Au)^\beta(x) &= -\partial_j(a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\partial_i u^\alpha(x)), & (Bp)^\beta(x) &= -\partial_i(b_i^\beta(x)p(x)), \\ Cu(x) &= \partial_i(c_i^\alpha(x)u^\alpha(x)), & \beta &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Sistemas de la forma (2) son bien conocidos en el caso $B = C^*$ cuando el operador B satisface además una condición de Ladyzhenskaja o condición Inf-Sup, como por ejemplo las ecuaciones de Stokes y las de Navier-Stokes. Aquí nosotros presentamos un marco teórico para el estudio numérico de sistemas donde la condición $B = C^*$ no se cumple, es decir la función p no es el multiplicador de Lagrange de la restricción $Cu = g$. Antes de presentar la formulación débil de (2) introducimos la siguiente notación. $L^p(\Omega)^r$ y $H^{m,p}(\Omega)^r$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, representan los espacios de funciones de Lebesgue y de Sobolev con valores en $\mathbb{R}^r$. Las correspondientes normas son

$$\|u\|_{p,\Omega} := \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad \|u\|_{m,p,\Omega} = \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{1/p},$$

y

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx.$$

Si Y es un espacio de Sobolev Y entonces los elementos de $\overline{Y} \subset Y$ son las funciones $v \in Y$ tales que $\int_{\Omega} v dx = 0$. El espacio dual de Y lo representaremos con Y' ; en particular escribiremos $H^{-1^r} := (H_0^{1^r})'$ con norma

$$\|u\|_{-1,2,\Omega} = \sup_{\varphi \in H_0^{1,\Omega^r}} \frac{(u, \varphi)}{\|\varphi\|_{1,2,\Omega}}.$$

El espacio natural de las soluciones débiles del sistema (2) es el espacio $H_0^{1,2}(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$. Debido a que la existencia de soluciones del sistema depende de los coeficientes $a_{ij}^{\alpha\beta}$, b_i^β y c_i^α introducimos los espacios

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega)^N, \\ X &= L^2(\Omega) \quad \text{o} \quad X = \overline{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

y las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ y $c(\cdot, \cdot)$ definidas sobre los espacios $V \times V$, $X \times V$ y $V \times X$ respectivamente:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_i u^{\alpha} \partial_j v^{\beta} dx, & b(p, v) &= \int_{\Omega} p b_i^{\beta} \partial_i v^{\beta} dx, \\ c(u, q) &= \int_{\Omega} \partial_i (c_i^{\alpha} u^{\alpha}) q dx. \end{aligned}$$

Para que las formas bilineales estén bien definidas supondremos en lo sucesivo que los coeficientes $a_{ij}^{\alpha\beta}$, b_i^{β} y c_i^{α} son suficientemente diferenciables. La formulación débil de (2) puede escribirse entonces de la forma

Encontrar $(u, p) \in V \times X$, tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = (f, v) & \forall v \in V, \\ c(u, q) = (g, q) & \forall q \in X. \end{cases} \quad (3)$$

Como se mencionó antes no supondremos que $b(q, v) = c(v, q)$; en lugar de ésto haremos nuestro análisis bajo las siguientes hipótesis: *existe una matriz M uniformemente regular, $M \in C^2(\overline{\Omega})^{N \times N}$ con las propiedades*

$$\begin{aligned} (i) \quad & m_1 \|v\|_{1,2}^2 \leq a(v, Mv) + c\|v\|_2^2 \quad \forall v \in V, \quad m_1 > 0, \\ (ii) \quad & |b(q, Mv) - c(v, q)| \leq c\|v\|_{1,2} \|q\|_{-1,2} \quad \forall (v, q) \in V \times X. \end{aligned} \quad (4)$$

Además la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ satisface una condición de Ladyzhenskaja,

$$m_2 \|q\|_2 \leq \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(q, v)}{\|v\|_{1,2}} + c\|q\|_{-1,2} \quad \forall q \in X, \quad m_2 > 0. \quad (5)$$

La condición de Ladyzhenskaja se requiere para el análisis de existencia de soluciones pero no para el análisis del método de elementos finitos que presentaremos. Sea $(u, p) \in V \times X$ una solución de (3). Tomando $v = Mu$ en la primera ecuación de (3) y $q = p$ en la segunda se obtiene que

$$a(u, Mu) = (f, Mu) - b(p, Mu) + c(u, p) - (g, p),$$

y aplicando la condición (4) que

$$m_1 \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_{-1,2} \|Mu\|_{1,2} + c \|u\|_2 \|p\|_2 + \|g\|_2 \|p\|_2 + c \|u\|_2^2.$$

Combinando (5) con la primera ecuación de (3) se obtiene

$$m_2 \|p\|_2 \leq c \|u\|_{1,2} + \|f\|_{-1,2} + c \|p\|_{-1,2}.$$

Así hemos provado el siguiente estimativo a priori

$$\|u\|_{1,2} + \|p\|_2 \leq c \{ \|f\|_{-1,2} + \|g\|_2 + \|u\|_2 + \|p\|_{-1,2} \}.$$

Esta desigualdad motiva la siguiente condición: *El operador solución del problema (2) está definido continuamente en el espacio $(V \times X)'$; es decir para cada $f \in V'$ y cada $g \in X'$ existe una única solución $(u, p) \in V \times X$ de (2), la cual satisface*

$$\|u\|_{1,2} + \|p\|_2 \leq c \{ \|f\|_{-1,2} + \|g\|_2 \}. \quad (6)$$

Ahora consideraremos el sistema no lineal (1). Sea (u, p) una solución acotada de (1) y sea $I_0 \subset \mathbb{R}^N$ un intervalo tal que la imagen

de u es acotada en I_0 y supongamos que existe otro intervalo I , $I_0 \subset\subset I$, tal que los coeficientes $a_{ij}^{\alpha\beta}$, b_i^β , c_i^α y f^β son suficientemente diferenciables respecto de x y u en $\bar{\Omega} \times I$. La linealización del operador (1) es entonces de la forma (2) y supondremos que satisface las condiciones (4), (5) y (6).

1 Discretización en elementos finitos

Similar al caso lineal definimos las formas no lineales que aparecen en la formulación débil de (1). Denotaremos dichas formas con $a(\cdot; \cdot)$, $b(\cdot; \cdot)$ y $c(\cdot; \cdot)$, donde la notación $;$ enfatiza la no linealidad; ahora podemos extenderlas a la triangulación de Ω donde definiremos el método de elementos finitos. Sea Ω_h una partición regular de la región Ω en triángulos con diámetro máximo $0 < h \leq 1$. Para discretizar el problema no lineal (9) utilizamos elementos lineales,

$$S_1 = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h) : v_h|_K \text{ es lineal en cada elemento } K \in \Omega_h\}.$$

Como espacios de elementos finitos V_h y X_h tomamos

$$\begin{aligned} V_h &= S_1^3 \cap H_0^1(\Omega_h)^3, \\ X_h &= S_1 \quad \text{o} \quad X_h = \bar{S}_1 := \{v_h \in S_1 : \int_{\Omega_h} v_h \, dx = 0\} \end{aligned}$$

y definimos nuestro método como

$$\begin{aligned} \text{Encuentre } (u_h, p_h) \in V_h \times X_h, \text{ tal que} \\ \begin{cases} a(u_h; v_h) + b(p_h; v_h) = (f, v_h) & \forall v_h \in V_h, \\ c(u_h; q_h) - \omega h^2 (\nabla p_h, \nabla q_h) = 0 & \forall q_h \in X_h. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

donde $0 < \omega < 1$ es un parámetro independiente de h . La versión lineal de (7) se obtiene reemplazando las formas a , b y c por las de (3) respectivamente.

Aquí hemos aplicado al problema (3) la modificación sugerida por Brezzi–Pitkaranta [1] y Hughes–Franka [3]. A diferencia de (3) aparece un término adicional que puede interpretarse como término estabilizador.

Para calcular la integrales que aparecen en (7) usamos una fórmula de cuadratura, en la que se toman los vértices de cada triángulo como puntos de integración con pesos constantes $\frac{1}{3}$. Sobre la convergencia del método en el caso lineal y no lineal se tienen los siguientes resultados

Teorema 1 *Suponga que las condiciones (4), (5) y (6) se satisfacen. Entonces existe un $h_0 > 0$, tal que para todo $(f, g) \in L^2\Omega^N \times H^1(\Omega)$ y $0 < h \leq h_0$ existe una solución (u_h, p_h) del problema lineal(7), la cual satisface*

$$\|u - u_h\|_{2, \Omega_h \cap \Omega} + h\|p - p_h\|_{2, \Omega_h \cap \Omega} \leq ch^2\{\|f\|_2 + \|g\|_{1,2}\}$$

Demostración: Véase [2].

Teorema 2 *Sea $(u, p) \in C^2(\overline{\Omega})^N \times C^1(\overline{\Omega})$ una solución de(1). Suponga además que el operador linealizado satisface las condiciones(4), (5) y (6). Entonces existe un $h_0 > 0$ tal que el problema(7) tiene solución para todo $0 < h \leq h_0$, la cual satisface el estimativo*

$$\|u - u_h\|_{2, \Omega_h \cap \Omega} + h\|p - p_h\|_{2, \Omega_h \cap \Omega} \leq ch^2$$

Demostración: Véase [2].

2 Aplicación al modelo compresible

Consideremos el flujo descrito por una versión simplificada de las ecuaciones compresibles de Navies–Stokes ($M < 0.1$). En su forma vectorial pueden plantearse de la siguiente forma. Sean $u = (u^1, u^2)$ la velocidad, T la temperatura y p la presión del fluido, entonces tenemos

$$\begin{aligned} -2\operatorname{div}(\mu Du) + \frac{2}{3}\nabla(\mu \operatorname{div} u) + \operatorname{div}(\rho u u^T) - \nabla p &= \rho \vec{g}, \\ -\operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \operatorname{div}(\rho u C_p T) &= 0, \\ \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$	Tensor de deformación,
$\mu = \mu(T)$	Viscosidad dinámica,
$\lambda = \lambda(T)$	Función de conducción de calor,
$C_p = C_p(T)$	Calor específico,
$\rho = \rho(T)$	Densidad,
$\vec{g}$	Fuerza gravitacional.

La densidad ρ es una función en T con $\rho RT = \text{const}$ o $\rho(T) = c/T$. La viscosidad dinámica μ y la función de conducción de calor λ son funciones continuas y diferenciables en T . Además satisfacen las siguientes condiciones

$$\mu(T) > 0, \lambda(T) > 0 \quad \text{para todo } T > 0.$$

Estas ecuaciones describen la dinámica de los procesos **MOCVD** (Metall Organic Chemical Vapor Deposition) que ocurren en los

reactores utilizados en la industria para el desarrollo de semiconductores. Asociadas al sistema (8) aparecen condiciones de frontera de tipo Dirichlet de la forma

$$u^\alpha = g^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \quad T = g^3 > 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

donde, las funciones g^1, g^2 describen el flujo de entrada y de salida en el reactor respectivamente, tomando valor 0 en las paredes del reactor.

La formulación débil del sistema (8) puede escribirse como: encuentre $u \in H_g^1\Omega^2$, $T \in H_{g^3}^1$ y $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a([u, T]; [v, \phi]) + b(p; [v, \phi]) &= (\rho \vec{g}, v), \quad \forall (v, \phi) \in H_0^1(\Omega)^2, \\ c([u, T]; q) &= 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (9)$$

con

$$\begin{aligned} a([u, T]; [v, \phi]) &:= 2(\mu Du, \nabla v) - \frac{2}{3}(\mu \operatorname{div}(u), \operatorname{div} v) \\ &\quad + (\rho u \cdot \nabla u, v) + (\nabla p, v) \\ &\quad + (\lambda \nabla T, \nabla \phi) - (\rho u C_p T, \nabla \phi), \\ b(p; [v, \phi]) &:= (p, \operatorname{div} v), \\ c([u, T]; q) &:= (\operatorname{div}(\rho u), q). \end{aligned}$$

Aquí definimos el producto escalar entre funciones matriciales como

$$(S, T) = \int_{\Omega} s_{ij} t_{ij} dx \quad \text{Notación de Einstein para la suma}$$

las formas en (9) están bien definidas debido a que T satisface un principio del máximo débil y las funciones μ , λ y C_p aparecen en la práctica como potencias de T (véase [2] para una justificación

detallada). Sea $(u, p) \in C^2(\overline{\Omega})^N \times C^1(\overline{\Omega})$ una solución de (1). La linealización del sistema (1) está dada por

$$\begin{aligned} a^{1,2}([\tilde{u}, \tilde{T}], v) &= 2(\mu D\tilde{u}, \nabla v) - \frac{2}{3}(\mu \operatorname{div} \tilde{u}, \operatorname{div} v) \\ &\quad + F((\tilde{u}, \tilde{T}), v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2, \\ a^3(\tilde{T}, w) &= (\lambda \nabla \tilde{T}, \nabla w) + G((\tilde{u}, \tilde{T}), w) \quad \forall w \in H_0^{1,2}(\Omega), \\ b(\tilde{p}, v) &= (\tilde{p}, \operatorname{div} v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^2, \\ c(\tilde{u}, q) &= (\operatorname{div}(\rho \tilde{u}), q) + (\operatorname{div}(\rho' \tilde{T} u), q) \quad \forall q \in X. \end{aligned}$$

Las formas bilineales F, G sólo contienen términos de menor orden y satisfacen los estimativos

$$\begin{aligned} |F((\tilde{u}, \tilde{T}), v)| &\leq c\{\|\tilde{u}\|_2 + \|\tilde{T}\|_2\} \|v\|_{1,2}, \\ |G((\tilde{u}, \tilde{T}), \phi)| &\leq c\{\|\tilde{u}\|_2 + \|\tilde{T}\|_2\} \|\phi\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Demostrar que la linealización satisface las condiciones (4), (5), y (6) no es fácil y hacerlo en este artículo requeriría algunas páginas; por esta razón nos limitaremos a presentar la matriz M de la condición (4). Así

$$M = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \rho' u^1 \\ 0 & \rho & \rho' u^2 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \tilde{u}^1 + \rho' u^1 \tilde{T} \\ \rho \tilde{u}^2 + \rho' u^2 \tilde{T} \\ r \tilde{T} \end{pmatrix},$$

donde r es una constante positiva que se escoge apropiadamente. Como $b(q, Mv) = c(v, q)$, entonces la condición *ii*) de (4) se satisface trivialmente. En [2] también se demuestran algunos resultados sobre la regularidad de la solución del operador linealizado.

Referencias

- [1] F. Brezzi – J. Pitkäranta: *On the stabilization of the finite element approximation of the Stokes equations*, GAMM Conf., Kiel, 11–19 (1984).
- [2] J. Duque: *Numerische Approximation von Strömungsproblemen in der Halbleiterbeschichtung*, Dissertation, Würzburger Universität, Germany (1997)
- [3] T.J.R. Hughes – L.P. Franca: *Some new classes of mixed finite element methods*, in: *Numerical Analysis 1987 (Dundee 1987)*, 135–156, *Pitman Res. Notes Math. Ser. 170*, Longman Sci., Harlow (1988).

JAIRO DUQUE

e-mail : jjduque@mafalda.univalle.edu.co

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE,

CALI, COLOMBIA