

**Buena colocación local y estudio numérico de una ecuación tipo
Kadomtsev-Petviashvili (KPI) con coeficientes variables**



Gerardo Arturo Loaiza Motato

**Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico de Doctorado en Ciencias Matemáticas
Santiago de Cali
2021**

**Buena colocación local y estudio numérico de una ecuación tipo
Kadomtsev-Petviashvili (KPI) con coeficientes variables**



Presentado por:
Gerardo Arturo Loaiza Motato

Dirigido por:
Dr. Juan Carlos Muñoz Grajales

**Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico de Doctorado en Ciencias Matemáticas
Santiago de Cali
Abril de 2021**

Mis más sinceros agradecimientos:
Al profesor Juan Carlos Muñoz Grajales por su valiosa colaboración y
orientación.
A los miembros del Jurado por sus valiosos aportes.
A la Universidad del Valle por aceptarme en el programa doctoral en
Ciencias Matemáticas.
A la Universidad del Cauca por permitir mi estancia en la Universidad del
Valle.
A mis compañeros.
Un agradecimiento especial a mi familia por apoyarme y alentarme durante
todo el tiempo empleado en mis estudios.

Índice

Índice	4
Lista de figuras	6
Lista de tablas	8
1 Introducción	13
1.1 Resultados preliminares y estado actual del arte	15
2 Preliminares	24
2.1 Teoría de semigrupos	24
2.1.1 Algunos resultados de teoría de perturbación de operadores lineales	34
2.2 Elementos de la teoría ecuaciones de diferenciales cuasilineales	35
2.3 Espacios de Sobolev de tipo periódico	37
2.4 Aproximación numérica de ecuaciones diferenciales: método de elementos finitos	42
2.4.1 Malla y triangulación	43
2.4.2 Interpolación Lineal	45
3 Buena colocación local para una ecuación KP con coeficientes variables	58
3.1 Notación	58
3.2 Buena colocación del problema de Cauchy	59
3.3 Ley de conservación de la norma L^2	69

4	Resultados numéricos	71
4.1	Formulación Variacional	71
4.2	Experimentos numéricos	73
4.2.1	Propagación de ondas solitarias en medios homogéneos	74
4.2.1.1	Soliton de Zaitsev	75
4.2.1.2	Solitones en línea o solitones en banda	77
4.2.1.3	Soliton racional o soliton con forma de cam- pana	78
4.2.1.4	Bisoliton exacto	79
4.2.2	Propagación de ondas solitarias en medio no homogéneos	80
4.3	Orden de convergencia del método numérico propuesto . . .	82
4.4	Propagación de ondas en el caso de frontera periódica	86
4.5	Discusión numérica final	91
5	Conclusiones y trabajo futuro	94
A	Ejemplo de un archivo en FEniCS con datos no periódicos	96
B	Ejemplo de un archivo en FEniCS con frontera periódica: soliton de Zaitsev	103
C	Ejemplo de un archivo en Mathematica	108
	Referencias	110

Lista de figuras

1.1	Una onda propagándose en el canal de ancho y profundidad variable.	17
1.2	Corte transversal del canal.	17
2.1	Triangulación conforme.	43
2.2	Triangulación no conforme.	44
2.3	Función pirámide o de forma φ_j . La función φ_j vale uno en el nodo N_j y vale cero en los otros nodos.	45
2.4	Ejemplos de mallas 2D hechas con mshr con diferencia e intersección de conjuntos.	49
2.5	Ejemplos de mallas 2D hechas con mshr usando CSGRotation y CSGScaling.	50
2.6	Ejemplos de mallas 3D hechas con mshr usando unión de conjuntos.	51
2.7	Figura generada con Gmsh.	55
2.8	Izquierda solución con 50 elementos y un $h \approx 0.28284271$. Derecha solución con 1800 elementos y un $h \approx 0.04714045$. . .	57
4.1	Soliton de Zaitsev con $\alpha = 0.74$, $\beta = 0.31686$, $\delta = 1.0$ calculado en el tiempo $T = 2.0$	76
4.2	Soliton de Zaitsev soliton con $\beta = 0.0$, $\alpha = 0.759836$, $\delta = 1.0$ y $\omega = 1.75477$ calculada en $T = 2.0$	76
4.3	Soliton en línea con $\lambda = 0$ calculado en el tiempo $T = 2.0$. . .	77
4.4	Soliton en línea con $\lambda = -1.0$ calculado en $T = 2.0$	78
4.5	Soliton racional calculado en el tiempo $T = 2.0$	79
4.6	Bisoliton calculado en el tiempo $T = 0$	80
4.7	Bisoliton calculado en el tiempo $T = 2$	80

4.8	Solitón con $g(t) = t + 1$, $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 2$	81
4.9	Solitón con $g(t) = t + 1$, $a = 1.0$, $b = -1.0$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 2$	82
4.10	Solitón con $g(t) = 1.0 + 0.25 \sin(16t)$, $a = 1.0$, $b = -1.5$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 0$	82
4.11	Solitón con $g(t) = 1.0 + 0.25 \sin(16t)$, $a = 1.0$, $b = -1.5$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 2$	83
4.12	Movimiento de una onda solitaria en una superficie libre. . .	83
4.13	Solitón de Zaitsev en $T = 0$ con estrategia periódica.	89
4.14	Solitón de Zaitsev en $T = 1.0$ con estrategia periódica.	89
4.15	Solitón en línea $T = 0$ con estrategia periódica.	90
4.16	Solitón en línea $T = 5$ con estrategia periódica.	90
C.1	Soliton lineal. Experimento de Feng y Mitsui [10].	109

Lista de tablas

2.1	Tabla de rutinas para resolver sistemas lineales disponibles en FEniCS. Tomada de Langtangen y Logg [31, pág. 118]. . .	53
2.2	Tabla de preconditionadores disponibles en FEniCS. Tomada de Langtangen y Logg [31, pág. 118].	53
4.1	Orden de convergencia espacial del FEM usando $\Delta t = 0.0002$.	85
4.2	Orden de convergencia temporal del esquema usando un tamaño de malla espacial $h \approx 0.0559016994$	86

Resumen

En este trabajo se considera una ecuación bi-dimensional tipo Kadomtsev-Petviashvili (GKPI) con coeficientes dependientes del tiempo y se demuestra la buena colocación local del problema de Cauchy, en el caso de dominio espacial periódico. Para este mismo problema se logra demostrar una importante ley de conservación. Se plantea además una propuesta numérica, basada en elementos finitos lineales, sobre un espacio mixto para la discretización espacial, y un método implícito para la correspondiente discretización temporal. También se establece una propuesta numérica para la aproximación numérica de las soluciones de la ecuación GKPI estudiada en un dominio rectangular en el plano y sobre un dominio planar periódico.

Notación

Se presenta aquí la notación que va a ser usada a lo largo del presente trabajo.

- $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \|f\|_p := (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty\}.$
- $L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \|f\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty\}.$
- $C^k(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{C^k} := \max_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha f(x)| < \infty\}.$
- $f \in C^\infty(\Omega)$ si $f \in C^k(\overline{\Omega}_1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo subconjunto acotado $\Omega_1 \subset \Omega$.
- Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p = 1, 2$, se define

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- El espacio de Sobolev de orden s basado en L^2 está definido por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{Z}^+.$$

- El espacio de Sobolev de orden s basado en L^p está definido por

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_p \right\} < \infty, \quad s \in \mathbb{Z}^+, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

con norma dada por

$$\|f\|_{s,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}.$$

- $L_s^2(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))^\wedge$. Esto es, $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\hat{f}(\xi) \in L_s^2(\mathbb{R})$ donde $L_s^2(\mathbb{R})$ es el espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$(f, g)_{L_s^2} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s f \bar{g} d\xi.$$

- $X_s(\mathbb{R}^2)$ denota el conjunto de las $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\left(\partial_x^{-1} f \right)^\wedge (\xi, \eta) = \frac{\hat{f}(\xi, \eta)}{i\xi} \in L_s^2(\mathbb{R}^2),$$

dotado de la norma

$$\|f\|_s^2 = \|f\|^2 + \left\| \partial_x^{-1} f \right\|_s^2.$$

- $\mathfrak{F}_1$ denota la transformada de Fourier con respecto a la variable x , $\mathfrak{F}_2$ denota la transformada de Fourier con respecto a la variable y , donde $x, y \in \mathbb{R}^2$.
- El espacio de Sobolev de orden k sobre el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es definido como

$$W_p^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sumables} : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

$k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $1 \leq p \leq \infty$ con norma dada por

$$\|f\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha f|, & p = \infty. \end{cases}$$

Además $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ y $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

- $\mathcal{B}(Y, X)$ es el conjunto de todos los operadores lineales acotados de Y en X ; X, Y espacios de Banach con norma $\|\cdot\|_{Y,X}$ la cual se escribirá simplemente como $\|\cdot\|$. Si $X = Y$ se escribe $\mathcal{B}(X, X) = \mathcal{B}(X)$.

- $C_\pi^\infty(\mathbb{R}^2) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : u(x+2\pi, y) = u(x, y+2\pi) = u(x, y)\}.$
- $M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2) = \{u \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^2) : \int_0^{2\pi} u(x, y) dx = 0, y \in [0, 2\pi]\}.$
- $(u, v)_s = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (1+m^2+n^2)^s \hat{u}(m, n) \overline{\hat{v}(m, n)}, u, v \in C_\pi^\infty.$
- $\|u\|_s = (u, u)_s^{1/2},$ con $u \in C_\pi^\infty.$
- $X_{\pi, x} = \overline{M_\pi^\infty}^{\|\cdot\|_{\pi, x}}$ denota la clausura de $M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\pi, x},$ donde $\|u\|_{\pi, x} = \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (1+m^2) |\hat{u}(m, n)|^2 \right)^{1/2}.$
- $H_\pi^s(\mathbb{R}^2) = \overline{C_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\|\cdot\|_s}$ es el conjunto de las distribuciones periódicas u tales que $\|u\|_s^2 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (1+m^2+n^2)^s |\hat{u}(m, n)|^2 < \infty.$
- $X_\pi^s(\mathbb{R}^2) = \overline{M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\|\cdot\|_s}$ denota la clausura de $M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_s.$ Note que $X_\pi^0 = L_\pi^2.$

Capítulo 1

Introducción

En 1970 los físicos soviéticos Boris B. Kadomtsev y Vladimir I. Petviashvili publicaron un artículo titulado *On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media* [23] en el cual presentaron un modelo dispersivo bidimensional que generaliza la conocida ecuación KdV (1895), llamada así en honor de Diererik Korteweg y Gustav de Vries. Este modelo es conocido en la actualidad como la ecuación Kadomtsev-Petviashvili (KP). La ecuación KP es un modelo integral no lineal que describe el comportamiento de ondas largas de pequeña amplitud, las cuales se propagan esencialmente en la dirección x , en un fluido bidimensional con profundidad pequeña y constante, y con tensión superficial constante. Se presentan aquí tres formas clásicas de escribir este modelo:

La formulación diferencial

$$(u_t + \alpha_1 u u_x + \alpha_2 u_{xxx})_x + \alpha_3 u_{yy} = 0,$$

la formulación integral

$$u_t + \alpha_1 u u_x + \alpha_2 u_{xxx} + \alpha_3 \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

y la formulación como un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} u_t + \alpha_1 u u_x + \alpha_2 u_{xxx} + \alpha_3 v_y = 0, \\ v_x - u_y = 0. \end{cases}$$

Esta última es la que presentaron Kadomtsev y Petviashvili en su artículo seminal. Aquí

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad \partial_x^{-1} h(x, y, t) = \int_a^x h(x', y, t) dx',$$

donde $a = -\infty$ si el dominio espacial es $\mathbb{R}^2$ y $a = 0$, si el dominio espacial es el toro $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Las constantes α_1 , α_2 y α_3 son los coeficientes de no linealidad, de dispersión y de perturbación transversa, respectivamente. cuando $\alpha_3 = -1$, el modelo es conocido como KPI, y cuando $\alpha_3 = 1$, se le conoce como KP II (ver Isaza et al. [18], 1992).

La versión de la ecuación KP en su forma dimensional (es decir, donde los coeficientes mantienen sus dimensiones físicas) se escribe como

$$\partial_x \left(\frac{1}{c_0} u_t + u_x + \frac{3}{2h} u u_x + \gamma u_{xxx} \right) + \frac{1}{2} u_{yy} = 0, \quad (1.1)$$

donde $c_0 = \sqrt{gh}$, $\gamma = \frac{h^2}{6}(1 - 3\hat{T})$ y $\hat{T} = \frac{T}{\rho g h^2}$, siendo T la tensión superficial.

El modelo KPI aparece cuando $\hat{T} > 1/3$, es decir bajo tensión superficial grande y, el modelo KP II cuando $\hat{T} < 1/3$, el cual se presenta cuando la tensión superficial es pequeña. La ecuación KPI se usa para modelar ondas sobre una película de agua delgada y alta tensión superficial (ver por ejemplo Ablowitz [1, Cap. 5] (2011) o Klein y Saut [28] (2012)).

El término u_{xx} en (1.1), el cual se hereda del término de transporte lineal de la ecuación KdV, es fácilmente removido por la sustitución

$$u \rightarrow u \quad \text{y} \quad x \rightarrow x - t.$$

En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) = -u_x(x - t, y, t) + u_t(x - t, y, t).$$

Cuando este término ha sido removido, es posible realizar en (1.1) la nueva sustitución

$$u \rightarrow -u \quad \text{y} \quad x \rightarrow -x.$$

Finalmente, para obtener la distribución de signos tradicional se hace la sustitución

$$u \rightarrow -u \quad \text{y} \quad t \rightarrow -t.$$

La expresión normalizada de la ecuación KPI es,

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0. \quad (1.2)$$

Esta expresión es sin duda la forma más conocida de la ecuación KPI.

En el modelo clásico se supone que todas las cantidades físicas involucradas son constantes, esto es, α_1 , α_2 y α_3 son fijos. A continuación se enuncian algunos de los resultados sobre buena colocación de la ecuación KPI en el plano y en el toro que están disponibles en la literatura.

1.1 Resultados preliminares y estado actual del arte

Para el caso de la ecuación KPI con coeficientes constantes, se mencionan unos cuantos trabajos consultados y citados a lo largo de este documento.

En Isaza et al. [19] (1995), usando una estrategia de aproximación, el método de Kato y luego un argumento de compacidad, logran probar que si $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$, $s \geq 3$ y existe $\phi_0 \in H^{s-3}(\mathbb{R}^2)$ con $\partial_x \phi_0 = \partial_y^2 u_0$, entonces el problema de Cauchy

$$(u_t + u_{xxx} + uu_x)_x - u_{yy} = 0, \quad u(0) = u_0,$$

tiene una solución única $u \in C([-T, T] : H^s)$, $u = u(x, y, t)$, con $u' := du/dt \in L^\infty([-T, T] : H^{s-3})$ y $T > 0$ una constante.

En Wu y Wen [49] (1991) consideran el problema de Cauchy periódico sobre la región $S = [0, P] \times [0, P]$, donde P es un número positivo,

$$u_t + [f(u)]_x = \alpha u_{xxx} + \beta \int_0^x u_{yy}(x', y, t) dx', \quad u(x, y, t = 0) = g(x, y),$$

con $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $f(u) = Au^r$, con $r \in \mathbb{Z}^+$ o $r > 0$. En caso $r = 2$ es la ecuación KPI. Se impone además la condición (ver ecuación (3.2)),

$$\int_0^P u(x, y, t) dx = 0, \quad \forall y, \quad t \geq 0.$$

Si $g \in W_2^5(S)$ y g_{xx} satisface cierto estimativo de crecimiento que depende de r y de T , en [49] se demuestra también que el problema de Cauchy tiene una única solución clásica.

En el artículo de Iorio y Leite [16] (1998), los autores consideran el problema de Cauchy para una ecuación general tipo KP

$$(\partial_t u - iP(D)u + a(u)\partial_x u)_x + \gamma \partial_{yy}^2 u = 0, \quad u(x, y, 0) = \phi(x, y),$$

con condiciones de frontera periódicas y no periódicas. Sobre el módulo de la transformada de Fourier del término diferencial $P(D)$, se establecen condiciones apropiadas de crecimiento.

Para el caso periódico, Iorio y Leite suponen que $(\widehat{P(D)\psi})(m, n) = p(m)\hat{\psi}(m, n)$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, donde $p = p(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, tiene valor real, $p(0) = 0$ y que existen constantes $C_l \geq 0$ y $l \in \{2, 3, \dots\}$ tales que

$$|p(m)| \leq C_l |m|^l \quad \text{para todo } |m| \text{ suficientemente grande.}$$

En ese caso, en [16] se demuestra que si $\phi \in X_\pi^s$, $s > 2$ y $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces existe un único $T = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ y una única solución $u = u(t)$ del problema de Cauchy, la cual satisface

$$u \in C([0, T] : X_\pi^s) \cap C^1([0, T] : X_\pi^{s-1}).$$

En el caso no periódico Iorio y Leite suponen que $(\widehat{P(D)\psi})(\xi, \eta) = p(\xi)\hat{\psi}(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, donde $p = p(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ es una función impar y continua de valor real y que existen constantes $C_l \geq 0$ y $l \in \{2, 3, \dots\}$ tales que

$$|p(\xi)| \leq C_l |\xi|^l \quad \text{para todo } |\xi| \text{ suficientemente grande.}$$

Así demuestran que si $\phi \in X_s(\mathbb{R}^2)$, $s > 2$ y $a \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tal que $a(0) = 0$, entonces existe $T > 0$ y una única $u \in C([0, T] : X_s)$ solución del problema de Cauchy donde $\partial_t u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$ es calculado con respecto a la norma del espacio $H^{s-l}(R^2)$. Observe que la ecuación KP clásica se obtiene cuando $p(\xi) = \xi^3$, $a(u) = u$.

En el caso de dominio espacial periódico, Isaza et al. [18] (1992) demuestran la buena colocación local de la ecuación

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x - u_{yy} = 0,$$

sobre el espacio de Sobolev de orden $s \geq 3$, con dato inicial en el mismo espacio y condiciones de frontera periódicas.

Las investigaciones actuales han llevado a que las ecuaciones no lineales con coeficientes variables pueden describir la situación física en consideración mucho mejor que la equivalente con coeficientes constantes (David et al. [9] (1987)). De hecho, efectos tales como la tensión superficial en general varía con la temperatura, y de aquí que sea válido suponer una dependencia temporal en los coeficientes en la ecuación GKPI. En algunos casos, suponer un

fondo constante tampoco es una situación física suficientemente real. Motivado por estas razones físicas, en años recientes, se han propuesto varios modelos que no suponen coeficientes constantes, tales como los obtenidos en los trabajos de David et al. [9] (1987), Lü y Xie [35] (2010), Sun y Tam [44] (2011), Wang et al. [46] (2018) y Yomba [52] (2004).

Por ejemplo, David et al. [9] presentaron una generalización de la ecuación KP introduciendo otros términos y permitiendo que algunos coeficientes puedan variar en el tiempo y en el espacio, lo cual, en general, supone un modelo más cercano a la realidad física. Para deducir este modelo los autores consideraron un canal con una variación lo suficientemente arbitraria, tanto en el ancho como en la profundidad, la cual puede ser descrita por una relación dada $\Xi(x_1, x_2, x_3) = 0$. Suponen además que el canal contiene un fluido ideal homogéneo no viscoso, con densidad constante ρ .

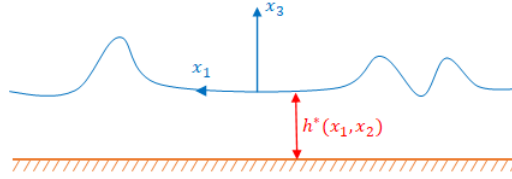


Figura 1.1: Una onda propagándose en el canal de ancho y profundidad variable.

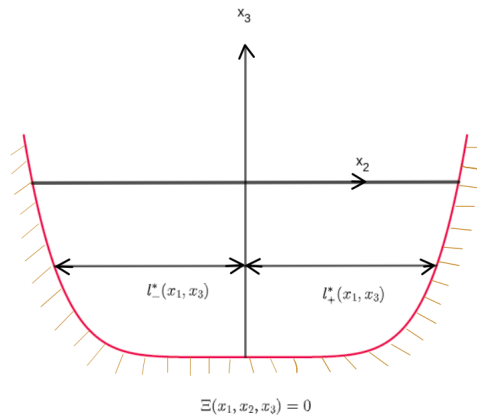


Figura 1.2: Corte transversal del canal.

En las Figuras 1.1 y 1.2, $h^*(x_1, x_2)$ representa la profundidad del canal, medida desde la superficie material no perturbada y $l_-^*(x_1, x_3)$ y $l_+^*(x_1, x_3)$ representan el ancho del canal medido a partir de un eje vertical. La onda se desplaza en la dirección de x_1 .

En Clarkson [8, Eq. 1.4a] se hace una análisis detallado del modelo deducido por David [9],

$$\begin{aligned} \left(v_\tau + \frac{3}{2}\gamma h^{-3/2}(\tau)vv_x + \frac{1}{6}\alpha h^{1/2}(\tau)v_{xxx} \right)_x + \frac{1}{2}\beta h^{1/2}(\tau)v_{yy} \\ + \beta h^{1/2}A_0(y, \tau)v_{xy} + M_1(y, \tau)v_x + M_2(y, \tau)v_{xx} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde

$$\begin{aligned} A_0(y, \tau) &= - \int_{\tau_0}^{\tau} h^{1/2}(s) \left\{ \frac{1}{2} \frac{h_1(s)}{h(s)} - C_y(y, s) + C_y(y, \tau) \right\} ds, \\ M_1(y, \tau) &= \frac{1}{4h(\tau)} \frac{dh}{d\tau} + \frac{1}{2}\beta h^{1/2}(\tau)A_{0,y}(y, \tau), \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} M_2(y, \tau) &= \frac{1}{2}\beta h^{1/2}(\tau)A_0^2(y, \tau) + \gamma h^{-1/2}(\tau) \int_{-h(\tau)}^0 \phi(y, z, \tau) d\tau \\ &\quad - C_\tau(y, \tau) \int_{\tau_0}^{\tau} h^{-1/2}(s) d\tau, \end{aligned}$$

con α , β y γ_0 constantes. Las expresiones $h(\tau)$ y $h_1(\tau)$ se relacionan con la profundidad, $C(y, \tau)$ con el ancho y $\phi(y, z, \tau)$ con la vorticidad (ver Clarkson [8, Eq. 1.4a-1.4d]).

Con la sustitución

$$v(x, y, \tau) = h^2 u(x, y, t), \quad t = \int_{\tau_0}^{\tau} h^{1/2}(s) d\tau, \quad \alpha = 6, \quad \gamma = 2/3,$$

Clarkson transforma el modelo de David et al. [9, Ecs. 2.27-2.29], en otra ecuación que de forma general puede ser escrita como,

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + a(y, t)u_x + b(y, t)u_y + c(y, t)u_{yy} + d(y, t)u_{xy} + e(y, t)u_{xx} = 0, \quad (1.4)$$

donde a, b, c, d, e son funciones suficientemente diferenciables. Además demuestran que (1.4) se puede transformar en una ecuación KP

$$(U_T + UU_X + U_{XXX})_X + 3\sigma^2 U_{YY} = 0,$$

mediante una transformación de la forma

$$u(x, y, t) = A(x, y, t)U(X(x, y, t), Y(x, y, t), T(x, y, t)),$$

si y solo si a, b, c, d, e satisfacen el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} a_t + 2a^2 + da_y - \frac{1}{2}c_y e_y - ce_{yy} &= 0 \\ c_t + 4ac - 2cd_y + dc_y &= 0 \\ 2b - c_y &= 0, \end{aligned}$$

siempre que $c \neq 0$ (ver Clarkson [8, Lemm. 3.1]).

Es importante destacar que el modelo (1.4) se reduce a la clásica KP con $a = b = d = e = 0$ y $c = \pm 1$.

En el artículo de Wang et al. [46] del 2016, aparece otra generalización del modelo KP clásico,

$$(u_t + g(t)(6uu_x + u_{xxx}) + 6f(t)g(t)u)_x + h(t)u_{yy} = f'(t) + 12g(t)f^2(t). \quad (1.5)$$

Otro modelo con condiciones dependientes de la variable temporal t , que genera interés es el propuesto por Sun [44] en el 2011,

$$(u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} + l(t)u + q(t)u_x + n(t)u_y)_x + m(t)u_{yy} = 0. \quad (1.6)$$

Este modelo genera también casos particulares conocidos como la KdV cilíndrica (cKdV), con $f(t) = 6$, $g(t) = 1$, $q(t) = m(t) = n(t) = 0$ y $l(t) = \frac{1}{2t}$, es decir,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{2t}u = 0.$$

La KP clásica se recupera con $f(t) = 6$, $g(t) = 1$, $l(t) = q(t) = n(t) = 0$, y $m(t) = \sigma^2$,

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy} = 0.$$

La KP cilíndrica (cKP) se obtiene con $f(t) = 6$, $g(t) = 1$, $l(t) = \frac{1}{2t}$, $q(t) = n(t) = 0$, $m(t) = \frac{3\sigma^2}{t^2}$.

De la variante de Clarkson, también se pueden deducir la ecuación cilíndrica KdV (cKdV) y la ecuación cilíndrica KP (cKP).

El otro modelo que se pretende destacar es el modelo de Lü y Xie [35]. En realidad este modelo es una simplificación del caso más general planteado por Tian y Gao [45]. En efecto, ellos plantean una ecuación suficientemente general en la cual los coeficientes dependen de las dos variables espaciales y la variable temporal. En este artículo, usando una expansión truncada de Painlevé, estudian las condiciones suficientes para la completa integrabilidad del modelo

$$(u_t + a(x, y, t)u + b(x, y, t)u_x + c(x, y, t)uu_x + d(x, y, t)u_{xxx})_x + k(x, y, t)u_{yy} = e(x, y, t), \quad (1.7)$$

donde $c(x, y, t) \neq 0$, $k(x, y, t) \neq 0$ y $d(x, y, t) \neq 0$.

El modelo de Lü y Xie [35], está dado en la forma

$$(v_t + \mu_1(t)vv_x + \mu_2(t)v_{xxx} + \mu_3(t)v)_x + \mu_4(t)v_{yy} = 0, \quad (1.8)$$

donde $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$ y $\mu_4(t)$ son linealmente dependientes (ver por ejemplo Li et al. [32], y Lü y Xie [35]) con $\mu_1 \neq 0$ y $\mu_2 \neq 0$.

Con el fin de simplificar (1.8), se puede introducir la siguiente transformación

$$v(x, y, t) = e^{-\int \mu_3(t) dt} u(x, y, t), \quad p(t) = -\mu_4(t), \\ f(t) = \mu_1(t)e^{-\int \mu_3(t) dt}, \quad g(t) = \mu_2(t),$$

con la cual la ecuación (1.8) se convierte en

$$(u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx})_x - p(t)u_{yy} = 0, \quad (1.9)$$

o equivalentemente,

$$u_{tx} + f(t)u_x^2 + f(t)uu_{xx} + g(t)u_{xxx} - p(t)u_{yy} = 0, \quad (1.10)$$

donde $f(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$ y $p(t) \neq 0$ son linealmente dependientes.

En este trabajo se aborda una ecuación asociada al modelo de Lü y Xie. En efecto, en lugar de considerar la ecuación (1.9) o (1.10), el estudio de buena colocación local será realizado al problema de Cauchy asociado a la ecuación

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} - p(t)\partial_x^{-1}u_{yy} = 0. \quad (1.11)$$

De nuevo $f(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$ y $p(t) \neq 0$ se suponen linealmente dependientes. Aquí las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $p(t)$ representan las coeficientes de no linealidad, dispersión y perturbación de la onda a lo largo de la dirección y , respectivamente. Además de lo anterior, en este trabajo se supondrá que $f(t)$, $g(t)$ y $p(t)$ son funciones continuas y positivas. La función escalar u representa la amplitud de una onda larga en un fluido bidimensional con topografía variable y, posiblemente, un flujo turbulento en el fondo (Jia et al. [21] y Wu [50]). A partir de ahora, la ecuación (1.11) será llamada la ecuación GKPI (KPI generalizada).

Es importante notar que en el plano $\mathbb{R}^2$, la ecuación (1.11) es equivalente a la ecuación (1.9), si se buscan soluciones que decaen en el infinito, por ejemplo, si las soluciones van a pertenecer a un espacio de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^2)$. Sin embargo en el caso periódico, el cual es el objetivo del presente trabajo, se tiene que la ecuación (1.11) implica naturalmente la ecuación (1.9), al calcular en (1.11) la derivada con respecto a x y aprovechando las condiciones de frontera periódicas, pero en contraste la ecuación (1.9) no implica la ecuación (1.11), en el caso periódico. Adicionalmente, el modelo GKPI se reduce de forma exacta a la ecuación KPI con $f(t) = \alpha_1$, $g(t) = \alpha_2$ y $p(t) = \alpha_3$, lo cual muestra que el modelo GKPI es de hecho una generalización del clásico modelo KPI.

En esta tesis doctoral, haciendo uso de la teoría de semigrupos, la teoría cuasilineal de Kato y algunos resultados de perturbación, se demuestra en el capítulo 3 la buena colocación local del problema de Cauchy asociado a la ecuación (1.11), en el caso de condiciones frontera espaciales periódicas. Se presenta además una propuesta numérica basada en elementos finitos, para la aproximación de la ecuación KPI y la ecuación GKPI sobre regiones rectangulares planares, y esta propuesta se logra adaptar para el caso periódico. Es importante mencionar que en una amplia búsqueda bibliográfica no se encontró un planteamiento numérico basado en elementos finitos para la ecuación KPI, como la hecha en este documento, y esto crea un punto de partida para posteriores investigaciones. Tampoco hay evidencia que la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación GKPI con coeficientes variables haya sido abordado antes en algún trabajo.

Para realizar el estudio numérico, se usarán las librerías del proyecto FEniCS

(Finite Elements nurtured in Computer Science), el cual es una plataforma de cálculo de código abierto creada para aproximar las soluciones de problemas de valor de frontera asociados a ecuaciones diferenciales parciales escrita para C++ y Python. Es además un sistema multiplataforma que puede ser usado incluso en un computador portátil. FEniCS fue lanzado en la Universidad de Chicago en 2003 y desde esa época ha venido creciendo con apoyo de programadores de todo el mundo. Para este trabajo se va a usar este software por su gran versatilidad y por las librerías adicionales que tiene a su disposición, tales como, Matplotlib¹, Numpy², Scipy³, Sympy⁴, por mencionar algunas de ellas (para más detalles se puede consultar a Langtangen y Logg [31], y Scott [41]).

Este trabajo está dividido en cinco partes. En el primer capítulo, se presenta una visión general sobre el problema de la investigación. En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico en el cual se incluye una breve introducción a la teoría de semigrupos §2.1, un resumen de la teoría cuasilineal de Kato §2.2, se presentan los espacios de Sobolev de tipo periódicos §2.3, y una breve introducción a la teoría de los elementos finitos y al software de las librerías del proyecto FEniCS §2.4. En el capítulo tres, se desarrollan los resultados principales analíticos de este trabajo, en el cual se retoman las ideas desarrolladas en el capítulo dos. Se considera aquí el problema de Cauchy asociado a la ecuación tipo GKPI con coeficientes variables considerada, en el régimen periódico, y se demuestran su buena colocación local y una ley de conservación. Estos son los resultados analíticos principales del trabajo. En el capítulo cuarto, se presenta una propuesta numérica basada en elementos finitos, para la discretización espacial y un método implícito para la discretización temporal, como estrategia para solución numérica de la ecuación KPI y la ecuación GKPI. También se analiza la razón de convergencia en el tiempo y en el espacio del método numérico planteado. Se propone además una variante de este esquema, que permite el manejo de condiciones de frontera espaciales periódicas, y con el cual se mejoran significativamente (en cuanto a tiempo de cómputo y convergencia) los resultados iniciales acerca de la propagación de solitones de la ecuación GKPI. Esta propuesta constituye el aporte más importante del presente trabajo desde el punto de vista numérico.

¹<https://matplotlib.org/>.

²<https://numpy.org/>.

³<https://www.scipy.org/>.

⁴<https://www.sympy.org/es/>.

Adicionalmente se desarrolla una corta reflexión sobre las dificultades encontradas en la parte numérica y con el fin de hacer el trabajo más completo, en los apéndices se transcriben dos códigos escritos en FEniCS/Python usados para realizar los experimentos numéricos con dos de los solitones modelados sobre una región rectangular, y uno escrito en Wolfram Mathematica, que se usó para hacer validaciones de los resultados generados por FEniCS. En la última parte del trabajo se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Teoría de semigrupos

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Para $t \geq 0$ y $x_0 \in \mathbb{C}^n$ se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & x(t) \in \mathbb{C}^n, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Es conocido que la solución al problema (2.1) es

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde la matriz exponencial está dada por

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

La serie definida anteriormente es absolutamente convergente debido a la desigualdad

$$\left\| \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^N \left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial compatible. Así,

$$\|e^{tA}\| \leq e^{|t|\|A\|}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Además la aplicación $t \mapsto e^{tA}$ es continua y

$$\begin{cases} e^{(t+s)A} &= e^{tA}e^{sA}, \quad \text{para } t, s \geq 0, \\ e^{0A} &= I, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde I es la matriz identidad. En notación funcional, $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $t \mapsto e^{tA}$, (2.2) se escribe

$$\begin{cases} T(s+t) &= T(s)T(t), \quad \text{para todo } t, s \geq 0 \\ T(0) &= I. \end{cases} \quad (2.3)$$

Las propiedades anteriores hacen de $(T(t))_{t \geq 0}$ una familia de operadores lineales acotados de $X = \mathbb{C}^n$ en sí mismo, se dice también $(T(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo¹ (monoparamétrico) sobre X . También se dice que $(e^{tA})_{t \geq 0}$ es el semigrupo generado por la matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. En el caso de las matrices, se tiene en realidad el grupo $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ generado por la matriz A .

Ejemplo 2.1.1. *El sistema lineal,*

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = bx(t) + ay(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

tiene la matriz de coeficientes A dada por,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

La matriz exponencial es,

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(at) \\ \sinh(at) & \cosh(bt) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Por tanto, la solución del PVI (problema de valor inicial)

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

es

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 = e^{at} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(at) \\ \sinh(at) & \cosh(bt) \end{pmatrix} \mathbf{x}(0), \quad (2.7)$$

¹También se le suele llamar sistema dinámico lineal y en este contexto al conjunto $\{T(t)x_0 : t \geq 0\}$ se le conoce como *órbita* de x_0 bajo $T(\cdot)$.

y el semigrupo asociado a la solución del PVI es:

$$T(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(at) \\ \sinh(at) & \cosh(bt) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Es claro que $T(0) = I$. Para probar la propiedad de semigrupo se tiene,

$$T(t+s) = e^{a(t+s)} \begin{pmatrix} \cosh(b(t+s)) & \sinh(a(t+s)) \\ \sinh(a(t+s)) & \cosh(b(t+s)) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= e^{at}e^{as} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(at) \\ \sinh(at) & \cosh(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(bs) & \sinh(as) \\ \sinh(as) & \cosh(bs) \end{pmatrix} \\ &= e^{a(t+s)} \begin{pmatrix} \cosh(b(t+s)) & \sinh(a(t+s)) \\ \sinh(a(t+s)) & \cosh(b(t+s)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Además, T es una función diferenciable y satisface el problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= AT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) &= I. \end{aligned}$$

En efecto, dado $t \geq 0$, se tiene

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-1} \|A\|^k}{|t|} = \frac{e^{|t|\|A\|} - 1}{|t|} - \|A\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Entonces, para todo $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} T(t) = AT(t).$$

Sea $S(t)$ otra solución de la ecuación diferencial anterior y sea $t > 0$. Se define ahora $Q_t(s) = T(s)S(t-s)$ para $s \in [0, t]$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}Q_t(s) &= \left(\frac{d}{ds}T(s) \right) S(t-s) + T(s) \left(\frac{d}{ds}S(t-s) \right) \\ &= AT(s)S(t-s) + T(s)(-A)S(t-s) = 0, \end{aligned}$$

puesto que A conmuta con $T(s) = e^{sA}$. Así $T(t) = Q_t(t) = Q_t(0) = S(t)$, para todo $t > 0$ y $T(0) = S(0) = I$. Se tiene entonces que $S = T$.

Además,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{tA}x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{tA}x - e^{0A}x}{t} = A.$$

El límite anterior existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

La teoría de semigrupos de operadores lineales es una generalización de las ideas anteriormente expuestas de problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de dimensión infinita. Todos los resultados de esta sección son tomados de Pazy [38, Caps. 1 y 2], donde se puede consultar su demostración.

Definición 2.1.2. Sea X un espacio de Banach. Una familia $(T(t))_{t \geq 0}$, de operadores lineales de X en sí mismo es un semigrupo de operadores lineales acotados sobre X si

(i) $T(0) = I$, donde I es el operador identidad en X .

(ii) $T(s+t) = T(t)T(s)$ para todo $s, t \geq 0$.

Observación 2.1.3. Algunos textos escriben familia monoparamétrica de semigrupos para hacer explícita la dependencia en un solo parámetro. La propiedad (ii), de la definición anterior, es conocida como la propiedad de semigrupo. Si la propiedad (ii) se cumple para $t, s \in \mathbb{R}$, la familia se denomina grupo (monoparamétrico).

Un semigrupo de operadores lineales, $T(t)$, es llamado *uniformemente continuo* si

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definición 2.1.4. Sea $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo. El generador infinitesimal de $T(t)$ es el operador $A : D(A) \rightarrow X$, definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} =: \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \text{para } x \in D(A),$$

donde su dominio está dado por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

El siguiente teorema establece una caracterización sobre el generador de un semigrupo uniformemente continuo.

Teorema 2.1.5. *Un operador lineal A es el generador de un semigrupo uniformemente continuo, si y solo si, A es un operador lineal acotado.*

Algunas propiedades que cumple el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo están enunciadas en el siguiente teorema,

Teorema 2.1.6. *Sea $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo uniforme continuo de operadores lineales acotados. Entonces*

- a) *Existe una constante ω tal que $\|T(t)\| < e^{\omega t}$.*
- b) *Existe un único operador lineal acotado A tal que $T(t) = e^{tA}$.*
- c) *El operador A es el generador infinitesimal de $T(t)$.*
- d) *La aplicación $t \rightarrow T(t)$ satisface*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \quad (2.11)$$

Más aún, todo semigrupo uniformemente continuo sobre un espacio de Banach X es de la forma $T(t) = e^{tA}$, para algún $A \in \mathcal{B}(X)$, donde $\mathcal{B}(Y, X)$ es el conjunto de los operadores lineales acotados de Y en X , con X y Y espacios de Banach. Cuando $X = Y$, se escribe $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$.

Observación 2.1.7. *Por el teorema anterior, el semigrupo del Ejemplo 2.1.1 es un semigrupo uniformemente continuo.*

Una categoría de semigrupos con condiciones menos restrictivas son los semigrupos fuertemente continuos.

Definición 2.1.8. *Un semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados sobre el espacio de Banach X se llama semigrupo fuertemente continuo, semigrupo de clase C_0 o simplemente un C_0 semigrupo, si*

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Las dos categorías de semigrupos están relacionadas por la siguiente implicación.

Observación 2.1.9. *Todo semigrupo uniformemente continuo es un C_0 semigrupo.*

Ejemplo 2.1.10. Sea X el espacio de las funciones acotadas uniformemente continuas en $\mathbb{R}$ con

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Es conocido que $(X; \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Considere la familia de operadores

$$(T(t)f)(s) := f(s+t), \quad f \in X, \quad t \geq 0.$$

Se tiene que $(T(0)f)(s) = f(s)$, y así $T(0) = I$. Además, $(T(t+h)f)(s) = f(t+h+s) = (T(t)T(h)f)(s)$, lo cual implica que $(T(t))_{t \geq 0}$ satisface la propiedad de semigrupo. Además,

$$\lim_{t \downarrow 0} (T(t)f)(s) = \lim_{t \downarrow 0} f(t+s) = f(s),$$

de lo cual se tiene que el semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo. Para hallar el generador infinitesimal se tiene

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(s+t) - f(s)}{t} = f'_+(s).$$

Finalmente, $D(A) = \{f \in X : f'_+ \text{ existe y } f'_+ \in X\} \subsetneq X$, y además $Af = f'_+$. Note que A es un operador lineal no acotado en X .

En el ejemplo que sigue se muestra una forma de construir un semigrupo de clase C_0 a partir de uno ya conocido.

Ejemplo 2.1.11. Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal en un espacio de Banach X . Defina $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$. Se tiene que $S(t)$ es un C_0 semigrupo con generador infinitesimal $A - \lambda I$. En efecto,

$$(i) \quad S(0) = e^{-\lambda 0}T(0) = I.$$

$$(ii) \quad S(s+t) = e^{-\lambda(s+t)}T(s+t) = e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}T(t)T(s) = S(t)S(s).$$

Además, puesto que

$$S(t) - I = e^{-\lambda t}T(t) - I = e^{-\lambda t}(T(t) - I) + (e^{-\lambda t} - 1)I,$$

entonces

$$\|(S(t) - I)x\| \leq \|e^{-\lambda t}(T(t) - I)x\| + \|(e^{-\lambda t} - 1)Ix\|.$$

Tomando el límite cuando $t \downarrow 0$ se tiene

$$\lim_{t \downarrow 0} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Por tanto $S(t)$ es un C_0 semigrupo.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left(\frac{S(t) - I}{t} \right) x &= \left(\frac{e^{-\lambda t} T(t) - I}{t} \right) x = \left(\frac{e^{-\lambda t} T(t) - e^{-\lambda t} I + e^{-\lambda t} I - I}{t} \right) x \\ &= \left(\frac{e^{-\lambda t} (T(t) - I)}{t} \right) x + \left(\frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} \right) Ix. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{S(t) - I}{t} \right) x = (A - \lambda I)x.$$

Esto demuestra que el generador infinitesimal de $S(t)$ es $A - \lambda I$.

Tal como en el caso de los semigrupos uniformemente continuos, los C_0 semigrupos también satisfacen un estimativo en su norma dado en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.12. *Sea $T(t)$ un C_0 semigrupo. Entonces existen constantes $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

Si $\omega = 0$, se dice que el semigrupo es uniformemente acotado. Si además $M = 1$, se dice que el semigrupo es un semigrupo contrativo.

En lo que sigue, $G(X, M, \beta)$ denota la colección de todos los operadores A tales que $-A$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$, el cual satisface $\|T(t)\| \leq M e^{\beta t}$. Si $A \in G(X, 1, 0)$, esto es, $-A$ genera un semigrupo de contracción, se dice que A es un operador *acretivo maximal* o *m-acretivo*. Si $A \in G(X, 1, \beta)$, esto es, $\|T(t)\| \leq e^{t\beta}$, para todo $t \in [0, \infty)$, se dice que A es *cuasi-acretivo maximal* o *cuasi-m-acretivo*.

En el caso de los espacios de Hilbert se tiene el siguiente teorema,

Teorema 2.1.13. *Sea X un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, entonces $A \in G(X, 1, \beta)$ si, y solo si, $(Ay, y)_X \geq -\beta \|y\|_X^2$, $\forall y \in D(A)$ y $(A + \lambda I)$ es sobreyectivo, para todo $\lambda > \beta$.*

Una importante característica de los semigrupos C_0 está dada en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.14. Sean $T(t)$ un semigrupo C_0 , A su generador infinitesimal y X un espacio de Banach. Entonces

a) Para $x \in X$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x.$$

b) Para $x \in X$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ y

$$A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x.$$

c) Para $x \in X$, $T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) Para $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x \, d\tau.$$

Definición 2.1.15. Sean X, Y espacios de Banach y $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un operador. Se dice que A es cerrado si dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ que satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y \in Y$, se tiene que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

El siguiente resultado da una importante característica sobre el dominio $D(A)$, de un operador lineal el cual es el generador infinitesimal de semigrupo fuertemente continuo.

Teorema 2.1.16. Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$ entonces $D(A)$, el dominio de A , es denso en el espacio de Banach X y A es un operador cerrado.

Observación 2.1.17. Si A es acotado, entonces también es cerrado. El recíproco, en general, no es cierto. Sin embargo, si $D(A) = X$, entonces A es acotado si, y solo si, es cerrado. En particular, si X es de dimensión finita todo operador lineal es acotado.

Teorema 2.1.18. Si A es el generador de un C_0 semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, entonces A es cerrado.

Se tiene además que el generador infinitesimal caracteriza completamente al semigrupo. En efecto,

Teorema 2.1.19. Sean $(T(t))_{t \geq 0}$ y $(S(t))_{t \geq 0}$ dos semigrupos con generadores infinitesimales A y B , respectivamente. Entonces $A = B$ si, y solo si, $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Sea X un espacio de Banach y X^* su dual. El valor de $x^* \in X^*$ en $x \in X$ se denota por $\langle x^*, x \rangle$ o por $\langle x, x^* \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad entre X y X^* . Para cada $x \in X$ se define el conjunto de dualidad por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \text{ y } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, para todo $x \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\langle f, x \rangle = \|x\|$ y $\|f\| = 1$. Luego $x^* = \|x\| f$ satisface $\langle x^*, x \rangle = \|x\| \langle f, x \rangle = \|x\|^2$ y $\|x\| = \|x^*\|$. Por tanto, para todo $x \in X$, $F(x) \neq \emptyset$. Aquí $\|x\| = \|x\|_X$ y $\|x^*\| = \|x^*\|_{X^*}$.

Definición 2.1.20. Un operador lineal A es disipativo si para cada $x \in D(A)$, existe un $x^* \in F(x)$ tal que $\Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Observación 2.1.21. En la definición anterior y en los resultados posteriores, $\Re z$ representa la parte real del número complejo z .

Ejemplo 2.1.22. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, con $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Si $\lambda_j \leq 0$, $j = 1, \dots, n$ entonces $x \rightarrow Ax$ es un operador disipativo puesto que $\langle Ax, x \rangle = (Ax, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq 0$, donde $(\cdot, \cdot)$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1.23. Considere el espacio de Hilbert $H = L^2([0, 1] : \mathbb{R})$ con el producto escalar usual, el operador $A(f) = \frac{d}{dx}f$ y $D(A) = \{f \in H^1([0, 1] : \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$. Si $f \in D(A)$, entonces

$$\begin{aligned} \Re \langle Af, f \rangle &= \langle Af, f \rangle = \int_0^1 f(x) \frac{d}{dx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} (f(x))^2 dx = -\frac{1}{2} (f(0))^2 \end{aligned}$$

Esto implica que el operador A es disipativo en el espacio $H = L^2([0, 1] : \mathbb{R})$.

El siguiente resultado es una importante caracterización para un operador disipativo.

Teorema 2.1.24. *Un operador lineal A es disipativo si, y solo si,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \text{para todo } x \in D(A) \text{ y } \lambda > 0.$$

Ahora, si $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es un operador lineal sobre el espacio de Banach X (no necesariamente acotado), el conjunto resolvente $\rho(A)$ de A es el conjunto de los números complejos λ para los cuales $\lambda I - A$ es invertible, esto es, $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado en el espacio X . La familia $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ de operadores lineales acotados es llamado *el resolvente de A* . Se define el *espectro* de A como el conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, es decir, el conjunto de puntos que no están en el resolvente de A . En particular los autovalores de A son puntos espectrales.

Observación 2.1.25. *El término resolvente hace referencia a que la ecuación $Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = y$ tiene solución $x = (A - \lambda I)^{-1}y$.*

Observación 2.1.26. *Si $X = \mathbb{C}$, todo operador lineal A es de la forma $Ax = \alpha x$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Así $R(\lambda : A) = (\lambda - \alpha I)^{-1}$. Se tiene entonces que el generador infinitesimal del semigrupo $T(t) = e^{\alpha t}$ está dado por*

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{\alpha t}x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{\alpha t} - 1}{t}x = \alpha x.$$

Teorema 2.1.27 (Lumer-Phillips). *Sea A un operador lineal con dominio denso $D(A)$ en X , con X un espacio de Banach. Entonces*

- a) *Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$ tal que el rango, $R(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ es X , entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X .*
- b) *Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X , entonces $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo. Además, para cada $x \in D(A)$ y cada $x^* \in F(x)$, $\Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

En el caso de un espacio de Hilbert se tiene lo siguiente,

Definición 2.1.28. *Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)$. Un operador lineal A en H es simétrico si $\overline{D(A)} = H$ y $A \subset A^*$, esto es, $(Ax, y) = (x, Ay)$ para todo $x, y \in D(A)$. El operador A es autoadjunto si $A = A^*$. Un operador acotado U sobre H es unitario si $U^* = U^{-1}$.*

Note que,

Observación 2.1.29. *Todo operador adjunto es cerrado, y un operador U es unitario si, y solo si, $R(U) = H$ y U es una isometría.*

El siguiente teorema debido a Stone será fundamental en la demostración de buena colocación local del resultado considerado en el presente trabajo.

Teorema 2.1.30 (Stone). *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H si, y solo si, el operador iA es autoadjunto.*

2.1.1 Algunos resultados de teoría de perturbación de operadores lineales

En esta sección se mostrará que si A es un operador en el espacio de Banach X y además es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo, entonces a partir de éste, es posible generar otros semigrupos sumando algún operador lineal, es decir, perturbando el operador inicial.

En el siguiente teorema se muestra el caso cuando el operador A es perturbado por un operador lineal acotado.

Teorema 2.1.31. *Sean X un espacio de Banach y A el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(t)$ en X , el cual satisface $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Si B es un operador lineal acotado en X , entonces $A + B$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $S(t)$ en X que satisface*

$$\|S(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}.$$

Definición 2.1.32. *Un operador lineal disipativo A el cual satisface $R(I - A) = X$, es llamado m disipativo (o disipativo maximal).*

Si A es disipativo, también lo es μA para todo $\mu > 0$. Por tanto, si A es m disipativo entonces $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

Teorema 2.1.33. *Sean A y B operadores lineales en X tales que $D(A) \subset D(B)$, y $A + tB$ es disipativo para $0 \leq t \leq 1$. Si*

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|, \quad \text{para } x \in D(A),$$

donde $a \leq \alpha < 1$, $\beta > 0$ y para algún $t_0 \in [0, 1]$, $A + t_0 B$ es m disipativo, entonces $A + tB$ es m disipativo para todo $t \in [0, 1]$.

Finalmente se tiene que,

Corolario 2.1.34. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones. Suponga que B es un operador lineal disipativo, $D(A) \subset D(B)$ y*

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|, \quad \text{para } x \in D(A),$$

donde $0 \leq \alpha < 1$ y $\beta \geq 0$. Entonces $A + B$ es el generador de un C_0 semigrupo de contracciones.

2.2 Elementos de la teoría ecuaciones de diferenciales cuasilineales

En esta sección se presentará una breve descripción de la teoría de ecuaciones diferenciales cuasilineales de Kato (ver por ejemplo Iorio [15, Cap. III], Iorio [16], Isaza et al [18], T. Kato [25, 26, 27] y Pazy [38, §6.4]). Esta teoría será fundamental para probar la buena colocación local del problema de Cauchy asociado a la ecuación GKPI (1.11), en el caso periódico el cual es uno de los principales objetivos del presente trabajo.

Sean X y Y espacios de Banach con inclusión densa y continua, $Y \hookrightarrow X$, con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$. Esto es, Y es un subespacio denso en X y existe una constante C tal que

$$\|w\|_X \leq C \|w\|_Y.$$

Considere ahora la ecuación de evolución cuasilineal,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t, u)u = 0, & \text{para } 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

donde $A(t, u)$ es un operador lineal de Y en X , para $t \in [0, T]$ y todo u .

La idea fundamental del trabajo de Kato es la siguiente. Sea $v \in C([0, T] : X)$ fijo y considere el problema de valor inicial lineal,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t, v)u = 0, & \text{para } 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Se busca una solución integral $u \in C([0, T] : X)$ de (2.13), para cada $v \in C([0, T] : X)$ fijo. Una vez obtenida la solución se define la aplicación $v \rightarrow u = F(v)$ de $C([0, T] : X)$ en sí mismo y se establece que el punto fijo de esta aplicación corresponde a su vez a la solución integral de (2.12). Para realizar esto, se suponen sobre $A(t, u)$ las siguientes condiciones.

(H₁) Existe una isometría sobreyectiva $S : Y \rightarrow X$.

(H₂) Sea A una función de $[0, T] \times W$ en $G(X, 1, \beta)$, donde W es una bola abierta en Y , centrada en u_0 , β es un número real positivo, tal que $-A(t, v)$ es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo en X el cual satisface,

$$\left\| e^{-sA(t,v)} \right\|_X \leq e^{\beta s}, \quad s \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad v \in W.$$

(H₃) Para todo $(t, v) \in [0, T] \times W$, el operador,

$$B(t, v) := SA(t, v)S^{-1} - A(t, v) \in \mathcal{B}(X),$$

esto es, existe λ_1 tal que $\|B(t, v)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \lambda_1$, donde λ_1 es una constante.

Observación 2.2.1. *Es importante notar que, $x \in X \subset D(A(t, v))$ si, y solo si, $S^{-1}x \in D(A(t, v))$, con $A(t, v)S^{-1}x \in Y$.*

(H₄) Para todo $(t, v) \in [0, T] \times W$, se tiene que $A(t, v) \in \mathcal{B}(Y, X)$ ($Y \subset D(A(t, v))$ y $A(t, v)|_Y \in \mathcal{B}(Y, X)$). Para todo $v \in W$, la aplicación $t \mapsto A(t, v) : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(Y, X)$ es continua. Para todo $t \in [0, T]$, la aplicación $v \mapsto A(t, v)$ es Lipschitz continua, es decir,

$$\|A(t, v_1) - A(t, v_2)\|_{\mathcal{B}(Y, X)} \leq \mu \|v_1 - v_2\|,$$

donde μ es una constante positiva.

(H₅) Sea u_0 el centro de la bola W . Entonces $A(t, v)u_0 \in Y$, para todo $(t, v) \in [0, T] \times W$. Además,

$$\|A(t, v)u_0\|_Y \leq \lambda_2, \quad t \in [0, T], \quad v \in W,$$

donde λ_2 es una constante positiva.

Observación 2.2.2. *La condición (H₅) es trivialmente satisfecha si $u_0 = 0$.*

Con las condiciones anteriores se tiene el resultado siguiente:

Teorema 2.2.3. *Bajo las hipótesis (H₁)-(H₅), dado $u_0 \in Y$, existe $0 < T' < T$ tal que (2.12) tiene una única solución clásica $u \in C([0, T']; Y) \cap C^1([0, T']; X)$. Además, la aplicación dato-solución $u_0 \mapsto u$ es continua de Y en $C([0, T']; Y)$.*

Para una demostración de este resultado ver Iorio y Nunes [16, Cap. III.3], Kato [25, Teo. 6, §7] y Pazy [38, Teo. VI. 4.5].

2.3 Espacios de Sobolev de tipo periódico

En esta sección se va a definir los espacios de Sobolev de tipo periódico. Para una descripción más detallada de estos espacios puede consultarse por ejemplo Iorio [17, Cap. 3] y Linares [34], para el caso $n = 1$. Para el caso n dimensional se recomienda consultar el artículo de Bényi y Oh [3].

Sean $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ el toro n dimensional y $\mathcal{P} = C_{per}^\infty(\mathbb{T}^n)$ el espacio de las funciones periódicas infinitamente diferenciables $\phi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$, donde $\phi_k \rightarrow \phi$ en $\mathcal{P}$ si $\partial^\alpha \phi_k \rightarrow \partial^\alpha \phi$ uniformemente para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Una distribución periódica $\Psi \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ es un funcional lineal continuo

$$\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Definición 2.3.1. Una sucesión $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}'$ converge a $\Psi \in \mathcal{P}'$ si

$$\langle \Psi_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle \Psi, \varphi \rangle \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

En este caso se escribe $\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{P}'} \Psi$. Se dice también que Ψ_n converge a Ψ en el sentido de las distribuciones.

Se tiene en particular,

Ejemplo 2.3.2. Sea $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{T}^n)$. Esta función define una distribución periódica Ψ_f (conocida como distribución regular) por la fórmula,

$$\langle \Psi_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

La conocida distribución Delta definida por $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{P}$, no es regular. En efecto, sean $f \in \mathcal{C}_{per}$ y $u_n(x) = \left(\frac{1+\cos(x)}{2}\right)^n \rightrightarrows 0$ en $[-\pi, \pi]$. Si δ fuera regular se tendría,

$$1 = u_n(0) = \langle \delta, u_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) u_n(x) dx = 0.$$

Para $k \in \mathbb{Z}^n$, se define el k -ésimo coeficiente de Fourier de Ψ como

$$\hat{\Psi}_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \Psi, e^{-ik \cdot x} \rangle.$$

Teorema 2.3.3. Si $\Psi \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$, la serie de Fourier

$$\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\Psi}_k e^{-ik \cdot x},$$

converge a Ψ , en el sentido de las distribuciones.

Ejemplo 2.3.4. Para la distribución δ se tiene que $\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.3.5. La derivada de una distribución $\Psi \in \mathcal{P}'$ está dada por,

$$\langle D^\alpha \Psi, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \Psi, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P},$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Ejemplo 2.3.6. Las derivadas de la distribución δ_a (delta de Dirac concentrada en a), $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$, son dadas por

$$\langle \delta_a^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle \delta_a, \varphi^{(j)} \rangle = (-1)^j \varphi^{(j)}(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

En particular,

$$\langle \delta^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \varphi^{(j)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Ejemplo 2.3.7. Considere la función

$$u(x) = \begin{cases} |x|, & -\pi < x < \pi, \\ u(x + 2\pi) = u(x). \end{cases}$$

La derivada de u en $\mathcal{P}'$ se puede calcular como

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{-\pi}^{\pi} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\pi}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{\pi} x \varphi'(x) dx \\ &= x \varphi(x) \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 (-1) \varphi(x) dx - x \varphi(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (1) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^0 (-1) \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} (1) \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

A g también se le acostumbra llamar derivada distribucional o débil de u .

Definición 2.3.8. Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev denotado por $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}^n)$ es el conjunto de distribuciones periódicas $f \in \mathcal{P}'$ tal que

$$\|f\|_s^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}|^2 < \infty,$$

con producto interno

$$(f, g)_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s \widehat{f} \overline{\widehat{g}}.$$

Observación 2.3.9. $H_{per}^s(\mathbb{T}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno anteriormente definido. En el caso $s = 0$ se obtiene un espacio de Hilbert el cual es isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{T}^n)$. En lo sucesivo $H_{per}^0(\mathbb{T}^n)$ será denotado por $L_{per}^2(\mathbb{T}^n)$. En algunos textos usan $(1 + |k|^{2s})$ en lugar de $(1 + |k|^2)^s$, lo cual induce una norma equivalente con la norma $\|\cdot\|_s$ definida atrás.

Ejemplo 2.3.10. Como $\hat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}$, para todo k entonces,

$$\|\delta\|_s^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s.$$

La serie anterior converge para $2s < -1$, esto es, $\delta \in H_{per}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$, para todo $\varepsilon > 0$.

Ejemplo 2.3.11. Considere la función

$$H(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases} \quad H(x + 2\pi) = H(x),$$

Se tiene que,

$$\hat{H}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, \\ \frac{-i}{\pi(2k+1)}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\|H\|_s^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^s \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2.$$

La serie converge para $2s - 2 < -1$. Así $H(x) \in H_{per}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$, para todo $\varepsilon > 0$.

Como en el caso de los espacios de Sobolev $H^s(\Omega)$ o $W^{p,s}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, los espacios $H_{per}^s(\mathbb{T}^n)$ también pueden ser caracterizados vía densidad.

Teorema 2.3.12. $H_{per}^s(\mathbb{T}^n)$ es la completación de $C_{per}^\infty(\mathbb{T}^n)$ con respecto a la norma de $H_{per}^s(\mathbb{T}^n)$.

Observación 2.3.13. En el resto de la sección se escribirá H_{per}^s en lugar de $H_{per}^s(\mathbb{T}^n)$.

Para $s \geq r$ se tiene,

$$0 \leq \frac{(1 + |k|)^r}{(1 + |k|)^s} \leq 1,$$

entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_r^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^r |\widehat{f}|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{(1 + |k|)^r (1 + |k|^2)^s}{(1 + |k|^2)^s} |\widehat{f}|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}|^2 = \|f\|_s^2.\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores muestran el siguiente resultado.

Teorema 2.3.14. *Sean $s, r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Entonces H_{per}^s está continua y densamente incluido en H_{per}^r y*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \quad \text{para todo } f \in H_{per}^s.$$

Esto es, la inclusión $j : H_{per}^s \rightarrow H_{per}^r$ es densa y continua.

La propiedad $\widehat{D^\alpha f}(k) = (ik)^\alpha \widehat{f}(k)$ (ver Linares [33, Cap. 1] y la identidad de Parseval (ver Iorio [17, Pág. 109])

$$\|\widehat{f}\|_{l^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|_{L^2}^2,$$

implican el siguiente teorema.

Teorema 2.3.15. *Si s es un entero positivo, entonces H_{per}^s coincide con el espacio de las funciones $f \in L_{per}^2$ cuyas derivadas (en el sentido de $\mathcal{P}'$), $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq s$, pertenecen a L_{per}^2 . Además, las normas $\|f\|_s$ y*

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_0^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Esto es, existen constantes $C_1(s, n)$ y $C_2(s, n)$ tales que

$$C_1(s, n) \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_0^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_s \leq C_2(s, n) \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Ejemplo 2.3.16. *La función u del Ejemplo 2.3.7 pertenece a $H_{per}^1([-\pi, \pi])$, puesto que tanto u como u' pertenecen a $L^2([-\pi, \pi])$; sin embargo no pertenece a $H_{per}^2([-\pi, \pi])$ porque $(u')'$ no existe. De acuerdo al Teorema 2.3.15, u también pertenece a H_{per}^1 .*

Sea $f \in H_{per}^s$. Para $s > n/2$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}|(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{(1 + |k|^2)^{s/2}}{(1 + |k|^2)^{s/2}} |\widehat{f}| \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^{-s} \right)^{1/2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^{-s} \right)^{1/2} \|f\|_s. \end{aligned}$$

Así $(\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n} \in l_1$. Además,

$$|f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^{-s} \right)^{1/2} \|f\|_s, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{T}^n.$$

Usando lo anterior, el siguiente teorema, conocido como el *Lema de Sobolev*, establece condiciones sobre la *regularidad* de las funciones en H_{per}^s .

Teorema 2.3.17 (Lema de Sobolev). *Si $s > n/2$, entonces H_{per}^s está continua y densamente contenido en C_{per} y*

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l_1} \leq C \|f\|_s, \quad \text{para todo } f \in H_{per}^s.$$

Definición 2.3.18. Sean $f, g \in H_{per}^s$, $s > \frac{n}{2}$. Usando el Lema de Sobolev se define el producto $fg \in \mathcal{P}'$ por la fórmula

$$\langle fg, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)g(x)\varphi(x) dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{P}.$$

La definición de producto va a convertir a H_{per}^s , $s > \frac{n}{2}$ en un *Álgebra de Banach*.

Definición 2.3.19. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach X junto con un producto de $X \times X$ en X dado por $(x, y) \mapsto xy$ tal que para todo $x, y, z \in X$ y $s, r \in \mathbb{C}$,

- (a) $(xy)z = x(yz)$,
- (b) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,
- (c) $(x + y)z = xz + yz$ y $x(y + z) = xy + xz$,
- (d) $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Teorema 2.3.20. *Si $s > n/2$, el espacio de Sobolev H_{per}^s es un álgebra de Banach con respecto al producto de funciones. Esto es, si $f, g \in H_{per}^s$, entonces $fg \in H_{per}^s$ y se tiene que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s.$$

El resultado anterior es de gran utilidad en el estudio de las ecuaciones de evolución no lineales, porque permite saber cuándo un producto de funciones pertenece a un determinado espacio de Sobolev, lo cual es importante para establecer los llamados estimativos bilineales. Aunque en el Teorema 2.3.20 aparece una constante C_s en la norma de producto, aún se le acostumbra llamar álgebra de Banach.

2.4 Aproximación numérica de ecuaciones diferenciales: método de elementos finitos

Como se mencionó en la introducción, unos de los aportes de este trabajo es presentar una propuesta numérica, basada en la técnica de los elementos finitos, para la solución numérica de la ecuación KPI y la ecuación GKPI, sobre un dominio rectangular. Es importante notar que no se encontró evidencias bibliográficas de un tratamiento numérico similar, para ecuaciones diferenciales de tipo KP.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio bidimensional acotado con frontera poligonal $\Gamma = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La idea básica del método de elementos finitos (FEM por su sigla en inglés) es construir espacios de funciones polinomiales a trozos que son fáciles de implementar en un computador para aproximar funciones más generales. (Ver Larson y Bengzon [29] y Larsson y Thomée [30]). Para fijar ideas se considera el problema modelo

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f, \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \Gamma = \partial\Omega, \quad (2.14)$$

donde se supondrá que $a = a(x)$ es una función suave con $a(x) \geq a_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$ y además $f \in L^2(\Omega)$. La formulación variacional del problema (2.14) es la siguiente: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.15)$$

donde

$$a(v, w) = \int_{\Omega} a \nabla v \cdot \nabla w \, dx \quad \text{y} \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Es bien conocido (por ejemplo Larson y Thomée [30, §3.5]) que este problema tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.4.1 Malla y triangulación

Sea $\mathcal{T}_h = \{K\}$ un conjunto de triángulos cerrados K , una *triangulación* de Ω , los cuales dividen a Ω en triángulos tales que,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \quad h_K = \text{diam}(K), \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K. \quad (2.16)$$

El valor h en (2.16) es conocido como el *tamaño global de la malla*.

Los vértices P de los triángulos $K \in \mathcal{T}_h$ son llamados los nodos de la triangulación $\mathcal{T}_h$. Un requisito para una triangulación es que la intersección de cada dos triángulos es un vértice, una arista o un conjunto vacío, y que ningún nodo de un triángulo esté sobre la arista de otro triángulo². En la Figura 2.1 se representa una triangulación conforme, los triángulos comparten una arista o un nodo. En la Figura 2.2 se presenta una triangulación no conforme porque el nodo de un elemento está sobre la arista de otro elemento (Ver Larson y Thomée [30, pág. 58]).

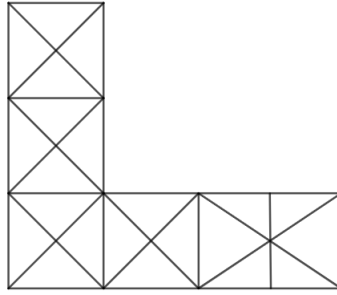


Figura 2.1: Triangulación conforme.

Sobre la triangulación $\mathcal{T}_h$ se define además el espacio

$$S_h := \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : v \text{ es lineal en } K \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sobre } \Gamma\}.$$

Es posible verificar que $S_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Con esta notación, la aproximación en elementos finitos del problema (2.15) está dado por: Encontrar $u_h \in S_h$ tal que

²Esta restricción no aparece cuando se usan algoritmos adaptativos con refinamiento de malla.

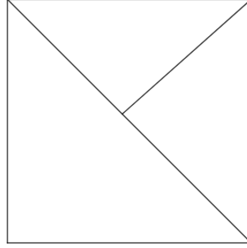


Figura 2.2: Triangulación no conforme.

$$a(u_h, \xi) = (f, \xi), \quad \xi \in S_h. \quad (2.17)$$

Se define el espacio de funciones lineales a trozos sobre $\mathcal{T}_h$, como el espacio de las funciones lineales a trozos $v \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ tales que al restringir a cada triángulo $K \in \mathcal{T}_h$ son polinomios lineales. Así,

$$v|_K(x, y) = ax + by + c,$$

donde a , b y c son constantes apropiadas y dependen de cada triángulo. Estas constantes son los grados de libertad para la función definida sobre cada triángulo. En este caso se acostumbra hablar de *elementos lagrangianos de grado 1* o simplemente elementos $\mathbb{P}_1$.

En el párrafo anterior se definió apenas un tipo de elemento finito, el cual se va a utilizar en la formulación numérica propuesta en este trabajo. Existe una gran cantidad de tipos de elementos finitos que se adaptan bien a distintas necesidades numéricas³.

Sean $\{N_i\}_{i=1}^{M_h}$ donde M_h el conjunto de nodos interiores de Ω y S_h el espacio de las funciones lineales a trozos sobre $\mathcal{T}_h$. Una función en S_h está completamente determinada por sus valores en los puntos N_j . El conjunto de funciones pirámide, funciones de forma o funciones sombrero (por la forma

³En el archivo electrónico *Periodic table of the finite elements*, SIAM News, 2014 de D. Arnold y A. Logg hay una descripción detallada de algunos tipos de elementos finitos y sus características. También se puede consultar los elementos finitos disponibles en FEniCS en el capítulo 3 del libro *The FEniCS Book* de A. Logg, K-A. Mardal y G. Wells. Editorial Springer, 2012.

que tienen) $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h$, definidos por

$$\varphi_i(N_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

constituyen una base para S_h . Si $v \in S_h$, entonces

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{M_h} v_i \varphi_i(x, y),$$

donde $v_i = v(N_i)$ son los valores nodales de v .

En la Figura 2.3 se representa una de estas funciones. Los puntos en la frontera son considerados una vez se tenga establecidas las condiciones de frontera del problema.

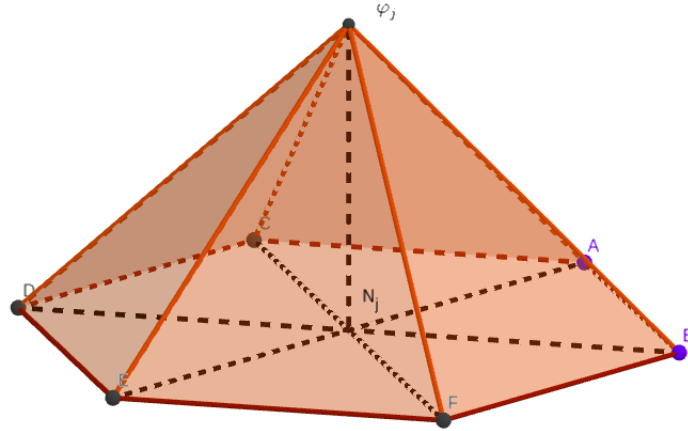


Figura 2.3: Función pirámide o de forma φ_j . La función φ_j vale uno en el nodo N_j y vale cero en los otros nodos.

2.4.2 Interpolación Lineal

Sea $\tilde{S}_h$ las funciones lineales continuas a trozos sobre la triangulación $\mathcal{T}_h$, las cuales no tienen que satisfacer la condición de frontera del modelo (2.14). Sea $\{N_j\}_{j=1}^{N_h}$ el conjunto de todos los nodos de $\mathcal{T}_h$, incluídos aquellos que están en Γ , con $M_h + 1 \leq j \leq N_h$, y $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h}$ las correspondientes funciones

pirámide. Se define el operador de interpolación

$$I_h : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow \tilde{S}_h$$

por medio de

$$(I_h v)(x, y) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i(x, y), \quad \text{donde } v_i = v(N_i). \quad (2.18)$$

El interpolante global, definido en (2.18), coincide con la función v en los nodos N_i . En efecto,

$$(I_h v)(N_i) = v(N_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, N_h.$$

Además, cuando u se anula en Γ , se tiene que $I_h u$ pertenece al espacio S_h definido antes.

Usando el operador I_h se obtienen los siguientes estimativos para funciones lineales a trozos (ver Scott [41, Cap. 4]):

$$\|I_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C |u|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.19)$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C |u|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.20)$$

y

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.21)$$

De forma general, esto es, si las funciones de forma generan una aproximación de orden m , los estimativos correspondientes son,

$$\|I_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)},$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)},$$

y

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^m |u|_{H^m(\Omega)}.$$

Finalmente se tiene ([30, Teo. 5.4]), para las funciones lineales a trozos, que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

donde u y u_h son las soluciones de (2.15) y (2.17), respectivamente.

Se verificará numéricamente que el último estimativo se satisface para el esquema numérico propuesto en este trabajo.

Para realizar el estudio numérico, se usará la librería FEniCS (Finite Elements nurtured in Computer Science), el cual es una plataforma de cálculo de código abierto creada para aproximar las soluciones de problemas de valor de frontera asociados a ecuaciones diferenciales parciales a través de la estrategia de elementos finitos, escrita para C++ y Python. Es además un sistema multiplataforma que puede ser usado incluso en un computador portátil. Dolfin (Dynamic Object-oriented Library for FINite element computation) es la interface de alta eficiencia computacional en C++/Python de FEniCS. Este es el núcleo que permite la integración con el resto de las componentes FEniCS implementados en Python y los combina con la versatilidad de C++. FEniCS fue lanzado en la Universidad de Chicago en 2003 y desde esa época ha venido creciendo con apoyo de programadores de todo el mundo. Para este trabajo se va a usar la versión de este software para Python por su gran versatilidad y por las librerías adicionales que tiene a su disposición:

- *Numpy*: Abreviatura de *Numerical Python*. Es una librería para el lenguaje de programación Python que da soporte para crear arreglos de vectores y matrices multidimensionales, junto con una gran colección de funciones matemáticas de alto nivel para operar con ellas. Puede realizar, entre otras cosas, operaciones matemáticas y lógicas sobre los arreglos, puede calcular transformada de Fourier y operaciones relacionadas con álgebra lineal.
- *Matplotlib*: Es una librería para la generación de gráficos, diagramas de barras y animaciones a partir de datos contenidos en listas o arrays en el lenguaje de programación Python y su extensión matemática NumPy.
- *Scipy*: Es una librería libre y de código abierto para Python. Se compone de herramientas y algoritmos matemáticos. SciPy contiene módulos para optimización, álgebra lineal, integración, interpolación, funciones especiales, FFT (del inglés Fast Fourier Transform), procesamiento de señales y de imágenes, resolución de ODEs y otras tareas para la ciencia e ingeniería.
- *Sympy*: Es una librería escrita en Python cuyo objetivo es reunir todas las características de un sistema de álgebra computacional (CAS), ser fácilmente extensible y mantener el código tan simple como sea posible.

FEniCS cuenta además con una pequeña librería llamada *mshr* para generar mallas en 2D y 3D con geometrías sencillas y mediante operaciones Booleanas. A continuación se presenta una lista resumida de las capacidades y algunos ejemplos de esta herramienta.

Geometrías primitivas:

- rectangle/box.
- circle-ellipse/sphere.
- cylinder/cone.
- polygon/polyhedron.
- ...

Operaciones con las geometrías primitivas:

- union: denotada por el signo +.
- difference: denotada por el signo -.
- intersection: denotada por el signo *.
- CSGRotation.
- CSGScaling.
- CSGTranslation.

CSG es el acrónimo de *Constructive Solid Geometry*.

Con pocas líneas en Python, usando la librería FEniCS, es posible disponer de las siguientes cuatro regiones malladas por triángulos (ver Figura 2.4).

```
from dolfin import *
from mshr import *
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt

domain=Polygon([Point(1.0,0.0),Point(2.0,1.0),Point(1.0,2.0),\
Point(0.0,1.0)])
mesh1 = generate_mesh(domain,10)
plot(mesh1)
plt.show()

C1=Circle(Point(0.0,0.0),3,30)
C2=Circle(Point(1.0,1.0),1,20)
domain=C1-C2
```

```

mesh2 = generate_mesh(domain,10)
plot(mesh2)
plt.show()

domain=Rectangle(Point(0.0,0.0),Point(1.0,1.0))
mesh3 = generate_mesh(domain, 20)
plot(mesh3)
plt.show()

R=Rectangle(Point(0.0,0.0),Point(1.0,1.0))
C=Circle(Point(0.5,1.0),0.5)
domain=R*C
mesh4 = generate_mesh(domain,10)
plot(mesh4)
plt.show()

```

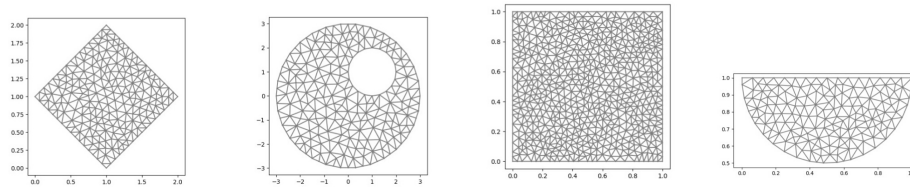


Figura 2.4: Ejemplos de mallas 2D hechas con mshr con diferencia e intersección de conjuntos.

Además se tiene las transformaciones de rotación y proporción (ver Figura 2.5):

```

from dolfin import *
from mshr import *
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import pi

square=Rectangle(Point(0.,0.), Point(1.,1.))
diamond=CSGRotation(square, pi/4)
square2=(square,0.5)

```

```

mesh1=generate_mesh(square,10)
plot(mesh1)
plt.show()CSGScaling

mesh2=generate_mesh(diamond,10)
plot(mesh2)
plt.show()

mesh3=generate_mesh(square2,10)
plot(mesh3)
plt.show()

```

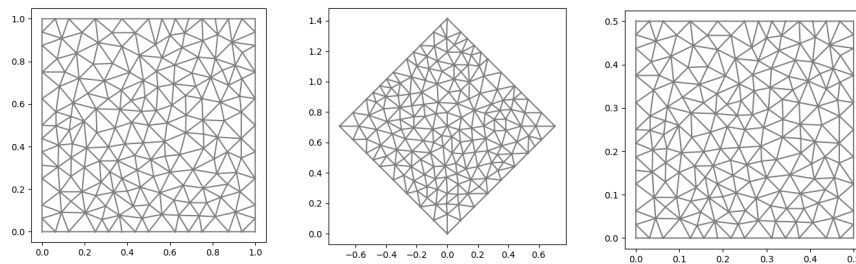


Figura 2.5: Ejemplos de mallas 2D hechas con mshr usando CSGRotation y CSGScaling.

Para crear un cono, una esfera y la unión de estas dos superficies es suficiente las siguientes líneas de Python (ver Figura 2.6), en la cual se usan las librerías del proyecto FEniCS. En el caso 3D, las mallas están formadas por tetrahedros.

```

from dolfin import *
from mshr import *
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt

sphere = Sphere(dolfin.Point(0, 0, 0), 0.5)
cone   = Cylinder(Point(0, 0, 0), Point(0, 0, -1), .35, .1)
sample = cone + sphere

```

```

mesh1 = generate_mesh(cone, 30)
plot(mesh1)
plt.show()

mesh2 = generate_mesh(sphere, 30)
plot(mesh2)
plt.show()

mesh3 = generate_mesh(sample, 30)
plot(mesh3)
plt.show()

```

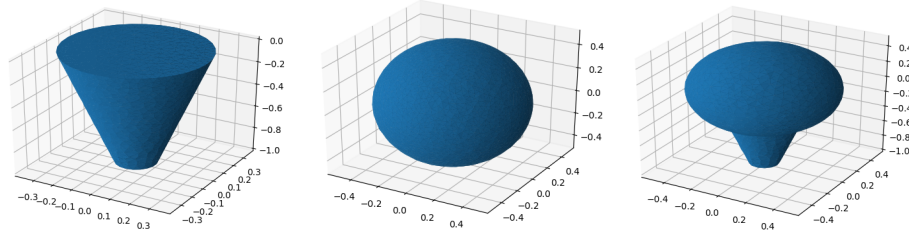


Figura 2.6: Ejemplos de mallas 3D hechas con mshr usando unión de conjuntos.

Se presenta a continuación una breve descripción de las dos rutinas para resolver sistemas de ecuaciones lineales que son mencionados a lo largo del presente documento. El método Gmres se usa en el Ejemplo 2.4.1 y la rutina MUMPS es el método que se usó en todos los cálculos numéricos del Capítulo 4. En la sección 4.5 se hace una discusión de los resultados numéricos del presente trabajo.

• **Gmres (generalized minimum residual method):** Considere el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$, donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es una matriz no singular y $b \in \mathbb{R}$. La solución exacta del sistema es $\bar{x} = A^{-1}b$. Si $x_0 = 0$, entonces $r_0 = b$. El método Gmres, el cual pertenece a la familia de métodos iterativos, consiste en aproximar la solución al sistema en cada iteración i , en cierto subespacio llamado *subespacio de Krylov* $\mathcal{K}^i(r_0, A)$ dado por,

$$\mathcal{K}^i(r_0, A) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{i-1}r_0\},$$

el cual depende de la matriz A , del vector b y de la iteración i . Se empieza

con una solución aproximada $x_0 \neq \bar{x}$ con residuo $r_0 := b - Ax_0 \neq 0$, y se genera una sucesión de aproximaciones x_i a $\bar{x}$ con las siguientes propiedades:

$$x_i \in x_0 + \mathcal{K}^i(r_0, A),$$

$$\|b - Ax_i\|_2 = \min\{\|b - Au\|_2 : u \in x_0 + \mathcal{K}^i(r_0, A)\}.$$

Se tiene la condición de recurrencia $\mathcal{K}^{i-1}(r_0, A) \subset \mathcal{K}^i(r_0, A)$.

En cada iteración, Gmres calcula una base ortonormal de $\mathcal{K}^i$ a partir de la base obtenida en la iteración anterior y encuentra una aproximación a la solución en ese espacio.

Cuando los recursos del sistema por el uso de GMRES se ven limitados, en este caso una variante del método puede ayudar a disminuir esta pérdida. La variante se denota por GMRES(k) (Restarted GMRES). La estrategia es establecer un criterio para truncar el método GMRES en un número k establecido, si al llegar a este número de iteraciones no se obtiene la solución, la aproximación x_k obtenida es usada como dato inicial para las siguientes k iteraciones. El método se repite hasta que la norma del residuo sea tan pequeña como el usuario desee (ver Baker et al. [2], Stoer y Bulirsch [42, Cap. 8]).

• **MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel Solver⁴):** Es una rutina para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada poco densa (sparse) que puede ser simétrica, no simétrica, simétrica y definida positiva. MUMPS implementa un método directo el cual utiliza la factorización

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. Si la matriz es simétrica entonces la factorización es

$$A = LDL^T$$

donde D es una matriz con un bloque diagonal con bloques de orden 1 o 2 en la diagonal.

El uso de MUMPS en un archivo de FEniCS fue así:

⁴<http://mumps.enseeiht.fr/>

```

J=derivative(F,w)
problem =NonlinearVariationalProblem(F, w, bcs, J)
solver= NonlinearVariationalSolver(problem)
prm= solver.parameters
prm['newton_solver']['linear_solver']='mumps'

```

FEniCS dispone de una sofisticada librería de rutinas para resolver sistemas lineales y de preconditionadores asociados. En las Tablas 2.1 y 2.2 se presentan los más usuales.

Nombre	Método
bicgstab	Biconjugate gradient stabilized method
cg	Conjugate gradient method
gmres	Generalized minimal residual method
default	default linear solver
mumps	MULTifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver
minres	Minimal residual method
petsc	PETSc built in LU solver
richardson	Richardson method
superlu_dist	Parallel SuperLU
tfqmr	Transpose-free quasi-minimal residual method
umfpack	UMFPACK

Tabla 2.1: Tabla de rutinas para resolver sistemas lineales disponibles en FEniCS. Tomada de Langtangen y Logg [31, pág. 118].

Nombre	Método
icc	Incomplete Cholesky factorization
ilu	Incomplete LU factorization
petsc_amg	PETSc algebraic multigrid
sor	Successive over-relaxation

Tabla 2.2: Tabla de preconditionadores disponibles en FEniCS. Tomada de Langtangen y Logg [31, pág. 118].

Como se mencionó antes, FEniCS cuenta con un sencillo mallador pero sólo permite la generación de mallas si se dispone de geometrías simples y no se necesita refinar la malla en alguna parte específica de la región

que se requiere mallar. Existe una alternativa para generar mallas cuando las geometrías son complicadas o cuando es necesario realizar refinamientos localizados. El software Gmsh permite realizar ambas tareas. Una vez generada la malla, desde una terminal, se exporta la malla usando la orden: `dolphin-convert mimalla.msh mimalla.xml` que convierte la malla de un formato generado por Gmsh, a un formato que luego puede ser usado en un archivo Python para FEniCS. Para hacer la importación de la malla se escribe la orden `mesh=Mesh('mimalla.xml')`, en el archivo de FEniCS. A continuación se escribe una breve descripción de las características de Gmsh.

- **Gmsh:** Es un software libre para generar mallados bidimensionales y tridimensionales automáticamente. Gmsh presenta cuatro módulos: geométrico, mallador, solver y postprocesado. El módulo geométrico (de diseño), permite dibujar visualmente una figura aunque con capacidades limitadas, a pesar de poder definir las paramétricamente. El módulo de mallado se apoya en las definiciones geométricas (incluidas las longitudes características) para crear mallados en una, dos y tres dimensiones, con elementos de formas variadas (líneas, triángulos, tetraedros, prismas, hexaedros y pirámides) y eligiendo el tipo de algoritmo de mallado. El módulo solver (de resolución) implica la llamada a ciertos sistemas externos con los que interactuar (al momento programadas por el usuario). El módulo de postprocesado (ligado a la visualización) incluye gran número de operaciones diferenciales, vectoriales, herramientas para trabajar con números complejos y funcionalidades para extraer datos de las distribuciones de datos de entrada. Gmsh también permite mallar regiones que han sido trazadas con un software CAD (Computer Aided Design). La Figura 2.7 es una muestra de las capacidades de Gmsh.

En este trabajo se usó la versión 2019.2.0.dev0 de FEniCS, la cual es la última versión estable que ha sido lanzada y la versión de Python 3.8.5, la cual fue lanzada el 28 de julio de 2020. La arquitectura del computador portátil que se usó en los cálculos numéricos es *Intel®Core i5-1035G4 CPU@1.10GHz* × 8 de 64 bits, 12 MB de RAM y con el sistema operativo *Ubuntu 20.04.1 LTS*.

Para realizar los cálculos simbólicos y pruebas numéricas para confrontar con los experimentos realizados en FEniCS, se va usar en varias ocasiones las rutinas `DSolve` y `NDSolve` y las subrutinas adicionales de Wolfram Mathematica, como por ejemplo

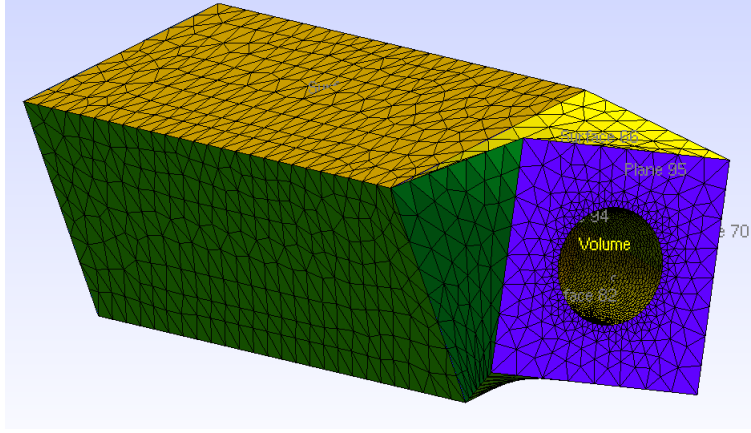


Figura 2.7: Figura generada con Gmsh.

```
Method->{"PDEDiscretization"->{"MethodOfLines",
"SpatialDiscretization"->{"TensorProductGrid",
"MinPoints"->250}}}
```

Ejemplo 2.4.1. Para aclarar las ideas anteriores, considere el problema de Poisson con condición de frontera Dirichlet nula, sobre una región poligonal $\Omega \in \mathbb{R}^2$. El problema es

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.22)$$

con $f \in L^2$.

La formulación débil o variacional de (2.22) es la siguiente: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v), \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{y} \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Es bien conocido que el problema anterior tiene solución única en $H_0^1(\Omega)$, vía el Teorema de Lax-Milgram (ver Larson y Tomée [30, §3.5]).

La idea principal del método de los elementos finitos es buscar una aproximación a la solución de la formulación débil del problema de estudio.

Para el modelo (2.22), sea S_h el subespacio de $\widetilde{S}_h$ dado por

$$S_h(\Omega) = \{v \in \widetilde{S}_h(\Omega) : v|_{\Omega} = 0\}.$$

La aproximación en elementos finitos del modelo (2.22) es la siguiente: Hallar $u_h \in S_h$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{para todo } v \in S_h. \quad (2.23)$$

Puesto que las funciones φ_i , $i = 1, \dots, M_h$ constituyen una base para S_h se tiene que

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{M_h} \alpha_i \varphi_i(x),$$

donde α_i son constantes que deben ser determinadas. De (2.23) se tiene que

$$\sum_{k=1}^{M_h} \alpha_k \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, M_h\}. \quad (2.24)$$

Se define la matriz de rigidez $A \in M_{M_h \times M_h}(\mathbb{R})$, donde $A = (a_{ij})$, mediante la expresión

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i \, dx,$$

y $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{M_h})^t$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{M_h})^t$ (vector de carga) son vectores columna en $\mathbb{R}^{M_h}$ donde

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx.$$

Por tanto, resolver la ecuación (2.24) es equivalente a resolver el sistema lineal

$$A\xi = \mathbf{b}.$$

La matriz de rigidez resulta ser simétrica, puesto que $a_{ij} = a_{ji}$ y definida positiva. Sea $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \xi^T A \xi &= \sum_{i,j=1}^{M_h} \xi_i a_{ij} \xi_j = \sum_{i,j=1}^{M_h} \xi_i \xi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^{M_h} \xi_i \varphi_i \right) \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^{M_h} \xi_j \varphi_j \right) = \left\| \nabla \left(\sum_{j=1}^{M_h} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De la teoría se espera que para una malla que satisface las condiciones del problema, si se toma h cada vez más pequeño, se va a mejorar la aproximación, pero va a aumentar el tamaño de la matriz, puesto que se aumenta el valor de M_h . Dada la forma que tiene la matriz, se recomienda usar en FEniCS, un método iterativo como Gmres (Generalized Minimal Residual Method) descrito anteriormente para resolver el sistema lineal asociado de forma eficiente (ver Galvis [11, §2.3]). Puesto que en el problema en mención la matriz obtenida es definida positiva se recomienda utilizar el método iterativo conocido como gradiente conjugado (CG).

Al resolver el sistema $A\xi = b$ se obtiene el valor de las incógnitas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{M_h}$, las coordenadas de u_h respecto a la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M_h}$, y así se obtiene u_h .

Para terminar el ejemplo se considera el caso particular del conjunto $\Omega = [0, 1]^2$ donde $f = -6$. En la Figura 2.8 se observa la solución del problema de Poisson, usando FEniCS con dos triangulaciones distintas.

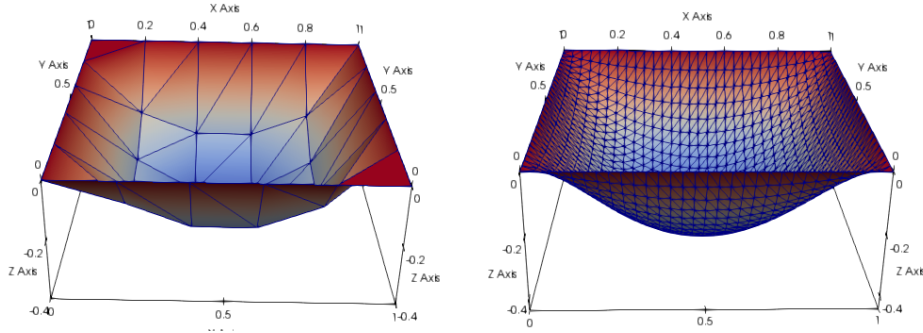


Figura 2.8: Izquierda solución con 50 elementos y un $h \approx 0.28284271$. Derecha solución con 1800 elementos y un $h \approx 0.04714045$.

Se observa que el refinamiento (es decir el aumento del número de triángulo en la región) permite mejorar la calidad de la aproximación.

En los dos capítulos siguientes se utiliza la teoría establecida hasta aquí para probar la buena colocación de la ecuación GKPI con frontera periódica (capítulo 3) y se presenta una propuesta numérica basada en elementos finitos, para la discretización espacial, y el método del trapecio, para la discretización temporal, que permite aproximar la soluciones numéricas sobre una región rectangular arbitraria y también para el caso de frontera periódica (capítulo 4).

Capítulo 3

Buena colocación local para una ecuación KP con coeficientes variables

En el presente capítulo se va a presentar el resultado teórico principal del trabajo: la buena colocación local del problema de Cauchy asociado a la ecuación GKPI (1.11) sobre $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. El resultado es una aplicación de la teoría de semigrupos, principalmente del Teorema de Stone en Pazy [38, I.10.8], los espacios de Sobolev de tipo periódicos en Benyi y Oh [3], Iorio [17, Caps. 3-4], Linares [34] y de la Teoría Cuasilineal de Tosio Kato [24, 25, 26, 27] y Pazy [38, §6.4].

En lo que resta de este trabajo se van a seguir las ideas y la notación de los artículos Iorio y Leite [16] e Isaza et al [18].

3.1 Notación

Con el fin de facilitar la lectura de este capítulo, se va a repetir parte de la notación incluida en la página 10 de este documento.

- $C_\pi^\infty(\mathbb{R}^2) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : u(x + 2\pi, y) = u(x, y + 2\pi) = u(x, y)\}.$
- $M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2) = \{u \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^2) : \int_0^{2\pi} u(x, y) dx = 0, y \in [0, 2\pi]\}.$
- $(u, v)_s = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (1 + m^2 + n^2)^s \hat{u}(m, n) \bar{\hat{v}}(m, n), u, v \in C_\pi^\infty.$

- $\|u\|_s = (u, u)_s^{1/2}$, con $u \in C_\pi^\infty$.
- $X_{\pi, x} = \overline{M_\pi^\infty}^{\|\cdot\|_{\pi, x}}$ denota la clausura de $M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\pi, x}$, donde $\|u\|_{\pi, x} = \left(\sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} (1 + m^2) |\hat{u}(m, n)|^2 \right)^{1/2}$.
- $H_\pi^s(\mathbb{R}^2) = \overline{C_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\|\cdot\|_s}$ es el conjunto de las distribuciones periódicas u tales que $\|u\|_s^2 = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} (1 + m^2 + n^2)^s |\hat{u}(m, n)|^2 < \infty$.
- $X_\pi^s(\mathbb{R}^2) = \overline{M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\|\cdot\|_s}$ denota la clausura de $M_\pi^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_s$. Note que $X_\pi^0 = L_\pi^2$.

3.2 Buena colocación del problema de Cauchy

El problema de Cauchy asociado a la ecuación GKPI (1.11) con coeficientes dependientes del tiempo que se considera en el presente trabajo está dado por

$$\begin{cases} u_t + f(t)uu_x + g(t)\partial_x^3 u - p(t)\partial_x^{-1}u_{yy} = 0, & t \in (0, T], \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $f(t)$, $g(t)$ y $p(t)$ son funciones continuas y positivas en $[0, T]$, con $g(t) \geq 1$ y $p(t) \geq p_0 > 0$ para todo $t \in [0, T]$.

A continuación se va establecer el resultado teórico principal de este trabajo, el cual se demostrará durante el desarrollo de la presente sección.

Teorema 3.2.1. *Para cada $u_0 \in X_\pi^s$, $s \geq 3$, existe $T' = T'(\|u_0\|_s)$, $0 < T' \leq T$, tal que (3.1) tiene una única solución clásica $u \in C([0, T']; X_\pi^s) \cap C^1([0, T']; X_\pi^0)$. Además, la aplicación dato-solución $u_0 \mapsto u$ es continua de X_π^s en $C([0, T']; X_\pi^s)$.*

En esta sección se van a desarrollar varios lemas con el fin de verificar la hipótesis (H_1) – (H_5) , de la sección 2.2, y así demostrar el Teorema (3.2.1), usando el Teorema 2.2.3.

Se buscará una solución $u = u(x, y, t)$, del problema de Cauchy, periódica en las variables x, y , la cual satisface además la condición

$$\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = 0, \quad (3.2)$$

para todo $y \in [0, 2\pi]$ y todo $t \geq 0$ (por ejemplo, Iorio [16] y Bourgain [5]).

Observe que derivando con respecto a x la primera ecuación de (3.1) se obtiene

$$\left(u_t + \frac{f(t)}{2}(u^2)_x + g(t)\partial_x^3 u \right)_x - p(t)\partial_{yy}u = 0. \quad (3.3)$$

Ahora, integrando (3.3) entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ con respecto a x y usando la periodicidad de u respecto a x se obtiene,

$$\left(\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx \right)_{yy} = 0. \quad (3.4)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = \alpha(t)y + \beta(t).$$

De la periodicidad de u , respecto a y , se concluye que $\alpha(t) = 0$. Así,

$$\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = \beta(t).$$

Ahora, integrando la expresión

$$u_t + \frac{f(t)}{2}(u^2)_x + g(t)\partial_x^3 u - p(t)\partial_x^{-1}\partial_{yy}u = 0,$$

sobre $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx dy + \frac{f(t)}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (u^2)_x dx dy \\ + g(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x^3 u dx dy - p(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{yy} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observe que, por la periodicidad de u , los términos segundo, tercero y cuarto de (3.5) son nulos. En cuanto al primer término, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx dy = \int_0^{2\pi} \beta'(t) dy = 2\pi\beta'(t) = 0.$$

Así, $\beta(t) = cte$. Se supondrá que $\beta(t) = 0$, porque en caso contrario, se redefine un problema nuevo con

$$u_1(x, y, t) = u(x, y, t) - \frac{\beta(0)}{2\pi}.$$

Todo lo anterior justifica la condición (3.2).

A fin de colocar la ecuación (3.1) en la forma necesaria para aplicar el Teorema 2.2.3, se definen los operadores

$$\begin{aligned} A_0(t)u &:= g(t)\partial_x^3 u - p(t)\partial_x^{-1} u_{yy}. \\ A_1(t, v)u &:= f(t)vu_x. \\ A(t, v)u &:= A_0(t)u + A_1(t, v)u. \end{aligned}$$

Así el problema de Cauchy (3.1) se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} u' + A(t, u)u = 0, & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Se procede ahora a tomar la transformada de Fourier de $A_0(t)u$. Observe que cuando $m \neq 0$, se tiene,

$$\begin{aligned} (A_0(t)u)^\wedge(m, n) &:= -im^3 g(t)\hat{u}(m, n) - ip(t)\frac{n^2}{m}\hat{u}(m, n), \\ &= -i \left(g(t)m^3 + p(t)\frac{n^2}{m} \right) \hat{u}(m, n), \end{aligned}$$

y además $(A_0(t)u)^\wedge(0, n) = 0$.

Para todo $t \in [0, T]$ y $m \neq 0$ se define,

$$D(A_0(t)) := \left\{ u \in X_\pi^0 : \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \left| m^3 + \frac{n^2}{m} \right|^2 |\hat{u}(m, n)|^2 < \infty \right\}$$

Observe que $|(A_0(t)u)^\wedge(m, n)|^2 \leq M^2 \left(m^3 + \frac{n^2}{m} \right)^2 |\hat{u}(m, n)|^2$, con $M = \max\{|g|_\infty, |p|_\infty\}$.

Observación 3.2.2. *Se puede notar que el dominio $D(A_0(t))$ es el mismo siempre que las funciones $g(t)$ y $p(t)$ sean continuas y positivas en $[0, T]$, con $g(t) \geq 1$ y $p(t) \geq p_0 > 0$ para todo $t \in [0, T]$.*

El operador $A_0(t)$ así definido satisface,

$$A_0(t) := D(A_0(t)) \subset X_\pi^0 \rightarrow X_\pi^0.$$

En lo que sigue del capítulo se va a aplicar el Teorema 2.2.3 con $X = X_\pi^0$, $Y = X_\pi^s$, $W = \{w \in X_\pi^s : \|w\|_s < r\}$ donde $r > 0$, al problema (3.6), para lo cual se irá verificando una a una las hipótesis $(H_1) - (H_5)$ de este resultado.

Lema 3.2.3. *El operador lineal $A_0(t)$, $t \in [0, T]$ es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de isometrías en X_π^0 .*

Demostración: Sea $u \in D(A_0(t))$, $t \in [0, T]$. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_x^3 u, u)_0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_x^3 u) u \, dx \, dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_x^2 u) (\partial_x u) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_x u) (\partial_x^2 u) \, dx \, dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u (\partial_x^3 u) \, dx \, dy = -(\partial_x^3 u, u)_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

y también

$$\begin{aligned} (\partial_x^{-1} u_{yy}, u)_0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x^{-1} u_{yy} u \, dy \, dx = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x^{-1} u_y u_y \, dy \, dx \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x^{-1} u_y \partial_x (\partial_x^{-1} u_y) \, dy \, dx = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x [(\partial_x^{-1} u_y)^2] \, dx \, dy = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Además, observe que $\overline{D(A_0(t))} = X_\pi^0 = L_\pi^0$, donde la adherencia se toma con respecto a la norma de L_π^2 . Puesto que $M_\pi^\infty \subset D(A_0(t)) \subset X_\pi^0$, y el espacio M_π^∞ es denso en $X_\pi^0 = L_\pi^2$. En consecuencia, el operador $A_0(t)$ es anti-simétrico, y así el operador $iA_0(t)$ es autoadjunto. Luego el Teorema de Stone (Pazy [38, I.10.8]) implica el resultado.

El siguiente es un lema técnico.

Lema 3.2.4. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall m, n$, $m \neq 0$, $M \geq 1$, se tiene*

$$m^2 \leq \varepsilon \frac{(m^4 + n^2)^2}{m^2} M + C(\varepsilon). \quad (3.9)$$

Demostración: La Desigualdad de Young con ε establece que si $a, b > 0$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$. Si se hace $a = |m|^3$ y $b = |m|$, entonces

$$m^4 \leq \varepsilon m^6 + C(\varepsilon) m^2 \leq \varepsilon (m^4 + n^2)^2 M + C(\varepsilon) m^2.$$

Por lo tanto,

$$m^2 \leq \varepsilon \frac{(m^4 + n^2)^2}{m^2} M + C(\varepsilon).$$

La primera hipótesis del Teorema 2.2.3 que se va a verificar es la condición (H_2) .

Lema 3.2.5. *Sea $s \geq 3$. Para todo $v \in Y$, el operador $-A(t, v) := -(A_0(t) + A_1(t, v)) : D(A_0(t)) \subset X \rightarrow X$ es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo en X tal que,*

$$\|e^{-sA(t, v)}\| \leq e^{\beta s}, \quad s \geq 0, \quad (3.10)$$

con $t \in [0, T]$ y $v \in W$ donde W es una bola abierta alrededor de u_0 , para todo $\beta = \beta_0(v) = c_s \|v\|_s$.

Demostración: Sean $v \in Y$ y $u \in X_{\pi, x} = D(A_1(t, v))$.

$$\begin{aligned} (A_1(t, v)u, u)_0 &\geq -\frac{1}{2} |f(t)|_\infty (\partial_x v, u^2)_0 \geq -\frac{1}{2} |f(t)|_\infty \|\partial_x v\|_{L_\infty} \|u\|_0^2 \\ &\geq -C_s \|v\|_s \|u\|_0^2. \end{aligned}$$

Si $\beta \geq \beta_0 = C_s \|v\|_s$, se tiene

$$((A_1(t, v) + \beta I)u, u)_0 \geq (-C_s \|v\|_s + \beta) \|u\|_0^2 \geq 0.$$

La norma $\|\cdot\|_{L_\infty}$ es calculada en las variables espaciales. De lo hecho antes se concluye que $-(A_1(t, v) + \beta I)$ es disipativo. Puesto que $A_0(t)$ es conservativo¹, entonces $-(A_0(t) + A_1(t, v) + \beta I)$ es también disipativo para $\beta \geq \beta_0(v)$. Además, para todo $u \in D(A_0(t))$,

$$\begin{aligned} \|-(A_1(t, v) + \beta I)u\|_0 &= \|f(t)v\partial_x u + \beta Iu\|_0 \leq |f|_\infty \|v\|_{L_\infty} \|\partial_x u\|_0 + \beta \|u\|_0 \\ &\leq C \|v\|_{L_\infty} \|\partial_x u\|_0 + \beta \|u\|_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Puesto que

$$\|\partial_x u\|_0^2 = \sum (\partial_x u)^\wedge(m, n) \overline{(\partial_x u)^\wedge(m, n)} = \sum m^2 |\hat{u}(m, n)|^2, \quad (3.12)$$

y además, para $m \neq 0$

$$\|A_0(t)u\|_0^2 \leq M^2 \left(m^3 + \frac{n^2}{m}\right)^2 |\hat{u}(m, n)|^2, \quad (3.13)$$

donde $M = \max\{|g|_\infty, |p|_\infty\}$, del estimativo del lema técnico (Lema 3.2.4) se obtiene,

¹ $iA_0(t)$ es autoadjunto o equivalentemente $(A_0(t)u, u)_0 = 0$

$$\|\partial_x u\|_0 \leq \varepsilon M \|A_0(t)u\|_0 + C(\varepsilon) \|u\|_0, \quad \forall u \in D(A_0(t)).$$

Si se define $\varepsilon = (2C \|v\|_\infty M)^{-1}$, se llega a

$$\begin{aligned} \|(A_1(t, v) + \beta I)u\|_0 &\leq C \|v\|_{L^\infty} (\varepsilon \|A_0(t)u\|_0 M + C(\varepsilon) \|u\|_0) + \beta \|u\|_0 \\ &\leq \frac{1}{2} \|A_0(t)u\|_0 + (CC(\varepsilon) \|v\|_0 + \beta) \|u\|_0. \end{aligned}$$

Si se usa ahora el resultado de perturbación de Pazy ([38, Cor. III. 3.3]), se concluye que, para todo $\beta \geq \beta_0(v)$, $-(A_0(t) + A_1(t, v) + \beta I) = -(A(t, v) + \beta I)$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X . Se tiene que $-A(t, v)$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo tal que

$$\|e^{-sA(t, v)}\| \leq e^{\beta s}, \quad s \geq 0.$$

El resultado anterior demuestra la condición (H_2) . Para probar las condiciones (H_1) y (H_3) se plantea el siguiente lema,

Lema 3.2.6. Sea $s \geq 3$ y $S = (1 - \Delta)^{s/2} : Y \rightarrow X$. Entonces S es un isomorfismo de Y en X , $t \in [0, T]$, y el operador

$$B(t, v) := SA(t, v)S^{-1} - A(t, v),$$

satisface

$$\|B(t, v)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \lambda \|v\|_Y,$$

$$\|B(t, v_1) - B(t, v_2)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \mu \|v_1 - v_2\|_Y,$$

para $v_1, v_2 \in W$, $t \in [0, T]$ donde $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ son constantes que dependen sólo de r .

Demostración: Si $u \in D(A_0(t))$ entonces, $(S^{-1}u)^\wedge(m, n) = (1 + m^2 + n^2)^{-s/2} \hat{u}(m, n)$. Así, para $m \neq 0$,

$$(A_0(t)S^{-1}u)^\wedge(m, n) = -i \left(g(t)m^3 + p(t)\frac{n^2}{m} \right) (1 + m^2 + n^2)^{-s/2} \hat{u}(m, n).$$

Por lo tanto,

$$\left| (A_0(t)S^{-1}u)^\wedge(m, n) \right| \leq |(A_0(t)u)^\wedge(m, n)|, \quad \text{puesto que } (1 + m^2 + n^2)^{-s/2} < 1.$$

Se concluye que $A_0(t)S^{-1} \in D(A_0(t))$. Ahora, para $m \neq 0$,

$$(A_1(t, v)u)^\wedge(m, n) = (f(t)v\partial_x u)^\wedge(m, n) = (f(t)\hat{v} * im\hat{u})(m', n'),$$

y así,

$$(A_1(t, v)S^{-1}u)^\wedge(m, n) = \sum_{m', n'} f(t)\hat{v}(m - m', n - n') \frac{im'\hat{u}(m', n')}{(1 + m^2 + n^2)^{s/2}}.$$

Cuando $m = 0$ se tiene, $\hat{u}(0, n) = 0$, $(S^{-1}u)^\wedge(0, n) = 0$, $(A_1(t, v)S^{-1}u)^\wedge(0, n) = 0$.

Para probar que $A_1(t, v) \in Y$, se observa lo siguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{m, n} (1 + m^2 + n^2)^{s/2} \left| [A_1(t, v)S^{-1}u]^\wedge(m, n) \right|^2 &= \\ \sum_{\substack{m, n \\ m \neq 0}} (1 + m^2 + n^2)^s \left| f(t) \sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} \frac{im'}{-i(g(t)m'^3 + p(t)\frac{n'^2}{m'})} \frac{-i(g(t)m'^3 + p(t)\frac{n'^2}{m'})}{(1 + m^2 + n^2)^{s/2}} \hat{u} \right|^2 & \\ \leq |f|_\infty \sum_{\substack{m, n \\ m \neq 0}} (1 + m^2 + n^2)^s \left(\sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} \hat{w}(m - m', n - n') \hat{G}(m', n') \right)^2, \end{aligned}$$

donde w y G son funciones cuyos coeficientes de Fourier son $\hat{w} = |\hat{v}(m, n)|$ y

$$\hat{G} = \begin{cases} \left| \frac{-i(g(t)m^3 + p(t)\frac{n^2}{m})}{(1 + m^2 + n^2)^{s/2}} \right| \hat{u}(m, n) & , \quad \text{si } m \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Se tiene que $G, w \in Y$. Puesto que $s \geq 3$, se obtiene,

$$\begin{aligned} |f|_\infty \sum_{\substack{m, n \\ m \neq 0}} (1 + m^2 + n^2)^s \left(\sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} \hat{w}(m - m', n - n') \hat{G}(m', n') \right)^2 \\ \leq |f|_\infty C_s \|w\|_s^2 \|G\|_s^2 < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A_1(t, v)S^{-1} \in Y$ y así $SA_1(t, v)S^{-1}$ está bien definido. Mostraremos

ahora que $B(t, v) = SA(t, v)S^{-1} - A(t, v) \in \mathcal{B}(X)$. Si $m \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left| ((SA(t, v)S^{-1} - A(t, v))u)^\wedge(m, n) \right| = \left| ((SA_1(t, v)S^{-1} - A_1(t, v))u)^\wedge(m, n) \right| \\
&= \left| f(t) \sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} [(1 + m^2 + n^2)^{s/2} - (1 + m'^2 + n'^2)^{s/2}] \widehat{v}(m - m', n - n') \right. \\
&\quad \left. (1 + m'^2 + n'^2)^{(1-s)/2} \widehat{u}(m', n') \frac{im}{(1 + m'^2 + n'^2)^{1/2}} \right| \\
&\leq C \sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} [(1 + m^2 + n^2)^{(s-1)/2} + (1 + m'^2 + n'^2)^{(s-1)/2}] (|m - m'| + |n - n'|) \\
&\quad |\widehat{v}(m - m', n - n')| (1 + m'^2 + n'^2)^{(1-s)/2} |\widehat{u}(m', n')| \\
&\leq C \sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} (1 + m^2 + n^2)^{(s-1)/2} (|m - m'| + |n - n'|) |\widehat{v}(m - m', n - n')| \\
&\quad (1 + m'^2 + n'^2)^{(1-s)/2} |\widehat{u}(m', n')| \\
&\quad + C \sum_{\substack{m', n' \\ m' \neq 0}} (|m - m'| + |n - n'|) |\widehat{v}(m - m', n - n')| |\widehat{u}(m', n')|.
\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores son una aplicación de la desigualdad del valor medio aplicado a la función $F(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{s/2}$, entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , y de la propiedad de convexidad de esta función.

Además, $[(SA(t, v)S^{-1} - A(t, v))u]^\wedge w(0, n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Considere ahora las funciones h y w , las cuales tienen como coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(m, n) &= (|m| + |n|) |\widehat{v}(m, n)| \\
\widehat{w}(m, n) &= |\widehat{u}(m, n)|,
\end{aligned}$$

y los operadores T_1 y T_2 dados por,

$$\begin{aligned}
T_1 w &= \Lambda^{s-1} M_h \Lambda^{1-s} w \\
T_2 w &= M_h w,
\end{aligned}$$

donde M_h designa el operador de multiplicación por h . Entonces,

$$\left| [(SA(t, v)S^{-1} - A(t, v))u]^\wedge(m, n) \right| \leq C |(T_1 w)^\wedge(m, n)| + C |(T_2 w)^\wedge(m, n)|.$$

De la previa desigualdad y puesto que $s \geq 3$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left\| [(SA(t, v)S^{-1} - A(t, v))u]^\wedge(m, n) \right\|_0 &\leq C \|(T_1 w)^\wedge(m, n)_0\| + C \|(T_2 w)^\wedge(m, n)\|_0 \\ &\leq C \left(\left\| \Lambda^{s-1} M_h \Lambda^{1-s} w \right\|_0 + \|M_h w\|_0 \right) \\ &\leq C \left\| M_h \Lambda^{1-s} w \right\|_{s-1} + C \|M_h w\|_0 \\ &\leq C \|h\|_{s-1} \left\| \Lambda^{1-s} w \right\|_{s-1} + C \|h\|_{L^\infty} \|w\|_0 \\ &\leq C \|\text{grad } v\|_{s-1} \|w\|_0 + C \|h\|_{s-1} \|u\|_0 \\ &\leq C \|\text{grad } v\|_{s-1} \|u\|_0 + C \|\text{grad } v\|_{s-1} \|u\|_0 \\ &\leq C \|v\|_s \|u\|_0. \end{aligned}$$

Entre la cuarta y quinta línea se utilizó el lema de Sobolev. De lo anterior se concluye que

$$\|B(t, v)u\|_0 \leq C \|v\|_s \|u\|_0,$$

y entonces, $B \in \mathcal{B}(X)$. Puesto que $v \in W$, se obtiene finalmente que $\|B\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \lambda_1$.

Se demostrará ahora que el operador $A(t, v)$ satisface la condición H_4 .

Lema 3.2.7. Sea $s \geq 3$, $v \in Y$ y $(t, v) \in [0, T] \times W$. Entonces,

$$Y \subset D(A(t, v)), \quad A(t, v)|_Y \in \mathcal{B}(Y, X),$$

y la aplicación

$$A(\cdot, v) : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(Y, X), \quad t \mapsto A(t, v),$$

es fuertemente continua para cada $v \in W$. Además, para cada $t \in [0, T]$, la aplicación

$$A(t, \cdot) : W \rightarrow \mathcal{B}(Y, X)$$

es uniformemente Lipschitz en W , esto es,

$$\|A(t, v_1) - A(t, v_2)\|_{\mathcal{B}(Y, X)} \leq \mu \|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in Y.$$

donde $\mu = \mu(r)$ depende solo de r .

Demostración: Recuerde primero que $Y \subset D(A_0(t)) = D(A(t, v))$ y que $A_0(t)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo en X . Para $u \in Y$ y $t \in [0, T]$, se tiene

$$\|A(t, v)u\|_0 \leq \|A_0(t)u\|_0 + \|A_1(t, v)\|_0.$$

Más aún,

$$\|A_1(t, v)u\|_0 \leq \|f(t)M_v\partial_x u\|_0 \leq |f|_\infty \|v\|_{L_\infty} \|\partial_x u\|_0 \leq C_s \|v\|_s \|u\|_1 \leq C_s \|v\|_s \|u\|_s.$$

Finalmente, $\|A(t, v)u\|_0 \leq C_2(1 + \|v\|_s) \|u\|_s$. Así, $A(t, v) \in \mathcal{B}(Y, X)$.

Sean $v_1, v_2 \in W$ y $u \in Y$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(A(t, v_1) - A(t, v_2))u\|_0 &= |f|_\infty \|\partial_x u\|_{L_\infty} \|v_1 - v_2\|_0 \\ &\leq C_s \|\partial_x u\|_{s-1} \|v_1 - v_2\|_0 \\ &\leq C_s \|u\|_s \|v_1 - v_2\|_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|A(t, v_1) - A(t, v_2)\|_{\mathcal{B}(Y, X)} \leq \mu \|v_1 - v_2\|_0$, donde $\mu = \mu(r)$.

Sean $t, t' \in [0, T]$, $v, w \in W$. Entonces

$$\begin{aligned} \|A(t, v)w - A(t', v)w\| &\leq |g(t) - g(t')| \|\partial_x^3 w\|_0 + |p(t) - p(t')| \|\partial_x^{-1} w_{yy}\|_0 \\ &\quad + |f(t) - f(t')| \|v\partial_x w\|_0. \end{aligned}$$

Así cuando $t \rightarrow t'$, teniendo en cuenta las condiciones sobre las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $p(t)$ y los estimativos anteriores, se deduce el resultado deseado.

A partir de los resultados establecidos hasta ahora, se tiene que para $(t, v) \in [0, T] \times W$,

$$\|A(t, v)u_0\|_0 \leq (1 + \sup_{w \in W} \|w\|_s) \|u_0\|_0 \leq \lambda_2,$$

y así, (H_5) se cumple.

En conclusión, del Teorema 2.2.3 aplicado con $X = X_\pi^0$, $Y = X_\pi^s$, $s \geq 3$ y los lemas establecidos en esta sección se concluye el Teorema 3.2.1.

Observación 3.2.8. Si $u(t)$ es la solución establecida en el Teorema 3.2.1, entonces

$$A(t, u)u = f(t)u\partial_x u + g(t)\partial_x^3 u - p(t)\partial_x^{-1} u_{yy} = -u_t,$$

y $u(0) = u_0$.

3.3 Ley de conservación de la norma L^2

A continuación se muestra que la solución u del Teorema 3.2.1 satisface la más conocida ley de conservación de la ecuación KP: conservación de la norma L^2 (energía cinética). Ver por ejemplo Klein y Saut [28] y Wu [48].

Lema 3.3.1. *Sean $u = u(x, y, t)$ una función periódica en las variables x, y , $\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = 0$ y $\Psi(x, y, t) = \partial_x^{-1} u(x, y, t) = \int_0^x u(x', y, t) dx'$. Entonces Ψ es 2π -periódica en x, y , y además*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \Psi_{yy} dx dy = 0. \quad (3.14)$$

Demostración: La periodicidad de Ψ se deduce de la restricción sobre $u(x, y, t)$, $t \geq 0$. Ahora se procede a establecer la condición (3.14).

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \Psi_{yy} dy dx &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_y \Psi_y dy dx \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x (\partial_x^{-1} u_y) \Psi_y dx dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_y \Psi_{yx} dx dy \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Psi_y^2)_x dx dy = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi_y^2 \Big|_{x=0}^{2\pi} dy = 0. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.2. *Sean $u_0(x, y) \in L^2$ y $u(x, y, t)$ la solución del problema de Cauchy (3.1). Entonces u satisface el estimativo*

$$E(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} u^2(x, y, T) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} u_0^2(x, y) dx dy = E(0). \quad (3.15)$$

Demostración: Al multiplicar la primera ecuación de (3.1) por $u(x, y, t)$ se obtiene,

$$\frac{1}{2} (u^2)_t + \frac{1}{3} f(t) (u^3)_x + g(t) u u_{xxx} - p(t) u \partial_x^{-1} u_{yy} = 0. \quad (3.16)$$

Ahora, usando la identidad ² $u u_{xxx} = (u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2)_x$, se obtiene la expresión equivalente a (3.16),

$$\frac{1}{2} (u^2)_t + \frac{1}{3} f(t) (u^3)_x + g(t) (u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2)_x - p(t) u \partial_x^{-1} u_{yy} = 0. \quad (3.17)$$

²En efecto, $(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2)_x = u_x u_{xx} + u u_{xxx} - u_x u_{xx} = u u_{xxx}$.

Ahora se procede a integrar (3.17) sobre la región $R = \Omega \times [0, T]$.

$$\iiint_R \left(\frac{1}{2}(u^2)_t + \frac{1}{3}f(t)(u^3)_x + g(t)(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2)_x - p(t)u\partial_x^{-1}u_{yy} \right) dx dy dt = 0. \quad (3.18)$$

Debido a la periodicidad de u , el segundo y tercer término de (3.18) son cero. Además, por el Lema 3.3.1, el cuarto término de (3.18) es cero también. En efecto,

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)u\partial_x^{-1}u_{yy} dx dy dt = \int_0^T p(t) \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u\partial_x^{-1}u_{yy} dx dy \right) dt = 0.$$

Finalmente, usando el Teorema de Fubini, el primer término (3.18) se puede escribir como,

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^T (u^2)_t dt dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (u^2(x, y, T) - u^2(x, y, 0)) dx dy.$$

La última expresión implica que $E(T) = E(0)$.

Capítulo 4

Resultados numéricos

Durante la búsqueda bibliográfica no hubo evidencia de resultados sobre la buena colocación de modelos con coeficientes variables. Sobre la buena colocación de la clásica KPI en $\mathbb{R}^2$ y en el caso periódico, vale la pena mencionar los artículos de Iorio [16], Isaza et al. [19], Molinet et al. [36] y Bourgain [5], Iorio [16], Isaza et al. [18], Schwarz [40] y Wu et al. [49], respectivamente. Sin embargo, no se encontró ningún resultado sobre buena colocación de la ecuación KPI en dominios acotados arbitrarios.

Sobre regiones acotadas se han encontrado varios trabajos numéricos, por ejemplo, Bratos y Twizell [6], Chehab et al [7], Fen y Mitsui [10], Grava et al [13], Klein y Saut [28], Slapere y Ratas [39] y Wazwaz [47]. Los trabajos anteriormente mencionados utilizan diferencias finitas o métodos pseudo-espectrales. En este capítulo se quiere abordar la estrategia de elementos finitos la cual, hasta el conocimiento del autor, no ha sido explorada para el caso de las ecuaciones tipo KP.

4.1 Formulación Variacional

En esta sección se va a realizar un estudio numérico sobre la región rectangular $\Omega = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$. Como se explicó en el capítulo 2, la aplicación de la teoría de elementos finitos requiere de la formulación variacional de la ecuación GKPI dada en (1.10).

Para esto es conveniente introducir el cambio de variables,

$$\begin{cases} u_1 = u, \\ u_2 = u_{1xx}. \end{cases} \quad (4.1)$$

En la última sección del capítulo se va a presentar una discusión de las formulaciones variacionales alternativas que se utilizaron y de las dificultades que se obtuvieron en su uso.

Ahora, al sustituir (4.1) en (1.10) se obtiene el sistema,

$$\begin{cases} u_2 - u_{1xx} &= 0, \\ u_{1tx} + f(t)u_{1x}^2 + f(t)u_1u_2 + g(t)u_{2xx} - p(t)u_{1yy} &= 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Si se multiplica la primera ecuación de (4.2) por la función de prueba v_2 y la segunda ecuación (4.2) por la función de prueba v_1 y se integra por partes, se obtiene la siguiente formulación variacional de la ecuación GKPI

$$(u_2, v_2)_\Omega + (u_{1x}, v_{2x})_\Omega - (u_{1x}\eta_1, v_2)_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & (u_{1tx}, v_1)_\Omega + \left(f(t)(u_{1x})^2, v_1 \right)_\Omega + (f(t)u_1u_2, v_1)_\Omega - (g(t)u_{2x}, v_{1x})_\Omega + \\ & (p(t)u_{1y}, v_{1y})_\Omega + (g(t)u_{2x}\eta_1, v_1)_{\partial\Omega} - (p(t)u_{1y}\eta_2, v_1)_{\partial\Omega}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde η_1 y η_2 son los vectores normales unitarios en las direcciones x y y , respectivamente.

Un primer esquema de discretización temporal de tipo implícito que se propone en el presente trabajo para aproximar (4.3)-(4.4) está dado por

$$\left(\theta u_2^{n+1} + (1-\theta)u_2^n, v_2 \right)_\Omega + \left(\theta u_{1x}^{n+1} + (1-\theta)u_{1x}^n, v_{2x} \right)_\Omega - \left(u_{1x}^{n+1}\eta_1, v_2 \right)_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(u_{1x}^{n+1} - u_{1x}^n, v_1 \right)_\Omega + ((f_{n+1}\theta u_{1x}^{n+1} + f_n(1-\theta)u_{1x}^n)(\theta u_{1x}^{n+1} + \\ & (1-\theta)u_{1x}^n, v_1)_\Omega + \left((f_{n+1}\theta u_1^{n+1} + f_n(1-\theta)u_1^n)(\theta u_2^{n+1} + (1-\theta)u_2^n), v_1 \right)_\Omega \\ & + \left(p_{n+1}u_{1y}^{n+1}, v_{1y} \right)_\Omega - \left(g_{n+1}\theta u_{2x}^{n+1} + g_n(1-\theta)u_{2x}^n, v_{1x} \right)_\Omega + \left(g_{n+1}u_{2x}^{n+1}\eta_1, v_1 \right)_{\partial\Omega} \\ & - (p_{n+1}u_{1y}\eta_2, v_1)_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $(\cdot, \cdot)_\Omega$ es el producto interno en $L^2(\Omega)$ y $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$ es el producto interno en $L^2(\partial\Omega)$. Cuando $\theta = 0.5$, se dice que el esquema es de tipo Crank-Nicholson.

4.2 Experimentos numéricos

Una onda viajera de la ecuación GKPI es una solución de la forma $u(x, y, t) = \phi(\xi)$, $\xi = px + q$, donde p y q son funciones en las variables y, t . Es conocido que las soluciones de ondas viajeras de ecuaciones no lineales de evolución, juegan un importante papel en el estudio de muchos fenómenos naturales en ciencias e ingenierías.

Un solitón es un tipo particular de onda viajera que se propaga sin cambiar su forma y la cual no es destruída cuando colisiona con otra onda del mismo tipo. Este tipo de soluciones son adecuadas para realizar pruebas con distintos esquemas numéricos. Las soluciones exactas como las consideradas en esta sección han permitido evaluar el desempeño de la estrategia numérica propuesta y analizar el orden de convergencia en tiempo y en espacio. De paso se logró confrontar con el orden de convergencia esperado en un esquema totalmente discreto, el cual se ha discretizado en espacio utilizando elementos finitos lineales (orden 1) y en tiempo mediante un esquema de diferencias finitas implícito.

El objetivo de los siguientes experimentos es validar la propuesta numérica de las ecuaciones (4.21)-(4.22), junto con las condiciones tipo Dirichlet y Neumann sobre una región rectangular, utilizando algunas soluciones de onda solitaria conocidas de la ecuación KPI y GKPI, tales como el solitón de Zaitsev, el solitón en línea o en banda, el solitón racional para la ecuación KPI, y bisolitones para la ecuación KPI y GKPI.

En el caso de las ecuaciones tipo KP las ondas solitarias tienen la forma

$$u(x, y, t) = \phi_c(x - ct, y),$$

donde y es la variable transversa y $c > 0$ es la velocidad de la onda solitaria.

La onda solitaria se dice *localizada* si ϕ_c tiende a cero en el infinito en todas las direcciones. Para estas ondas solitarias, el *espacio de energía* es

$$Y = Y(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad u_x \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \partial_x^{-1} u_y \in L^2(\mathbb{R}^2)\},$$

donde

$$\|\partial_x f\|_{Y(\mathbb{R}^2)} := \left(\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

Más adelante se muestra un ejemplo de una onda solitaria localizada para la ecuación KPI. La ecuación KPII no admite soluciones localizadas (Klein

y Saut [28]). Para la ecuación KPI se conocen entre otros, tres tipos de solitones: solitones en línea, solitones racionales y solitones periódicos en una de la direcciones x o y . En esta sección se van a presentar experimentos con los tres tipos mencionados. Para llevar a cabo esta tarea, se van a usar varios artículos en cuales se calculan o presentan varias soluciones de este tipo, para la ecuación KPI o GKPI. Algunos de los autores que fueron consultados para este trabajo son Borhanifar et al. [4], Chehab et al. [7], Feng y Mitsui [10], Jia et al. [21], Klein y Saut [28], Li et al. [32], Lü y Xie [35], Sun y Tam [44], Wang et al. [46], Wazwaz [47], Wu [49] y Yomba [52].

4.2.1 Propagación de ondas solitarias en medios homogéneos

Para empezar considere la ecuación KPI,

$$(u_t + \alpha_1 uu_x + \alpha_2 u_{xx})_x - \alpha_3 u_{yy} = 0. \quad (4.7)$$

Se realizará una simulación para aproximar las soluciones de la ecuación KPI en una región rectangular $\Omega = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ en el plano. Motivados por las condiciones tipo Dirichlet y Neumann en la formulación variacional (4.21)-(4.22), la condición inicial del problema de Cauchy y en parte por los experimentos de Wazwaz [47], se impondrán las siguientes condiciones de frontera,

$$u(x_{min}, y, t) = h_1(y, t), \quad u(x_{max}, y, t) = h_2(y, t),$$

$$u(x, y_{min}, t) = h_3(x, t), \quad u(x, y_{max}, t) = h_4(x, t)$$

$$u_x(x_{min}, y, t) = h_5(y, t), \quad u_x(x_{max}, y, t) = h_6(y, t),$$

$$u_y(x, y_{min}, t) = h_7(x, t), \quad u_y(x, y_{max}, t) = h_8(x, t),$$

para $x \in [x_{min}, x_{max}]$, $y \in [y_{min}, y_{max}]$ y $t \geq 0$.

En todos los experimentos que se van a realizar se utilizan los valores de frontera conocidos de las soluciones exactas consideradas. Esto es, en todos los casos se conocen de antemano las funciones h_1 hasta h_8 , tanto en el caso de los coeficientes constantes, como en el caso de los coeficientes variables.

Para las simulaciones se usará el solver lineal MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel direct Solver) en las iteraciones del Método de Newton, en lugar de descomposición LU, la cual es la usada por defecto en la librería FEniCS, para resolver sistemas lineales.

En los experimentos de esta sección se usó una malla construida con el software Gmsh sobre la región plana rectangular $[-30, 30] \times [-10, 10]$, con $n_x = 1000$, $n_y = 400$, lo cual da tamaño global de malla $h_{max} \approx 0.0915245904$ y se va a usar un $\Delta t = 0.002$. Se puede notar que la división en x y en y no guarda la misma proporción, esto es, la división no es igual para las dos variables espaciales. Esta decisión fue tomada después de realizar varios experimentos y observar el comportamiento del método con distintas divisiones en x y y . La malla generada tiene un total de 462792 nodos y 922786 elementos.

4.2.1.1 Solitón de Zaitsev

En este experimento se va a modelar la propagación de una onda solitaria en un medio homogéneo descrita por la ecuación (4.7) con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ de la forma

$$u(x, y, t) = 12\alpha^2 \frac{1 - \beta \cosh(\alpha x - \omega t) \cos(\delta y)}{(\cosh(\alpha x - \omega t) - \beta \cos(\delta y))^2}, \quad (4.8)$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{\delta^2 - 3\alpha^4}{\delta^2}}$, $3\alpha^4 \leq \delta^2$, $\omega = \frac{\delta^2 + \alpha^4}{\alpha}$, y $c = \frac{\omega}{\alpha}$ (ver Chehab y Mammeri [7], Klein [28] y Zaitsev [53]). Este solitón fue primero encontrado por Zaitsev, mediante superposición de infinitos solitones racionales. Puede mostrarse que este solitón es una solución exacta de la ecuación KPI (4.7).

Para este experimento se tomarán los valores $\alpha = 0.74$, $\beta = 0.31686$, $\delta = 1.0$, $\omega = 1.75657$ y la velocidad de propagación de la onda está dada por $c = \frac{\omega}{\alpha} = 2.37375$, con el fin de obtener una velocidad moderada que permitiera observar el comportamiento del soliton en el tiempo elegido.

En la Figura 4.1 se presenta la solución numérica obtenida en el tiempo $T = 2$. El tiempo de cómputo para este cálculo fue 14238.317 segundos, es decir, 3.95 horas. El error en la norma del supremo con respecto al solitón de Zaitsev, el cuál es una solución exacta, es 0.0575225 y el error en la norma de L^2 , con respecto a la misma solución es 0.0982753 en el tiempo final.

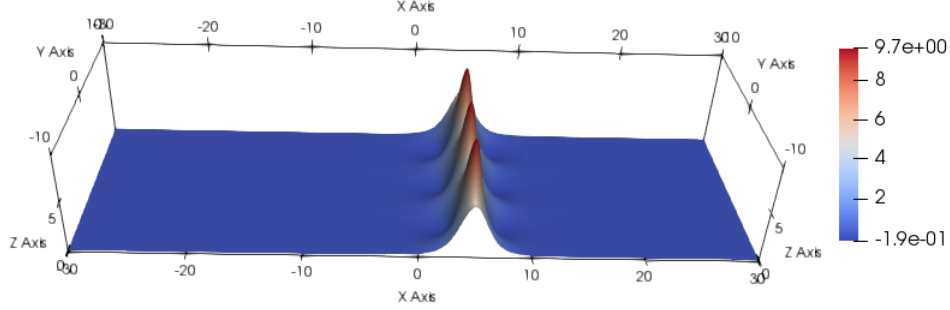


Figura 4.1: Soliton de Zaitsev con $\alpha = 0.74$, $\beta = 0.31686$, $\delta = 1.0$ calculado en el tiempo $T = 2.0$.

Por otra parte, en la Figura 4.2 se muestra la solución numérica calculada en el tiempo $T = 2$, en el caso $\beta = 0.0$, $\alpha = 0.759836$, $\delta = 1.0$ y $\omega = 1.75477$, lo cual produce una velocidad de onda dada por $c = 2.3094$. El error en la norma del supremo, con respecto a la solución exacta, es 0.0076740 y se obtuvo un error en la norma L^2 dada por 0.0133984 en el tiempo final. El tiempo del cálculo fue de 3415 segundos, es decir, cerca de 0.9486 horas.

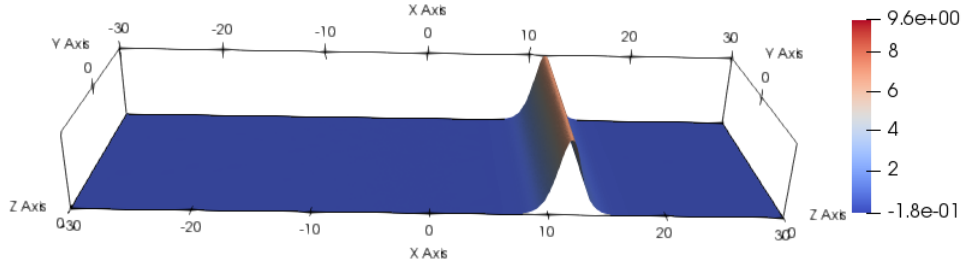


Figura 4.2: Soliton de Zaitsev con $\beta = 0.0$, $\alpha = 0.759836$, $\delta = 1.0$ y $\omega = 1.75477$ calculada en $T = 2.0$.

El solitón de Zaitsev decae exponencialmente en las direcciones positiva y negativa del eje x , mientras que en la dirección del eje y la solución es periódica. En ambos casos la solución se mueve en la dirección positiva del eje x , de acuerdo a lo prescrito.

La transformación $\delta \rightarrow i\delta$, $\alpha \rightarrow i\alpha$, $c \rightarrow ic$ produce un solitón el cual es periódico en la dirección del eje del x , y localizada en la dirección del eje y .

4.2.1.2 Solitones en línea o solitones en banda

A continuación se presentarán algunos experimentos realizados con un tipo de soluciones de onda viajera llamada solitón en línea. Dos valores de λ son utilizados en los cálculos. El solitón en línea se mueve con una velocidad de $c = 4\kappa^2 - 3\lambda^2$ en una dirección que forma un ángulo de $\arctan(-\lambda)^{-1}$ con respecto al eje x (ver Feng y Mitsui [10]). Esta solución es una solución exacta de la ecuación KPI con constantes $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 3$, y está dada por

$$u(x, y, t) = 2\kappa^2 \text{sech}^2(\kappa(x + \lambda y - (4\kappa^2 - 3\lambda^2)t - x_0)). \quad (4.9)$$

En el primer experimento se usan los valores $x_0 = 0$, $\lambda = 0.0$ y $\kappa = 1.0$. La velocidad de la onda es así $c = 4.0$. El error calculado en el tiempo final en la norma del supremo, con respecto a la solución exacta, fue 0.0051949 y en la norma de L^2 fue 0.0086175. El tiempo aproximado de cómputo fue de cerca de 3.94 horas. En la Figura 4.3, se muestra la solución numérica calculada en el tiempo $T = 2$.

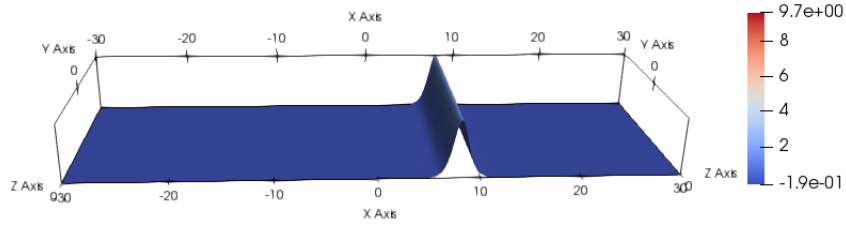


Figura 4.3: Solitón en línea con $\lambda = 0$ calculado en el tiempo $T = 2.0$.

Ahora se realiza el experimento correspondiente al valor $\lambda = -1.0$. En este caso la velocidad de la onda es $c = 1.0$. El error en el tiempo final en la norma del supremo, con respecto a la solución exacta, es 0.1109211 y el error que se obtuvo en la norma L^2 es 0.1369886. El tiempo total del cálculo numérico fue de 1.865 horas. En la Figura 4.4 se presenta la solución numérica en el tiempo $T = 2$.

Ambos solitones en línea se mueven hacia la derecha sin deformarse de acuerdo a lo esperado. Se observa que ambos se mueven hacia la derecha, como se espera de acuerdo al valor de la velocidad. Los dos solitones en línea decaen cuando $|x| \rightarrow \infty$.

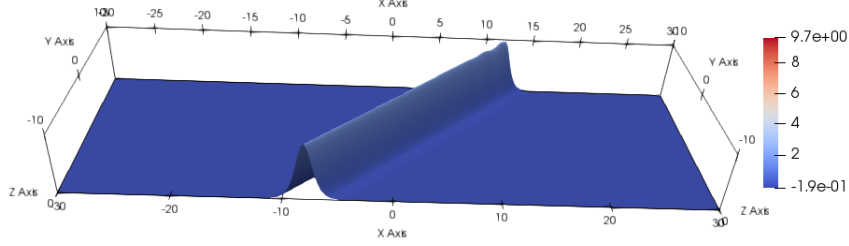


Figura 4.4: Solitón en línea con $\lambda = -1.0$ calculado en $T = 2.0$.

4.2.1.3 Solitón racional o solitón con forma de campana

Para la ecuación KPI existe una solución localizada en ambas direcciones espaciales con un decaimiento de la forma $O(1/r^2)$, donde $r^2 = x^2 + y^2$ cuando $r \rightarrow \infty$ (ver Feng y Mitsui [10] y Klein [28]). El solitón con forma de campana¹ está dado por la siguiente expresión racional en ambas variables espaciales:

$$u(x, y, t) = 4 \frac{-(x - x_0 - 3\mu^2 t)^2 + \mu^2 (y - y_0)^2 + 1/\mu^2}{((x - x_0 - 3\mu^2 t)^2 + \mu^2 (y - y_0)^2 + 1/\mu^2)^2}. \quad (4.10)$$

Esta expresión es una solución exacta de ecuación KPI dado que $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 3$.

En la ecuación (4.10), (x_0, y_0) es un punto constante que representa el lugar donde la amplitud de la solución es mayor. La solución de onda viajera se mueve en este caso con una velocidad de $c = 3\mu^2$.

Para el experimento que sigue se usaron los valores $\mu^2 = 1.0$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Esta onda tendrá una velocidad de $c = 3.0$ y así, de acuerdo con (4.10), se moverá en la dirección positiva del eje x . El error en la norma del supremo, con respecto a la solución exacta, es 0.0197870 y con respecto a la norma L^2 , es 0.0450183, ambos errores calculados en el tiempo final. El tiempo total de cómputo fue de 0.889 horas. En la Figura 4.5 se muestra una representación de la solución numérica del solitón racional en el tiempo $T = 2$. Se puede verificar que el perfil se mueve hacia la parte positiva del eje x .

¹Conocido en inglés como *hump soliton*.

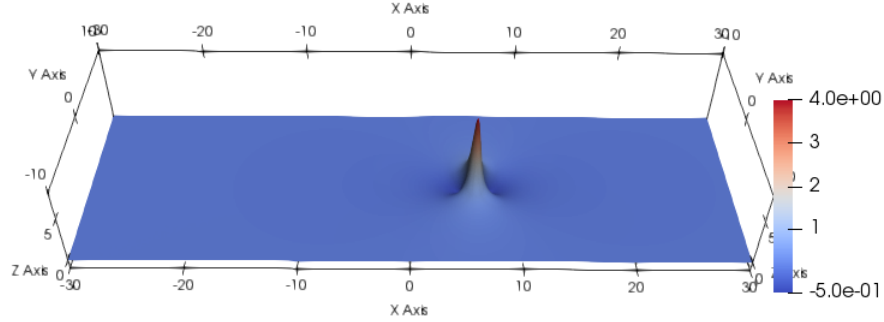


Figura 4.5: Solitón racional calculado en el tiempo $T = 2.0$.

4.2.1.4 Bisolitón exacto

El siguiente bisolitón es calculado en Lü y Xie [35, Caso 1.]. De acuerdo a [35], y usando el Método de Hirota², el bisolitón para la ecuación KPI (1.2), con $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$, es dado por la fórmula

$$u = \frac{12\alpha_2 w_{xx}}{\alpha_1 w} - \frac{12\alpha_2 (w_x)^2}{\alpha_1 w^2}, \quad (4.11)$$

donde los términos son calculados de acuerdo a las expresiones

$$w = 1 + e^\xi + e^\eta + \nu e^{\xi+\eta}, \quad \xi = ax + \lambda y - \frac{a^4\alpha_2 - \lambda^2\alpha_3}{a}t,$$

$$\eta = bx + \delta y - \frac{b^4\alpha_2 - \delta^2\alpha_3}{b}t, \quad \nu = \frac{-(\lambda b - \delta a)^2\alpha_3 - 3a^2b^2(a-b)^2\alpha_2}{-(\lambda b - \delta a)^2\alpha_3 - 3a^2b^2(a+b)^2\alpha_2}.$$

Siguiendo el ejemplo de Lü y Xie, los parámetros numéricos que se van a usar son $a = 1.0$, $b = -1.0$, $\lambda = -2.0$ y $\delta = -2.0$. En esta parte se usó cálculo simbólico con *Wolfram Mathematica* 12.0 para realizar los complicados y extensos cálculos que se requieren para evaluar las derivadas de la solución u de acuerdo con (4.11) usados en el esquema numérico. El error en la norma del supremo, con respecto la solución exacta, es 7×10^{-2} y en la norma de L^2 fue 1×10^{-1} , en $T = 2$. El tiempo de cálculo fue de 16185.270 segundos, cerca de 4.4959 horas. En la Figuras 4.6 y 4.7 se muestra la solución numérica del bisolitón calculado en el tiempo $T = 0$ y $T = 2$, respectivamente. Cómo se observa en las Figuras 4.6 y 4.7, la onda se mueve hacia la izquierda.

²Para una descripción del método de Hirota vale resaltar las referencias [14, Cap. 3], Jia et al. [51] y Zhiming et al. [54].

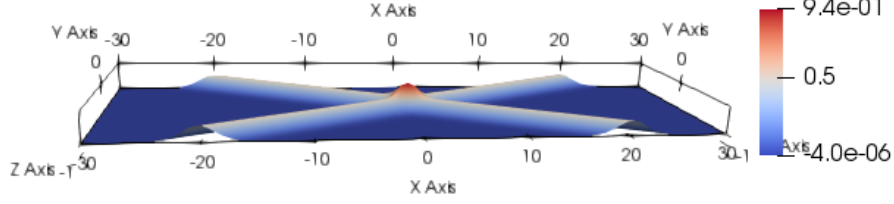


Figura 4.6: Bisoliton calculado en el tiempo $T = 0$

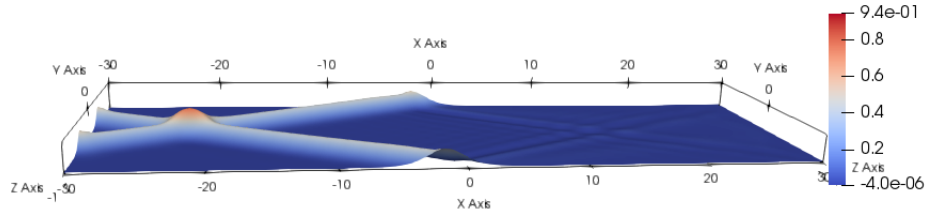


Figura 4.7: Bisoliton calculado en el tiempo $T = 2$

4.2.2 Propagación de ondas solitarias en medio no homogéneos

En los siguientes experimentos, se hace un estudio de la propagación de ondas solitarias en medios no homogéneos; esto es, el modelo con coeficientes variables GKPI,

$$u_{tx} + f(t)u_x^2 + f(t)uu_{xx} + g(t)u_{xxx} - p(t)u_{yy} = 0. \quad (4.12)$$

De nuevo se hace uso del artículo de Lü y Xie [35, Caso 2.] para calcular el solitón lineal de la ecuación GKPI. De acuerdo a [35], el bisoliton de la ecuación GKPI está dado por la fórmula,

$$u = \frac{12\alpha_2 w_{xx}}{\alpha_1 w} - \frac{12\alpha_2 (w_x)^2}{\alpha_1 w^2}, \quad (4.13)$$

donde los términos son calculados de acuerdo a las expresiones

$$w = 1 + e^\xi + e^\eta + \nu e^{\xi+\eta}, \quad \xi = ax + \lambda y + \int g(t) dt,$$

$$\eta = bx + \delta y + \frac{\delta^2 a^4 + \delta^2 a - b^4 \lambda^2}{b \lambda^2} \int g(t) dt,$$

$$\nu = \frac{\delta^2 a^2(1 + a^3) - 2ab\lambda\delta(1 + a^3) + b^2\lambda^2(4a^3 - 6a^2b + 3ab^2 + 1)}{\delta^2 a^2(1 + a^3) - 2ab\lambda\delta(1 + a^3) + b^2\lambda^2(4a^3 + 6a^2b + 3ab^2 + 1)},$$

con las restricciones entre los coeficientes

$$f(t) = \kappa g(t), \quad p(t) = \frac{a(1 + a^3)}{\lambda^2} g(t),$$

con a , b , λ , κ y δ constantes no nulas arbitrarias y $a > 0$.

En el primero de estos experimentos se usa la función $g(t) = t + 1$ y los parámetros $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$. El error en la norma del supremo, con respecto a la solución exacta, es 0.0197870 y con respecto a norma de L^2 es 0.0450183 y un tiempo de cómputo de 4.5253 horas. En la Figura 4.8 se muestra la solución calculada en el tiempo $T = 2$. El perfil inicial se mueve hacia la izquierda.

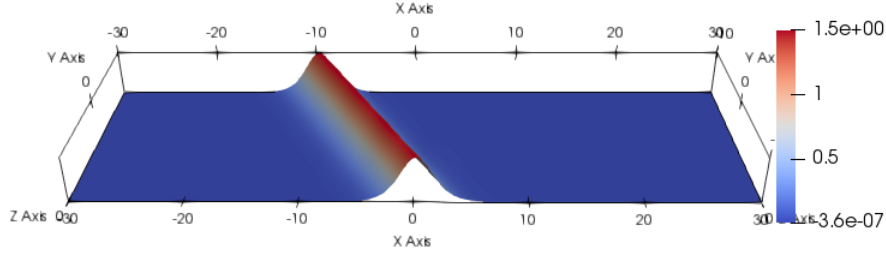


Figura 4.8: Solitón con $g(t) = t + 1$, $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 2$.

A continuación se cambia el parámetro b y los otros parámetros se dejan iguales. El perfil que se genera es completamente diferente. En la Figura 4.9 se muestra la solución numérica del solitón calculado en $T = 2$. Los errores en la norma del supremo y de L^2 , fueron respectivamente 0.0193044 y 0.0610913, y un tiempo de cómputo de 4.803904 horas. El perfil inicial se mueve en efecto hacia la izquierda.

Para finalizar esta sección se hace un experimento con coeficientes periódicos en la ecuación GKPI.

Se usó la función $g(t) = 1.0 + 0.25\sin(16t)$, y los parámetros $a = 1.0$, $b = -1.5$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$. Los errores en la norma del supremo y

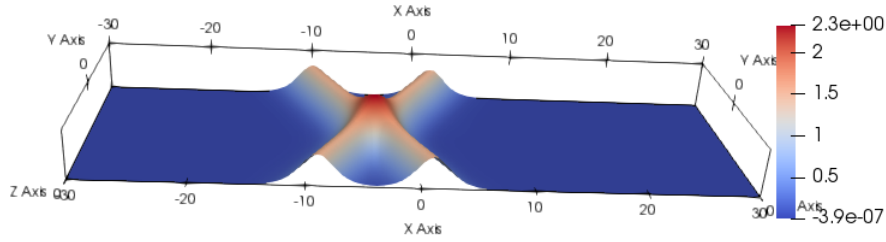


Figura 4.9: Solitón con $g(t) = t + 1$, $a = 1.0$, $b = -1.0$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 2$.

de L^2 fueron 0.0157922 y 0.0343916, respectivamente. El tiempo de cómputo fue de aproximadamente 4.773686 horas. En las Figuras 4.10-4.11 se muestra la solución numérica en los tiempos $T = 0$ y $T = 2$.

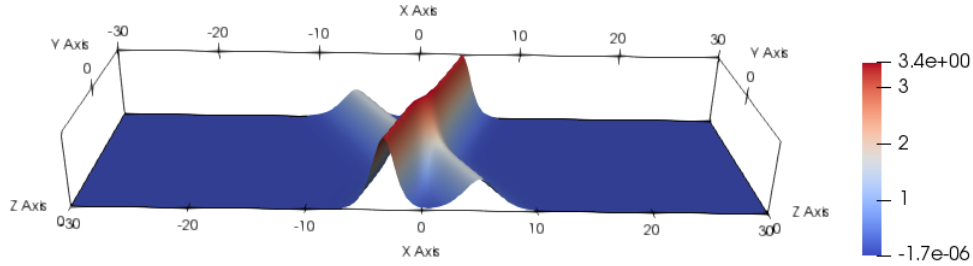


Figura 4.10: Solitón con $g(t) = 1.0 + 0.25 \sin(16t)$, $a = 1.0$, $b = -1.5$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 0$

El perfil inicial sufre un cambio con respecto a los casos anteriores. Como se puede visualizar en las Figuras 4.10 - 4.11, la parte más elevada del perfil se mueve hacia la derecha, mientras que la parte más baja se mueve hacia la izquierda, lo cual está de acuerdo con la expresión (4.13).

4.3 Orden de convergencia del método numérico propuesto

El objetivo de esta sección es calcular el orden de convergencia del método numérico propuesto en este capítulo.

El error esperado al aproximar la solución η , en la superficie libre (ver Figura

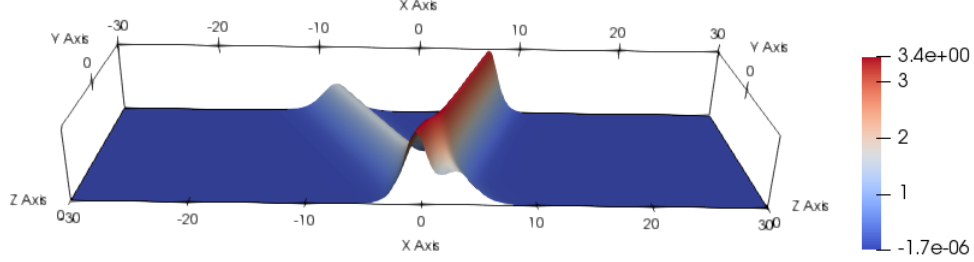


Figura 4.11: Solitón con $g(t) = 1.0 + 0.25 \sin(16t)$, $a = 1.0$, $b = -1.5$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 2.0$ y $\delta = 0.5$ en el tiempo $T = 2$

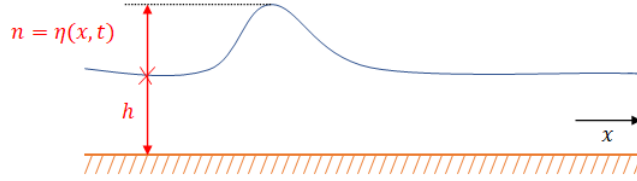


Figura 4.12: Movimiento de una onda solitaria en una superficie libre.

4.12), usando FEM con una malla uniforme de elementos triangulares y con una discretización temporal Δt está dada por

$$\|\eta - \eta_{h,\Delta t}\|_{L^2(\Omega)} \approx O(h^{\lambda_1}) + O((\Delta t)^{\lambda_2}), \quad (4.14)$$

donde $\lambda_1 = k+1$, siendo k es el grado del polinomio usado en la aproximación de elementos finitos, Larsson y Bengzon, [29, Cap. 4], Larsson y Thomée [30, Cap. 5] y Langtanten y Logg [31], y λ_2 es el orden de la aproximación temporal, el cual depende de la discretización utilizada, Larsson y Thomée [30, §7.2] y Strikwerda [43, §3.1]. Aquí $\eta_{h,\Delta t}$ representa la aproximación de η usando las condiciones mencionadas, calculada en el tiempo $t = T$.

Para realizar primero el estimativo asociado a la discretización espacial, se ha tomado un paso temporal fijo Δt suficientemente pequeño de tal manera que el error dominante sea el espacial. Así $\eta_{h,\Delta t}$ será denotado simplemente como η_h . En este caso se espera que (4.14) se reduzca a,

$$\|\eta - \eta_h\|_{L^2(\Omega)} \approx O(h^{\lambda_1}). \quad (4.15)$$

Se consideren ahora aproximaciones a η con tamaños de malla globales h , $h/2$ y $h/4$. Haciendo uso del estimativo de la ecuación (4.15) se concluyen

las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\left\|\eta_h - \eta_{h/2}\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\|\eta - \eta_h\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\eta - \eta_{h/2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\approx O(h)^{\lambda_1} + O\left(\frac{h}{2}\right)^{\lambda_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\eta_{h/2} - \eta_{h/4}\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\|\eta - \eta_{h/2}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\eta - \eta_{h/4}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\approx O\left(\frac{h}{2}\right)^{\lambda_1} + O\left(\frac{h}{4}\right)^{\lambda_1},\end{aligned}$$

donde λ_1 es la razón de convergencia del esquema de elementos finitos y η , $\eta_{h/2}$, $\eta_{h/4}$ son las aproximaciones a η con h , $h/2$ y $h/4$, respectivamente.

Se tiene entonces que,

$$\left\|\eta_h - \eta_{h/2}\right\|_{L^2(\Omega)} \approx C(h)^{\lambda_1}, \quad (4.16)$$

y

$$\left\|\eta_{h/2} - \eta_{h/4}\right\|_{L^2(\Omega)} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^{\lambda_1}. \quad (4.17)$$

Si se divide la expresión dada por (4.16) entre la expresión dada por (4.17) y se realizan las simplificaciones respectivas, se obtiene

$$\frac{\left\|\eta_h - \eta_{h/2}\right\|_{L^2(\Omega)}}{\left\|\eta_{h/2} - \eta_{h/4}\right\|_{L^2(\Omega)}} \approx 2^{\lambda_1}.$$

Por lo tanto, para el esquema de elementos finitos propuestos la razón de convergencia espacial es aproximadamente

$$\lambda_1 \approx \log_2 \left(\frac{\left\|\eta_h - \eta_{h/2}\right\|_2}{\left\|\eta_{h/2} - \eta_{h/4}\right\|_2} \right).$$

Para calcular el orden de convergencia del esquema, se va a utilizar el solitón racional dado por (4.10), sobre la región rectangular $[0, 20] \times [0, 20]$. Los parámetros numéricos son $n_x = n_y$, $\Delta t = 0.0002$ y el tiempo final $T = 1$. Se comienza con $n_x = 60$, con lo cual se generan 7200 elementos. Se finaliza

con $n_x = 1920$, lo que produce en total de 7372800 elementos. Para este experimento se usó el mallador *mshr* de FEniCS. En la Tabla 4.1 se presentan los errores medidos en la norma L^2 cuando el tamaño de la malla es dividida a la mitad.

h	$\ \eta_h - \eta_{\frac{h}{2}}\ _2$	$\ \eta_{\frac{h}{2}} - \eta_{\frac{h}{4}}\ _2$	λ
0.471404520791035	1.8378898	0.8173594	1.16901
0.235702260395518	0.8173594	0.2229584	1.8742
0.117851130197759	0.2229584	0.0588227	1.92233
0.058925565098879	0.0588227	...	...
0.029462782549439	...	...	...
0.0147314	...	...	...

Tabla 4.1: Orden de convergencia espacial del FEM usando $\Delta t = 0.0002$.

En los resultados de la tabla se observa que el orden de convergencia obtenido es cercano a dos, como se espera de un método elementos finitos con elementos triangulares lineales (ver estimativos dados en la sección 2.4.2).

Para estimar el orden de convergencia de la discretización temporal, se toma una malla espacial uniforme con tamaño global de malla h suficientemente pequeño, de tal suerte que el error dominante es el temporal. Aquí $\eta_{h,\Delta t}$ será escrito como $\eta_{\Delta t}$ y así el estimativo (4.14) se reduce a

$$\|\eta - \eta_{\Delta t}\|_{L^2(\Omega)} \approx O((\Delta t)^{\lambda_2}), \quad (4.18)$$

Usando el estimativo (4.18), aproximaciones $\eta_{\Delta t}$, $\eta_{\Delta t/2}$ y $\eta_{\Delta t/4}$ y procediendo como en el caso espacial se obtiene,

$$\lambda_2 \approx \log_2 \left(\frac{\|\eta_{\Delta t} - \eta_{\Delta t/2}\|_2}{\|\eta_{\Delta t/2} - \eta_{\Delta t/4}\|_2} \right).$$

Para esquema tipo Crank-Nicholson aplicado a la discretización en la variable temporal en el sistema (4.21)-(4.22), se espera una razón de convergencia de orden dos (ver Larsson y Thomée [30, §7.2] y Strikwerda [43, §3.1]). El orden de convergencia en la variable t es obtenida por una aproximación análoga a la que se hizo en la variable espacial, pero con una malla fija y un tamaño global de malla h suficientemente pequeño y ahora es Δt quién

se va a dividir a la mitad, iniciando con $\Delta t = 0.02$. Aquí $\eta_{\Delta t}$ denota la aproximación de η calculada usando un paso temporal de tamaño Δt .

Para este experimento se va a usar el solitón en línea dado por (4.9) y una malla espacial sobre la región rectangular $[0, 20] \times [0, 10]$. Los parámetros numéricos son $k = \sqrt{2}$, $n_x = 400$, $n_y = 400$, 320000 elementos, el tamaño global de malla es $h \approx 0.0559016994$ y el tiempo final $T = 1$.

Δt	$\ \eta_{\Delta t} - \eta_{\frac{\Delta t}{2}}\ _2$	$\ \eta_{\frac{\Delta t}{2}} - \eta_{\frac{\Delta t}{4}}\ _2$	λ
0.02	2.9671191	1.0404888	1.5118
0.01	1.0404888	0.2746889	1.92139
0.005	0.2746889	0.0672549	2.03009
0.0025	0.0672549	0.0160731	2.06499
0.00125	0.0160731	0.0039502	2.02465
0.000625	0.0039502	0.0008626	2.19516
0.0003125	0.0008626	...	...
0.00015625	...	...	...

Tabla 4.2: Orden de convergencia temporal del esquema usando un tamaño de malla espacial $h \approx 0.0559016994$.

En la Tabla 4.2, se observa que el orden está cercano a dos, como se espera en una discretización tipo Crank-Nicholson como la usada en el esquema propuesto.

Reuniendo los errores calculados para la discretización espacial y para la discretización temporal, se tiene evidencia numérica de que el esquema totalmente discreto, es decir, en el cual se ha considerado de forma simultánea la discretización espacial y la temporal, es aproximadamente $O(h^2 + (\Delta t)^2)$.

4.4 Propagación de ondas en el caso de frontera periódica

En esta sección presentamos una estrategia numérica alternativa a la usada en las secciones anteriores para la aproximación de las soluciones tipo solitón de la ecuación GKPI. De nuevo se considera la discretización sobre un rectángulo planar $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$, donde consideramos periodicidad

en la variable y , y Dirichlet nulas en las fronteras $x = x_{min}, x = x_{max}$, a fin de simular el decaimiento en infinito de las soluciones consideradas cuando $|x| \rightarrow \infty$. Es importante anotar, que también se pueden considerar condiciones de frontera periódicas en las dos variables x, y , o el caso en que hay periodicidad en la variable x y se imponen condiciones de Dirichlet nulas en las fronteras $y = y_{min}, y = y_{max}$. En ese caso, las condiciones de Dirichlet y Neumann que aparecen en la formulación variacional (4.3) - (4.4) desaparecen y la formulación variacional se reduce a

$$(u_2, v_2)_\Omega + (u_{1x}, v_{2x})_\Omega = 0, \quad (4.19)$$

$$(u_{1tx}, v_1)_\Omega + \left(f(t)(u_{1x})^2, v_1 \right)_\Omega + (f(t)u_1u_2, v_1)_\Omega - (g(t)u_{2x}, v_{1x})_\Omega + (p(t)u_{1y}, v_{1y})_\Omega, \quad (4.20)$$

donde v_1 y v_2 son funciones de prueba.

El esquema de discretización temporal de tipo implícito (método del trapecio) para aproximar (4.19) - (4.20) queda modificado como

$$\left(\theta u_2^{n+1} + (1 - \theta)u_2^n, v_2 \right)_\Omega + \left(\theta u_{1x}^{n+1} + (1 - \theta)u_{1x}^n, v_{2x} \right)_\Omega = 0, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(u_{1x}^{n+1} - u_{1x}^n, v_1 \right)_\Omega + ((f_{n+1}\theta u_{1x}^{n+1} + f_n(1 - \theta)u_{1x}^n)(\theta u_{1x}^{n+1} + \\ & (1 - \theta)u_{1x}^n, v_1)_\Omega + ((f_{n+1}\theta u_1^{n+1} + f_n(1 - \theta)u_1^n)(\theta u_2^{n+1} + (1 - \theta)u_2^n), v_1)_\Omega \\ & + (p_{n+1}u_{1y}^{n+1}, v_{1y})_\Omega - (g_{n+1}\theta u_{2x}^{n+1} + g_n(1 - \theta)u_{2x}^n, v_{1x})_\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A continuación se van a presentar simulaciones numéricas con el solitón de Zaitsev y con el solitón en línea que fueron estudiados en las secciones 4.2.1.1 y 4.2.1.2, respectivamente. En lugar de usar las formulación (4.3) - (4.4) como en la sección 4.2.1, se va a usar de forma experimental la formulación variacional (4.19) - (4.20), aún cuando los solitones que se modelan no son periódicos en las dos variables. El solitón de Zaitsev es solo periódico en la dirección de y y ambos decaen exponencialmente en la dirección de x . Además ninguno satisface la condición (3.2) de media cero en la variable x .

El solitón de Zaitsev es una solución exacta en $\mathbb{R}^2$ de la ecuación KPI con coeficientes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 1$. La fórmula es

$$u(x, y, t) = 12\alpha^2 \frac{1 - \beta \cosh(\alpha x - \omega t) \cos(\delta y)}{(\cosh(\alpha x - \omega t) - \beta \cos(\delta y))^2}, \quad (4.23)$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{\delta^2 - 3\alpha^4}{\delta^2}}$, $3\alpha^4 \leq \delta^2$, $\omega = \frac{\delta^2 + \alpha^4}{\alpha}$, y $c = \frac{\omega}{\alpha}$.

La simulación fue realizada en un rectángulo $[0, 40] \times [0, 2\pi]$. Se tuvo cuidado en poner en y un múltiplo entero del periodo. Los parámetros utilizados en el solitón son $x_0 = 20$, $\delta = 1.0$, $\alpha = 0.74$, $\beta = 0.316863882$. Con estos datos la velocidad de propagación es $c = 2.37375$. Los parámetros numéricos son $n_x = 300$, $n_y = 150$, $\Delta t = 0.00083$. Con estos datos el tamaño global de malla es $h \approx 0.1397583$. La malla generada aquí es menos fina que la utilizada en la sección 4.2.1.1. Para la estrategia usada en esta sección se usó un espacio de elementos finitos de orden dos, incluyendo la condición de periodicidad en la variable y , y condiciones de Dirichlet nulas en las fronteras $x = x_{min}$, $x = x_{max}$, lo cual se puede definir usando librerías de FEniCS en la forma

```
mesh=RectangleMesh(Point(xmin,ymin),Point(xmax,ymax),nx,ny )
P2 = FiniteElement('P', triangle, 2)
element = MixedElement([P2, P2 ])

W = FunctionSpace(mesh, element,
    constrained_domain= PeriodicBoundary() )
L = 'near(x[0], 0) '
bc_left = DirichletBC(W, Constant( (0,0) ), L )
bcs = [bc_left]
```

Aquí `PeriodicBoundary()` es una clase que debe ser definida indicando las fronteras a lo largo de las cuales se supone la periodicidad. Para obtener convergencia de la iteración de Newton en cada paso del tiempo, fue además necesario realizar de nuevo el cambio del solver de MUMPS a GMRES con el preconditionador ILU (ver tablas 2.1 y 2.2), usando las siguientes instrucciones de FEniCS:

```
ffc_options={"optimize":True, "eliminate_zeros":True, \
"precompute_basis_const":True, "precompute_ip_conts": True}
J = derivative(F, w)
problem = NonlinearVariationalProblem(F, w, bcs, J, \
    form_compiler_parameters= ffc_options)
solver = NonlinearVariationalSolver(problem)
prm = solver.parameters
prm['newton_solver']['linear_solver'] = 'gmres'
prm['newton_solver']['preconditioner'] = 'ilu'
```

```

prm['newton_solver']['absolute_tolerance'] = 1e-5
prm['newton_solver']['relative_tolerance'] = 1e-5
solver.solve()

```

La simulación se dejó avanzar hasta $T = 1$. El tiempo total de cómputo fue de 5.5 horas. Con esta estrategia se obtuvo un error en la norma L^2 de 5.4×10^{-3} y en la norma del máximo el error fue 3.7×10^{-3} . En la Figura 4.13 se presenta el solitón al inicio de la simulación.

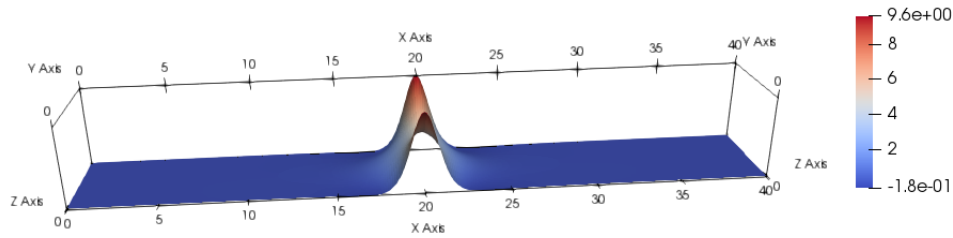


Figura 4.13: Solitón de Zaitsev en $T = 0$ con estrategia periódica.

En la Figura 4.14 se observa la solución numérica en el tiempo final $T = 1.0$. Se verifica que hay un desplazamiento hacia la derecha que es compatible con lo que predice la teoría.

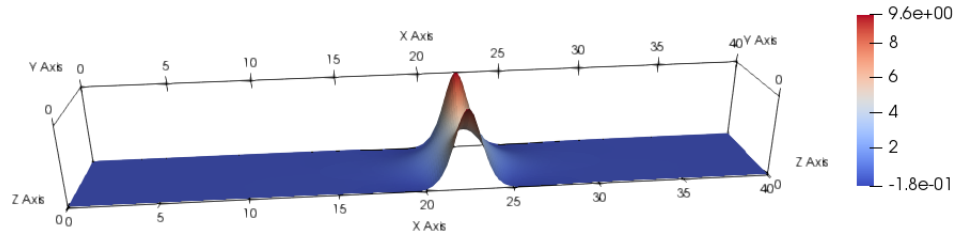


Figura 4.14: Solitón de Zaitsev en $T = 1.0$ con estrategia periódica.

Para la siguiente simulación se utiliza otra solución exacta de la ecuación KP en $\mathbb{R}^2$. El solitón en línea o en banda está dado por

$$u(x, y, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa(x + \lambda y - (4\kappa^2 - 3\lambda^2)t - x_0)). \quad (4.24)$$

Para esta simulación se usaron los parámetros $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$ en la ecuación KP, y $\lambda = 0$, $k = 1/\sqrt{2}$ y $x_0 = 20$. La simulación de

hizo en el rectángulo $[0, 40] \times [0, 20]$. Los parámetros numéricos usados son $\Delta t = 0.01$, $n_x = 250$, $n_y = 150$. Con estos datos el tamaño global de malla es $h \approx 0.2082733$. Esta malla es menos fina que la usada en la sección 4.2.1.2. Los elementos finitos y condiciones de frontera usados son los mismos que en la simulación anterior.

En la Figura 4.15 se presenta el solitón en línea al inicio de la simulación.

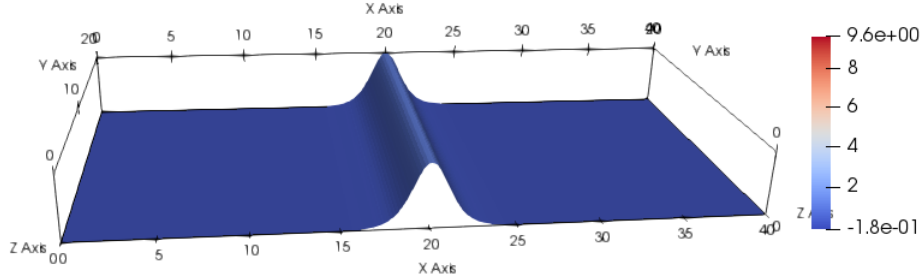


Figura 4.15: Solitón en línea $T = 0$ con estrategia periódica.

La simulación se dejó avanzar hasta $T = 5$. En la figura 4.16 se presenta la solución numérica en $T = 5$. Es importante notar es la primera vez en este trabajo que se ha podido avanzar hasta ese valor de tiempo en una simulación usando el esquema propuesto, sin el problema de crecimiento del error o pérdida de convergencia.

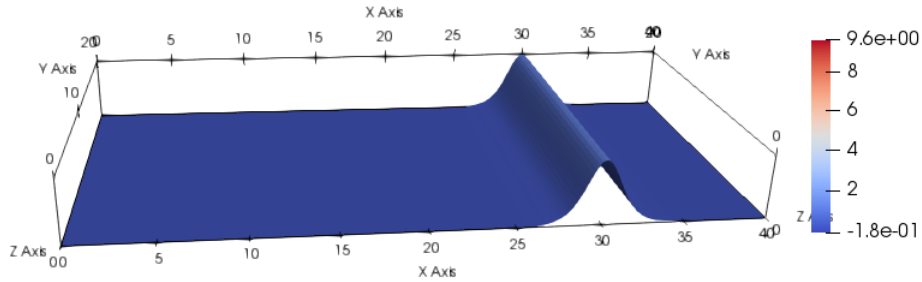


Figura 4.16: Solitón en línea $T = 5$ con estrategia periódica.

Como se expresó en la sección 4.2.1.2 la velocidad del solitón en línea es $c = 4\kappa^2 - 3\lambda^2$. En este caso el valor es $c = 2.0$. Se observa comparando las

Figuras 4.15 y 4.16 que el desplazamiento hacia la derecha es compatible con la teoría. El tiempo total de cómputo en esta simulación fue de 2.5 horas. El error reportado en la norma L^2 es 2.6×10^{-3} y en la norma del supremo es de 4×10^{-4} . Estos valores son mucho mejores que los arrojados por la simulación de la sección 4.2.1.2.

4.5 Discusión numérica final

Durante los primeros experimentos se probaron varias formulaciones variacionales y se comparaban los cálculos con los experimentos realizados en Wolfram Mathematica, usando la rutina NDSolve y las subrutinas adicionales disponibles, por ejemplo

```
Method->{"PDEDiscretization"->{"MethodOfLines",
"SpatialDiscretization"->{"TensorProductGrid",
"MinPoints"->250}}}.
```

Esta rutina tiene una limitación con el número de derivadas que se pueden implementar. Esto hizo que se descartara la versión diferencial de la ecuación KP, que tiene una derivada de cuarto orden en x . Al implementar la versión diferencial en FEniCS también apareció la dificultad de programar el término $u_{xx}v_{xx}$ que aparece de la integración por partes, donde v es la función de prueba. Los ejemplos que se encontraron en las referencias usaban o producto de hessianas o producto de divergencias, ninguno de las dos opciones se puede usar en el caso de la ecuación KP.

La siguiente formulación que se utilizó fue el cambio de variable $v = u_{xx}$. Primero se intentó manteniendo sin desarrollar el término $(uu_x)_x$. Luego se logró evidenciar que era mejor expandir este término y esto es lo que aparece en el sistema (4.2) y en la formulación variacional (4.3)-(4.4). Esta formulación empezó a producir resultados satisfactorios y con ella se realizó el presente trabajo. En las primeras pruebas se usó el solver por defecto de FEniCS y utilizado hasta 8 subprocesos; es decir, 8 partes del programa que se ejecutan de forma dividida para completar la tarea propuesta y para los cuales el sistema operativo asigna tiempo de CPU. Esta estrategia de cuasi paralelización está implementada internamente en FEniCS. El tiempo de cómputo sobrepasó las 18 horas continuas. La razón para intentar con esta formulación es que en previos trabajos ha dado buenos resultados en la ecuación KdV (Korteweg-de Vries), como por ejemplo recientemente en [37].

El primer intento de usar un solver fue con el solver Gmres. Si bien el tiempo de cómputo se redujo, la gran desventaja fue que `mpirun` no resultó compatible con Gmres y esto obligó a buscar otro solver. Con MUMPS si resultó posible usar `mpirun` con 4 subprocesos. Esta vez la limitación el número de procesos la estableció el equipo con el cual se terminaron de realizar todos los experimentos de la sección §4.2. La forma de usar `mpirun` con 4 subprocesos es:

```
mpirun -np 4 python3 mi_archivo.py
```

Para realizar las pruebas numéricas con los solitones del capítulo anterior se usó una malla creada con Gmsh. A continuación se muestra el código escrito para la construcción de malla. Luego de creada, ésta se guarda con la extensión `.msh` y posteriormente es convertida al formato `.xml` que es el que admite FEniCS.

```
//Gmsh project created on Tue Jun 23 09:30:07 2020
Point(1) = {-30, -10, 0, 1};
Point(2) = {30, -10, 0, 1};
Point(3) = {30, 10, 0, 1};
Point(4) = {-30, 10, 0, 1};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
Line Loop(10) = {1, 2, 3, 4};
Plane Surface(1) = {10};
Transfinite Line {2,4}=400;
Transfinite Line {1,3}=1000;
```

Con los distintos intentos se evidenció, de forma meramente experimental, que resultaba conveniente refinar más la malla en la frontera $y = y_{min}$ y $y = y_{max}$. Esto se evidencia en las dos últimas líneas del archivo escrito para Gmsh.

Las últimas simulaciones presentadas en la sección (§4.4) con resultados significativamente mejores, tanto en tiempo de cómputo como en el comportamiento del error, fueron realizadas utilizando la formulación variacional (4.19) - (4.20), insertando directamente en el espacio de elementos finitos condiciones de periodicidad en la variable y , y condiciones de frontera Dirichlet nulas a lo largo de las fronteras en $x = x_{min}, x = x_{max}$. Por esta

razón, se eliminaron los términos de frontera que aparecen en la formulación variacional original (4.3) - (4.4). Como se aprecia de los experimentos presentados, con esta estrategia se lograron obtener unos resultados numéricos prometedores en el error (no crece rápido como antes), con valores de tamaño global de malla mayor a los que fueron necesarios en la secciones 4.2.1.1 - 4.2.1.2. También es importante haber logrado avanzar en el experimento del solitón en línea hasta un valor de tiempo grande $T = 5$. Este valor no había sido alcanzado antes en las otras simulaciones. Esta estrategia de aproximación alternativa apenas arrojó resultados positivos en la última etapa de la investigación, y por lo tanto, no se lograron realizar exploraciones más detalladas.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

El resultado obtenido en esta tesis doctoral sobre la buena colocación local del problema de Cauchy, asociado a la ecuación GKPI con coeficientes dependientes de la variable temporal t , y con dominio espacial periódico, es una generalización del trabajo de Isaza et al. [18], y no fue encontrado en ninguno de los documentos consultados. Todos los trabajos previos que se reportan para la ecuación GKPI los encontramos dedicados a calcular explícitamente soluciones de onda solitaria en $\mathbb{R}^2$, mediante distintos métodos analíticos. Igualmente, hasta donde el autor del trabajo ha logrado consultar, no hay evidencia de que una aproximación numérica usando elementos finitos se haya usado en la literatura disponible para la ecuación KPI y con mayor razón para el modelo GKPI. Las referencias consultadas usan aproximaciones numéricas a las soluciones de la ecuación KPI vía diferencias finitas (FD) y métodos pseudoespectrales (PSD). De esta manera, consideramos que éstas son las principales contribuciones de este trabajo.

Inicialmente se presentó en las secciones 4.1-4.3 un esquema numérico donde se usaron elementos finitos de orden 1 sobre un rectángulo en el plano, utilizando las librerías del proyecto FEniCS, en el cual se impusieron condiciones de Dirichlet y Neumann a lo largo de todas las fronteras. En ese caso, se realizó un estimativo numérico del orden de convergencia, tanto en el espacio como en el tiempo. En algunos experimentos usando soluciones exactas de la ecuación KPI, el tiempo de cómputo fue alto y el error tendió a crecer rápidamente con el tiempo. Luego en la sección 4.4, se presentaron

resultados obtenidos usando un esquema alternativo que usó en contraste elementos finitos de orden 2, para aproximar la propagación del solitón de Zaitsev y el solitón en línea, en los cuales se considera periodicidad en la variable espacial y , y condiciones tipo Dirichlet homogéneas en los extremos del dominio en x , a fin de simular el efecto de decaimiento de la solución en $|x| \rightarrow \infty$. Los resultados con este esquema mejoraron sustancialmente los obtenidos antes, y consideramos que esta última estrategia tiene mucho potencial para ser aplicada para explorar la ecuación GKPI desde el punto de vista numérico. Sería interesante en un trabajo futuro realizar comparaciones de la eficiencia numérica del esquema propuesto con los resultados obtenidos a través de las técnicas de diferencias finitas y métodos seudospectrales, usados tradicionalmente para resolver este modelo, como por ejemplo en los trabajos de Feng y Mitsui [10], Chehab et al. [7] y Klein y Saut [28] o de Ratnas [39].

Apéndice A

Ejemplo de un archivo en FEniCS con datos no periódicos

Con el fin de hacer más completo este documento, en este apéndice se va a transcribir completamente el código python para FEniCS con el cuál se realizó la prueba del solitón Zaitsev que aparece en la figura 4.2.

```
from __future__ import print_function
from dolfin import * #importa la interface principal
from mshr import * #importa el mallador de FEniCS
#from numpy import cosh, tanh
import numpy as np #importa el módulo numpy
import time
import matplotlib
#matplotlib.use('TkAgg')
import matplotlib.pyplot as plt #entorno grafico matplotlib
from math import * #importa la funciones del modulo math
import os
os.environ['OMP_NUM_THREADS']='1'
set_log_level(LogLevel.ERROR)
from timeit import default_timer as timer
starttime=timer()
T=2.0
num_steps=1000
```

```

dt = T / num_steps # time step size dt=1/500=0.002
#define la región rectangular y se asigna valor a los parámetros
xmin=-30.0
xmax=30.0
ymin=-10.0
ymax=10.0
d=1.0
a=0.759836
b=sqrt( (pow(d,2) - 3*pow(a,4) )/pow(d,2) )
om=( pow(d,2) + pow(a,4) )/a
c=om/a
print('beta= %.5f'%b)
print('omega = %.5f'%om)
print('alfa = %.5f'%a)
print('velocidad de la onda = %.5f'%c)
mesh=Mesh('Malla1.xml') #importa la malla creada externamente
hmax=MaxCellEdgeLength(mesh) #calcula tamaño global de malla
print('h_max=%.10f'%mesh.hmax()) #imprime tamaño global de malla
print('dt = %.5f'%dt)
P1=FiniteElement('CG', triangle, 1) #se crea el elemento lagrangiano P1
element=MixedElement([P1, P1]) #se crea el elemento mixto
W=FunctionSpace(mesh, element)# genera el espacio mixto

h1=Expression('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*x[1]))*cosh(-(om*t) +
a*xmin)))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(-(om*t) + a*xmin),2)', \
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,a=a,b=b,
c=c,d=d,om=om) # Condicion de Dirichlet de u1 en x=min

h2=Expression('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*x[1]))*cosh(-(om*t) +
a*xmax)))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(-(om*t) + a*xmax),2)', \
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,a=a,b=b,
c=c,d=d,om=om) # Condicion de Dirichlet de u1 en x=xmax

h3=Expression('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*ymin))*cosh(-(om*t) +
a*x[0])))/pow(-(b*cos(d*ymin)) + cosh(-(om*t) + a*x[0]),2)', \
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,a=a,b=b,
c=c,d=d,om=om) #Condicion de Dirichlet de u1 en y=ymin

h4=Expression('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*ymax))*cosh(-(om*t) +

```

```

a*x[0]))/pow(-(b*cos(d*ymin)) + cosh(-(om*t) + a*x[0]),2)',\
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,a=a,b=b,
c=c,d=d,om=om) #Condicion de Dirichlet de u1 en y=ymax

h5=Expression('(-12*pow(a,3)*b*cos(d*x[1])*sinh(-(om*t) +
a*xmin))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(-(om*t) + a*xmin),2) - \
(24*pow(a,3)*(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(-(om*t) +
a*xmin))*sinh(-(om*t) + a*xmin))/pow(-(b*cos(d*x[1]))
+ cosh(-(om*t) + a*xmin),3)', \
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,
a=a,b=b,c=c,d=d,om=om) # Condicion de Neumann de u1 at x=xmin

h6=Expression('(-12*pow(a,3)*b*cos(d*x[1])*sinh(-(om*t) +
a*xmax))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(-(om*t) + a*xmax),2) - \
(24*pow(a,3)*(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(-(om*t) +
a*xmax))*sinh(-(om*t) + a*xmax))/pow(-(b*cos(d*x[1]))
+ cosh(-(om*t) + a*xmax),3)', \
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,
a=a,b=b,c=c,d=d,om=om) # Condicion de Neumann de u1 at x=xmax

h7=Expression('(12*pow(a,2)*b*d*cosh(om*t - a*x[0])
*sin(d*ymin))/pow(-(b*cos(d*ymin)) + cosh(om*t - a*x[0]),2) - \
(24*pow(a,2)*b*d*(1 - b*cos(d*ymin))*cosh(om*t - a*x[0]))
*sin(d*ymin))/pow(-(b*cos(d*ymin)) + cosh(om*t - a*x[0]),3)',\
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,a=a,
b=b,c=c,d=d,om=om) # Condicion Neumann de u1 en y=ymin

h8=Expression('(12*pow(a,2)*b*d*cosh(om*t - a*x[0])
*sin(d*ymax))/pow(-(b*cos(d*ymax)) + cosh(om*t - a*x[0]),2) - \
(24*pow(a,2)*b*d*(1 - b*cos(d*ymax))*cosh(om*t - a*x[0]))
*sin(d*ymax))/pow(-(b*cos(d*ymax)) + cosh(om*t - a*x[0]),3)',\
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,
a=a,b=b,c=c,d=d,om=om) # Condicion Neumann de u1 en y=ymax

# Create mesh function over cell facets
boundary_parts = MeshFunction('size_t', mesh, mesh.topology().dim()-1)
#Mark lower boundary facets as subdomain 0
class Leftboundary(SubDomain):
def inside(self, x, on_boundary):
return near(x[0], xmin)

```

```

Gamma_0 = Leftboundary()
Gamma_0.mark(boundary_parts, 0)
# Mark upper boundary facets as subdomain 1
class Righthboundary(SubDomain):
def inside(self, x, on_boundary):
return near(x[0], xmax)
Gamma_1 = Righthboundary()
Gamma_1.mark(boundary_parts, 1)
# Mark lower boundary facets as subdomain 2
class Lowboundary(SubDomain):
def inside(self, x, on_boundary):
return near(x[1], ymin)
Gamma_2 = Lowboundary()
Gamma_2.mark(boundary_parts, 2)}
# Mark upper boundary facets as subdomain 3
class Upboundary(SubDomain):
def inside(self, x, on_boundary):
return near(x[1], ymax)
Gamma_3 = Upboundary()
Gamma_3.mark(boundary_parts, 3)
ds=Measure('ds')(domain=mesh, subdomain_data=boundary_parts)
#se genera la región mixta para las condiciones Dirichlet
left = 'near(x[0],-30.0)'
righth = 'near(x[0],30.0)'
low ='near(x[1],-10.0)'
up= 'near(x[1],10.0)'
bcu_left = DirichletBC(W.sub(0), h1, left)
bcu_righth = DirichletBC(W.sub(0), h2, righth)
bcu_low = DirichletBC(W.sub(0), h3, low)
bcu_up = DirichletBC(W.sub(0), h4, up)
bcu = [bcu_left, bcu_righth,bcu_low,bcu_up]
bcs = bcu

#se establecen las constantes de la ecuación KPI y el valor de theta
alpha1=Constant(1.0)
alpha2=Constant(1.0)
alpha3=Constant(1.0)
theta=Constant(0.5)
#se expresa u0 en forma de expresión C++
u0=Expression(('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*x[1])

```

```

*cosh(om*t - a*x[0]))/pow(-(b*cos(d*x[1])) +
cosh(om*t - a*x[0]),2)', '(-12*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])
*cosh(om*t - a*x[0]))/pow(-(b*cos(d*x[1])) +
cosh(om*t - a*x[0]),2) - (24*pow(a,4)*cosh(om*t - a*x[0])*
(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - a*x[0])))/pow(-(b*cos(d*x[1]))
+ cosh(om*t - a*x[0]),3) + (48*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*
pow(sinh(om*t - a*x[0]),2))/pow(-(b*cos(d*x[1])) +
cosh(om*t - a*x[0]),3) + (72*pow(a,4)*(1 - b*cos(d*x[1])
*cosh(om*t - a*x[0]))*pow(sinh(om*t - a*x[0]),2))
/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(om*t - a*x[0]),4)'),\
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,
a=a,b=b,c=c,d=d,om=om)
#Se expresa la solución exacta como expresión en C++
uD=Expression(('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*x[1])*
cosh(om*t - a*x[0])))/pow(-(b*cos(d*x[1])) +
cosh(om*t - a*x[0]),2)', '(-12*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*
cosh(om*t - a*x[0]))/pow(-(b*cos(d*x[1])) +
cosh(om*t - a*x[0]),2) - (24*pow(a,4)*cosh(om*t - a*x[0])*
(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - a*x[0])))/pow(-(b*cos(d*x[1]))
+ cosh(om*t - a*x[0]),3) + (48*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*
pow(sinh(om*t - a*x[0]),2))/pow(-(b*cos(d*x[1])) +
cosh(om*t - a*x[0]),3) + (72*pow(a,4)*(1 - b*cos(d*x[1])
*cosh(om*t - a*x[0]))*pow(sinh(om*t - a*x[0]),2))/
pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(om*t - a*x[0]),4)'),\
degree=2, t=0,xmin=xmin,xmax=xmax,ymin=ymin,ymax=ymax,
a=a,b=b,c=c,d=d,om=om)

```

```

w=Function(W) #define la función de "admisible" como función de W
uold=interpolate(u0, W) #se interpola u0 en el espacio mixto W
V=FunctionSpace(mesh, P1) #se crea el espacio de funciones de prueba
u1sol=Function(V)
u2sol=Function(V)
#guarda la solución
ufile1=File('Zaitsev_nonzero_MUMPS/solucion1.xml')
ufile2=File('Zaitsev_nonzero_MUMPS/solucion2.xml')
v1,v2=TestFunctions(W) #funciones de prueba
u1, u2=split(w)
uold1, uold2=split(uold)
#La formulación variacional
F=(grad(u1)[0]-grad(uold1)[0])*v1*dx*dt*alpha1*

```

```

grad(theta*u1+(1-theta)*uold1)[0]*
grad(theta*u1+(1-theta)*uold1)[0]*v1*dx+
dt*alpha1*(theta*u1+(1-theta)*uold1)*(theta*u2+
(1-theta)*uold2)*v1*dx-dt*alpha2*grad(theta*u2+
(1-theta)*uold2)[0]*grad(v1)[0]*dx+
dt*alpha3*grad(u1)[1]*grad(v1)[1]*dx + (theta*u2+
(1-theta)*uold2)*v2*dx + grad(theta*u1+(1-theta)*
uold1)[0]*grad(v2)[0]*dx+dt*alpha2*grad(u2)[0]*v1*ds(1)-
dt*alpha2*grad(u2)[0]*v1*ds(0) - (dt*alpha3*h8*v1*ds(3)-
dt*alpha3*h7*v1*ds(2)) - (h6*v2*ds(1)-h5*v2*ds(0))

xdmffile_u=XDMFFile('Zaitsev_nonzero_MUMPS/solucion.xdmf')

t=0
for n in range(num_steps):
    t =(n+1)*dt
    h1.t=t #actualiza cada una de las condicioens
    h2.t=t
    h3.t=t
    h4.t=t
    h5.t=t
    h6.t=t
    h7.t=t
    h8.t=t
    uD.t=t
    J=derivative(F,w) #calculo del jacobiano
    #solve(F==0, w, bcs, J=J )
    # uses LU Gaussian elimination
    #plantamiento del problema no lineal
    problem =NonlinearVariationalProblem(F, w, bcs, J)
    solver= NonlinearVariationalSolver(problem) #solociona "problem"
    prm= solver.parameters #crea los parámetros del solver
    prm['newton_solver']['linear_solver']='mumps'
    # changes linear solver in Newton iteration
    #prm['newton_solver']['linear_solver']='gmres'
    # changes linear solver in Newton iteration
    #info(prm, True)
    #To see options in NonlinearVariationalProblem().Set_log_level()
    #must be commented above
    solver.solve()

```

```

u1, u2= w.split()
u_e=interpolate(uD,W)
u_e1,u_e2=u_e.split()
if n % 10 == 0:      # compute error only every 10 timesteps
    u_e1,u_e2=u_e.split()
    error = np.abs(u_e1.compute_vertex_values(mesh)
        - u1.compute_vertex_values(mesh)).max()
    print('t = %.5f: error = %.5g' % (t, error))
else:
    print(t)
uold.assign(w)
if n % 20==0:          # Save u1 every 20 timesteps
    xdmffile_u.write(u1,t)
u1sol.interpolate(u1)
ufile1 << u1sol
u2sol.interpolate(u_e1)
ufile2 << u2sol
aftersolveT=timer()
totime=aftersolveT-startime
xdmffile_u.write(u1,t)  # Save u1 at the final time
print('Tiempo en segundos=%.3f'%totime)
import sys
sys.modules['__name__'].__dict__.clear()

```

Apéndice **B**

Ejemplo de un archivo en FEniCS con frontera periódica: solitón de Zaitsev

Ejemplo presentado en la sección 4.4.

```
#para importar los modulos necesarios
from __future__ import print_function
from dolfin import *
from mshr import *
import numpy as np
import time
import matplotlib
#matplotlib.use('TkAgg')
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *

ffc_options = {"optimize": True, \
               "eliminate_zeros": True, \
               "precompute_basis_const": True, \
               "precompute_ip_const": True}

from timeit import default_timer as timer
set_log_level(LogLevel.ERROR)
```

```

starttime=timer()

#define los parametros numericos
T = 1.0      # final time
num_steps = 1200 # number of time steps
dt = T / num_steps # time step size
d = 1.0
a = 0.74
b=sqrt( (pow(d,2) - 3*pow(a,4) )/pow(d,2) )
om=( pow(d,2) + pow(a,4) )/a
c=om/a

print(b)
print(om)
print(c)


Lx= 40
Ly= 2*pi/d # Debe ponerse aqui periodo en y del soliton de Zaitsev.

xmin=0
xmax=Lx
ymin=0
ymax=Ly

x0 = 20 # posicion inicial en x del soliton Zaitsev

class PeriodicBoundary(SubDomain): #se define la frontera de tipo periodico

    def inside(self, x, on_boundary):
        return bool((near(x[0],0.0) or near(x[1],0.0)) and \
            (not ((near(x[0], 0.0) and near(x[1], Ly) ) \
            or (near(x[0], Lx) and near(x[1], 0.0 )))) ) and on_boundary)

    def map(self, x, y):

        if near(x[0], Lx) and near(x[1], Ly):
            y[0] = x[0] - Lx
            y[1] = x[1] - Ly
        elif near(x[0], Lx):

```

```

        y[0] = x[0] - Lx
        y[1] = x[1]
    elif near(x[1], Ly):
        y[0] = x[0]
        y[1] = x[1] - Ly

nx= 300
ny= 150
#genera un mallado triangular y elementos P2
mesh=RectangleMesh(Point(xmin,ymin),Point(xmax,ymax),nx,ny )
P2 = FiniteElement('P', triangle, 2)
element = MixedElement([P2, P2 ])

#define el espacio mixto y condición peridica y Dirichlet
W = FunctionSpace(mesh, element, constrained_domain= PeriodicBoundary() )

L = 'near(x[0], 0)' # Para garantizar decaida de la solucion en x=0, x = Lx
bc_left = DirichletBC(W, Constant( (0,0) ), L )
bcs = [bc_left]

hmax=MaxCellEdgeLength(mesh)
print('hmax=%.7f'%mesh.hmax())
print('dt = %.5f'%dt)

u0=Expression(('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*x[1]))*cosh(om*t - \
a*(x[0] - x0) )))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(om*t - a*(x[0] -x0) ),2)',\
'(-12*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - a*(x[0] - x0) )) \
/ pow(-(b*cos(d*x[1])) +\cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),2) - \
(24*pow(a,4)*cosh(om*t - a*(x[0] - x0) )*(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - \
a*(x[0] - x0) ) ))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),3) + \
(48*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*pow(sinh(om*t - a*(x[0] - x0) ), 2) )\
/pow(-(b*cos(d*x[1])) +cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),3 ) + \
(72*pow(a,4)*(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - a*(x[0] -x0) ))\
*pow(sinh(om*t - a*(x[0] -x0) ),2)) / pow(-(b*cos(d*x[1])) +\
cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),4)'),\
degree=1, t=0, a=a, b=b, c=c, d=d, om=om, x0 = x0 )

```

```

uD=Expression(('(12*pow(a,2)*(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - \
a*(x[0] - x0) )))/pow(-(b*cos(d*x[1])) + \
  cosh(om*t - a*(x[0] -x0) ),2)',\
'(-12*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ))\
/pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),2) - \
(24*pow(a,4)*cosh(om*t - a*(x[0] - x0) )*(1 - b*cos(d*x[1]))*\
cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ) ))/pow(-(b*cos(d*x[1])) \
+ cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),3) + \
(48*pow(a,4)*b*cos(d*x[1])*pow(sinh(om*t - a*(x[0] - x0) ), 2 ) )\
/pow(-(b*cos(d*x[1])) + \
  cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),3 ) + \
(72*pow(a,4)*(1 - b*cos(d*x[1])*cosh(om*t - a*(x[0] -x0) ))\
*pow(sinh(om*t - a*(x[0] -x0) ),2))\
, /pow(-(b*cos(d*x[1])) + cosh(om*t - a*(x[0] - x0) ),4)') ,\
degree=1, t=0, a=a, b=b, c=c, d=d, om=om, x0 = x0 )
#define el espacio de las funciones de prueba
w=Function(W)
uold=interpolate(u0, W)
v1,v2 = TestFunctions(W)
u1, u2 = split(w)
uold1, uold2 = split(uold)

alpha1=Constant(1.0)
alpha2=Constant(1.0)
alpha3=Constant(1.0)
theta=Constant(0.5)

#formulacion variacional

F=(grad(u1)[0]-grad(uold1)[0])*v1*dx+dt*alpha1*grad(theta*u1+\
(1-theta)*uold1)[0]*grad(theta*u1+\
(1-theta)*uold1)[0]*v1*dx+dt*alpha1*(theta*u1+(1-theta)*uold1)*\
(theta*u2+(1-theta)*uold2)*v1*dx-dt*alpha2*grad(theta*u2+\
(1-theta)*uold2)[0]*grad(v1)[0]*dx \
+ dt*alpha3*grad(u1)[1]*grad(v1)[1]*dx + (theta*u2+(1-theta)*uold2)*v2*dx +\
grad(theta*u1+(1-theta)*uold1)[0]*grad(v2)[0]*dx

vtk_fileu1 = File('Kp1_per_Zaitsev/u1.pvd')
#programacion del solver elegido y sus parametros

```

```

t=0
for n in range(num_steps):

    t += dt
    J = derivative(F, w)
    problem = NonlinearVariationalProblem(F, w, bcs, J, \
form_compiler_parameters= ffc_options)
    solver = NonlinearVariationalSolver(problem)
    prm = solver.parameters
    prm['newton_solver']['linear_solver'] = 'gmres'
    prm['newton_solver']['preconditioner'] = 'ilu'
    prm['newton_solver']['absolute_tolerance'] = 1e-5
    prm['newton_solver']['relative_tolerance'] = 1e-5
    solver.solve()

    u1, u2= w.split()
    uD.t = t    # Calculo solucion exacta en tiempo t
    u_e=interpolate(uD, W)

    if n % 40 == 0:
        u_e1, u_e2 = u_e.split()
        error1 = assemble( inner(u_e1 - u1, u_e1-u1)*dx )**0.5 # Norma L2
        error2 = np.abs(u_e1.compute_vertex_values(mesh) - \
u1.compute_vertex_values(mesh)).max()    # Norma max
        print('t = %.5f: error L2 = %.5g' % (t, error1))
        print('t = %.5f: error max = %.5g' % (t, error2))
        uold.assign(w)
        vtk_fileu1 << (u1, t)

aftersolveT=timer()
totime=aftersolveT-startime
print('Tiempo en segundos=%.3f'%totime)

```

Apéndice C

Ejemplo de un archivo en Mathematica

El presente experimento fue realizado utilizando Wolfram Mathematica 12.1. Se presenta el modelo de un solitón de la ecuación KPI que se mueve en una dirección transversa (ver §4.2.1.2). El código completo del experimento es el siguiente:

```
Kappa = 1.0; Lambda = -(1 /Sqrt[2]);
x0 = 6.0; xmin = 0; xmax = 20; ymin = 0; ymax = 10;
Alpha_1 \= 6.0; Alpha_2 = 1.0; Alpha_3 = 2.0;
u0[x_, y_] := 2 Kappa^2 Sech[Kappa] (x - x0 + y Lambda)]^2;
sol = NDSolve[ { D[u[ x, y, t], x,
t] == -Alpha_1 D[u[x, y, t] D[u[x, y, t], x], x] - Alpha_2 D[
u[x, y, t], {x, 4}] + Alpha_3 D[u[x, y, t], {y, 2}],
u[ x, y, 0] == u0[x, y],
u[xmin, y, t] == 2 Kappa^2 Sech[Kappa] (-x0 + xmin + y Lambda
- t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]^2,
u[xmax, y, t] == 2 Kappa^2 Sech[Kappa] (-x0 + xmax + y Lambda
- t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]^2,
u[x, ymin, t] == 2 Kappa^2 Sech[Kappa] (x - x0 + ymin Lambda
- t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]^2,
u[x, ymax, t] == 2 Kappa^2 Sech[Kappa] (x - x0 + ymax Lambda
- t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]^2,
(D[u[x, y, t], x] /. x -> xmin) == -4 Kappa^3 Sech[Kappa] (-x0 + xmin
+ y Lambda -
t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]^2 Tanh[Kappa] (-x0 +
```

```

xmin + y Lambda - t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))],
(D[u[x, y, t], x] /. x -> xmax) == -4 Kappa^3 Sech[Kappa (-x0 + xmax +
y Lambda- t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]^2 Tanh[Kappa (-x0 +
xmax + y Lambda - t (4 Kappa^2 - 3 Lambda^2))]],
u, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, {t, 0, 1.0},
MaxStepSize -> 0.05,
Method -> {"MethodOfLines",
"SpatialDiscretization" -> {"TensorProductGrid"}}]

Plot3D[ u[x, y, 0.01] /. Flatten[sol], {x, xmin, xmax}, {y, ymin,
ymax}, PlotPoints -> 100, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

```

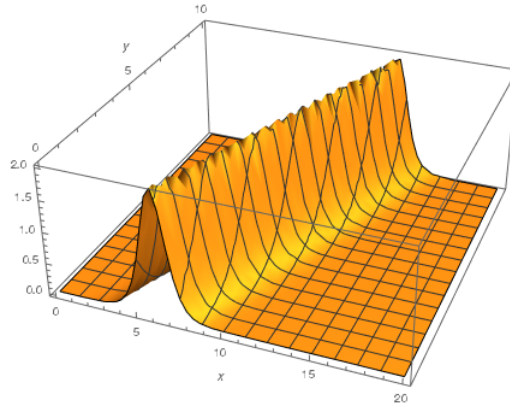


Figura C.1: Soliton lineal. Experimento de Feng y Mitsui [10].

Este código fue modificado para experimentar con cada uno de los solitones que se muestran en el documento. Para el cálculo del orden de convergencia temporal (§4.3) se usaron los valores $x_{min} = 0$, $x_{max} = 20$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = 10$, $x_0 = 0$ $\kappa = \sqrt{2}$, $\lambda = 0$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 3$.

Referencias

- [1] M. Ablowitz. Nonlinear Dispersive Waves Asymptotic Analysis and Solitons. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2011.
- [2] A. H. Baker, E. R. Jessup, Tz. V. Kolev. A simple strategy for varying the restart in GMRES(m). Journal of Computational and Applied Mathematics 230 (2009) 571-761.
- [3] Á. Benyi, T. Oh. The Sobolev Inequality on the Torus Revised. Mathematics. 44 (2013). College of Science and Engineering.
- [4] A. Borhanifar, H. Jafari, S. Karimi. New Solitons and Periodic Solutions for the Kadomtsev-Petviashvili Equation. J. Nonlinear Sci. Appl. 1 (2008), No. 4, pp. 224-229.
- [5] J. Bourgain. On the Cauchy Problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation. Geometric and Functional Analysis, Vol 3, No. 4, pp. 315-341 (1993).
- [6] A. Bratos, E. Twizell. An Explicit Finite-Difference Scheme for the Solution of the Kadomtsev-Petviashvili Equation. Intern. J. Computer Math., Vol. 68, pp. 175-187. 1998.
- [7] J.-P. Chehab, P. Garnier. Mammeri, Y. Numerical Solution of the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equations with Compact Finite Difference Schemes. 2016. < hal – 01312245 >. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01312245>.
- [8] P. Clarkson. Painlavé Analysis and the Complete Integrability of a Generalized Variable-Coefficient Kadomtsev-Petviashvili Equation. IMA Journal of Applied Mathematics (1990) 44, 27-53.
- [9] D. David, P. Winternitz. Integrable Nonlinear Equations for Water Waves in Straits of Varying Depth and Width. Studies in Applied Mathematics, Vol. 76 (1987), pp. 133-168.
- [10] B. Feng, T. Mitsui. A Finite Difference Method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili Equations. Journal of Computational and Applied Mathematics 90, pp. 95-116 (1998).
- [11] J. Galvis, H. Versieux. Introdução à Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Via Método de Elementos Finitos. 28º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2011.
- [12] C. Geuzaine, E. Marchandise, J-F. Remacle. An introduction to Geometrical Modelling and Mesh Generation. Documento electrónico.

- [13] T. Grava, C. Klein, G. Pitton. Numerical study of the Kadomtsev-Petviashvili equation and dispersive shock waves. *Proc. R. Soc. A* 474: 20170458.
- [14] R. Hirota. *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [15] R. Iorio, W. Nunes. *Introdução às Equações de Evolução não Lineares*. 18° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1991.
- [16] R. Iorio, W. Leite. On the Equations of KP-Type. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 128A, pp. 725–743 (1998).
- [17] R. Iorio, V. Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge studies in advanced mathematics, 2001.
- [18] P. Isaza, J. Mejia, V. Stallbohm. Local Solution for the Kadomtsev- Petviashvili Equation with Periodic Conditions. *Manuscripta Math.* 75, pp. 383-393 (1992).
- [19] P. Isaza, J. Mejia, V. Stallbohm. Local Solution for the Kadomtsev-Petviashvili Equation in $\mathbb{R}^2$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 196, pp. 566-587 (1995).
- [20] R. S. Johnson. Water Waves and Korteweg-de Vries Equations. *J. Fluid Mech.* (1980), Vol. 97, Issue 4, pp. 701-719.
- [21] X. Y. Jia, B. Tian, Z. Du, L. Liu. Lump and rogue waves the variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation in a fluid. *Modern Physics Letters B.* (2018) 12 pages.
- [22] R. S. Johnson. *A Modern introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge texts in Applied Mathematics, 1997.
- [23] B. Kadomtsev, V. Petviashvili. On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media. *Soviet Physics Doklady*, Vol. 15, pp. 539 (1970).
- [24] T. Kato. Linear Evolution Equation of “Hyperbolic” Type, II. *J. Math. Soc. Japan*. Vol. 25, NO. 4, 1973. pp. 648-666.
- [25] T. Kato. Quasi-Linear Equations of Evolution with Applications to Partial Differential Equations. *Lecture Notes in Math.* 448, Springer-Verlag., pp. 25-70 (1975).
- [26] T. Kato. On the Korteweg-de Vries Equation. *Manuscripta Math.* Vol 28, 1979. pp.89-99.
- [27] T. Kato. On the Cauchy Problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation. *Studies in Applied Mathematics*. Vol.8. 1983. pp. 93-128.
- [28] C. Klein, J. Saut. Numerical Study of Blow up and Stability of Solutions of Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equations. *Journal of Nonlinear Science* (2012), Vol. 22, pp. 763-811.
- [29] M. Larsson, F. Bengzon. *The Finite Element Methods: Theory, Implementation, and Practice*. Springer, 2010.
- [30] S. Larsson, V. Thomée. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer, 2009.
- [31] H. Langtanten, A. Logg. *Solving PDEs in Python. The FEniCS Tutorial I*. SpringerOpen, 2016.
- [32] L-L. Li B. Tian, C-Y. Zhang, T. Xu. On the generalizad Kadomtsev-Petviashvili equation with variable coefficients via symbolic computation. *Phys. Scr.* 76 (2007), pp. 411-417.

- [33] F. Linares, G. Ponce. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. Springer, 2015.
- [34] F. Linares. Ecuaciones dispersivas no Lineales Caso Periódico. XX Escuela Venezolana de Matemáticas. Mérida, 2 al 7 de septiembre de 2007.
- [35] Z. Lü, F. Xie. Explicit Bi-Soliton-Like Solution for the Generalized KP Equation with Variable Coefficients. Mathematical and Computer Modelling 52 (2010), pp. 1423-1427.
- [36] L. Molinet, J. Saut, N. Tzvetkov. Global Well-Posedness for the KP-I Equation. Math. Ann. 324, pp.255-275 (2002).
- [37] J.C. Muñoz Grajales. Non-homogeneous boundary value problems for some KdV-type equations on a finite interval: a numerical approach. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 96, 105669, 2021
- [38] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1983.
- [39] A. Slapere, M. Ratas. On the application of 2D discrete spectral analysis in case of the KP equation. Research Rethe application of rt Mech 319/17. Departament of Cybernetics Scholl of Science Tallinn University of Technology, Tallinn 2017.
- [40] M. Schwarz. Periodic Solutions of Kadomtsev-Petviashvili. Advances in Mathematics 66, pp. 217-233 (1987).
- [41] R. Scott. Introduction to Automated Modeling with FEniCS. Computational Modeling Initiative LLC, 2018.
- [42] J. Stoer, R. Bulirsh. Introduction to Numerical Analysis. Springer, 1993.
- [43] J. Striwerda. Finite Difference Schemes and Partial Differential equations. SIAM, 2004.
- [44] Y. Sun, H-W. Tam. On the General Variable-Coefficient KP Equation with Self-Consistent Sources. Journal of Mathematical Physics 52, 073511 (2011).
- [45] B. Tian, Y-T. Gao. Truncated Painlevé expansion and a wide-ranging type of generalized variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equations. Physics Letters A 209 (1995), pp. 297-304.
- [46] M. Wang, M. Li, X. Zhang. Two-Soliton to a Generalized KP Equation with General Variable Coefficients. Applied Mathematics Letters 76 (2018) 21-27.
- [47] A-M. Wazwaz. A computational approach to soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation. Applied Mathematical and Computation 123 (2001), 205-217.
- [48] D. Wu, S-L. Wen. A Uniqueness Theorem for the Two-Dimensional Generalized Korteweg-de Vries Equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications 158, 203-212 (1991).
- [49] D. Wu, S-L. Wen. Existence and Uniqueness of a Periodic solution to the Two-Dimensional Generalized Korteweg-de Vries Equation. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 86 (1991).
- [50] J. P. Wu. Bilinear Bäcklund transformation for a Variable-Coefficient Kadomtsev-Petviashvili Equation. Chin. Phys. Lett. Vol. 28, No. 6 (2011). 4 pages.
- [51] X. Y. Jia, B. Tian, Z. Du, L. Liu. Lump and rogue waves the variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation ina fluid. Modern Physics Letters B. 12 pages (2018).

- [52] E. Yomba. Construction of New Soliton-Like Solutions for the $(2 + 1)$ Dimensional KdV Equation with Variable Coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals* 21 (2004), pp. 75-79.
- [53] A.A. Zaitsev. Formation of stationary nonlinear waves by superposition of solitons. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, Volume 272, 583-587.
- [54] L. Zhiming, E.M. Tain, R. Grimshaw. Interaction of lump described by the Kadomtsev-Petviashvili I equation. *Science Direct*, 2004.