



Características del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación primaria en tareas de generalización de patrones numéricos

Martha Lucía Santacruz Cerón

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática

Santander de Quilichao, 2023



Características del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación primaria en tareas de generalización de patrones numéricos

Martha Lucía Santacruz Cerón

Director del trabajo de grado:

MG, Cristian Andrés Hurtado Moreno

Profesor de la Facultad de Educación y Pedagogía

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, énfasis en educación matemática

Santander de Quilichao, 2023

Agradecimientos

*A Dios por haberme dado la oportunidad de continuar ampliando mis conocimientos y
finalizar esta etapa*

A mi familia por siempre creer en mí y por su apoyo constante

*A mis hijos Emir Felipe y Juan Andrés por ceder su tiempo en familia para que yo cumpliera
mi objetivo*

*Al profesor Cristian Andrés Hurtado y demás docentes que participaron de este proceso por
acompañarme en este camino y darme las herramientas tanto académicas como personales
para continuar*

Resumen

En este trabajo de investigación se aborda el problema didáctico de la generalización de patrones en edades tempranas, en tanto que, investigaciones en didáctica del álgebra han mostrado la necesidad de desarrollar pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad en contrapartida de una tradicional idea que el álgebra se reduce a lo simbólico y se aborda en la básica secundaria. En este orden de ideas, para atender este problema en este estudio se analizan las formas del pensamiento algebraico que emergen cuando tres estudiantes del grado quinto de Educación Básica Primaria (9 a 10 años de edad) enfrentan tareas sobre generalización de patrones numéricos en aras de caracterizar dichas formas de pensamiento. Para ello, se toman los elementos conceptuales propuestos en la Teoría de la Objetivación (Radford 2017, 2018, 2021a, 2021b) como referente, además de la propuesta de pensamiento algebraico que reposa sobre esta teoría (Radford, 2012, 2018; Vergel, 2015) y de generalización de patrones (Radford, 2013, Vergel 2019), para rediseñar cuatro tareas sobre generalización de patrones numéricos que son implementadas con los estudiantes en cuestión. La investigación es de tipo cualitativa-descriptiva-interpretativa con un enfoque de estudio de casos.

Las producciones obtenidas se analizan a través de una perspectiva multimodal del pensamiento humano en donde los resultados obtenidos muestran claras evidencias sobre la instanciación de formas de pensamiento algebraico en los estudiantes cuando enfrentan las tareas. Estas formas se enmarcan dentro de un pensamiento de tipo factual que poco a poco evoluciona hacia uno de tipo contextual gracias a la movilización y sofisticación de los medios semióticos de objetivación y la cooperación entre profesora y estudiante en tanto labor conjunta.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, generalización de patrones, medios semióticos de objetivación, labor conjunta.

Abstract

This research paper addresses the didactic problem of pattern generalization at an early age, while research in algebra didactics have shown the need to develop algebraic thinking from the first grades of schooling in contrast to a traditional idea that the algebra is reduced to the symbolic and is addressed in secondary school. In this order of ideas, in order to address this problem, this study analyzes the forms of algebraic thinking that emerge when three students from the fifth grade of Basic Primary Education (9 to 10 years old) face tasks on the generalization of numerical patterns for the sake of characterize these forms of thought. For this, the conceptual elements proposed in the Theory of Objectification (Radford 2017, 2018, 2021a, 2021b) are taken as a reference, in addition to the proposal of algebraic thought that rests on this theory (Radford, 2012, 2018; Vergel, 2015) and pattern generalization (Radford, 2013, Vergel 2019), to redesign four tasks on numerical pattern generalization that are implemented with the students in question. The research is of a qualitative-descriptive-interpretative type with a case study approach.

The productions obtained are analyzed through a multimodal perspective of human thought where the results obtained show clear evidence about the instantiation of forms of algebraic thought in students when they face the tasks. These forms are framed within a factual type of thinking that little by little evolves towards a contextual type thanks to the mobilization and sophistication of the semiotic means of objectification and the cooperation between teacher and student as a joint effort.

Keywords: Algebraic thinking, pattern generalization, semiotic means of objectification, joint work.

Tabla de Contenido

Contenido

Resumen.....	4
Abstract.....	5
Índice de tablas.....	7
Índice de figuras.....	7
Introducción.....	9
Capítulo 1: Aspectos generales de la investigación	13
1.1 Planteamiento del problema	14
1.2 Objetivos	18
1.2.1 Objetivo General.....	18
1.2.2 Objetivos específicos	18
1.3. Justificación.....	19
Capítulo 2: Marco de referencia conceptual	29
2.1. Sobre algunos elementos de la teoría de la objetivación	30
2.2. Sobre el pensamiento algebraico	34
2.3. Sobre la generalización de patrones	36
Capítulo 3: Diseño metodológico y análisis de resultados	39
3.1 Diseño metodológico.....	40
3.1.1 Enfoque de la investigación	40
3.1.2 Proceso de estudio.....	41
3.1.3. Población objeto de estudio	41
3.1.4. Instrumentos y proceso de recolección de la información	42
3.1.5. Categorías de análisis.....	43
3.1.6. Sobre el diseño de tareas	47
3.1.7 Metodología de implementación de las tareas	57
3.2 Análisis multimodal	57
3.2.1 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 1.....	58
3.2.2 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 2.....	67
3.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 3.....	86
3.2.4 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 4.....	100

Capítulo 4: Conclusiones y reflexiones	121
4.1 Conclusiones.....	122
4.2 Reflexiones didácticas	129
Anexos	132
Anexo 1 Producciones de Laura a las cuatro tareas propuestas en la investigación	132
Anexo 2 Producciones de Byron a las cuatro tareas propuestas en la investigación.....	138
Anexo 3 Producciones de Andrés a las cuatro tareas propuestas en la investigación.....	145
Referencias	151

Índice de tablas

<i>Tabla 1 Categorías de análisis empleadas en la investigación</i>	<i>45</i>
<i>Tabla 2. Rejilla sobre expresiones semióticas de la indeterminación y su correspondiente analiticidad</i>	<i>113</i>

Índice de figuras

<i>Figura 1. Esquema sobre el becoming, knowing y la labor conjunta (Tomado de Radford, L. 2014, p.139)</i>	<i>34</i>
<i>Figura 2. Tarea 1 empleada en la investigación</i>	<i>49</i>
<i>Figura 3. Tarea 2 empleada en la investigación.</i>	<i>51</i>
<i>Figura 4. Tarea 3 empleada en la investigación.</i>	<i>54</i>
<i>Figura 5. Tarea 4 empleada en la investigación</i>	<i>56</i>
<i>Figura 6. Secuencia de gestos realizada por Byron al enfrentarse al ítem 2 de la tarea 1 (Captura de pantalla entre 8'11" y 9'18")</i>	<i>61</i>
<i>Figura 7. Producción de Byron en el ítem 2 Tarea 1</i>	<i>64</i>
<i>Figura 8. Operación aditiva realizada por Andrés a partir de los términos hallados en el ítem 1</i>	<i>65</i>
<i>Figura 9. Secuencia de señalamientos de Andrés mostrando la adición de términos para encontrar el siguiente. (Captura de imágenes entre 10'56" y 10'59")</i>	<i>72</i>
<i>Figura 10. Señalamiento de Byron para dar respuesta a la pregunta de la profesora (Captura de imagen 11'31")</i>	<i>76</i>
<i>Figura 11. Operaciones sumativas realizadas por Laura para dar respuesta al ítem 3.....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 12. Movimientos realizados por Laura a la hora de desarrollar una adición (Captura de pantalla 11'39")</i>	<i>80</i>
<i>Figura 13. Señalamiento con el lápiz de Andrés sobre los números que menciona en L7 que va a utilizar para encontrar el siguiente término (Captura de pantalla 14'31")</i>	<i>82</i>
<i>Figura 14. Respuesta escrita de Andrés en donde se observa los números señalados en la imagen 13.</i>	<i>82</i>
<i>Figura 15. Respuesta escrita de Andrés al ítem 3.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 16. Cálculo numérico de Byron para continuar encontrando los términos de la secuencia. (Captura de pantalla 28'50")</i>	<i>85</i>
<i>Figura 17. Señalamiento con el lápiz de Laura indicando el término del número (Captura de pantalla 0'23")</i>	<i>86</i>
<i>Figura 18. Conteo con los dedos de Laura, encontrando el siguiente término no dado de la secuencia numérica. (Captura de imagen 0'21")</i>	<i>87</i>
<i>Figura 19. Señalamiento con los dedos de Byron, indicando que los números pertenecen a los Términos 1 y 2 . (Captura de imagen 0'42")</i>	<i>88</i>

<i>Figura 20. Secuencia de señalamientos con el lápiz de Andrés, sobre los términos a los cuales pertenecen los números. (Captura de imagen 0'42" hasta 0'49")</i>	89
<i>Figura 21. Producción de Laura al responder al ítem 2.</i>	91
<i>Figura 22. Hoja de trabajo de Byron escribiendo cada término para encontrar el Término 20</i>	92
<i>Figura 23. Respuesta escrita por Laura en el ítem 3.</i>	94
<i>Figura 24. Respuesta escrita de Byron al ítem 3 de la tarea 3</i>	96
<i>Figura 25. Secuencia de señalamientos con el lápiz de Laura, sobre los términos a los cuales pertenecen los números de la secuencia y ubicando el lugar donde debería estar el Término 4. (Captura de imagen entre 1'03" y 1'07")</i>	102
<i>Figura 26. Respuesta de Andrés al ítem 2</i>	108
<i>Figura 27. Respuesta de Laura al ítem 3</i>	109
<i>Figura 28. Producción de Laura, al solicitarle expresar mediante una fórmula con cálculos la relación funcional entre los números de la secuencia y el término que le corresponde</i>	114
<i>Figura 29. Producción de Andrés, ítem 4, Tarea 4</i>	119

Introducción

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha brindado orientaciones curriculares para el quehacer docente en diferentes áreas, entre ellas matemáticas. Es así como han surgido los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), que buscan orientar las prácticas curriculares de los maestros en las escuelas en aras del desarrollo progresivo de pensamiento matemático en los estudiantes. Como docentes en ejercicio, no estamos exentos de atender estas propuestas, las cuales invitan como un asunto central el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

En este sentido, se retoma las orientaciones expuestas en estos documentos y en uno de los documentos de actualización curricular llamado Derechos Básicos de Aprendizaje de matemáticas (MEN, 2016) sobre el desarrollo del pensamiento variacional en tanto una de las formas de pensamiento matemático que es ineludible desarrollar desde edades tempranas, el cual, según estos documentos de política pública nacional, se desarrolla por medio del estudio de fenómenos de variación y cambio, en el que el análisis y la identificación de patrones, entre otros aspectos, se torna una tarea importante. Como también es direccionada en uno de los documentos de actualización curricular llamado Derechos Básicos de Aprendizaje de matemáticas (MEN, 2016)

De hecho investigaciones recientes muestran el estudio de este tipo de tareas como asuntos de gran importancia para desarrollar el pensamiento algebraico en la escuela (Godino et al., 2010; Mason, 1999; Vergel, 2014; Radford, 2014; Burgos & Godino, 2018), debido a que estas permiten que los estudiantes a través de su “percepción visual”, puedan analizar ciertas regularidades para llegar a encontrar patrones o comunalidades, las cuales son expresadas a través de diferentes medios semióticos de objetivación, tales como, el lenguaje natural, gestos, tablas, pictogramas, sin tener que conocer todavía el lenguaje alfanumérico para expresar dichas generalidades, pero que marca el inicio de una evolución hacia el dominio de la designación simbólica.

En concordancia con lo anterior, en este estudio se reconoce la necesidad didáctica de desarrollar pensamiento algebraico desde grados iniciales siguiendo la línea de algunas investigaciones sobre este campo, como por ejemplo Godino (2012), Radford (2003, 2012), Vergel (2014). Esto, teniendo en cuenta que muchos maestros tienen una visión reduccionista del álgebra en la escuela, que los hace pensar que este asunto concierne sólo a los grados de educación básica secundaria y media, porque se reduce a un asunto de manipulación simbólica, en donde hay que tener un profundo conocimiento de reglas sintácticas, de cómo mover y manipular los símbolos.

Esta perspectiva se opone a la concepción que el álgebra en la escuela pueda ir apareciendo de forma gradual y progresiva, es por ello que, este tipo de trabajos lo que hacen es colocar una idea que se contrapone a concepciones como esa. Por ello es preciso realizar estudios como este, porque a pesar que ya hay trabajos investigativos en esta línea, todavía sigue haciendo presencia esa concepción limitada del álgebra y es necesario aportar más discusiones a la comunidad nacional e internacional, sobre, cómo sí es posible favorecer el álgebra desde los primeros grados de escolaridad sin que sea obligación utilizar simbolismo alfanumérico.

Teniendo en cuenta lo anterior se propone caracterizar el pensamiento algebraico que emerge en la actividad matemática de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación básica primaria, cuando enfrentan tareas sobre generalización de patrones numéricos, para lo cual se adopta la postura conceptual de la Teoría de la Objetivación (TO), propuesta por Radford (2013, 2014, 2018, 2021). La cual brinda categorías analíticas que permiten, entre otras muchas cuestiones, analizar el encuentro cultural de los sujetos con formas de reflexión y pensamiento históricamente constituidas como lo es, por ejemplo, el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la generalización de patrones, entendiendo que este es posible desarrollarlo desde etapas iniciales escolares de los estudiantes, en las que progresiva y paulatinamente el sentido de indeterminancia, la analiticidad y distintos medios semióticos de objetivación van emergiendo para conseguirlo.

Para realizar esta investigación, se le propone a un grupo de estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Cauca, ubicada en el municipio de Santander de Quilichao en el departamento del Cauca, Colombia, tareas sobre generalización de patrones numéricos. Con estas tareas se busca desplegar un tipo de actividad alrededor de ellas en interacción entre los estudiantes y la profesora autora de esta investigación quien labora como docente, de tal manera que se posibilite formas de pensamiento algebraico al abordarlas. La metodología que se sigue para esto, es de corte cualitativo con estudio de casos, en donde una vez obtenidos el corpus de datos, son analizados a través de un enfoque multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006), en el cual se le presta especial atención a los distintos medios semióticos que emplean los estudiantes cuando se enfrentan a esas tareas (eminentemente numéricas en este caso), en las que deben hallar patrones, generalizarlos, realizar procesos de deducción, entre otros aspectos, que posibilita el estudio este tipo de tareas y con ello dar cuenta de la evolución de su pensamiento algebraico.

Para exponer lo anterior, el presente informe se estructura en cuatro capítulos, tal como se describen a continuación:

En el primer capítulo se encuentran los aspectos generales de la investigación. En este, se describe la problemática en torno al desarrollo del pensamiento algebraico temprano, la cual se visualiza de manera particular, en la institución en donde se realiza el presente trabajo. A continuación, se abordan los objetivos trazados para dar respuesta a la pregunta de investigación de acuerdo a esa problemática; se presenta también la justificación que permite vislumbrar la necesidad e importancia de este tipo de investigaciones, y finalmente se exhiben algunos antecedentes en los cuales se reportan estudios sobre pensamiento algebraico temprano, en especial utilizando la teoría de Radford, los cuales son relevantes para este estudio.

En el segundo capítulo se muestra el marco de referencia conceptual que se adopta en esta investigación. Es así que de esta manera se acoge la TO (Radford, 2014, 2018, 2020, 2021a, 2021b), en donde se presentan algunas nociones fundamentales de esta teoría y, junto con ello, se presenta la caracterización que este autor hace sobre el pensamiento algebraico y la generalización de patrones como una vía para el desarrollo de este pensamiento.

El tercer capítulo se divide en dos secciones. En la primera se exponen todos los aspectos metodológicos utilizados para el desarrollo de este estudio, en el cual se precisa su enfoque y tipo, el proceso que se sigue para su realización, la población con la cual se trabaja, se precisan los instrumentos para recolectar la información, las unidades de análisis empleadas y se describe en detalle todo el rediseño de las tareas de patrones numéricos que se implementan con los estudiantes, las cuales han sido adaptadas de otras investigaciones. La intención de basarse en este tipo de tareas es, que pese a no haber tenido ningún tipo de encuentro cultural con tareas de patrones, sea posible enfrentarse con tareas eminentemente numéricas.

En la segunda sección, se exhibe el análisis de los resultados luego de la implementación de las tareas con los estudiantes objeto de la investigación.

Finalmente, el cuarto capítulo versa sobre las conclusiones de cara a los objetivos trazados y a la pregunta de investigación, además de exponerse un conjunto de reflexiones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, especialmente dirigido para profesores en formación y en ejercicio.

Capítulo 1: Aspectos generales de la investigación

En el presente capítulo, se exponen componentes que han sido importantes para definir la investigación realizada, como son el planteamiento del problema, el cual permite reconocer algunas limitaciones inmediatas sobre el pensamiento algebraico temprano, en las cuales se puede intervenir y que junto con la pregunta de investigación da paso a los objetivos, los cuales se pretenden alcanzar con el presente trabajo; también se encuentra la justificación que permite darle el sentido al trabajo y, por último, los antecedentes, los cuales han brindado orientaciones sobre el enfoque investigativo en el cual se enmarca este estudio.

1.1 Planteamiento del problema

En nuestro país, actualmente se encuentran algunos referentes educativos como son los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), Estándares Básicos de competencia (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) como referentes para la actualización curricular, entre otros, los cuales permiten que los maestros tengan bases para orientar su práctica pedagógica. Estos referentes buscan aportar elementos curriculares, epistemológicos y didácticos, para que los maestros puedan desarrollar competencias y formas de pensamiento matemático en sus estudiantes para que así estén en la capacidad de tomar las mejores decisiones durante el camino de su vida.

Abordando estos Referentes de Calidad, particularmente en el área de matemáticas, se reporta la necesidad de desarrollar el pensamiento matemático expresado en cinco formas, a saber: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y finalmente el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Los cuales se deben articular entre sí para ser desarrollados de manera transversal y progresiva desde los primeros grados de escolaridad hasta finalizar esta.

Pese a lo planteado desde estos documentos, es posible encontrar maestros encargados del proceso de enseñanza que, en la educación básica primaria ponen un énfasis casi exclusivo en el pensamiento numérico, eludiendo así el abordaje de las otras formas de pensamiento matemático y, más aún, la articulación entre ellos (Godino, 2013). Esto comporta que el pensamiento variacional, por ejemplo, no se ha considerado de la manera que se hubiera esperado en las diferentes actividades para el desarrollo del pensamiento matemático abordado desde la escuela (Caballero, M. 2013) , aun cuando ya esté estipulado en los documentos de política pública:

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. (MEN, 1998, p. 51)

Cuando generalmente no se desarrolla este tipo de pensamiento como se debe, el estudio de la variación y el cambio queda por fuera del proceso educativo, sin que los estudiantes tengan la posibilidad de desarrollar un análisis y describir los cambios de un fenómeno determinado. Esto conlleva a que tengan poca oportunidad de participar en acciones desarrolladas dentro de ambientes de aprendizaje propicios para el desarrollo de este pensamiento, evidenciando así su poco progreso y con ello eludiendo la invitación que se hace desde estos documentos curriculares y, no menos importante, el llamado de atención sobre la necesidad de trabajar esta forma de pensamiento que hacen diferentes investigadores de la didáctica de las matemáticas a través de sus distintas investigaciones (Kaput, 2008; Radford, 2013b; Molina & Cañadas, 2018; Vergel, 2020). En este sentido, la generalización de patrones es una de las estrategias más utilizadas para el desarrollo de este pensamiento, a partir del inicio de la escolaridad y de manera progresiva hasta el final de los años escolares. Al igual que los fundamentos curriculares nacionales (MEN, 1998, 2006), investigadores como Radford, L. (2010b), Vergel, R. (2014), Mason, J. (1996), Godino, J. (2012), declaran la importancia de realizar este tipo de tareas para favorecer el pensamiento algebraico.

El pensamiento variacional y el algebraico no son formas de pensamientos distantes sino que es posible encontrar nexos entre ellos de manera natural como por ejemplo, que en ambas formas de pensamiento hay un interés por el estudio de los patrones y su generalización, lo cual implica pensar variacionalmente por lo cual se cree que este tipo de tareas favorecen el pensamiento algebraico.

Por lo que se respecta al pensamiento algebraico, algunas investigaciones internacionales realizadas en la actualidad en educación matemática, muestran la importancia y necesidad de favorecer su desarrollo desde la educación básica primaria. Sin embargo, esta situación es tomada como un desafío, dado el hecho que este pensamiento se implementa en los grados superiores, porque se cree que sólo reside en el trabajo simbólico alfanumérico, y se desconoce así la necesidad de empezar a estructurar

pensamiento algebraico temprano en la escuela primaria (Vergel, R. 2014; Radford, L. 2012). La tesis de partida que sostienen estos investigadores, es que para pensar algebraicamente no es imprescindible el empleo del simbolismo alfanumérico, especialmente en los primeros grados de escolaridad, sino que tal pensamiento puede ser instanciado en estudiantes aún en una ausencia completa de este simbolismo. La necesidad que se empiece el desarrollo de este pensamiento desde edades tempranas radica en el hecho que, según Socas, M. (2011), la experiencia adquirida a través de los años, facilita la comprensión y operatividad de este pensamiento haciendo que se vuelva más sofisticado.

A su vez, la falsa creencia que no se puede pensar algebraicamente sin la presencia de simbología alfanumérica, ligado a que se cataloga como una asignatura muy compleja, se ha convertido en un inconveniente en la escuela para su abordaje. Este hecho implica necesariamente que muchos maestros deben reconocer la necesidad de ahondar sobre el álgebra escolar, proponiendo así, bajo qué estrategias de enseñanza y tipos de tareas se puede lograr el desarrollo temprano de este pensamiento, en el marco de una *labor conjunta* desplegada entre maestros y estudiantes con este propósito. Desde la TO la configuración de la *labor conjunta* es la que conduce a un trabajo que logra suplir los intereses respecto a este pensamiento.

Teniendo en cuenta lo anterior, es evidente que la formación docente requiere una reestructuración en este sentido, para lo cual, es preciso promover que dichos docentes reconozcan que el pensamiento algebraico se puede desarrollar en los estudiantes desde edades tempranas. Para tal efecto, sería conveniente que haya claridad sobre el abordaje de este pensamiento en niveles tempranos en el currículo de docentes en formación y en ejercicios, y así luego poder desarrollarlo con pleno conocimiento (Godino, J. 2013).

A pesar que son varias las investigaciones realizadas frente a pensamiento algebraico en edades tempranas (Pinto & Cañadas, 2021; Narváez & Cañadas, 2023), se ve la necesidad de continuar en esta línea, por tal motivo se retoma a Radford, L. (2011), quien

reconoce la importancia de investigar cómo se desarrollan otras formas de este pensamiento dependiendo del tipo de tareas que se plantean a los estudiantes.

Vergel (2015.) también reconoce la importancia de reconocer las formas de pensamiento algebraico tal como lo expresa “Asumimos como un problema didáctico la emergencia de formas de pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones” (p.9). Esto teniendo que sea imprescindible el uso del simbolismo alfanumérico, más bien prestar especial atención a expresiones como gestos, ritmos, miradas, palabras, esto es, de formulaciones que son desplegadas por estos.

Teniendo en cuenta lo anterior y además planteamientos como los de Vergel (2014) al indicar que el estudio de las formas de pensamiento algebraico se delimita como un problema didáctico, debido a que tanto los docentes, estudiantes y la organización y desarrollo de la clase están en continua relación, es allí en donde se debe entender la aparición de estas formas de pensamiento en donde el tipo de preguntas que hace el profesor, cómo se plantean las tareas, cómo los estudiantes las abordan y cómo se involucran en la actividad (Vergel, 2016) brindan la posibilidad de analizar la emergencia de estas formas de pensamiento, por esta razón es en donde se debe llevar a cabo esta investigación para abordar cómo se desarrolla el pensamiento algebraico y cómo se expresa esto a través de diferentes medios semióticos de objetivación que los estudiantes emplean para pensar de esta manera y comunicar sus ideas algebraicas.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, en cuanto a desarrollo del pensamiento algebraico temprano, sobre el reconocimiento y análisis de los diferentes tipos de generalización que puedan surgir y el tránsito entre ellos en general sobre el surgimiento y el, son elementos que están vigentes en el campo de la investigación en educación matemática (Vergel 2014). En este trabajo se explora la posibilidad de promover la emergencia de este pensamiento y el análisis de las formas que emergen de este, en estudiantes de quinto grado de educación básica primaria, observando y analizando detalladamente los medios semióticos de objetivación empleados a través de la

generalización de patrones numéricos, lo que significa que se trabajará con el desarrollo de tareas solamente con secuencias numéricas y no de tipo figurales como suele presentarse en muchas investigaciones nacionales e internacionales interesadas en este aspecto.

Esto teniendo en cuenta que autores como Radford (2010) muestra que patrones gráficos espaciales y geométricos ayuda a la acción perceptiva para que los estudiantes encuentren patrones y los generalicen, pero la intención de este trabajo es explorar la posibilidad que a pesar de ser su primer encuentro cultural con este tipo de tareas, puedan encontrar relaciones entre números para lograr la generalización.

Con base en las razones expuestas anteriormente surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico que emerge en la actividad matemática de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación básica primaria cuando enfrentan tareas sobre generalización de patrones numéricos?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Caracterizar el pensamiento algebraico que emerge en la actividad matemática de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación básica primaria cuando enfrentan tareas sobre generalización de patrones numéricos.

1.2.2 Objetivos específicos

- Articular en el diseño de un conjunto de tareas elementos teóricos sobre el pensamiento algebraico temprano y la generalización de patrones, que posibiliten en un grupo de estudiantes del grado quinto de educación básica primaria el desarrollo de este pensamiento.
- Documentar los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática de los estudiantes de quinto grado al desarrollar las tareas propuestas.
- Identificar la evolución del pensamiento algebraico de los estudiantes de quinto grado en su actividad matemática.

1.3. Justificación

En este apartado, se dan elementos que justifican la importancia y necesidad del desarrollo de este trabajo en diferentes direcciones. Una de las razones por la cual este trabajo se considera importante es que se plantea abordar una problemática vigente y que es de interés para la comunidad educativa tanto nacional como internacional, lo cual se corrobora con los trabajos que actualmente se están dirigiendo en torno a la búsqueda de intereses que permitan desarrollar pensamiento algebraico temprano. Investigaciones recientes como las de Radford, L. (2018, 2020, 2021) y Vergel, R. (2019, 2021), muestran que todavía hay una búsqueda importante por aportar al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad y de forma explícita autores como Godino et al. (2012) manifiestan la necesidad de seguir caracterizando el pensamiento algebraico temprano pues su caracterización puede y debe seguir siendo pensada.

Estas nuevas investigaciones pueden contribuir con muchos elementos para realizar una discusión amplia, sobre todo para los docentes en ejercicio, en relación con la idea que hasta el momento se ha tenido del álgebra, e incluso, proyectando estas discusiones a nuevas propuestas curriculares que estén encaminados a desarrollar este pensamiento desde edades tempranas, sin que tenga exclusividad el simbolismo alfanumérico. Con este tipo de investigaciones se propone mostrar más evidencias que estudiantes de edades iniciales pueden llevar a cabo procesos de deducción, de generalización, de abstracción, que son fundamentales en el desarrollo del pensamiento algebraico; abordándolo con tareas con las cuales progresivamente se puede ir avanzando en la materialización del saber algebraico, sin necesidad de esperar que lleguen a la básica secundaria para ello.

Trabajos de esta naturaleza también son importantes porque atienden el llamado que hace explícitamente el MEN, a través de las propuestas curriculares y las orientaciones que disponen para las escuelas colombianas. En documentos como los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006), Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), indican que es necesario el desarrollo del pensamiento matemático y dentro de este pensamiento dos de los cuales que se deben abordar es el

pensamiento variacional y el pensamiento numérico, entendiendo que según los documentos el pensamiento variacional comporta:

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. (Estándares, 2006)

En cuanto al pensamiento numérico y sistemas numéricos:

En esta propuesta vamos a hablar del pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera. (Lineamientos, 1998)

Desde esta perspectiva, este trabajo recoge y reconoce los llamados que hacen estos documentos de política pública nacional y mediante el avance de este estudio lo que se busca, también, es contribuir al desarrollo de algunos elementos que en estos documentos se reconoce como son estas dos formas de pensamiento matemático. En este sentido lo que se pretende es que a través del estudio de generalización de patrones numéricos, los estudiantes reconozcan variaciones y cambios, hallen patrones y los generalicen, los expresen a través medios semióticos de objetivación. En cuanto a lo numérico se produce al permitir que trabajen con cantidades, hacer procesos de conteo, hacer manipulación de cantidades, desarrollo de fórmulas que permitan cuantificar las magnitudes y que posibiliten determinar cambios a través de las cantidades numéricas, entre otras que hacen parte del desarrollo de este pensamiento.

También se atiende a otro documento emanado por el MEN para actualización curricular DBA de matemáticas (2016), en donde se puede ver que casi 20 años después de la publicación de los Lineamientos se continúa diciendo de forma explícita que hay que trabajar tareas que promuevan en los estudiantes el hallazgo de los patrones y su generalización en aras de obtener generalizaciones tanto aritméticas como algebraicas, por

ejemplo, con el enunciado número nueve para el grado cuarto que realiza de forma directa la invitación a los profesores a trabajar sobre estas tareas "Identifica patrones en secuencias (aditivas o multiplicativas) y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas" (MEN, 2016, p.35) lo cual evidencia que el trabajo con patrones desde la primaria es un asunto que debe ser de interés y de debate para los estudiantes. En este caso lo hace de manera contundente para estudiantes del grado cuarto en tareas con patrones, que le permite a los estudiantes hacer generalizaciones tanto aritméticas como algebraicas, lo cual muestra que este trabajo está acorde con este tipo de orientaciones porque como se precisará en el marco conceptual de este estudio la idea de generalización aritmética y algebraica va a aparecer como un asunto importante dentro de este y su encuentro en los estudiantes va a aparecer como se espera.

Otro elemento por el cual es de interés este tipo estudio y que aporta a la comunidad investigativa y de profesores que están interesados en el desarrollo del álgebra temprana, es que propone un conjunto de tareas que se pueden convertir en una estrategia para que profesores pueden rediseñarlas o tomarlas como modelos para diseñar las propias, de acuerdo a sus necesidades específicas y a los contextos de sus aulas, y además que nuevas investigaciones le apuesten al desarrollo del pensamiento algebraico desde la perspectiva situada, para que las amplíen y profundicen. Con estas tareas que tienen una intención, una carga epistémica de acuerdo a Rojas, P. & Vergel, R. (2019), se pretende acompañar a los estudiantes a encontrarse con un saber que se ha ido constituyendo histórica y culturalmente (Radford, L. 2014).

También se considera importante el desarrollo de este trabajo en el sentido que se inscribe en un marco de referencia conceptual que es vigente como lo es la TO (Radford, L. 2014; Vergel, R. 2014), la cual ha cobrado mayor fuerza en los últimos años, según muestran las investigaciones de estos autores y otras que se han derivado de ellas. Esto en el marco de una teoría que se ha venido desarrollando y que también posibilita ubicar unas categorías teóricas que se hacen operativas en el momento de analizar producciones de estudiantes en el aula. Es en este sentido, se considera que el uso de la TO y del enfoque

de pensamiento algebraico y de generalización de patrones que se ubica en este marco, brindan categorías teóricas pertinentes y adecuadas para dar cuenta del propósito de esta investigación.

Como una de estas categorías se menciona la idea de Labor conjunta que teniendo en cuenta a Radford (2021a) se puede decir que es la actividad que se desarrolla entre el profesor y el estudiante cuando unidos laboran para lograr un objetivo común dentro de una relación de cooperación humana en donde se trabaja hombro con hombro (Pantano, O.,2020). Esta idea de labor conjunta además de ser muy importante, es operativa en el sentido que es posible evidenciarla en la interacción del maestro y estudiante alrededor de un propósito común, a saber: el encuentro material de estudiantes con un saber histórico cultural, como lo es el saber algebraico, a través de formas usuales de ver, percibir, estudiar, analizar, manipular, y en general pensar, las secuencias de patrones numéricos el cual buscan encontrar al enfrentarse a las tareas propuestas. Dicha labor se enmarca dentro de una ética comunitaria ((Radford, en prensa) en donde es necesario que exista un compromiso, el cuidado del otro y la responsabilidad entre estudiante y profesor o entre los mismos estudiantes para que en realidad se de una labor conjunta.

Además, este estudio deja unos resultados en la Institución Educativa en donde se desarrolla, deja evidencias de las producciones de los estudiantes que sirven como insumo para profesores que trabajan en esta Institución para emprender acciones que conlleven el mejoramiento de sus prácticas de aula y por ende a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

Por último, pero no menos importante, está el hecho que no se puede desconocer el aporte que este trabajo brinda en la formación pedagógica, didáctica e investigativa de quien lo desarrolla, aporta a sus competencias como maestra en ejercicio puesto que le permite entender de mejor manera la complejidad del aula, el desarrollo del pensamiento matemático y además actuar en esa complejidad buscando y fomentando de manera particular aportar al pensamiento algebraico en los estudiantes en donde se sitúa este estudio.

1.4. Antecedentes

Para finalizar este capítulo, se reportan algunos antecedentes que se enmarcan dentro del desarrollo del pensamiento algebraico temprano, los cuales se consideran de importancia para la realización del presente trabajo, tal y como se señalará al finalizar la presentación de estos estudios.

En primer lugar se presentan las investigaciones realizadas a nivel nacional.

Hernández & Tapiero (2014) realizaron un trabajo en la Universidad del Valle, el cual fue denominado “Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de educación básica primaria”. El objetivo de dicho estudio fue favorecer el desarrollo de este razonamiento matemático a partir de una secuencia didáctica sobre la generalización de patrones, proponiendo elementos de reflexión para docentes en formación o en ejercicio en torno a las necesidades y posibilidades del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de esta etapa de la educación.

Entre las principales conclusiones de este trabajo, se puede destacar que los estudiantes realizaron justificaciones, argumentaciones y conjeturas entre distintas magnitudes, logrando ciertos niveles de abstracción y generalización que se reflejaron de forma progresiva en el estudio. En este sentido, la secuencia didáctica se presentó como un recurso valioso para propiciar este tipo de razonamiento matemático, observándose indicios del desarrollo de dicho razonamiento en los sujetos de estudio, como la identificación de variaciones cualitativas y cuantitativas, el reconocimiento de relaciones aritméticas y covariaciones.

Vergel (2014) en su tesis doctoral direccionó su estudio con miras a determinar y analizar la configuración del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de los grados cuarto y quinto de básica primaria, después de haber sido introducidos en el desarrollo de actividades relacionadas con la generalización de patrones.

Como derivación de dicho estudio, se dio gran aporte al proceso de semiótico cultural y su relación con las técnicas que los estudiantes, aún sin un conocimiento previo,

logran exhibir para dar respuesta o solución a actividades relacionadas con la generalización de patrones y la tipificación del pensamiento algebraico en grados inferiores al bachillerato. Igualmente fue posible concluir que es viable incorporar el pensamiento algebraico en el plan de estudios de básica primaria, con lo cual reduciría notoriamente el impacto que sufren los estudiantes en grados superiores al enfrentarse por primera vez con este tipo de pensamiento.

Lasprilla (2014), por medio de cuatro tareas sobre generalización de patrones (2 figúrales, 2 numéricas) muestra como la iconicidad hace parte de lo semiótico y desarrollando pensamiento algebraico mencionado por Radford (2008), categoriza los procesos de objetivación empleados por los estudiantes dentro de las formas de pensamiento algebraico, para analizarlos. Demostrando así que con los diversos recursos semióticos también se evidencia la emergencia de este pensamiento y no necesariamente con la escritura de símbolos alfanuméricos. Concluye con el hecho que los estudiantes al emplear estrategias aritméticas para completar sus tareas, desarrollan pensamiento algebraico de tipo factual.

Moreno, R. (2014) centró su atención en observar el proceso de objetivación en un grupo de estudiantes de grado sexto de bachillerato partiendo de la movilización y por ende la evolución de los medios semióticos de objetivación que emergen en el transcurso de la experiencia. Focalizó su análisis en el proceso de la contracción semiótica, abordado desde la óptica de la teoría cultural de la objetivación. Se diseñaron actividades con relación a la generalización de patrones figúrales que conducían a una movilización de los recursos semióticos partiendo de la acción mutua.

Como resultado de esta experiencia se evidenció la evolución de dos nodos semióticos “el conteo de lo oculto y tapar para comparar”, en donde los estudiantes adoptaron estrategias no conocidas para dar solución a lo solicitado, dicho lenguaje progresó marcando la evolución de los medios semióticos en los estudiantes.

En la investigación realizada por Gustin (2017), en donde al identificar medios semióticos y procesos de objetivación en 30 estudiantes del grado séptimo quienes

desarrollan 4 tareas sobre generalización de patrones, logra identificar diferentes tipos de generalizaciones que a su vez conlleva a distinguir diferentes formas del pensamiento algebraico (Radford, 2013). Reconoce la utilización de dibujos auxiliares, señalamientos, deícticos espaciales, el ritmo, la correspondencia, los tratamientos, que fueron emergiendo a medida que se iba presentando cada tarea. La utilización de estos medios semióticos dio paso a los nodos semióticos, lo que da cuenta que se movilizan de manera simultánea y se evidencia que hay una toma de conciencia de los objetos matemáticos por lo cual se alude a sistemas semióticos para nombrarlos.

En cuanto a la iniciación en el álgebra, Rojas & Vergel (2018), exponen algunas actividades para orientar el trabajo en el aula escolar que fueron recolectadas en su investigación y donde incitan a tener en cuenta cómo la algebrización del currículo (Kaput, 2000), tiene sentido si se detalla que la pretensión es tener un aprendizaje de las matemáticas con comprensión y significado, y esto lo recogen los ejercicios relacionados con generalización de patrones. Además, se muestra que no es necesario conocer el simbolismo alfanumérico para acercarse al pensamiento algebraico, aunque la expresión de este por parte de los estudiantes se realiza de una manera multimodal en donde como investigadores se debe estar muy atentos para entender lo que están mostrando de acuerdo a los componentes analíticos del pensamiento algebraico planteados por Radford (2010)

Carmona & Velasco (2018) presentaron una propuesta encaminada al análisis del pensamiento algebraico que ponen en acción un grupo de estudiantes de quinto grado de una escuela de Tuluá, Valle, en el momento en que son confrontados a realizar tareas relacionadas con la generalización de patrones de secuencias figurales. Para ello, las autoras tuvieron en cuenta la propuesta de Radford (2014) y Vergel (2014), apoyada en la teoría de la objetivación.

Los resultados obtenidos a partir de este estudio arrojan que los estudiantes tuvieron la capacidad de activar elementos propios del pensamiento algebraico para desarrollar las tareas propuestas en el aula de clase; todo ello a través de generalizaciones aritméticas las cuales posteriormente progresaron al punto de convertirse en generalizaciones algebraicas,

posteriormente lograron ampliar los esquemas por medio de actividades abstractas, con lo cual concibieron técnicas remotas de la secuencia, también lograron evidenciar el uso del pensamiento algebraico contextual al reflejarse la indeterminancia y el carácter operatorio.

Alméciga (2020), inclina su investigación a la emergencia del pensamiento algebraico en adultos por medio de la caracterización de medios semióticos de objetivación, debido a que las investigaciones enmarcadas dentro de la Teoría de la Objetivación (Radford 2014), se centran en el pensamiento algebraico con estudiantes de ciertas edades, pero no se han realizado con estudiantes de edades enmarcadas dentro de “adultos”. Por tal motivo se escogieron los estudiantes con mayores edades del ciclo V y VI (10 y 11) de un municipio de Cundinamarca, en donde se pudo concluir que la movilización de los recursos semióticos se da por medio del lenguaje natural. Debido a su edad se esperaba que se manejara el lenguaje “formal” para dar cuenta de relaciones de covariación y variables dependientes e independientes.

A continuación se presentan algunos estudios que se han realizado a nivel Internacional.

Radford (2010b) desarrolló una de sus numerosas investigaciones acerca de la generalización de patrones, teniendo por título en esta oportunidad “Niveles de generalidad y tipos de generalización en actividades de patrones”. Considerado como uno de los referentes más importantes cuando se trata de estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje temprano de las matemáticas en el campo del pensamiento algebraico. Este autor pretendió en esta investigación establecer una distinción entre la generalización de patrones algebraicos y otras formas de generalización, con el objeto que las primeras puedan ser implementadas como recurso didáctico en la educación. Entre los resultados más notables de esta investigación, se debe señalar la caracterización de generalizaciones algebraicas, estableciendo una tipología ilustrada mediante ejemplos concretos en su trabajo. En un esfuerzo por describir esta caracterización, Radford estableció que estas capas de generalidad se describen por los medios semióticos de objetivación al que acuden los estudiantes para efectuar tales generalizaciones.

En esta misma línea de investigación se encuentra el trabajo realizado por Callejo et al. (2016), quienes efectuaron su estudio enfocándose en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación básica primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales con una sucesión de figuras. Los resultados indicaron que el pensamiento algebraico se puede iniciar con la coordinación de la estructura espacial y numérica que se manifiesta por el uso de representaciones gráficas para efectuar un recuento. En este sentido, la modificación de una representación gráfica a una estrategia funcional supone un salto cualitativo puesto que involucra apoyarse en una figura particular para explicar los cálculos, o dar explicaciones sobre las figuras en general usando la indeterminación.

Morales et al. (2017) enfocan su investigación hacia los tipos de patrones que generan estudiantes de 6 y 7 años, debido a que muchas investigaciones han evidenciado que tanto los que se inclinan a la iniciación al álgebra escolar, como los que se inclinan al *early algebra*, reconocen la importancia que los patrones tienen para la generalización, la cual en este caso se desarrolla con bloques lógicos que conllevan a encontrar seriaciones reiterativas y no reiterativas, que permitieron descubrir un patrón, evidenciando que en estas edades ya dan cuenta de justificaciones verbales adecuadamente, permitiendo así conocer lo que entienden que deben hacer. Cabe resaltar que a pesar que encontraron el núcleo en las tareas, estas fueron desarrolladas con patrones reiterativos, muy pocos estudiantes lo hicieron con los no reiterativos, posiblemente tenga que ver el hecho que en cursos anteriores se haya trabajado con patrones, pero sin tener en cuenta otras variables necesarias para desarrollar patrones lógicos.

En este sentido, se considera que los antecedentes descritos brindan aportes a esta investigación en cuatro dimensiones. Primero, sustentan la existencia de una problemática en cuanto al poco desarrollo de pensamiento algebraico temprano tanto en escenarios nacionales como internacionales. Segundo, los enfoques teóricos expuestos dan pautas para enmarcar el trabajo investigativo que se realiza. Tercero, aportan en la validación y rediseño de tareas que se aplican a los estudiantes; y cuarto, contribuyen a la

manera de manipular los datos y el posterior análisis de las producciones de los estudiantes.

Capítulo 2: Marco de referencia conceptual

En este capítulo se aborda la conceptualización que en este estudio se toma sobre el **pensamiento algebraico**, la cual se fundamenta en la propuesta de Radford, L. (2014) de la **Teoría de la Objetivación**. En este orden de ideas, en un primer momento se presentan algunos elementos de esta teoría, luego se caracteriza la forma de pensamiento algebraico y finalmente se presentan algunos componentes que hacen referencia a la estrategia que en este trabajo se toma para abordar el pensamiento algebraico: la **generalización de patrones**.

2.1. Sobre algunos elementos de la teoría de la objetivación

Se parte del hecho que para esta teoría, el saber se define como “un sistema histórico y culturalmente constituido de procesos corpóreos, sensibles y materiales” (Radford, L. 2018, p.3). En tanto sistema no es estático, pues está constantemente en transformación, lo que conduce a la importancia que tiene la cultura dentro esta teoría y la evolución que va teniendo a través del tiempo, la cual a su vez conlleva a la evolución de los saberes. Así, en el momento en el que el sujeto llega a este mundo ya existe todo un recorrido de saberes (científicos, artísticos, financieros, matemáticos) y es allí donde hace su aparición la objetivación como proceso de toma de conciencia de dichos saberes, porque esos saberes ya se encuentran incrustados en la memoria cultural de la humanidad, ya se han ido transformando, han sido producto de la labor de otras personas a través del tiempo.

Dicha objetivación se da en el momento en el que se reconoce eso que se objeta, lo cual, aterrizándolo al entorno escolar se va materializando gracias a la ayuda de las tareas que se plantean para el desarrollo en el salón de clase, en donde el saber se va actualizando poco a poco en el sujeto (por lo cual se le llama procesos de objetivación), de acuerdo con Pantano O (20014), llegando así a instanciarse en el estudiantes un conocimiento.

Ese conocimiento no se reconoce como sinónimo de saber, más bien es la forma como se manifiesta ese saber en el sujeto, para lo cual los estudiantes utilizan los gestos, los símbolos, la percepción, el lenguaje, los cuales en la TO se han llamado medios semióticos de objetivación, para expresar esa actualización del saber que ha estado mediado por las actividades (Radford, L. 2012).

Como lo manifiesta el autor “la objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente”. (Radford, L. 2014, p.141). Tal toma de conciencia no se plantea como algo que encontramos dentro de nosotros, sino desde un punto de vista de relación con el mundo en donde las distintas

actividades desarrolladas y expresadas por los medios semióticos de objetivación, juegan un papel importante para esta reflexión.

Estos medios semióticos denominados así por Radford, L. (2003), son los que permiten que se evidencie el encuentro que está teniendo el estudiante con su cultura, lo cual conlleva a que el aprendizaje sea a conciencia. Como lo afirma Radford (2021b, p.136) “En los procesos de objetivación, por lo general, docentes y alumnos recurren a una variedad de artefactos, signos y otros recursos lingüísticos”. Es por esto que se debe prestar especial atención a la forma en que los estudiantes movilizan estos medios semióticos de objetivación.

Cuando estos medios semióticos se manifiestan de manera simultánea, conlleva a la idea de *nodo semiótico*, que, de acuerdo con Radford, L. (2013a), se define como parte de la actividad desempeñada por los estudiantes en donde utilizan varios medios semióticos de manera sincrónica para expresar el pensamiento que están desarrollando en el momento de enfrentarse a la objetivación.

Otro punto importante se refleja cuando al expresar el pensamiento se evidencia una evolución de los medios semióticos empleados en tanto que estos se refinan, se contraen en extensión, tal como lo menciona Radford, L. (2021)

Este proceso conduce a una contracción de la actividad semiótica previa, lo que resulta en una conexión más refinada de recursos semióticos. El significado de este proceso es que refleja un nivel más profundo de conciencia e inteligibilidad del problema en cuestión. Tomo esto como evidencia de lo aprendido. El nombre de este proceso es contracción semiótica. (p.139)

La contracción semiótica se toma como evidencia de la instanciación del saber en los estudiantes a medida que evoluciona en sus procesos de objetivación.

Además de lo mencionado, también se debe tener en cuenta que como seres humanos, no sólo se trata de los procesos de objetivación, también es importante el “ser” ya

que la afectividad está presente en cada instante de nuestra vida. Ese “ser” también se va transformando a medida que se va dando la transformación del saber. Es por esta razón que en el caso particular del salón de clase se puede decir que no sólo se produce conocimiento sino también subjetividades.

Tomando como punto de partida lo anterior, Radford, L. (2014, p.142) plantea que “la subjetivación consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo”. Partiendo de esta idea, se da la noción de procesos de subjetivación, debido a que la transformación es permanente tanto en la cultura como en el sujeto, por eso se menciona que es una relación de coexistencia, en donde la una cambia gracias a la otra y viceversa (Radford, L., 2018).

Otra categoría importante dentro de la TO es la de actividad. Esta se entiende como un esfuerzo conjunto buscando satisfacer las necesidades de los sujetos como colectivo, en donde al producir sus medios de conservación, también se producen a sí mismos como seres humanos (Radford, L., 2020). A raíz de lo que significa en esta teoría la actividad se percibe como *labor conjunta* (Radford, 2016).

La labor conjunta es denominada como el eje central de la teoría de la objetivación (Radford, L., 2021b), por cuanto, tal y como se ha mencionado anteriormente, el sujeto no se produce desde su interior sino en ese encuentro con la parte histórico-cultural que le permite supeditar relaciones con el mundo lo cual se logra por medio de la interacción social como un intercambio de perspectivas de los participantes (Vergel, R., 2015, p.72), dando lugar a la producción de un pensamiento colectivo, el cual contiene subjetividades, que según lo planteado por Radford, L. (2013, p.5), deben ser “reflexivas, solidarias y responsables”. Si se habla particularmente del salón de clases, esta idea de labor conjunta conduce a que los procesos de enseñanza y aprendizaje se vean como uno solo realizado entre profesor y estudiante guiados en un esfuerzo material, sensible, presente en espacio y el tiempo y siempre guiado por un objetivo común: el encuentro cultural con un saber (el saber matemático de tipo algebraico en este caso) y bajo relaciones sociales particulares

establecidas entre los que hacen parte de la labor: el compromiso por lo que juntos están realizando, el cuidado por y con el otro y, finalmente, la responsabilidad como esfuerzo de entender al otro (Radford, en prensa). Radford (2016) sostiene que:

La actividad [labor conjunta] es una invitación a considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de acuerdo con la manera en que los profesores y estudiantes participan en la actividad en el aula. Es una invitación a atender las maneras sensuales en las que los profesores y estudiantes traen a primer plano las ideas y producen significados matemáticos. (p .2)

En este punto es importante destacar que no por el simple hecho de estar juntos o realizar algo juntos maestros y profesores ya despliegan una labor conjunta. Se requiere más que el solo contacto físico, espacio temporal, para que realmente se produzca tal tipo de actividad. Tal como el mismo Radford (2020) lo indica: “La labor conjunta implica un trabajo de profesores y estudiantes que no es simplemente realizar algo juntos, sino también *realizarse* como sujetos histórico-culturales, es decir, como sujetos comunitarios, solidarios y responsables con el otro (p.29). Ciertamente, y tal como lo señala Pantano (2020), analizar la labor conjunta desplegada entre maestros y estudiantes permite identificar cómo estos laboran juntos, hombro a hombro, unificando esfuerzos materiales y sensibles por producir-se formas de reflexionar, de actuar y expresar las maneras como se van encontrando con el saber (algebraico).

De acuerdo con lo anterior, es la labor conjunta desplegada entre maestros y estudiantes la que permite poner en movimiento el saber algebraico, esto es, a materializarse y transformarse en los estudiantes. Tal materialización del saber en los sujetos es lo que en la TO se llama conocimiento. Es así como Vergel (2019) reconoce que “Este conocimiento, representado en las diversas producciones semióticas de los estudiantes, necesariamente paga tributo a la actividad [labor conjunta]” (p. 10). No obstante, conviene resaltar que como la transformación no es solo de conocimiento sino también de seres, es la labor conjunta la que se ubica en el centro de ambos procesos y propulsa su desarrollo.

Con los elementos mencionados anteriormente, se puede concluir que en el ámbito educativo, cobra gran importancia el encuentro consciente con el saber, generado por medio de la labor conjunta que se va configurando en el salón de clases entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante, que permite refractar en el sujeto todo el saber constituido histórico y culturalmente, el cual está en constante cambio y además es manifestado a través de las acciones, gestos y expresiones (Vergel, R., 2014). Esta labor conjunta permite la transformación tanto del profesor como del estudiante en una relación de “interacción y cooperación humana” (Vergel, R., 2019, p.10) alrededor del trabajo en conjunto.

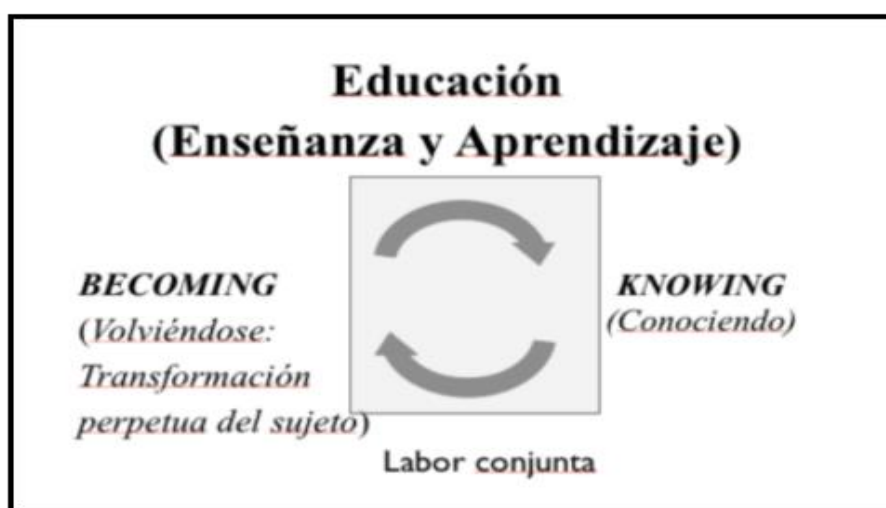


Figura 1. Esquema sobre el becoming, knowing y la labor conjunta (Tomado de Radford, L. 2014, p.139)

2.2. Sobre el pensamiento algebraico

Acerca de este pensamiento, autores como Radford, L. (2014) y Vergel (2014, 2015, 2019, 2022) han dirigido investigaciones sobre la forma como se desarrolla el pensamiento algebraico en jóvenes estudiantes. Para estos autores, el pensamiento algebraico es una forma de pensar que tiene unas características particulares, las cuales han tomado sentido a través de la historia y la cultura.

El pensamiento algebraico escolar, según Vergel, R. (2022)

Rescata algunas concepciones como: El simbolismo alfanumérico no es una condición para pensar algebraicamente (Mason, Graham, Mimm, 1985). El álgebra es una

actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación (Kieran, 2007). El álgebra es inherente a la aritmética (Carraher, Schliemann, 2007 p.669). La actividad simbólica es algebraica (Kaput et al, 2008). El álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma (Subramaniam, Banerjee, 2011, p.87).

Además se tiene en cuenta la propuesta de Radford (2013) y Vergel (2015), la cual alude que este pensamiento se caracteriza por tres componentes o vectores analíticos, los cuales se encuentran estrechamente relacionados, a saber: la **indeterminancia**, que tiene que ver con incógnitas, variables y parámetros; la **analiticidad**, entendida, por un lado, como el carácter operatorio con los objetos indeterminados, y por otro, como el proceso para deducir una “regla o fórmula”, la cual no necesariamente se realiza con símbolos alfanuméricos sino que también se puede expresar a través de otros sistemas semióticos como el lenguaje natural y finalmente la **designación simbólica o expresión semiótica**, en la que el sujeto le da un nombre, expresa, a estos objetos y procesos.

Además Radford, L. (2010) también presenta tres formas o estratos de pensamiento algebraico a través de los cuales el sujeto moviliza su actividad reflexiva en relación con los medios semióticos de objetivación que emplea. Estos se encuentran conectados con los tres vectores que caracterizan dicho pensamiento, los cuales se mencionan a continuación: **Pensamiento algebraico factual**. En este estrato de pensamiento se usan los gestos, las palabras, el ritmo y la actividad perceptual, en el desarrollo de la actividad de generalización. Aquí la indeterminancia no alcanza a ser expresada por medio de palabras, es decir no ha alcanzado el nivel de enunciación (Vergel, R., 2015). Así por ejemplo, en esta forma de pensamiento, los señalamientos con la mirada, el dedo o el lápiz, juegan un papel central, lo cual conduce a decir que la indeterminancia queda implícita.

Pensamiento algebraico contextual. En este estrato se evidencia una maduración en las expresiones semióticas (en tanto contracciones semióticas), dando paso a la utilización de frases clave como “figura”, “número”, “quito uno arriba”, dando a entender que la

indeterminación ya se encuentra de forma explícita en lenguaje natural volviéndose objeto de discurso al ser objeto de conciencia por parte del sujeto y alude a ella de forma explícita a través de los medios semióticos que son de su alcance. Aquí se producen formas reducidas de expresión tanto en el discurso como en la generalización se toma la noción de **contracción semiótica**, la cual retoma los elementos más importantes que se han expresado con las frases clave cuando se desarrolla la actividad de generalización.

Pensamiento algebraico simbólico. En este estrato, las frases claves ya han tomado otra forma de ser simbolizadas, lo que evidencia que el cambio que se da del estrato contextual al simbólico es contundente debido a que la representación se da en signos alfanuméricos, siendo un cambio complejo por la implicación del reemplazo de expresiones espacio temporales por los nuevos signos.

2.3. Sobre la generalización de patrones

Para Vergel, R. (2014), “generalizar significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve” (p. 29). Siendo la generalización de patrones reconocida como de gran importancia para el desarrollo del pensamiento algebraico, entre otras cosas porque permite el acercamiento a situaciones de variación y cambio (Vergel, R. 2015), constituyéndose en el mejor camino para ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento algebraico.

De acuerdo con Radford, L. (2013), la generalización de patrones contempla tres problemas o procesos en donde al generalizar, el sujeto puede advertir el objeto matemático si es el caso sin necesidad de estar viéndolo. Por ello, es necesario que cuando se desarrolle el proceso de generalización de patrones, se observe con atención el conjunto de acciones realizadas por los estudiantes (gestos, lenguaje, actitud), las cuales indican que al realizar la actividad se está también buscando la manera de expresar lo que se está pensando o mejor cómo se está generalizando (Vergel, R., 2015). Estos tres procesos son:

El problema fenomenológico. En el momento en que se enfrentan a una tarea de generalización de patrones, lo primero que se realiza es una búsqueda de similitudes y diferencias del objeto dado, utilizando la intuición, la atención y la intención para que a partir

de las similitudes encontradas puedan luego generalizar y encontrar cierta figura particular que no está descrita.

El problema epistemológico. Cuando a partir de los datos sensibles el sujeto ya ha generalizado, está en la capacidad de poder extrapolar la comunalidad para encontrar algunos términos de la secuencia que sean solicitados dando paso a la producción de un nuevo objeto.

El problema de denotación simbólica. Este se manifiesta en el momento en que se ha podido construir una fórmula que pueda ser aplicada a cualquier objeto nuevo, es decir, a cualquier término de la secuencia y aparece tanto en su proceder como en su discurso. Esta fórmula se expresa no necesariamente con el uso del simbolismo alfanumérico.

Para los autores, se debe tener en cuenta que la generalización de patrones algebraicos contiene además una especie de camino en el que se identifica a través de la acción perceptiva una o unas características comunes, en donde gracias al campo fenomenológico (terreno de lo concreto, de lo perceptible), se han podido percibir ciertas características en las figuras dadas, tanto espaciales como numéricas (una, otra, u ambas si es el caso), lo que le permite que al encontrar esa característica, la pueda expresar para hallar otros términos de la secuencia solicitados sin importar qué distante se encuentre. En el momento en que se aplique la generalización a todos los términos de la secuencia, se habla de que la característica común “C” se convierte en una hipótesis, porque ya se tiene la certeza que es con esa regla con la que se debe operar para lograr la generalización analítica de patrones. Dando paso a poder usar para encontrar “una expresión directa” (Radford, L. 2010), que es la que al final puede dar cuenta del valor de cualquier término de la secuencia sin importar su ubicación o que tan grande pueda ser.

Es de gran importancia mencionar que según sea la naturaleza epistémica de la generalización o abducción que opere, es posible determinar si el tipo de generalización que se está desarrollando es aritmética, aritmética sofisticada o algebraica. En el primer caso, la generalización empleada permite pasar de un caso o término de la secuencia al siguiente, es decir, si dados los primeros 4 términos de una secuencia numérica se solicita el término

diez y el estudiante emplea la característica común para pasar caso a caso desde el término 4 hasta llegar al diez, la generalización no tiene naturaleza algebraica, es aún aritmética.

En cuanto a la generalización aritmética sofisticada, tal y como lo propone Vergel (2020), es cuando el estudiante se ancla en un término ya encontrado y a partir de la diferencia entre el término solicitado y este, logra aditivamente responder al requerimiento aunque sigue haciéndolo con términos sucesivos pero sin que necesariamente requiera el anterior. Aunque según Bayona (2021) la aplicación de esta generalización es efectiva en casos cercanos pero no cuando se inquiera por casos lejanos.

Si por el contrario, puede usar esa propiedad común para deducir una “fórmula”, que pueda aplicar a cualquier término de la secuencia, sin importar cuán remota sea, el estudiante está haciendo uso de una generalización algebraica. La primera de estas reposa sobre una abducción no analítica, mientras que la segunda sí lo es (Radford 2008, 2013).

Capítulo 3: Diseño metodológico y análisis de resultados

En este capítulo se exponen los elementos metodológicos utilizados para el desarrollo del presente estudio y los análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las tareas con los estudiantes objeto de investigación, lo cual se presenta en dos secciones. En particular en la primera de estas, se describe el enfoque metodológico utilizado, se muestran cada una de las fases del proceso de estudio, se detalla la población con la cual se realizó el trabajo, se precisan los instrumentos utilizados para recoger la información, se exhiben las categorías analíticas que se tuvieron en cuenta para analizar las producciones de los estudiantes y, finalmente se detallan cada una de las tareas y el objetivo que estas tienen al ser utilizadas para posibilitar pensamiento algebraico en la población.

En la segunda sección, se exhiben los resultados obtenidos de la implementación del conjunto de tareas diseñadas junto con sus respectivos análisis a la luz de las categorías conceptuales provistas por el enfoque teórico adoptado, expuesto en el capítulo anterior de este informe.

3.1 Diseño metodológico

El diseño metodológico que a continuación se presenta, responde al planteamiento de los objetivos de este estudio, que en términos generales busca caracterizar el pensamiento algebraico que surge dentro de la actividad matemática que se despliega con un grupo de estudiantes de quinto grado de educación básica primaria cuando se enfrentan al desarrollo de tareas sobre generalización de patrones numéricos.

3.1.1 Enfoque de la investigación

La investigación se enmarca dentro del enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo, el cual pretende estudiar a la población en ambientes naturales y subjetivos (Hernández et al., 2014) lo que permite brindar una descripción detallada de toda la información que se recoja mediante las producciones realizadas por los estudiantes dentro del desarrollo de las tareas, en donde se busca analizar la movilización de los medios semióticos de objetivación que éstos emplean al desarrollar las tareas sobre generalización de patrones numéricos que se les proponen.

De acuerdo a lo mencionado, este trabajo se desarrolla con estudio de casos, esto es, con la participación de tres estudiantes, en donde se pueden evidenciar los intereses o necesidades particulares de cada uno de ellos al enfrentar las tareas propuestas. Vale la pena precisar que, de acuerdo con Martínez, P. (2006, p.169) “no es necesario una muestra representativa sino una muestra teórica conformada por uno a más casos”, lo que permite la observación a cada uno de los objetos de estudio posibilitando la identificación y clasificación en los componentes que se han mencionado en el capítulo anterior.

También es importante resaltar que se incorporan elementos del enfoque de observación participante porque la investigadora-autora de este estudio, hace parte de la interacción con los estudiantes que es justamente la que se analiza, ella también se vuelve objeto de análisis en el estudio e interviene en las decisiones de los estudiantes. Además, se integran componentes de una investigación de diseño, en virtud que se realiza un rediseño de las tareas que se implementan con los estudiantes.

3.1.2 Proceso de estudio

Para llevar a cabo el trabajo de investigación se establecen tres fases:

Fase Uno. Delimitación del campo de estudio. Lo desarrollado en esta fase parte del hecho que la institución en donde se implementa el trabajo no es ajena a la problemática enmarcada dentro del poco desarrollo de tareas para trabajar la generalización de patrones como estrategia para desarrollo del pensamiento algebraico temprano y además hay investigaciones actuales al respecto lo cual respalda el interés por abordar la problemática.

Fase Dos. Trabajo de campo. En esta fase se determina la preparación y puesta en acto del trabajo de campo, lo cual implica el diseño e implementación de cuatro tareas sobre generalización de patrones numéricos con los estudiantes, para con ello recoger los datos necesarios para continuar con la investigación.

Fase Tres. Análisis de datos y conclusiones. De acuerdo a los datos recolectados, se realiza un análisis multimodal, el cual permite que los medios semióticos que emplean los estudiantes sean tomados en cuenta en su totalidad y de manera sustancial permitiendo dar respuesta al objetivo general planteado inicialmente, y que además se pueden brindar unas conclusiones

3.1.3. Población objeto de estudio

La presente investigación centra su mirada en tres estudiantes del grado 5-1 de la Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Cauca, ubicada en el municipio de Santander de Quilichao al nororiente del departamento del Cauca, Colombia. Esta muestra de tres estudiantes ha sido escogida de manera aleatoria entre la totalidad de ellos, que por voluntad propia y por consentimiento de los padres de familia decidieron participar como objeto de investigación aun cuando debían ausentarse de algunas clases ya que el trabajo se realizaba dentro de la jornada escolar.

Los estudiantes hacen parte de una población que se encuentra entre los estratos 1 y 2 de barrios aledaños a la Institución, en donde las principales fuentes de ingreso de sus padres es la venta de verduras en la Galería Municipal y prestar el servicio de Mototaxistas.

Cabe resaltar que, a pesar que la profesora-autora de este estudio labora en dicha institución en la básica primaria, no es la directora de grupo de estos estudiantes por lo tanto el trabajo no hacía parte del objeto curricular de las clases regulares, no estaba incrustado en la planeación curricular de la profesora titular quien otorgó los permisos a ellos para utilizar el tiempo necesario en la desarrollo de las tareas.

La actividad matemática desplegada entre la investigadora y cada estudiante es grabada de manera individual, para ser observada y analizada en detalle en el momento en el que emplea los diferentes medios semióticos de objetivación durante la realización de las tareas, lo que permite llegar a la caracterización del pensamiento algebraico. Esto muestra la gran importancia que tiene el hecho de analizar cada mínimo detalle de cada estudiante en el momento en el que *se encuentra con el saber* y puede exteriorizar su pensamiento a través de medios semióticos de objetivación de manera sincrónica o no, tales como: los gestos, lo enunciado (lenguaje natural), el ritmo, la actividad perceptual, el empleo de signos y artefactos (Radford, Bardini, & Sabena, 2005)

En concordancia, cada medio semiótico de objetivación debe ser identificado y analizado en el momento en el que también están presentes otros medios semióticos de objetivación, es por esta razón que el análisis realizado debe ser multimodal teniendo en cuenta como parte del proceso cognitivo el aspecto sensorial en lo táctil, perceptual y kinestésico (Vergel, 2014), para permitir rescatar en detalle cada una de las expresiones semióticas empleadas por los estudiantes en procesos de objetivación y subjetivación al enfrentarse a tareas propuestas en el marco de la actividad que se despliega entre profesor y estudiante.

3.1.4. Instrumentos y proceso de recolección de la información

En este apartado se utilizan dos técnicas de recolección de información, las cuales son consideradas como convenientes para la investigación con enfoque cualitativo, en tanto que permiten obtener resultados y analizar los datos para así reorganizar la pregunta de investigación de ser necesario (Sampieri et. al, 2014). Estas técnicas son: las grabaciones de audio y video, y las producciones escritas de los estudiantes sobre las tareas planteadas.

Para la realización de esta etapa del trabajo, se retoman las cuatro etapas aportadas por Miranda, Radford, & Guzmán (2007):

Etapas 1. Grabación en video de la actividad. Estas grabaciones permiten que la inversión de tiempo al analizar en detalle sus expresiones sea mayor y no se pierda ningún detalle al observarlas cuantas veces sea necesario.

Etapas 2. Obtención de las producciones escritas. De igual manera, las hojas de las producciones escritas muestran manifestaciones que los estudiantes tienen a la hora de resolver las tareas y de esta manera dar una caracterización más acertada de la etapa del pensamiento algebraico en el que se encuentra cada uno de ellos.

Etapas 3. Transcripción de episodios de interacción de los videos en las sesiones. La transcripción que se lleva a cabo, se hace exclusivamente de los episodios de interacción de los estudiantes en los que se hace posible dar cuenta de rasgos distintivos que permiten evidenciar formas de pensamiento algebraico y de la generalización de patrones que van logrando a partir de las unidades de análisis previamente fijadas.

Etapas 4. Análisis de los episodios transcritos y las producciones escritas. Brinda evidencias de la movilización de los medios semióticos de objetivación que emplean cada uno de los estudiantes en el marco de su pensamiento algebraico y la generalización de patrones que logran.

3.1.5. Categorías de análisis

En la Tabla 1 que se presenta a continuación, se explicitan las categorías, subcategorías y, de manera particular, las unidades analíticas que se emplean en este estudio para analizar desde la perspectiva multimodal del pensamiento humano, las producciones de los estudiantes. Cada una de estas unidades se acompaña de un descriptor que intenta explicar de manera clara y precisa qué se busca en cada una de estas unidades de análisis.

Para constituir esta rejilla de análisis, fue indispensable conocer previamente el marco teórico e identificar muy bien cuáles son los criterios de análisis con los que se busca rastrear aquello que hacen los estudiantes para dar cuenta, tanto del pensamiento

algebraico que ponen en juego al enfrentar las tareas y su evolución, como los criterios de análisis que según la teoría permiten dar cuenta de cómo los estudiantes generalizan los patrones.

Tabla 1 Categorías de análisis empleadas en la investigación

Categorías de análisis	Subcategorías	Unidades de análisis	Descriptor de las unidades de análisis
Pensamiento algebraico	Vectores	Indeterminancia	Se busca analizar si los estudiantes logran manipular variables presentes en las secuencias brindadas.
		Analiticidad	Se analizan aquí dos cuestiones. Primero, la forma en que los estudiantes operan con objetos indeterminados. Segundo, los procesos de deducción de fórmulas que logran desplegar los estudiantes.
		Expresión semiótica	Busca reconocer la manera específica en la que los estudiantes designan o nombran los objetos indeterminados a través de los recursos semióticos que empleen.
	Estratos de pensamiento	Pensamiento algebraico factual	La indeterminancia no es nombrada aún, no es objeto de conciencia al no estar objetivada todavía por los estudiantes. Los recursos semióticos utilizados son gestos, señalamientos, miradas, etc.
		Pensamiento algebraico contextual	El estudiante aquí, da cuenta de la indeterminancia en tanto que se vuelve objeto del discurso por medio de algunas frases.
		Pensamiento algebraico simbólico	Se analiza si los estudiantes emplean el lenguaje alfanumérico para referirse a las fórmulas y frases claves previamente designadas.
Generalización de patrones	Problemas de la generalización	Contracción semiótica	Se analiza aquí, como los estudiantes emplean cada vez formas más reducidas de expresión semiótica.
		Fenomenológico	Se analiza la atención y selección que realizan los estudiantes sobre las determinaciones sensibles sobre las secuencias entregadas (actividad perceptiva)
		Epistemológico	Si los estudiantes realizan una generalización del patrón a los siguientes términos de la secuencia es lo que se analiza y si la abducción realizada es o no analítica.

	Semiótico		Busca analizar el resultado que tienen los estudiantes de los medios por los cuales logran denotar la generalización.
	Tipos de generalizaciones	Generalización aritmética	Se analiza aquí, si los estudiantes recurren caso por caso para llegar a un determinado caso solicitado
		Generalización algebraica	Se analiza si los estudiantes logran emplear pensamiento deductivo, es decir, si logran encontrar una fórmula para el caso solicitado sin tener que recurrir a la búsqueda caso a caso
	Labor conjunta		Se analiza la actividad de trabajo entre la investigadora y estudiantes, en torno a la tarea y cómo esta se desarrolla en tanto única actividad permitiendo la producción de conocimiento, esto es el encuentro con el saber.
TO	Procesos de Objetivación		Busca analizar la toma de conciencia del saber puesto en juego que los estudiantes van logrando.
	Procesos de Subjetivación		Se analizan los procesos de transformación del ser en el estudiante, en tanto que se posiciona de manera particular de ese saber cultural.
	Nodo semiótico		Busca analizar la presencia de varios medios semióticos de objetivación de manera simultánea para expresar el pensamiento.

3.1.6. Sobre el diseño de tareas

En este estudio, se diseñaron cuatro tareas sobre secuencias de patrones de tipo numérico, lo que significa que en ninguna de ellas hay referencia a patrones espaciales o gráficos, esto teniendo en cuenta que autores como Radford (2010) muestra que patrones gráficos espaciales y geométricos ayuda a la acción perceptiva para que los estudiantes encuentren patrones y los generalicen, pero la intención de este trabajo es explorar la posibilidad que a pesar de ser su primer encuentro cultural con este tipo de tareas, puedan encontrar relaciones entre números para lograr la generalización.

Con estas tareas se busca que los estudiantes puedan encontrar los cambios que se presentan en los términos de cada una de las secuencias numéricas y en cada uno del conjunto de ítems que estas contienen, en donde se inicia con casos concretos cercanos para luego solicitar que encuentren casos más lejanos, lo cual tiene la intención de evolucionar los procesos de objetivación y subjetivación. Además se busca que los estudiantes identifiquen el patrón en cada una de las secuencias y posteriormente, y con lo que los generalicen a términos no dados para de esta manera llegar a generalizarlos, para lo cual es fundamental que centren la atención en la co-variación de las variables que se presenta en las secuencias.

Además, se busca con estas tareas, vislumbrar en las actuaciones de los estudiantes sus gestos, la percepción, los señalamientos, el lenguaje natural, entre otros recursos semióticos y de esta manera, entrever cómo estos son manifestados en su encuentro con el *saber algebraico*. Es con la identificación de estos medios semióticos de objetivación que se puede detallar el estrato de pensamiento algebraico en que los estudiantes se van movilizandodurante el desarrollo de las tareas.

Siguiendo a Vergel (2014) “planteamos como recurso didáctico una serie de tareas las cuales ponen unas condiciones con el propósito de que ocurra cierto fenómeno” (p.85), a partir de esto se reconoce la importancia que contiene el diseño de las tareas tanto que tiene “estatus epistemológico”. En este sentido, la tarea es una categoría teórica de naturaleza didáctica (Vergel, 2019, 2022), puesto que con ellas se busca promover

pensamiento algebraico en los estudiantes, y, además, permiten que esto se logre dentro de una interacción, en este caso entre estudiante y docente investigadora dentro de la actividad.

El diseño de las tareas estuvo antecedido por las investigaciones de Radford (2013a), Vergel (2019), Lucumi y Montaña (2020), Carmona y Velasco (2018) de donde se tomaron y rediseñaron. Estas siguen un diseño que los investigadores han tomado para abordar el pensamiento algebraico temprano desde la generalización de patrones, prueba de ello es el problema del mensaje que ha sido una estrategia didáctica que la tesis doctoral de Vergel (2014) destaca como una tarea muy potente para que se diera esa contracción semiótica de lo factual a lo contextual y aquí se retoma esa estrategia en la última tarea.

Para cumplir con el propósito de este trabajo, en las tareas 1 y 2 en los términos de cada secuencia se explicita la posición que ellas ocupan dentro de esas secuencias, mientras que en las tareas 3 y 4 solamente se dan los términos de las secuencias sin indicar de forma explícita la posición que ellos ocupan en la secuencia. En las dos primeras tareas, se pretende que los estudiantes tengan ese primer encuentro cultural con ellas, lo cual es muy importante en el marco de la teoría de la objetivación de tal manera que se familiaricen con términos propios de este tipo de tarea como son patrón, secuencias numéricas, caso siguiente, por lo que no están diseñadas para propulsar a los estudiantes que realicen deducciones que den cuenta del componente analítico el cual es característico del pensamiento algebraico.

En cuanto a las tareas 3 y 4, en las cuales no se indica explícitamente la posición que ocupa cada término dentro de la secuencia, se construyeron con la intención de verificar la transformación que sufren los estudiantes al objetivar el saber culturalmente constituido, además de conocer la forma como perciben cada secuencia, porque están diseñadas para que emerja la deducción, y por tanto empiecen a identificar la indeterminancia y puedan operar con ella. Estas tareas se detallan a continuación:

Diseño de la Tarea 1

Con esta tarea que se muestra a continuación, se pretendía que los estudiantes pudieran encontrar los cambios que se presentaban en la conformación de una secuencia numérica cuya expresión general se puede escribir como $2n+1$, siendo n el número del término.

Tarea 1

Nombre de la Institución Educativa _____

Fecha _____ Grado _____

Nombre del estudiante _____

Observa la siguiente secuencia numérica y luego responde las preguntas

3	5	7	9
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6? Justifica tu respuesta
2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 15 de la secuencia? Explica tu respuesta.

Figura 2. Tarea 1 empleada en la investigación

Con el primero de los ítems de esta tarea, se buscaba que los estudiantes, a partir de los primeros cuatro términos dados en una secuencia, pudieran encontrar la posición de nuevos casos, lo que implicaba que, primero, a partir de determinaciones sensibles sobre el campo fenomenológico debían identificar una variación que le permitiera hallar una comunalidad y, una vez hallada, lograran generalizarla para los términos solicitados, en este caso, los términos 5 y 6. Esto significa que este ítem está centrado en un hecho concreto.

El propósito del segundo ítem, era que los estudiantes retomaran la comunalidad hallada y la lograran generalizar nuevamente, pero en esta ocasión, a diferencia del ítem anterior, lo hicieran extendiéndola a casos que si bien no son completamente lejanos a los primeros cuatro términos dados en la secuencia, sí representan un mayor nivel de dificultad en el sentido que es un término más lejano. De este modo lo que se buscaba era identificar cómo los estudiantes hallan el término 15 que corresponde en la secuencia numérica, de tal manera que se evidenciara si la generalización empleada reposaba sobre una abducción no analítica, es decir, dar cuenta si los estudiantes para llegar al caso 15, primero debe hallar el número que corresponde al término 14 y a su vez para hallar este debe primero hallar el número que corresponde al término 13 y para hallar este debe primero hallar el número que corresponda al término 12 y así sucesivamente.

Es importante señalar, tal y como se precisó al inicio de este apartado, que como esta tarea es un primer encuentro cultural de los estudiantes para acercarse a formas de acción y reflexión constituidas históricamente como lo es el pensamiento algebraico, estaba centrada en términos particulares. En los dos ítems se inquirió sobre términos concretos de números de la secuencia, lo que significa que es una tarea que estaba instaurada en el campo fenomenológico, porque no se tuvo intenciones que hubiera posibilidad de encontrar lo indeterminado para desarrollar procesos de deducción. Esto significa que es una tarea centrada en promover el desarrollo del pensamiento algebraico factual en los estudiantes.

Diseño de la Tarea 2

Esta tarea, al igual que la anterior, tenía la clara intención de promover en los estudiantes, formas de pensamiento algebraico de tipo factual, por tal razón no se pretendía que el estudiante llegara a la construcción de una fórmula con el n -ésimo término, dada la complejidad de la sucesión, pero el interés se volcaba completamente a identificar los medios semióticos de objetivación que los estudiantes activan cuando encontraba los términos siguientes a los términos dados inicialmente en la secuencia numérica e intentaba indagar si el estudiante lograba reconocer que era con la suma de los dos términos anteriores que se podía encontrar el término siguiente, es decir, que para encontrar el

número que corresponde al término $f(n)$, con n como un término particular de la secuencia, debía sumar $f(n)-2+f(n)-1$. Si el estudiante lograba dar cuenta de ello, esto mostraría claras evidencias que alcanzaba una generalización de tipo aritmética, en tanto que, para encontrar un caso particular n , recurría necesariamente a los casos anteriores, tal como Radford (2013a) ha indicado, es la naturaleza distintiva de una abducción no analítica.

Tarea 2

Nombre de la Institución Educativa _____

Fecha _____ Grado _____

Nombre del estudiante _____

Observa la secuencia

1	1	2	3	5	8	13	21
Término	Término	Término	Término	Término	Término	Término	Término
1	2	3	4	5	6	7	8

A partir de esta secuencia responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué cambios observas entre el término 1 y 2, entre 2 y 3, entre 3 y 4 , entre 4 y 5, entre 5 y 6, entre 6 y 7, entre 7 y 8?
2. ¿Cuáles son los números que corresponden a los términos 9 y 10 de la secuencia?
Justifica tu respuesta
3. El número 610 de la secuencia ¿a qué término corresponde?
1. Uno de los estudiantes del quinto grado dice que el número 1.590 pertenece a la secuencia. Explica, ¿es cierto o no y por qué?

Figura 3. Tarea 2 empleada en la investigación.

Con el primer ítem de esta tarea, se tenían varias intenciones. Primero, que los estudiantes se dieran cuenta que los términos de la secuencia desde luego van en aumento, pero que noten además que si bien esto es cierto, no sucedía en los dos primeros de ellos. Estos dos primeros números eran exactamente los mismos, pero de ahí en adelante, empezaba una variación. Segundo, debían darse cuenta que esa variación que va en aumento no es la misma, es decir, entre el término uno y el término dos la variación era nula, mientras que entre el término dos y el término tres la variación era de uno, al igual que entre el término tres y el término cuatro, pero a su vez del término cuatro al término cinco la variación cambiaba porque ahora era de dos unidades, y del término cinco al término seis era de tres unidades, por lo tanto era necesario que identificaran que la variación iba en aumento pero no era constante. Tercero, necesitábamos que los estudiantes también identificaran que cada término de la secuencia se obtenía sumando los dos términos anteriores, esto como requisito indispensable para responder el siguiente ítem.

Con el segundo ítem se buscaba que los estudiantes habiendo reconocido ya el patrón que existe en el cómo obtener el número de la secuencia a partir de los dos términos anteriores, lo pusieran en acción para encontrar los términos 9 y 10 de la secuencia.

Al tener en cuenta que al diseñar esta tarea nunca se pensó para que los estudiantes encontraran la fórmula general que permitiera hallar $f(n)$ para cualquier n , lo que se esperaba era que encontrara casos remotos a partir de generalizaciones aritméticas, es decir, que el estudiante construyera cada nuevo término de la secuencia recurriendo a los términos anteriores, lo que significaba que en el caso del ítem 3 el estudiante tendría que ir encontrando cada uno de los números de la secuencia hasta encontrarse con el 610 y así pudiera dar cuenta a qué término correspondía. Esto, con la intención que se familiarizaran con este tipo de secuencias.

Por último, el ítem 4 tenía una sutil variación con respecto al ítem 3, debido a que lo que tenían que identificar los estudiantes era si el número que se les presentaba pertenecía o no a la secuencia, para lograr esa identificación era necesario que continuaran realizando

una generalización de tipo aritmética, construyendo cada nuevo término hasta que pudiera encontrarse con el número o por el contrario responder que no pertenecía a esa secuencia.

Así pues, vale la pena resaltar que la intención epistémica que se impregnó en el diseño de la tarea 2 era la de posibilitar en los estudiantes ciertas formas de ver, percibir y actuar sobre patrones, en este caso numéricos, es decir que, tal como lo señala el mismo Radford (2021a), se domesticara el ojo en términos de tomar conciencia sobre ciertas formas de acción y reflexión para atender tareas sobre generalización de patrones: ir de término a término para encontrar nuevos.

Diseño de la Tarea 3

Con esta tarea se pretendía que la generalización que previamente lograron los estudiantes gracias a la objetivación del saber, ya no fuera solamente aritmética, sino que avanzara hacia una generalización de tipo algebraica. Esto, encontrando la relación que tenía cada número con la posición que ocupaba, pese a que ya no se encuentra explicitada con la palabra “Término”, pudiendo así deducir alguna fórmula.

Tarea 3

Nombre de la Institución Educativa _____

Fecha _____ Grado _____

Nombre del estudiante _____

Observa la siguiente secuencia numérica.

4

7

10

13

Responde las preguntas

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6 de la secuencia? Justifica tu respuesta

2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 20 de la secuencia?

Explica tu respuesta.

3. Un estudiante afirma que “El número correspondiente al término 100 es 301”. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

4. Balota secreta

Toma una de las balotas que contienen un número el cual representa el término de la secuencia y luego escribe cómo puedo hallar el número que corresponde a ese término.

Figura 4. Tarea 3 empleada en la investigación.

Con el primer ítem de esta tarea se esperaba que los estudiantes encontraran que en la secuencia, el cambio que identificaban iba ascendiendo y que pudieran también generalizar el patrón que encontraran para hallar los términos solicitados a partir de la generalización que realizaran gracias a la objetivación que habían logrado con las tareas anteriores.

Con el segundo ítem se pretendía constatar que para hallar la posición solicitada, la generalización que hubieran realizado fuera de tipo algebraica y no de tipo aritmética. Para ello se solicitaba hallar un término un poco más lejano que los del ítem anterior. Se esperaba así que los estudiantes encontraran que el número de la posición se multiplica por tres y se le suma uno, y pudieran manifestar la forma en que lo hicieron.

El propósito del tercer ítem, pretendía que los estudiantes pudieran estimar números remotos para de esta manera poner a prueba la abducción que se esperaba en este punto fuera analítica la cual han encontrado desde el ítem anterior.

Con este último ítem se buscaba que la generalización algebraica fuera objetivada por los estudiantes, es decir, que logaran encontrar una fórmula que les permitiera hallar cualquier término solicitado utilizando números concretos. Al ser una pregunta en la cual se inquiría no por un caso concreto sino por un caso desconocido sujeto al azar, en virtud de que los estudiantes tomaran una balota que contenía un término que no se sabe cuál

podiera ser, se esperaba así que con este ítem aparecieran la indeterminancia y la analiticidad como toma de conciencia por parte de los estudiantes para poder operar con ellas.

Diseño de la Tarea 4

Esta tarea estaba compuesta por cuatro ítems que tenían la intención que el estudiante, a partir de la percepción utilizada al observar la secuencia, pudiera identificar la comunalidad, generalizarla y operar con ella. Además, que logran distintos niveles de contracción semiótica de tal manera que el tipo de pensamiento algebraico que pusiera en juego al enfrentar esta tarea fuera de naturaleza simbólica, lo que significa, que se esperaba que la indeterminancia y la analiticidad que recae sobre ella sea expresada de manera simbólica.

Tarea 4

Nombre de la Institución Educativa _____

Fecha _____ Grado _____

Nombre del estudiante _____

Observa la secuencia que se presenta a continuación.

5

8

11

Responde las preguntas.

1. ¿Cuál consideras que es el número del término siguiente en la secuencia? ¿por qué?
2. Un compañero hace la siguiente afirmación “el número 152 corresponde al término 50 de la secuencia”. ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué?
3. Escribe un mensaje para un compañero, en donde le digas cómo obtienes el número que se te pida sin importar el término que ocupe.

4. Escribe nuevamente el mensaje que hiciste en el punto anterior, pero ahora exprésalo a través de un cálculo

Figura 5. Tarea 4 empleada en la investigación

Con el primer ítem de esta tarea se quería que los estudiantes pudieran encontrar la comunalidad que existía de término a término y de esta manera realizar una abducción que les permitiera encontrar el término siguiente de la secuencia. Además que lograran explicar por qué creían que ese era el número que correspondía al término siguiente.

Con el segundo ítem se tenía la intención que los estudiantes pudieran deducir una fórmula que empleara tal como lo indica Vergel (2014) no como una hipótesis sino como principio asumido, es decir, que pudieran lograr un proceso analítico que les permitiera relacionar el término y el número que correspondía a dicho término. De esta manera, lograra entonces usar esta fórmula deducida para verificar si la afirmación dada era correcta o no.

Con el tercer ítem se pretendía que los estudiantes pudieran encontrar el número correspondiente a un término totalmente desconocido y pudiera operar con él, lo cual brindaba la posibilidad de moverse hacia un tipo de pensamiento contextual, en tanto se busca en ellos la toma de conciencia sobre lo indeterminado, la cual podía ser expresado a través de distintos medios semióticos de objetivación.

Con este último ítem se tenía el propósito que los estudiantes consideraran la expresión en un lenguaje simbólico, de la fórmula que debía elaborar para enviar a su compañero. De esta manera, la abducción analítica, que habían logrado los estudiantes a este punto para deducir una fórmula, se esperaba ahora que pudiera ser simbolizada de tal manera que avanzara hacia un nuevo estrato de pensamiento algebraico o por lo menos se acercara, en este caso el de tipo simbólico dada la necesidad de nombrar los objetos desconocidos con algún tipo de representación simbólica.

3.1.7 Metodología de implementación de las tareas

Tal y como se describió en el apartado sobre la población objeto de estudio, la investigación fue realizada con tres estudiantes de quinto grado de educación básica primaria, para los cuales se usaron pseudónimos de *Laura*, *Byron* y *Andrés*, para efectos de preservar en el anonimato la identidad de estos en la transcripción de los audios y videos de las sesiones de trabajo. De la misma manera a la profesora investigadora se denominó *Profesora*

Cada sesión de trabajo, se desarrolló de manera individual dada la necesidad de centrar toda la atención en la actividad matemática del estudiante que en ese momento realizaba la tarea. En la primera sesión los estudiantes se demoraron en promedio 75 minutos en total con la implementación de la primer tarea, en la cual se obtuvo una hoja de trabajo por cada estudiante, esto se llevó a cabo el día 20 de abril durante la jornada escolar de la mañana. La segunda sesión se llevó a cabo el mismo día teniendo una duración de 74 minutos, en la cual se implementó con cada estudiante la segunda tarea. La tercera sesión se realizó el día 21 de abril con una duración de 48 minutos en total, en donde se implementó la tercera tarea. Finalmente, la sesión cuatro se realizó el mismo día de la tercera sesión con una duración de 61 minutos, realizando en ella la cuarta tarea. Lo cual dio como total de las grabaciones de audio y video de las cuatro tareas desarrolladas con los tres estudiantes 258 minutos aproximadamente durante dos días de trabajo.

3.2 Análisis multimodal

Para la presentación de los resultados y su respectivo análisis, vale la pena señalar que para la transcripción de los videos en las 12 sesiones de trabajo, se utilizan algunas reglas que permiten la continuidad de elementos prosódicos del discurso hacia la escritura. Los gestos y en general acciones físicas se señalan con (*señala con el lápiz*). Una pausa corta se señala con (.) y una pausa de tres segundos o más se señala (3) según la cantidad de segundos. Las enunciaciones simultáneas se indican con {. Las palabras inaudibles se señalan (...). Cuando se extiende el último sonido de la palabra al final de esta se señala con :::

Para realizar el análisis de los datos, los cuales estaban concentrados tanto en el material escrito que los estudiantes produjeron en las hojas de trabajo, como en las grabaciones de audio y video de cada una de las 12 sesiones de trabajo desarrolladas con los estudiantes, se toman los datos de cada uno de ellos, desde una perspectiva multimodal del pensamiento humano (Arzarelo, 2006; Miranda, Radford & Guzmán, 2007; Vergel, 2014).

Lo que se va a analizar son todos los recursos semióticos que emplean los estudiantes al enfrentar las tareas tanto para generalizar patrones como para activar pensamiento algebraico al trabajar las tareas. Por lo tanto, este análisis se hace de una manera muy minuciosa en términos de los recursos semióticos que ellos emplean.

Para lo anterior, se sustraen pequeños momentos de la transcripción de los diálogos expuestos en los videos en los cuales se hace posible encontrar evidencia que permita responder a la pregunta de investigación, partiendo de encontrar elementos de los principios de la TO, de la idea de pensamiento algebraico y generalización de patrones, a partir de las unidades de análisis expuestas en la Tabla 1. Estos episodios se organizaron por líneas (*L1, L2, L3...*), que fueron enumeradas de acuerdo con el orden de las grabaciones. Además fueron extraídos gracias a la habilidad que se desarrolla al obtener una *sensibilidad teórica* (Glaser, B. 1978, citado en Vergel 2014), que permite darle significado a los datos que se ha determinado que son pertinentes para la investigación, esto es, volverlos datos de investigación.

Es por ello que se debía tener muy claro, que el análisis estaba direccionado específicamente por las unidades de análisis que se precisaron en la Tabla 1 de tal manera que se tuvieran como criterios analíticos.

3.2.1 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 1

Tal y como se menciona en el apartado sobre el diseño de las tareas, con esta, se buscaba acercar al estudiante a encontrar el patrón y generalizar la secuencia a casos concretos y cercanos.

En las siguientes líneas de las transcripciones de las grabaciones de audio y video, se puede observar como ejemplo, que en el ítem 1, Laura, Byron y Andrés de manera general lograron identificar dentro del campo fenomenológico que la comunalidad “va de dos en dos” tal y como lo afirma Laura, una de estos tres estudiantes, al responder a la pregunta ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6? Justifica tu respuesta.

L1. Laura: ¿10? (*Señala con el lápiz en el espacio siguiente al último término dado*) (*Mira a la maestra con expresión de duda*)

L2. Profesora: ¿Por qué crees que es el 10?

L3. Laura: (5”) ¿11? (*Mirada hacia la maestra de duda*)

L4. Profesora: ¿Pero por qué, por qué lo crees?

L5. Laura: Porque va como::: de dos en dos (*señala con el lápiz el Término 1 y luego el Término 2 de la secuencia*) (*mira a la maestra con expresión de duda*)

L6. Profesora: Porque va aumentado de dos en dos, o sea de término a término va aumentando (*Señala el primer y segundo término de la hoja*)

L7. Laura: (*Asiente con la cabeza*) Sí, sí de dos en dos

Las anteriores líneas muestran evidencia que Laura encontró la variación en los primeros términos de la secuencia al notar que los números que hacen parte de esta, van en aumento y logra expresar esa comunalidad con la frase expuesta en L7 “de dos en dos”, para, de esta manera, generalizarla y así encontrar los términos 5 y 6 que le fueron solicitados.

A continuación, con el ítem 2 se muestran las líneas de los tres estudiantes en donde de manera individual logran generalizar la comunalidad hallada en el ítem anterior hacia otro caso concreto, pero un poco más lejano.

Se inicia realizando el análisis de un episodio de Laura, en donde se puede observar que al requerir encontrar el Término 15 ella logra generalizar el patrón casi de manera inmediata al plantear continuar “contando de dos en dos”, lo que indica que la generalización que realizó para encontrar el término solicitado es aritmética, la cual logró identificar en el ítem anterior, como se puede notar en las siguientes líneas.

L1. Laura: ¿Podemos seguir contando de dos en dos?

L2. Profesora: Hazlo... Si quieres puedes escribirlo, si se te facilita o si quieres lo puedes contar en la mente. Como tú creas más conveniente que puedas hacerlo.

L3. Laura: (*Baja su mano derecha hasta donde está la izquierda y cuenta con los dedos*)

L4. Profesora: *(La profesora se levanta a tomar agua para que la estudiante esté menos presionada)*

L5. Laura: *(La estudiante se queda mirándola, coge el lápiz cuenta en los dedos de su mano izquierda y empieza a escribir. Cuenta dos dedos y escribe) 15, (cuenta dos dedos y escribe) 17, (cuenta dos dedos y escribe) 19, (cuenta dos dedos y escribe) 21. (Continúa realizando el proceso de encontrar el término 15 contando con sus dedos y escribiendo cada número). (Luego con el lápiz cuenta cada número que ha escrito. Lee nuevamente la pregunta y empieza a responder). (Gira la hoja hacia la profesora)*

L6. Profesora: Bueno...entonces ¿cuéntame cómo lo encontraste, cómo encontraste ese término 15?

L7. Laura: Con el ítem anterior ya tenía el 5 ¿verdad?, entonces aquí sería el 6 *(toca con el lápiz el número 13 que ya había escrito en la respuesta del ítem anterior)*, el 7 *(toca con el lápiz el número 15 que acaba de escribir)*, el 8 *(toca con el lápiz el número 17 que acaba de escribir)*, el 9 *(toca con el lápiz el número 19 que acaba de escribir)*, el 10 *(toca con el lápiz el número 21 que acaba de escribir)*, el 11 *(toca con el lápiz el número 23 que acaba de escribir)*, el 12 *(toca con el lápiz el número 25 que acaba de escribir)*, el 13 *(toca con el lápiz el número 27 que ya había escrito)*, el 14 *(toca con el lápiz el número 29 que ya había escrito)* y el 15 *(toca con el lápiz el número 31 que ya había escrito)*. *(Mira a la profesora)*.

Se puede establecer que en L7, Laura, continúa a partir de la respuesta generada en el ítem anterior para llegar al término que se le ha solicitado, es decir, no inicia el conteo desde el primer término (número 3) sino que lo inicia a partir del Término 7 (número 15). Lo anterior demuestra que aún estamos frente a la presencia de una abducción no analítica, dado el hecho que ella todavía se basa en una comunalidad hallada al ir contando de dos en dos y parte de un término inicial (Término 5) hasta llegar al término solicitado. Esto es, tal como Radford (2013a) lo afirma, la generalización que aún sigue instanciada en ella, por lo menos hasta este punto es de naturaleza aritmética.

Otro elemento de análisis importante a destacar en estas líneas, se presenta cuando Laura de manera sincrónica, percibe visualmente el aumento que tienen los números de la secuencia, al tiempo que, tal como Vergel (2014) lo ha mencionado, enuncia con cierta ritmicidad cada término siguiente de la secuencia que ella ha ido encontrando, lo que en este punto el ritmo se convierte en un medio semiótico de objetivación. También señala con el lápiz los números correspondientes a estos términos, esto como déctico espacial que se presenta cada vez que Laura toca los números, y además, se da ese gesto de naturaleza kinestésica, es decir, se identificaron cuatro recursos semióticos que se

activan simultáneamente como medios semióticos de objetivación, estos son la percepción, el lenguaje natural, el gesto y el ritmo, los cuales se transforman en un *nodo semiótico* (Vergel 2014), el que a su vez da cuenta del movimiento reflexivo de la actividad de Laura.

Por otro lado, el inconveniente presentado por Byron, al relacionar algunos términos de la secuencia que encuentra, con los que ya reconoce en la secuencia que se le había entregado, hace indispensable la intervención de la docente dentro de la actividad como un sólo trabajo necesario para producir conocimiento, como se ilustra a continuación.



Figura 6. Secuencia de gestos realizada por Byron al enfrentarse al ítem 2 de la tarea 1 (Captura de pantalla entre 8'11" y 9'18")

A continuación se describen los señalamientos correspondientes a la Figura 6.

Figura superior izquierda. Gesto realizado en el momento de analizar la secuencia.

Figura superior derecha. Explicación de Byron descrita en L2.

Figura inferior izquierda. Byron escucha atentamente la intervención de la profesora.

Figura inferior derecha. Explicación de Byron descrita en L28.

L1. Profesora: ¿Cómo hago para saber en ese término 15 qué número es el que va? ¿Cómo

lo harías?

L2. Byron: Lo haría como mire, aquí (*señala toda la respuesta del ítem uno*), como iba de dos en dos, pues mire que aquí da 13 (*señala lo que ha escrito al responder al ítem 1, Término 6, número 13*). Casi igual como aquí (*señala en la secuencia el número 3*). Porque mire que aquí da tres y es igual, casi igual que este (*señala la respuesta que ha escrito sobre el término 6*), sino que este lleva el uno (*refiriéndose a la decena del número 13, que tapa con su dedo índice*) y aquí está el 5 (*señala el término 2*) y el 7 (*señala el término 3*).

L3. Profesora: Ah, o sea estos de acá... (*Señala los números 3 y 5 pertenecientes a la secuencia*)

L4. Byron: Para entender este (*señala el número 15 que ha escrito correspondiente al término 7*)

L5. Profesora: Y no te parece que ya habíamos dicho, aquí tú me escribiste que va de dos en dos. De pronto, ¿no será que de 2 en 2 lo encontramos?

L6. Byron: Sí, mire, aquí 13 (*señala con el lápiz el número 13 correspondiente al término 6 que ya había escrito*), 14 y 15 (*cuenta con dos dedos*), aquí (*señala el número 15 que ha* L10.

Byron: Mmm, (7") Podemos encontrarlo de dos en dos

L7. Profesora: De dos en dos. Listo, encontrémoslo de dos en dos. Encontremos, busquémoslo, ¿Cómo lo harías?

L8. Byron El término 7, 6, 7. Nos da...

L9. Profesora: Ahí lo tienes hasta el 7, ¿Cierto?

L10. Byron: Sí

L11. Profesora: Pues sigamos con el 8 a ver. ¿Cuál sería el 8?

L12. Byron: El 8 sería el 17

L13. Profesora: ¿El nueve cuál sería?

L14. Byron: El nueve sería... diez sería 23

L15. Profesora: ¿Seguro?

L16. Byron: ¡Ay no! Ahí sería 21

L17. Profesora: ¿El once?

L18. Byron: El once sería el 23

L19. Profesora: ¿El doce?

L20. Byron: El doce sería 25, 25. El trece sería 27 y el catorce... Quedó mal

L21. Profesora: Listo.

L22. Byron: El 15 sería 31, el 16...

L23. Profesora: Recuerda que te preguntan hasta el 15.

L24. Byron: Listo

L25. Profesora: Entonces responde, ¿Cómo logras encontrar? ¿Cómo encontraste ese 15?

¿Qué fue lo que hiciste?

L26. Byron: Correr de dos en dos

L27. Profesora: Listo, escríbelo. ¿Y por qué fue que respondiste que de dos en dos?

L28. Byron: Porque, porque acá me muestra (*voltea la hoja y señala la secuencia mostrada*) que acá (*voltea la hoja nuevamente y señala lo que acaba de escribir*) corre de dos en dos, entonces me fui guiando para la secuencia.

Tomando como referencia L2, se puede notar que Byron, centró su atención

perceptiva en los dígitos comunes que hay entre el dígito de las unidades correspondiente al Término 6 con el dígito del Término 1, entre el dígito de las unidades correspondiente al Término 7 y el dígito del Término 2, entre el dígito de las unidades correspondiente al Término 8 y el dígito del Término 3, entre el dígito de las unidades del Término 9 y el dígito del Término 4.

Nótese que el estudiante Byron en la explicación que da en L2, ha dejado de lado la forma en que con el ítem anterior había logrado encontrar la comunalidad, es decir, olvida que ya había reconocido que la secuencia numérica “va de dos en dos” y se enfoca en otra forma de relacionarlos. Es a partir de este momento cuando la *Profesora* interviene “invitando” a Byron a que juntos, a través de los gestos, el ritmo y la palabra, se involucren en un proceso de encontrar término a término los números para que él centre su atención en hallar el término requerido, dentro del trabajo desarrollado entre la profesora y el estudiante, lo cual se evidencia en las líneas comprendidas entre L5 y L24, dentro de la labor conjunta desarrollada. Citando a Radford (2014) y Vergel (2019) “para convertirse en objeto de conciencia y pensamiento, el saber algebraico tiene que ser puesto en movimiento a través de la labor conjunta del salón de clase”. Esa labor conjunta es evidenciada cuando la docente investigadora co-participa del pensamiento de Byron al entrar en interacción con este, intentando modificar su toma de conciencia, que su pensamiento entre en movimiento al recordar lo que ya había objetivado en el ítem anterior y de esta manera pueda hallar el término requerido, es decir, se involucran en una interacción para juntos lograr el objetivo común, el cual en este caso es alcanzado en L26 cuando Byron recuerda la comunalidad encontrada anteriormente al afirmar “correr de dos en dos” y logra generalizarla a términos posteriores de la secuencia encontrando así el Término 15.

La cadencia de las preguntas expuestas por la profesora ¿El nueve cuál sería? ¿el once? ¿el doce? Y la cadencia de las respuestas ofrecidas por Byron “sería 21” “sería 23” el doce sería 25” da claras evidencias de la obra común en la que colectivamente, maestra y estudiantes, se envuelven, una obra bajo un objetivo común: pensar algebraicamente la secuencia desde una perspectiva multisemiótica (Radford, 2020a). Este segmento de la

actividad matemática desplegada, pone de relieve los tres elementos que caracterizan tal labor conjunta: el compromiso del estudiante por implicarse con la maestra en un objetivo común, el encuentro de la comunalidad (Líneas 8 a 25), el cuidado del uno con el otro, de sus formas de pensamiento y su posicionamiento, y la responsabilidad de uno y otro por tratar de entender la cadencia del discurso emitido (Radford, 2022)

Ahora bien, en la producción semiótica que realiza Byron, se entiende como él ha dispuesto en parejas verticalmente, de manera que el número de la parte inferior de esta disposición para él significa el número del término y el número que está arriba significa el número que le corresponde a ese término, como se puede constatar en la siguiente figura.

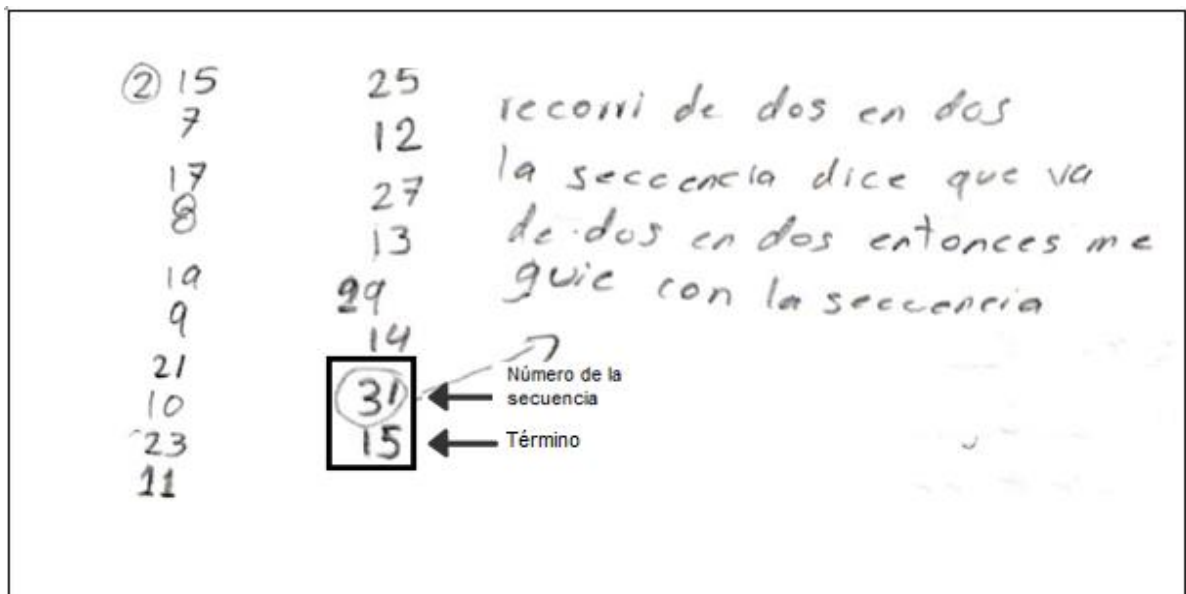


Figura 7. Producción de Byron en el ítem 2 Tarea 1

Cabe anotar que la generalización que realiza Byron, todavía está lejos de ser algebraica, dado que recurre a encontrar término a término, contando a partir del término siete lo cual da indicios que la abducción realizada no es analítica en tanto no hay una deducción de una fórmula.

Ahora bien, analizando la producción generada por Andrés al responder al ítem 2, se observó que para hallar el número que corresponde al Término 15, parte del último término encontrado en la secuencia (Término 6), esto es, desde el número 13, tal como se ve en las siguientes líneas de diálogo.

- L1. Andrés: Por el 15... (*No levanta la mirada, sigue observando su hoja en un punto fijo*)
 L2. Profesora: Ya encontraste dos. Ya encontraste el 5 y 6. ¿Cómo podemos encontrar el 15?
 L3. Andrés: Sumando dos
 L4. Profesora: Hazlo
 L5. Andrés: (*Escribe en la hoja el 13 y de manera vertical escribe el número 2, nueve veces*)
 Da 31
 L6. Profesora: Explícame cómo lo hiciste, por favor
 L7. Andrés: Sumé dos hasta llegar a 15, o sea, cogí el Término número 6 y le sume dos hasta que llegué a 15
 L8. Profesora: ¿Empezaste con el 13?
 L9. Andrés: Porque ese era el término 6 y le aumenté dos como si fueran los términos.

Lo anterior, muestra evidencias que la objetivación de la comunalidad dada en la secuencia de números realizada por Andrés en el ítem anterior le permitió continuar en su avance hacia dar respuesta al interrogante del ítem dos. Cabe anotar, que continúa siendo el pensamiento algebraico de tipo factual el que se ha instanciado en Andrés, debido a que la abducción generada sigue siendo no analítica, esto porque requiere seguir pasando de término a término de la secuencia para encontrar el solicitado. A continuación se exhibe la Figura 8, en la que se expone la producción escrita de Andrés que ilustra lo mencionado.

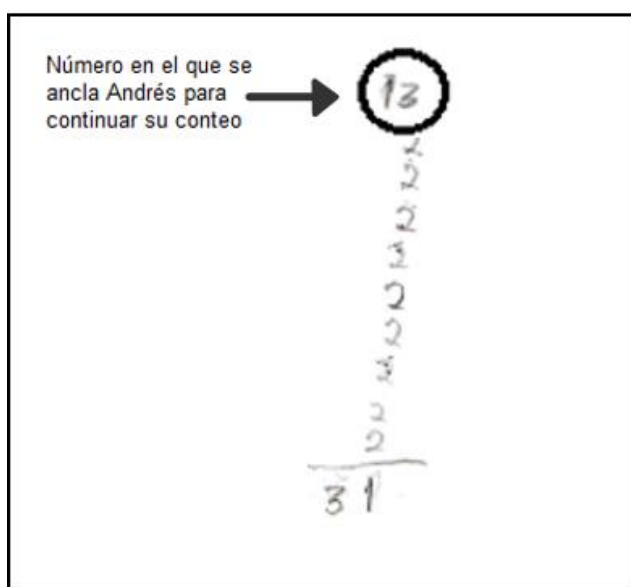


Figura 8. Operación aditiva realizada por Andrés a partir de los términos hallados en el ítem 1

Igualmente, en lo observado en la línea L7 “*Sume dos hasta llegar a 15, o sea cogí el Término número 6 y le sume dos hasta que llegué a 15*”, Andrés, mostró la utilidad de haber encontrado los términos requeridos en el ítem anterior para continuar en el hallazgo

del término mencionado, porque inicia escribiendo el Término 6 (número 13). A partir de este, comienza a adicionar el número 2 al tiempo que cuenta desde el Término 7 hasta llegar al Término 15 y luego realiza la adición de la comunalidad tantas veces como requirió pasar del Término 7 al Término 15.

Se reconoce que la forma instanciada en Andrés para encontrar el término es una forma aditiva, al haber hallado la comunalidad cuando expresa “*sumé dos al Término 6 nueve veces*”, da cuenta que las relaciones entre los números que encuentra todavía no le permite llegar a la deducción de una fórmula, esta abducción no es utilizada de manera analítica debido a que la cantidad de veces que debe sumar los “dos” no es determinada en una relación entre el término y el número de este, ni es aplicada a cualquier término de esa secuencia.

Aquí llama la atención que la generalización aritmética que ha empleado Andrés se ancla en un término particular, caso similar al reportado por Vergel, Radford y Rojas (2022) al estudiar los casos de una estudiante y una maestra que también se ancla en un caso particular para hallar un término remoto. Sin embargo, hay que dejar claro que lo que estos autores han teorizado en ese artículo como una “*generalización aritmética sofisticada*” no es lo que está apareciendo en la producción de Andrés, en tanto que, si bien es cierto que la producción de este, y las de la estudiante y la maestra reportada por estos autores se anclan en un término en particular para hallar un término lejano a los inicialmente dados en la secuencia, Andrés no semiotiza, es decir, no explicita a través del discurso ni oral ni escrito, la diferencia entre el número del término solicitado y el término en el cual se ancla, lo que significa que no ha hecho objeto de conciencia este producto, por lo que mucho menos logra multiplicar esa diferencia por la comunalidad, que es lo que permitiría hablar de una generalización aritmética sofisticada.

Se puede determinar que lo que le hace falta a Andrés para que se pudiera instanciar en él una generalización aritmética sofisticada, sería la toma de conciencia de la relación que se puede escribir como $(T_n - Ta \times 3)$, en donde T_n es el término que se le solicita, Ta es el término en el cual se ancla Andrés y el 3 da cuenta de la comunalidad.

Por lo mencionado anteriormente, se sostiene que lo producido por Andrés, no alcanza a enmarcarse dentro de una generalización aritmética sofisticada (Vergel, Radford y Rojas, 2022) y se queda en lo que Radford (2013a) ha teorizado como una generalización aritmética.

En términos generales, se evidencia que la producción de los tres estudiantes objeto de estudio para encontrar el Término 15 en este ítem el cual es un poco más lejano de los solicitados en el ítem anterior, se evidencia que lo hacen a través de una abducción no analítica, puesto que los tres recurren a encontrar término a término hasta llegar al solicitado.

3.2.2 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 2

Con el primer ítem de esta tarea se puede analizar que los tres estudiantes notan que no hay cambio en los dos primeros términos de la secuencia y que en los otros términos hay un aumento que no es constante, como se puede notar en los siguientes fragmentos del diálogo con Laura.

L1. Profesora: Listo, entonces vamos a hacer el mismo ejercicio, vamos a observar la secuencia, esa es una secuencia diferente. Entonces, vamos a tratar de encontrar qué es lo que contiene. La observamos, observamos los términos y luego vamos a leer lo que nos piden, ¿vale?

L2. Laura: A partir de esta secuencia, responde las siguientes preguntas. La primera: ¿Qué cambios observas entre el término 1 y 2, entre 2 y 3, entre 3 y 4, entre 4 y 5, entre 5 y 6, entre 6 y 7, y entre 7 y 8? Aquí (*señala con su dedo los dos primeros términos*) en el uno y dos...

L3. Profesora: Entre el uno y dos.

L4. Laura: No, no ha cambiado. Y entre el 2 y el 3 ha aumentado uno.

L5. Profesora: Aumenta uno.

L6. Laura: Y entre el 3 y el 4 es que aumenta uno también, porque estaba en dos y aumento en uno a tres

L7. Profesora: Ajá

L8. Laura: Entre el 4 y el 5, aumenta dos ya en dos y entre el 5 y el 6, aumentó de tres, en el 6 y en el 7, aumentó de 5. Y en 7 y el 8 aumentó (5"), aumentó 8.

L9. Profesora: Entonces, lo que encontramos es que en estos (*señala los primeros términos de la secuencia*) se mantiene el número, pero en los otros han aumentado, listo, eso es lo que encontramos ¿cierto?

Según lo observado en las líneas anteriores, Laura, perceptualmente logró

identificar el cambio que surge de término a término, debido a que evidencia que a partir del Término 2, la variación se da en cierta cantidad, no obstante, todavía no encuentra ninguna comunalidad en los cambios que identifica para así poder extrapolarlos a los casos siguientes (Radford, 2013a), es decir, logra identificar cambios y además los ha cuantificado pero no llega a la comunalidad, por lo tanto está lejos de poder realizar una abducción que en este momento le permitiera hallar otro término de la secuencia.

Al igual que Laura, se ve que Byron en las primeras líneas de la actividad desplegada con la profesora alrededor de la tarea, también encuentra un cambio en los términos como se exhibe en el siguiente fragmento de diálogo.

- L1. Profesora: ¿Listo? Bueno. Entonces ¿Qué nos preguntan ahí?
- L2. Byron: Dice: “Observa la secuencia, a partir de esta secuencia responde las siguientes preguntas: ¿Qué cambios observas entre el Término 1 y el Término 2?; ¿Entre 2 y 3?; ¿Entre 3 y 4?; ¿Entre 4 y 5?; ¿Entre 5 y 6?; ¿Entre 6 y 7? Y ¿Entre 7 y 8?
- L3. Profesora: ¿Qué cambios observas entonces?
- L4. Byron: El dos... Si, el uno porque, porque el 1 está repetido 2 veces
- L5. Profesora: ¿Entonces hay un cambio?
- L6. Byron: Si
- L7. Profesora: Si este (*señala el Término uno*) y este (*señala el Término dos*) es el mismo ¿Hay algún cambio?
- L8. Byron: No
- L9. Profesora: Entonces del 1 al 2...
- L10. Byron: no hay cambio
- L11. Profesora: Cambio... ¿del Término 2 al 3 que cambia?
- L12. Byron: Cambia que el Término 2 es menor que el Término 3
- L13. Profesora: Es menor, o sea que el término 3 ya va...
- L14. Byron: Más mayor que el término 2
- L15. Profesora: Ok, ¿Y entre este Término 3 y este Término 4?
- L16. Byron: La diferencia del Término 3 y el Término 4, en ese sería que... es, es como, es igual de mayor, este (*señala el número 3 correspondiente al Término 4*) es más mayor que este (*señala el número 2 correspondiente al Término 3*).
- L17. Profesora: El término 4 es mayor que 3
- L18. Byron: Sí
- L19. Profesora: Y el Término 3 es mayor que él 2
- L20. Byron: Sí
- L21. Profesora: Pero el Término 2...
- L22. Byron: Es igual al 1, sí
- L23. Profesora: Bueno, ¿entonces en el Término 4 y 5?
- L24. Byron: En el 4 y el 5 la diferencia, la diferencia es que, mire que aquí va 1 (*señala con*

su dedo índice el Término dos), después 2, 3 y aquí baja de una al 5 (*señala el Término 5*)

L25. Profesora: O sea ¿aquí va aumentando de a cuánto? (*señala los Término 2 y 3*)

L26. Byron: De a uno

L27. Profesora: ¿Y acá? (*señala los Términos 4 y 5 correspondiente con los números 3 y 5 respectivamente*)

L28. Byron: Y aquí aumento de una, de dos

L29. Profesora: Dos, listo, y ¿La diferencia entre el Término 5 y el Término 6?

L30. Byron: Sería el 3, porque mire que aquí va de uno en uno hasta 3 {*refiriéndose al número 3*}, y después de 3, al... y entonces del 3, ya tenía diferencia del 2 al 5, y entonces aquí (*señala el Término 5*) este 5 es menor 3... el 8 si es mayor que, 3 más que el 5, entonces por eso este es mayor solo por 3.

L31. Profesora: Tres. Ajá, y de este a este (*señala los Términos 6 y 7*)

L32. Byron: Este (*señala el Término 7*) lo lleva por 5, el 7 lleva por 5, cinco veces mayor que este (*señala el número 8 correspondiente al Término 6 de la secuencia*) por eso entonces hay mucho cambio...

L33. Profesora: ¿Y en el que sigue? (*refiriéndose al Término 8*)

L34. Byron: En este si hay más cambio porque llevaría, llevaría 8 de ventaja, el 21 le llevaría 8 de ventaja al 13, entonces... (8")

Atendiendo a las líneas anteriores, se puede observar que gracias a la atención perceptiva que ha desplegado, Byron ha identificado que en los dos primeros términos no se presentan cambios y de ahí en adelante sí hay un cambio, pero ese cambio no es el mismo, no se mantiene de manera regular, y además logra cuantificar el cambio que hay de término a término notando que va en aumento hasta el punto de expresar en L32.

"...*hay mucho cambio* ", refiriéndose a que cada vez que aumenta ese aumento es mayor que el anterior.

A continuación se da paso al análisis de algunos momentos de la actividad desplegada con Byron, que se aprecian con las líneas, que tal y como se ven son centrales en la objetivación que él logra en la toma de conciencia de la comunalidad que se expresa en los términos de la secuencia.

L35. Profesora: Listo, ¿Y por qué crees que esa diferencia en el aumento, por qué no se mantiene un mismo número? ¿Por qué crees que pasa eso?

L36. Byron: Tal vez porque... porque este eh... Aquí tal vez no pueden estar en orden y está en desorden.

L37. Profesora: Pero es una secuencia, si es una secuencia es porque tiene algo que lo acomoda así.

L38. Byron: Si, pero aquí no está bien acomodado porque aquí lleva hasta el 3 una vez

(*señala el número 3 correspondiente al Término 4*), hasta el 5 lleva dos veces (*señala el número 5 correspondiente al Término 5*), hasta, hasta el 6 lleva tres veces (*señala el número 8 correspondiente al Término 6*).

L39. Profesora: Hasta aquí (*señala el número 3 correspondiente al Término 4*), me dices ¿qué...? Una vez, una vez, ¿Sí? Hasta aquí me dices que dos (*señala el número 5 correspondiente al Término 5*).

L40. Byron: Sí, dos

L41. Profesora: Dos, dos, hasta aquí (*señala el número 8 correspondiente al Término 6*), me dices ¿qué...?

L42. Byron: Tres

L43. Profesora: Tres. Hasta aquí... (*Señala el número 13 correspondiente al Término 7 de la secuencia*) me dices ¿qué...?

L44. Byron: Cinco

L45. Profesora: ¿Y hasta aquí? (*señala el número 21 correspondiente al Término 8*)

L46. Byron: Ocho, ¡ah!

L47. Profesora: Entonces ¿Qué observamos en eso que te acabo de señalar? ¿Qué ves?

L48. Byron: Que, que eso está en el orden, si se pueden acomodar porque...

L49. Profesora: O sea, si están acomodados, si están bien ¿Por qué?

L50. Byron: Porque digamos, usted mismo aquí tiene el resultado, mire porque del 5 (*señala el Término 5*) al 8 (*señala el Término 6*) da 3 (*señala el Término 4*), que lo tiene atrasito.

L51. Profesora: Ajá. Atrasito, ajá

L52. Byron: Y el 2 y el 3 da 5, que también lo tiene atrasito {*refiriéndose al número 2*}.

L53. Profesora: Bueno, ¿por qué crees que están atrasito? O sea ¿qué debe haber aquí para que encontremos eso?

L54. Byron: ¿Qué es lo que hay aquí?

L55. Profesora: ¿Qué es lo que me estás diciendo que has encontrado?

L56. Byron: ¡Ah! Que hay que sumar

L57. Profesora: ¿Sumar? Listo, haz la suma a ver ¿Cómo sumáramos?

L58. Byron: Sumaria, el 1 más el 1 y me daría 2, y sumaria aquí el dos más el 1 y me daría 3, y sumaria el 3 más el dos y me daría 5, y sumaria el 5 más 3 que daría 8.

L59. Profesora: O sea que el patrón que encontraste es que debemos...

L60. Byron: Sumar

L61. Profesora: Sumar ¿qué?

L62. Byron: Los dos para llegar al que va adelante.

Estas líneas dan cuenta de lo que es la labor conjunta, tal como lo menciona Radford (2021a) como un esfuerzo físico, intencionado que la profesora ha desplegado en el tiempo y espacio para que Byron tome conciencia que la secuencia de términos sí tiene un aspecto común, tal como él lo señala en L48 “...*en el orden*...” y es a través de la actividad que se hace posible que se encarne en él (Vergel, 2022), la toma de conciencia

de la comunalidad, lo que hasta ese momento era invisible ante su ser. Siendo esta toma de conciencia generada en esta línea, la que le permite manifestar en L56 la expresión “...*hay que sumar*”, y que finalmente lo lleva a decir en L62. “*Los dos para llegar al que va adelante*”, dando a entender que es necesariamente la adición de los dos números de los términos que están de manera consecutiva los que permiten dar el siguiente término. Es necesario resaltar que esta encarnación fue posible exclusivamente a través de la actividad tal como Vergel, R., Radford, L. & Rojas, P. (2022) lo reconocen “... la materialidad de la actividad (representada en las preguntas de la profesora, en las intervenciones de los estudiantes, así como en su producción matemática) es la que hace emerger el saber algebraico” (p. 1182).

Para finalizar este ítem, a continuación, se exhiben segmentos del diálogo producidos con Andrés en la actividad generada.

L1. Profesora: Dice ¿Qué cambios observas entre el término uno y dos (*Señala con el dedo los términos mencionados*) ¿Observas algún cambio?

L2. Andrés: (*Niega con la cabeza sin levantar su mirada*)

L3. Profesora: Entonces, escribe que no observas cambios

L4. Andrés: (*Escribe en su hoja*)

L5. Profesora: Ahora nos preguntan por los términos 2 y 3

L6. Andrés: Se le suma uno (*escribe en la hoja sin levantar su mirada*)

L7. Profesora: Entre el término 3 y término 4

L8. Andrés: Se le suma uno también (*escribe en su hoja*). Entre el 4 y el 5 (*habla muy suavemente*). Entre el 4 y el 5 se le suma dos nomas (*escribe en su hoja*). Entre el 5 y el 6 se le suma tres (*escribe en su hoja*). Entre el 6 y el 7 se le suma cinco (*escribe en su hoja*). Entre el 7 y el 8 se le suma ocho (*escribe en su hoja*).

L9. Profesora: ¿Ya terminaste de escribir?

L10. Andrés: (*Asiente con la cabeza*).

L11. Profesora: (*Lee lo que Andrés ha respondido en la hoja*). Lo que tu escribes dice que “entre el término 1 y 2 no hay diferencia. Entre el 2 y el 3 suma uno, entre el 3 y el 4 también suma uno, entre 4 y 5 suma dos, entre el 5 y el 6 suma tres, entre el 6 y 7 suma cinco y entre 7 y 8 suman ocho”. ¿Qué podemos decir que encontramos ahí? Sabemos que va aumentando, pero no sabemos cómo. ¿Tú crees que podamos encontrar en esa secuencia, cómo hacen para poder darnos el siguiente término de la secuencia?

L12. Andrés: Este (*señala con el lápiz el Término 1*) le suma este (*señala con el lápiz el Término 2*) y da dos (*señala el Término 3*). Este (*señala el Término 2*) le suma a este (*señala el Término 3*) y da tres (*señala el Término 4*). Este (*señala el Término 3*) le suma a este (*señala el Término 4*) y da cinco (*señala el Término 5*). Este (*señala el Término 4*) le suma a

este (*señala el Término 5*) y da ocho (*señala el término 6*). Este (*señala el Término 5*) le suma a este (*señala el Término 6*) y da trece (*señala el Término 7*). Este (*señala el Término 6*) le suma a este (*señala el Término el 7*) y da veintiuno (*señala el Término 8*).

L13. Profesora: O sea, que lo que tú me dices es que debo sumar los dos términos (*señala con su dedo los Términos 1 y 2*) para que me dé el siguiente. ¿Sí?

L14. Andrés: (*Asiente con la cabeza sin levantar la mirada*)

L15. Profesora: ¿Así me da el siguiente término?

L16. Andrés: Sí.

Las siguientes imágenes (Figura 8) dan cuenta de los señalamientos efectuados por Andrés cuando en L12 responde al interrogante realizado por la profesora.

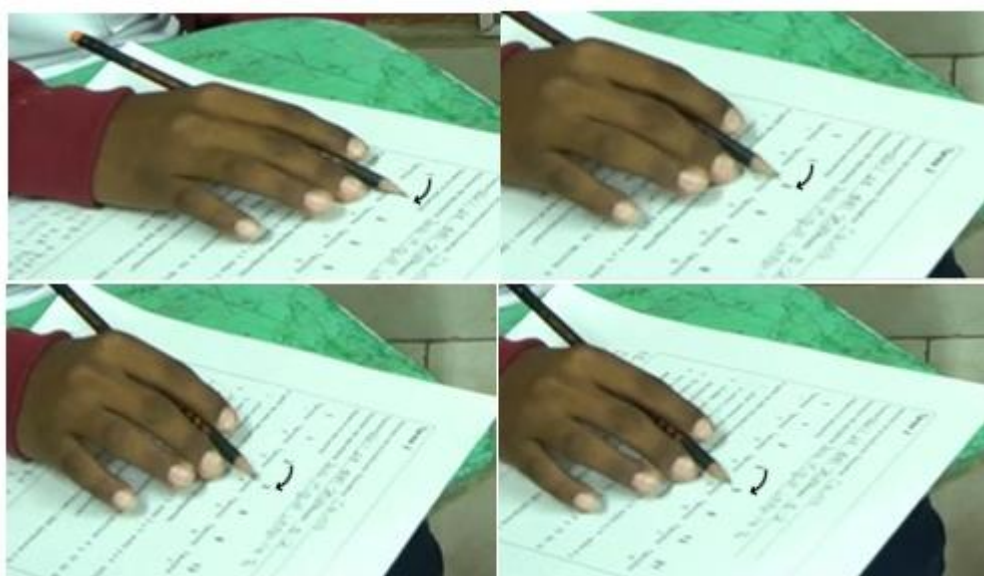


Figura 9. Secuencia de señalamientos de Andrés mostrando la adición de términos para encontrar el siguiente. (Captura de imágenes entre 10'56'' y 10'59'')

A continuación se describen los señalamientos correspondientes a la Figura 9.

Figura superior izquierda. Señalamiento de Andrés del Término 1 al Término 2.

Figura superior derecha. Señalamiento de Andrés para pasar del Término 2 al Término 3.

Figura inferior izquierda. Señalamiento de Andrés para pasar del Término 3 al Término 4.

Figura inferior derecha. Señalamiento de Andrés para pasar del Término 4 al Término 5.

Lo que se puede observar en la figura anterior es que al igual que a Byron, la acción perceptiva de Andrés le ayudó a identificar los cambios entre término y término de la secuencia y además esta acción perceptiva contribuye a encontrar de cuánto se trata ese cambio de un término a otro. Pero especialmente, lo que llama la atención en este momento

es la toma de conciencia que logra Andrés para capturar la comunalidad que guardan los términos de esta secuencia, es decir al fijarse como en L12 lo que está expresando es que la suma de dos términos dan el siguiente y a su vez ese término con el anterior dan el que sigue.

También se quiere llamar especialmente la atención en los medios semióticos de objetivación (Vergel, 2015) que Andrés despliega cuando está expresando lo expuesto en L12. Nótese cómo mientras brinda una explicación en lenguaje natural de cómo pasa de dos términos al siguiente afirmando “...le suma a este”, él acompaña de señalamientos su explicación, los cuales se exhiben en la Figura 9. Lo que se muestra en esa figura es la cadena de gestos como señalamientos que le permiten comunicar a Andrés la objetivación que ha logrado de la comunalidad. Estos gestos indexicales los acompaña el lenguaje natural que desde luego están atravesados por su actividad perceptiva. Este análisis, lo que sugiere es que usa de forma sincrónica distintos medios semióticos de objetivación tales como la ritmicidad, los gestos como señalamientos, las palabras y su actividad perceptiva, lo que se convierte en lo que Radford (2013a) ha teorizado como un nodo semiótico, el cual permiten la materialización del pensamiento aditivo de Andrés ante la tarea.

Avanzando con el segundo ítem de la tarea dos, se analiza cómo Laura, Byron y Andrés, a partir de haber reconocido la manera de cómo es obtenido cada número de la secuencia que habían percibido, logran encontrar los términos que se requiere que encuentren.

Inicialmente, se presenta un fragmento del diálogo generado entre la maestra y Laura.

- L1. Laura: La segunda dice: ¿Cuáles son los números que corresponden a los Términos 9 y 10 de la secuencia? Justifica tu respuesta”.
- L2. Profesora: Entonces, lo que hemos podido encontrar es que va a aumentando pero no la misma cantidad del anterior, pero como acá nos están pidiendo...
- L3. Laura: El nueve y el diez
- L4. Profesora: Vamos a pensar solo en el nueve, por el momento ¿Cómo hacemos para encontrar ese, ese término nueve? ¿Tú qué crees?
- L5. Laura: Pues este (*señala el Término 7*) y este (*señala el Término 8 con el lápiz*) le faltó ocho para llegar a 21
- L6. Profesora: Le faltó ocho para llegar a 21. ¡Ah! ocho. O sea, tú me estás diciendo que le

falta. O sea que si yo hago una resta (*señala los Términos 8 y 7*), si yo resto el 21, a 21 le quito 13, me da ocho ¿Y qué más podemos ver?

L7. Laura: A 13 le quito ocho, da cinco (*señala el Término 5*). A ocho le quito cinco, da tres (*señala el Término 4*). A cinco le quito tres, da dos (*señala el Término 3*). A tres le quito dos, da uno (*señala el Término 2*).

L8. Profesora: Entonces, ¿Qué encontramos con eso que acabamos de hacer?

L9. Laura: Que iba restando

L10. Profesora: Vamos restando, pero, porque iniciaste con el número 21. Pero si vamos de aquí para allá (*señala la hoja desde el Término 1 hacia el Término 8*), entonces ¿Qué harías ahí?

L11. Laura: Una suma

L12. Profesora: Entonces, crees que es posible más bien, ¿hacer la suma? Por ejemplo, sumemos el Término 1 con el Término 2.

L13. Laura: Uno más uno igual a dos. Ahí está (*señala el Término 3*)

L14. Profesora: Suma los siguientes.

L15. Laura: Daría cinco

L16. Profesora: Sigue el dos con el tres, el dos con el tres (*señala la palabra término*)

L17. Laura: Daría tres. El Término 3, Término 3 con el Término 4, daría cinco. El Término 4, con el Término 5, daría ocho. El Término 5 con el Término 6, daría 13.

L18. Profesora: O sea que sí es posible lo que estamos diciendo, que si yo sumo un término con el que sigue, ese término me va a dar el próximo ¿cierto?

L19. Laura: Sí, así da el otro número, con la suma.

L20. Profesora: Da el próximo término de la secuencia. Entonces ya miramos esa parte, ahora sí, ¿cómo crees que podamos encontrar el término 9? ¿Qué debemos hacer o qué vas a hacer tú para encontrar ese término 9?

L21. Laura: Mmm, sumo el 13, el Término 7, más el Término 8.

L22. Profesora: Listo, hagámoslo pues.

L23. Laura: Daría 34. Nueve {*refiriéndose al término*} es 34

L24. Profesora: Pero recuerda que nos están preguntando también por el 10...

Entonces, encontremos ahora el término 10, ¿cómo es qué lo hacemos?

L25. Laura: Podríamos sumar el 21 con el 34 y daría 55.

Teniendo en cuenta que hasta el ítem 1 de esta tarea, Laura no logra establecer que es por medio de la adición de los términos de $T_n - 2 + T_n - 1 =$ es que se llega a T_n , siendo este el Término n , que llega al siguiente término, en este ítem lo logra hacer para encontrar los términos requeridos, debido a que centra la atención perceptiva en esta adición.

Laura, a través de la actividad generada con la maestra logra objetivar el saber en tanto comunalidad en este caso. Tal como es mencionado desde la TO, logra incrustar en su conciencia un conocimiento que se está produciendo en ella el cual es propulsado por

las dos, maestra y estudiante, en el momento en que están laborando conjuntamente como se puede notar entre las líneas L7 y L11, es por ello que se hace posible que aparezca la comunalidad en la conciencia de Laura.

Además, Laura al enfrentar este ítem de la tarea en donde tiene que producir dos términos no dados en la secuencia, logra moverse hacia el campo epistemológico de la generalización de patrones tal como Radford (2013) lo ha categorizado muy bien, en este sentido se da propiamente la generalización de la comunalidad que ella ha encontrado ahora. Fíjese como en L21 y L25 menciona los términos que debe adicionar para encontrar los términos no dados en la secuencia debido a que es sólo hasta este momento en el que toma conciencia de cómo se está generando cada término, es decir, cada T_n . Aunque hay que resaltar que la generalización realizada por Laura sigue siendo de tipo aritmética porque no se busca llegar a una fórmula, en tanto la intención de la tarea no es para lograr un avance mayor a este.

Con los siguientes fragmentos de los diálogos de las transcripciones de Byron, se puede establecer que al haber identificado en el ítem número uno, que al realizar adiciones entre los términos a partir del Término 2, encuentra cómo está organizada la secuencia.

- L1. Byron: (*Lee el ítem 2*) (*Piensa mientras mira su hoja*)
- L2. Profesora: ¿Qué debes hacer?
- L3. Byron: Sumar el 21 (*toca con un dedo de la mano derecha el número 21*) más el 13 (*toca con un dedo de la mano izquierda el número 13*) (ver Figura 10)
- L4. Profesora: Listo, haz la suma para poder encontrarlo
- L5. Byron: Yo ya lo sumé (*Sonríe*)
- L6. Profesora: ¿Cuánto te dio?
- L7. Byron: 34
- L8. Profesora: 34... entonces vamos a escribir la respuesta, ¿Si?
- L9. Byron: 34
- L10. Profesora: Listo, pero también nos pregunta por el 10, término 10. ¿Cuál sería el término 10?
- L11. Byron: Hay que sumar 34 más 21
- L12. Profesora: Ajá, dale
- L13. Byron: (*Realiza la operación mentalmente*) 34 más 21... 55 me da.

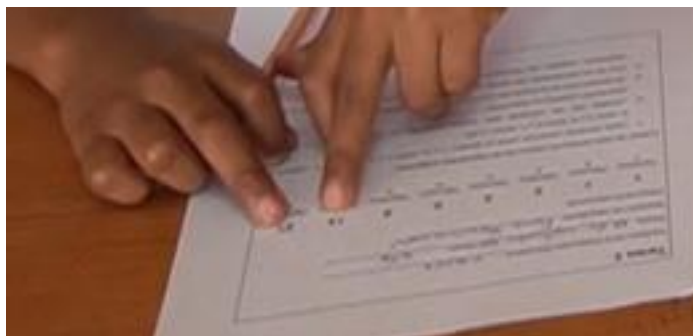


Figura 10. Señalamiento de Byron para dar respuesta a la pregunta de la profesora (Captura de imagen 11'31")

Byron, gracias al proceso de objetivación que ha realizado en el ítem anterior, logró establecer que para dar respuesta al ítem, necesariamente debe seguir sumando a partir de los dos últimos términos brindados en la secuencia como se muestra en la Figura 10, en donde por medio de señalamientos indican cuáles término suma mentalmente para encontrar los que todavía no conoce. Debido a esto, se puede establecer que él realiza una generalización aritmética que aplica para hallar el Término 9. Estamos frente a lo que Radford (2013a) ha teorizado como el problema epistemológico, dado que el estudiante afronta la tarea para generalizarla hacia casos no dados.

Byron, tanto para hallar el término 9 como el término 10 lo hizo tomando en consideración el proceso de objetivación que ya había logrado en el ítem anterior, que le permitía darse cuenta que cualquier término de la secuencia se hallaba sumando los dos términos anteriores. Desde esta perspectiva estaría realizando una abducción no analítica, dado que como ya se ha mencionado anteriormente dada la naturaleza de la secuencia no es posible realizar una abducción hacia cualquier término de esta.

Otro análisis que se puede obtener, es en el momento en el que Byron logra en L13. “34 más 21... 55 me da” realizar la adición de los últimos términos de la secuencia presentada gracias a la percepción que emplea, al tiempo que menciona en el lenguaje natural las expresiones que utiliza y emplea señalamientos indexicales, lo que lleva a pensar, que estas expresiones forman un nodo semiótico (Radford, 2013a), debido a que

utiliza de manera coordinada dentro de su materialización del saber, estos medios semióticos de objetivación.

Son estos medios semióticos de objetivación tal como lo ha dicho Radford (2010a, 2012) los que indican que se está materializado el saber en tanto pensamiento algebraico de naturaleza factual, debido a que estos son propios de este estrato de pensamiento. Es decir, todas las expresiones semióticas que utiliza Byron, una de las cuales se muestra en la Figura 10, dan cuenta de una instanciación del saber en él como forma de pensamiento algebraico factual.

Por otra parte, Andrés no requiere intervención alguna para responder la pregunta, como se expone en las siguientes líneas.

L1. Andrés: *(Lee la pregunta) (lee nuevamente la pregunta en voz baja) (escribe en su hoja sin decir nada) (Realiza adiciones en su hoja)*

L2. Profesora: ¿Respondiste la pregunta? ¿Cómo hiciste para responderla?

L3. Andrés: Sumo los últimos y con ese le sumo el que sigue

L4. Profesora: ¿O sea que sumaste los Términos 7 y 8?

L5. Andrés: Sí, y luego el 8 y el 9 y así me dio

Andrés, pone en evidencia elementos que indican que el proceso de objetivación que ha venido desarrollando desde el inicio de la tarea dos, le permite dar respuesta al interrogante planteado, en donde la profesora debe indagar sobre la forma cómo respondió, debido a que él no usa medios semióticos que le permitan hacer ostensible sus procesos de pensamiento, y es debido a esto que la maestra interviene para que los procesos de pensamiento se materialicen a través de la palabra, a través de la acción.

Al continuar con el ítem 3 de esta tarea, se puede evidenciar que Laura, Byron y Andrés avanzaron en la construcción de cada término siguiente de la secuencia, realizando adiciones entre los términos a partir de los que ya habían encontrado, y de esta manera logran dar respuesta al interrogante planteado.

Inicialmente, Laura presentó dudas sobre cómo abordar este ítem, pero luego parece recordar la manera en la que está planteada la secuencia y pudo continuar por el

camino hacia el encuentro de los próximos términos, como se muestra en las siguientes líneas de un fragmento del diálogo con ella.

- L1. Laura: Tercero: ¿El número 610 de la secuencia a qué terminó corresponde? Ahí tendríamos que hacer una multiplicación.
 L2. Profesora: ¿Qué vas a multiplicar?
 L3. Laura: El término a multiplicar 610...
 L4. Profesora: Bueno, ¿Cómo lo harías?
 L5. Laura: (8") No. Hay que sumar.
 L6. Profesora: ¿Qué sumamos?
 L7. Laura: No sé
 L8. Profesora: O sea, recuerda que tenemos el número, y tenemos que encontrar es el término, ¿listo? Para saber ese número a qué terminó pertenece.
 L9. Laura: ¡Eh! la suma (*realiza la suma en la hoja de los números $34+55$ contando con los dedos y escribe el resultado*)
 L10. Profesora: Ajá, muy bien
 L11. Laura: (*Continúa escribiendo números para realizar las adiciones y contando con los dedos*)
 L12. Profesora: ¿Listo?
 L13. Laura: El 610 corresponde al Término 15.
 L14. Profesora: Y ¿cómo fue que lo encontraste?
 L15. Laura: Sumando el resultado con el resultado anterior.
 L16. Profesora: Ah listo, entonces escribamos la tres y escribes lo que me dijiste.

Como se puede constatar en L9, Laura recordó que debía realizar una adición entre el número 55 como Término 10 y el número 34 como Término 9 y de esta manera continuar en la búsqueda del término solicitado, esto es logrado debido a que generaliza en este ítem la comunalidad hallada en el ítem 2, sumando los términos anteriores para hallar el siguiente. Esta relación entre los números que ha encontrado Laura, es lo que Radford (2013a) reconoce como una abducción no analítica en tanto que aún no hay producción de una fórmula que le permita a Laura de forma contundente encontrar el término. Es importante recordar que de esta manera está diseñada la tarea.

En la siguiente figura, se puede observar las adiciones realizadas por Laura.

The figure shows five handwritten arithmetic problems, each with a label (a, b, c, d, e) above it. Each problem is a column-wise addition with carry-over. Problem 'a' shows 12 + 34 + 55 = 89. Problem 'b' shows 12 + 55 + 89 = 144. Problem 'c' shows 13 + 89 + 144 = 233. Problem 'd' shows 14 + 144 + 233 = 377. Problem 'e' shows 15 + 233 + 377 = 610. The numbers are written in a way that suggests they are being added in a specific order, with the first number being the result of the previous step or a carry-over from a previous problem.

a	b	c	d	e
12	12	13	14	15
+ 34	+ 55	+ 89	+ 144	+ 233
+ 55	+ 89	+ 144	+ 233	+ 377
89	144	233	377	610

Figura 11. Operaciones sumativas realizadas por Laura para dar respuesta al ítem 3

Como se observa en la figura 11, para Laura, el primer número que aparece en la disposición por columnas presenta el término n , por ejemplo en la suma etiquetada como **a**, el 11 significa que el resultado de la adición está dando cuenta del término 11. El primer número que se adiciona en cada una de las columnas corresponde al número del término $n - 2$ y el segundo corresponde al número del término $n - 1$, en este orden de ideas en la suma **a**, el 34 responde al número que va en el Término 9 y el 55 corresponde al número que va en el Término 10.

Teniendo en cuenta lo mencionado se puede establecer que hay sincronía en los medios semióticos que está movilizando Laura, como son el lenguaje natural, uso de símbolos numéricos, los movimientos que realiza con los dedos para apoyar sus operaciones aritméticas, la manera como ubica los números uno debajo del otro para poder hacer la suma y al mismo tiempo realiza procedimientos aritméticos, esto cuando luego de haber centrado su percepción en adicionar el término que está dos posiciones antes y el que está una posición antes, es decir $T_{n-2} + T_{n-1}$ para producir el T_n , organizándolos para realizar “la suma” que manifestó que es lo que debe hacer. Recurriendo a lo observado anteriormente se puede establecer que Laura realiza un abordaje multimodal de la tarea, lo que indica que se produce un nodo semiótico Radford (2013a) debido a que convergen los medios semióticos que ella moviliza.

Según palabras de Vergel (2015), se puede establecer que Laura realiza “una

generalización de acciones en la forma de un esquema operacional”, esta generalización es sobre números concretos que se operan pero obedecen a un patrón que ella ya ha identificado, es decir, en la suma “b” Laura sabe que el T_{11} va en la segunda posición, en este caso el número 89 y que encima de este va $T_n - 1$ es decir el 55, lo cual produce el $T_n + 1$ que es el 144 lo que correspondería a T_{12} . En este punto estamos frente a un pensamiento algebraico de tipo factual (Radford, 2003), siendo que lo indeterminado queda aún sin nombrar.

En la siguiente figura se puede observar uno de los medios de objetivación que emplea Laura.

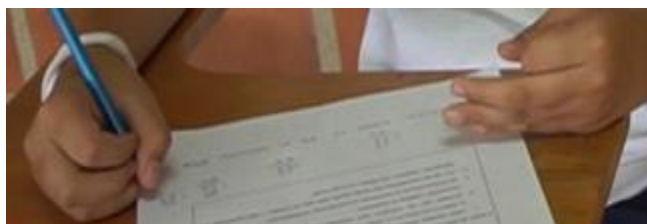


Figura 12. Movimientos realizados por Laura a la hora de desarrollar una adición (Captura de pantalla 11'39")

En el caso de Byron, luego que la maestra ha estado discutiendo con él el ítem 3, ella se da cuenta que Byron ha olvidado la objetivación que logró en los ítems anteriores que ya le había permitido encontrar las relaciones entre el término $T_n - 2 + T_n - 1$ para encontrar el término T_n . Debido a esto la primera disposición que encuentra la maestra es laborar conjuntamente con Byron para que este se reencuentre nuevamente con este saber cultural para abordar este ítem. En este orden de ideas, una de las discusiones de la profesora en su diálogo con Byron se centra en ayudarlo a recordar lo que él había realizado en el ítem anterior tal y como se evidencia en la siguiente línea.

L1. Profesora: Es que recuerda que aquí está hasta el 8 (*señala el Término 8 en la secuencia*), tu hiciste este (*señala el número 34 escrito por Byron en el ítem 2 y que corresponde al Término 9*) que te dio nueve, hiciste este (*señala el número 55 escrito por Byron en el ítem 2 que corresponde al Término 10*) que es el diez. Ahora para hacer el once ¿qué debes sumar?

L2. Byron: Deberíamos sumar como aquí (*señala el Término 2 de la secuencia*) el 1, el 2 (*señala el Término 3 de la secuencia*) y el 3 (*señala el Término 4 de la secuencia*) y me dio este resultado (*señala el Término 5 de la secuencia*), entonces deberíamos sumar el 34 y el 55.

L3. Profesora: ¿Ese es el que deberíamos sumar?

L4. Byron: Sí. (*Realiza la adición mentalmente*) Sería 89 (*escribe el 89*)

L5. Profesora: El Término 11 sería 89, el 12 ¿cuál sería?

L6. Byron: El doce sería 89 más 55 (*realiza la adición mentalmente*) 144. Listo (*escribe el 144*). Ahora sí voy a hacer la suma (*escribe en la hoja $89+144=233$*). Entonces sería 233 aquí. (*Escribe $233+144=377$*) Da 377. (*Escribe $233+377=610$*). Ahora (*escribe $233+144$*) 610. (*Voltea la hoja y verifica el ítem 3*) ¡Ah! Sería el 15 (*sonríe*)

Teniendo en cuenta L36, Byron a partir de la observación de algunos términos de la secuencia presentada, puede reconocer nuevamente cuáles números son los que debe “sumar” para continuar encontrando los términos de la secuencia y así concretarlo como se ve en L40. En donde la actividad desarrollada durante todo el ítem permite que se avance hacia el proceso de objetivación que se va puliendo.

En las líneas anteriores, se rescata la invitación que la profesora le hace a Byron en un esfuerzo sensible, material de corresponsabilidad tal como lo menciona Radford (2020), para que él recuerde un proceso de objetivación que ya había encontrado antes, que vuelva a tomar conciencia de lo que ya había aparecido frente a él pero que en ese momento no recordaba.

Este trabajo realizado colectivamente (Radford, 2022), muestra por un lado a la maestra en un esfuerzo claro para que Byron tome nuevamente conciencia de eso que había aparecido ante él cuando dio responder a los ítems 1 y 2, pero que en este momento no aparece inicialmente al intentar responder a este ítem. Por otro lado, Byron en su responsabilidad de intentar seguirle a la profesora la invitación que le ha hecho de recordar el término 8 y posteriormente el 9 que anteriormente él ya había generado y que le permite como lo expresa en L2. “*Deberías sumar como aquí*” tener frente a él la posibilidad de intentar producir el nuevo término que se le está solicitando.

En cuanto a Andrés, también es necesaria la interacción con la profesora para avanzar en el reconocimiento de la estructura de la secuencia y a partir de ahí encontrar los siguientes términos de esta, como se exhibe en el siguiente fragmento de diálogo.

L1. Andrés: (*Lee en voz alta el tercer ítem*) (*mira fijamente la hoja sin decir nada*) (5’’)

L2. Profesora: ¿Cómo hacemos para saber a qué término corresponde ese número?

L3. Andrés: (*Queda en silencio*) (15’’)

L4. Profesora: ¿Qué tendríamos que hacer allí?

L5. Andrés: La verdad no sé (*mira la hoja*)

L6. Profesora: Mira que acá nos están dando el número (*muestra con su mano el ítem 3*). Lo que nos dicen es que hay que encontrar el término al que corresponde. En la anterior nos preguntaban por los números de los términos y tú los encontraste, acá nos preguntan es por el término y nos dan el número. ¿Cómo lo hacemos?

L7. Andrés: Sumando estos números (*señala los números 34 y 55 escritos por él en la respuesta del ítem 2*). (*Realiza la operación y responde la pregunta diciendo que el 610 corresponde al término 89*)

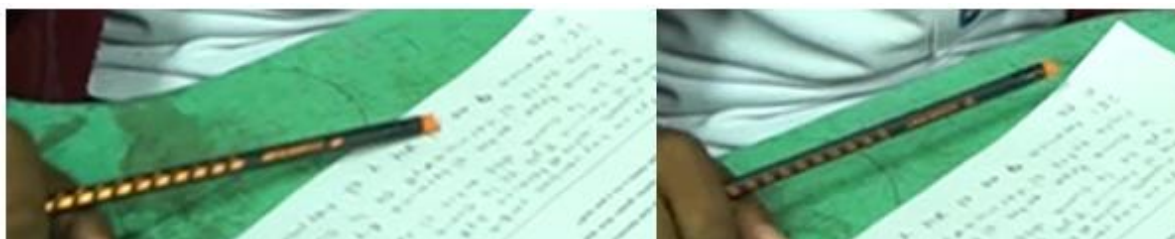


Figura 13. Señalamiento con el lápiz de Andrés sobre los números que menciona en L7 que va a utilizar para encontrar el siguiente término (Captura de pantalla 14'31'')

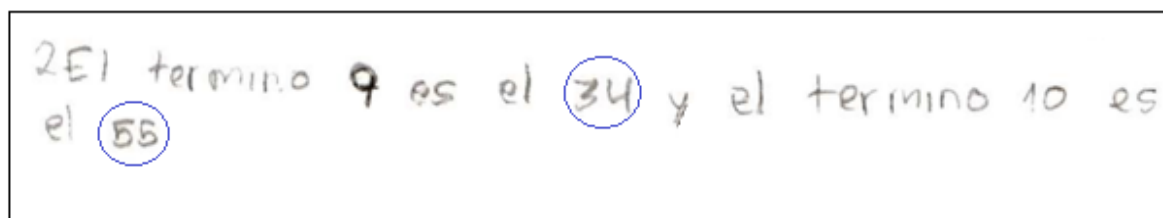


Figura 14. Respuesta escrita de Andrés en donde se observa los números señalados en la Figura 13.

A partir del señalamiento realizado por Andrés, se puede analizar que ha materializado a través de los medios semióticos de objetivación la conciencia que ha ido adquiriendo sobre la conformación de la secuencia y de esta manera continuar encontrando los siguientes términos, como lo menciona Radford (2020) dentro de proceso dinámico, sensible, rítmico, concreto, lingüístico, simbólico, corporal.

L8. Profesora: Mira lo que escribiste, dice “El 610 corresponde al término 89”, pero tú qué sumaste aquí (*señala la operación realizada por el estudiante*)

L9. Andrés: el 34 y el 55

L10. Profesora: Y ¿qué término era este? (*señala el número 34*) y ¿qué término era este? (*señala el número 55*)

L11. Andrés: Ese era el 9 y el 10

L12. Profesora: O sea que si sumo el Término 9 y el Término 10 me da...

L13. Andrés: El Término 11, sí, 89

L14. Profesora: Y al preguntarnos ¿el 610 a qué término corresponde?, nos dan el número, el que va arriba, pero no sabemos cuál es el término, el nombre de abajo. Tú ya encontraste el 11, entonces, ¿cómo hacemos para saber qué término es?

L15. Andrés: Seguir sumando

L16. Profesora: Entonces seguimos sumando.

L17. Andrés: ¿Sumo el 89 con el 55?

L18. Profesora: Mjm. Esos son los términos que me van a dar el siguiente

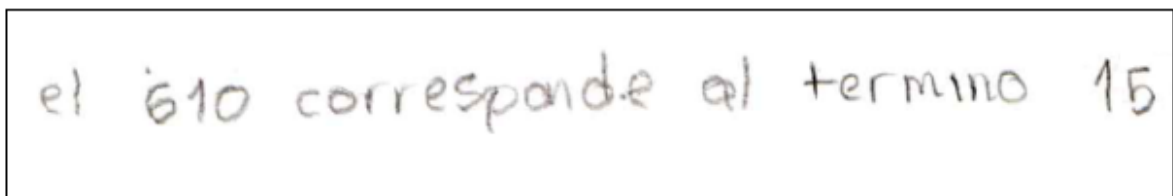
L19. Andrés: *(Realiza la operación en su hoja $89+55=144$)*. Entonces este sería el Término 12 y le sumo este *(señala el número 89)* *(continúa escribiendo en silencio)*. Entonces, sería el término 15 *(Responde con seguridad pero sin levantar la mirada de su hoja)*

L20. Profesora: Lo que me dices es que ¿el número 610 corresponde al Término 15?

L21. Andrés: Sí. Eso da

L22. Profesora: Respóndela. Mira lo que toco hacer para encontrar el término a que pertenecía. Seguir con la secuencia a partir de la que aparecía en la hoja.

L23. Andrés: Sí. Hay que sumar.



el 610 corresponde al termino 15

Figura 15. Respuesta escrita de Andrés al ítem 3

En las líneas anteriores, se logra determinar que es mediante la interacción entre estudiante y profesora en el momento en el que ella a partir de L10, por medio del señalamiento que realiza sobre los términos que él ya ha encontrado, de palabras y de gestos, invita a que Andrés nuevamente vea la secuencia como la había visto en el ítem anterior a partir de la comunalidad que ya había encontrado. La profesora no le dice qué hacer, lo invita a que sea él quien recuerde como lo hizo (Radford, 2020a). Ella forja el camino dentro de un esfuerzo colectivo, en el que él está comprometido con la tarea y la profesora con la responsabilidad de ayudar a que aparezca ese saber que no es propio de la profesora ni de Andrés, es un saber que ha sido incrustado en la historia y en la cultura (Radford, 2014). Es de esta manera que nuevamente Andrés toma conciencia que el término T_n se obtiene de la suma de $T_{n-2} + T_{n-1}$. Recordando lo anterior es que finalmente en L19 Andrés puede responder a este nuevo ítem. Es de resaltar que todo se

da por medio de un trabajo colectivo realizado dentro de la interacción profesora-Andrés, tal como lo menciona Radford (2020), produciendo colectivamente un significado multisemiótico.

Para terminar con esta tarea, en el ítem 4, Laura, Byron y Andrés continúan realizando las sumas de los términos para encontrar el siguiente y de esta manera determinar si el número presentado pertenecía o no a la secuencia, siguiendo así con una generalización de tipo aritmética, como se puede observar en los siguientes fragmentos del diálogo de interacción entre Laura y la profesora.

L1. Laura: El cuarto dice: Uno de los estudiantes de quinto grado dice que el número 1590, pertenece a la secuencia, explica ¿Es cierto o no y por qué?

L2. Profesora: ¿Cómo vamos a saber eso?

L3. Laura: Hay que sumar

L4. Profesora: Listo, pero tú ya has encontrado algunos.

L5. Laura: Hasta el 15 (*refiriéndose al Término 15*)

L6. Profesora: 15, entonces ¿podemos avanzar?

L7. Laura: (*Escribe al respaldo de la hoja $377+610=987$*). Ya entendí mejor esto

L8. Profesora: ¿Sí? ¡Ah!, perfecto

L9. Laura: (*Escribe $610+987=1597$*). (*Voltea la hoja y mira el número que aparece en el ítem, vuelve y voltea la hoja y mira el número que le acaba de dar*) (*Mira con asombro y luego mira a la profesora*) No da.

L10. Profesora: Entonces, ¿es cierto o no? Y ¿por qué?

L11. Laura: No (*lo afirma con seguridad*), no es cierto porque acá es 1.597 (*señala el resultado de la suma que realizó*). 1597 y no es como dice lo del niño 1590.

Como se observa en L3 cuando Laura afirma “Hay que sumar”, se puede notar que ya ha logrado tomar conciencia durante el desarrollo de todos los ítem de esta tarea, que es mediante la suma de los términos que puede encontrar los siguientes y de esta manera continuar hacia la instanciación del saber, que no es producción de Laura, sino una producción histórico-cultural, la cual toma cuerpo en esta secuencia, es decir, ella se encuentra con un saber del cual ella toma conciencia, se instala en ella el conocimiento sobre ese saber para atender la secuencia, se instancia en ella una forma de saber.

De igual manera las producciones de Andrés y Byron, se analizan de manera conjunta, debido a que también afirman que es mediante una suma del el término $T_{n-2} + T_{n-1}$ que se encuentra el término T_n , como lo vemos a manera de ejemplo en un diálogo entre Byron y la profesora.

- L1. Byron: Uno de los estudiantes de quinto grado dice que el número 1.590 pertenece a la secuencia. Explica si es cierto o no.
- L2. Profesora: Él nos explicó que 1.590 pertenece a la secuencia. ¿Cómo hacemos para saberlo?
- L3. Byron: Se sigue con la suma.
- L4. Profesora: Listo. Ya vamos en el 15.
- L5. Byron: *(Escribe en su hoja la adición $610+377=987$. Luego escribe en un costado de la hoja el 987 y debajo escribe el 16)*. Este es el 16.
- L6. Profesora: ¡Ah! Ya encontraste el Término 16
- L7. Byron: *(Continúa escribiendo $987+610= 1.597$) (Voltea la hoja y mira el ítem 4) (mira a la profesora y sonríe)* No pertenece...
- L8. Profesora: ¿No? ¿Por qué?
- L9. Byron: Porque mire que aquí yo sumé es el 1597 y aquí es el 1590 *(señalando el ítem 4)*
- L10. Profesora: ¡Ah! entonces lo que te preguntan es “¿es cierto o no?”
- L11. Byron: No es cierto.
- L12. Profesora: No es cierto, listo entonces contestemos. No es cierto. Y ¿por qué?
- L13. Byron: Porque no pertenece
- L14. Profesora: Sí, no pertenece. ¿No pertenece a qué?
- L15. Byron: No pertenece a la secuencia.

En la siguiente figura, se observa los señalamientos realizados por Byron al dar respuesta al ítem 4.



Figura 16. Cálculo numérico de Byron para continuar encontrando los términos de la secuencia. (Captura de pantalla 28'50")

Al observar la figura 16, se resalta el señalamiento que realizó Byron con su mano izquierda en donde de manera vertical ha organizado el resultado de las adiciones para encontrar los términos y a su vez con la mano derecha continuó escribiendo las adiciones que le hacían falta, al tiempo que menciona muy suavemente la acción que realizó, lo que indica que involucra diferentes medios semióticos de objetivación de manera sincronizada

indicando así la presencia de un nodo semiótico (Radford, 2013), en donde exterioriza su pensamiento frente al saber que hasta ese momento ha tenido delante a él.

Además es de notar que continúa siguiendo el patrón de la secuencia que ya ha reconocido al responder en L3. “*Se sigue con la suma*”, lo que da indicios que la objetivación que alcanzó en el ítem 3, permite que avance desde los términos ya encontrados hacia la resolución de la tarea.

También es de tener en cuenta, que logran encontrar cómo otros piensan esa tarea, toman conciencia que finalmente lo que está pasando es que ponen en juego un proceso de objetivación de ver y de percibir esa secuencia, a través de la toma de conciencia, de una manera particular de atender ese saber histórico y cultural, que se materializa a través de esa secuencia de Fibonacci, es un saber para producir nuevos términos de esa secuencia.

3.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 3

Es importante resaltar nuevamente, tal y como se dijo en apartados anteriores, la intención epistemológica de esta tercer tarea no es igual que tareas anteriores, en tanto que al ser rediseñada se pensó para favorecer una evolución en la forma de pensar de los estudiantes, una forma que los posicionará en una toma de conciencia sobre lo indeterminado.

Al responder en el primer ítem a la pregunta “¿cuáles son los números que van en los términos 5 y 6 de la secuencia?”, tanto Laura, como Andrés y Byron justifican su respuesta diciendo que “van de tres en tres”. Se exhibe un fragmento del diálogo con Laura

L1. Laura: (*Observa el primer término de la secuencia, cuenta en sus dedos, observa el segundo término de la secuencia, cuenta en sus dedos mientras los señala. Mira a la profesora*) Va de tres en tres

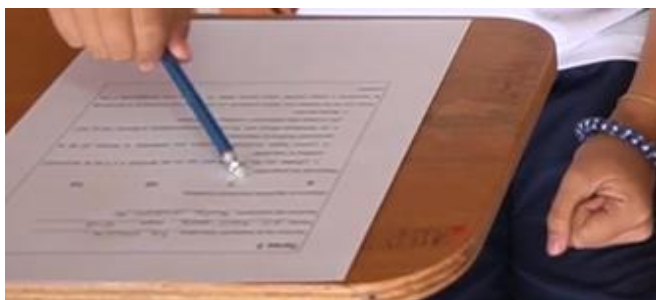


Figura 17. Señalamiento con el lápiz de Laura indicando el término del número (Captura de pantalla 0'23")

Según la figura anterior, se evidencia que Laura encontró un patrón en la secuencia presentada al indicar que “Va de tres en tres” conforme al señalamiento realizado, en donde nota que los cuatro primeros números de la secuencia van aumentando de a tres, en donde ha sido gracias a la movilización de algunos medios semióticos de objetivación como son la percepción, señalamientos, el conteo con los dedos, y palabras que ha logrado realizar.

L2. Profesora: ¿Va de tres en tres? Ok.

L3. Laura: Voy a empezar con las preguntas. *“Responde las preguntas: Primero: ¿cuáles son los números que corresponden a los términos 5 y 6 de la secuencia? Justifica tu respuesta”*

L4. Profesora: Ahí están los primeros cuatro, tú vas a encontrar el 5 y el 6

L5. Laura: (Asiente con la cabeza)

L6. Profesora: ¿Listo? Dale

L7. Laura: (Suma con los dedos, escribe a un costado de la hoja), aquí iría el 16 y el 19

En la siguiente figura se puede notar el conteo que realiza Laura con sus dedos

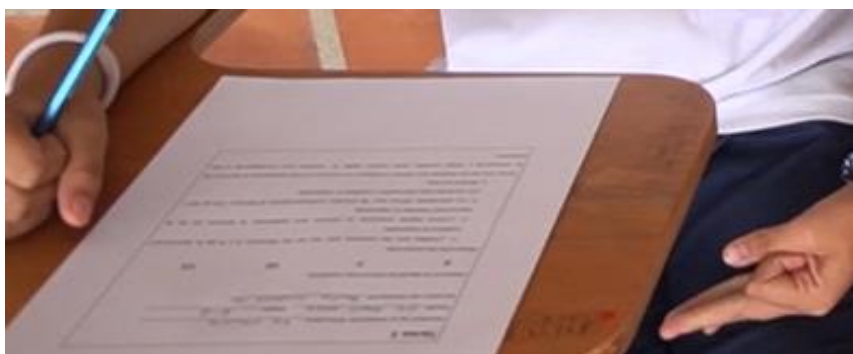


Figura 18. Conteo con los dedos de Laura, encontrando el siguiente término no dado de la secuencia numérica. (Captura de imagen 0'21")

A partir de la figura 18, se puede establecer que Laura continúa utilizando el recurso de contar en los dedos para encontrar los términos no dados de la secuencia, esto indica que la generalización que realiza sigue siendo de tipo aritmética pues requiere de los anteriores términos para avanzar en su tarea.

L8. Profesora: Listo, entonces responde y explica por qué

L9. Laura: (Escribe en la hoja de trabajo *“Son el número 16-19, de la secuencia 5-6”*.) Ya.

L10. Profesora: (Lee lo que ha escrito Laura). Pero ahí dice “justifica tu respuesta”, entonces ¿Por qué? ¿Por qué es el 16 el Término 5? ¿Y por qué el Término 6 es el 19?

L11. Laura: Porque ahí estoy contando de tres en tres

Laura en el abordaje de la tarea, todavía no ha encontrado una fórmula que le permita desprenderse del término anterior T_{n-1} para calcular el término T_n , por lo cual se verifica que la abducción es aún no analítica (Radford, 2013a)

Para continuar con el análisis, Byron, también realiza señalamientos en la secuencia, pero se enfoca en indicar el término que ocupa cada número a pesar que no se encuentra explícito en esta, como se observa en las siguientes líneas.

L1. Byron: “¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6 de la secuencia? Justifica tu respuesta. “Este es el primer término (*señala con su dedo de la mano izquierda el número 4*), este el segundo término (*señala con su dedo de la mano derecha el número 7*), este es el tercer término (*señala con su dedo el número 10*), este cuarto término (*señala con su dedo el número 13*), va de tres en tres.



Figura 19. Señalamiento con los dedos de Byron, indicando que los números pertenecen a los Términos 1 y 2. (Captura de imagen 0'42")

Con la Figura 19, se puede establecer que la objetivación del saber que se ha materializado durante las dos tareas anteriores, le permitió a Byron determinar la utilidad de la posición de cada número dentro de la secuencia pese a no estar escrita, para hallar los términos solicitados. El encuentro cultural de Byron con este tipo de tareas y su ya empezada forma “familiar” de reflexionar, actuar y ver sobre ellas, le indica cierta necesidad de referirse a cada número como un término de la secuencia.

L2. Profesora: ¿Entonces cuál sería el 5?

L3. Byron: el quinto sería el 16, el sexto sería 16... sería el 17. Ah no, 16 entonces sería 16...

L4. Profesora: ¿Por qué no escribes ese quinto y así encontramos más fácil el sexto? Vale

L5. Byron: Listo profe... Son 19

L6. Profesora: Pero recuerda, sí es 19, pero recuerda que tienes que responder la pregunta, ¿no?

L7. Byron: Mjm

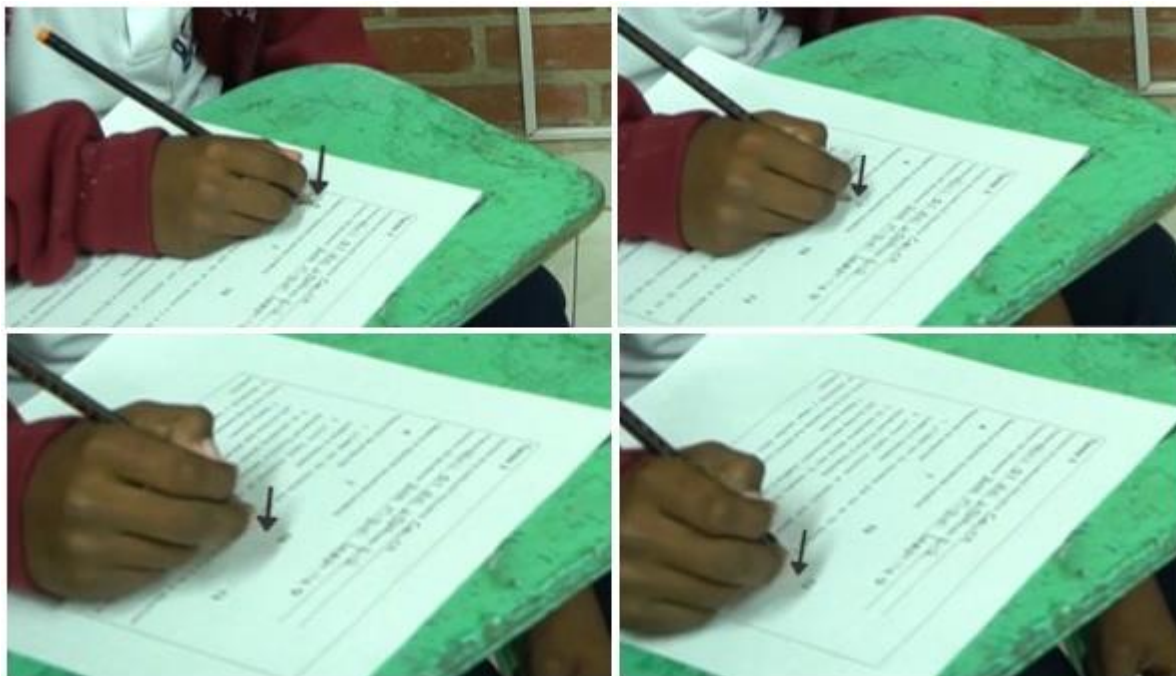


Figura 20. Secuencia de señalamientos con el lápiz de Andrés, sobre los términos a los cuales pertenecen los números. (Captura de imagen 0'42" hasta 0'49")

L8. Profesora: Ahí nos pregunta, ¿Cuál... cuál es el número? Entonces los números que van en el Término 5 y en el 6... Escribe

L9. Byron: (*Responde en su hoja de trabajo "El número que va en el 5° Término es 16. El número que va en el 6° Término es 19"*) Listo

L10. Profesora: Listo, entonces aquí nos dice "justifica tu respuesta" ¿Por qué son esos números ahí?

L11. Byron: Porque... (*Escribe en su hoja de trabajo, "porque en la tabla dice que va de tres en tres"*)

Similar a lo acontecido con Byron, Andrés se enfoca como primera medida en identificar a qué término pertenece cada número de la secuencia brindada, como se observa en la Figura 12 y en el siguiente episodio del diálogo

L1. Profesora: Es una secuencia, vamos a mirar bien, porque es una secuencia diferente a las otras dos que hemos visto, ¿vale? Entonces vamos a observar muy bien a ver ¿qué es lo que encontramos en esa secuencia?

L2. Andrés: (*Observa por unos segundos la secuencia*) O sea, este (*señala con el lápiz el número 4*) sería el Término 1 y este (*señala con el lápiz el número 7*) sería el Término 2 ¿sí o no? Este (*señala el número 10*) el Término 3 y este (*señala el número 13*) el Término 4.

Por medio de esta secuencia de señalamientos, se exhibe cómo Andrés con su lápiz toca debajo de cada número de la secuencia, al tiempo que va mencionando a qué término

pertenece dicho número, esto como punto de partida para el abordaje de este ítem. Esto muestra que Andrés ya tiene encarnada la relación que existe entre el número y la posición que ocupa dentro de la secuencia para posiblemente avanzar en esta.

L3. Profesora: Y de ahí, sigues con el 5. ¿Cuál será que sigue ahí?

L4. Andrés: Sería el 16 (*escribe en la hoja*) (*continúa escribiendo el Término 6*)

L5. Profesora: ¿Cómo los encontraste?

L6. Andrés: Sumándole de tres

Con lo expuesto, se puede notar que tanto en Laura, como en Byron y Andrés, están haciendo uso de una generalización aritmética para encontrar cada término de la secuencia, es decir, de manera general se basan en el $T_n - 1$ y la comunalidad +3 para encontrar el T_n .

También se puede establecer que hasta este punto los tres estudiantes movilizan un estrato de pensamiento factual, por cuanto que todos los medios semióticos de objetivación, como gestos, señalamientos, actividad perceptiva, lenguaje natural, los símbolos aritméticos, se usan para abordar la tarea, toda vez que se trabaja sobre casos particulares, es decir, anclados al hecho concreto.

Con el análisis realizado al ítem número 2 de esta tarea, se evidencia los diferentes tiempos en cuanto a la movilización que manejan Laura, Byron y Andrés a la hora de dar respuesta al requerimiento presentado, como se puede observar inicialmente con un fragmento de diálogo de Laura.

L1. Laura: La segunda dice: “¿Cómo lograrás encontrar el número que pertenece al término 20 de la secuencia? Explica tu respuesta.” O sea que aquí hay que multiplicar

L2. Profesora: ¿Qué multiplicarías?

L3. Laura: 20 por...

L4. Profesora: 20 ¿por qué?

L5. Laura: ¿Tres?

L6. Profesora: Hazlo

L7. Laura: Daría 60

L8. Profesora: Ahora vamos a hacer algo, este (*señala la respuesta del ítem 1*) que ya encontraste, vamos a multiplicar el término..., solo el 5 ¿Por cuánto lo multiplicarías?

L9. Laura: Mmm...por tres

L10. Profesora: Sí por tres ¿Cuánto da?

L11. Laura: Da 15.

L12. Profesora: Pero acá te dio 16. ¿Por qué sería?

L13. Laura: Porque acá (*señala el primer término de la secuencia*) no comenzó de 3 sino de 4

L14. Profesora: No comenzó de 3 sino de cuatro, entonces ahí ¿Qué habría que hacer?

L15. Laura: Mmm... Sumarle uno

L16. Profesora: Ajá.

L17. Laura: (*Escribe la operación en su hoja $20 \square 3 + 1$*)

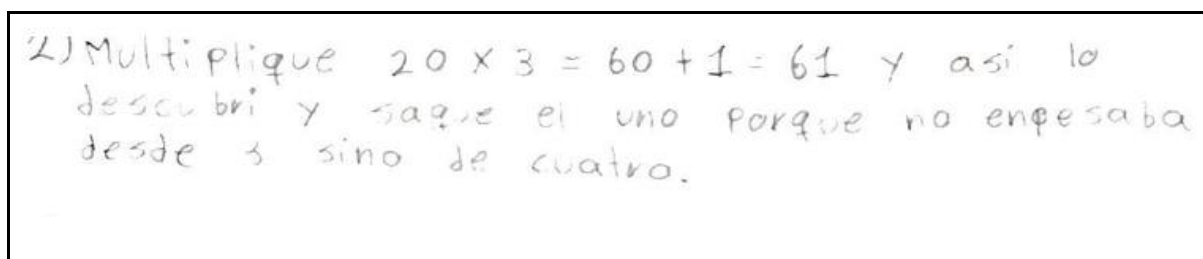


Figura 21. Producción de Laura al responder al ítem 2.

Con L8 se puede establecer que la intención de la profesora es que Laura con base en el proceso de objetivación que ha venido realizado en el ítem anterior, pueda relacionar la generalización aritmética con la generalización algebraica al realizar una comparación de los resultados efectuando diferentes operaciones. Lo que deja entrever la importancia del trabajo colectivo entre Laura y profesora, quien como lo menciona Radford (2020a) ella la invita a explorar los términos de la secuencia de diferentes maneras y así logra que sea Laura quien pueda determinar cómo está constituida esta como se nota en L9.

En el momento en el que Laura refiere en L15 que se debe sumar uno, tiene presente que la comunalidad que ha hallado va en aumento de tres en tres, al tiempo que a su modo de ver la secuencia, al iniciar con un número distinto al que debería iniciar según la comunalidad que ha encontrado, nota que la diferencia debe ser sumada como requisito necesario para encontrar otros términos de esa secuencia. Lo que indica que ella, empieza a observar una fórmula que si bien no está explícita es su lenguaje natural, es un punto de partida en donde se está logrando una abducción que estaría siendo usada analíticamente o es una abducción que es convertida en hipótesis (Vergel, 2014).

Por otro lado, Byron continúa con la opción de encontrar término a término los números de la secuencia para dar respuesta al ítem presentado, como se exhibe en el siguiente extracto de diálogo entre él y la profesora.

L1. Byron: El 20...!Ah; haciendo la tabla así hasta llegar al 20

L2. Profesora: Bueno entonces mira cómo podemos encontrar este término 20 y escríbelo. El número que va en el término 20

L3. Byron: Voy a hacerlo así (*cuenta en los dedos, escribe, habla suavemente*) siguiente... ¿Era el 20?

L4. Profesora: Si, el término es el 20, ¿Qué número va ahí?

L5. Byron: (*Continúa contando en sus dedos a partir del Término 6 y escribe en la hoja cada término hasta llegar el Término 20*) Listo, el 20 me daría 61

L7. Profesora: ¡Ah! 61

L8. Byron: Entonces... ¿Cómo es que dice la pregunta? (*Lee nuevamente la pregunta*)

¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al Término 20 de la secuencia? Justifica tu respuesta

L9. Profesora: ¿Cómo lo encontraste? Escribe acá cómo fue que lo encontraste ese término

L10. Byron: Lo encontré... (*Escribe en la hoja sin decir nada más*) “Lo encontré siguiendo los pasos de la tabla de la secuencia”

L11. Profesora: ¿Cuáles eran esos pasos de la tabla?

L12. Byron: Eran de tres en tres (*continúa escribiendo*) Listo

Término	16
Número de la secuencia	5
	29
	6
	22
	7
	25
	8
	28
	9
	31
	10
	39
	11
	37
	12
	40
	13
	43
	14
	46
	15
	49
	16
	52
	17
	55
	18
	58
	19
	61
	20

Figura 22. Hoja de trabajo de Byron escribiendo cada término para encontrar el Término 20

Como se observa en la figura, Byron recurre a encontrar cada término de la secuencia hasta llegar al término 20 que es el que se le solicita que encuentre en este ítem.

Se observa cómo de manera vertical va escribiendo el número siguiente de la secuencia y debajo de este el número del término, partiendo desde los términos 5 y 6 solicitados en el ítem anterior y siguiendo con el término 7. Esto muestra la necesidad de recurrir al término anterior lo que indica que continúa realizando un procedimiento aritmético el cual le permite dar respuesta al ítem y continúa siendo una generalización aritmética (Vergel, 2014).

Se puede observar como Byron cuando utiliza el simbolismo aritmético, utiliza la percepción, el lenguaje, lo gráfico, en donde todo esto confluye para formar lo que Radford (2013) ha nombrado como un nodo semiótico, debido a los diferentes medios semióticos que son utilizados por él al enfrentarse al este ítem..

Lo anterior indica que la producción del estudiante se enmarca dentro del pensamiento algebraico factual, porque su trabajo se queda en utilizar la percepción, los gestos, los cuales son medios semióticos que según Radford (2013a) se usan en dicho estrato de pensamiento, es decir se queda en el terreno de esquemas operatorios numéricos, utiliza fórmulas simbólicas propias de la aritmética.

Por último, Andrés al igual que Laura, puede determinar la forma de encontrar el término requerido utilizando una expresión directa (Vergel, 2014), que todavía no enuncia de manera explícita pero le permite dar cuenta del procedimiento a seguir.

- L1. Andrés: *(Empieza a leer en voz inaudible el siguiente ítem y escribe)* Sería 60
- L2. Profesora: ¿Ya? ¿Cómo lo hiciste?
- L3. Andrés: Multiplique el 20 por el 3 porque esa es la secuencia
- L4. Profesora: ¡Ah! El 20 es el término que nos están pidiendo, ¿cierto? Y el tres ¿qué es?
- L5. Andrés: Es lo que aumenta
- L6. Profesora: Lo que van aumentando acá *(desliza su mano sobre los números de la secuencia presentada)*.
- L7. Andrés: Sí
- L8. Profesora: Bueno. Te dio 60. Listo, lo que hiciste aquí es correcto, que aumenta acá *(señala la secuencia presentada)*. Va aumentando de tres en tres. Pero si en el ítem anterior multiplico el término por tres, no me da este *(señala el número correspondiente al Término 5)* ¿Por qué será?
- L11. Andrés: Lo sumamos, un uno, lo sumamos
- L12. Profesora: ¿Se lo sumamos? Súmaselo a ver cómo nos da eso
- L13. Andrés: Sería... 61

De manera general, se puede establecer que tanto Laura como Andrés logran hacer generalizaciones algebraicas de tipo factual, debido a que hay una deducción de una fórmula que se usa de manera contundente, pero que es utilizada para casos particulares, sigue estando anclada a hechos numéricos en donde el simbolismo aritmético es el que prevalece junto al lenguaje natural y los gestos.

Continuando con el ítem 3, se toman los análisis de Laura y Andrés de manera unificada, debido a que responden de manera similar. Se muestra a continuación un segmento de la actividad matemática generada con Laura.

L1. Laura: La tercera dice: “Un estudiante afirma que el número correspondiente al término 100 es 301. Ahí tendría que multiplicar 100×3

L2. Profesora: Dale.

L3. Laura: (*Realiza la multiplicación* $100 \times 3 = 300 + 1 = 301$ “” *la realiza de manera vertical*) Sí. Es 301

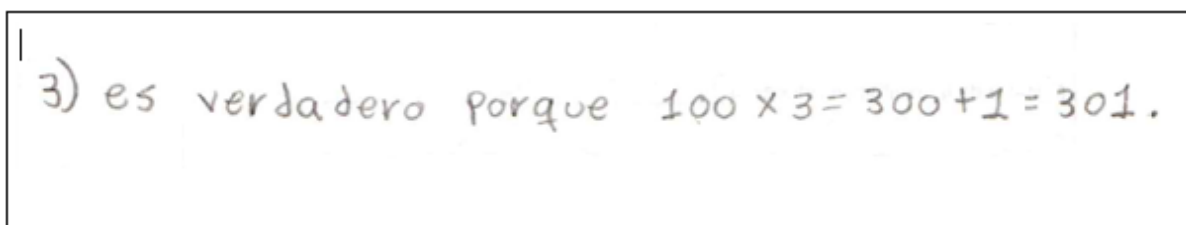
L4. Profesora: Entonces ¿qué tienes que contestar ahí?

L5. Laura: Que sí

L6. Profesora: Dale

L7. Laura: (*Escribe mientras habla*) Es verdadera porque $100 \times 3 = 300 + 1 = 301$

Como se puede observar, Laura en L3 escribe la expresión multiplicativa $100 \times 3 = 300 + 1$. Pese a que en L1 solamente habló de multiplicar 100×3 , lo que indica que aunque no lo menciona, tiene en cuenta que el número “uno” debe sumarse al resultado de la multiplicación. Lo anterior da cuenta que ya está viendo como hipótesis el hecho de que se debe multiplicar por tres y sumarle uno para encontrar el término de la secuencia requerido, aunque sea un número específico.



3) es verdadero porque $100 \times 3 = 300 + 1 = 301$.

Figura 23. Respuesta escrita por Laura en el ítem 3

Byron, por su parte, a pesar que logra dar respuesta al requerimiento del ítem, es necesaria una interacción entre él y la profesora, quien lo invita a recordar cómo ha

encontrado los términos solicitados en la tarea 1, porque hasta en el ítem 2 de la tarea 3 no había logrado reconocer la forma de encontrar los términos que fuera diferente a utilizar el antecesor para encontrar el sucesor y de esta manera logra recordar cómo puede avanzar hacia los siguientes términos.

L1. Profesora: ¿Es correcta esa afirmación? ¿Cómo haces para saber si es correcta? ¿Cómo haces para poder responder a la pregunta?

L2. Byron: ¡Uf! ahí sí está muy largo para hacer eso

L3. Profesora: Esta muy largo para hacer eso, entonces hay que encontrar una forma más corta

L4. Byron: Que me llegue a 300 pues puedo dividir 100 por 300... o restar

L5. Profesora: ¿Qué restarías ahí?

L6. Byron: 300 y restaría 100

L7. Profesora: ¿Tú recuerdas en la tarea 1 como la hiciste?

L8. Byron: En la tarea uno. No

L9. Profesora: ¿No recuerdas cómo la hiciste? Vamos a mirar (*busca la hoja de la tarea uno y se la enseña a Byron*). Al principio la hiciste así larga (*señala la respuesta que dio al ítem 2 de la tarea 1*), pero luego la hiciste más corta (*señala la forma en que se realizó haciendo una operación multiplicativa “ $15 \times 2 = 30 + 1 = 31$ ”*), ¿recuerdas cómo?

L10. Byron: Sí, multiplicar

L11. Profesora: Entonces, ¿Qué multiplicarías allí?

L12. Byron: Multiplicaría el 2 por el 100

L13. Profesora: Pero ¿Por qué 2?

L14. Byron: Porque...

L15. Profesora: ¿Qué nos dice la tabla?

L16. Byron: Dice: una estudiante... que va de tres en tres

L17. Profesora: Ah listo, entonces ¿cómo multiplicarías?

L18. Byron: ¡Ah! (*ríe*) cien por tres. Yo, me había olvidado. (*Escribe mientras menciona las palabras, realiza la multiplicación “ $100 \times 3 = 300 + 1 = 301$ ”*). Sí es correcta (*Escribe la respuesta*)

L19. Profesora: Y ¿Por qué es que le sumas uno? (*Lee la respuesta*) Empieza desde el cuatro. ¿Y qué pasa que empiece desde el 4?

L20. Byron: Porque tenía que empezar desde el 3, para que fuera de a tres, entonces sumamos ese uno.

③

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 3 \\ \hline 300 \\ + 1 \\ \hline 301 \end{array}$$

si es correcto
porque multiplicamos cien por el
tres y a lo ultimo le sumamos el
uno por que la secuencia empieza
desde el 4

Figura 24. Respuesta escrita de Byron al ítem 3 de la tarea 3

Teniendo en cuenta lo descrito en L7, la profesora incita a Byron a recordar la manera que anteriormente él había utilizado en otra tarea para encontrar un término solicitado y continúa mostrándose en L9 la manera como ha escrito en su hoja de trabajo con la intención de encontrar ese objetivo común (Radford, 2020a) que en este caso es reconocer la secuencia general $3n + 1$, siendo $n = 1, 2, 3, \dots$, desde luego sin que sea expresada en su discurso.

Es de notar que finalmente Byron logra una deducción de una fórmula, esto gracias al trabajo colectivo desplegado con la profesora que en este punto le ayuda a encontrarla, gracias a la labor conjunta que como lo menciona Radford (2020a), es impulsada por esfuerzos colectivos que permiten la movilización del pensamiento de él hacia la expresión que manifiesta, como se observa en la Figura 24.

Teniendo en cuenta lo observado, se puede determinar que de manera general, Laura, Byron y Andrés, realizan una generalización algebraica de tipo factual (Radford, 2013), esto, dado que los tres se mueven dentro de operaciones numéricas, trabajan sobre hechos concretos, es decir, todavía la indeterminancia no alcanza el nivel de conciencia, no está dentro del plano de la enunciación, por lo tanto no logra avanzar a un estrato mayor de pensamiento algebraico.

Para terminar con esta tarea, se presentan algunos fragmentos de diálogo generado con Laura y con Byron al rededor del ítem 4, los cuales más adelante se analizan

conjuntamente dado que sus producciones son similares, dichos análisis se realizan de acuerdo a la posibilidad que generan los estudiantes para encontrar un término que es lejano, pero que lo da el azar, que no se encuentra descrito dentro del ítem.

Diálogo de Laura respecto al ítem 4

- L1. Laura: (*Lee*) “Balota secreta: toma una de las balotas que contiene un número el cual representa el término de la secuencia y luego responde como puedo hallar el número que corresponde a esa posición”
- L2. Profesora: Listo, entendiste qué es lo que hay que hacer, ¿cierto?
- L3. Laura: Tengo que agarrar una balota
- L4. Profesora: Aquí tengo 5 balotas que dentro tienen el término, tú tienes que hallar el número. Vamos a ver cuál sacas (*abre una bolsa y le pasa para que Laura tome una*) Listo, destápalo y tú tienes que hallar ese número
- L5. Laura: (*La toma y destapa*) El 150
- L6. Profesora: No, mira bien cuántos ceros tiene
- L7. Laura: Digo 1.500
- L8. Profesora: ¡1.500! Entonces tenemos que hallar... ¿Cómo lo vas a hacer?
- L9. Laura: Ahí sería... 1.500×3
- L10. Profesora: Dale
- L11. Laura: (*Realiza la multiplicación*) Dio 4.501
- L12. Profesora: Entonces escribe cómo puedo hallar el término que corresponde ¿Cómo lo hallaste? ¿Cómo fue que hallaste ese término?
- L13. Laura: (*Escribe la respuesta “Lo hallé multiplicando $1.500 \times 3 = 4.500 + 1$ ”*) Ya
- L14. Profesora: Me recuerdas ¿cómo lo hallaste?
- L15. Laura: Multiplicando el 1.500 por 3 y le sume 1.

Diálogo de Byron referente al ítem 3

- L1. Byron: “Balota secreta. Toma uno de las balotas que contienen un número en el cual representa el término de la secuencia y luego escribe cómo puedo hallar el número que corresponde a esa posición” (*mira a la profesora con expresión de desconcierto*)
- L2. Profesora: Vamos a empezar despacio (*toma la bolsa donde están las balotas y le ofrece a Byron para que introduzca su mano*). Aquí tenemos las balotas, cada una tiene un número diferente que representa el término. Vas a sacar una.
- L3. Byron: (*Toma una balota*)
- L4. Profesora: Listo, destápala. Eso representa el término. Listo. A ver veo ¿Qué número te tocó?
- L5. Byron: El 3000
- L6. Profesora: El 3000, listo. Ahora dice “escribe ¿cómo puedo hallar el número que corresponde a ese? ¿Cómo lo puedo hallar?”
- L7. Byron: Tres por 3.000. Lo puedo multiplicar (*Continúa escribiendo*) Listo
- L8. Profesora: ¿Multiplicar qué?

L9. Byron: Multiplicando el tres por 3.000 y a lo último le aumentaría el 1

L10. Profesora: Hazla. La multiplicación ahí

L11. Byron: (*Escribe la operación en la hoja y luego escribe la respuesta “Lo hallaría multiplicando 3.000 por 3 sumar el número 1 a lo último”*)

En este punto de la tarea se puede notar que Laura y Byron ya tienen encarnada en ellos la expresión directa que han estado movilizando durante la tarea. Es debido a esto que logran dar respuesta al ítem en el momento en que observa el número que sale en la balota. Laura en L11 da la respuesta y se evidencia que ha realizado la operación multiplicativa y le agrega el número uno, Byron en L10 manifiesta “*Lo hallaría multiplicando 3.000 por 3 sumar el número 1 a lo último*”, lo cual se esperaba que ellos hicieran dado que ya han tomado como hipótesis (Vergel, 2014) la expresión que escribe.

Según lo evidenciado, lo que logran Laura y Byron es tomar como principio asumido (Vergel, 2014) la fórmula generada y que arroja el número para cualquier término, pese a ser un número dado, no estaba estipulado dentro del ítem, lo que propicia que la movilización del pensamiento de Laura y Byron sea de mayor complejidad, esta expresión directa, o mejor, su deducción, es una de las características de la analiticidad (Vergel, 2014), unidad de análisis dentro de este trabajo de investigación.

Para terminar, Andrés, luego que escucha la dinámica del desarrollo del ítem, intenta iniciar desarrollando una generalización de tipo aritmética, pero luego de interactuar con la profesora logra recordar la manera cómo puede continuar dando respuesta al ítem como se evidencia en las siguientes líneas.

L1. Andrés: (*Lee el ítem 4 en voz muy baja*)

L2. Profesora: Listo, entonces ¿viste que hay que hacer en esa?

L3. Andrés: Sí (*Mira de medio lado*)

L4. Profesora: Bueno, entonces aquí yo tengo unas balotas, y ellas dentro tienen un número, pero el número que está dentro es del término, o sea del número que va abajito (*señala en la hoja debajo del número 4 que es el Término 1 en donde debería estar la palabra término*), es del termino del puesto. ¿Listo? Y tenemos que encontrar el número que va acá arriba (*señala el número 4*). Sácame una a ver cuál te sale (*abre la bolsa que contiene las balotas para que Andrés saque una*), aquí hay varias, hay bajitas y hay altas (*refiriéndose a el número que contiene las balotas*)

L5. Andrés: ¿La veo?

L6. Profesora: Si dale

L7. Andrés: El número 500

L8. Profesora: 500, te toco uno bajito. Listo, entonces, ya sacamos ese número y dice “¿cómo puedo hallar el número correspondiente a ese término?” queda en término ¿listo? ¿Cómo puedo hallar ese es el término, pero como hallo el número que va ahí en ese término?

L9. Andrés: Entonces yo debo sumar hasta que llegue a 500

L10. Profesora: ¿Vas a hacer eso? Hazlo, a ver.

L11. Andrés: Observa la hoja. Le da vuelta a la hoja e intenta escribir, vuelve y gira la hoja se rasca los ojos, gira nuevamente la hoja escribe y borra

L12. Profesora: ¿Qué hiciste ahí? Cuéntame. ¿Qué hiciste ahí? ¿Por qué tomaste el 301 y el 100?

L13. Andrés: (*Habla muy suavemente sin levantar la mirada*)

L14. Profesora: Es que no te escucho... Ibas a sumarlo pero ¿qué?

L15. Andrés: Pero me acordé de que era de tres en tres.

L16. Profesora: ¡Ah!, entonces ya lo cambiaste al tres, pero ¿Por qué cogiste el 301? Cuéntame, ¿de dónde salió ese 301?

L17. Andrés: Del término número 100

L18. Profesora: Del Término número 100. Listo. Pero es que ese ter... bueno, no sé qué vas a hacer más adelante. Porque esa es la pregunta tres, ¿cierto? El término número cien pero la que estamos haciendo es la cuatro y en la cuatro vamos es con ese número que tú sacaste en la balota.

L19. Andrés: Lo puedo multiplicar por tres (*escribe 500 por 3*) Ese es el término (*señala el 1.500 que obtuvo*)

L20. Profesora: Ese es el término, ah y el número que te dio fue

L21. Andrés: 1500

L22. Profesora: Pero tú recuerdas que como estamos en esta misma secuencia ¿Qué más hiciste en el ítem anterior para encontrar el Término 100?

L23. Andrés: Ah entonces... sería 1501.

L24. Profesora: ¿Por qué te daría eso?

L25. Andrés: Porque hay que sumarle el uno

L24. Profesora: Entonces aquí nos dice “escribe como puedo hallar el número correspondiente.” Tú ya lo hallaste pero escribe como hiciste para hallarlo

L25. Andrés: (*escribe “Multipliqué el 500 por el 3 y luego le sumé 1”*) Ya

Inicialmente Andrés expresa como primera estrategia la posibilidad de realizar una generalización aritmética tal como lo menciona en L9 “*Entonces yo debo sumar hasta que llegue a 500*”, plantea continuar realizando adiciones hasta llegar a dicho término, lo que indica que ha olvidado que no necesariamente se debe hacer de término en término para encontrarlo. Al igual, en L17 él intenta partir del último término encontrado en el ítem anterior el cual era el Término 100 para avanzar en la búsqueda del término requerido, pero

sigue en la necesidad de partir de un término que ha encontrado con anterioridad, lo que hasta este momento indica que continúa realizando una abducción no analítica.

En L22 la profesora indaga sobre lo que Andrés había objetivado sobre el inicio de la secuencia, lo que le permite recordar que hay que sumarle uno y de esta manera poder responder como lo hace en L25.

Nótese que la profesora dentro de la actividad generada en ese momento, le ayuda a Andrés a tomar conciencia de lo que anteriormente él ya había logrado encontrar, a saber, otra forma que es más económica en tiempo y en tratamiento para encontrar un término más lejano, es decir, es gracias a la relación de labor conjunta entre Andrés y ella que él se reencuentra con esa forma de generalización en tanto generalización algebraica, tomando conciencia de lo que había logrado anteriormente y de esta manera se logra el objetivo común (Radford 2018) que en este caso es operar con un número eventual.

Al ver los análisis de los fragmentos de diálogos de las entrevistas y hojas de producción de Laura, Byron y Andrés, se puede establecer que continúan estando en un estrato de pensamiento factual al continuar trabajando sobre números concretos, aun así se cumple con el propósito de este ítem, debido a que cada uno de ellos ratifican la movilización lograda en los ítem anteriores de este trabajo.

3.2.4 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 4

A continuación, se presenta el análisis de las producciones de los estudiantes en esta tarea.

Para iniciar, en el ítem 1 se planteaba la pregunta ¿Cuál consideras que es el número del término siguiente en la secuencia? ¿Por qué? Se puede determinar que tanto Laura, como Byron y Andrés enfrentan este ítem con más fluidez que los anteriores, esto se debe a que los procesos de objetivación que en ellos se han venido instanciando durante el desarrollo de las tareas 1, 2 y 3 sobre la forma de tomar conciencia sobre los procesos que atañen a la generalización de patrones como, por ejemplo, la producción de fórmulas, la actividad perceptiva que ahora se encuentra más delicada, más refinada, más domesticada en términos de Radford (2020a). El análisis que han realizado de las tareas anteriores, sin

duda alguna, ha sido determinante en la tarea 4 para que puedan percibir de manera más espontánea estos elementos en ese encuentro con el saber cultural (Radford, 2014, 2018, 2021) que son de la naturaleza propia de la generalización de patrones.

A continuación, se analizan específicamente las producciones de Laura partiendo con el siguiente diálogo.

L1. Laura: (*Observa la secuencia, habla suavemente y cuenta en sus dedos*) ocho, nueve, diez, once. La secuencia empieza de tres.

L2. Profesora: ¿Empieza de tres?

L3. Laura: Empieza de cinco pero va sumando de tres.

L4. Profesora: ¡Ah! suma tres.

L5. Laura: Sí. Acá empieza de cinco (*señala con sus dedos el primer Término de la secuencia*) y no en tres.

L6. Profesora: Eso ¿qué quiere decir?

L7. Laura: Que al tres le habían sumado dos. Empezaron en cinco. Esa es la clave para hacer las preguntas.

L8. Profesora: Empecemos con las preguntas a ver.

L9. Laura: (*Empieza a leer el primer ítem “¿Cuál consideras que es el término siguiente en la secuencia? ¿por qué?”*) El Término... (*Menciona esta palabra en voz baja*). Este es el Término 1 (*señala con el lápiz número 5*), este es el Término 2 (*señala con el lápiz el número 8*), este es el Término 3 (*señala con el lápiz número 11*) y el Término 4 (*señala con el lápiz el lugar en donde debería ir el Término 4*)

L10. Profesora: ¿Qué número sería ese Término 4?

L11. Laura: (*Baja sus manos hacia sus piernas y cuenta en los dedos*) Sería el 14. (*Escribe la respuesta en su hoja de trabajo*)

L12. Profesora: ¿Por qué dices que es el 14?

L13. Laura: Porque se le suman tres.

Como primera medida, Laura emplea la percepción, debido a que está encarnada en ella la necesidad de centrar la atención en cómo se da el aumento de un número al siguiente, asunto que se ubica dentro del terreno fenomenológico de la generalización de patrones de acuerdo con Radford (2013a)

En L1 se puede notar como Laura de manera inmediata objetiva la comunalidad que contiene la secuencia, a partir de la afirmación “*La secuencia empieza de tres en tres*” para dar a entender que cada número dado en esta secuencia va aumentando en tres. Esta toma de conciencia de la comunalidad a partir de la actividad perceptiva que Laura logra de manera casi inmediata, se convierte en un proceso central para poder responder al primer

ítem de la tarea, lo cual se logra observar en L11 cuando ella afirma de manera contundente que el Término que sigue es el 14. Lo anterior evidencia que ella logra un tipo de generalización aritmética tal como Radford (2013a) lo ha reconocido.

En L9 Laura, mencionó a qué término pertenece cada número dado y señala con su lápiz el lugar en donde hipotéticamente debería estar ubicado el Término 4 como se evidencia en la Figura 25.

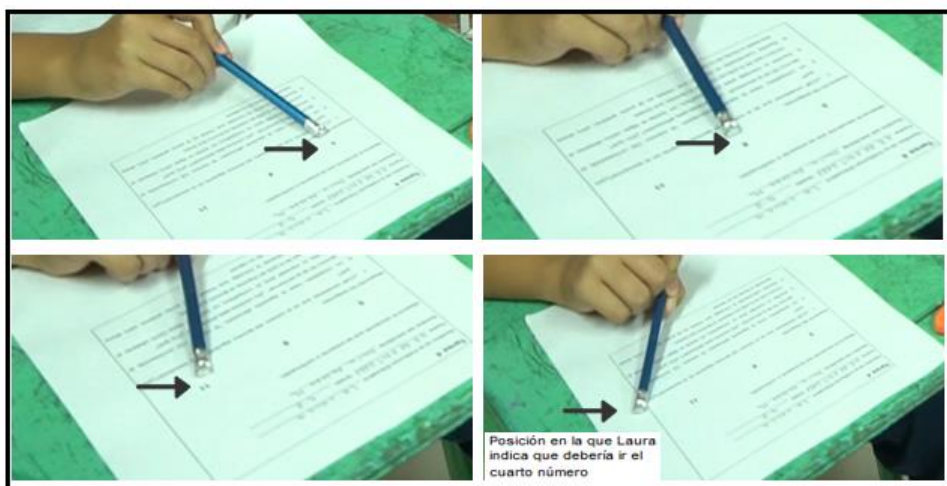


Figura 25. Secuencia de señalamientos con el lápiz de Laura, sobre los términos a los cuales pertenecen los números de la secuencia y ubicando el lugar donde debería estar el Término 4. (Captura de imagen entre 1'03" y 1'07")

La figura anterior da cuenta que Laura percibió la necesidad de nombrar cada uno de los términos presentados al tiempo que los señala con su lápiz y además le da ubicación al término que se le está solicitando, esto debido a que ella ha instanciado la relación que existe entre el número y la posición que ocupa dentro de la secuencia. Lo anterior indica que Laura, al emplear estos medios semióticos de objetivación como son, la actividad perceptiva, el lenguaje, los gestos como señalamientos, de manera simultánea está bajo la movilización de un nodo semiótico (Radford, 2013a), el cual hace posible la materialización del saber que ella ha objetivado.

Para continuar, analizamos un segmento de diálogo de Byron en las siguientes líneas.

L1. Byron:... el término de estos números (*traza con el borrador de su lápiz una línea sobre los tres números de la secuencia*), aquí sería (*señala con el dedo de la mano izquierda el*

término uno y con el lápiz el lugar donde debería ir la palabra término) el Término uno, el Término dos (*señala con el dedo el número 8 que corresponde al término dos*) y el Término tres (*mira a la profesora*)

L2. Profesora: Bueno. ¿Cuál sería el siguiente?

L3. Byron: El siguiente número sería... cinco (*señala con el dedo índice de la mano izquierda el primer Término y con el lápiz el lugar en donde debería estar la palabra Término*) tres (*toca el número ocho que corresponde al Término dos*). Aquí va de tres en tres, el siguiente sería el 14 (*levanta la mirada y la dirige hacia la profesora*)

L4. Profesora: ¿Listo? Escríbelo.

L5. Byron: (*Empieza a escribir en su hoja “El término siguiente de la secuencia es el 14”*) Ese es el Término... (*Levanta la mirada hacia la secuencia*) cuatro (*continúa escribiendo*).

En L1 Byron muestra la necesidad de darle una etiqueta a los números de la secuencia en virtud que la secuencia misma no los provee, por lo tanto lo que él hace es tomar como referencia el saber que ha venido objetivando en el proceso de desarrollar las tareas anteriores para a cada número darle un Término n , iniciando desde el lado izquierdo con el Término 1 y continuando hacia el lado derecho para poderse referir a él. Esto justamente por el contacto cultural que tuvo con las tareas iniciales que se les propuso en este trabajo de investigación.

En L3 Byron afirma que el siguiente número es el 14, luego de haber identificado que la secuencia va de tres en tres, la identificación de esta comunalidad es lograda de manera casi inmediata, mostrando así la toma de conciencia la cual le posibilita responder adecuadamente al ítem, pero además darse cuenta que puede utilizar esa comunalidad de una manera veraz, a través de una generalización aritmética, que le permite decir cuál es el número siguiente que no está dado en la secuencia. También es de notar que incluye en su discurso palabras como “término” y “va de tres en tres”, en donde se empieza a notar el uso de un lenguaje que es más propio de este tipo de tareas de generalización de patrones.

A su vez, Andrés determinó sin mayores contratiempos el término siguiente en la secuencia, movilizándolo su actividad perceptiva para encontrar la comunalidad en los términos dados de esta, como se puede notar en el siguiente fragmento de diálogo.

L1. Profesora: Vamos a observar bien esta secuencia porque recuerda que tenemos que encontrar qué es lo que cambia en esa secuencia para poder desarrollar las preguntas, ¿vale?

L2. Andrés: (*Observa la hoja y lee mentalmente*) (8") (*intenta escribir pero se queda pensativo*) Sería catorce

L3. Profesora: ¿Por qué sería catorce?

L4. Andrés: Porque esta (*señala con el lápiz la secuencia que está en la hoja*) también se va sumando de tres en tres

L5. Profesora: Ah ok, entonces coloca eso.

L6. Andrés: (*Escribe la respuesta en la hoja*) "El Término siguiente el 14. Porque la secuencia va de tres en tres". Listo.

Según la respuesta dada por Andrés en L4. "...también se va sumando de tres en tres", se puede establecer que es gracias a los procesos de objetivación que ha ido movilizándolo al enfrentarse a esta tarea, que puede dar cuenta de cómo está estructurada la secuencia y así tomar conciencia la comunalidad hallada para usarla y con ello indicar cuál es el término que sigue en la secuencia.

Andrés, al haber hallado la comunalidad, puede dar cuenta del siguiente término de la secuencia gracias a la extrapolación que realiza de la generalización hacia términos no dados, esto, muestra evidencia que, según Vergel (2014), está transitando del terreno fenomenológico a el abordaje de la generalización en el campo epistemológico.

Al continuar con el ítem 2, se expone una parte del diálogo de Laura.

L1. Laura: La segunda dice "Un compañero hace la siguiente afirmación "el número 152 corresponde al Término 50 de la secuencia. ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué?" Hay que hacer una multiplicación.

L2. Profesora: ¿Por qué crees que necesitamos hacer una multiplicación para saber si es correcta o no?

L3. Laura: Porque hay que multiplicar 152 por 3 (*realiza en su hoja la multiplicación*) No da. Porque ahí tocaría multiplicarlo por el 50. (*Escribe en su hoja la multiplicación correspondiente a 50 por 3*). Aquí sí me dio el 152.

L4. Profesora: ¿Cómo hiciste esa operación? ¿Qué hiciste allí?

L5. Laura: Multipliqué el 50 por el 3...

L6. Profesora: El 50 es el Término que había que encontrar y ¿el tres por qué?

L7. Laura: Porque es el número que va sumando.

L8. Profesora: ¿Luego qué hiciste?

L9. Laura: Al resultado que me dio, a ese le sume dos que era como empezaba la secuencia (*señala el Término número uno con el lápiz*)

L10. Profesora: Lo que me dijiste que era "la clave" ¿cierto? Y ¿por qué lo llamas la clave?

L11. Laura: Sí. Porque ese es el número que hay que sumar en la secuencia.

L12. Profesora: Ahora sí escribamos la respuesta.

L13. Laura: (*Escribe la respuesta al ítem en su hoja de trabajo*). “*Sí es correcto, porque multiplique $50 \times 30 + 2 = 152$ y sí fue correcta*”)

L14. Profesora: Entonces, lo que aquí observamos es que si yo multiplico el número que me están dando por el patrón no me va a dar, lo que tengo que multiplicar es...

L15. Laura: El término

En las líneas anteriores, se observa que lo logrado por Laura, es mover la naturaleza de la generalización que había adquirido con el ítem anterior de esta tarea, hay que recordar que en dicho ítem, se inquirió a Laura por un término que estaba muy cercano a los inicialmente dado, ella no tuvo necesidad de realizar ningún proceso de deducción de una fórmula, lo que en este ítem sí logra hacer, aunque todavía se encuentra anclada a números concretos, pero es utilizada de forma categórica para deducir cualquier término conocido dentro de la secuencia. Tal como lo afirma Radford (2013a) la comunalidad pasa a ser principio asumido, por eso la generalización ya no se enmarca como aritmética sino como algebraica.

En L13 la expresión escrita por Laura, da cuenta de la aplicación del esquema operacional que puede poner en marcha en este ítem, realiza una expresión directa basada en números concretos, pero que indica que Laura realiza una generalización algebraica, en donde también es necesario particularizar que se enmarca dentro del pensamiento algebraico factual (Radford, 2003; Vergel 2015) debido a que moviliza elementos que son característicos de este tipo de pensamiento.

Se puede determinar que hasta este ítem se cumple con el propósito, dado el hecho que cambia radicalmente la manera en que ella opera, precisamente porque estaba diseñado con esa intención.

Por el contrario, Byron parece haber olvidado la manera de proceder en el abordaje de este ítem, debido a esto es necesario el acompañamiento de la profesora para que vuelva a tomar conciencia de la forma como lo había hecho anteriormente, lo cual se puede observar en las siguientes líneas.

L1. Profesora: Nos están diciendo que ese número pertenece al Término 50, necesitamos saber si eso es verdad o no. ¿Cómo lo hacemos?

- L2. Byron: Mmm... lo hacemos... (9'') Lo vamos haciendo así como en fila (*con su dedo marca en la hoja de arriba a abajo*) {Refiriéndose de término a término}
- L3. Profesora: ¿Vas a hacerlo así hasta el 50?
- L4. Byron: (*Asiente con la cabeza*)
- L5. Profesora: ¿Tú recuerdas la tarea anterior? La tarea tres ¿cómo la hiciste?
- L6. Byron: Multiplicando y sumando después, sumándole el número uno.
- L7. Profesora: Y ¿crees que podamos hacerla parecida para que no nos toque escribir tanto?
- L8. Byron: Sí.
- L9. Profesora: ¿Cómo la harías? A ver, dime.
- L10. Byron: Haría la multiplicación, este...el 50 por...este...por 5
- L11. Profesora: Pero, ¿de dónde sacarías ese cinco?
- L12. Byron: De aquí (*señala el primer término de la secuencia*).
- L13. Profesora: Del primer término de la secuencia ¿cierto? Y ¿por qué por ese número 5?
- L14. Byron: Mmm...porque de pronto ahí me daría el resultado y lo podría responder.
- L15. Profesora: El cinco es el primer término ¿cierto?, desde ahí empezamos. Pero tú me estás diciendo que de aquí (*señala con el dedo el primer término de la secuencia*) a aquí (*señala el segundo término de la secuencia*) ¿qué es lo que cambia?
- L16. Byron: Lo que cambia es que este (*señala el segundo término de la secuencia*) le lleva por tres.
- L17. Profesora: Y de aquí (*señala el término dos*) a acá (*señala el término tres*).
- L18. Byron: También de tres. ¡Ahhh! (*sonríe mirando la secuencia y empieza a escribir*)
- L19. Profesora: Vas a multiplicar este (*señala el número 50 que Byron ha escrito*) ¿por cuál número?
- L20. Byron: Por el tres
- L21. Profesora: Y ¿por qué por tres?
- L22. Byron: Porque la tabla de aquí (*con su dedo índice hace un recorrido siguiendo los números de la secuencia*) va de tres en tres
- L23. Profesora: ¡Ah! la secuencia va aumentando de a tres. Listo
- L24. Byron: Sí. (*Empieza a escribir y habla con voz suave*) tres por cero...cero, tres por cinco, le sumamos uno...
- L25. Profesora: Espérate ahí. ¿Por qué le vas a sumar uno?
- L26. Byron: El dos::: Entonces, le tenemos que sumar dos.
- L27. Profesora: ¡Ah! yo creo que le sumamos los dos, Sumémosle dos a ver cómo nos va.
- L28. Byron: (*Escribe en la hoja $50 \times 3 = 150 + 2 = 152$* '') Sí da el resultado
- L29. Profesora: Multiplicar el Término...
- L30. Byron: Con la tabla que aumenta de tres y le sumo con el dos que empieza antes de la secuencia.
- L31. Profesora: Listo. Respóndela.
- L32. Byron: (*Escribe la respuesta "Sí es correcta porque hice una multiplicación, multiplique 50×3 y me dio 150 después lo sume con el 2"*) Listo.

Byron, en L12 plantea desarrollar el ítem realizando una generalización aritmética encontrando término a término, lo cual indica que ha olvidado la manera como abordó los

ítems de la tarea 3. Es en este momento donde la profesora en L5., incita a Byron a reencontrarse con el proceso de objetivación que ha venido movilizando y le permite participar colectivamente de la producción de la obra común (Radford, 2021a), que en este caso es encontrar el término que solicita el ítem.

La profesora continúa trabajando coordinadamente con Byron y es cuando en L15 lo incita a percibir los cambios que hay en cada término de la secuencia y él va encontrándolos y así continúan en un diálogo que finalmente permite que Byron pueda dar respuesta en L26 *“El dos::: Entonces, le tenemos que sumar dos”*. Se menciona cómo logra identificar que el número que le debe sumar es el dos, esto gracias al trabajo en conjunto realizado entre Byron y la profesora que materializan el saber por medio de la cadencia de las preguntas emitidas por la profesora y la cadencia de las respuestas dadas por Byron como responsabilidad suya de co-participar de la labor conjunta que despliegan (Vergel, 2019).

También es de resaltar que la generalización que instancia Byron es de naturaleza algebraica, lo que hasta el ítem anterior no lo era. Tal generalización algebraica es de naturaleza factual (Radford, 2003; Vergel 2015), en tanto que todavía está operando con hechos concretos.

Continuando con Andrés, se analizan los siguientes fragmentos de diálogos entre él y la profesora.

L1. Andrés: “Un compañero hace la siguiente afirmación: el número 152 corresponde al término 50 de la secuencia, ¿Es correcta esta afirmación?” (*Comienza a escribir en la hoja durante algún tiempo*) (15”)

L2. Profesora: A ver, ¿Qué nos preguntan aquí? (*lee mentalmente el ítem 1*) ¿Cuánto te dio a ti? (*lee mentalmente la respuesta escrita por Andrés*) 152. Bueno, entonces, aquí multiplicaste el término por...

L3. Andrés: El tres

L4. Profesora: El tres, que es lo que va aumentando en la secuencia y le sumaste

L5. Andrés: Si

L7. Profesora: Cuéntame, ¿Por qué le sumaste 2?

L8. Andrés: Porque va::: o sea este (*señala el primer término de la secuencia que está escrita en la hoja*) no sería el iniciante sino que sería el dos. Entonces como se le va sumando tres, entonces da cinco.

L9. Profesora: ¡Ah! ok. O sea los tres de la secuencia más dos que estarían antes de iniciar la secuencia, esos dos son los que le sumaste.

L10. Andrés: Sí. Esos.

L11. Profesora: Listo. Responde pues.

25, es correcta la afirmacion. Porque al multiplicar el 50 con el 3 y sumarle dos me da 152

Figura 26. Respuesta de Andrés al ítem 2

Andrés al mencionar en L8 “...no sería el iniciante sino que sería el dos.” da a entender que es mediante la relación del primer término y la comunalidad hallada que encuentra cuál número es el que le debe sumar luego de haber multiplicado el término por la comunalidad.

También en la Figura 26 se evidencia que Andrés en su producción escrita al responder al por qué la afirmación es correcta, lo que en palabras de Vergel (2014) se puede interpretar que ya no toma como simple posibilidad el hecho de utilizar expresiones numéricas para avanzar en su tarea como lo expresa, lo hace como principio asumido aun cuando sigue siendo para términos concretos y la indeterminación aún no es objeto de conciencia ni del discurso en él.

Lo que Andrés logra hacer finalmente, es lo mismo que han logrado Laura y Byron, es decir, una generalización algebraica que les permite encontrar una fórmula para casos particulares, pero tal generalización está anclada todavía al terreno de lo factual.

Para analizar las respuestas dadas respecto al ítem 3 “Escribe un mensaje para un compañero, en donde le digas cómo obtienes el número que se te pida sin importar el término que ocupa”, se inicia con una parte del diálogo de Laura.

L1. Laura: (Lee el ítem número 3) Jumm (mira a la profesora y no reacciona)

L2. Profesora: Aquí (señala el ítem dos de esta tarea) se te pidió encontrar el Término 50, pero si tú le vas a decir por ejemplo a Tania {quien es una compañera del salón}, qué tiene que hacer para ese número, pero sin importar si es el 50 o el mil o el cinco mil, ¿cómo le

escribirías eso a Tania?, ¿cómo le dirías qué hacer para encontrar ese número del término?
¿Cómo le explicarías a ella?

L3. Laura: Que haga una multiplicación por ese número.

L4. Profesora: Escríbelo en tu hoja, haz de cuenta que le estás escribiendo a Tania.

L5. Laura: (*Escribe el mensaje en su hoja “Que haga la multiplicación y luego le sumo 2 que es como la clave, así le diría”*) Listo.

L6. Profesora: Léela por favor

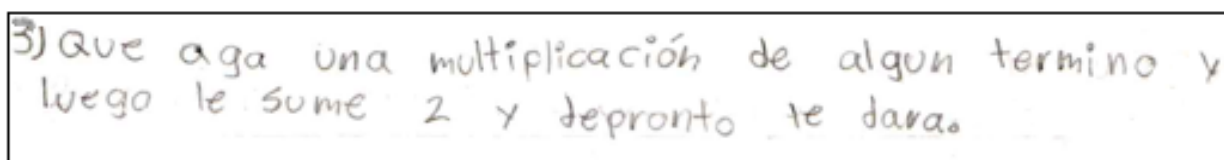
L7. Laura: “Que haga una multiplicación y luego le sume dos que es como la clave”. Así le diría.

L8. Profesora: Pero que haga una multiplicación ¿de qué?

L9. Laura: (*Levanta las cejas, quita el ojo, se acomoda en la silla*) Multiplicación de... de...del Término 30.

L10. Profesora: ¿Por qué del Término 30? Recuerda que tú no sabes cuál término es el que ella necesita encontrar y además ¿por cuál número se multiplica?

L11. Laura: Entonces sería de algún término (*borra lo que ha escrito y escribe el siguiente mensaje*)



3) Que aga una multiplicación de algun termino y luego le sume 2 y de pronto te dara.

Figura 27. Respuesta de Laura al ítem 3

Nótese como Laura logra una conciencia sobre lo que es indeterminado que hasta el ítem anterior no había aparecido como objeto de conciencia y, por ende, no había aparecido en su discurso. Es a través de este ítem que se logra que semiotice lo desconocido, es decir, que tome conciencia sobre lo que es indeterminado, tal y como se evidencia en la Figura 27 con las palabras “algún término”. Esta expresión lingüística que usa ella, es la expresión más clara de la toma de conciencia sobre la indeterminancia, sobre lo que es desconocido pues ya no piensa en un término en particular sino en cualquier término, apareciendo así de forma explícita uno de los vectores del pensamiento algebraico que Radford (2010a) ha teorizado.

Pero además se logra evidenciar que aparecen nuevos elementos que hasta el ítem anterior ella no había puesto como objeto de pensamiento: el empleo de la analiticidad como carácter operatorio. Al decir en la Figura 27 “que haga la multiplicación de algún término y luego le sume dos”, ya los gestos desaparecen y dan paso a ciertas “frases claves” para mostrar una fórmula que ya no está anclada a casos concretos.

Se puede notar cómo el pensamiento de Laura se va moviendo de una generalización algebraica de tipo factual a una generalización algebraica de tipo contextual, en donde la indeterminancia aparece como objeto de conciencia y opera con ella. Es importante mencionar que, además de los elementos anteriores, los medios semióticos empleados por Laura, ganan contracción y por tanto, hay nuevos niveles de toma de conciencia en ella. En este punto Radford (2018), menciona que hace presencia la “contracción semiótica”, debido a que los recursos semiótico empleados por Laura se han vuelto más sofisticados hasta el punto que se contraen. Ella ya no utiliza gestos, no utiliza la percepción, ahora comunica el proceso de objetivación que ha venido haciendo con un mensaje escrito en el que involucra lo desconocido.

A continuación, se van a presentar los fragmentos de diálogo desarrollado con Byron y con Andrés ante el presente ítem de esta tarea y se analizan de forma conjunta, dado que se considera que aunque usan expresiones distintas, teóricamente están apuntando hacia la misma vía, tal y como se verá en el análisis que se presenta más adelante.

Diálogo de Byron al rededor del ítem 3

- L1. Byron: (*Empieza a escribir en la hoja sin decir nada*) Listo.
- L2. Profesora: Léelo, por favor.
- L3. Byron: Primero tienes que multiplicar y después sumar.
- L4. Profesora: ¿Qué tiene que multiplicar?
- L5. Byron: Tiene que multiplicar 50 por el tres.
- L6. Profesora: Pero recuerda que no le vamos a decir el 50, porque no sabemos qué número le pidan, entonces ¿qué tendría que multiplicar ahí?
- L7. Byron: Primero tendría que multiplicar el Término...
- L8. Profesora: Eso. Escribe eso (*señala con su mano extendida hacia la hoja*) Así como me lo estás diciendo.
- L9. Byron: (*Continúa escribiendo la respuesta que ya había iniciado*) (*Después de un tiempo mira a la profesora y le habla*) Y después el número.
- L10. Profesora: Multiplicar el Término ¿por qué?
- L11. Byron: Por el número.
- L12. Profesora: ¿Por cuál número?
- L13. Byron: Por cualquier número (*responde con voz de duda*)
- L14. Profesora: (*Toma la hoja, la voltea y señala*) Aquí, lo que está cambiando es este de acá (*señala el número 50 de la operación realizada por Byron en el ítem 2*), porque no sabemos qué término es, pero él tiene que multiplicarlo ¿por cuál? (*señala el número tres que está en la multiplicación y representa la comunalidad de la secuencia*) Porque le vamos a explicar

cómo encontrar el término de esta secuencia. Entonces tendría que multiplicar el Término por...

L15. Byron: Por tres.

L16. Profesora: Por tres, porque es esta (*señala la secuencia*) la que estamos haciendo.

L17. Byron: (*Borra, y habla suavemente*) El término por tres (*escribe*). Listo, por tres.

L18. Profesora: Y luego...

L19. Byron: (*Escribe, levanta la mirada hacia la pared*) y luego le sumas con el Término...

L20. Profesora: Y luego, le sumas ¿cuánto?

L21. Byron: (*Escribe sin decir nada*).

L22. Profesora: ¿Cuánto le vas a sumar?

L23. Byron: Dos

L24. Profesora: Dos. Escribe, luego le sumas dos. Recuerda que siempre tienes que sumar eso, en esta secuencia.

L25. Byron: Listo

L26. Profesora: Entonces, ¿cómo quedó el mensaje?

L27. Byron: (*Lee en voz alta lo escrito*) “Primero tienes que multiplicar y después sumas, tienes que multiplicar el término por tres y luego le sumas dos”.

A continuación, fragmento del diálogo de Andrés referente al mismo ítem.

L1. Profesora: Aquí tú lo hiciste con el término:::, bueno con el término 4, luego lo hiciste con el 50, pero el mensaje lo vamos a escribir diciéndole cualquier término, o sea que no haya un número determinado para que él pueda hacer esa operación, ¿listo?

L2. Andrés: Cualquiera

L3. Profesora: Cualquier número que vaya aquí (*señala el número 50 que está escrito en la operación que realizó Andrés*), entonces ¿Cómo le escribes ese mensaje para explicarle qué es lo que tiene que hacer?, lo que tu acabas de hacer pero que él entienda que es lo que tiene que hacer, ¿listo?

L4. Andrés: O sea como que lo primero que expliqué acá. (*Señala la respuesta del ítem dos*)

L5. Profesora: Si, más o menos así pero sin el primer número porque recuerda que es cualquier número el que él va a encontrar.

L6. Andrés: (*Escribe en su hoja la respuesta*)

L7. Profesora: ¿Listo?, a ver, dice (*la profesora lee el mensaje escrito por Andrés*) “al multiplicar 45 por tres y sumarle dos te da 137 que es el número del Término 45” listo. Eso si tú le vas a decir en el mensaje de que es el término 45, pero como acá (*señala el ítem tres específicamente en las palabras “sin importar”*) nos están pidiendo sin importar el término que ocupe, entonces ¿cómo le harías ese mensaje sin decirle ningún número de término? Porque él lo puede encontrar con cualquier término, no solo con el 45 o el 50 sino para que lo encuentre con cualquier término. ¿Cómo le escribirías ese mensaje?

L8. Andrés: O sea lo mismo pero no le escribo qué término va.

L9. Profesora: Ajá, exacto, no le escribes qué número va a multiplicar por el término, si tú le dices “multiplica este término” pues no le estaríamos dando el mensaje que queremos darle ¿cierto?

L10. Andrés: (8”) O sea, haciéndole una pregunta.

L11. Profesora: No. Diciéndole cómo lo va a hacer pero sin darle un término, tú le dices, mira si quieres hallar cualquier término haz esto. ¿Listo?

L12. Andrés: (*Escribe la respuesta “Si quieres hallar un término, primero debes multiplicar el número que te están dando por tres y luego súmale dos”*)

Como se observa en las líneas de los diálogos anteriores, es necesario que la profesora incite a Byron y a Andrés a que recuerden cómo se desarrolló el ítem anterior, que piensen en asuntos que ya habían hecho en el ítem anterior y de esta manera tengan claridad sobre cómo abordar el presente ítem, en donde el despliegue de preguntas y respuestas incitadas por la profesora permiten que ellos recuerden cómo está constituida la secuencia, y que además de realizar una operación multiplicación es necesario también utilizar la adición y de esta lograr una fórmula completa y así avanzan hacia el objetivo común, que en este caso se centra en escribir el mensaje al compañero cumpliendo así con el propósito del ítem que se evidencia luego de un esfuerzo colectivo (Radford, 2020a).

Es precisamente el esfuerzo colectivo el que posibilitó la toma de conciencia de lo indeterminado tanto en Byron como en Andrés, lo cual aparece como objeto del discurso a través de la expresión lingüística “...*el término*...” en el caso de Byron, mientras que en el caso de Andrés aparece como objeto del discurso a través de la expresión lingüística “... *el número* ...”, pero estas expresiones están acompañadas de las palabras “*ienes*” y “*debes*” las cuales le está dando sentido de obligatoriedad al referirse al procedimiento a seguir por su compañero para encontrar cualquier término de la secuencia.

En ambos casos, además de que aparece lo indeterminado, se opera con ello, con esa cantidad desconocida, lo que evidencia que la analiticidad está presente en el pensamiento de Byron y Andrés. En cuanto a Byron utiliza la expresión lingüística “...*multiplicar el término*...” y Andrés lo expresa “...*multiplicar el número que te están dando*...” Estas frases que utilizan también dan cuenta que la analiticidad está siendo utilizada para deducir una fórmula, aunque hasta este punto todavía no es expresada como tal.

También, tanto Byron como Andrés movilizan el pensamiento objetivado anteriormente el cual era factual hacia una forma de pensamiento de tipo algebraico contextual, debido a que las frases que han utilizado en las líneas ya vistas, son evidencia que se está dando una contracción semiótica Radford (2021a)

Para finalizar con los análisis del ítem tres, se presenta la Tabla 2 con las expresiones semióticas que emplean Laura, Byron y Andrés, para referirse tanto a lo indeterminado como a la analiticidad.

Tabla 2. *Rejilla sobre expresiones semióticas de la indeterminación y su correspondiente analiticidad*

Estudiante	Expresión Semiótica de la indeterminancia	Analiticidad o carácter operatorio de la indeterminancia
Laura	<i>“algún término”</i>	<i>“Que haga una multiplicación de algún término y le sume dos...”</i>
Byron	<i>“el término”</i>	<i>“Primero tienes que multiplicar y después sumas, tienes que multiplicar el término por tres y luego le sumas dos”</i>
Andrés	<i>“el número”</i>	<i>“Si quieres hallar un término, primero debes multiplicar el número que te están dando por tres y luego súmale dos”</i>

Al finalizar con esta tarea, en el ítem 4, se expone la manera en que cada uno de los estudiantes materializa la indeterminancia. Inicialmente se explora un segmento de diálogo de Laura.

L1. Laura: (*Realiza la lectura del ítem 4 “Escribe nuevamente el mensaje que hiciste en el punto anterior, pero ahora exprésalo a través de un cálculo”*) (*luego de leerlo mira a la profesora con desconcierto al leer la palabra cálculo*)

L2. Profesora: Vamos a escribir el mismo mensaje...pero en vez de escribir todo eso que escribiste en palabras, vamos a escribirlo cortico, con números o con algo que si ella (*refiriéndose a la compañera de estudio*) lo ve, diga “Ah si yo hago esto y esto, puedo encontrarlo. ¿Cómo lo harías tú?

L3. Laura: (*No responde*) (8”) (*Empieza a escribir, borra, escribe nuevamente sin decir nada*) (*Gira la hoja hacia la profesora en donde ha escrito $x +$*)

L4. Profesora: Aquí ¿qué escribiste?

L5. Laura: Multiplicar y sumar.

L6. Profesora: Bueno. Si ella ve este “por”, sabe que tiene que multiplicar y si ve el más sabe que tiene que sumar. Pero volvemos a lo mismo ¿qué multiplicaría? y ¿qué sumaría? porque aquí le dices que (*señala la respuesta del ítem 3*), pero acá no le estás diciendo (*señala la respuesta del ítem 4*), entonces ¿qué le agregamos a esa para que quede completa?

L7. Laura: Podríamos agregar el... (4”) el número

L8. Profesora: ¿Qué número?

L9. Laura: El 50 no puede ser porque ya está.

L10. Profesora: Pero si le colocas el 50, ella solamente lo haría con el 50 y si necesita el 100 no sabría cómo hacerlo, porque tú le estás dando el número. A ver, vamos a mirar aquí (*señala nuevamente la respuesta del ítem 3*), ¿qué es lo que tendría que sumar ella?

L11. Laura: Sumar dos.

L12. Profesora: Ahí sí tendría que sumar dos. No importa el término. Entonces, ese dos. ¿Crees tú que deberías colocarlo?

L13. Laura: Sí. (*Escribe el número dos luego del signo de suma*)

L14. Profesora: Entonces, ella tiene que multiplicar y luego sumarle dos. ¿Cómo hacemos para que ese número que no conocemos, ella sepa que puede ser cualquier número? ¿Qué signo o qué nombre le podemos colocar para que ella sepa que a ese número que le den y que no conocemos, lo multiplique... Pero aquí nos falta algo (*señalando la misma respuesta*) ¿por cuánto tiene que multiplicar?

L15. Laura: ¿Por tres?

L18. Profesora: Por tres. Mira que acá no escribimos que era por tres, se nos pasó ese pedacito.

L19. Laura: (*Asiente con la cabeza*)

L20. Profesora: Ojo, porque aquí también tiene que ir. Ese sí no cambia, ese tiene que ir.

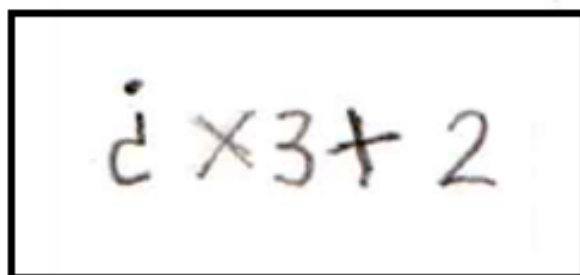
L21. Laura: (*Escribe el número 2 después del signo por*)

L22. Profesora: Ella tiene que multiplicar ese número por el tres y tiene que sumarle dos. ¿Cómo harías tú, para que ella sepa que cualquier número que necesite, tiene que multiplicarlo por tres y sumarle dos? ¿Qué le escribirías tú allí?

L23. Laura: (*Dibuja un signo de interrogación al inicio de lo que había escrito en el ítem 4 “¿x3+2”*)

L24. Profesora: Dibujaste un signo de pregunta ¿por qué?

L25. Laura: Porque ella no sabe cuál número es.



A photograph of a rectangular box containing the handwritten mathematical expression $¿ \times 3 + 2$. The expression is written in dark ink on a light background. The '¿' symbol is at the beginning, followed by a multiplication sign, the number 3, a plus sign, and the number 2.

Figura 28. Producción de Laura, al solicitarle expresar mediante una fórmula con cálculos la relación funcional entre los números de la secuencia y el término que le corresponde

Se observa como en las acciones realizadas por Laura en L3, escribe los signos “x, +” y en L5 explica “multiplicar y sumar” como punto de partida para expresar nuevamente el mensaje a su compañera. Aunque hay necesidad de continuar trabajando conjuntamente entre Laura y la profesora para que pueda continuar en la escritura de una fórmula general para su compañera, y que posteriormente se logra en L23.

Es en la labor conjunta que se despliega entre Laura y la profesora que se exhibe todo ese esfuerzo compartido para que conjuntamente se logre dar esa conciencia en Laura que finalmente le permite expresar la fórmula del ítem anterior pero con una reducción de signos.

Es precisamente el hecho, como en un signo logra contraer todo el significado de la indeterminancia que hasta el ítem anterior utilizaba con la expresión lingüística “algún término”, pero es gracias a la labor conjunta que se desarrolla entre Laura y la profesora que se logra contraer la expresión semiótica que emplea, para dar cuenta de la misma indeterminación.

Siguiendo con Byron, nuevamente se hace indispensable el trabajo colectivo entre él y la profesora para avanzar con el objetivo del ítem, tal como se puede observar el siguiente fragmento de diálogo.

L1. Profesora: Entonces, ¿cómo le escribirías a tu compañero para que él sepa qué tiene que hacer? Todo esto que le dijiste (*señala nuevamente la respuesta del ítem 3*) pero en algo más cortico, más pequeñito. En números... o algo así. ¿Cómo le escribirías?

L2. Byron: Le escribiría lo mismo que aquí (*recorre con su dedo los números de la secuencia dados inicialmente*), sino que le pondría el tres... (*Señala el espacio en blanco que hay antes del primer Término de la secuencia*)

L3. Profesora: A ver, hazlo aquí (*señala un espacio en blanco de la hoja*) como es que me estás diciendo, ¿cómo lo harías?

L4. Byron: Le pondría... le pondría...

L5. Profesora: O sea, este mismo mensaje que le dijiste, pero hazlo con números por ejemplo. Sólo con números, no con todas estas letras (*recorre con su dedo la respuesta del ítem 3*) que escribiste sino con números, cortico, ¿cómo le dirías, qué hacer?

L6. Byron: Mmm... (8")

L7. Profesora: Algo que tú crees que se pueda.

L8. Byron: Algo que yo crea que se pueda... (15") Número ¿le pongo?

L9. Profesora: Escríbelo a ver yo miro cómo lo vas a escribir

L10. Byron: (*Escribe en la hoja, antes del número 3 que ya había escrito la palabra número*)

L11. Profesora: Pero entonces, acabo de decirte que lo que no queremos es escribir una palabra, y esto (*señala la palabra número que acaba de escribir Byron*) es una palabra. Entonces, cómo lo podemos escribir para explicarle que ahí va cualquier término, pero sin escribir la palabra término ni la palabra número. Sino algo que él pueda saber, que eso me representa el término que no sé cuál es. Vamos a hacer esto (*voltea la hoja y señala la respuesta realizada al ítem 2*) mismo, pero sin saber qué término va acá (*con el dedo dibuja un círculo en el número 50*)

L12. Byron: Borra la palabra que había escrito. ¿Lo puedo hacer en signos? (*mira a la profesora y sonríe*)

En L11 es necesaria la intervención de la profesora debido que pese a que Byron ya había planteado una fórmula general en el lenguaje natural para escribirle el mensaje a su compañero, no tiene claridad sobre cómo puede realizarlo de otra manera. Es gracias a la labor conjunta desplegada entre Byron y la profesora que él toma conciencia que puede utilizar otra manera de expresar lo que había planteado en el ítem anterior, como lo expresa en L14.

L13. Profesora: Claro, como tú creas que podamos hacerlo para que él te entienda. ¿Qué signo crees que puedas colocarle allí?

L14. Byron: El signo... (11") ¿El signo de pregunta?

L15. Profesora: Si quieres colocarlo...

L16. Byron: (*Escribe el signo de interrogación*)

L17. Profesora: Entonces, ¿ese signo me está representando cualquier término que no conozco?

L18. Byron: (*Asiente con la cabeza*)

L19. Profesora: Entonces aquí dice (*señala lo que Byron ha escrito*) que ese cualquier término lo vas a...

L20. Byron: Multiplicar

L21. Profesora: Multiplicar por...

L22. Byron: Tres

L23. Profesora: Y luego ¿qué más hacíamos?

L24. Byron: Le sumamos dos

L25. Profesora: Hágame pues allí, ¿cómo va a escribir?

L26. Byron: (*Escribe +2 luego del número tres que ya había escrito*)

L27. Profesora: Listo. Entonces, tú le dirías a tu compañero que mire esto (*señala el signo de interrogación que escribió Byron*) que representa el término que no conocemos ¿cierto?, ¿qué más tiene que hacer?

L28. Byron: Pues, multiplicar (*escribe el signo "x" en medio del signo de interrogación y el número 3*) por tres y después sumar por dos.

Desde L19 hasta L28 se exhibe como la profesora dentro del trabajo colectivo con Byron, tal como lo afirma Radford (2020a, p.23), “se lanzan en un despliegue rítmico de recursos semióticos, discursivos y perceptivos” cuando de manera conjunta hablan y escuchan para caminar juntos hacia el encuentro de la fórmula que permita un mayor nivel de desarrollo de pensamiento algebraico, en tanto que se dan la contracción de símbolos que emplea Byron como medios semióticos de objetivación para pensar la indeterminación y expresarla.

Hay que hacer claridad en el hecho que es gracias a la labor conjunta entre Byron y la profesora que este puede movilizarse hacia una expresión simbólica de lo indeterminado como lo es el signo de interrogación. No obstante es muy importante resaltar que la contracción semiótica generada por Byron para semiotizar lo indeterminado, no permite afirmar de acuerdo con Radford (2013), Vergel (2014) que se ha instanciado en él una forma de pensamiento algebraico de tipo simbólico, puesto que de acuerdo con estos autores, tal estrato de pensamiento algebraico se logra toda vez que los estudiantes usen representaciones alfanuméricas para significar las relaciones, lo que se puede percibir entonces es un tránsito en tanto que hay una contracción semiótica que le permite a Byron contraer lo indeterminado, pero que no es propiamente los signos alfanuméricos los que usa, es decir, hizo falta desplegar una labor conjunta entre Byron y la profesora para que él volviera objeto de conocimiento el hecho que esos símbolos del alfabeto se utilizan para expresar cantidades indeterminadas. Sin embargo lo que difiere es el tipo de signo que se usa.

Con Andrés, la situación es parecida a Byron como se aprecia en las siguientes líneas de un episodio de diálogo

L1. Andrés: (*Lee*) Escribe nuevamente el mensaje que hiciste en el punto anterior pero ahora exprésalo a través de un cálculo.

L2. Profesora: Cálculo, aja, O sea vamos a hacer otra vez el mismo mensaje para tu amigo, pero en vez de escribirle todo esto (*señala la respuesta del ítem anterior*), lo vamos a hacer cortico, un cálculo quiere decir como con números, algo así, que él pueda verlo y entender qué hacer, sin tener que explicarle pedacito por pedacito, entonces ¿cómo le explicarías eso? Esto que le acabas de decir pero con un cálculo cortico ¿cómo lo escribirías?

L3. Andrés: Primero debe multiplicar...

L4. Profesora: Aja, entonces ¿cómo escribirías eso? ¿Qué debe multiplicar?

L5. Andrés: Primero debe multiplicar el número que le asignaron.

L6. Profesora: El que le dieron, pero como nosotros no sabemos qué número le van a dar ¿Cómo le podemos llamar a ese número? ¿Qué nombre le podemos dar a ese número? Para poder que él vea y sepa de qué estamos hablando, que es cualquier número ¿Cómo crees que le pudiéramos nombrar?

L7. Andrés: Jmm ¿Cualquier número?

L8. Profesora: Pues sí, lo que tú quieras colocarle para que él luego sepa que es, pero hay que nombrarlo de alguna manera para poder explicarle a él.

L9. Andrés: *(Empieza a escribir en su hoja sin decir nada)*

L10. Profesora: *(Observa que está escribiendo palabras)* Espera, vamos a escribirlo pero sin escribir otra vez esto *(señala la respuesta del ítem tres)*, porque si me vas a escribir, ahí dice es “en un cálculo” en algo cortico o en números o sea, esto que tu hiciste, ven amor *(señala nuevamente, la respuesta del ítem tres)*, esto que tu hiciste aquí, se lo vamos a mostrar cómo hacerlo pero sin escribirle el mensaje largo sino...

L11. Andrés: ¡Ah! *(borra la palabra que había escrito)*

L12. Profesora: Sino algo cortico

L13. Andrés: *(Escribe el número 40)*

L14. Profesora: Pero amor, si tu escribes el número él solo lo va a hacer con ese número, entonces este número ¿con qué lo podemos reemplazar? ¿Qué le podemos colocar ahí para que él sepa que es cualquier número? porque si tú le pones el 40, el 40 es conocido pero nosotros debemos dibujarle un número que no conocemos porque no sabemos cuál le van a dar, entonces ¿Cómo lo dibujarías tú? Dale que esta ya es la última.

L15. Andrés: *(Escribe el signo X y el número 3)*

L16. Profesora: Listo, ahí estás diciendo que vas a multiplicar por 3, pero ¿qué es lo que decimos que vamos a multiplicar por 3?

L17. Andrés: El número

L18. Profesora: Eso, entonces ¿Cómo le vas a dibujar que es cualquier número? ¿Qué dibujo crees tú que le podamos hacer para que él entienda que es cualquier número por 3?

L19. Andrés: ¿Puedo poner un signo de pregunta?

L20. Profesora: Si tú quieres.

L21. Andrés: *(Escribe el signo de cerrar la pregunta encima del signo X y le coloca el igual en la parte de abajo)*

L22. Profesora: Ok, entonces esto *(Señala el signo de pregunta que acaba de dibujar Andrés)* representaría cualquier número que le den ¿cierto? El número que le están dando. Listo, el número que le están dando por 3 y luego ¿qué más falta?

L23. Andrés: Y después le suma dos

L24. Profesora: Entonces pon eso.

L25. Andrés: *(Escribe en frente de lo que acaba de hacer el signo +, nuevamente el signo de cerrar pregunta y debajo el número dos y el igual)*

L26. Profesora: ¿Aquí por qué volviste a poner el signo de pregunta?

L27. Andrés: Porque el número de aquí *(señala el espacio en donde debe ir el resultado de la operación)*, lo va a sumar por dos.

L28. Profesora: Ah porque no sabemos qué nos va a dar aquí (*señala el lugar que acaba de mostrar Andrés*) y este que nos da aquí es el que va a sumar acá (*señala en dónde está el segundo signo de cerrar pregunta*). Listo amor, perfecto

Como se exhibe en las anteriores líneas, Andrés materializa la indeterminancia con un signo de interrogación y la analiticidad, que en este caso es multiplicar por tres y al resultado sumarle dos, pero expresa ese resultado que sigue siendo desconocido con otro signo de interrogación, aparte del inicial.

Andrés finalmente deja de utilizar “palabras clave” (Radford, 2013; Vergel, 2015), para nombrar objetos indeterminados y moviliza su pensamiento hacia el uso de símbolos, utilizando el signo de interrogación para materializar la indeterminación, no obstante, el pensamiento algebraico no se moviliza hacia un pensamiento algebraico simbólico (Radford, 2013; Vergel, 2015) ya que según estos autores, es necesario utilizar el simbolismo alfanumérico. Vale la pena señalar que Andrés no lo hace debido a que todavía no ha tenido ese encuentro cultural con el hecho que se usen signos del alfabeto para simbolizar cantidades indeterminadas, por lo que no es espontáneo en él el uso del simbolismo alfanumérico, aunque se resalta que difiere de estos autores en el tipo de símbolo. A continuación, se exhibe la producción de Andrés para ejemplificar lo mencionado.

$$\begin{array}{c} ? \\ \times 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} ? \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Figura 29. Producción de Andrés, ítem 4, Tarea 4

Andrés, también utiliza el signo de interrogación para expresar la indeterminación como se evidencia en la Figura 29, en el lado izquierdo lo utiliza para expresar la

indeterminancia respecto al número del término de la secuencia y el signo de interrogación que aparece en el lado derecho de la figura, ya no refiere al número del término, este refiere al producto del término por tres. Andrés utiliza un mismo símbolo para referirse a cantidades indeterminadas que no son la misma.

Finalmente, de manera general se puede decir que las producciones de Laura, Byron y Andrés, del ítem en cuestión, exhiben que a pesar de haber realizado las tareas por separado, terminan utilizando el mismo signo (signo de interrogación) para materializar la indeterminancia y poder expresar en una fórmula lo allí encontrado, tal vez porque culturalmente este signo también es sinónimo de incertidumbre para ellos, el cual puede ser utilizado como entonación interrogativa. Aunque es un esquema parecido y que permite encontrar cualquier término perteneciente a esta secuencia, todavía hace falta perfeccionar los recursos semióticos y movilizar sus recursos lingüísticos.

Para terminar con los análisis que se realizaron de los resultados que se obtuvieron cuando Laura, Byron y Andrés enfrentaron las tareas, lo que se ha dejado claro son los procesos de objetivación que han ido evolucionando y madurando a lo largo de cada una de estas tareas, que se han ido instanciando en ellos ese saber cultural como lo es la forma como se piensa algebraicamente a través de tareas de generalización de patrones.

También interesa señalar que esa evolución no ha sido solamente en términos de saberes, sino también se ha dado en ellos una transformación como sujetos que se desarrollan al evolucionar en estos procesos de objetivación, esto, porque no son los mismos sujetos que empezaron cuando iniciaron con las tareas en las que inicialmente no tenían conocimiento de cómo enfrentarlas y a medida que abordan estas tareas se van transformando como sujetos que se apropian de una forma de pensar estas tareas (Radford 2018) Esto, al aludir al estudiante a ocupar un lugar en el mundo, en este caso, el conocimiento sobre elementos de la generalización de patrones que antes no había objetivado y que ahora le permite interactuar con la cultura.

Capítulo 4: Conclusiones y reflexiones

En el capítulo que se presenta a continuación, se exponen las conclusiones realizadas en este trabajo que permiten dar respuesta a la pregunta de investigación y atienden a los objetivos planteados para desarrollar este trabajo, las cuales son obtenidas de las producciones realizadas por Laura, Byron y Andrés al desarrollar las cuatro tareas propuestas. Para finalizar, se plantean algunas reflexiones que como profesora en ejercicio, se cree son necesarias para que sean tenidas en cuenta por otros docentes frente al desarrollo del pensamiento algebraico desde la educación básica primaria.

4.1 Conclusiones

Para iniciar con este apartado, se presentan las conclusiones partiendo de la siguiente estructura: primero se atiende a cada uno de los objetivos específicos formulados en el trabajo y posteriormente se atiende a la pregunta de investigación que da cuenta del mismo objetivo general de este estudio.

Para dar respuesta a la pregunta mencionada, se diseñaron y adaptaron cuatro tareas sobre generalización de patrones numéricos las cuales se enmarcan dentro de la Teoría de la Objetivación planteada por Radford (2005, 2010, 2013, 2014, 2018, 2021,), la cual plantea “la enseñanza y el aprendizaje como un solo proceso que implica tanto el saber como el ser” (Radford, 2020, p.7). Y en donde las formas de pensamiento algebraico y los vectores de este pensamiento (Radford, 2008, 2010, 2014, 2018), son tenidos en cuenta en dichas tareas.

En relación frente al primer objetivo propuesto, el cual se planteó de la siguiente manera: *“Articular en el diseño de un conjunto de tareas los elementos teóricos identificados que posibiliten desde la generalización de patrones numéricos el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de quinto grado de educación básica primaria”*, se puede concluir que:

Las Cuatro tareas diseñadas y adaptadas sobre generalización de patrones numéricos, fueron fundamentales para que los estudiantes movilizaran formas pensamiento algebraico Factual y Contextual como ha sido expresado en apartados anteriores. Aunque es de anotar que con las dos primeras tareas no pretendían que los estudiantes avanzaran hacia un tipo de pensamiento algebraico más allá del Factual, dado que se tomaron como el primer encuentro cultural de los estudiantes al enfrentarse con tareas sobre generalización de patrones numéricos en aras de instanciar en ellos formas de pensamiento algebraico. Es así como con estas dos primeras tareas inquirían sobre términos particulares de las secuencias numéricas, esto es, tareas ancladas al hecho fenomenológico lo cual es epistemológicamente distinto a las tareas tres y cuatro, con las cuales se consultaba a los

estudiantes por términos no dados en la secuencia numérica, es decir, por fuera del campo perceptivo de los estudiantes.

Este trabajo toma en consideración lo propuesto por Vergel (2019) cuando afirma que la tarea es una *categoría didáctica* puesto que ella tiene intenciones epistémicas, es por ello que este conjunto de tareas fueron diseñadas por la investigadora con la convicción que a través de su abordaje los estudiantes desplegarían formas de generalización y con ello propulsar formas de pensamiento algebraico en ellos. Por tal razón se considera que gracias a ellas ese saber cultural el cual se ha venido objetivando durante su abordaje logra instanciarse como saber de Laura, Byron y Andrés.

Si bien se ha dicho que las tareas por la forma en que fueron diseñadas ya tienen una carga epistemológica importante, estas por sí solas no fueron suficientes para que en los estudiantes se instanciaran formas de pensamiento algebraico. Se necesitó de configurar entre profesora y estudiante una labor conjunta, corroborando así lo que han planteado Radford (2014,2021) Vergel (2014) sobre esta como categoría principal de la TO, para entender y analizar lo que sucede en el aula de clases, es decir, se ratifica que sin la actividad desplegada alrededor de cada una de las tareas, no hubiera sido posible alcanzar ese pensamiento algebraico el cual se buscaba que desarrollaran.

Dentro de esta labor conjunta, la profesora coopera con el estudiante para que en algunos casos recuerde lo que ya había objetivado y en otros tomen conciencia de las relaciones que existen entre los números de las secuencias y las posiciones que estos ocupan en ella. La profesora y estudiantes se enmarcan en un mismo propósito, con una misma responsabilidad, cuando ella realiza preguntas y señalamientos que facilitan en los estudiantes esta toma de conciencia de la indeterminancia, operando mutuamente en busca de un objetivo común, el cual era encontrar patrones, generalizados, es decir, acercarse a ese saber histórico-cultural como es el pensamiento algebraico.

Se coincide con lo mencionado por Vergel (2019, p.10) cuando afirma “La labor conjunta sugiere que los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje se están transformando, pues aprender algo significa transformación” en otras palabras, es a través

de la labor conjunta desplegada entre profesora y estudiantes que se producen como seres humanos cuando la profesora modifica su discurso en correspondencia con lo que responde o pregunta el estudiante, se coproducen en esta forma de relacionarse logrando un progreso en su esfuerzo común.

Dicha labor conjunta se basa en una interacción en la cual según Pantano (2021 p.153) "...las voces, enunciaciones verbales y no verbales y actuaciones de todas las integrantes, son reconocidas, interpretadas y dotadas de sentido..." lo que indica que la responsabilidad es mutua dentro de un esfuerzo material para sacar adelante ese objetivo y permite la materialización de las formas de pensamiento algebraico, permite la instanciación del saber.

Con relación al segundo objetivo específico el cual era "*Documentar los medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática de los estudiantes de quinto grado al desarrollar las tareas propuestas*", se enfatiza en las siguientes conclusiones:

Se puede establecer que en los tres estudiantes se evidenció la presencia de algunos medios semióticos de objetivación que les permitieron enfrentarse a las tareas. Entre estos medios semióticos de objetivación se hicieron notables la percepción, el lenguaje natural, los gestos, los señalamientos, el ritmo, entre otros, los cuales permitieron materializar la toma de conciencia de los saberes que se iban objetivando con cada una de las tareas desarrolladas.

Como primera instancia, la percepción movilizada en el momento que se les presentaba a los estudiantes las diferentes secuencias fue fundamental para tener en cuenta las determinaciones sensibles y de esta manera advertir las similitudes y diferencias (Vergel, 2014) en los números que componían las secuencias. Además la percepción permitió que volcaran la atención a la relación entre estos números y la posición que estos ocupaban dentro de esta en las tareas 1 y 2.

La forma de expresar las similitudes o diferencias halladas fue con expresiones como "aquí", "este", "acá", para evidenciar la relación entre los números y los términos de

estos en las secuencias. Este tipo de palabras fueron evolucionando en las tareas 3 y 4 en donde empezaron a utilizar palabras en su discurso tales como “término”, “número” o “algún término” en el caso del último ítem de la tarea 4. Dicha evolución da cuenta de los procesos de objetivación a los que se han enfrentado Laura, Byron y Andrés, que le permitieron ir evolucionando al igual que las tareas se iban complejizando un poco.

También surgieron los señalamientos deícticos, por parte de Laura, Byron y Andrés, en el desarrollo de todas sus tareas, en el momento de referirse a las secuencias fue recurrente que señalaban sus números al tiempo que iban mencionando el nombre de estos e identificando la comunalidad hallada, lo cual pareciera que permitía darle una inspección al dar el recorrido por la secuencia.

Se puede establecer que los señalamientos realizados con el lápiz en el momento de recorrer la secuencia o referirse a algún número de esta, convierten este medio semiótico en un recurso importante en el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, tal como lo menciona Gustin (2017, p 125) “como una extensión de su cuerpo, como una ayuda que les permitió llevar a cabo las acciones para acceder a las relaciones entre los términos de la secuencia”, lo cual queda evidenciado en el caso de Andrés al abordar la tarea 2, en la que él indica “Este (*señala con el lápiz el Término 1*) le suma este (*señala con el lápiz el Término 2*) y da dos (*señala el Término 3*). Este (*señala el Término 2*) le suma a este (*señala el Término 3*) y da tres (*señala el Término 4*)...” quien en cada uno de los enunciados utiliza el lápiz para indicar pequeños saltos de un número a otro. Estos señalamientos como medios semióticos de objetivación, son finalmente formas de expresión del pensamiento generado por los estudiantes.

Laura, en la tarea mencionada, también realiza señalamientos con el lápiz para indicar cada número que compone esa secuencia, teniendo en cuenta que en esta tarea ya no está explícita la posición que ocupa cada número, pero además, ella utiliza sus dedos para realizar un conteo de término a término para evidenciar la comunalidad, al tiempo que menciona estos términos en el lenguaje natural y utiliza el ritmo como una entonación que

permite dar espera al siguiente número. Lo anterior indica que al emplear estos medios semióticos de objetivación de manera simultánea, se está ante la presencia de lo que Radford (2013a) ha teorizado como un nodo semiótico, tal como se exhibe en un fragmento de las acciones realizadas por ella: (*Observa el primer término de la secuencia, cuenta en sus dedos, observa el segundo término de la secuencia, cuenta en sus dedos mientras los señala. Mira a la profesora*) “Va de tres en tres”, o cuando en otro ítem expresa: (*Empieza a leer el primer ítem* “ Este es el Término 1 (*señala con el lápiz número 5*), este es el Término 2 (*señala con el lápiz el número 8*), este es el Término 3 (*señala con el lápiz número 11*) y el Término 4 (*señala con el lápiz el lugar en donde debería ir el Término 4*)”, en donde claramente se observa como activa la percepción, los señalamientos deícticos y el lenguaje natural.

Otro aspecto a resaltar es la transformación que sufren las palabras que habían sido utilizadas por los estudiantes para designar la indeterminancia y que ahora son sustituidas por símbolos que ellos tienen a su alcance. Esto indica que ahora se utilizaron formas reducidas de expresión, lo que da paso a la contracción semiótica, tal y como lo ha indicado Vergel (2014) y como se puede evidenciar en el caso de Byron abordando una de las tareas: “*Primero tienes que multiplicar y después sumas, tienes que multiplicar el término por tres y luego le sumas dos*”, en donde le expresa a un posible compañero la forma de encontrar cualquier término de esa secuencia con la sentencia “el término” y que posteriormente vuelve a mencionar pero usando signos más reducidos de expresión como es el de interrogación para dar cuenta del mismo objeto indeterminado.

Frente al tercer objetivo el cual expresaba “*Identificar la evolución del pensamiento algebraico de los estudiantes de quinto grado en su actividad matemática*”, según los análisis realizados a las producciones de los estudiantes se puede concluir que muestran evidencias claras de la evolución en las formas de pensamiento algebraico que lograron materializarse en ellos, en particular de lo factual a lo contextual e incluso en los tipos de generalizaciones que lograban como fueron generalización algebraica de tipo factual y

generalización algebraica de tipo contextual, las cuales estaban articuladas con estas formas de pensamiento algebraico.

Se exhibe el caso de Laura al atender la tarea 2 en donde requiere de los dos términos anteriores para encontrar el término siguiente, es decir, necesariamente debe sumar dos términos que han sido dados en la secuencia y de esta manera encontrar el siguiente término, ella organiza los números de tal manera que pueda realizar operaciones aditivas para dar respuesta a lo requerido, expresando enunciados como “*Sumando el resultado con el resultado anterior*” indicando así que ha encontrado la manera de hallar el término solicitado. Es necesario recordar que la intención epistemológica de esta tarea giraba en torno a este tipo de generalización, la cual está catalogada como una generalización no analítica y donde se constata que Laura hace uso de ella.

Más adelante, Laura instancia en ella una forma más sofisticada de generalización como lo es la algebraica en donde aparece ideas como “*Que haga la multiplicación de algún término por 3, luego le sume 2 y de pronto le dará*” esto está dando cuenta la forma de que ya ha encontrado una expresión directa para hallar el término solicitado y además logra moverse del estrato de pensamiento factual al contextual porque está dando cuenta de la indeterminancia y además opera con ella mostrando así una evolución de la analiticidad la cual es uno de los rasgos del pensamiento algebraico.

De manera similar sucedió con los casos de Byron y Andrés, con la tarea del mensaje a un compañero, en donde también hay claras evidencias que ellos transitaron de una forma de pensamiento factual con generalizaciones que inicialmente eran aritméticas especialmente al abordar las tareas 1 y 2 y luego pese a que esas generalizaciones seguían en un contexto de pensamiento factual evolucionaran a algebraicas y posteriormente con la tarea del mensaje se movieron hacia lo contextual tal como lo ha afirmado Radford (2013). Y en donde esta evolución se hace presente en sus discursos tanto oral como escrito.

De igual manera cuando se hace necesario escribir nuevamente el mensaje pero con expresiones semióticas, se logra por parte de Laura, Byron y Andrés que la escritura de una fórmula se instancie en ellos, en donde la expresan con un signo de interrogación y algunos números lo que indica que ya empiezan con uso de símbolos, en donde se hace notable los vectores de la indeterminancia y aparece la analiticidad como deducción y en donde operan con números desconocidos que es justamente uno de los vectores que caracterizan el pensamiento algebraico. No obstante aunque se reconoce que si bien no da cuenta de un pensamiento algebraico simbólico sí hay una contracción que parece mostrar indicios de que está evolucionando hacia un estrato incipiente de pensamiento algebraico simbólico.

Luego de haber presentado las conclusiones para cada uno de los objetivos específicos, a continuación se exhiben las conclusiones que responden a la pregunta que se trazó en esta investigación, las cuales se soportan en las parciales ya presentadas, a saber: *¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico que emerge en la actividad matemática de un grupo de estudiantes de quinto grado de educación básica primaria cuando enfrentan tareas sobre generalización de patrones numéricos?*

Con los casos de los tres estudiantes frente al abordaje de las tareas, se evidenció que se dio en ellos la materialización del saber algebraico, esto es, conocimiento, el cual fue logrado gracias a la labor conjunta desarrollada entre la profesora y ellos, dada la necesidad del trabajo en conjunto bajo un propósito común: abordar las tareas de generalización de patrones numéricos. Dichas tareas permitieron que ambos se involucraran en la responsabilidad de participar del pensamiento de otro durante esta interacción.

Por otra parte, se produjeron en ellos generalizaciones aritméticas pero poco a poco avanzaron hacia unas formas más sofisticadas de generalización como es el caso de la generalización propiamente algebraica al continuar con las tareas diseñadas con esa intención epistemológica que finalmente se promoviera el encuentro de una fórmula.

Además, se pudo observar cómo movilizaron medios semióticos de objetivación tales como gestos, ritmo, palabras, percepción, que poco a poco iban pasando del pensamiento factual hacia el contextual cuando la indeterminancia se hacía explícita en sus discursos y también a medida que se iban dando contracciones semióticas más sofisticadas pasando así de frases claves que daban cuenta de la indeterminación a símbolos como fue el caso del de interrogación en donde se constata que hay una evolución en el pensamiento algebraico.

Este pensamiento algebraico se caracterizó por procesos de objetivación que le fueron permitiendo a los estudiantes ese encuentro cultural con unas formas particulares de entender este tipo de tareas de naturaleza algebraica, cuando de manera progresiva se iban enfrentando a las tareas también se iban haciendo cada vez más sensibles para percibir lo que se analiza en ellas al adquirir destreza sobre lo que se debía buscar y cómo hacerlo, al irse encontrando con ese saber a través de tareas de generalización de patrones lo que finalmente permite que también se vaya haciendo más sofisticado su discurso.

Por otra parte, el trabajo colectivo entre la profesora y un solo estudiante, permitió tomar los datos de una manera más limpia debido a que toda la atención estaba volcada sobre él, este trabajo compartido permitió una interacción más directa y provechosa.

Otro aspecto a tener en cuenta es la complejidad que representa instanciar en ellos pensamiento simbólico (Vergel, 2015), puesto que para que alcancen el nivel de un lenguaje alfanumérico es necesario una labor conjunta más estructurada, sin embargo, queda latente la posibilidad de hablar de un estrato incipiente de pensamiento algebraico simbólico dado el empleo de otros símbolos que los estudiantes utilizan para representar la indeterminación y que están a su disposición gracias a los saberes histórico- culturales con los cuales han objetivado.

4.2 Reflexiones didácticas

Los resultados aquí presentados brindan pautas para que otros profesores en formación en licenciatura en matemáticas e incluso profesores en ejercicio, puedan

incorporar en sus prácticas educativas la enseñanza del álgebra desde los grados de educación básica primaria, debido a que el presente trabajo exhibe que es posibles realizarlo y que además se debe hacer según los requerimientos de los documentos de política pública educativa como ya se ha mencionado.

Tal y como lo han evidenciado otras investigaciones dirigidas por Radford el pensamiento algebraico no se puede reducir a una cuestión solamente de la educación básica secundaria cuando aparece el estrato de pensamiento simbólico. El profesor debe ser consciente de la posibilidad de trabajar desde grados iniciales de escolaridad y que no es necesario el simbolismo alfanumérico que tradicionalmente según las concepciones de muchos profesores se considera que es cuando este pensamiento aparece para ejercer sus prácticas.

Otra aspecto a tener en cuenta es que como profesora investigadora se reconoce una manera de trabajar didácticamente el saber algebraico con los estudiantes, esto, debido a la toma de conciencia que existen este tipo de tareas y lo importante que es diseñarlas detalladamente para que cumplan con su propósito y además cómo a través de la interacción entre ella y los estudiantes ahora es una profesora más sensible, más consciente en cuanto a tomar en detalle las producciones de los estudiantes.

Esta sensibilidad adquirida por la profesora, no solamente es activa en las clases de matemática sino en general en todas las clases. Tiene en cuenta que como profesora debe prestar atención a las expresiones semióticas que los estudiantes emplean para comunicar pensamiento, formas de expresión que muchas veces como adultos no son entendidas o no se espera ese tipo de expresiones por parte de ellos, entonces son descalificadas o invisibilizadas, esto, muchas veces sin darse cuenta que son genuinas formas de expresar pensamiento. Entonces vale la pena volcar la atención hacia este tipo de detalles permiten al maestro entender e interpretar el pensamiento de todos los estudiantes y en otras asignaturas.

Esto indica que la transformación que como profesora-investigadora se ha tenido es gracias a los procesos de subjetivación que se han venido dando a través de la interacción

con los estudiantes, procesos que son importantes en esta relación unificada de enseñanza aprendizaje y que permiten evolucionar en la forma de concebir el pensamiento algebraico gracias a los procesos de objetivación que ha orientado y en el cual también se vio envuelta.

Finalmente, se puede decir que este trabajo deja abierta la posibilidad de continuar analizando tanto la idea de labor conjunta como la idea de generalización aritmética sofisticada en virtud que son dos categorías analíticas que la investigación tanto nacional como internacional centrada en ellas sigue discutiendo.

Anexos

Anexo 1 Producciones de Laura a las cuatro tareas propuestas en la investigación

Tarea 1

Nombre de la Institución Educativa la cauca

Fecha 20 Abril 2022 Grado 5-2

Nombre del estudiante

Observa la siguiente secuencia numérica y luego responde las preguntas

3	5	7	9
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6? Justifica tu respuesta
2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 15 de la secuencia?
Explica tu respuesta.

1) 11 13 los terminos que van en el 5 y 6 son
11 - 13

2) lo encuentre contando de dos en dos y es 31

Tarea 2Nombre de la Institución Educativa la caucaFecha 20 Abril 2022 Grado 5-2Nombre del estudiante Paula Andrea M.

Observa la secuencia

1	1	2	3	5	8	13	21
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4	Término 5	Término 6	Término 7	Término 8

A partir de esta secuencia responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué cambios observas entre el término 1 y 2, entre 2 y 3, entre 3 y 4, entre 4 y 5, entre 5 y 6, entre 6 y 7, entre 7 y 8?
2. ¿Cuáles son los números que corresponden a los términos 9 y 10 de la secuencia? Justifica tu respuesta
3. El número 610 de la secuencia ¿a qué término corresponde?
4. Uno de los estudiantes del quinto grado dice que el número 1.590 pertenece a la secuencia. Explica, ¿es cierto o no y por qué?

$$\begin{array}{r} 13 \\ 1 \\ + 89 \\ 144 \\ \hline 233 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 144 \\ + 233 \\ \hline 377 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 21 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 11 \\ + 233 \\ 377 \\ \hline 610 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 21 \\ + 34 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 34 \\ + 55 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 55 \\ + 89 \\ \hline 144 \end{array}$$

2) el termino nueve es 34 el termino diez es 55.

3) El número 610 corresponde al termino 15

$$\begin{array}{r} +0 \\ 377 \\ +610 \\ \hline 987 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1 \\ 610 \\ +987 \\ \hline 1.597 \end{array}$$

4) No es cierto porque no da 1.590 sino que da 1.597.

1) En el termino 1 y 2 no cambia sigue en el número 1, y el termino 2 y 3 si cambia suve 1, y en el termino 3 y 4 si cambia suve 1, y en el termino 4 y 5 si cambia suve 2, y en el termino 5 y 6 si cambia suve 3, y en el termino 6 y 7 si cambia suve 5, y en el termino 7 y 8 si cambia suve 8.

Tarea 3Nombre de la Institución Educativa La caucaFecha 20 Abril 2022 Grado 5-2

Nombre del estudiante

Observa la siguiente secuencia numérica.

4 **7** **10** **13**

Responde las preguntas

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6 de la secuencia?

Justifica tu respuesta

2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 20 de la secuencia? Explica tu respuesta.

3. Un estudiante afirma que "El número correspondiente al término 100 es 301".

¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

4. Balota secreta

Toma una de las balotas que dentro contienen un número el cual representa el término de la secuencia y luego escribe cómo puedo hallar el número que corresponde a esa posición.

5
16
19

son el número 16-19 de la secuencia 5-6.
Porque fue contando de 3 en 3.

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 3 \\ \hline 300 \\ + 1 \\ \hline 301 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \\ \times 3 \\ \hline 4500 \\ + 1 \\ \hline 4501 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 3 \\ \hline 90 \\ + 1 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 3 \\ \hline 60 \\ + 1 \\ \hline 61 \end{array}$$

2) Multiplique $20 \times 3 = 60 + 1 = 61$ y así lo descubrí y saqué el uno porque no enpesaba desde 3 sino de cuatro.

3) es verdadero porque $100 \times 3 = 300 + 1 = 301$.

4) Lo alle multiplicando $1.500 \times 3 = 4.500 + 1 = 4.501$ y así lo alle.

Tarea 4Nombre de la Institución Educativa La caucaFecha 21 de Abril 2022 Grado 5-2

Nombre del estudiante _____

Observa la secuencia que se presenta a continuación.

5**8****11**

Responde las preguntas.

1. ¿Cuál consideras que es el número del término siguiente en la secuencia? ¿por qué?
2. Un compañero hace la siguiente afirmación "el número 152 corresponde al término 50 de la secuencia". ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué?
3. Escribe un mensaje para un compañero, en donde le digas cómo obtienes el número que se te pida sin importar el término que ocupe.
4. Escribe nuevamente el mensaje que hiciste en el punto anterior, pero ahora expresalo a través de un cálculo

1) sería el término 4 y el número sería 14.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 3 \\ \hline 150 \\ + 2 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 152 \\ \times 3 \\ \hline 456 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$$

2) si es correcto porque multiplique 458
 $50 \times 3 = 150 + 2 = 152$ y si fue correcta.

3) Que aga una multiplicación de algun termino y luego le sume 2 y de pronto le dara.

$$i \times 3 + 2$$

Anexo 2 Producciones de Byron a las cuatro tareas propuestas en la investigación

Tarea 1

Nombre de la Institución Educativa CAUCA

Fecha 17 de septiembre Grado 5º-2

Nombre del estudiante _____

Observa la siguiente secuencia numérica y luego responde las preguntas

3	5	7	9
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6? Justifica tu respuesta
2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 15 de la secuencia? Explica tu respuesta.

① 11
5 porque la secuencia numérica va de dos en dos

13 porque si el término 5 es el
6 41 y la tabla me dice que va en dos en dos

② 15 lo logramos encontrar
7 de dos en dos

17
8
19
9
21
10
23
11

25 recorri de dos en dos
 12 la secuencia dice que va
 27 de dos en dos entonces me
 13 quic con la secuencia
 29
 14
 (31)
 15

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \times 2 \\
 \hline
 100 \\
 + 1 \\
 \hline
 101
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 15 \\
 \times 2 \\
 \hline
 30 \\
 + 1 \\
 \hline
 31
 \end{array}$$

Tarea 2Nombre de la Institución Educativa CaucaFecha 11 de septiembre 2011 Grado 5º 2

Nombre del estudiante _____

Observa la secuencia

1	1	2	3	5	8	13	21
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4	Término 5	Término 6	Término 7	Término 8

A partir de esta secuencia responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué cambios observas entre el término 1 y 2, entre 2 y 3, entre 3 y 4, entre 4 y 5, entre 5 y 6, entre 6 y 7, entre 7 y 8?
2. ¿Cuáles son los números que corresponden a los términos 9 y 10 de la secuencia? Justifica tu respuesta
3. El número 610 de la secuencia ¿a qué término corresponde?
4. Uno de los estudiantes del quinto grado dice que el número 1.590 pertenece a la secuencia. Explica. ¿es cierto o no y por qué?

② El número que corresponde al término 9 es 34

El número que corresponde al término 10 es 55

89

11

144

12

$$\begin{array}{r} 233 \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ +144 \\ \hline 233 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 233 \\ +144 \\ \hline 377 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 233 \\ +377 \\ \hline 610 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 610 \\ +377 \\ \hline 987 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 377 \\ 14 \end{array}$$

corresponde al termino 45

$$\begin{array}{r} 987 \\ +610 \\ \hline 1597 \end{array}$$

610

15

987

16

no es cierto porque no pertenece a la secuencia

no hay diferencia entre 1,2, la diferencia entre el 2,3 es que lo lleva por uno, la diferencia la diferencia entre 3,4 es que lo lleva por uno, La diferencia entre el 4,y 5 es que el 5 lleva por dos al cuatro, la diferencia entre 5,y 6 es que el 6 le lleva por tres al 5, La diferencia entre 6, 7 es que el 7 lleva por 5 al 6, La diferencia entre el 7 y 8 el 8 le lleva por 13 al 7

Tarea 3Nombre de la Institución Educativa CARCOFecha 11 sep 2010 Grado 5º2

Nombre del estudiante _____

Observa la siguiente secuencia numérica.

4 7 10 13

Responde las preguntas

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6 de la secuencia?

Justifica tu respuesta

2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 20 de la secuencia? Explica tu respuesta.

3. Un estudiante afirma que "El número correspondiente al término 100 es 301".

¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

4. Balota secreta

Toma una de las balotas que dentro contienen un número el cual representa el término de la secuencia y luego escribe cómo puedo hallar el número que corresponde a esa posición.

16 el número que va en el 5 término es 16
 5
 19 el número que va en el 6 término es 19
 6
 22 porque en la tabla dice que va en tres
 7 y en tres
 25
 8
 28
 9

31
10
39
11
37
12
40
13
43
14
46
15
49
16
52
17
55
18
58
19
61
20

② lo encuentre siguiendo los pasos de la tabla de secuencia de tres en tres

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 3 \\ \hline 300 \\ + 1 \\ \hline 301 \end{array}$$

si es correcta
porque multiplicamos cien por el
tres y a lo ultimo le sumamos el
uno por que la secuencia empieza
desde el 4

4 lo hallaria multiplicando 3.000 por 3 sumar
el número 1 a lo ultimo

$$\begin{array}{r} 3,000 \\ \times 3 \\ \hline 9000 \\ + 1 \\ \hline 9,001 \end{array}$$

Tarea 4Nombre de la Institución Educativa CaucaFecha ²⁵⁻⁸⁻¹¹ 11 Sep 2011 Grado 5-2

Nombre del estudiante _____

Observa la secuencia que se presenta a continuación.

5**8****11**

Responde las preguntas.

1. ¿Cuál consideras que es el número del término siguiente en la secuencia? ¿por qué?
2. Un compañero hace la siguiente afirmación "el número 152 corresponde al término 50 de la secuencia". ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué?
3. Escribe un mensaje para un compañero, en donde le digas cómo obtienes el número que se te pida sin importar el término que ocupe.
4. Escribe nuevamente el mensaje que hiciste en el punto anterior, pero ahora expresalo a través de un cálculo

① el término siguiente de la secuencia es el
 14
 4

②

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 3 \\ \hline 150 \\ + 2 \\ \hline 152 \end{array}$$

Si es correcta por que dice una multiplicación multiplique 50×3 y me dio 150 de despues lo sume con el 2

Juan pablo

primero tienes que multiplicar y despues sumas
 tienes que multiplicar el termino por tres y luego
 le sumas dos

$$t \times 3 + 2$$

Tarea 2Nombre de la Institución Educativa CaucaFecha abril 21 del 2022 Grado 5-2

Nombre del estudiante _____

Observa la secuencia

1	1	2	3	5	8	13	21
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4	Término 5	Término 6	Término 7	Término 8

A partir de esta secuencia responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué cambios observas entre el término 1 y 2, entre 2 y 3, entre 3 y 4, entre 4 y 5, entre 5 y 6, entre 6 y 7, entre 7 y 8?
2. ¿Cuáles son los números que corresponden a los términos 9 y 10 de la secuencia? Justifica tu respuesta
3. El número 610 de la secuencia ¿a qué término corresponde?
4. Uno de los estudiantes del quinto grado dice que el número 1.590 pertenece a la secuencia. Explica, ¿es cierto o no y por qué?

1 Entre 1 y 2 no hay cambios porque siguesiendo el mismo numero, entre el termino 2 y 3 solo se suma uno entre el termino 3 y 4 se le suma uno entre el 4 y 5 se le suma dos entre el termino 5 y 6 se le suma tres entre el termino 6 y 7 se le suma cinco entre el termino 7 y 8 se le suman ocho

2 El termino 9 es el 34 y el termino 10 es el 55

34 3 el 610 corresponde al termino 157

$\frac{55}{89}$ 4 el 1.590 no pertenece a la
 $\frac{55}{144}$
 secuencia al sumar los termi-
 nos 15 y 16 me dio el 17 pero
 no es el mismo que el me
 estan dando

$\frac{89}{233}$
 $\frac{144}{377}$
 $\frac{233}{610}$
 $\frac{377}{987}$
 $\frac{610}{1597}$

Tarea 3Nombre de la Institución Educativa CALCAFecha abril 21 del 2022 Grado 5-2

Nombre del estudiante _____

Observa la siguiente secuencia numérica.

4**7****10****13**

Responde las preguntas

1. ¿Cuáles son los números que van en los términos 5 y 6 de la secuencia?

Justifica tu respuesta

2. ¿Cómo logras encontrar el número que pertenece al término 20 de la secuencia? Explica tu respuesta.

3. Un estudiante afirma que "El número correspondiente al término 100 es 301".

¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

4. Balota secreta

Toma una de las balotas que dentro contienen un número el cual representa el término de la secuencia y luego escribe cómo puedo hallar el número que corresponde a esa posición.

1 El término 5 es el 16 y término 6 es el 19

2 El término 20 es 61 100

20
 $\times 3$

603 Si el término 100 es $\frac{\times 3}{300}$ el 301 multiplique el 100 por el 3 y le sume uno

4 Multiplique el 500 por el 3 y luego le sume uno

301	500
$\times 3$	$\times 3$
1503	1500
	1501

Tarea 4Nombre de la Institución Educativa CaucaFecha abril 21 del 2020 Grado 5-2

Nombre del estudiante

Observa la secuencia que se presenta a continuación.

5

8

11

Responde las preguntas.

1. ¿Cuál consideras que es el número del término siguiente en la secuencia? ¿por qué?
2. Un compañero hace la siguiente afirmación "el número 152 corresponde al término 50 de la secuencia". ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué?
3. Escribe un mensaje para un compañero, en donde le digas cómo obtienes el número que se te pida sin importar el término que ocupe.
4. Escribe nuevamente el mensaje que hiciste en el punto anterior, pero ahora expresalo a través de un cálculo

1 El termino siguiente es el 14. Porque la secuencia va de tres en tres

50
3
150
152

2 Si es correcta la afirmación. Porque al multiplicar el 50 con el 3 y sumarle dos me da 152

3 Al multiplicar 45 por tres y sumarle 2 me da 137 que es numero del termino 45

45
x 3
135

351 quiere allar un termino primero debes multiplicar el numero que te estan dando por tres y luego sumale dos.

4. ejemplo

$$\begin{array}{r} ? \\ \times 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} ? \\ \underline{2} \end{array}$$

Referencias

- Alméciga, H. L. (2020). *La emergencia del pensamiento algebraico en adultos* [Tesis de maestría]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- Arzarelo, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(Extraordinario 1), pp.267-299. <http://funes.uniandes.edu.co/9710/>
- Bayona, L. (2021). Generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria (con edades de 10 y 11 años). [Tesis de doctorado]. Universidad Santo Tomás. Bogotá, Colombia
- Burgos, M, & Godino J. (2018). *Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria*. Educación Matemática 31(3), pp. 117-150. DOI: 10.24844/EM 3103.05
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013) *Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato* . Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 274-281).
- Callejo, M. L., García, A., & Fernández, C. (2016). *Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales*. Avances de Investigación en Educación Matemática.
- Camargo, L. (2019). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática*. Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Universidad de Antioquia.
https://cemacyc.org/public/conferences/1/XV CIAEM/archives/CV/minicursos/LeonoraCamargo_minicurso.pdf
- Carmona, A., & Velasco, M. (2018). *Características del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto grado de la educación básica a partir de*

tareas sobre generalización de patrones [Tesis de maestría]. Universidad del Valle, Tuluá.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2013). *Las estrategias de investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa. Vol. III*. Editorial GEDISA.

https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=1JPsdwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT273&dq=Las+estrategia+de+investigaci%C3%B3n+cualitativa.+Manual+de+investigaci%C3%B3n+cualitativa&ots=5AyjduAT7s&sig=c_duxaRZe1q6SZVO-o1MldeUC8c#v=onepage&q=Las%20estrategia%20de%20investi

Días, V., & Radford, L. (2021). O Ensino-aprendizagem da Álgebra na Teoria da Objetivação. In *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física. Sao Paulo, Brasil.

Glaser, B. (2003, 01 31). *Constructivist Grounded Theory?* Forum: Qualitative Sozial forschung/Forum: Qualitative Research (periódico on line). <http://qualitative-research.net/fqs-teste/3-o2/3-02glaser-e.htm>

Godino, J. (2013). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática Costa Rica.

Godino, J., Castro, W., & Aké, L. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 26(42). <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005>

Godino, J., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. In *Razonamiento algebraico para maestros* (pp. 767-826). Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>

Gustin, J. D. (2017). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al abordar tareas sobre generalización de patrones* [Tesis de

maestría]. Universidad Nacional de Colombia, Palmira Valle.

Hernández, K. L., & Tapiero, K. J. (2014). *Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de educación básica primaria* [Trabajo de grado para optar el título Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas]. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. In *Metodología de la investigación*. Sexta edición McGraw Hill Education, México.

Hurtado, C. (2019). El diseño metodológico en la investigación. In *Presentación en diapositivas* (4, 6, 17). Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Kaput, J (2000). Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale. En Kaput, James J.; Blanton, Maria L. Search education resources. <https://eric.ed.gov/?id=ED441663>.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebric reasoning? En J.J. Kaput, D. Carreher y M Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group.
<https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>

Lasprilla, A. (2014). *Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años*. [Trabajo de maestría no publicado]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Lucumi, M. & Montaña J. (2020). *Desarrollo del pensamiento algebraico simbólico de un grupo de estudiantes de sexto grado de educación básica secundaria a través de tareas de generalización de patrones* [Tesis de maestría]. Universidad del Valle. Sede Norte. Colombia.

Martinez, P. C. (2006). *El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la*

investigación científica. Sistema de Información Científica Redalyc.

<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=6460200>

- Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In: Bernarz, N., Kieran, C., Lee, L. *Approaches to Álgebra. Mathematics Education Library*, 18, 65-86. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5
- Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 4(3), pp. 232-246. <http://funes.uniandes.edu.co/1100/>
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2*. Bogotá, Colombia.
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán J. (2007) Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 3(3), p 5-30.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Molina, M. & Cañadas, M. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141) Atrio
- Morales, R., Cañadas, M. C., & Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, 11(4), 233-252.
- Moreno, P. C. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico* [Tesis de maestría]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- Narváez, R. & Cañadas, M. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de

segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA*, 17(3), 239-264.

<https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153>

Pantano, O. L. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales* [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá Colombia.

Pantano, O. (2020) Constitución de una labor conjunta: trabajando hombro con hombro para alcanzar un mismo propósito. *RECME- Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 3(2), 118-128. Recuperado a partir de <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/359>

Pantano, O. L., Vergel, R., & Radford, L. (2021). Estimulación, evolución y refinamiento de la actividad perceptual de un grupo de estudiantes y la profesora. *Revista Matemática, Ensino e cultura*, 16(39), 206-227. 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p206-227.id492

Pinto, E. & Cañadas M. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33,113-134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2005). *Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification* (Melbourne. University of Melbourne ed., Vol. 1). Helen, L.; Chick, J.; Vincent, L.

Radford, L., Bardini, C., Sabena, C. (2005). On Embodiment, Artifacts, and Signs: A Semiotic-Cultural Perspective on Mathematical Thinking. International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (29th, Melbourne, Australia), v4 p113-120.

- Radford, L. (2010a). Elementary Forms of Algebraic thinking in young students. In *Pinto, M. F. y Kawasaki, T. F. Proceedings of the 34th Conference of the International.*
- Radford, L. (2010b). Layers of Generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 04(02), 37-62. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169>
- Radford, L. (2011). *Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking*. Advances in Mathematics Education book series. DOI: 10.1007/978-3-642-17735-4_17
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133. <https://doi.org/10.30827/pna.v6i4.6139>
- Radford, L. (2013a). En torno a tres problemas de la generalización. In *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Editorial Comares.
- Radford, L. (2013b). The progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 258-277. DOI 10.1007/s13394-013-0087-2
- Radford, L. (2014). De la Teoría de la Objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Radford, L. (2016). *Mathematics Education as a Matter of Labor*. In M. Peters (ed.). Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory. P. Valero and G. Knijnik, Editors. Singapore: Springer.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos Énfasis* (pp. 115-136). D'Amore, Bruno; Radford, Luis. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Aprendizajes+de+sde+las+perspectiva+de+la+teor%C3%ADa+de+la+objetivaci%C3%B3n&btnG=

- Radford, L. (2018). *Saber, aprendizaje y subjetivación, en la Teoría de la Objetivación*. 5°simposio internacional de investigación en educación matemática. Brasil.
- Radford, L. (2020a). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza- aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), 15-31.
<http://www.ojs.asocolme.org/index.php/RECME>
- Radford, L. (2020b, Dic 15). *Los principios filosóficos de una teoría del aprendizaje: La Teoría de la Objetivación*. [Video] YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=hIQEAtU1SZg&t=682s>
- Radford, L. (2021a). Aspectos conceptuales y prácticos de la Teoría de la Objetivación. In Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 35-56). Livraria de Física.
http://www.luisradford.ca/pub/2021%20-%20Radford%20-%20O%20ensino-aprendizagem%20da%20agebra%20na%20teoria%20da%20objetivacao_rev%20revisado_SP.pdf
- Radford, L. (2021b). *Teoría Da Objetivacao. Uma perspectiva vigotskyana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*. Livraria de Física.
- Radford, L. (En prensa) ¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas?. DOI: <http://dx.doi.org/>
- Radford, L. [PosgradoMatEdu] (20 de abril de 2023) 16° Ciclo de SMECyS, 2da. Sesión
[Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=6InStUhokKc>
- Rojas, P. J., & Vergel, R. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: Actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME Revista colombiana de matemática educativa*, 3(1), 19-30.

<http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/271>

Rojas, P. J., & Vergel, R. (2019). Pensamiento Algebraico en el contexto escolar. In *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 590-598).

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Education Siglo XXI*, 29(2), 199-224.

<https://revistas.um.es/educatio/article/view/133031>

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria* [Tesis Doctoral].

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá Colombia.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220>

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. 4 colección de tesis doctoral.

Universidad distrital Francisco José de Caldas. Bogotá - Colombia.

Vergel, R. (2019). *Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico*. Conferencia Interamericana de Educación Matemática XV CIAEM.

Vergel, R., Radford, L., & Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema*, 36(74), 1174-1192.

<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11>