



**ESTUDIO DEL EFECTO DE HUMEDAD Y TEMPERATURA EN DISMINUIR LA
RESISTENCIA UNIAXIAL DE LÁMINAS POLIMÉRICAS**

DANIEL JOSÉ SALCEDO VALENCIA

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2020**



**ESTUDIO DEL EFECTO DE HUMEDAD Y TEMPERATURA EN DISMINUIR LA
RESISTENCIA UNIAXIAL DE LÁMINAS POLIMÉRICAS**

DANIEL JOSÉ SALCEDO VALENCIA

Código: 201700727

**Proyecto de Grado presentado como requisito para optar por el título de Magister
en Ingeniería con énfasis en Ingeniería Aeroespacial:**

DIRECTOR:

JAIRO ANTONIO VALDÉS ORTIZ

Ingeniero Mecánico, PhD.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2020**

DEDICATORIA

A mis padres Jorge Salcedo y Patricia Valencia, por su apoyo en cada año de la maestría
de la vida

A mis hermanos David y Miguel Ángel Salcedo, por siempre creer en mí

A mi esposa Xiomara Silva, por su amor sincero y ser mi bastón día a día

AGRADECIMIENTOS

Al Ser Infinito que hace de los segundos los instantes más casuales de maravillas hechas realidad entre el todo y la nada: y aunque todo parezca lejano, nada importa más que el aquí y el ahora

A mis padres Jorge Salcedo y Patricia Valencia, por impulsarme siempre a más, por darme la educación, los valores y principios necesarios para dar ejemplo y saber guiar a quien lo necesita, y por haber estado siempre con el amor infinito

A mis hermanos David y Miguel Salcedo, por creer su hermano, escucharlo y tener siempre una manera de sacar sonrisas en cada momento compartido

A mi esposa Xiomara Silva, por hacerme creer en lo imposible, por su amor incondicional, su paciencia, por ser el soporte en los momentos de duda, por hacerme crecer, por su entrega sincera a cada instante, por ser ejemplo de mujer

A los estimados Lusía Moncada y Jesús Mora, quienes me recibieron como a un hijo y estar en cada momento con palabras de apoyo y consejos

Al ingeniero Jairo Valdés (Ph.D.), de quien siempre se tiene algo para aprender, con su estilo propio de enseñanza, con sus expresiones de alegría al hablar, quien fue una guía e inspiración desde el pregrado, quien brindaba un oriente y permitió que este documento se pudiese realizar

A la Universidad del Valle, por formarme como ingeniero, magister y profesional íntegro en diversas áreas de la vida

CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN.....	10
2. OBJETIVOS	12
2.1. OBJETIVO GENERAL	12
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	12
3. METODOLOGÍA.....	13
4. MICROMECAÁNICA Y ELASTICIDAD	14
4.1. Tipos de material de acuerdo con la elasticidad	15
4.2. Rigidez de la lámina	18
4.3. Módulos de elasticidad de la lámina	22
5. INCLUSIÓN DE HUMEDAD Y TEMPERATURA	29
5.1. Expansión térmica	33
5.2. Expansión por humedad.....	37
6. CRITERIOS DE FALLA DE LA LÁMINA	44
6.1. Resistencia de la lámina	45
6.2. Criterios de falla: Lámina	57
6.2.1. Criterio del máximo esfuerzo	68
6.2.2. Criterio de la máxima deformación	70
6.2.3. Criterio de interacción de falla	73
6.2.4. Falla higrotérmica	75
6.2.5. Diagrama del proceso de diseño	78
7. CONCLUSIONES	81
RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS	82
BIBLIOGRAFÍA.....	83
Anexo A. Ensayos estándares relativos a fracción de peso o volumen	89
Anexo B. Tensor de coeficientes elásticos y simetría.....	92
Anexo C. Matriz de coeficientes elásticos para cuerpos de diferente simetría material	93
Anexo D. Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal	94
Anexo E. Relaciones entre constantes matemáticas y constantes ingenieriles	96

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 4.1. Componentes cartesianas del tensor esfuerzo (Mase & Mase, 1999)	16
Figura 4.2. Rotación positiva de los ejes principales 1,2 con respecto a los globales x,y.	22
Figura 4.3. Esfuerzo cortante. Izquierda: En el plano. Derecha: Intralaminar	24
Figura 4.4. Variación del módulo de la lámina con respecto al ángulo de la carga.....	25
Figura 4.5. Deformación de lámina unidireccional carbono/epóxico reforzada a 45°	26
Figura 4.6. Rigidez Q_{11} y Q_{66} contra los módulos E_x y G_{xy}	26
Figura 4.7. Long característica de disminución: banda semi-infinita a cargas autoequilibradas en los bordes	27
Figura 5.1. Afectación del esfuerzo cortante en el plano vs deformación cortante: compuesto unidireccional AS4/3501-6 carbono/epóxico	31
Figura 5.2. Variación de rigidez con la temperatura de un típico polímero	33
Figura 5.3. Proceso termoestable: Diagrama de curado Transformada-Tiempo- Temperatura	33
Figura 5.4. Fibra en su caparazón de matriz	37
Figura 5.5. Gráfica de Difusión de Fick	41
Figura 5.6. Efecto de la temperatura en la velocidad de absorción de humedad en un laminado (3,0x5,0x0,12 in) híbrido boro-grafito/epóxico (5505/AS-3501)	43
Figura 5.7. Difusión de humedad como función de la temperatura.....	43
Figura 6.1. Resistencia de lámina unidireccional	45
Figura 6.2. Comportamiento del esfuerzo cortante en el plano vs deformación	46
Figura 6.3. Modos de fractura	47
Figura 6.4. Lámina unidireccional fracturada por compresión y cortante.....	53
Figura 6.5. Círculo de Mohr en el plano 2-3 a compresión transversal.....	53
Figura 6.6. Componentes de cortante y su relación con los modos de falla a cortante	54
Figura 6.7. Representación de la geometría de la grieta.....	57
Figura 6.8. Pirámide de Ensayos de Rouchon	68
Figura 6.9. Criterio de máximo esfuerzo en el espacio de esfuerzos $\sigma_2 - \sigma_6$	69
Figura 6.10. Criterio del Máximo Esfuerzo	70
Figura 6.11. Esfuerzo aplicado que causa diferentes fallas como función del ángulo para poliéster/50%fibra de vidrio.....	70
Figura 6.12. Predicción de valores para varias orientaciones de fibra según el Criterio del Máximo Esfuerzo	70
Figura 6.13. Envolventes de falla con criterios del máx. esfuerzo y máx. deformación para el espacio de deformaciones $\epsilon_1 - \epsilon_2$	71
Figura 6.14. Curvas esfuerzo-deformación a tracción transversal.....	72
Figura 6.15. Envolvente de falla según Criterio de Interacción de Falla en el espacio $\sigma_2 - \sigma_6$ y algunos datos experimentales	74
Figura 6.16. Diagrama del proceso de diseño.....	80

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 3.1 Metodología	13
Tabla 4.1 Fracciones volumétricas y de peso	14
Tabla 4.2. Ley de Hooke y tensores.....	16
Tabla 4.3. Constantes elásticas	18
Tabla 4.4. Coeficientes Lekhnitski y Chentsov	20
Tabla 4.5. Constantes ingenieriles	21
Tabla 4.6. Transformación de tensores.....	21
Tabla 4.7. Relaciones de Hooke para una lámina ortotrópica	21
Tabla 4.8. Módulos de elasticidad de la lámina y coeficientes de Poisson	23
Tabla 4.9. Restricciones de constantes elásticas.....	24
Tabla 4.10. Propiedades del material unidireccional cargado fuera del eje principal	25
Tabla 5.1. Relaciones relativas a la deformación	29
Tabla 5.2. Material ortotrópico especial elástico lineal en estado de esfuerzo plano	29
Tabla 5.3. Efecto higrotérmico en propiedades	30
Tabla 5.4. Propiedades higrotérmicas de un compuesto unidireccional común.....	31
Tabla 5.5. Temperatura de transición vítrea de referencia sin humedad T_o ($^{\circ}F$) para resinas de diferentes clasificaciones de módulo elástico	32
Tabla 5.6. Valores típicos de coeficiente de expansión térmica	34
Tabla 5.7. Ecuaciones de coeficientes de expansión térmica	34
Tabla 5.8. CTE y expansión térmica	36
Tabla 5.9. Deformaciones y esfuerzos de la fibra embebida en la matriz.....	36
Tabla 5.10. Ecuaciones relativas a absorción de humedad.....	38
Tabla 6.1. Diagrama del ensayo ECT, SCB y SCB Modificado	49
Tabla 6.2. Ecuaciones que describen falla Mohr-Coulomb.....	51
Tabla 6.3. Plano de fractura en los planos de análisis	53
Tabla 6.4. Ecuaciones que describen la resistencia de lámina de compuesto	54
Tabla 6.5. Lista de teorías de falla y características a predecir	59
Tabla 6.6. Ensayos estándares relativos a la resistencia de la lámina	60
Tabla 6.7. Criterio del máximo esfuerzo.....	69
Tabla 6.8. Criterio de la máxima deformación	71
Tabla 6.9. Hallando las ecuaciones para la línea superior e inferior.....	72
Tabla 6.10. Criterio de Interacción de Falla.....	74
Tabla 6.11. Criterio del Máximo Esfuerzo modificado con Esfuerzo Higrotérmico	76
Tabla 6.12. Criterio de la Máxima Deformación modificado con Deformación Higrotérmica	76
Tabla 6.13. Criterio de Interacción de Falla modificado con Esfuerzos higrotérmicos	76
Tabla 6.14. Deformaciones y esfuerzos higrotérmicos.....	77

RESUMEN

El presente documento presenta un estudio del efecto de la humedad y temperatura en la resistencia uniaxial de láminas poliméricas, desde la micromecánica de láminas fibrorreforzadas. Consta de tres capítulos centrales:

1. Micromecánica y elasticidad: en el cual se muestra una síntesis de los conceptos de micromecánica de una lámina, desde los tipos de materiales de acuerdo con su tensor de coeficientes elásticos, pasando por la ley de mezclas, hasta la predicción de los módulos de elasticidad de la lámina
2. Inclusión de humedad y temperatura: el cual incluye los esfuerzos higrotérmicos, incluyendo en la ley de Hooke para un material ortotrópico la expansión térmica y por humedad, y una manera de estimar la degradación del material por estos efectos
3. Criterios de falla de la lámina: en el que se seleccionaron los criterios de falla más comunes usados en el diseño de los materiales fibrorreforzados, entre los cuales están el criterio del máximo esfuerzo, el criterio de la máxima deformación y el criterio de interacción de falla. Se describen las normas para estimar la resistencia del material unidireccional y su caracterización

Finalmente, se propone un diagrama de flujo para el proceso de diseño de un material compuesto fibrorreforzado sometido a temperatura y humedad.

PALABRAS CLAVE: Micromecánica; Matriz de rigidez; Esfuerzos higrotérmicos; Material ortotrópico; Material transversalmente isotrópico.

ABSTRACT

This document presents a study of the effect of humidity and temperature on the resistance of fiber-reinforced materials, from the micromechanics of fiber-reinforced lamina perspective. It consists of three central chapters:

1. Micromechanics and elasticity: This chapter presents a synthesis of the concepts of micromechanics of a lamina, from the types of materials according to their elastic coefficient tensor, through the Rule of Mixtures, up to the prediction of the modulus of elasticity of the lamina
2. Inclusion of humidity and temperature: This chapter discusses the issues related to hygrothermal stresses and takes into account the thermal and humidity expansion in Hooke's law for an orthotropic material, and a way to estimate the degradation of the material due to these effects
3. Lamina Failure Criteria: Here, the most common failure criteria used in the design of fiber-reinforced materials were selected, among which are the maximum stress criterion, maximum strain criterion, and the interacting failure criterion. The standards for estimating the unidirectional material strength and its characterization are described

Finally, a flow chart is proposed for the design process of a fiber-reinforced composite material subjected to temperature and humidity conditions.

KEYWORDS: Micromechanics; Stiffness matrix; Hygrothermal stress; Orthotropic material; Transversely isotropic material.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha sido evidente el incremento del desarrollo de los materiales compuestos tanto en el ámbito aeronáutico, como en el espacial. En el primero ha sido justificado en gran medida para disminuir la contaminación generada por los combustibles fósiles, lo cual se refleja en la necesidad de aumentar la eficiencia del desplazamiento al disminuir el peso de las aeronaves (por ejemplo, tomando el peso específico como índice de mérito ya que un kilo que se ahorre en peso se traduce en menos gasto de combustible o en un aumento en la carga útil), como el caso del Airbus A380 cuya cuarta parte es fabricada en compuestos de plástico reforzado con fibras de carbono; y en el segundo, debido a la necesidad de estructuras con alta estabilidad dimensional ante la temperatura (por su bajo coeficiente de dilatación térmica).

En Colombia el campo aeroespacial se muestra con una importancia resaltable dado que la tecnología actual es más asequible que en años anteriores por el acercamiento a los países del primer mundo. Por ello, es necesario orientar la investigación y desarrollo hacia el diseño y la construcción de materiales que permitan mejorar tanto la eficiencia del desplazamiento, como la eficacia de las comunicaciones y el estudio de fenómenos atmosféricos (teniendo en cuenta que somos un país principalmente agrícola).

La industria aeroespacial colombiana se encuentra en continuo desarrollo. Como ejemplo del sector privado se puede citar a Caldas Aeronáutica, que ha diseñado y construido el ultraliviano Vento y se encuentra en la etapa de desarrollo de nuevos modelos. En cuanto al sector público, como es el caso de la Fuerza Aérea Colombiana, se encuentra en proceso de certificación ante la Administración de Aviación Federal (FAA, por siglas en inglés) de la aeronave Calima T90 (cuya finalidad es instruir a los nuevos pilotos de la defensa) construida con materiales compuestos.

En este contexto, los materiales compuestos tales como una matriz polimérica reforzada con fibras de carbono o fibras de vidrio se muestran como una posible solución a la disminución de peso sin sacrificar resistencia, debido su alta capacidad ante las cargas de falla estáticas y de fatiga, su capacidad de aislamiento térmico y acústico, bajo peso y facilidad de diseñar la pieza de acuerdo con un arreglo ordenado de capas o láminas de refuerzo.

Las aeronaves y cohetes continuamente son mejorados, debido a la implementación de nuevos materiales que permiten disminuir el peso y aumentar la resistencia mecánica, como es el caso de la aplicación de los materiales compuestos. De estos, los fibrorreforzados son ampliamente utilizados por su relativa facilidad de manufactura, como en el caso del Calima T90, y se unen con adhesivos por ventajas en la construcción, como el tener menor cantidad de componentes para ensamblar e inspeccionar.

Estos fibrorreforzados se componen de láminas de fibras sintéticas de carbono o vidrio, recubiertos por una matriz polimérica compuesta usualmente de resina epóxica que, al reaccionar químicamente con un catalizador, se endurece transformándose de líquido a sólido. Las láminas son apiladas una sobre otra a diferentes orientaciones para crear el laminado fibrorreforzado. Este material tiene excelentes características como son la alta capacidad de aislamiento térmico y acústico, bajo peso, alta resistencia mecánica a las fallas por cargas estáticas y cíclicas.

Sin embargo, cuando estos materiales se someten a combinaciones de temperatura y humedad, como ocurre cuando un artefacto cambia de pisos térmicos, comienzan a presentar cambios en la estructura química de la matriz, degradando las propiedades mecánicas. Mediante difusión, el agua presente en el ambiente comienza a introducirse en la resina, afectando la vida útil del elemento, lo cual es crítico si dicho elemento es estructural. Determinar el coeficiente de difusión en los fibrorreforzados permite tener en cuenta este factor crítico en el diseño de los componentes estructurales de las aeronaves, contemplando la reducción que el ambiente puede presentar sobre la resistencia mecánica y su vida útil. Además, el agua que ingresa se puede evaporar, generando vacíos que impiden la correcta transmisión de cargas, o generando delaminaciones que son consideradas como daños típicos en los laminados y en sus uniones.

Debido a la gran cantidad de variables involucradas, diversas posibilidades de pruebas mecánicas, y ausencia de herramientas de diseño confiables para los casos específicos, se requiere verificación de cada fase de diseño mediante programas de ensayo experimental costosos en tiempo y dinero (Mortell, Tanner, & McCarthy, 2017). Por ello, las herramientas computacionales que permiten aplicar métodos numéricos cobran relevancia, ya que, al desarrollar un proceso de simulación adecuado para la aplicación específica de diseño y manufactura, se puede realizar un acercamiento a la predicción precisa del comportamiento elástico del FRP ante la aplicación de cargas próximas a daños.

La investigación de estas características como factor clave en el comportamiento estructural, es necesaria para la correcta selección de los materiales y procesos de manufactura de artefactos aeroespaciales, por lo cual se requiere demostrar que la estructura, mediante pruebas o análisis que las implementen, puede soportar carga última aún bajo daños por corrosión, que sufriría durante su servicio.

Por lo tanto, se propone realizar una descripción de los métodos de diseño y criterios de falla de láminas fibrorreforzadas y cómo la humedad y temperatura afectan estos métodos que, según los estudios recientes en el tema, generan degradación.

En síntesis:

- Se requiere conocer la manera en que la temperatura y la humedad influyen los diseños de láminas fibrorreforzadas, a partir de su influencia en la micromecánica, para proponer procedimientos adecuados para diseñar teniendo en cuenta la degradación de láminas fibrorreforzadas para las aeronaves y aplicaciones aeroespaciales en la industria colombiana
- Los procesos de certificación de aeronaves ante la FAA y Aerocivil requieren el conocimiento mecánico de todos sus componentes. Es necesario relacionar la pérdida de propiedades en el tiempo por efecto de la temperatura y humedad a que las aeronaves son sometidas en su funcionamiento
- Es necesario conocer la degradación ante humedad y temperatura de la resistencia mecánica de láminas fibrorreforzadas diseñadas para transmisión de carga

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un documento de estudio del efecto de humedad y temperatura en disminuir la resistencia uniaxial de láminas poliméricas

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Describir los conceptos de micromecánica, rigidez y módulos de elasticidad de una lámina
2. Seleccionar y describir en detalle las ecuaciones que describen la resistencia uniaxial de láminas poliméricas sometidas a humedad y temperatura
3. Describir los criterios de falla más comunes usados en el diseño de láminas poliméricas

3. METODOLOGÍA

A continuación, se describe el procedimiento metodológico empleado para el desarrollo de este trabajo, orientado al cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos planteados. Estas actividades consideraron una búsqueda de las teorías del diseño de los materiales compuestos laminados poliméricos desde la micromecánica, su análisis y algunos de los criterios de falla para láminas, teniendo en cuenta los efectos higrotérmicos en su diseño y análisis.

La metodología establecida para el desarrollo del documento se fundamenta en una lógica de ¿Qué? - ¿Cómo? Para esto, se desarrollaron una serie de etapas que involucran un estudio de la micromecánica para la obtención de un indicador de cumplimiento por cada objetivo específico. Así, en la Tabla 3.1 se detallan los pasos para lograr los objetivos planteados, así como la descripción de las herramientas de medición del cumplimiento de cada uno de ellos.

Tabla 3.1 Metodología

¿Qué?	Paso	¿Cómo?	Indicador
1. Objetivo 1	Paso 1	<i>Revisión Bibliográfica:</i> apropiamiento conceptual de conceptos de micromecánica de una lámina	Descripción micromecánica, rigidez y módulos de elasticidad de una lámina
	Paso 2	<i>Revisión de la Técnica:</i> búsqueda, clasificación de las diferentes soluciones técnicas para diseñar una lámina fibrorreforzada. Identificar las variables de diseño del material laminado fibrorreforzado	
2. Objetivo 2	Paso 3	Realizar un listado de las ecuaciones que describen la resistencia de los materiales compuestos fibrorreforzados sometidos a humedad y temperatura	Selección de las ecuaciones de diseño.
3. Objetivo 3	Paso 4	Listar y definir los criterios de falla más comunes usados en el diseño de los materiales fibrorreforzados	Descripción de las variables de proceso.
	Paso 5	Establecer el proceso de diseño de un material compuesto fibrorreforzado sometido a temperatura y humedad	

4. MICROMECAÁNICA Y ELASTICIDAD

La micromecánica es el estudio de los materiales compuestos considerando en detalle la interacción de los materiales constituyentes y permite representar un material heterogéneo como homogéneo, permitiendo estudiar el estado de deformación y esfuerzo de los constituyentes y las fallas locales como la falla de la interfaz (despegues), falla de matriz o de fibra (Daniel & Ishai, 2006). Para ello, se emplean los conceptos de fracciones volumétricas a partir de conocer el volumen de fibra, de matriz y total; y la cantidad de fibra y matriz por peso total, que se muestran en la Tabla 4.1 junto con la densidad del compuesto (Chawla, 2013). En esta tabla se tienen los subíndices c, m, f, que indican compuesto, matriz, fibra, respectivamente. El contenido de vacíos en fracción de volumen se puede con la (D2734-16 ASTM International, 2003), o con la ecuación mostrada en el la Tabla 4.1, donde la densidad del compuesto manufacturado ($\rho_{c,exp}$) se mide experimentalmente. La fracción de peso de fibra se puede determinar pesando el compuesto, luego removiendo la resina (con procedimientos como (D3171-15 ASTM International, 2015), (C613-19 ASTM International, 1997) recomendadas para fibras que se degradan con el calor; o la (D2584-18 ASTM International, 2018) quemando la resina en un horno) y pesando las fibras. Para el diseño se implementan las fracciones volumétricas, mientras que para la manufactura se utilizan las fracciones de peso (Barbero, 2017). Una breve descripción de estos estándares experimentales mencionados relativos a los componentes del compuesto, se muestran en el Anexo A. *Ensayos estándares relativos a fracción de peso o volumen.*

Tabla 4.1 Fracciones volumétricas y de peso

FRACCIÓN VOLUMÉTRICA		
	Volumen de fibra	Volumen de matriz
Volumen total $V_f + V_m = 1$	Fracción volumétrica de fibra: $V_f = \frac{\text{Volumen de fibra}}{\text{Volumen total}}$ $0 \leq V_f \leq 1$	Fracción volumétrica de matriz: $V_m = \frac{\text{Volumen de matriz}}{\text{Volumen total}}$ $0 \leq V_m \leq 1$
FRACCIÓN DE PESO Y DENSIDAD DEL COMPUESTO		
	Peso de fibra	Peso de matriz
Peso total $W_f + W_m = 1$	Fracción de peso de la fibra: $W_f = \frac{\text{Peso de fibra}}{\text{Peso total}}$ $0 \leq W_f \leq 1$	Fracción de peso de la matriz: $W_m = \frac{\text{Peso de matriz}}{\text{Peso total}}$ $0 \leq W_m \leq 1$
Densidad del compuesto:	$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$	
Contenido de vacíos en fracción de volumen	$V_v = \frac{\text{volumen de vacío}}{\text{volumen total}} = \frac{\rho_c - \rho_{c,exp}}{\rho_c}$	

La micromecánica permite predecir las propiedades elásticas del material compuesto (incluso los mecanismos de falla y la resistencia de la lámina) a partir de las propiedades ensayadas de la fibra y la matriz y la geometría (Daniel & Ishai, 2006). De esta manera se puede tomar un elemento de volumen representativo (RVE, el espesor de la lámina es un

ejemplo típico) que tenga las particularidades del material y remplazarlo por un elemento homogéneo equivalente, sin afectar el estado de esfuerzos de la estructura, siempre que esta se diseñe a una escala mayor al RVE.

4.1. TIPOS DE MATERIAL DE ACUERDO CON LA ELASTICIDAD

Estas propiedades se describen de acuerdo con la Ley de Hooke escrita como tensores, en la que el esfuerzo es igual al producto entre los coeficientes elásticos (C_{ijkl} de $3^4 = 81$ componentes) y las deformaciones, es decir, $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ en notación indicial con $i, j, k, l = 1, 2, 3$ (Daniel & I. Ishai, 1994). El tensor de coeficientes elásticos tiene dos simetrías menores que se deben a la simetría de los tensores esfuerzos y deformaciones. Se muestran en el *Anexo B. Tensor de coeficientes elásticos y simetría* las componentes simétricas tanto debido a la simetría menor del tensor esfuerzo (señaladas entre recuadros verdes), como las simétricas debido a la simetría menor del tensor deformaciones (señaladas entre recuadros cafés). Así, el tensor C_{ijkl} se reduce de 81 a 36 componentes, como se muestra en el *Anexo B. Tensor de coeficientes elásticos y simetría*. Además, por la existencia de una función de energía de deformación, se puede demostrar que este tensor tiene simetría mayor, por lo que se pueden reducir de 36 a 21 componentes diferentes (Mase & Mase, 1999).

Las componentes del tensor de esfuerzo actúan sobre un punto del elemento de material, que se puede esquematizar como un paralelepípedo adimensional mostrado en la Figura 4.1. De estas, las tres componentes perpendiculares a las caras del elemento ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) se llaman esfuerzos normales, y las otras mostradas alineadas con los ejes cartesianos ($\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$) son los esfuerzos cortantes, donde el primer subíndice designa la cara sobre la que actúa y el segundo es la dirección de acción. De acuerdo con (Mase & Mase, 1999), la ley de Hooke se puede escribir con la notación de Voigt (Chawla, 2013), en la cual estos tensores se reagrupan en forma matricial. Sin embargo, la matriz de 36 constantes $C_{\alpha\beta}$ no constituye un tensor, ver Tabla 4.2. En esta tabla se muestran las relaciones anisotrópicas de esfuerzo-deformación y los acoples siguientes:

- S_{11}, S_{22}, S_{33} , representan la respuesta de extensión a esfuerzos aplicados $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, respectivamente, en la misma dirección
- S_{44}, S_{55}, S_{66} , representan la respuesta de deformación cortante a un esfuerzo cortante aplicado en el mismo plano
- S_{12}, S_{13}, S_{23} , representan acople entre esfuerzos normales y deformaciones normales (el acople extensión-extensión se conoce como el efecto Poisson)
- $S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{24}, S_{25}, S_{26}, S_{34}, S_{35}, S_{36}$, representan la respuesta de la deformación normal a esfuerzos cortantes aplicados de manera más compleja que las anteriores (acople cortante-extensión)
- S_{45}, S_{46}, S_{56} , representan la respuesta de deformación cortante a los esfuerzos cortantes aplicados en otros planos (acople cortante-cortante)

Por estos acoples, la respuesta de un material anisotrópico ante cualquier esfuerzo simple puede ser en cualquier dirección y plano (Jones, 1999).

Figura 4.1. Componentes cartesianas del tensor esfuerzo (Mase & Mase, 1999)

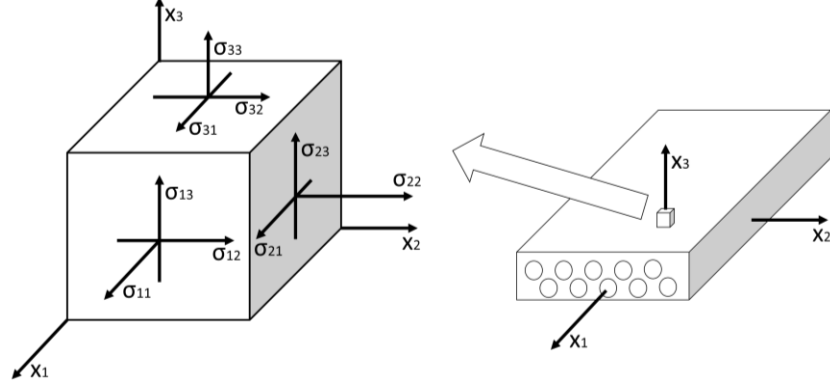


Tabla 4.2. Ley de Hooke y tensores

Tensor esfuerzos	Tensor deformaciones
$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$	$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$
Ley de Hooke generalizada	Ley de Hooke, subíndices de rango 6
$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{km}$	$\sigma_{\alpha} = C_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta}$
Componentes escritas en notación de Voigt	Ley de Hooke, forma matricial en notación de Voigt
$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 = \tau_{23} \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{31} &= \sigma_{13} = \sigma_5 = \tau_{13} \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6 = \tau_{12} \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \varepsilon_4 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & \gamma_{13} &= 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 & \gamma_{21} &= 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \varepsilon_6 \end{aligned}$ Donde γ es la deformación cortante de ingeniería, que representa cambios en los ángulos originalmente rectos entre los ejes coordenados en su configuración original	$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$ Simétrico Y su inverso: $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$ Extensión Acople extensión-extensión Acople cortante-extensión Acople cortante-cortante Cortante

Esta matriz $C_{\alpha\beta}$ de coeficientes elásticos aplica para un cuerpo anisotrópico cuando sus 21 componentes son diferentes. El número de componentes requerido para definir las propiedades de un material se puede reducir de acuerdo con su simetría elástica. Es decir, si tiene planos o ejes de simetría puede ser monoclinico, ortotrópico o isotrópico y la matriz $C_{\alpha\beta}$ se puede reducir a partir de una transformación tensorial de la ley de Hooke en notación

de Voigt mostrada en la Tabla 4.2. Para continuar con la micromecánica se listan las siguientes definiciones con respecto a un punto del material (Mase & Mase, 1999):

- **Material heterogéneo:** Sus propiedades varían de punto a punto.
- **Material anisotrópico:** Sus propiedades varían con la dirección en que se miden. Su tensor elástico se describe con 21 constantes elásticas independientes (Chawla, 2013) en la matriz $C_{\alpha\beta}$, como se muestra en la Tabla 4.2 en la ley de Hooke en forma matricial. Este es el caso más general de anisotropía elástica.
- **Material monoclinico:** Tiene un plano de simetría elástica. Su matriz $C_{\alpha\beta}$ se obtiene al realizar una transformación tensorial de la ley de Hooke en notación de Voigt con respecto a una reflexión sobre el plano x_1x_2 , reduciendo las componentes elásticas de 36 a 20. Estas 20 se reducen a 13, considerando simetría mayor del tensor, ver el *Anexo C. Matriz de coeficientes elásticos para cuerpos de diferente simetría material*.
- **Material ortotrópico:** Tiene tres planos de simetría elástica. Su matriz $C_{\alpha\beta}$ se obtiene al realizar una transformación tensorial de la ley de Hooke en notación de Voigt con respecto a una reflexión sobre el plano x_1x_2 , y a una reflexión sobre el plano x_2x_3 reduciendo de 20 a 12 componentes elásticas. Estas 12 se reducen a 9 considerando simetría mayor del tensor, ver la *Anexo C. Matriz de coeficientes elásticos para cuerpos de diferente simetría material* (Chawla, 2013). Se puede demostrar que, si el plano x_1x_3 es un plano de simetría junto con los planos x_1x_2 y x_2x_3 , la matriz $C_{\alpha\beta}$ no presenta más reducciones en sus componentes. Una lámina de material fibrorreforzado se considera ortotrópico por tener un plano de simetría perpendicular a la dirección de las fibras, el segundo y tercero paralelos a la dirección de las fibras, pero ortogonales entre sí. Para describir este material se requieren las constantes elásticas y se denomina **ortotropía tridimensional**: $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ (Barbero, 2017). Si se considera estado de esfuerzo plano, estas 9 componentes elásticas se reducen las 4 siguientes: $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ y se denomina **ortotropía bidimensional**. Es de anotar que en los materiales compuestos laminados fibrorreforzados se suelen usar dos descripciones del material ortotrópico: Ortotrópico especial y Ortotrópico general, ver el *Anexo D. Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal*. **Ortotrópico especial**: cuando los principales ejes de simetría del material (1 en dirección de las fibras y 2 en dirección transversal a estas) coinciden con las direcciones geométricas, y al reducir la matriz elástica en un estado de esfuerzo plano los términos Q_{16} y Q_{26} son cero. **Ortotrópico general**: cuando los ejes de simetría del material y los geométricos no coinciden, y la matriz de rigidez tiene sus componentes elásticas diferentes de cero, que cambia de nomenclatura a la denominada matriz de rigidez transformada $\bar{Q}_{ij}$, ya que se obtiene al transformar la matriz de rigidez Q_{ij} (del ortotrópico especial) de los ejes materiales hacia los geométricos (Chawla, 2013), cuyos términos transformados se muestran en la Tabla 4.7. Si el compuesto está basado en fibras o telas unidireccionales y están distribuidas uniformemente a través del plano 2-3, se considera transversalmente isotrópico y las propiedades en la dirección 2 son iguales en la dirección 3; pero si el compuesto está basado en telas de tejidos, trenzas, o las fibras unidireccionales no se encuentran uniformemente distribuidas, el material se considera ortotrópico y las propiedades en la dirección 2 difieren de las propiedades en la dirección 3 (Tuttle, 2013).

- **Material transversalmente isotrópico:** Tiene un eje de simetría, que puede ser la dirección de la fibra en un compuesto unidireccional en el que sus fibras están ubicadas de manera arbitraria en su sección transversal y, en este caso, cada plano que contenga la dirección de la fibra es un plano de simetría. Otra forma de verlo: en cada punto existe un plano donde las propiedades mecánicas son las mismas en todas las direcciones; por ejemplo, un compuesto unidireccional con fibras en arreglo hexagonal o cercano al mismo donde el plano normal a las fibras es el plano de simetría, como es el caso de compuestos unidireccionales carbón/epóxico, aramida/epóxico, vidrio/epóxico con un relativamente alto volumen de fibra (Daniel & I. Ishai, 1994). Se describe con cinco constantes elásticas: E_1 ; E_2 ; $G_{12} = G_{13}$; $\nu_{12} = \nu_{13}$; ν_{23} ; donde $G_{23} = \frac{1}{2} E_2 / (1 + \nu_{23})$ (Barbero, 2017) (Chawla, 2013) y su matriz $C_{\alpha\beta}$, se muestra en el *Anexo C. Matriz de coeficientes elásticos para cuerpos de diferente simetría material* (Daniel & I. Ishai, 1994). Si el compuesto está basado en fibras o telas unidireccionales y están distribuidas uniformemente a través del plano 2-3, se considera transversalmente isotrópico y las propiedades en la dirección 2 son iguales en la dirección 3, donde $E_2 = E_3$, $\nu_{12} = \nu_{13}$, $\nu_{21} = \nu_{31}$, $\nu_{23} = \nu_{32}$, $G_{12} = G_{13}$, y con respecto a las componentes de la matriz de rigidez $C_{33} = C_{22}$, $C_{13} = C_{12}$; pero si el compuesto está basado en telas de tejidos, trenzas, o las fibras unidireccionales no se encuentran uniformemente distribuidas, el material se considera ortotrópico y las propiedades en la dirección 2 difieren de las propiedades en la dirección 3 (Tuttle, 2013).
- **Material isotrópico:** Sus propiedades son las mismas en cualquier dirección. Su tensor elástico (y la respuesta elástica del material) se describe completamente con dos constantes elásticas, cualquiera de las mostradas en la Tabla 4.3, que pueden obtenerse experimentalmente a partir de un solo ensayo mecánico. A su vez, cualquiera de estas se puede establecer en términos de cualquier otro par de constantes elásticas. Sus propiedades elásticas descritas por la matriz $C_{\alpha\beta}$ son las mismas en cualquier set de ejes coordenados cartesianos, sin importar la transformación ortogonal que se realice entre estos ejes, ya que tiene tres planos y tres ejes de simetría. Su matriz $C_{\alpha\beta}$, mostrada en el *Anexo C. Matriz de coeficientes elásticos para cuerpos de diferente simetría material*, se obtiene a partir del material ortotrópico al realizar una rotación de 90° sobre el eje x_1 , 90° sobre el eje x_3 , y 45° sobre el eje x_3 .

Tabla 4.3. Constantes elásticas

Módulo de elasticidad de Young E	Coefficiente de Poisson ν
Módulo cortante o módulo de rigidez G $G = E / 2(1 + \nu)$	Módulo de volumen K $K = E / 3(1 - 2\nu)$

4.2. RIGIDEZ DE LA LÁMINA

Un laminado fibrorreforzado se construye a partir de la unión de varias láminas cuyo comportamiento se asume como un material homogéneo ortotrópico, compuesto de la unión de matriz y fibra, dos materiales asumidos como isotrópicos. Sus constantes elásticas relacionan los esfuerzos con las deformaciones de acuerdo con la ley de Hooke. Se

denomina *rigidez* a estas constantes cuando las componentes de esfuerzos se expresan en términos de componentes de deformación (ver Tabla 4.2), y se representa con el símbolo C (ver el Anexo C. *Matriz de coeficientes elásticos para cuerpos de diferente simetría material*). Se denomina *conformidad* a dichas constantes si las componentes de deformaciones se expresan en términos de componentes de esfuerzo, y se representa con el símbolo S .

Las relaciones constitutivas de ley de Hooke con matriz de rigidez y de conformidad para un material ortotrópico elástico lineal se muestran en el Anexo D. *Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal* (Adams, Carlsson, & Pipes, 2002). Esta matriz se reduce al considerar que el elemento se encuentra en estado de esfuerzo plano, aplicable a un cuerpo semejante a una placa delgada con una de sus dimensiones mucho menor a las otras dos, ya que el laminado coincide con esta geometría, ver el Anexo D. *Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal*. Es de anotar que la matriz de rigidez reducida emplea el símbolo Q y no C , ya que cada una de las componentes de la matriz reducida es diferente a la componente correspondiente en la matriz C (Daniel & I. Ishai, 1994) (Tuttle, 2013). En este caso las cargas se encuentran en el plano de la placa y su reducción se realiza con las ecuaciones de equilibrio, relaciones de deformación-desplazamiento y ecuaciones de compatibilidad de deformaciones (Mase & Mase, 1999). El estado de esfuerzos siempre se define con las seis componentes del tensor esfuerzos, aunque en el estado de esfuerzos plano se asume *a priori* que la magnitud de 3 componentes de esfuerzo ($\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$) son cero y la dirección fuera del plano sea un eje de esfuerzo principal (Tuttle, 2013). Las componentes de rigidez y conformidad se expresan tanto en constantes matemáticas (C_{ij} y S_{ij}) como en constantes ingenieriles (Young y Poisson) que son promedio experimental de la lámina fibrorreforzada, ver fila última del Anexo E. *Relaciones entre constantes matemáticas y constantes ingenieriles* (Daniel & I. Ishai, 1994).

Para obtener las 21 componentes ingenieriles de las matrices de conformidad, mostradas en las relaciones constitutivas reducidas en la Tabla 4.2 para un material anisotrópico, o en el Anexo D. *Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal* para un material ortotrópico, se realizan ensayos mecánicos de tracción sobre la lámina fibrorreforzada, aplicando un esfuerzo a la vez, como se muestra en el Anexo E. *Relaciones entre constantes matemáticas y constantes ingenieriles* (Daniel & I. Ishai, 1994). Se mide la carga aplicada y los desplazamientos, para estimar el esfuerzo y la deformación, respectivamente, ver Tabla 4.5. Si la carga se aplica en la dirección de las fibras de la lámina (dirección 1), se obtiene el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, correspondientes al esfuerzo en la dirección 1. Si se aplica en la dirección transversal a las fibras sobre el mismo plano de la lámina (dirección 2), se obtiene el módulo de Young y el coeficiente de Poisson correspondientes al esfuerzo en la dirección 2. Con un ensayo mecánico de cortante se puede calcular el coeficiente a cortante del plano correspondiente, G_{12} (Chawla, 2013).

Este mismo procedimiento incluyendo otros coeficientes aplica para conocer las componentes de acople cortante-extensión y de acople cortante-cortante de la matriz de conformidad de un material anisotrópico, mostrada en la Tabla 4.2 de acuerdo con (Tuttle, 2013):

- Con respecto a las componentes de acople cortante-extensión, ver Tabla 4.4: Fueron determinadas por **Lekhnitski** y se denominan *coeficientes de mutua*

influencia del segundo tipo (η). Se consideran las propiedades que relacionan las deformaciones normales con las deformaciones cortantes, al aplicar un esfuerzo uniaxial. La primera letra del subíndice indica la dirección del esfuerzo y la segunda letra indica la deformación cortante empleada para calcular el coeficiente. Por ejemplo, cada coeficiente se define así: El coeficiente $\eta_{1,12}$ es la deformación cortante γ_{12} dividido con la deformación normal ε_1 inducidas por el esfuerzo normal σ_1 cuando los otros esfuerzos equivalen a cero.

- Con respecto a las componentes de acople cortante- cortante, ver Tabla 4.4: Los coeficientes **Chentsov** se definen como la relación entre deformaciones transversales y se denotan con la letra $\mu_{xy,xz}$ o $\mu_{xy,yz}$. Relacionan las deformaciones cortantes γ_{xz} (o γ_{yz}) con las deformaciones cortantes γ_{xy} , cuando ambas son inducidas por el esfuerzo cortante τ_{xy} con las demás componentes de esfuerzo igualadas a cero. Se consideran análogos a los coeficientes de Poisson, ya que Poisson se define como la relación entre deformaciones normales por la aplicación de esfuerzo normal, y Chentsov se define como la relación entre deformaciones cortantes por la aplicación de esfuerzo cortante. El primer par de letras del subíndice indica la componente del esfuerzo y el segundo par indica la deformación cortante fuera del plano empleada para calcular el coeficiente. Por ejemplo, cada coeficiente se define así: El coeficiente $\mu_{12,13}$ indica que fue aplicado esfuerzo a cortante pura τ_{12} , y fue empleada la deformación cortante γ_{13} para calcularlo.
- También con respecto a las componentes de acople cortante- cortante, ver Tabla 4.4: Fueron determinadas por **Lekhnitski** en función de los coeficientes **Chentsov** y se denominan *coeficientes de mutua influencia del primer tipo* (η). Se consideran las propiedades que relacionan los esfuerzos cortantes con las deformaciones normales. La primera letra del subíndice indica la componente del esfuerzo aplicado y la segunda letra indica la deformación normal empleada para calcular el coeficiente. Por ejemplo, cada coeficiente se define así: El coeficiente $\eta_{12,1}$ indica que se aplicó el esfuerzo τ_{12} y el segundo significa que la deformación normal ε_1 se usó para calcular el coeficiente, con respecto a las deformaciones cortantes γ_{12}

Tabla 4.4. Coeficientes Lekhnitski y Chentsov

<i>Coeficientes de mutua influencia del segundo tipo</i> (η) de Lekhnitski			
$\eta_{1,12} = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_1}$	$\eta_{1,13} = \frac{\gamma_{13}}{\varepsilon_1}$	$\eta_{1,23} = \frac{\gamma_{23}}{\varepsilon_1}$	Aplicando σ_1
$\eta_{2,12} = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_2}$	$\eta_{2,13} = \frac{\gamma_{13}}{\varepsilon_2}$	$\eta_{2,23} = \frac{\gamma_{23}}{\varepsilon_2}$	Aplicando σ_2
$\eta_{3,12} = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_3}$	$\eta_{3,13} = \frac{\gamma_{13}}{\varepsilon_3}$	$\eta_{3,23} = \frac{\gamma_{23}}{\varepsilon_3}$	Aplicando σ_3
<i>Coeficientes de mutua influencia del primer tipo</i> (η) de Lekhnitski			
$\eta_{12,1} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{12}}$	$\eta_{12,2} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_{12}}$	$\eta_{12,3} = \frac{\varepsilon_3}{\gamma_{12}}$	Aplicando τ_{12}
$\eta_{13,1} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{13}}$	$\eta_{13,2} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_{13}}$	$\eta_{13,3} = \frac{\varepsilon_3}{\gamma_{13}}$	Aplicando τ_{13}
$\eta_{23,1} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{23}}$	$\eta_{23,2} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_{23}}$	$\eta_{23,3} = \frac{\varepsilon_3}{\gamma_{23}}$	Aplicando τ_{23}
<i>Coeficientes de Chentsov</i> (μ)		$\mu_{12,13} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{12}}$	$\mu_{12,23} = \frac{\gamma_{23}}{\gamma_{12}}$

<i>Chentsov relacionado con módulos cortantes</i>	$\mu_{12,13} = \gamma_{13} \frac{G_{12}}{\tau_{12}}$	$\mu_{12,23} = \gamma_{23} \frac{G_{12}}{\tau_{12}}$
---	--	--

Tabla 4.5. Constantes ingenieriles

Módulo de Young dirección 1 $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$	Coefficiente de Poisson dirección 1 $\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$	Módulo de Young dirección 2 $E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$	Coefficiente de Poisson dirección 2 (dependiente) $\nu_{21} = \frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$	Módulo de Cortante en el plano: $G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$	Módulo de Cortante fuera del plano: $G_{23} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}}$
--	---	--	--	---	---

Los ejes coordenados globales para analizar un laminado se denotan por “x” a la dirección de aplicación de la carga, “y” a la dirección perpendicular a “x”, y “z” a la dirección del espesor y perpendicular al plano xy, los cuales corresponden a x_1 , x_2 y x_3 , en este mismo orden, mostrados en la Figura 4.1. Sin embargo, los ejes principales de la lámina se denotan como 1, 2 y 3 para las direcciones de la fibra, perpendicular a la fibra y a través del espesor, respectivamente. Cuando los ejes principales de la lámina se encuentran en direcciones diferentes a los del laminado en un ángulo de capa θ entre el eje x del laminado y el eje 1 de la lámina (ver Figura 4.2), los tensores de esfuerzos y deformaciones deben transformarse hacia el eje coordenado global de análisis (eje del laminado). Los tensores transformados y el tensor de transformación son mostrados en la Tabla 4.6. Se puede demostrar que los esfuerzos y deformaciones con respecto al eje global, se transforman hacia los ejes principales de la lámina de acuerdo con los *tensores principales transformados* mostrados (Adams et al., 2002).

Tabla 4.6. Transformación de tensores

Tensor principal de esfuerzos transformado	Tensor principal de deformaciones transformado
$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$
Tensor de transformación	
$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$, donde $m = \cos \theta$, $n = \sin \theta$	

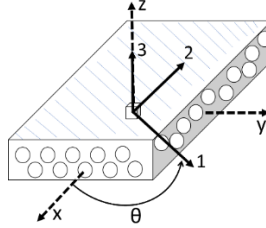
A partir de las ecuaciones de la Tabla 4.6 se puede establecer las relaciones de Hooke de esfuerzo-deformación y de deformación-esfuerzo en los ejes coordenados globales como se muestra en la Tabla 4.7 (Adams et al., 2002), donde las matrices $\bar{Q}$ y $\bar{S}$ son la matriz transformada reducida de rigidez y la matriz transformada de conformidad, respectivamente.

Tabla 4.7. Relaciones de Hooke para una lámina ortotrópica

Tensor esfuerzo-deformación	Tensor deformación-esfuerzo
$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$
Donde: $\bar{Q}_{11} = m^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) + n^4 Q_{22}$	

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{12} &= m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (m^4 + n^4) Q_{12} \\
\bar{Q}_{22} &= n^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) + m^4 Q_{22} \\
\bar{Q}_{16} &= m^3 n (Q_{11} - Q_{12}) + mn^3 (Q_{12} - Q_{22}) - 2mn(m^2 - n^2) Q_{66} \\
\bar{Q}_{26} &= mn^3 (Q_{11} - Q_{12}) + m^3 n (Q_{12} - Q_{22}) + 2mn(m^2 - n^2) Q_{66} \\
\bar{Q}_{66} &= m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) + (m^4 + n^4) Q_{66} \\
\\
\bar{S}_{11} &= m^4 S_{11} + m^2 n^2 (2S_{12} + S_{66}) + n^4 S_{22} \\
\bar{S}_{12} &= m^2 n^2 (S_{11} + S_{22} - S_{66}) + (m^4 + n^4) S_{12} \\
\bar{S}_{22} &= n^4 S_{11} + m^2 n^2 (2S_{12} + S_{66}) + m^4 S_{22} \\
\bar{S}_{16} &= 2m^3 n (S_{11} - S_{12}) + 2mn^3 (S_{12} - S_{22}) - mn(m^2 - n^2) S_{66} \\
\bar{S}_{26} &= 2mn^3 (S_{11} - S_{12}) + 2m^3 n (S_{12} - S_{22}) + mn(m^2 - n^2) S_{66} \\
\bar{S}_{66} &= 4m^2 n^2 (S_{11} - S_{12}) - 4m^2 n^2 (S_{12} - S_{22}) + (m^2 - n^2) S_{66}
\end{aligned}$$

Figura 4.2. Rotación positiva de los ejes principales 1,2 con respecto a los globales x,y



4.3. MÓDULOS DE ELASTICIDAD DE LA LÁMINA

El módulo de Young en la dirección 1 o módulo longitudinal E_1 de la lámina en dirección de las fibras mencionado en la Tabla 4.5, se puede estimar con la Ley de Mezclas según se muestra en la Tabla 4.8. Para ello se asume que el elemento de volumen representativo (RVE) tiene deformación homogénea, es decir, la fibra y la matriz tienen la misma deformación en la dirección de la fibra, por lo cual se asume que están perfectamente pegadas. Además, la fibra y matriz se asumen linealmente elásticos. El módulo de la lámina es una propiedad dominada por la fibra, al ser un valor típicamente mayor por un orden de magnitud. (Chawla, 2013).

El módulo de Young en la dirección 2 o módulo transversal E_2 de la lámina en dirección transversal a las fibras (sobre el plano de la lámina) mencionado en la Tabla 4.5, se puede estimar con la Ley de Mezclas Inversa según se muestra en la Tabla 4.8. Para ello se asume que el esfuerzo es el mismo en la fibra y en la matriz y que están perfectamente pegadas (Chawla, 2013). Esta es una propiedad dominada por la matriz y no es una predicción muy precisa, solo es recomendada para evaluar materiales candidatos, pero no para cálculos de diseño. Mejor predicción se logra con la ecuación semiempírica Halpin-Tsai mostrada en la Tabla 4.8 que implementa el parámetro empírico ζ obtenido de alinear la curva descrita por η con los resultados de una solución analítica (Barbero, 2017). Para fibras circulares o cuadradas: $\zeta = 2$ (Chawla, 2013). Para fibras rectangulares: $\zeta = a/b$, siendo a, b las dimensiones de la sección transversal.

La razón de Poisson se define como menos el cociente entre la deformación resultante y la deformación aplicada, donde al aplicar una carga en la dirección i, el efecto de Poisson

induce deformación en la dirección j perpendicular. El coeficiente de Poisson en el plano de la lámina se puede aproximar con la ley de mezclas mostrada en la Tabla 4.8, lo cual es suficiente para diseñar ya que: este coeficiente es de difícil medición, algunas fibras no son isotrópicas y los efectos de Poisson son secundarios. La primera letra del subíndice indica la dirección del esfuerzo uniaxial con la cual se está midiendo el coeficiente, y el segundo indica la dirección de la deformación transversal (Tuttle, 2013). En la Tabla 4.8 se muestran las ecuaciones para los módulos de Poisson en el plano (Barbero, 2017) y para el módulo de Poisson transversal (intralaminar) (Bhalchandra & Shiradhonkar, 2012) que fueron propuestas por Chamis.

El esfuerzo cortante en el plano de la lámina $\sigma_6 = \tau_{12} = \tau_{21}$, actúa como se muestra en la Figura 4.3 (Izquierda) sobre el elemento. Inicialmente, este deforma linealmente el material con una proporción equivalente al módulo de cortante en el plano, estimado con la ley de mezclas inversa presentada en la Tabla 4.8. Esta es una propiedad dominada por la matriz cuando la fibra es mucho más rígida que ella, y no es una predicción muy precisa. Mejor predicción se logra con el Modelo de Ensamble Cilíndrico (abreviado como CAM o CCA) mostrado en la Tabla 4.8. Posterior a la zona lineal (tangente a la curva esfuerzo cortante vs deformación cortante en el origen), se puede describir la zona no lineal con la ecuación correspondiente en la Tabla 4.8 (Barbero, 2017).

El esfuerzo cortante intralaminar $\sigma_4 = \tau_{23} = \tau_{32}$, actúa a través del espesor, como se muestra en la Figura 4.3 (Derecha) sobre el elemento. Este deforma linealmente el material con una proporción equivalente al módulo de cortante intralaminar G_{23} , el cual puede ser estimado con la técnica semiempírica del parámetro de partición de esfuerzo (SSP) presentado en la Tabla 4.8. (Barbero, 2017).

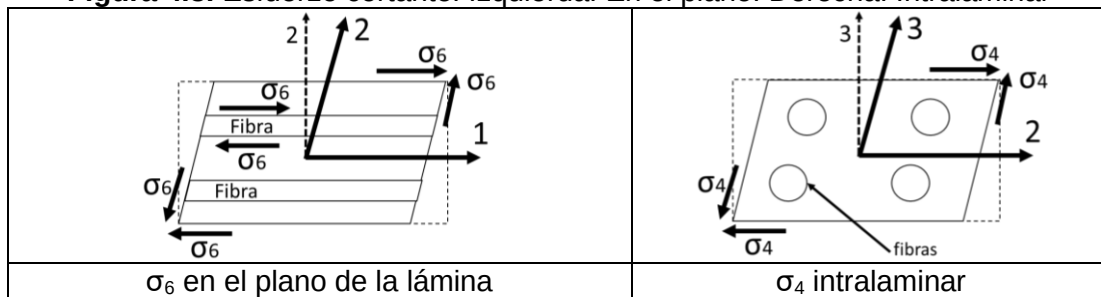
El esfuerzo cortante intralaminar $\sigma_5 = \tau_{13} = \tau_{31}$, introduce deformación cortante similar a aquélla del plano de la lámina mostrada en la Figura 4.3 (Izquierda), por lo cual suele asumirse que $G_{13} = G_{12}$, lo cual es exacto en un material transversalmente isotrópico con el eje de simetría coincidiendo con la dirección de las fibras. (Barbero, 2017).

Tabla 4.8. Módulos de elasticidad de la lámina y coeficientes de Poisson

Tabla 4-6: Módulos de elasticidad de la lamina y coeficientes de Poisson		
Módulo Longitudinal	Módulo Transversal	
	Ley de Mezclas Inversa	Halpin-Tsai
$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$ Donde, E_f : Módulo de Young de la fibra V_f : Volumen de fibra E_m : Módulo de Young de la resina	$E_2 = \frac{1}{\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}}$ Donde, V_m : Volumen de matriz	$E_2 = E_m \left[\frac{1 + \zeta \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right]$ Donde, $\eta = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + \zeta}$
Razón de Poisson	Coeficiente de Poisson en el plano	
$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$	$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$	
	Coeficiente de Poisson transversal (intralaminar)	
	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1$	
Módulo de cortante en el plano		
Ley de Mezclas Inversa	Modelo de Ensamble Cilíndrico	Respuesta no lineal esfuerzo cortante vs

		deformación cortante
$G_{12} = \frac{G_m}{V_m + \frac{V_f G_m}{G_f}}$ Aproximación si domina la matriz ($G_m \ll G_f$): $G_{12} = \frac{G_m}{1 - V_f}$	$G_{12} = G_m \left[\frac{(1 + V_f) + (1 - V_f) G_m / G_f}{(1 - V_f) + (1 + V_f) G_m / G_f} \right]$ Aproximación si domina la matriz ($G_m \ll G_f$): $G_{12} = G_m \left(\frac{1 + V_f}{1 - V_f} \right)$	$\sigma_6 = F_6 \tanh \left(\frac{G_{12}}{F_6} \gamma_6 \right)$ Donde: F₆: Fuerza cortante en el plano
Módulo de cortante intralaminar		
G₂₃ con parámetro de partición de esfuerzo		
$G_{23} = G_m \frac{V_f + \eta_4 (1 - V_f)}{\eta_4 (1 - V_f) + \frac{V_f G_m}{G_f}}$		
Donde, $\eta_4 = \frac{3 - 4V_m + G_m / G_f}{4(1 - \nu_m)}$		

Figura 4.3. Esfuerzo cortante. Izquierda: En el plano. Derecha: Intralaminar



Las constantes elásticas mencionadas tienen las siguientes restricciones derivadas de la teoría de la elasticidad y son usadas para verificar la validez de los datos experimentales:

- Debido a que el material transversalmente isotrópico tiene su matriz de conformidad simétrica, debe satisfacer las relaciones de coeficiente de Poisson mostrada en la Tabla 4.9, la cual es implementada para calcular la razón de Poisson ν_{21}
- Todos los términos de la diagonal de la matriz de rigidez del material transversalmente isotrópico deben ser positivos: ya que todos los módulos (como E_1 , ν_{21}) son positivos. Los términos de la diagonal de la matriz de rigidez son positivos si satisface las dos condiciones mostradas en la Tabla 4.9

Tabla 4.9. Restricciones de constantes elásticas

Restricción de relaciones de coeficientes de Poisson	Restricción de diagonal positiva del módulo de rigidez
$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$ Donde, $i \neq j$	○ $0 < \nu_{ij} < \sqrt{\frac{E_i}{E_j}}$ donde $i \neq j$ ○ $\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0$

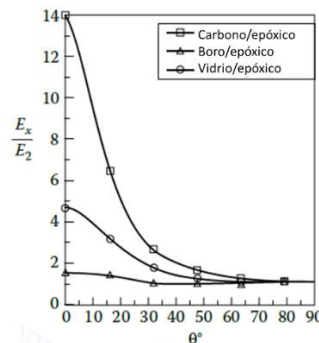
Las constantes de ingeniería también se pueden transformar de los ejes principales del material a las coordenadas giradas, donde el eje 1 se rota al eje x. Por ejemplo, apliquemos esfuerzo unidireccional a un material ortotrópico especial a esfuerzo plano (ver el Anexo D.

Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal) y tendremos: $S_{11} = \frac{1}{E_1}$. Un material con los refuerzos fuera del eje, pero bajo esfuerzo uniaxial en la dirección x, tiene el módulo longitudinal de elasticidad de acuerdo con $E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$. De acuerdo con la Tabla 4.7, si se aplica este esfuerzo uniaxial a un material ortotrópico tendríamos la deformación en la dirección x: $\varepsilon_x = \bar{S}_{11}\sigma_x$. Retomando el módulo en la dirección x: $E_x = \frac{\sigma_x}{\bar{S}_{11}\sigma_x} = \frac{1}{\bar{S}_{11}}$, donde el término $\bar{S}_{11}$ está dado por las relaciones de la Tabla 4.7. Este ejercicio uniaxial se aplica para la *cortante* xy, y para el esfuerzo uniaxial en la *dirección* y, obteniendo las relaciones de la Tabla 4.10. En la Figura 4.4 se muestra cómo el módulo varía con respecto a la aplicación de la carga para un material unidireccional carbono/epóxico, boro/aluminio y vidrio/epóxico. El módulo E_x presenta caída en sus valores cuando el ángulo empieza a aumentar desde 0 grados, lo cual justifica que en laminados se requiera reforzar con láminas a diferentes ángulos (recomendando a 90 ° y a $\pm 45^\circ$) (Gibson, 2016). Finalmente, se muestra la relación de deformación y esfuerzos de forma matricial en la Tabla 4.10.

Tabla 4.10. Propiedades del material unidireccional cargado fuera del eje principal

$E_x = \left[\frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^4 \theta \right]^{-1}$
$E_y = \left[\frac{1}{E_1} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_2} \cos^4 \theta \right]^{-1}$
$G_{xy} = \left[\frac{1}{G_{12}} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 4 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{2G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{-1}$
$\nu_{xy} = E_x \left[\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{-1}$
$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & \eta_{xy,x}/G_{xy} \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & \eta_{xy,y}/G_{xy} \\ \eta_{x,xy}/E_x & \eta_{y,xy}/E_y & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$

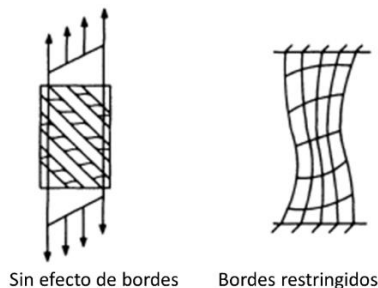
Figura 4.4. Variación del módulo de la lámina con respecto al ángulo de la carga



Fuente: Modificado de (Gibson, 2016)

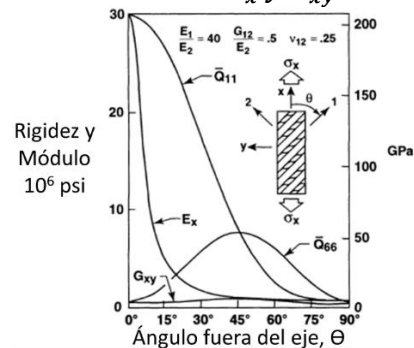
Debe tenerse en consideración el principio de Saint-Venant, quien afirmó que dos cargas diferentes que son estáticamente equivalentes producen los mismos esfuerzos y deformaciones a una distancia suficientemente lejos del área de aplicación de la carga. En este sentido, si la probeta con las fibras a 45° se sujeta por sus extremos a la máquina de ensayos y se aplica una carga P en la dirección x , la lámina tendría la deformación cortante restringida como se muestra en la derecha de la Figura 4.5. Esta restricción induce deformaciones en el material, diferentes a las esperadas para la cortante y la extensión mostradas en la izquierda de la Figura 4.5, que se lograrían en el centro de la probeta si el material fuera lo suficientemente largo comparado con su ancho. Esto permite concluir que el tipo de ensayo para la propiedad deseada, no es de importancia si se está lejos de los efectos de borde de Saint-Venant, lo cual repercute en disponibilidad del material y costos. Por ejemplo, en la Figura 4.6 se muestran los resultados experimentales de la probeta mencionada con baja relación de longitud/ancho, cuya carga es aplicada a diferentes ángulos y cuya relación de módulos es $\frac{E_1}{E_2} = 40$. Si la probeta es de alta relación de longitud/ancho: se obtiene deformación uniaxial pura $\sigma_x = E_x \varepsilon_x$; si la probeta es de baja relación de longitud/ancho: los bordes a $\sigma_x \neq 0, \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ y la relación esfuerzo-deformación es $\sigma_x = \bar{Q}_{11} \varepsilon_x$. Entonces para esta probeta al intentar medir el módulo E_x , en realidad estaríamos midiendo la componente transformada de rigidez reducida $\bar{Q}_{11}$ como en la Figura 4.6, donde si las fibras están a 30° la componente $\bar{Q}_{11}$ es aproximadamente 10 veces mayor a E_x . El caso es similar con los módulos $\bar{Q}_{66}$ y G_{xy} . Si pensáramos que ese valor fuera el módulo, lo estaríamos sobreestimando y a su vez al módulo a cortante G_{12} , ya que se puede calcular como se muestra en la Tabla 6.6 con $G_{12} = 1 / \left(\frac{4}{E_x} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right)$. Si el material tuviera una relación E_1/E_2 baja, la relación entre $\bar{Q}_{11}$ y E_x sería menor que para el compuesto de carbono-epóxico (Jones, 1999).

Figura 4.5. Deformación de lámina unidireccional carbono/epóxico reforzada a 45°



Fuente: Modificado de (Jones, 1999)

Figura 4.6. Rigidez $\bar{Q}_{11}$ y $\bar{Q}_{66}$ contra los módulos E_x y G_{xy}

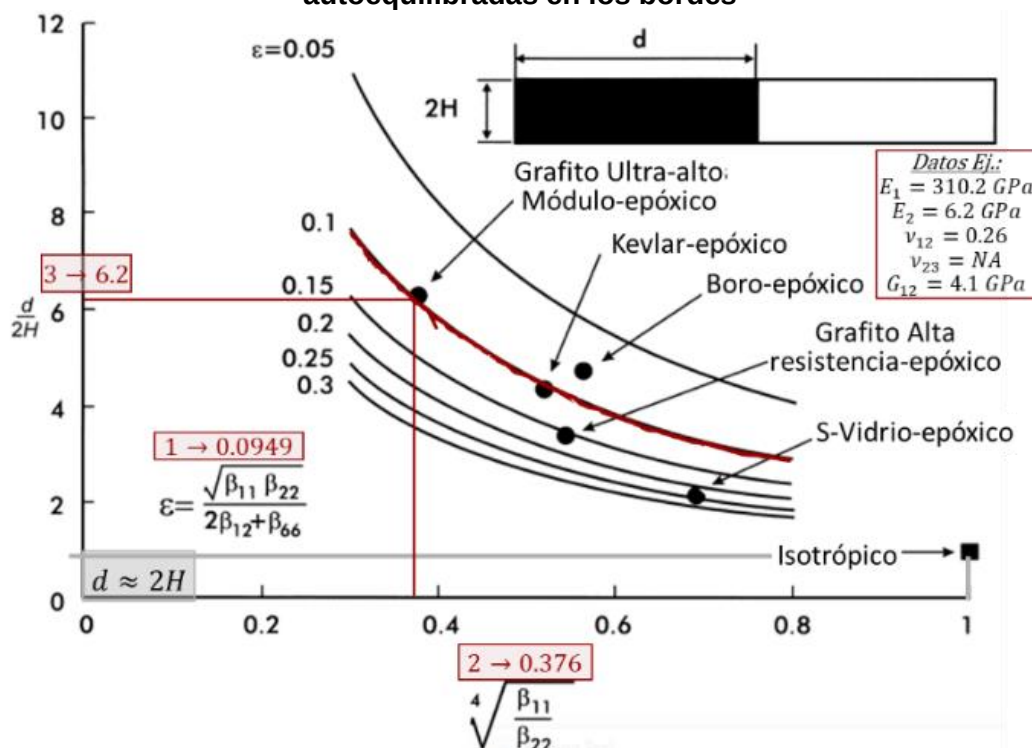


Fuente: Modificado de (Jones, 1999)

Para saber qué tan largo con respecto al ancho debe ser el espécimen para eliminar los efectos de borde en la medición de las propiedades, se implementa la Figura 4.7, con base en el principio de Saint-Venant. Esta figura se desarrolló a partir de aplicar ecuaciones diferenciales y efectos de borde de cargas autoequilibradas sobre una banda semi-infinita, para encontrar la longitud característica d a la cual los efectos de borde disminuyen al 1 % (Horgan & Carlsson, 2000) (Horgan & Simmonds, 1994). En esta se muestra que para un material isotrópico (líneas grises) basta con alejarse de los bordes una distancia igual al

acho para que los efectos de borde disminuyan al 1 %, sin embargo, para el caso de los polímeros epóxicos reforzados con fibras continuas esta distancia es varias veces mayor. A manera de ejemplo se utiliza la figura con valores de ejemplo de los módulos de elasticidad de un material ortotrópico y los resultados se muestran de color rojo: Primero, se calcula el coeficiente ε que define la curva con la cual calcular (curva roja). Segundo, se calcula el valor del eje x que le corresponde al material, tomando para el material $\beta_{11} = E_2$ y $\beta_{22} = E_1$. Tercero, se busca el corte sobre el eje y del valor en x sobre la curva de ε . Para los valores del ejemplo, se muestra que se la longitud característica para el espécimen es 6,2 veces el ancho. Por lo anterior, se requeriría un espécimen de longitud considerable para un ensayo unidireccional, mucho mayor que el caso de un material isotrópico.

Figura 4.7. Long característica de disminución: banda semi-infinita a cargas autoequilibradas en los bordes



Fuente: Modificado de (Horgan & Carlsson, 2000) y (Horgan & Simmonds, 1994)

El material compuesto de matriz polimérica termoestable con refuerzo de fibras continuas se puede identificar y describir en bases de datos como recomienda la norma (ASTM E1309-00, 2011), de la siguiente manera:

- *nombre_dato* : *tipo dato* – *definición*
- El *tipo dato* puede ser: Texto, Número (real o entero), Lógico, Fecha, [Dato estandarizado]

Los conjuntos estándar de elementos de datos son:

Ensayo auxiliar: Datos del método de ensayo y resultados utilizados para definir el material:

propiedad : *texto* – *objetivo del ensayo*

valor : *real* – *resultado del ensayo*

unidades : texto – unidades del valor

método de ensayo : [Método de ensayo] – método de ensayo implementado

Fecha: Usar el formato YYYY-MM-DD

Organización: Estructura administrativa. Datos requeridos:

id : texto – identificación

nombre : texto – nombre de la organización

descripción : texto – descripción de la organización

rol_organización : texto – función que dicha organización tuvo

Especificación: Requisito documentado del material o proceso. Datos requeridos:

nombre_organización : texto – organización responsable de la especificación

id : texto – identificación de la especificación

fecha : fecha – fecha de aprobación de la más reciente revisión técnica

versión : texto – identificación de la revisión técnica

designación : texto – identificación del procedimiento específico o set de requerimientos

Método de ensayo: Identificación del método de ensayo documentado usado, como:

Nombre_organización : texto – nombre de la organización responsable del estándar

id : texto – identificación del método de ensayo

fecha : fecha – fecha de aprobación de la más reciente revisión técnica

versión : texto – identificación de la versión específica

designación : texto – identificación del procedimiento específico

Los datos de identificación del material:

Fecha: Fecha de elaboración del material.

Nombre del compuesto: Se calcula como sigue: [Nombre del compuesto] = [Nombre comercial de la fibra] + “ ” + [Conteo de las fibras] + “/” + [Nombre comercial de la matriz] + “ ” + [Tipo de tejido de la tela] + “ ” + [Información crítica del proceso]

Subclase del material: La clase de material es Compuesto y su subclase se calcula como sigue: [Subclase del material] = [Clase de la fibra] + ‘/’ + [Clase de la matriz]

Clase de la matriz: La clase de la matriz es **polímero** y su subclase es **termoestable**

Clase del refuerzo: La clase del refuerzo es **fibra** y su subclase es **continua**

Identificación de la fibra: Identificación de las fibras, como: **carbón, vidrio**; clase química: **C, GI** (Carbono y Vidrio, respectivamente); familia química: **precursor PAN, Pitch, o Seda** para el carbono y **E-vidrio, S-vidrio, S2-vidrio o D-vidrio** para la fibra de vidrio; su **Módulo de Young**; su tipo de sección transversal y su tipo de tratamiento superficial

Identificación de la matriz: Identificación de la matriz, como: familia química, que en este estudio la abreviación de epóxica es **EP**; su temperatura de proceso

Tiempo de gel: Dato auxiliar que se mide antes de incorporarlo en el compuesto

Identificar preforma: Ensamble de fibras que se aproximan a la geometría final de la pieza

Información de preimpregnado: Combinación fibra-matriz en estado parcialmente curado

Información del proceso: Datos del proceso

Información de la parte: Configuración final del material

Historia de la parte: Historia en servicio o sometido a ambiente no controlado

Código de orientación del material: Código de la secuencia de apilado del laminado

Se resalta que, aunque la norma fue retirada en 2015 por su uso limitado en la industria, se cita porque permite identificar de manera precisa la composición y distribución de las fibras y su matriz (ASTM E1309-00, 2011).

5. INCLUSIÓN DE HUMEDAD Y TEMPERATURA

El compuesto laminado presenta cambios dimensionales tanto por deformación mecánica (ε), como por cambios en la temperatura (ΔT) y por cambios en la concentración de humedad (Δm). Básicamente, los cambios dimensionales ΔL se pueden aproximar con la *Ecuación 1*, donde L_0 es la longitud inicial, β es el coeficiente de expansión por humedad (adimensional) y α es el coeficiente de expansión térmica (K^{-1}) (Barbero, 2017). Estos coeficientes se pueden determinar, como se mencionan en los subcapítulos a continuación.

$$\Delta L = (\varepsilon + \beta \Delta m + \alpha \Delta T) L_0 \quad \text{Ecuación 1}$$

La *Ecuación 1* se puede reescribir en términos de las deformaciones debidas a la temperatura, a la humedad y las mecánicas, como se muestra en la *Ecuación 2* en notación indicial.

$$\varepsilon = \varepsilon_i^T + \varepsilon_i^H + S_{ij} \sigma_j \quad \text{Ecuación 2}$$



En el caso en que un compuesto laminado fibrorreforzado unidireccional se pueda considerar transversalmente isotrópico (de acuerdo con el capítulo anterior), las siguientes relaciones mostradas en la Tabla 5.1 se cumplen, como menciona (Chawla, 2013), donde los superíndices T y H se relacionan con temperatura y humedad, respectivamente. Es de anotar que las deformaciones por humedad y temperatura solo dilatan el material, es decir, lo expanden o contraen, pero no producen componentes de cortante (Barbero, 2017).

Tabla 5.1. Relaciones relativas a la deformación

$\varepsilon_{xy}^T = \varepsilon_{xy}^H = 0$
$\varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T$
$\varepsilon_y^H = \varepsilon_z^H$
$\varepsilon_i^T = \alpha_i (T - T_0)$
Donde T: Temperatura T ₀ : Temperatura de equilibrio (de referencia, tomada como la temperatura ambiente)
$\varepsilon_i^H = \beta_i (m - m_0)$

En el caso de un material ortotrópico especial elástico lineal en estado de esfuerzo plano (lámina reforzada con fibras unidireccionales), se puede escribir la *Ecuación 3* a partir de la *Ecuación 2* (Chawla, 2013) para un estado de esfuerzos plano y también se muestra para ejes rotados (Tuttle, 2013), en la Tabla 5.2:

Tabla 5.2. Material ortotrópico especial elástico lineal en estado de esfuerzo plano

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m \quad \text{Ecuación 3}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} \Delta m \quad \text{Ecuación 3 rotada}$$

Donde,

$\alpha_x = \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta$	$\beta_x = \beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta$
$\alpha_y = \alpha_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta$	$\beta_y = \beta_1 \sin^2 \theta + \beta_2 \cos^2 \theta$
$\alpha_{xy} = 2 \cos \theta \sin \theta (\alpha_1 - \alpha_2)$	$\beta_{xy} = 2 \cos \theta \sin \theta (\alpha_1 - \alpha_2)$

El estado higrotérmico afecta el comportamiento de esfuerzo-deformación del material de dos maneras: las propiedades varían con temperatura y concentración de humedad, esfuerzos residuales por fabricación se alteran con el estado higrotérmico. Estos efectos se notan en las propiedades dominantes de la matriz (tensión y compresión transversal, cortante en el plano e intralaminar, ver la Tabla 5.3), ya que las fibras no son sensibles al ambiente (Daniel & I. Ishai, 1994). El efecto de la concentración de humedad se muestra en la Figura 5.1 para un compuesto unidireccional carbono/epóxico, donde 1 % incremento de humedad a temperatura ambiente reduce en 4 % la resistencia a cortante en el plano y en 10 % la deformación cortante en el plano. Pero al aumentar 4 veces la temperatura (de 22° a 90°) y solo 1 % de humedad, la resistencia a cortante en el plano presenta una reducción del 18 % y un aumento de deformación cortante en el plano del 26 %, evidenciando que los cambios en temperatura y humedad presentan un efecto de deterioro de las propiedades del material.

El efecto de degradación térmica se muestra en la Tabla 5.3 para un compuesto unidireccional carbono/epóxico, donde para propiedades dominadas por la fibra como el módulo longitudinal a tracción se reduce un 7 % a 177 °C, y la resistencia a tracción longitudinal se reduce un 10 % a 177 °C. Pero para propiedades dominadas por la matriz como el módulo transversal a tracción se reduce un 50 % a 177 °C, y la resistencia a tracción transversal se reduce un 55 % a 177 °C.

Se citan algunas propiedades higrotérmicas obtenidas experimentalmente de un compuesto unidireccional común AS4/3501-6 en la Tabla 5.4. AS4 es una fibra de carbono de alta rigidez y alta resistencia, pero alto costo y 3501-6 es el nombre de una resina epóxica. Algunas propiedades de esos materiales se pueden encontrar en (Daniel & Ishai, 2006), página 380, Apéndice A: Propiedades de materiales.

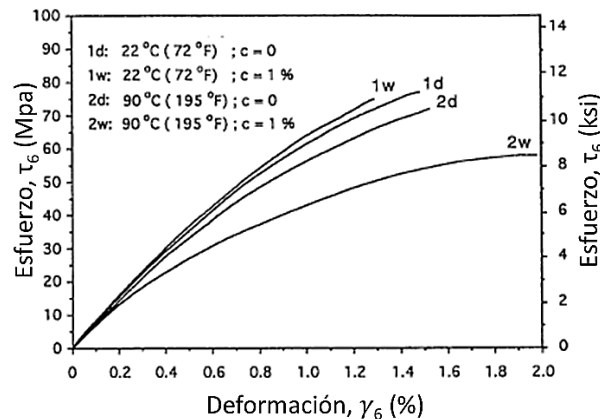
Tabla 5.3. Efecto higrotérmico en propiedades

PROPIEDAD NORMALIZADA	TEMPERATURA T (°C)		
	24	121	177
Módulo longitudinal $E_1(T)/E_1(T_0)$	1	0,95	0,93
Módulo transversal $E_2(T)/E_2(T_0)$	1	0,87	0,50
Módulo cortante en el plano $G_{12}(T)/G_{12}(T_0)$	1	0,87	0,50
Resistencia a tracción longitudinal $F_{1t}(T)/F_{1t}(T_0)$	1	0,96	0,90
Resistencia a tracción transversal $F_{2t}(T)/F_{2t}(T_0)$	1	0,82	0,45

Resistencia a compresión longitudinal $F_{1c}(T)/F_{1c}(T_0)$	1	0,78	0,40
Resistencia a compresión transversal $F_{2c}(T)/F_{2c}(T_0)$	1	0,87	0,60
Resistencia cortante en el plano $F_6(T)/F_6(T_0)$	1	0,70	0,40
T_0 : Temperatura ambiente (referencia) T : Temperatura actual			

Fuente: (Daniel & I. Ishai, 1994)

Figura 5.1. Afectación del esfuerzo cortante en el plano vs deformación cortante: compuesto unidireccional AS4/3501-6 carbono/epóxico



Fuente: (Daniel & I. Ishai, 1994)

Tabla 5.4. Propiedades higrotérmicas de un compuesto unidireccional común

Propiedad	Unidireccional (AS4/3501-6)
Coeficiente de expansión térmica longitudinal, α_1	$-0,9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
Coeficiente de expansión térmica transversal, α_2	$27 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
Coeficiente de expansión térmica fuera del plano, α_3	$27 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
Coeficiente por expansión de humedad en dirección de las fibras, β_1	0,01
Coeficiente por expansión de humedad en dirección transversal, β_2	0,20
Coeficiente por expansión de humedad fuera del plano, β_3	0,20

Fuente: (Daniel & Ishai, 2006)

Es posible estimar la degradación higrotérmica de la resistencia o rigidez de un compuesto, al utilizar una ecuación empírica para degradar la propiedad deseada de la matriz según la *Ecuación 47*, luego se emplea esa propiedad degradada en la ecuación de micromecánica correspondiente. (Chamis, 1983) demostró este procedimiento basado en observaciones experimentales en las que la degradación es gradual hasta que la temperatura T se aproxima a T_{gw} , luego se acelera. T_{gw} puede obtenerse experimentalmente de la temperatura de transición vítrea de la matriz de resina como función de la humedad absorbida, o se puede estimar implementando la *Ecuación 48* que (Chamis, 1983) obtuvo experimentalmente. T_{go} son valores experimentales de la resina, como los reportados en la Tabla 5.5.

$$F_m = \frac{P}{P_o} = \left[\frac{T_{gw} - T}{T_{go} - T_o} \right]^{1/2} \quad \text{Ecuación 47}$$

Donde,

F_m : Razón de retención de la propiedad mecánica de la matriz

P : Resistencia o rigidez de la matriz, luego de la degradación higrótérmica

P_o : Referencia de resistencia o rigidez de la matriz, antes de la degradación higrótérmica

T : Temperatura a la cual P se va a predecir (°F)

T_{go} : Temperatura de transición vítrea de referencia sin humedad (°F)

T_{gw} : Temperatura de transición vítrea para un material con matriz húmeda al contenido de humedad establecido (°F)

T_o : Temperatura de ensayo a la cual P_o fue medida (°F)

$$T_{gw} = (0,005M_r^2 - 0,10M_r + 1,0)T_{go} \quad \text{Ecuación 48}$$

Donde,

M_r : Porcentaje en peso de la humedad en la matriz de resina

T_{go} : Temperatura de transición vítrea de referencia sin humedad (°F)

Tabla 5.5. Temperatura de transición vítrea de referencia sin humedad T_o (°F) para resinas de diferentes clasificaciones de módulo elástico

Bajo módulo	Módulo Intermedio Baja Resistencia	Módulo Intermedio Alta Resistencia	Alto Módulo	Poliamida
350 [177 °C]	420 [216 °C]	420 [216 °C]	420 [216 °C]	700 [371 °C]

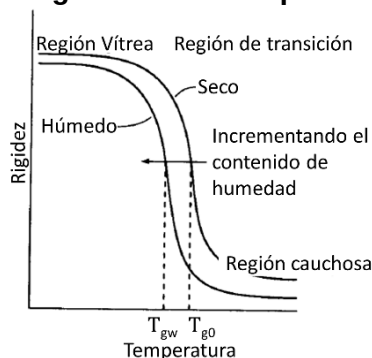
Fuente: (Gibson, 2016)

La Temperatura de Transición Vítrea para un material seco T_{go} y para un material con contenido de humedad T_{gw} nombradas anteriormente, se muestran en la Figura 5.2. El incremento en la temperatura causa que la matriz polimérica pierda rigidez hasta un punto. La región denominada “transición vítrea” indica el cambio de comportamiento vidrioso a uno “gomoso”. Si la temperatura se incrementa más allá de esta región, el polímero se suaviza a tal punto que no se puede usar como un material estructural y posteriormente se degrada; pero si la temperatura disminuye la matriz se fragiliza y tampoco puede ser utilizado estructuralmente, a menos que esa condición sea aceptada para el material a temperatura ambiente. Como se puede observar en la Figura 5.2, cuando el polímero absorbe humedad genera plastificación, visualizada como una disminución de la temperatura de transición vítrea y una correspondiente degradación de las propiedades del compuesto (Gibson, 2016).

Es importante resaltar que la temperatura de transición vítrea debe entenderse como una región, más que como un valor puntual, comprendida desde T_{go} (temperatura de transición vítrea de los reactantes), pasando por g_e/T_g (temperatura en que gelación y vitrificación ocurren simultáneamente) hasta $T_{g\infty}$ (temperatura de transición vítrea del sistema completamente curado); y en la práctica puede que el sistema completo aún falte por curar completamente al alcanzar $T_{g\infty}$, ver la Figura 5.3 donde se representan diagramáticamente las propiedades de curado de varias resinas poliméricas (especialmente epóxicas). En la práctica, curado total depende del camino de reacción tiempo-temperatura y de la curva de enfriamiento luego del curado (afectando propiedades como la densidad comportamiento a temperatura ambiente), por lo que “curado total” no es un estado único e involucra

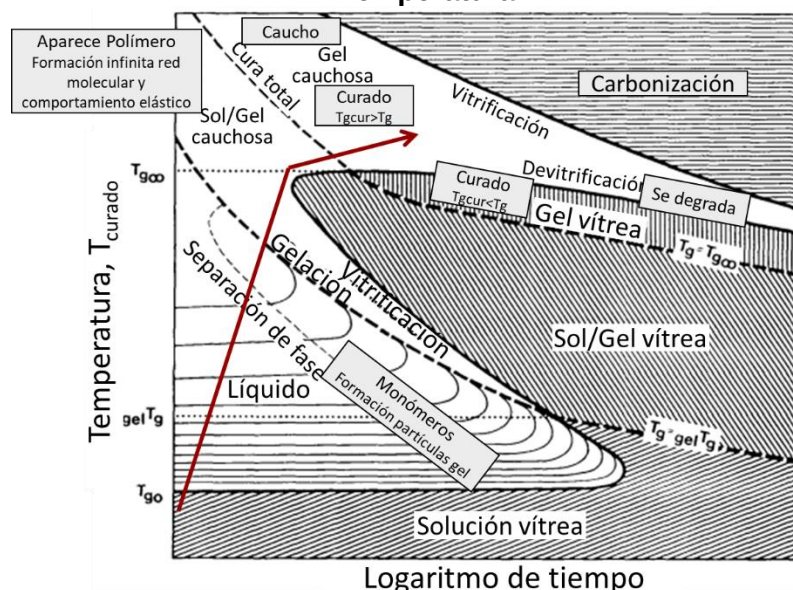
volatilización del solvente y los productos de la reacción (Gillham, 1990). Al respecto, (Ruiz, Ferreira Benevides, & Bourdon, 2013) propone un camino de reacción para calentamiento hasta cura total como se muestra en la línea roja de la Figura 5.3. Para resinas epóxicas comunes, la temperatura de transición vítrea del polímero se encuentra cercana a 100 °C (Gillham, 1990).

Figura 5.2. Variación de rigidez con la temperatura de un típico polímero



Fuente: Modificado de (Gibson, 2016)

Figura 5.3. Proceso termoestable: Diagrama de curado Transformada-Tiempo-Temperatura



Fuente: Modificado de (Gillham, 1990)

5.1. EXPANSIÓN TÉRMICA

Con respecto a los materiales usados en el diseño y manufactura de los compuestos fibrorreforzados, se lista en la Tabla 5.6 los valores típicos del coeficiente de expansión térmica (Barbero, 2017). La diferencia que presentan los coeficientes de la fibra de carbono permite que se pueda diseñar el coeficiente del compuesto como en casos que se requiera

bajo coeficiente de expansión térmica para lograr estabilidad dimensional. Esto debido a que los laminados que se implementan en las estructuras aeronáuticas suelen estar sometidos a temperaturas entre -73°C y 80°C (Kwang-Hee, Cheon-Seok, Sun-Kyu, & In-Young, 2001).

El efecto de la temperatura sobre el desempeño de mecánico del compuesto fibrorreforzado se puede estudiar con ensayos mecánicos *in-situ* mientras está siendo sometido a una carga a temperaturas por encima y debajo de la temperatura ambiente. Si son temperaturas elevadas, los diferentes coeficientes de expansión térmica de la fibra y la matriz pueden generar microgrietas en la interfaz, afectando la integridad del compuesto ya que es en la interfaz que se genera la transmisión de cargas térmicas y mecánicas entre la fibra y la matriz. En ensayos a 50°C la resistencia a cortante interlaminar de los compuestos de fibra de vidrio/epoxy, fibra de carbono/epoxy, fibra de kevlar/epoxy, decrece al compararla con la resistencia a temperatura ambiente hasta un 47 %, 81 % y 65 % para dichos compuestos, respectivamente (Ray, Prusty, & Rathore, 2018).

Tabla 5.6. Valores típicos de coeficiente de expansión térmica

Material	Coeficiente de expansión térmica (α)
Todas las resinas (positiva)	30 – 100 x 10 ⁻⁶ /°C
Fibra E-vidrio (E por eléctrica. Buen desempeño mecánico, resistencia a la corrosión y bajo costo cercano a 1,60 \$US/kg)	5,04 x 10 ⁻⁶ /°C
Fibra de carbono dirección longitudinal	-0,99 x 10 ⁻⁶ /°C
Fibra de carbono dirección transversal	16,7 x 10 ⁻⁶ /°C

Fuente: (Barbero, 2017)

Para los compuestos fibrorreforzados unidireccionales se asume: el pegue entre la matriz y la fibra es perfecto y mecánico sin interacción química; las fibras son continuas y perfectamente alineadas; las propiedades de los constituyentes no cambian con la temperatura (Chawla, 2013). La fórmula más precisa para estimar el coeficiente por expansión térmica fue derivada por Levin (Barbero, 2017) y mostrada en la Tabla 5.7, cuya precisión solo depende de qué tan preciso es el estimado de las propiedades elásticas de la lámina. En esta tabla se muestran las ecuaciones de Schapery, quien las deriva usando métodos de energía y se implementan cuando los coeficientes de Poisson son similares, ya que fueron derivadas asumiéndolo. De igual manera se incluyen las ecuaciones que derivaron Rosen y Hashin a partir de un modelo de deformación plana (Chawla, 2013). Es una aproximación válida asumir que $\alpha_2 = \alpha_3$, de acuerdo con (Daniel & I. Ishai, 1994).

Tabla 5.7. Ecuaciones de coeficientes de expansión térmica

Variable	Ecuación
Compuesto fibrorreforzado en dirección de las fibras (dominado por las fibras)	$\alpha_1 = (\alpha_A V_f E_A + \alpha_m V_m E_m) / E_1$
Compuesto fibrorreforzado en dirección transversal a las fibras (dominado por la matriz)	$\alpha_2 = \alpha_3 = (1 + \nu_m) \alpha_m (1 - V_f) + (1 + \nu_A) \alpha_T V_f - \alpha_1 \nu_{12}$
Levin: Compuesto fibrorreforzado en dirección de las fibras (dominado por las fibras)	$\alpha_1 = \hat{\alpha}_1 + (S_{11} - \hat{S}_{11})[(\alpha_A - \alpha_m)P_{11} + 2(\alpha_T - \alpha_m)P_{12}] + 2(S_{12} - \hat{S}_{12})[(\alpha_A - \alpha_m)P_{12} + (\alpha_T - \alpha_m)(P_{22} + P_{23})]$

Levin: Compuesto fibrorreforzado en dirección transversal a las fibras (dominado por la matriz)	$\alpha_2 = \hat{\alpha}_2 + (S_{12} - \hat{S}_{12})[(\alpha_A - \alpha_m)P_{11} + 2(\alpha_T - \alpha_m)P_{12}] + (S_{22} - \hat{S}_{22} + S_{23} - \hat{S}_{23})[(\alpha_A - \alpha_m)P_{12} + (\alpha_T - \alpha_m)(P_{22} + P_{23})]$
Para las ecuaciones de Levin	Coef. de conformidad de la lámina $S_{11} = 1/E_1 \quad S_{22} = 1/E_2$ $S_{12} = -\nu_{12}/E_1 \quad S_{23} = -\nu_{23}/E_2$ Valores de Peso promedio $\hat{\alpha}_1 = \alpha_A V_f + \alpha_m V_m \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_T V_f + \alpha_m V_m$ $\hat{S}_{11} = V_f/E_A + V_m/E_m \quad \hat{S}_{22} = V_f/E_T + V_m/E_m$ $\hat{S}_{12} = -(\nu_A/E_A)V_f - (\nu_m/E_m)V_m$ $\hat{S}_{23} = -(\nu_T/E_T)V_f - (\nu_m/E_m)V_m$ $V_m = 1 - V_f$ Coeficientes P $P_{11} = (A_{22}^2 - A_{23}^2)/ A \quad P_{22} = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)/ A $ $P_{12} = (A_{12}A_{23} - A_{22}A_{12})/ A $ $P_{23} = (A_{12}^2 - A_{11}A_{23})/ A $ $ A = A_{11}(A_{22}^2 - A_{23}^2) + 2A_{12}(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{12})$ $A_{11} = E_A^{-1} - E_m^{-1} \quad A_{22} = E_T^{-1} - E_m^{-1}$ $A_{12} = -\nu_A/E_A + \nu_m/E_m \quad A_{23} = -\nu_T/E_T + \nu_m/E_m$
Schapery: Compuesto fibrorreforzado en dirección de las fibras (dominado por las fibras)	$\alpha_1 = (\alpha_A V_f E_A + \alpha_m V_m E_m)/E_m V_m + E_f V_f$
Schapery: Compuesto fibrorreforzado en dirección transversal a las fibras (dominado por la matriz)	$\alpha_2 = (1 + \nu_m)\alpha_m V_m + (1 + \nu_f)\alpha_f V_f - \alpha_1 \bar{\nu}$ $\bar{\nu} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$ Si $V_f > 0,2$ ó $0,3$, aproximarse a: $\alpha_2 = (1 + \nu_m)\alpha_m V_m + \alpha_f V_f$
Rosen y Hashin: Compuesto fibrorreforzado en dirección de las fibras (dominado por las fibras)	$\alpha_1 = \bar{\alpha} + \left[\frac{\alpha_f - \alpha_m}{1/K_f - 1/K_m} \right] \left[\frac{3(1 - 2\nu_c)}{E_c} - \frac{1}{K_c} \right]$ Donde $\bar{\alpha} = \alpha_f V_f + \alpha_m V_m$
Rosen y Hashin: Compuesto fibrorreforzado en dirección transversal a las fibras (dominado por la matriz)	$\alpha_1 = \bar{\alpha} + \left[\frac{\alpha_f - \alpha_m}{1/K_f - 1/K_m} \right] \left[\frac{3}{2k_c} - \frac{3(1 - 2\nu_c)\nu_c}{E_c} - \frac{1}{K_c} \right]$ Donde $\bar{\alpha} = \alpha_f V_f + \alpha_m V_m$

Nota: V_f : fracción volumétrica de fibra; ν_m : Coef. de Poisson de la matriz; α_m : Coef. de expansión térmica de la matriz; ν_A : Coef. axial de Poisson de la fibra; ν_T : Coef. transversal de Poisson de la fibra; α_T : Coef. de expansión térmica transversal de la fibra; ν_{12} : Coef. longitudinal de Poisson de la lámina; α_1 : Coef. de expansión térmica de la lámina; α_A : Coef. de expansión térmica axial de la fibra; E_A : Módulo de Young axial de la fibra; E_T : Módulo de Young transversal de la fibra; V_m : fracción volumétrica de la matriz; E_m : Módulo de Young de la matriz; E_1 : Módulo de Young de la lámina; K_c : Módulo bulk del compuesto; E_c : Módulo de Young del compuesto; k_c : Módulo bulk transversal del compuesto

Los coeficientes de expansión térmica (CTE) varían con la temperatura, la cual es significativa para las propiedades del compuesto que son dominadas por la matriz. La matriz se expande al incrementar la temperatura, mientras que las fibras de carbono se contraen en su dirección principal. La expansión térmica se puede calcular a partir de conocer el CTE, para lo cual se implementan las ecuaciones mostradas en la Tabla 5.8. El CTE se estima como la tangente de la curva de deformación térmica vs temperatura de medición y se denomina CTE tangente o instantáneo; o en una temperatura puntual denominada T_{ref} (que se toma como la temperatura de curado) calculando la pendiente en ese punto en una curva experimental de expansión térmica en un rango de temperaturas $T_{ref} \pm dT$ y se denomina CTE lineal, para el cual es usual tomar dT como 1°C o 5°F (Barbero, 2017)(Chawla, 2013).

Tabla 5.8. CTE y expansión térmica

Variable	Ecuación
CTE Tangente o Instantáneo	$\alpha = \frac{d\varepsilon^*}{dT}$
CTE Lineal	$\alpha(T_{ref}) = \frac{\varepsilon^*(T_{ref} + dT) - \varepsilon^*(T_{ref} - dT)}{2dT}$
Expansión térmica	$\varepsilon^* = \alpha(T - T_{ref})$

Una aproximación al estado de deformaciones internas de la lámina de compuesto fibrorreforzado, incluyendo los efectos térmicos, se realiza por medio de la teoría de elasticidad, con coordenadas polares r , θ , z por su simetría axial cilíndrica donde los esfuerzos y deformaciones son independientes del ángulo θ , pero dependientes de r . Las ecuaciones se aplican a un elemento de la lámina conformado por una fibra central (cilindro interno, radio a) embebida en una cáscara de matriz (cilindro externo, radio b), como se muestra en la Figura 5.4, y este elemento es sometido a carga en la dirección z . La ley de Hooke se muestra en la Ecuación 4:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \Delta T \quad \text{Ecuación 4}$$

Las deformaciones para la matriz (componente 2), se muestran en la Tabla 5.9. Para la solución del problema se tienen las siguientes condiciones de frontera, con las que se determinan las constantes mostradas en la Tabla 5.9:

1. Se tiene continuidad de esfuerzos en la interfaz donde $r = a$, por lo que $\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$
2. La superficie de la matriz en $r = b$ es libre de esfuerzos: $\sigma_{r2} = 0$
3. La resultante del esfuerzo axial $\sigma_z = 0$, en una sección $z = \text{constante}$
4. En la interfaz $r = a$ los desplazamientos radiales son los mismos en las dos componentes: $u_{r1} = u_{r2}$
5. En el eje de simetría $r = 0$ para el componente 1 el desplazamiento radial se desaparece: $u_{r1} = 0$

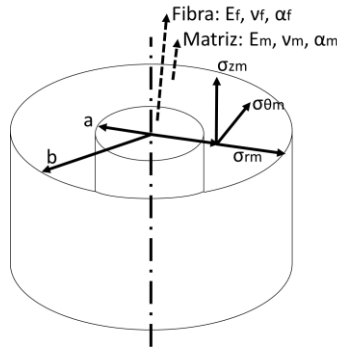
Tabla 5.9. Deformaciones y esfuerzos de la fibra embebida en la matriz

Deformaciones
$\varepsilon_{r2} = \frac{\sigma_{r2}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{\theta 2} + \sigma_{z2}) + \alpha_2 \Delta T$
$\varepsilon_{\theta 2} = \frac{\sigma_{\theta 2}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{r2} + \sigma_{z2}) + \alpha_2 \Delta T$

$\varepsilon_{z2} = \frac{\sigma_{z2}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2}(\sigma_{r2} + \sigma_{\theta2}) + \alpha_2 \Delta T$		
Esfuerzos		
Componente 1 $\sigma_{r1} = A_1$ $\sigma_{\theta1} = A_1$ $\sigma_{z1} = C_1$	Componente 2 $\sigma_{r2} = A_2 - \frac{B_2}{r^2}$ $\sigma_{\theta2} = A_2 + \frac{B_2}{r^2}$ $\sigma_{z2} = C_2$	
$\sigma_r = A(1 - \frac{b^2}{r^2})$	$\sigma_\theta = A(1 + \frac{b^2}{r^2})$	$\sigma_z = A(1 - \frac{b^2}{r^2})$
Constantes		
$A = - \left[\frac{E_m(\alpha_m - \alpha_f)\Delta T(a/b)^2}{1 + (a/b)^2(1 - 2\nu)[(b/a)^2 - 1]E_m/E_f} \right]$ $B = \frac{A}{(a/b)^2} \left[2\nu(a/b)^2 + \frac{1 + (a/b)^2(1 - 2\nu) + (a/b)^2(1 - 2\nu)[(b/a)^2 - 1]E_m/E_f}{1 + [(b/a)^2 - 1]E_m/E_f} \right]$ $\nu_m = \nu_f = \nu$		

La importancia de las ecuaciones planteadas con la solución termoelástica de la Tabla 5.9, radica en que pueden compararse con el esfuerzo a fluencia o la resistencia a la fractura de la matriz, para predecir si ocurrirá deformación plástica o fractura de la matriz. Si los esfuerzos térmicos deforman plásticamente la matriz, al realizar una gráfica de la distribución de esfuerzos térmicos se puede conocer dónde empezará la deformación plástica (Chawla, 2013).

Figura 5.4. Fibra en su caparazón de matriz



5.2. EXPANSIÓN POR HUMEDAD

La humedad es absorbida por la matriz polimérica y produce crecimiento o hinchazón de la misma (que no es afectado por el agua entrando al contenido de vacío de la matriz). La razón de absorción de humedad está controlada por la propiedad del material denominada difusividad de humedad o cociente de difusividad (esta es la velocidad de la difusión de humedad). Para los materiales compuestos, esta propiedad se puede calcular con la norma (ASTMD5229, 2014) asumiendo que ocurre en un proceso Fickiano de una fase. Un

ejemplo de comportamiento no Fickiano es un material que contenga microgrietas unidos que conformen un camino para el movimiento libre de humedad. Para saber si el material es Fickiano se debe realizar el ensayo citado por la norma anterior para calcular el coeficiente de difusividad y su comportamiento debe estar alineado con las pautas esperadas según la norma, las cuales se mencionan más adelante. Es de resaltar que esta propiedad del material está dada para un ambiente y dirección de difusión, ya que varía con la temperatura (US Department of Defense, 2002).

Otra propiedad que depende de la humedad es el contenido de humedad de saturación o humedad en equilibrio M_m , la cual es la totalidad de humedad absorbida como porcentaje del peso total del material. El contenido promedio de humedad m del compuesto fibrorreforzado se calcula con la *Ecuación 5* (Barbero, 2017) de la Tabla 5.10.

El contenido de vacío se puede calcular con la ecuación mostrada en la Tabla 4.1. Es posible calcular la densidad del compuesto teniendo en cuenta los vacíos generados luego de la manufactura, pesando muestras e implementando la *Ecuación 5* (Barbero, 2017) de la Tabla 5.10.

Las fibras inorgánicas (carbono y de vidrio) que son usadas en los compuestos fibrorreforzados de alto desempeño, no absorben humedad, como sí lo hacen las orgánicas como la aramida. Para las inorgánicas, se pueden calcular los coeficientes de expansión por humedad tanto en direcciones longitudinal (*Ecuación 7*) como transversal (*Ecuación 8*) como se muestra en la Tabla 5.10 (Barbero, 2017). Debido a que las fibras absorben menos humedad que la matriz, el coeficiente de expansión por humedad en la dirección transversal es mayor al de la dirección longitudinal, es decir $\beta_2 > \beta_1$.

Tabla 5.10. Ecuaciones relativas a absorción de humedad

Variable	Ecuación	
Contenido promedio de humedad m	$m = \frac{\text{peso de la humedad}}{\text{peso del compuesto seco}}$	<i>Ecuación 5</i>
Densidad del compuesto teniendo en cuenta los vacíos ρ	$\rho = \frac{\text{peso de la muestra}}{v - v_0(1 - V_v)}$ Donde, V_v: Contenido de vacíos por volumen v_0: Volumen aparente	<i>Ecuación 6</i>
Coeficiente de expansión por humedad en dirección de las fibras	$\beta_1 = \beta_m(1 - V_f) \frac{E_m}{E_1}$	<i>Ecuación 7</i>
Coeficiente por expansión de humedad en dirección transversal a las fibras	$\beta_2 = \beta_3 = \beta_m(1 - \sqrt{V_f}) \left[1 + \frac{\sqrt{V_f}(1 - \sqrt{V_f})E_m}{\sqrt{V_f}E_2 + (1 - \sqrt{V_f})E_m} \right]$	<i>Ecuación 8</i>

Nota: β_m : Coef. de expansión por humedad de la matriz isotrópica; E_m : Módulo de Young de la matriz isotrópica; E_1 , E_2 : Constantes elásticas del compuesto unidireccional; V_f : Fracción volumétrica de fibra

Las leyes de Fick son ampliamente utilizadas para describir la difusión en adhesivos y compuestos. En la primera ley se asume que la razón de difusión de una sustancia que pasa por una unidad de área es proporcional al gradiente de concentración, según la *Ecuación 9* (Mubashar, 2010):

$$F = -D \frac{\partial C}{\partial x}$$

Ecuación 9

Donde:

F: Flujo de difusión

D: Coeficiente de difusión

C: Concentración de la sustancia de difusión

x: Coordenada espacial

El signo negativo indica que la difusión va en dirección contraria al incremento de concentración

La difusión es un proceso activado térmicamente que puede incrementar desde $2,43 \times 10^{-11}$ m²/s a $60,7 \times 10^{-11}$ m²/s cuando la temperatura se incrementa desde 20 °C a 90 °C para adhesivos epóxicos de espesor entre 0,7 – 1,3 mm, estudiados por (Gledhill, Kinloch, & Shaw, 1980).

La humedad relativa (RH) también es un factor que afecta enormemente la difusión. Se han encontrado resultados en láminas delgadas de adhesivos donde a 50 °C el coeficiente de difusión ha aumentado de $7,2 \times 10^{-13}$ m²/s a 23 %RH hasta de 14×10^{-13} m²/s a 100 %RH y un incremento en el contenido de humedad de saturación de un 0,54 wt% (porcentaje en peso) a 23 %RH hasta 2,1 wt% a 100 %RH, (Brewis, Comyn, & Shalash, 1982).

Para definir las características de humedad de un polímero se han empleado tanto el coeficiente de difusión D, y el contenido de saturación de humedad M_{∞} que es la cantidad máxima de humedad que un volumen puede absorber (Mubashar, 2010).

(Loh, Crocombe, Abdel Wahab, & Ashcroft, 2005) sometieron adhesivo epóxico de espesor entre 0,4 y 0,8 mm a 81,2 %RH, 95,8 %RH y 100 %RH y con un aumento en 7,6 wt% de contenido de humedad encontró una disminución en 38 % del módulo elástico y en 52,3 % de la resistencia última a tracción.

Para describir la difusión en un estado no estable y espacio tridimensional, se emplea la segunda ley de Fick, según la *Ecuación 10*, resultando en una rápida difusión en los estados iniciales y la concentración disminuye exponencialmente desde la zona de mayor concentración hacia el centro del polímero (Mubashar, 2010):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

Ecuación 10

Donde:

t: Tiempo de difusión

D: Coeficiente de difusión

C: Concentración de la sustancia de difusión

x, y, z: Coordenadas espaciales

De acuerdo con la norma (ASTMD5229, 2014), la *Ecuación 10* se reduce a la *Ecuación 11* para describir la absorción y desorción de humedad en la dirección del espesor, en una dimensión y según la segunda ley de Fick (ASTMD5229, 2014) (Gibson, 2016):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_z \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

Ecuación 11

La difusión no es isotrópica y usualmente es un orden de magnitud mayor en direcciones 1 y 2 (D_1 , D_2 , D_x , D_y) con respecto a la dirección del espesor (D_3 , D_z). Sin embargo, la difusión de humedad en el plano raramente es cuantificada con precisión, por lo cual no existen métodos de ensayo estándar con los que se pudiera determinar la difusión de humedad en el plano (US Department of Defense, 2002).

Según la norma (ASTMD5229, 2014), el contenido de humedad que un material absorbe, se puede calcular con una técnica gravimétrica como un porcentaje al medir el peso del material húmedo y comparándolo con respecto al material seco, empleando la *Ecuación 12*:

$$Mt(\%) = \frac{w_t - w_0}{w_0} * 100$$

Ecuación 12

Donde:

M_t = Contenido de humedad al tiempo t (%)

w_t = Peso de la probeta al tiempo t (g)

w_0 = Peso de la probeta al tiempo cero (g)

Luego se emplean los resultados calculados con la *Ecuación 12* para generar una gráfica de contenido de humedad $M_t(\%)$ vs raíz cuadrada del tiempo $\sqrt{t}$. En una curva común, el contenido de humedad asciende con un valor constante y luego disminuye gradualmente hasta alcanzar el valor de saturación, en el cual se estabiliza como se aprecia en la Figura 5.5. De esta, cuyo comportamiento es un característico comportamiento de Fick (Christian, 2009) (Shirrell, 1978), se toma la primera zona lineal ascendente y se calcula la difusión, como la pendiente de la curva, empleando la *Ecuación 13* (ASTMD5229, 2014), la cual proviene de la manipulación algebraica de la solución analítica propuesta por (Shen & Springer, 1976) a la *Ecuación 11*, la cual aplica para contenido de humedad y la temperatura del ambiente son constantes:

$$D_z = \pi \left(\frac{h}{4M_m} \right)^2 \left(\frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}} \right)^2$$

Ecuación 13

Donde:

D_z = Coeficiente de difusión en la dirección del espesor

h = Espesor medio de la probeta (mm)

$\frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}}$ = Pendiente de la zona lineal de la curva de humedad vs raíz de tiempo

M_m = Contenido de humedad de saturación

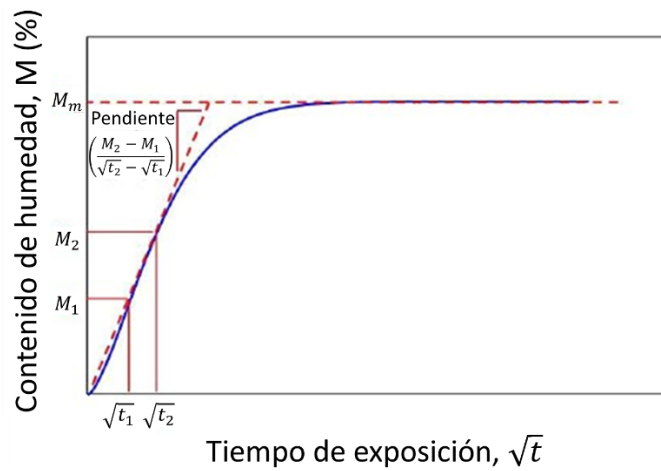
M_1 = Valor de humedad 1 al tiempo t_1 (%)

M_2 = Valor de humedad 2 al tiempo t_2 (%)

t_1 = Tiempo 1 (h)

t_2 = Tiempo 2, siendo mayor a t_1 (h)

Figura 5.5. Gráfica de Difusión de Fick



Fuente: Modificado de (Wong, 2013)

Es importante resaltar que de esta gráfica se puede definir si el comportamiento cumple con las leyes de Fick al cumplir los tres puntos definidos por (Wong, 2013) y citados en (ASTMD5229, 2014):

1. La pendiente de la zona lineal inicial se mantiene recta hasta el 60 % de la humedad de saturación
2. Luego de la línea recta, la pendiente disminuye gradualmente hasta alcanzar un valor de equilibrio en la humedad de saturación
3. Al realizar las curvas de contenido de humedad vs $\sqrt{(t/h)}$ para diferentes espesores de un mismo material, estas deben ser superimponibles

Para una predicción simple del comportamiento del material ante absorción de humedad a una temperatura dada, se puede realizar mediante el cálculo de la función de absorción de humedad $G(T,t)$ aproximada mediante la *Ecuación 14*, y su posterior implementación en la *Ecuación 15* para obtener el contenido de humedad del material como una función de la temperatura y el tiempo (ASTMD5229, 2014):

$$G(T, t) = 1 - \exp \left[-7,3 \left(\frac{D_z(T)t}{h^2} \right)^{0,75} \right] \quad \text{Ecuación 14}$$

$$M(T, t) = M_b + G(T, t)(M_m - M_b) \quad \text{Ecuación 15}$$

Donde,

T = Temperatura °C

$M(T,t)$ = Contenido de humedad del material como una función de la temperatura y el tiempo

M_b = Contenido de humedad al inicio del experimento, usualmente tomada como cero (%)

M_m = Contenido de humedad de saturación (%)

h = Espesor medio de la probeta (mm)

$G(T,t)$ = Función de absorción de humedad

t = tiempo (h)

Se han propuesto metodologías numéricas para predecir el efecto negativo que la humedad tiene sobre la resistencia última y su desempeño ante cargas estáticas. (Khoramishad,

Crocombe, Katnam, & Ashcroft, 2011), (S. Liu et al., 2016), (Mubashar, 2010), han realizado ensayos estáticos sobre juntas adhesivas tanto degradadas a diferentes tiempos, como sin degradar y han implementado una aproximación del modelo de zona cohesiva en las zonas de contacto del compuesto con el adhesivo con un análisis combinado de esfuerzo-difusión para predecir el daño observado en las juntas que fueron sometidas a ensayos a tracción. El modelo de zona cohesiva implementa una ley constitutiva de tracción-separación para predecir inicio de grietas, propagación, daño y falla. (Liljedahl, 2006) ha implementado el modelo de zona cohesiva mediante un análisis hygro-mecánico con el uso de los elementos finitos, implementando los valores experimentales de difusión de humedad y las propiedades mecánicas del adhesivo afectadas por la humedad. Así, determinó la resistencia residual de una junta simple (un área a cortante de adhesivo) con base en las deformaciones de falla del adhesivo y logrando una adecuada correlación con los datos obtenidos experimentalmente.

(Eftekhari & Fatemi, 2016) investigaron experimentalmente los efectos de la temperatura y la humedad en el comportamiento a tracción de compuestos fibrorreforzados, en los cuales observaron comportamiento de absorción y desorción de acuerdo con leyes de Fick, sobre este material compuesto de poliestireno y poliamida reforzados por fibras de vidrio.

El coeficiente de difusión se puede hallar experimentalmente, o relacionarlo con la temperatura de inmersión con una relación de tipo Arrhenius (Meng, Rizvi, Grove, & Le, 2015) (Guermaz, Ben Tarjem, Ksouri, & Ayedi, 2013), como la *Ecuación 16*:

$$D = D_0 \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \quad \text{Ecuación 16}$$

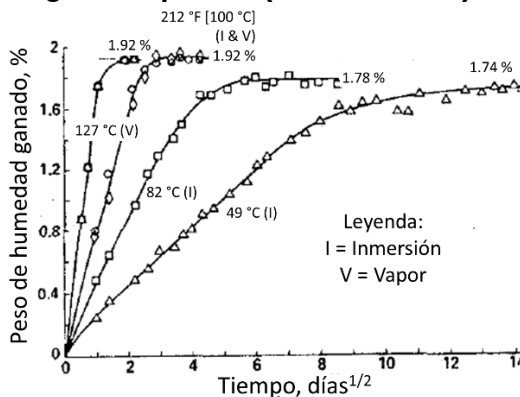
Donde: D_0 es un coeficiente preexponencial conocido como constante de difusión de referencia (reportado en la literatura como $8,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$), R es la constante universal del gas (implementado como $8,31 \text{ J/mol K}$), E_a es la energía de activación (reportado en la literatura como $58,65 \text{ kJ/mol}$) y T la temperatura absoluta en Kelvin. E_a es la energía se puede determinar al ajustar la *Ecuación 16* con al menos dos valores diferentes de temperatura (Zoghi, 2014).

La ecuación de Arrhenius es implementada para estimar la influencia de la temperatura en las velocidades de las reacciones químicas, de manera que la velocidad de una constante (D , en el caso de la *Ecuación 16*) sea el producto entre una frecuencia o factor pre exponencial (D_0) y un término exponencial (Laidler, 1984). Es conocido que la temperatura tiene un profundo efecto en la difusión. En la Figura 5.6 se muestra el efecto de la temperatura, donde para un incremento del 150 % de la temperatura desde 120°F hasta 180°F , representó un decrecimiento del tiempo necesario para absorber 1 % de ganancia en peso a casi un factor de 5, es decir, un incremento en la temperatura en 33°C aumentó la difusión (Hedrick & Whiteside, 1977). En la Figura 5.7 se muestra la relación lineal entre la escala logarítmica de la difusión ($\log D$) y el inverso de la temperatura ($1/T$), donde para un particular sistema material compuesto carbono/epóxico se refleja la fuerte dependencia de la difusión con la temperatura, en una expresión de Arrhenius del tipo exponencial (US Department of Defense, 2002).

De acuerdo con (Zoghi, 2014), es posible conocer la dependencia de la difusión con la temperatura usando la expresión de Arrhenius de la *Ecuación 16*, conociendo las propiedades de transporte de humedad (constante de difusión de referencia y la energía de

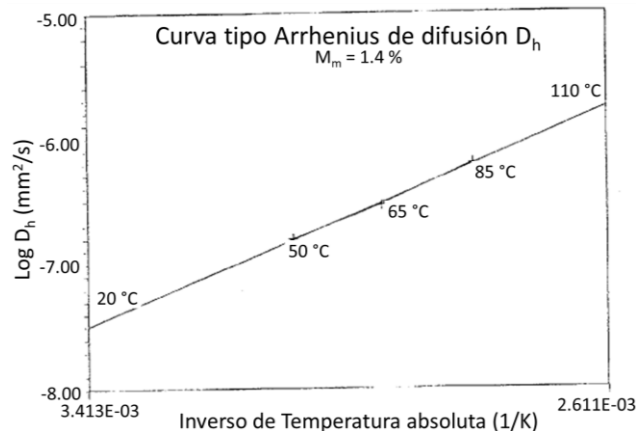
activación), a partir de mediciones experimentales de la ganancia en peso de las probetas del material. Para ello, se implementa el procedimiento de la norma (ASTMD5229, 2014), donde datos a pre saturación se grafican contra la raíz cuadrada del tiempo de medición y se extrae la pendiente con un ajuste lineal. Luego se obtiene la difusión del material a diferentes temperaturas implementando la *Ecuación 13*. Finalmente, con un criterio de mínimos cuadrados se ajustan los coeficientes de la *Ecuación 16*.

Figura 5.6. Efecto de la temperatura en la velocidad de absorción de humedad en un laminado (3,0x5,0x0,12 in) híbrido boro-grafito/epóxico (5505/AS-3501)



Fuente: Modificado de (Hedrick & Whiteside, 1977)

Figura 5.7. Difusión de humedad como función de la temperatura



Fuente: Modificado de (US Department of Defense, 2002)

6. CRITERIOS DE FALLA DE LA LÁMINA

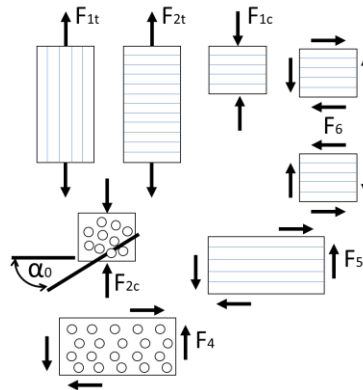
Falla en los elementos estructurales se comprende como la pérdida de la capacidad de desarrollar su función. La falla estructural en los materiales compuestos es dividida en los siguientes tipos; sin embargo, en el diseño debe tenerse presente también el peso, costo, proceso de manufactura, entre otros (Hinton, Kaddour, & Soden, 2004): Daño del material (fibra o matriz), rotura, deformación excesiva, pandeo, desprendimiento. Con respecto al daño del material, se reconocen los siguientes modos de falla:

- Falla a tensión de la fibra: El esfuerzo longitudinal σ_1 , alcanza la resistencia a tensión de la lámina F_{1t} . Progresas con una distribución de Weibull de resistencia de la fibra representada por el factor de forma m
- Micropandeo de la fibra: En función del módulo a cortante de la lámina G_{12} y la desviación estándar de desalineación de fibra s_σ (el cual depende de la calidad en manufactura), se presenta por falla a compresión longitudinal F_{1c} .
- Despegue entre fibra-matriz: Falla la interfaz por esfuerzo cortante excesivo y degradación ambiental
- Grietas de la matriz: aparecen grietas en la dirección de la fibra y ensanchan la zona, a causa de carga mecánica, esfuerzo térmico, ingreso de humedad, esfuerzo residual de curado, envejecimiento
- Cortante de matriz: Falla a cortante de la matriz en la dirección de la fibra, por cargas combinadas de cortante y compresión
- Delaminación: Propagación de grietas entre láminas por cortante interlaminar excesiva σ_{31} , σ_{32} . Ocurre porque las propiedades fuera del plano son bajas
- Falla Interlaminar e Intralaminar: Básicamente Interlaminar es entre láminas (delaminación), mientras que intralaminar es dentro de la lámina por propagación entre fibras y en la dirección de ellas (Laffan, 2012).

La incorporación de estos modos de falla en un diseño es de alta complejidad, por lo cual se suele emplear criterios empíricos de falla de lámina, como los criterios de falla empleados en metales, pero modificados para compuestos. En el subcapítulo **6.2. Criterios de falla: Lámina** se describen los criterios de falla relacionados con los conceptos más importantes relacionados con falla. En metales es usual tomar el esfuerzo de fluencia como falla, debido a que a partir de este el material no recupera su forma inicial por superar su límite elástico y no la resistencia última donde hay rotura. Sin embargo, en los materiales compuestos reforzados unidireccionalmente con fibras largas, el esfuerzo a fluencia coincide con la resistencia última y se presentan daños internos antes de alcanzar la resistencia última. Por ello, se toma la iniciación de la falla como el equivalente a la fluencia en metales, ya que puede generar grietas que favorecen efectos como ingreso de humedad disminuyendo las propiedades del material aun cuando no hay deformaciones permanentes.

Los criterios de falla de la lámina aportan ecuaciones que incluyen 10 parámetros experimentales: F_{1t} , F_{1c} , F_{2t} , F_{2c} , F_4 , F_5 , F_6 , G_{Ic} , G_{IIc} y α_0 . Dichos parámetros se ajustan con datos obtenidos de experimentos con compuestos de una lámina, con los que se determinan los valores de resistencia de acuerdo con la Figura 6.1 y explicado en el subcapítulo siguiente: **6.1. Resistencia de la lámina.**

Figura 6.1. Resistencia de lámina unidireccional



Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

6.1. RESISTENCIA DE LA LÁMINA

Para el ajuste de las ecuaciones de los criterios de falla, se determinan experimentalmente los valores de resistencia de la manera que se lista a continuación. Las ecuaciones se muestran en la Tabla 6.4.

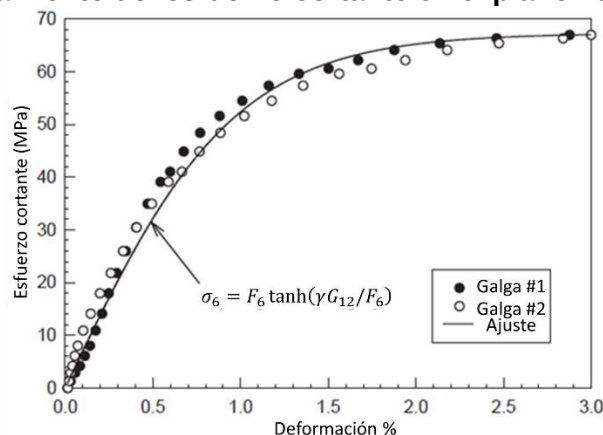
- Resistencia a tracción en la dirección de la fibra, F_{1t} :
Se determinan con el procedimiento de la norma (ASTM D3039, 2014). Para altos valores de volumen de fibra, la *Ecuación 17* asume que la deformación de la fibra y la matriz es la misma, las fibras fallan a menor deformación que la matriz, cuando la fibra falla la matriz no puede soportar la carga y el compuesto falla. Para bajos valores de volumen de fibra, la *Ecuación 18* asume que la matriz aún soporta carga cuando la fibra falla. Con la *Ecuación 19* se estima el valor mínimo de volumen de fibra con el cual el compuesto es más resistente que la matriz.
- Resistencia a compresión en la dirección de la fibra, F_{1c} :
Se determinan con la *Ecuación 20*, luego de estimar el valor de s_α a partir de despejar de esta misma y con valores típicos publicados de F_{1c} . Posteriormente se implementa la *Ecuación 20* nuevamente para el material a evaluar, conociendo el módulo a cortante G_{12} o resistencia a cortante F_6 . La falla se presenta por el pandeo de las fibras. La norma que aplica para el procedimiento experimental es la (ASTMD3410, 2003).
- Resistencia a tracción en la dirección transversal, F_{2t} :
Esta resistencia es un problema de mecánica de fractura. Ocurre falla en la lámina cuando una grieta se propaga en dirección de la fibra y divide la lámina. Se puede calcular con la *Ecuación 21* y experimentalmente empleando la norma (ASTM D3039, 2014).
- Resistencia a compresión en la dirección transversal, F_{2c} :
Se debe calcular con la fórmula empírica mostrada en la *Ecuación 22*, y con datos experimentales se puede estimar la resistencia aparente compresiva F_{mc} despejándola. El factor empírico C_v se emplea para ajustar presencia de vacíos. Esta resistencia se calcula con las normas (ASTM D695, 2015); y la norma conocida como IITRI por Illinois Institute of Technology Research Institute (ASTMD3410, 2003). Con respecto a la norma IITRI, el módulo a compresión longitudinal y la razón

de Poisson de un laminado unidireccional se pueden evaluar correctamente antes de que ocurra pandeo, pero si el espesor es mayor a 1,27 cm se deben considerar las concentraciones de esfuerzo para interpretar los módulos correctamente; al incrementar el espesor de la probeta, se incrementa el esfuerzo a pandeo. para evaluar el módulo, razón de Poisson y resistencia compresiva (evaluados previo al pandeo), pero para mejoras o rediseño se debe realizar un análisis de pandeo, ya que los laminados a 0° de carbono-epóxico (en el espesor de norma: 1,5 – 3 mm) también fallan por pandeo global. Además, la resistencia a compresión es aparente es menor a la real aún si no se presenta pandeo, debido a las altas concentraciones de esfuerzos en las puntas de los tabs que se usan para sujeción de la probeta; no hay evidencia de que este método permita hallar la verdadera resistencia compresiva. Otros tipos de falla también se presentan, tales como el despegue de las capas de adhesivo y división del plano medio de la probeta a 0° como resultado de los altos esfuerzos interlaminares. Se deben tener en cuenta la concentración de esfuerzos (Tan, 1992).

- Resistencia a cortante en el plano, F_6 :

Se debe calcular con la fórmula empírica mostrada en la Ecuación 23. Falla a cortante en el plano de la lámina unidireccional ocurre cuando una grieta se propaga en dirección de la fibra y divide la lámina, siendo un problema de mecánica de fractura. En la Figura 6.6a, se muestran los esfuerzos cortantes τ_{12} y τ_{13} (actuando sobre la cara 1 sombreada) que son los menos probables en fallar el material, porque no cortan las fibras. En la Figura 6.6b, se muestran los esfuerzos cortantes τ_{31} y τ_{32} (actuando sobre la cara 3 sombreada) que dividen la matriz sin cortar las fibras. En la Figura 6.6c, se muestran los esfuerzos cortantes τ_{21} y τ_{23} (actuando sobre la cara 2 sombreada) que también dividen la matriz sin cortar las fibras. El compuesto falla cuando $F_6 = \tau_{21u}$. Se aclara que la resistencia a cortante en el plano F_6 , está relacionada con los esfuerzos a cortante τ_{21} y τ_{12} , los cuales son numéricamente iguales, pero este último es el menos probable que falle el material. La norma que aplica para el procedimiento experimental es la (ASTM D5379, 2019), con la cual se muestra que para una lámina unidireccional de carbono/epóxico el comportamiento puede aproximarse a un comportamiento no lineal, como se mencionó en el subcapítulo 4.3. Módulos de elasticidad de la lámina y como se muestra en la Figura 6.2.

Figura 6.2. Comportamiento del esfuerzo cortante en el plano vs deformación



Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

- Resistencia a cortante intralaminar, F_4 y F_5 :

De acuerdo a como se muestra en la Figura 6.6, la matriz se divide sin cortar a las fibras a causa de la aplicación de los esfuerzos cortantes τ_{32} y τ_{23} , los cuales son numéricamente iguales y por eso se denominan a ambos como σ_4 , al cual le corresponde la resistencia a cortante intralaminar F_4 y se puede calcular con la Ecuación 24.

De acuerdo a como se muestra en la Figura 6.6, la matriz se divide en dirección a las fibras (sin cortarlas) a causa de la aplicación del esfuerzo cortante τ_{31} , el cual es el usual modo de falla del esfuerzo σ_5 que aplica cortante a lo largo de la dirección de las fibras. Este esfuerzo también se implementa para relacionar al esfuerzo cortante τ_{13} , el cual es numéricamente igual a τ_{31} , aunque es el menos probable en fallar el material porque no corta las fibras. A estos les corresponde la resistencia a cortante intralaminar F_5 , el cual es afectado por la resistencia de adhesión de la interfaz fibra-matriz. Si bien pueden presentarse cortantes τ_{21} y τ_{31} , solamente τ_{21} puede contribuir al agrietamiento (Dvorak & Laws, 1986). Con respecto a estos casos de esfuerzos cortantes, se anota:

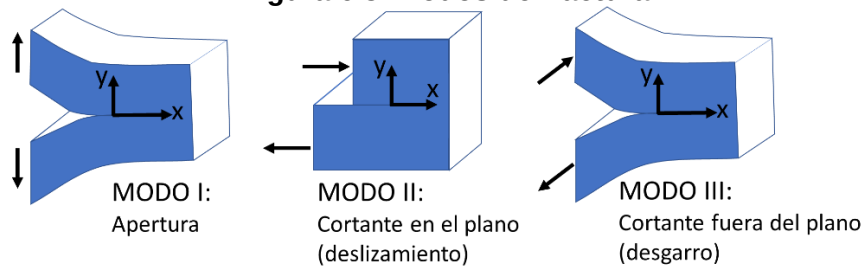
- $F_5 = F_6$ si el espesor del compuesto es unidireccional y homogéneo. Caso: lámina unidireccional de preimpregnado y material unidireccional de pultrusión
- Si se aplica σ_4 ó σ_5 : Primero presenta falla la interfaz rica en resina. Caso: laminado con distintas interfaces entre láminas, laminado prepreg, ocurre si $F_4, F_5 < F_6$

Las normas que aplican para el procedimiento experimental son: (ASTM D2344, 2016), (ASTM D4475 - 02, 2016), (ASTM D3914 - 02, 2016), (ASTM D3846 - 08, 2015), (ASTM D5379, 2019).

- Tenacidad a la fractura: Modo I, GI_C :

Cuando varias láminas están adyacentes una a la otra, aparentemente se incrementa la resistencia a tracción en la dirección transversal F_{2t} , lo cual no puede ocurrir porque las propiedades del material son invariantes. Esto evidencia que la resistencia se debe calcular como un problema de mecánica de fractura, donde la propiedad dominante del material es la tenacidad a la fractura GI_C en Modo I (modo de apertura, como se muestra en la Figura 6.3), cuando el modo dominante de falla es por resistencia transversal (Dávila, Camanho, & Rose, 2005). La mecánica de fractura es analizada en mayor detalle por (Tada, Paris, & Irwin, 2010). La fractura en Modo I es el más crítico modo de fractura en los sistemas de matriz frágil (Martin, 1989).

Figura 6.3. Modos de fractura



Para estimar el valor de esta propiedad, se realiza primero un ensayo a tracción de una lámina unidireccional sometida a σ_2 para conocer la resistencia F_{2t} (de acuerdo

con la norma (ASTM D3039, 2014)), ya que esta falla cuando una grieta de los bordes de la probeta se propague sobre el espesor en el plano 1-3 mostrado en la Figura 6.6c como efecto de la aplicación del esfuerzo σ_2 (Dvorak & Laws, 1986) (Zehnder, 2007). Luego se implementa la *Ecuación 25* mostrada en la Tabla 6.4. Se aclara que la falla transversal relacionada con F_{2t} es por fractura intralaminar donde la grieta se agranda en dirección del espesor y luego crece en dirección de las fibras (similar a la delaminación). La falla es diferente a la delaminación o fractura Interlaminar entre dos láminas (Laffan, 2012). Sin embargo, se usan los datos de fractura interlaminar en Modo I de la norma de Viga Doble Cantiléver DCB (ASTM D5528 - 13, 2013) (Daricik & Aslan, 2017) para estimar la resistencia a tracción en la dirección transversal F_{2t} como un diseño conservativo, ya que los valores de tenacidad a la fractura por grietas intralaminas son mayores a los grietas interlaminas (delaminaciones), ver (Ji et al., 2014) Esta falla interlaminar aplica en probetas de laminados a los cuales se les determina la propiedad de la interfaz.

- Tenacidad a la fractura: Modo II, GII_C :

Cuando varias láminas están adyacentes una a la otra, aparentemente se incrementa la resistencia a cortante en el plano F_6 , lo cual no puede ocurrir porque las propiedades del material son invariantes. Esto evidencia que la resistencia se debe calcular como un problema de mecánica de fractura, donde la propiedad dominante del material es la tenacidad a la fractura GII_C en Modo II (modo de cortante en el plano, como se muestra en la Figura 6.3), cuando el modo dominante de falla es por resistencia a cortante en el plano (Saidpour, Barikani, & Sezen, 2003). Esta es una propiedad crítica para evaluar el potencial de crecimiento de la grieta y para aplicaciones de diseño debido a que elevadas concentraciones de esfuerzos cortantes tienden a generar delaminación, por ejemplo, en elementos sometidos a flexión (X. Liu, Sun, Wu, & He, 2018). La mecánica de fractura es analizada en mayor detalle por (Tada et al., 2010).

Para estimar el valor de esta propiedad, se realiza primero un ensayo a cortante de una lámina unidireccional sometida a σ_6 para conocer la resistencia F_6 (de acuerdo con la norma de ensayo de losipescu (ASTM D5379, 2019), la norma (ASTM D4255, 2015)) y la norma de Flexión con Muesca Final ENF (ASTM D7905, 2019), ya que esta falla cuando una grieta de la superficie de la probeta se propague en el plano 1-3 mostrado en la Figura 6.6c por acción de la cortante τ_{21} (Dvorak & Laws, 1986) (Zehnder, 2007). Luego se implementa la *Ecuación 26* mostrada en la Tabla 6.4. La norma (ASTMD3518, 2007) también permite conocer la resistencia F_6 al realizar un ensayo de tracción a un laminado bidireccional ± 45 .

De acuerdo con el estudio realizado por (Arai, Noro, Sugimoto, & Endo, 2008), la tenacidad a la fractura GII_C (obtenido mediante ensayo ENF) es aproximadamente 3 veces mayor al Modo I (obtenido mediante ensayo DCB).

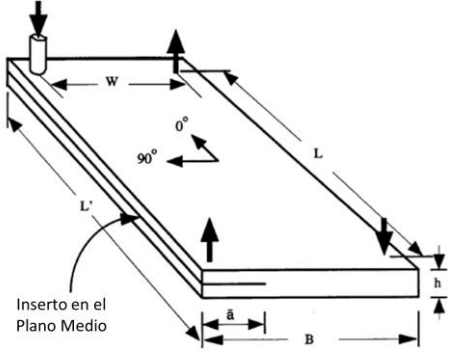
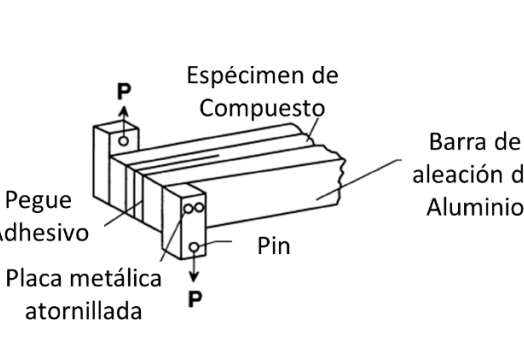
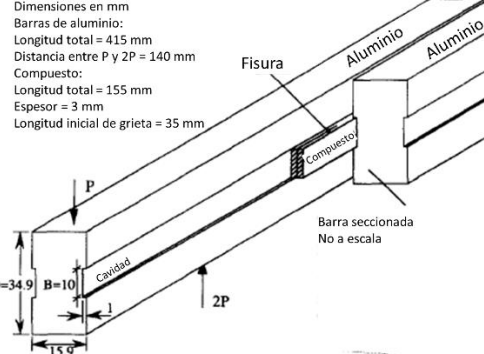
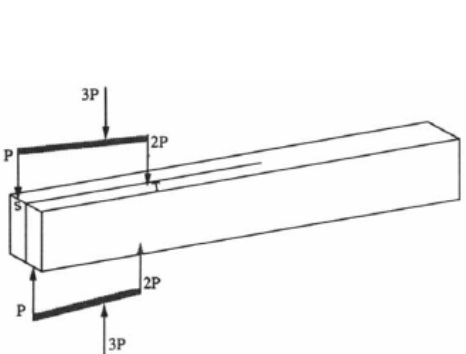
- Tenacidad a la fractura: Modo III, $GIII_C$:

Se han propuesto métodos como los siguientes, cuyo diagrama se muestra en la Tabla 6.1:

- Torsión de Borde Agrietado (Edge Crack Torsión, ECT): Laminado $[90/(\pm 45)_3/(\mp 45)_3/90]_S$ con una delaminación inducida por un film no adhesivo en el plano medio a lo largo de un borde y cargada a torsión a lo largo de la longitud del laminado en un accesorio diseñado para ello. Se encontró que en este procedimiento el Modo I es muy pequeño comparado con los otros, pero el Modo II es el 75% del Modo III (Li, Lee, Lee, & O'Brien, 1997).

- Viga en Voladizo Dividida (Split Cantilever Beam, SCB): Laminado unidireccional pegado entre barras de aluminio (a la longitud de la probeta) para incrementar la rigidez torsional de la probeta mientras la delaminación crece. La carga se aplica mediante placas gruesas metálicas que son pernadas a las barras de aluminio en el extremo donde está la delaminación y se sujetan a la máquina de ensayos. Estas placas metálicas ayudan a reducir la delaminación en Modo I. Sin embargo, existe una componente alta de Modo II en los bordes libres, por lo cual no permite determinar la tenacidad a la fractura en Modo III (Martin, 1989).
- SCB Modificado: Se modifica el patrón de carga para disminuir la componente no deseada del modo de falla II, mediante la extensión del soporte metálico de la probeta y los puntos de aplicación de la carga como se muestran en la Tabla 6.1. Con este ensayo se logró falla en Modo III y se demostró que para un compuesto de fibra de Carbono/Epóxico denominado XAS/913C la tenacidad a la fractura en Modo III G_{III_C} es 6 veces mayor al G_{I_C} y 2 veces mayor al G_{II_C} (Robinson & Song, 1994), de donde se intuye que $G_{II_C} = 3G_{I_C}$, como lo encontró (Arai et al., 2008).

Tabla 6.1. Diagrama del ensayo ECT, SCB y SCB Modificado

ECT	SCB
 Fuente: Modificado de (Li et al., 1997)	 Fuente: Modificado de (Martin, 1989)
SCB Modificado	
Probeta en su soporte	Esquema de carga
Dimensiones en mm Barras de aluminio: Longitud total = 415 mm Distancia entre P y 2P = 140 mm Compuesto: Longitud total = 155 mm Espesor = 3 mm Longitud inicial de grieta = 35 mm  Fuente: Modificado de (Robinson & Song, 1994)	

Sin embargo, actualmente no hay métodos comúnmente aceptados para medir la tenacidad a la fractura en Modo III (US Department of Defense, 2002) Esto se debe

a que los ensayos de fractura en Modo III presentan una contribución del Modo II a la falla (Martin, 1989). Las grietas buscan ruta de expansión entre las fibras en Modos I y II, creando asperezas entrelazadas en la superficie de fractura que dificultan la expansión de grietas en Modo III (Zhao & Wang, 1998). Además, en una lámina o placa de material fibrorreforzado el esfuerzo cortante τ_{32} relacionado con F_4 suele ser muy pequeño o cercano a cero, por lo cual el Modo III suele no ser considerado en la mayoría de aplicaciones (Dvorak & Laws, 1986). La interferencia del Modo II se hace significativa con los cambios en los parámetros de configuración, tales como: condición de carga, geometría del espécimen, relación entre dimensiones, tamaño de los bordes de la probeta, apilamiento de capas del compuesto, y longitud de la grieta (Zhao & Wang, 1998).

La falla en Modo III se presenta cuando una grieta de la superficie de la probeta se propague en el plano 1-2 mostrado en la Figura 6.6b por acción del esfuerzo cortante τ_{32} (Dvorak & Laws, 1986) (Zehnder, 2007). Si bien pueden presentarse cortantes τ_{21} y τ_{31} , solamente τ_{21} puede contribuir al agrietamiento (Dvorak & Laws, 1986).

Se ha demostrado que la tenacidad a la fractura G_{IIIc} en Modo III (modo de cortante fuera del plano o de desgarro, como se muestra en la Figura 6.3) es mayor a la tenacidad a la fractura G_{IIc} en Modo II, y a su vez es mucho mayor a la tenacidad a la fractura G_{Ic} en Modo I (Robinson & Song, 1994). Por lo anterior, para caracterizar delaminación en Modo III se pueden usar los datos de fractura interlaminar en Modo II como un diseño conservativo, asumiendo $G_{IIc} = G_{IIIc}$, ver (Martin, 1989).

- Ángulo del plano de fractura en compresión transversal, α_0 :

Esta variable está comprendida en la falla Mohr-Coulomb de la matriz, en la cual un esfuerzo a compresión alcanza la resistencia ($-\sigma_2 = F_{2c}$) y su modo de falla es por cortante en un plano a un ángulo con respecto a la dirección de la carga, como se muestra en la Figura 6.4. En la Tabla 6.2 se muestra el criterio de falla Mohr-Coulomb (M-C), de acuerdo con la Ecuación 27, que se representa con la línea de fractura a cortante en la Figura 6.5.

Las propiedades del material relacionadas son: F_4 resistencia intralaminar a cortante fuera del plano (plano 2-3) cuando $-\sigma_2 = 0$; y ϕ ángulo de fricción interna. El parámetro η_T es un factor de peso de la influencia de la compresión en la medición de la resistencia a cortante, denominado coeficiente de influencia. Si el elemento no presenta fricción interna ($\phi = 0$), el criterio M-C se reduce al criterio de Tresca de la Ecuación 28 mostrada en la Tabla 6.2.

La Figura 6.5 representa el plano 2-3 de un elemento bajo compresión sin cortantes. El círculo que representa a $-\sigma_2$ aumenta a medida que este esfuerzo incrementa, hasta alcanzar la tangente al círculo que interseca el eje de cortante en el valor F_4 , presentando un plano de falla a un ángulo de fractura α_0 con respecto a la dirección 3, donde este plano de falla rota alrededor del eje 1. En la Tabla 6.3 se muestra el plano de análisis 2-3 y cómo el plano de fractura sombreado en azul y achurado en gris puede presentarse en rotación alrededor del eje 1. El plano de fractura no puede cortar las fibras, es decir, es paralelo a la dirección de las fibras y si solo está sometido a esfuerzo a compresión σ_2 su plano de falla se encuentra a un ángulo entre $\alpha_0 \approx 50^\circ - 55^\circ$ con respecto a la dirección 3, ver Tabla 6.2. El plano de fractura se encuentra bajo esfuerzos de compresión σ y cortante τ , como se muestra en la Figura 6.4, que dependen del esfuerzo aplicado y la orientación del plano de fractura α , de acuerdo con la Ecuación 29 mostrada en la Tabla 6.2.

Mediante un ensayo a compresión se puede: Medir el ángulo del plano de fractura

α ; el coeficiente de influencia η_T se calcula con la *Ecuación 30* mostrada en la Tabla 6.2; y la resistencia a compresión transversal F_{2c} para estimar la resistencia a cortante transversal F_4 con la *Ecuación 24* mostrada en la Tabla 6.2 y en la Tabla 6.4.

En el caso del plano 1-2 bajo esfuerzos de compresión transversal $-\sigma_2$ y cortante en el plano σ_6 , la resistencia a cortante incrementa linealmente con la compresión transversal manteniendo el plano de fractura sin rotar alrededor del eje 3. En la Tabla 6.3 se muestra el plano de análisis 1-2 y cómo el plano de fractura sombreado en azul y achurado en gris muestra intersección transversalmente con las fibras si rotara alrededor del eje 3. El plano de fractura no puede cortar las fibras, es decir, es paralelo a la dirección de las fibras, pero aún aplica el criterio M-C, de acuerdo con la *Ecuación 31* mostrada en la Tabla 6.2. La resistencia a cortante S_L en el plano de fractura se debe a la aplicación de la cortante en el plano σ_6 y η_L es el coeficiente de influencia asociado.

Cuando no hay cortante en el plano ($\sigma_2 < 0, \sigma_6 = 0$) se presenta falla cuando τ_T alcanza la resistencia a cortante $F_4 - \eta_T \sigma_n$ (*Ecuación 27*). Cuando no hay compresión en el plano ($\sigma_2 = 0, \sigma_6 \neq 0$) se presenta falla cuando τ_L alcanza la resistencia a cortante en el plano F_6 (*Ecuación 32*). Cuando hay tanto compresión como las cortantes en el plano ($\sigma_2 \leq 0, \sigma_6 \neq 0, \sigma_4 \neq 0$) se tiene un criterio cuadrático que incluye ambos efectos en la *Ecuación 33* de la Tabla 6.2 según propuso Puck en un Criterio Cuadrático de Falla (Dávila et al., 2005). Según este criterio no se presenta falla cuando los esfuerzos $\sigma_2 \leq 0, \sigma_6 \neq 0, \sigma_4 \neq 0$ permiten tener $g \leq 0$. Falla de matriz dominada por cortante en el plano ocurren en un plano normal a la lámina y paralela a las fibras donde $\alpha = 0^\circ$. Con un aumento en la compresión transversal $\alpha = 40^\circ$ y ante compresión transversal pura $\alpha = 53^\circ$ (Dávila et al., 2005). Es decir, con un incremento en σ_2 hay un crecimiento lineal de resistencia cortante dominada por la resistencia cortante en el plano según S_L en la *Ecuación 31* pero permaneciendo el plano de fractura a $\alpha = 0^\circ$. Mayor incremento en σ_2 causa que el ángulo cambie rápidamente a valores mayores, siendo un comportamiento dominado por la resistencia compresión transversal S_T en la *Ecuación 27*, mientras disminuye rápidamente la resistencia cortante en el plano.

Tabla 6.2. Ecuaciones que describen falla Mohr-Coulomb

CONDICIÓN	COMENTARIO	ECUACIÓN
Material frágil con fricción interna, $\phi \neq 0$ en plano 2-3	La resistencia a cortante S_T se incrementa linealmente con el esfuerzo a compresión aplicado $-\sigma_2$, por lo cual: $S_T \geq F_4$ Plano de fractura en $\alpha_0 > 45^\circ$	Criterio de falla Mohr-Coulomb $S_T = F_4 - \eta_T \sigma_n$ <i>Ecuación 27</i> Donde, (coeficiente de influencia) $\eta_T = \tan(\phi)$
Material frágil sin fricción interna, $\phi = 0$ en plano 2-3	Plano de fractura en el cuadrante cortante-compresión está en el ángulo $\alpha_0 = 45^\circ$	Criterio de falla Tresca, para el caso de esfuerzo plano (D. Hull & Clyne, 1996): $S_T \geq (\sigma_1 - \sigma_3)$

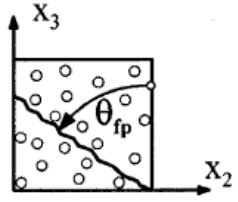
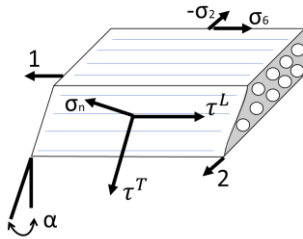
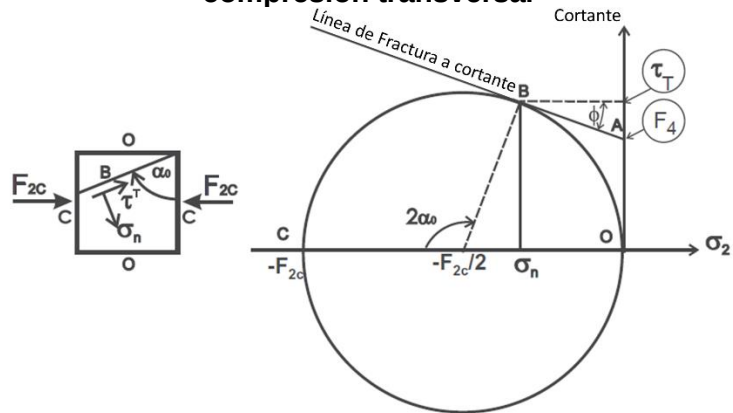
CONDICIÓN		COMENTARIO	ECUACIÓN
			<i>Ecuación 28</i>
Carbono/epóxico unidireccional a compresión sin cortante, en plano 2-3 $\sigma_2 < 0$ $\sigma_3 = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$		Falla a cortante en un plano que contiene el eje 1 y la normal al plano de fractura está a un ángulo $\alpha_0 \approx 50^\circ - 55^\circ$ con respecto a la dirección de la carga (Puck & Schürmann, 2002)	 Fuente: (Puck & Schürmann, 2002)
Esfuerzos sobre el plano de fractura en el plano de análisis 2-3		El plano de fractura se encuentra bajo esfuerzos de compresión σ y cortante τ . τ_L : cortante longitudinal τ_T : cortante transversal	$\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \alpha \leq 0$ $\tau_T = -\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\tau_L = \sigma_6 \cos \alpha$ <i>Ecuación 29</i>
Ensayo a compresión transversal cuando la falla se presenta en la cara 1 (plano de análisis 2-3, ver Tabla 6.3)		La <i>Ecuación 30</i> se obtiene de remplazar $\phi = 2\alpha_0 - \frac{\pi}{2}$ en el coeficiente $\eta_T = \tan(\phi)$, ya que la función $\tan(-\phi) = -\tan(\phi)$ es impar. En la <i>Ecuación 24</i> se tienen en cuenta las <i>Ecuaciones 27, 29 y 30</i> , y que cuando el material falla: $-\sigma_2 = F_{2t} > 0, \tau_T = S_T, \alpha = \alpha_0$	$\eta_T = -\cot 2\alpha_0$ <i>Ecuación 30</i> Ya que: $-\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha_0\right) = -\cot(2\alpha_0)$ $F_4 = F_{2c} \cos \alpha_0 (\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cot 2\alpha_0)$ <i>Ecuación 24</i>
Material frágil analizando el plano 1-2		La resistencia a cortante S_L en el plano de fractura se incrementa linealmente con el esfuerzo a compresión aplicado $-\sigma_2$, por lo cual: $S_L \geq F_6$ Si no hay compresión en el plano ($\sigma_2 = 0, \sigma_6 \neq 0$): $S_L \geq F_6 = \tau_L$ <i>Ecuación 32</i>	Criterio de falla Mohr-Coulomb $S_L = F_6 - \eta_L \sigma_n$ <i>Ecuación 31</i> Donde, (coeficiente de influencia) $\eta_L = -\frac{F_6 \cos 2\alpha_0}{F_{2c} \cos^2 \alpha_0}$
Criterio de Puck (Criterio Cuadrático de Falla)	Se presentan tanto compresión como las cortantes en el plano y no falla si los esfuerzos $\sigma_2 \leq 0, \sigma_6 \neq 0, \sigma_4 \neq 0$ permiten tener $g \leq 0$	$g = \left(\frac{\tau_T}{F_4 - \eta_T \sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau_L}{F_6 - \eta_L \sigma_n}\right)^2 - 1 < 0$ <i>Ecuación 33</i>	

Figura 6.4. Lámina unidireccional fracturada por compresión y cortante



Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

Figura 6.5. Círculo de Mohr en el plano 2-3 a compresión transversal

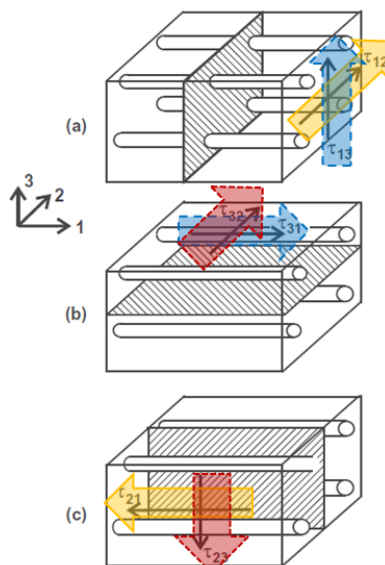


Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

Tabla 6.3. Plano de fractura en los planos de análisis

Plano de análisis	Giro del plano de fractura	
2-3	Alrededor del eje 1, falla en F_4 por efecto de τ_{32} , relacionado con $GIII_C$	
	(b)	(c)
1-2	Alrededor del eje 3, falla en F_6 por efecto de τ_{21} , relacionado con GII_C	
	(c)	(a)

Figura 6.6. Componentes de cortante y su relación con los modos de falla a cortante



CONVENCIÓN	RELACIÓN DE ESFUERZOS CORTANTES CON LA RESISTENCIA A CORTANTE		
	ESFUERZOS CORTANTES	RESISTENCIA A CORTANTE	
	τ_{12}, τ_{21}	F_6 Cortante en el plano	τ_{21} Relacionado con GII_C
	τ_{13}, τ_{31}	F_5 Cortante fuera del plano. Intralaminar	
	τ_{23}, τ_{32}	F_4 Cortante fuera del plano. Interlaminar	τ_{32} Relacionado con $GIII_C$

Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

Tabla 6.4. Ecuaciones que describen la resistencia de lámina de compuesto

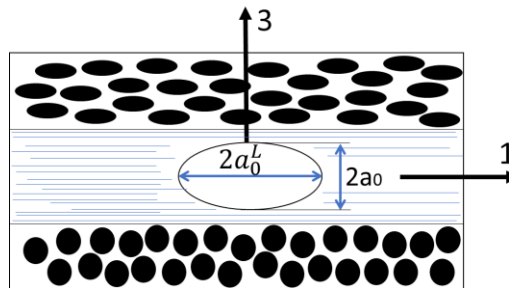
	COMENTARIO	ECUACIÓN
RESISTENCIA A TENSIÓN EN LA DIRECCIÓN DE LA FIBRA F_{1t}	Asumir: - Todas las fibras tienen la misma resistencia representada por el valor de resistencia aparente F_{ft} - Fibra y matriz se comportan linealmente hasta falla - La fibra es más frágil que la matriz - La fibra es más rígida que la matriz $V_{min} = \frac{F_{mt} - \sigma_m^*}{F_{ft} - \sigma_m^*}$ Ecuación 19	Alto V_f
		$F_{1t} = F_{ft}V_f + \sigma_m^*(1 - V_f)$ Donde se incluye el esfuerzo a falla de la matriz: $\sigma_m^* = F_{ft} \frac{E_m}{E_f}$, obteniendo:
		$F_{1t} = \left[V_f + \frac{E_m}{E_f}(1 - V_f) \right] F_{ft}$ Ecuación 17
		Bajo V_f
		$F_{1t} = F_{mt}(1 - V_f)$ Ecuación 18
	COMENTARIO	ECUACIÓN

RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN EN LA DIRECCIÓN DE LA FIBRA F_{1c}	En esta ecuación s_α es la desviación estándar de la desalineación de la fibra, implementada en radianes	$F_{1c} = G_{12}(1 + 4,76\chi)^{-0,69}$ <i>Ecuación 20</i> Donde, $\chi = \frac{G_{12}s_\alpha}{F_6}$
	COMENTARIO	ECUACIÓN
RESISTENCIA A TRACCIÓN EN LA DIRECCIÓN TRANSVERSAL F_{2t}	G_{Ic} es la tenacidad a la fractura en modo I. El espesor de transición se aproxima como $t_t = 0,6$ mm, 0,8 mm, para fibra de vidrio/epóxico y carbono/epóxico, respectivamente.	$F_{2t} = \sqrt{\frac{G_{Ic}\Lambda_{22}}{1,12^2\pi(t_t/4)}}$ <i>Ecuación 21</i> Donde, $\Lambda_{22} = \frac{E_2E_1^3}{2(E_1^3 - \nu_{12}^2E_2^3)}$
	COMENTARIO	ECUACIÓN
RESISTENCIA A COMPRESIÓN EN LA DIRECCIÓN TRANSVERSAL F_{2c}	F_{mc} : Resistencia aparente compresiva de la matriz C_v : Factor empírico para ajustar presencia de vacíos en términos de la fracción de volumen de vacíos V_v E_T : Módulo transversal de la fibra (E_f en el caso de fibras isotrópicas)	$F_{2c} = F_{mc}C_v \left[1 + \left(V_f - \sqrt{V_f} \right) \left(1 - \frac{E_m}{E_T} \right) \right]$ <i>Ecuación 22</i> Donde, $C_v = 1 - \sqrt{\frac{4V_v}{\pi(1 - V_f)}}$
	COMENTARIO	ECUACIÓN

RESISTENCIA A CORTANTE EN EL PLANO, F_6	G_{IIc} es la tenacidad a la fractura en modo II. El espesor de transición se aproxima como $t_t = 0,6$ mm, 0,8 mm, para fibra de vidrio/epóxico y carbono/epóxico, respectivamente (Wang, 1983).	$F_6 = \sqrt{\frac{G_{IIc} G_{12}}{\pi(t_t/4)}}$ Ecuación 23
	COMENTARIO	ECUACIÓN
RESISTENCIA A CORTANTE INTRALAMINAR, F_4 y F_5	Esta resistencia es una propiedad dominada por la matriz, ya que la cortante actúa sobre un plano paralelo a la dirección de la fibra, por lo cual las fibras no se resisten a la cortante.	$F_4 = F_{2c} \cos \alpha_0 (\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cot 2\alpha_0)$ Ecuación 24
TENACIDAD A LA FRACTURA: MODO I, G_{Ic}	El parámetro $2a_0$ es el tamaño de una grieta que representa a todos los encontrados en la lámina típicamente, en función del proceso de manufactura empleado, como se muestra en la Figura 6.7. La mitad del tamaño representativo de grieta se puede aproximar como: $a_0 = t_t/4$, donde el espesor de transición se aproxima como $t_t = 0,6$ mm, 0,8 mm, para fibra de vidrio/epóxico y carbono/epóxico, respectivamente (Wang, 1983).	$G_{Ic} = \frac{1,12^2 \pi a_0}{\Lambda_{22}} F_{2t}^2$ Ecuación 25 Donde, $\Lambda_{22} = \frac{E_2 E_1^3}{2(E_1^3 - \nu_{12}^2 E_2^3)}$
	COMENTARIO	ECUACIÓN

TENACIDAD A LA FRACTURA: MODO II, G_{IIc}	El parámetro $2a_0$ es el tamaño de una grieta que representa a todos los encontrados en la lámina típicamente, en función del proceso de manufactura empleado, como se muestra en la Figura 6.7. La mitad del tamaño representativo de grieta se puede aproximar como: $a_0 = t_t/4$, donde el espesor de transición se aproxima como $t_t = 0,6$ mm, 0,8 mm, para fibra de vidrio/epóxico y carbono/epóxico, respectivamente (Wang, 1983).	$G_{IIc} = \frac{\pi a_0}{G_{12}} F_6^2$ Ecuación 26
--	---	---

Figura 6.7. Representación de la geometría de la grieta



6.2. CRITERIOS DE FALLA: LÁMINA

Los criterios de falla de la lámina son ecuaciones con parámetros ajustados experimentalmente a partir de la falla de probetas de compuestos unidireccionales multilaminares, para emplearlos en situaciones de diseño sin datos experimentales y en diseño de laminados. Los datos experimentales se obtienen con las normas estandarizadas ASTM que se citan en la Tabla 6.6 y que se emplean para conocer la resistencia de la lámina, citadas en el subcapítulo anterior. Como apoyo para realizar los ensayos basados en las normas ASTM de esta tabla, se recomienda apoyarse en las explicaciones que detalladamente para cada una brindan (Adams et al., 2002) y la norma (US Department of Defense, 2002).

Estas ecuaciones ajustadas luego se utilizan en casos donde no se dispone de datos experimentales, como en el diseño de laminados, en el que se complementan con técnicas de análisis de fallas de laminados en la predicción de la primera lámina que falla. Pese a los complicados modos de falla que los materiales compuestos presentan y su difícil implementación en el diseño, se resaltan los siguientes criterios de falla:

- 6.2.1. Criterio del máximo esfuerzo
- 6.2.2. Criterio de la máxima deformación
- 6.2.3. Criterio de interacción de falla
- 6.2.4. Falla higrotérmica

Es necesario definir el término Razón de Resistencia usado en los criterios de falla, el cual es el cociente entre la resistencia y el esfuerzo aplicado, según la *Ecuación 34*. Este es similar al Factor de Seguridad: Si $R > 1$ el esfuerzo aplicado es menor a la resistencia del material y si $R < 1$ el esfuerzo es mayor y se predice falla del material. Este factor incrementa proporcionalmente los esfuerzos asumiendo comportamiento elástico lineal de las propiedades.

$$R = \frac{\text{Resistencia}}{\text{Esfuerzo aplicado}} = \frac{F}{\sigma} \quad \text{Ecuación 34}$$

Hay muchos otros criterios de falla debido a los complejos modos de falla, su construcción homogénea (arreglos asimétricos de miles de fibras del diámetro de 10 micrones en una matriz polimérica), su anisotropía (la resistencia paralela a las fibras típicamente 2 órdenes de magnitud mayor a las direcciones transversales), siendo complejo predecir con precisión la resistencia del laminado mucho más que para un metal. Con esto en mente, se realizó una actividad internacional de 12 años conocida como el Ejercicio Mundial de la Falla (World Wide Failure Exercise, WWFE) con el objetivo de mejorar la base de las teorías de diseño: predicción de la resistencia de falla y deformación de estructuras compuestas laminadas (Hinton et al., 2004). En el WWFE se compararon teorías de falla de compuestos laminados entre ellas y con datos experimentales (19 teorías empleadas en 14 casos de prueba de laminados unidireccionales de matriz epóxica y reforzadas con fibra de carbono o vidrio). Hubo varios investigadores que se negaron a participar, por ejemplo, se cita al Profesor Z. Hashin de la Universidad de Tel Aviv, cuya razón fue: “No creo que aún la más completa información de falla de lámina sea suficiente para predecir la falla de un laminado hecho de ellas (...) Personalmente no sé cómo predecir la falla de un laminado, y no creo que nadie más sepa cómo”. En la Tabla 6.5 se muestran las teorías de falla en resumen y las características que buscaban predecir. De estas se resalta, con respecto al diseño de compuestos:

- Zinoviev: usó el Criterio del Máximo Esfuerzo con un análisis de postfalla. Asumió comportamiento lineal elástico de esfuerzo-deformación hasta la falla inicial e incluyó una corrección continua para los efectos del cambio de orientación de la fibra durante la aplicación de carga
- Bogetti: usó una forma tridimensional del Criterio de la Máxima Deformación con un comportamiento no lineal del comportamiento esfuerzo-deformación cortantes de la lámina y un análisis simple de análisis progresivo de falla
- Tsai: usó el Criterio de Interacción de Falla Tsai-Wu que no identifica explícitamente los mecanismos de falla, asumiendo propiedades elástico lineales y una reducción de la matriz de rigidez luego de la falla inicial
- Puck y Cuntze: usaron mecanismos de falla tridimensional y un análisis de falla no lineal para predecir falla progresiva. Cuntze es similar a Puck, pero asume interacción de modos de falla por efectos probabilísticos obteniendo resultados cercanos al $\pm 10\%$ de los experimentales

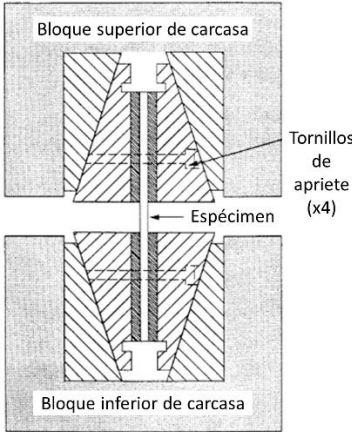
Como nota adicional de este ejercicio, en el WWFE resaltan la importancia de combinar criterios de falla en el diseño para tener una predicción conservativa. Además, hay considerables aspectos que se involucran en el fallo y son difíciles de controlar, tales como: esfuerzos residuales y la metodología para estimar su valor, ausencia de información del contenido de humedad, cantidad de datos experimentales, comportamiento no-lineal del material. La predicción más precisa de resistencia final de fractura estuvo entre $\pm 50\%$ en más del 85 % de los casos de ensayo sobre materiales laminados (Hinton et al., 2004).

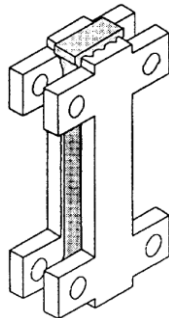
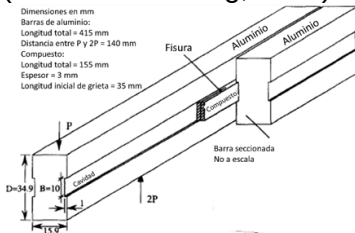
Tabla 6.5. Lista de teorías de falla y características a predecir

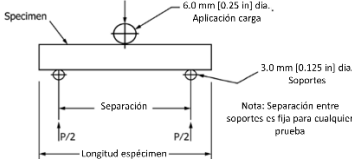
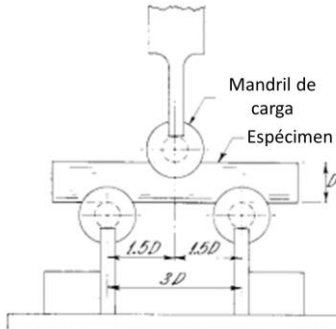
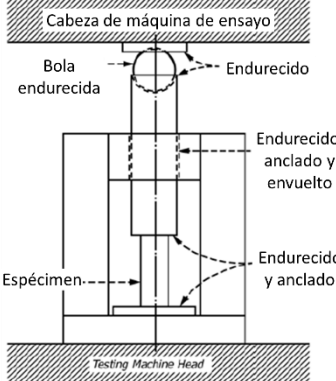
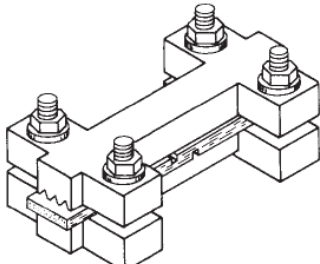
Contribuidor	Predicción de resistencia de lámina	Análisis no lineal	Constantes elásticas del laminado	Predicción de resistencia del laminado	Predicción de largas deformaciones	Lograr >50% de 48 características esperadas en predicción en cada caso de prueba	Predicción de densidad de grieta	Predicción de resistencia inicial	Micromecánica	Predicción de falla de fibra	Análisis de esfuerzo 3D	Disponibilidad de código computacional	Linkeado a código de elementos finitos estructural
Chamis	x		x	x	x	x		x	x	x	x	x	X
Eckold	x		x										
Edge	x	x	x	x	x	x		x		x		x	
Hart-Smith(1)	x		x	x		x				x			
Hart-Smith(2)	x		x	x						x			
Hart-Smith(3)	x			x						x			
McCartney(A)			x				x	x			x	x	
McCartney(B)			x	x			X	x		x	x	x	
Puck	X	x	x	X	x	X		x		x	x	x	x
Rotem	x	x	x	x				x				x	
Sun(L)	x		x	x		x		x		x		x	
Sun(NL)		x	x				X	x			x	x	
Tsai(A)	x		x	x	x	x		x			x	x	
Tsai(B)	X		x	X	x	x		x			x	x	
Wolfe(A)	x	x	x	x		x		x				x	
Wolfe(B)	x	x	x	x		x		x				x	
Zinoviev	x		x	X	x	x		x		x	x	x	
Bogetti	x	x	x	x		x		x		x	x	x	
Mayes(A)	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x	x
Mayes(B)	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x	x
Cuntze(A)	x	x	x	x	x	x		x		x	x	x	x
Cuntze(B)	X	x	x	X	x	X		x		x	x	x	x
Huang	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	

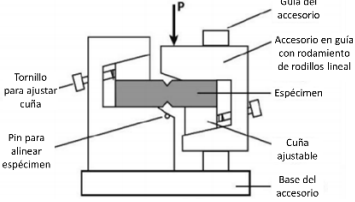
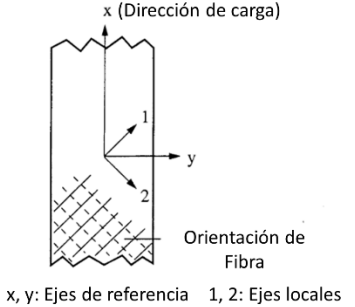
Nota: x = La teoría intentó considerar las características
X = La teoría tuvo un buen desempeño en esa característica
Fuente: (Hinton et al., 2004)

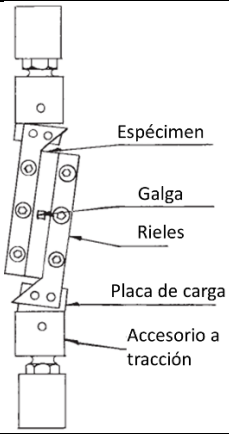
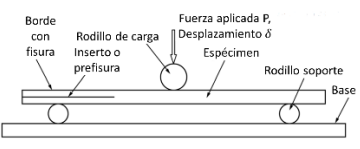
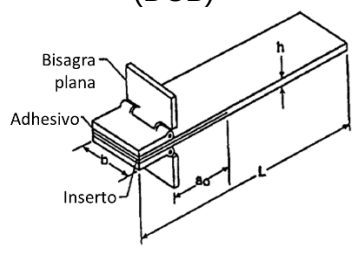
Tabla 6.6. Ensayos estándares relativos a la resistencia de la lámina

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO												
1	(ASTM D3039, 2014) 	<u>Usado en:</u> - Resistencia a tracción en la dirección de la fibra, F_{1t} - Resistencia a tracción en la dirección transversal, F_{2t} Propiedades de materiales compuestos de matriz polimérica. Permite obtener: Resistencia última a tracción, deformación última a tracción, módulo de elasticidad a tracción, relación de Poisson	Resistencia última a tracción $F^{tu} = p^{max} / A$ Esfuerzo en el punto i seleccionado: $\sigma_i = P_i / A$ Deformación última a tracción: $\varepsilon_i = \delta_i / L_g$ Módulo de elasticidad a tracción: $E = \Delta \sigma / \Delta \varepsilon$ Relación de Poisson: $\nu = -\Delta \varepsilon_t / \Delta \varepsilon_l$												
Con relación al Anexo E. Relaciones entre constantes matemáticas y constantes ingenieriles, se obtienen experimentalmente las constantes ingenieriles (Jones, 1999)(Adams et al., 2002): Tensión uniaxial en dirección 1: <table><tr><td>$\sigma_1 = P / A$</td><td>$E_1 = \Delta \sigma_1 / \Delta \varepsilon_1$</td><td>$\nu_{12} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1$</td></tr><tr><td>$F_{1t} = F^{tu} = p^{max} / A$</td><td></td><td>$\varepsilon_1^t @ F_{1t}$</td></tr></table> Tensión uniaxial en dirección 2: <table><tr><td>$\sigma_2 = P / A$</td><td>$E_2 = \Delta \sigma_2 / \Delta \varepsilon_2$</td><td>$\nu_{21} = -\varepsilon_1 / \varepsilon_2$</td></tr><tr><td>$F_{2t} = F^{tu} = p^{max} / A$</td><td></td><td></td></tr></table>				$\sigma_1 = P / A$	$E_1 = \Delta \sigma_1 / \Delta \varepsilon_1$	$\nu_{12} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1$	$F_{1t} = F^{tu} = p^{max} / A$		$\varepsilon_1^t @ F_{1t}$	$\sigma_2 = P / A$	$E_2 = \Delta \sigma_2 / \Delta \varepsilon_2$	$\nu_{21} = -\varepsilon_1 / \varepsilon_2$	$F_{2t} = F^{tu} = p^{max} / A$		
$\sigma_1 = P / A$	$E_1 = \Delta \sigma_1 / \Delta \varepsilon_1$	$\nu_{12} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1$													
$F_{1t} = F^{tu} = p^{max} / A$		$\varepsilon_1^t @ F_{1t}$													
$\sigma_2 = P / A$	$E_2 = \Delta \sigma_2 / \Delta \varepsilon_2$	$\nu_{21} = -\varepsilon_1 / \varepsilon_2$													
$F_{2t} = F^{tu} = p^{max} / A$															
2	(ASTMD3410, 2003) 	<u>Usado en:</u> - Resistencia a compresión en la dirección de la fibra, F_{1c} - Resistencia a compresión en la dirección transversal, F_{2c} Propiedades de materiales compuestos de matriz polimérica. Permite obtener: Resistencia última a compresión, deformación última a compresión, módulo de elasticidad a compresión, relación de Poisson a	Resistencia última a compresión $F^{cu} = p^{max} / A$ Esfuerzo en el punto i seleccionado: $\sigma_i^c = P_i / A$ Deformación última a compresión: $\varepsilon_i^c = \frac{\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}}{2}$ Módulo de elasticidad a compresión: $E = \Delta \sigma / \Delta \varepsilon$ Relación de Poisson: $\nu^c = -\Delta \varepsilon_t / \Delta \varepsilon_l$												

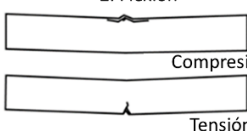
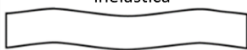
No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO												
		compresión													
		Con relación al Anexo E. Relaciones entre constantes matemáticas y constantes ingenieriles, se obtienen experimentalmente las constantes ingenieriles (Adams et al., 2002): Compresión uniaxial en dirección 1: <table><tr><td>$\sigma_1 = P/A$</td><td>$E_1 = \Delta\sigma_1/\Delta\varepsilon_1$</td><td>$\nu_{12} = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$</td></tr><tr><td>$F_{1c} = F^{tu} = P^{max}/A$</td><td></td><td>$\varepsilon_1^t @ F_{1t}$</td></tr></table> Compresión uniaxial en dirección 2: <table><tr><td>$\sigma_2 = P/A$</td><td>$E_2 = \Delta\sigma_2/\Delta\varepsilon_2$</td><td>$\nu_{21} = -\varepsilon_1/\varepsilon_2$</td></tr><tr><td>$F_{2t} = F^{tu} = P^{max}/A$</td><td></td><td></td></tr></table>		$\sigma_1 = P/A$	$E_1 = \Delta\sigma_1/\Delta\varepsilon_1$	$\nu_{12} = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$	$F_{1c} = F^{tu} = P^{max}/A$		$\varepsilon_1^t @ F_{1t}$	$\sigma_2 = P/A$	$E_2 = \Delta\sigma_2/\Delta\varepsilon_2$	$\nu_{21} = -\varepsilon_1/\varepsilon_2$	$F_{2t} = F^{tu} = P^{max}/A$		
$\sigma_1 = P/A$	$E_1 = \Delta\sigma_1/\Delta\varepsilon_1$	$\nu_{12} = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$													
$F_{1c} = F^{tu} = P^{max}/A$		$\varepsilon_1^t @ F_{1t}$													
$\sigma_2 = P/A$	$E_2 = \Delta\sigma_2/\Delta\varepsilon_2$	$\nu_{21} = -\varepsilon_1/\varepsilon_2$													
$F_{2t} = F^{tu} = P^{max}/A$															
3	(ASTM D695, 2015) 	<u>Usado en:</u> Resistencia a compresión en la dirección transversal, F_{2c} Propiedades compresivas de plásticos rígidos. Aplica para compuestos con módulo $\geq 41,370$ MPa. Permite obtener: Resistencia última a compresión, deformación última a compresión, módulo de elasticidad a compresión	Resistencia última a compresión $F^{cu} = P^{max}/A$ Esfuerzo en el punto i seleccionado: $\sigma_i^c = P_i/A$ Deformación última a compresión: $\varepsilon_i^c = \delta_i/L_g$ Módulo de elasticidad a compresión: $E = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$												
4	<u>SIN STANDARD</u> Split Cantilever Beam (SCB) Modificado (Robinson & Song, 1994)  Dimensiones en mm Barras de aluminio: Longitud total = 415 mm Distancia entre P y 2P = 140 mm Compuesto: Longitud total = 155 mm Espesor = 3 mm Longitud inicial de grieta = 35 mm	<u>SIN STANDARD</u> <u>Usado en:</u> Tenacidad a la fractura: Modo III, G_{IIIc} Desarrollo de mejora al ensayo de delaminación en Modo III para compuestos. Permite obtener: Razón de liberación de energía	<u>SIN STANDARD</u> Razón de liberación de energía G: $G = \frac{(3P)^2}{2B} \frac{dC}{da}$ Donde, $\frac{dC}{da} = 1,2544 \times 10^{-8}$ (Robinson & Song, 1994)(Smiley & Pipes, 1987)												

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
5	(ASTM D2344, 2016) 	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante intralaminar, F_4 y F_5 Resistencia de viga corta de materiales compuestos de matriz polimérica y sus laminados	Resistencia de viga corta $F^{sbs} = 0,75 \frac{P_m}{b * h}$
6	(ASTM D4475 - 02, 2016) 	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante intralaminar, F_4 y F_5 Resistencia cortante horizontal aparente de varillas de plástico reforzado de pultrusión por el método de la viga corta	Resistencia cortante $S = 0,849 \frac{P}{d^2}$
7	(ASTM D3914 - 02, 2016) 	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante intralaminar, F_4 y F_5 Resistencia cortante en el plano de varillas de plástico reforzado de vidrio por pultrusión, de diámetros entre 19 a 32 mm	Resistencia cortante en el plano $S = \frac{P}{d * l}$
8	(ASTM D3846 - 08, 2015) 	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante intralaminar, F_4 y F_5 Resistencia cortante en el plano de plástico reforzado	Resistencia cortante en el plano $S = \frac{P}{b * l}$
9	(ASTM D5379, 2019) (Método Iosipescu)	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante intralaminar, F_4 , F_5 y F_6	Deformación ingenieril a cortante: $\gamma = \epsilon_{45^\circ} + \epsilon_{-45^\circ}$

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
		Propiedades a cortante de materiales compuestos por el método de la viga con muesca en V (Método Iosipescu)	Resistencia a cortante: $\tau = \frac{P}{A}$ Módulo a cortante aparente en el plano: $G = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma}$
10	(ASTMD3518, 2007)  x, y: Ejes de referencia 1, 2: Ejes locales	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante en el plano, F_6	Esfuerzo cortante máximo en el plano: $\tau_{12}^m = \frac{P^m}{2A}$ Deformación cortante: $\gamma_{12i} = \varepsilon_{xi} - \varepsilon_{yi}$ Deformación cortante máxima: $\gamma_{12}^m = \min \left\{ \begin{matrix} 5\% \\ \gamma_{12} \text{ en el esfuerzo a cortante} \end{matrix} \right.$ Módulo de elasticidad cortante: $G_{12} = \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\gamma_{12}}$
		Respuesta a cortante en el plano de materiales compuestos de matriz polimérica mediante ensayo a tracción de un laminado a $\pm 45^\circ$. Permite obtener: Esfuerzo cortante máximo en el plano, deformación cortante máxima, Módulo de elasticidad cortante	
		Con relación al Anexo E. Relaciones entre constantes matemáticas y constantes ingenieriles, se obtienen experimentalmente las constantes ingenieriles (Jones, 1999): Tensión uniaxial a 45°: $\sigma_x = P_x/A \quad E_x = \sigma_x/\varepsilon_x$ $G_{12} = \frac{1}{\frac{4}{E_x} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1}} =$ $= \frac{E_x E_2 E_1^2}{4E_1^2 E_2 + (2E_2 E_1 \nu_{12} - E_1^2 - E_2 E_1) E_x}$	
11	(ASTM D4255, 2015)	<u>Usado en:</u> Resistencia a cortante intralaminar, GII_C	Procedimiento de cortante a dos rieles:
		Propiedades a cortante en el plano de materiales compuestos de matriz polimérica por el método de los rieles cortantes	Resistencia última a cortante $F^u = P^{max}/A$ Esfuerzo cortante en el punto i seleccionado: $\tau_i = P_i/A$

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
			Deformación ingenieril a cortante: $\gamma = \varepsilon_{45^\circ} + \varepsilon_{-45^\circ}$ Módulo a cortante aparente en el plano: $G = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma}$
12	(ASTM D7905, 2019) Flexión con muesca final (ENF) 	Flexión con muesca final (ENF) <u>Usado en:</u> Tenacidad a la fractura: Modo II, G_{IIc} Determinación de la tenacidad a la fractura en Modo III para compuestos de matriz polimérica reforzados con fibra unidireccional. Permite obtener: Razón de liberación de energía	Razón de liberación de energía G: $G_{IIc} = \frac{3mP_{Max}^2a_{pC}^2}{2B}$
13	(ASTM D5528 - 13, 2013) Viga a doble cantiléver (DCB) 	Viga a doble cantiléver (DCB) <u>Usado en:</u> Tenacidad a la fractura: Modo I, G_{Ic} Determinación de la tenacidad a la fractura en Modo I para compuestos de matriz polimérica reforzados con fibra unidireccional. Permite obtener: Razón de liberación de energía	Razón de liberación de energía G: $G_{Ic} = \frac{3P\delta}{2B(a + \alpha h)}$ Donde, $\alpha \approx 1,45 \sqrt{\frac{E_{11}}{G_{13}}}$
LISTA DE SÍMBOLOS			
ASTM D3039			
F^{tu}: Resistencia última a tracción, MPa P^{max}: Fuerza máxima antes de falla, N A: Área media de la sección transversal, mm ² σ_i: Esfuerzo a tracción en el punto i de datos, MPa			

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
P_i :	Fuerza en el punto i, N		
ϵ_i :	deformación a tracción en el punto i, $\mu\epsilon$		
δ_i :	desplazamiento del extensómetro en el punto i, mm		
L_g :	longitud de galgado, mm		
E :	Módulo de elasticidad a tracción, GPa		
$\Delta\sigma$:	Diferencia de tracción aplicada entre dos puntos, MPa		
$\Delta\epsilon$:	Diferencia de deformación aplicada entre dos puntos, MPa		
ν :	Relación de Poisson		
$\Delta\epsilon_t$:	Diferencia deformación lateral entre dos puntos de deformación transversal, $\mu\epsilon$		
$\Delta\epsilon_l$:	Diferencia deformación longitudinal, $\mu\epsilon$		
ASTM D3410			
F^{cu} :	Resistencia última a compresión, MPa		
P^{max} :	Fuerza máxima antes de falla, N		
A :	Área media de la sección transversal, mm^2		
σ_{ii}^c :	Esfuerzo a compresión en el punto i de datos, MPa		
P_i :	Fuerza en el punto i, N		
ϵ_i^c :	deformación media a compresión en el punto i, $\mu\epsilon$		
ϵ_{1i} :	deformación a compresión en el punto i de la galga extensiométrica 1, $\mu\epsilon$		
ϵ_{2i} :	deformación a compresión en el punto i de la galga extensiométrica 2, $\mu\epsilon$		
E :	Módulo de elasticidad a compresión, GPa		
$\Delta\sigma$:	Diferencia de compresión aplicada entre dos puntos, MPa		
$\Delta\epsilon$:	Diferencia de deformación aplicada entre dos puntos, MPa		
ν^c :	Relación de Poisson a compresión		
$\Delta\epsilon_t$:	Diferencia deformación lateral entre dos puntos de deformación transversal, $\mu\epsilon$		
$\Delta\epsilon_l$:	Diferencia deformación longitudinal, $\mu\epsilon$		
ASTM D695			
F^{cu} :	Resistencia última a compresión, MPa		
P^{max} :	Fuerza máxima antes de falla, N		
A :	Área media de la sección transversal, mm^2		
σ_{ii}^c :	Esfuerzo a compresión en el punto i de datos, MPa		
P_i :	Fuerza en el punto i, N		
ϵ_i :	deformación a tracción en el punto i, $\mu\epsilon$		
δ_i :	desplazamiento del extensómetro en el punto i, mm		
L_g :	longitud de galgado, mm		
E :	Módulo de elasticidad a compresión, GPa		
$\Delta\sigma$:	Diferencia de compresión aplicada entre dos puntos, MPa		
$\Delta\epsilon$:	Diferencia de deformación aplicada entre dos puntos, MPa		
Split Cantilever Beam (SCB) Modificado			
G :	Razón de liberación de energía, J/m^2		
P :	Carga aplicada a la probeta, N		
B :	Ancho de la probeta, m		

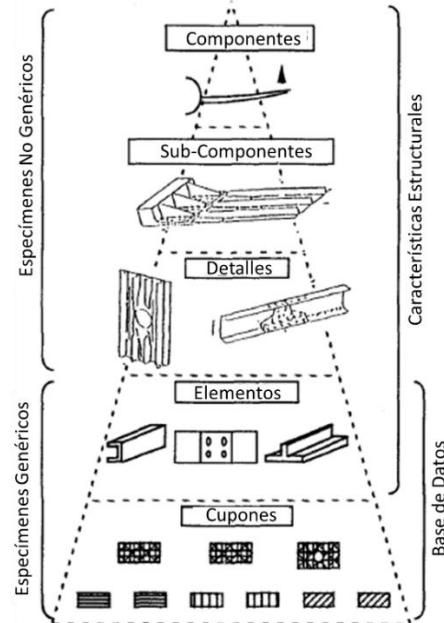
No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
$\frac{dC}{da}$:	Tasa de cambio de la conformidad, 1/N		
• ASTM D2344 F_{sbs}: Resistencia de viga corta, MPa P_m: Carga máxima observada durante el ensayo, N b: Ancho de la probeta, mm h: Espesor de la probeta, mm Modos de falla típicos en el ensayo de viga corta se muestran a continuación, entre los cuales se debe identificar en la probeta:			
1. Cortante interlaminar  2. Flexión  3. Deformación inelástica 			
• ASTM D4475 S: Resistencia cortante aparente, MPa P: Carga de rotura, N d: Diámetro de la probeta, mm			
• ASTM D3914 S: Resistencia cortante en el plano, MPa P: Carga máxima a cortante, N d: Diámetro de la probeta, mm l: Longitud del área de falla, mm			
• ASTM D3846 S: Resistencia cortante en el plano, MPa P: Carga máxima a cortante, N b: Ancho de la probeta, mm l: Longitud del área de falla, mm			
• ASTM D5379 $\Delta\gamma$: Diferencia en la deformación ingenieril a cortante entre dos puntos ϵ_{45° y ϵ_{-45°: Deformaciones medidas a $\pm 45^\circ$ $\Delta\tau$: Diferencia en el esfuerzo a cortante entre dos puntos, MPa P: Fuerza aplicada, N A: Área media de la sección transversal, mm² G: Módulo a cortante aparente en el plano, GPa			
• ASTM D3518 τ_{12}^m: Esfuerzo cortante máximo en el plano, MPa P^m: Fuerza máxima en o por debajo del 5 % de la deformación cortante			

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
	máxima, N		
A:	Área de la sección transversal de acuerdo con el ensayo (ASTM D3039, 2014), mm ²		
γ_{12i} :	Deformación a cortante entre dos puntos, $\mu\epsilon$		
ϵ_{xi} :	Deformación normal longitudinal en el punto i de datos, $\mu\epsilon$		
ϵ_{yi} :	Deformación normal lateral en el punto i de datos, $\mu\epsilon$		
γ_{12}^m :	Deformación máxima cortante, $\mu\epsilon$		
G_{12} :	Módulo a cortante de elasticidad, GPa		
$\Delta\tau_{12}$:	Diferencia del esfuerzo a cortante entre dos puntos, MPa		
$\Delta\gamma_{12}$:	Diferencia de la deformación a cortante entre dos puntos		
• ASTM D4255			
F^u:	Resistencia última a cortante, MPa		
P^{max}:	Fuerza máxima antes de falla, N		
A:	Área media de la sección transversal, mm ²		
τ_i:	Esfuerzo a cortante en el punto i de datos, MPa		
P_i:	Fuerza en el punto i, N		
$\Delta\gamma$:	Diferencia en la deformación ingenieril a cortante entre dos puntos		
ϵ_{45° y ϵ_{-45°:	Deformaciones medidas a $\pm 45^\circ$		
$\Delta\tau$:	Diferencia en el esfuerzo a cortante entre dos puntos, MPa		
G:	Módulo a cortante aparente en el plano, GPa		
• ASTM D7905			
G_{II}:	Razón de liberación de energía, J/m ²		
B:	Ancho de la probeta, m		
m:	pendiente del ajuste lineal de la conformidad vs longitud de la grieta al cubo, 1/Nm ²		
P_{Max}:	Fuerza máxima de la fractura, N		
a_{PC}:	Longitud de la grieta, m		
• ASTM D5528			
G_I:	Razón de liberación de energía, J/m ²		
B:	Ancho de la probeta, m		
a:	Longitud de la grieta, m		
δ:	Desplazamiento vertical de la punta de la probeta, m		
α:	constante que depende de la razón entre el módulo de Young y a cortante axial		
h:	Espesor de la probeta, m		
P:	Fuerza máxima de la fractura, N		
E₁₁:	Módulo de Young axial, MPa		
G₁₃:	Módulo a cortante a través del espesor, MPa		

Los ensayos mecánicos mencionados se implementan en la etapa inicial del diseño del laminado polimérico que, con base en la Pirámide de Ensayos de Rouchon (Rouchon, 1990), inicia con obtener la base de datos para Especímenes Genéricos y progresa hacia obtener

las características estructurales de los Especímenes No Genéricos o Componentes mayores, de acuerdo con la Figura 6.8.

Figura 6.8. Pirámide de Ensayos de Rouchon



Fuente: Modificado de (Rouchon, 1990)

6.2.1. CRITERIO DEL MÁXIMO ESFUERZO

Este criterio predice falla de una lámina cuando al menos uno de los esfuerzos en la coordenada de la lámina ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$) excede el valor de resistencia experimental que le corresponde, es decir, hay falla cuando se cumple alguna de las condiciones mostradas en la Tabla 6.7. Se aclara que en diseño los esfuerzos sobre la lámina se incrementan con una Razón de Resistencia $R > 1$.

El criterio se representa gráficamente cuando dos componentes de esfuerzo son diferentes de cero. Para el caso en que $\sigma_2, \sigma_6 \neq 0$, se muestra el criterio en la Figura 6.9 donde cada punto definido por σ_2, σ_6 se denomina *estado de diseño* y el rectángulo en líneas gruesas se llama *envolvente de falla*. Si el estado de diseño está dentro del rectángulo no ocurre falla, pero sí ocurre cuando el punto está sobre él o por fuera. Datos mostrados por (D. Hull & Clyne, 1996) en el capítulo 8 de su investigación, permiten relacionar los datos experimentales de la línea punteada de la Figura 6.9 con el criterio de falla, donde se determina que las probetas sometidas a esfuerzos biaxiales tienen efectos de interacción que producen falla cuando los esfuerzos están cerca a los límites, por lo cual el criterio del máximo esfuerzo no es conservativo para para estados de esfuerzo que no están dominados por un componente de esfuerzo. Si $\sigma_2, \sigma_6 > 0$, el punto P tendría falla, ya que está fuera de la curva de datos experimentales. Si $\sigma_2 < 0, \sigma_6 > 0$, el punto Q no falla y el criterio es conservativo; pero el punto R sí presenta falla, pues está fuera de la curva de datos experimentales.

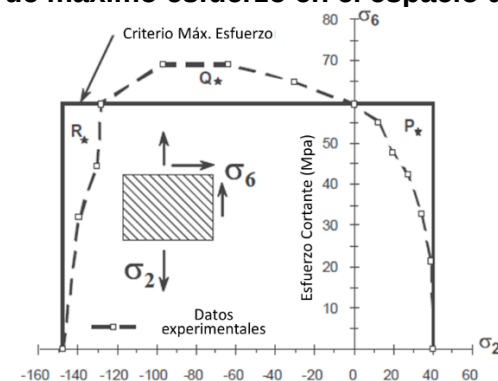
La menor Razón de Resistencia corresponde con un particular modo de falla. En el caso de un laminado, se verifica la lámina con la menor R para cambiar el laminado (cambiando material, ángulos o añadiendo material) y así disminuir la probabilidad de falla. De igual manera, si R es muy grande, permite detectar sobre-diseños.

Tabla 6.7. Criterio del máximo esfuerzo

OCURRE FALLA	CUANDO	EN DISEÑO
$\sigma_1 > F_{1t}$	$\sigma_1 > 0$	$R_1 = \frac{F_{1t}}{\sigma_1}$
$abs(\sigma_1) > F_{1c}$	$\sigma_1 < 0$	$R_1 = -\frac{F_{1c}}{\sigma_1}$
$\sigma_2 > F_{2t}$	$\sigma_2 > 0$	$R_2 = \frac{F_{2t}}{\sigma_2}$
$abs(\sigma_2) > F_{2c}$	$\sigma_2 < 0$	$R_2 = -\frac{F_{2c}}{\sigma_2}$
$abs(\sigma_4) > F_4$		$R_4 = \frac{F_4}{abs(\sigma_4)}$
$abs(\sigma_5) > F_5$		$R_5 = \frac{F_5}{abs(\sigma_5)}$
$abs(\sigma_6) > F_6$		$R_6 = \frac{F_6}{abs(\sigma_6)}$

Fuente: (Barbero, 2017)

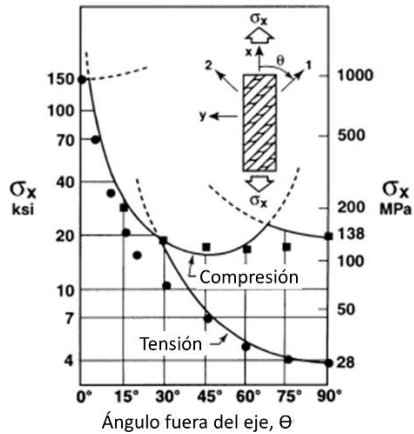
Figura 6.9. Criterio de máximo esfuerzo en el espacio de esfuerzos $\sigma_2 - \sigma_6$



Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

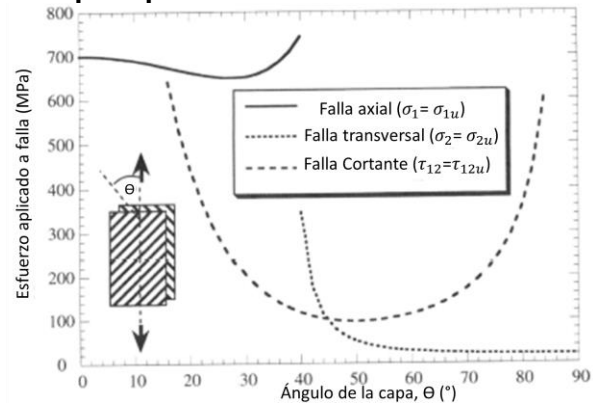
El Criterio del Máximo Esfuerzo se muestra en la Figura 6.10 para el comportamiento de tensión y compresión unidireccional simultánea de un material compuesto E-glass-epóxico en función del ángulo de aplicación de carga con respecto a la dirección del refuerzo, donde la menor curva es la que gobierna la resistencia. Sin embargo, los datos experimentales mostrados como puntos no son representados adecuadamente (Jones, 1999). En la Figura 6.11 se muestra con el criterio cómo el esfuerzo de falla varía con el ángulo, en este caso, para un laminado; y en la Figura 6.12 se muestra para una lámina y cómo a ciertos ángulos la falla está dominada por esfuerzo longitudinal, transversal y cortante. Las diferencias con la Figura 6.10 se deben a las restricciones en cada capa por las presencias de otras, y que hay un segundo esfuerzo aplicado normal al primero, pero con la mitad de magnitud. Estas no linealidades mostradas son mayores a medida que incrementa el ángulo, por como resultado de deformaciones cortantes. Cuando el ángulo incrementa a más de 40° el daño inicial es por grietas transversales.

Figura 6.10. Criterio del Máximo Esfuerzo



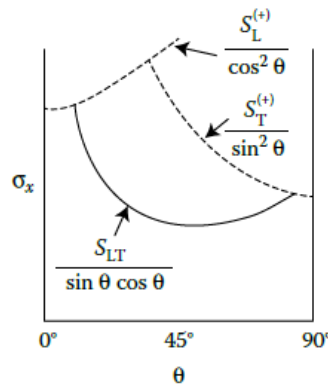
Fuente: Modificado de (Jones, 1999)

Figura 6.11. Esfuerzo aplicado que causa diferentes fallas como función del ángulo para poliéster/50%fibra de vidrio



Fuente: Modificado de (Derek Hull, 1996)

Figura 6.12. Predicción de valores para varias orientaciones de fibra según el Criterio del Máximo Esfuerzo



Fuente: (Gibson, 2016)

6.2.2. CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN

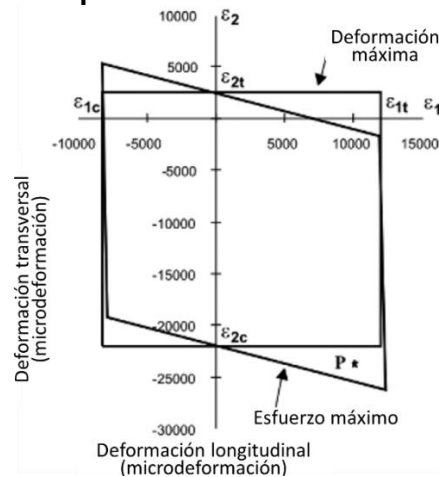
Este criterio predice falla de una lámina (de un material linealmente elástico hasta falla) cuando al menos una de las deformaciones en la coordenada de la lámina excede el valor de resistencia experimental que le corresponde ($\epsilon_{1t}, \epsilon_{1c}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{2c}, \gamma_{4u}, \gamma_{5u}, \gamma_{6u}$), es decir, hay falla cuando se cumple alguna de las condiciones mostradas en la Tabla 6.8. Se aclara que en diseño las deformaciones sobre la lámina se incrementan con una Razón de Resistencia $R > 1$. En la misma tabla se pueden estimar las deformaciones últimas para cuando el material es linealmente elástico hasta falla, al relacionar los valores de resistencia con sus módulos usando el criterio del máximo esfuerzo. Los valores estimados de deformación última mediante el criterio del máximo esfuerzo se comparan con el criterio de la máxima deformación en la Figura 6.13 para el espacio de deformaciones $\epsilon_1 - \epsilon_2$ ($\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 = 0$), donde se aprecia que los valores difieren por la no linealidad de la cortante en el plano, como se mostró en el subcapítulo 4.3. Módulos de elasticidad de la lámina y en la Figura 6.2, pero coinciden en la dirección de la fibra.

Tabla 6.8. Criterio de la máxima deformación

OCURRE FALLA	CUANDO	EN DISEÑO	Estimación de deformación última con la resistencia última
$\varepsilon_1 > \varepsilon_{1t}$	$\varepsilon_1 > 0$	$R_1 = \frac{\varepsilon_{1t}}{\varepsilon_1}$	$\varepsilon_{1t} = \frac{F_{1t}}{E_1}$
$abs(\varepsilon_1) > \varepsilon_{1c}$	$\varepsilon_1 < 0$	$R_1 = -\frac{\varepsilon_{1c}}{\varepsilon_1}$	$\varepsilon_{1c} = \frac{F_{1c}}{E_1}$
$\varepsilon_2 > \varepsilon_{2t}$	$\varepsilon_2 > 0$	$R_2 = \frac{\varepsilon_{2t}}{\varepsilon_2}$	$\varepsilon_{2t} = \frac{F_{2t}}{E_2}$
$abs(\varepsilon_2) > \varepsilon_{2c}$	$\varepsilon_2 < 0$	$R_2 = -\frac{\varepsilon_{2c}}{\varepsilon_2}$	$\varepsilon_{2c} = \frac{F_{2c}}{E_2}$
$abs(\varepsilon_4) > \gamma_{4u}$		$R_4 = \frac{\gamma_{4u}}{abs(\varepsilon_4)}$	$\gamma_{4u} = \frac{F_4}{G_{23}}$
$abs(\varepsilon_5) > \gamma_{5u}$		$R_5 = \frac{\gamma_{5u}}{abs(\varepsilon_5)}$	$\gamma_{5u} = \frac{F_5}{G_{13}}$
$abs(\varepsilon_6) > \gamma_{6u}$		$R_6 = \frac{\gamma_{6u}}{abs(\varepsilon_6)}$	$\gamma_{6u} = \frac{F_6}{G_{12}}$

En la Figura 6.13, el criterio de falla de la máxima deformación es representado por el rectángulo definido por las deformaciones a falla $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{1c}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2c}$ con los datos de (Barbero, 2017) para una lámina de carbono/epóxico al 63 % de volumen de fibra. Para el punto P, donde $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0$, el criterio de la máxima deformación predice falla, pero de acuerdo con el criterio del máximo esfuerzo no se presentaría falla. El criterio de máximo esfuerzo presenta pendiente negativa en las líneas superiores e inferiores del paralelogramo, cuya construcción resulta de usar las relaciones constitutivas de ley de Hooke con matriz de rigidez para el caso ortotrópico especial, reducida por estado de esfuerzo plano (ver el Anexo D. *Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal* y con el criterio del máximo esfuerzo, como se muestra en la Tabla 6.9. La línea superior se construye con la Ecuación 35 con pendiente $-\frac{1}{\nu_{21}}$ intersecando el eje x en $\varepsilon_{1t}\Delta$, y la línea inferior se construye con la Ecuación 36 con pendiente $-\nu_{12}$ intersecando el eje y en $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{2c}(1 - \nu_{12}\nu_{21})$. En cuanto a las líneas de la izquierda y la derecha del paralelogramo, se obtienen las pendientes de similar manera.

Figura 6.13. Envoltentes de falla con criterios del máx. esfuerzo y máx. deformación para el espacio de deformaciones $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$



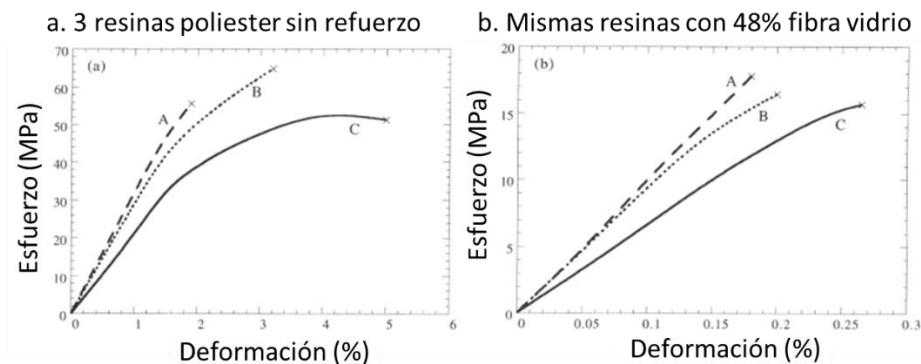
Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

Tabla 6.9. Hallando las ecuaciones para la línea superior e inferior

Línea superior	Esfuerzo de Hooke	Esfuerzo del Criterio del máximo esfuerzo
	$\sigma_1 = \frac{[E_1 \varepsilon_1 + \nu_{21} E_2 \varepsilon_2]}{\Delta}$ Donde $\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21}$	$\sigma_1 = \varepsilon_{1t} E_1$
	Combinando: $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{1t} \Delta}{\nu_{21}} - \frac{1}{\nu_{21}} \varepsilon_1$ <i>Ecuación 35</i>	
Línea inferior	Esfuerzo de Hooke	Esfuerzo del Criterio del máximo esfuerzo
	$\sigma_2 = \frac{[E_2 \varepsilon_2 + \nu_{12} E_1 \varepsilon_1]}{\Delta}$ Donde $\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21}$	$\sigma_2 = -\varepsilon_{2c} E_2$
	Combinando: $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{2c} \Delta - \nu_{12} \varepsilon_1$ <i>Ecuación 36</i>	

Como demostraron (D. Hull & Clyne, 1996), las deformaciones a falla de probetas de resina pura son mayores a las reforzadas tanto bajo esfuerzos de tensión longitudinal, como para la tensión transversal. En la Figura 6.14 se muestran los valores hasta falla de esfuerzo-deformación en un ensayo a tracción transversal, en la cual para la *Figura a* se muestran los valores de 3 resinas de poliéster sin refuerzo (A, B y C), y para la *Figura b* se muestran los valores de estas resinas con un refuerzo de fibra de vidrio al 48 %. Calculando la mediana, fue posible interpretar que la matriz sin refuerzo tiene casi 3,3 veces más resistencia última a tensión transversal y casi 16 veces más deformación última a tensión transversal. Este comportamiento no lineal de la resina causa que las deformaciones a falla experimentales sean mayores con respecto a las calculadas con la ley de Hooke y los valores de razón de resistencia. La justificación del uso del Criterio de la Máxima Deformación es por considerarse conservativo, por el comportamiento no lineal que presenta el compuesto al acercarse a falla.

Figura 6.14. Curvas esfuerzo-deformación a tracción transversal



Fuente: Modificado de (D. Hull & Clyne, 1996)

6.2.3. CRITERIO DE INTERACCIÓN DE FALLA

La mayoría de los datos de resistencia se tienen disponibles para compuestos unidireccionales bajo carga uniaxial, de donde obtenemos 4 puntos en los ejes σ_1, σ_2 y dos puntos en el eje de cortante pura $\sigma_{12} = -\sigma_{12} = \pm F_6$, con relación a:

- Resistencia a tracción en la dirección de la fibra F_{1t} , dominado por la resistencia de las fibras
- Resistencia a compresión en la dirección de la fibra F_{1c} , dominado por pandeo de las fibras
- Resistencia a tracción en la dirección transversal F_{2t} , dominado por la matriz
- Resistencia a compresión en la dirección transversal F_{2c}
- Resistencia a cortante en el plano F_6 , dominado por la matriz

Para estado de esfuerzo uniaxial, el esfuerzo aplicado se puede comparar con la correspondiente resistencia para predecir esfuerzo. Para estado de esfuerzo multiaxial se requiere asumir comportamientos del material para predecir la resistencia. Los Criterios del Máximo Esfuerzo y de la Máxima Deformación presentan múltiples Razones de Resistencia R_i para cada modo de falla, por lo que se deben hacer múltiples gráficos si se hace análisis por elementos finitos. Además, tratan los modos de falla independientes de los otros, donde un caso de esfuerzo multiaxial se trata como estados uniaxiales independientes el uno del otro, presentando falla cuando uno de ellos excede el valor correspondiente de resistencia, ignorando que está bajo efecto de esfuerzos combinados. Este efecto puede generar falla en estado de esfuerzos o deformaciones menores que lo predicho si cada modo actuara en separado, debido a la interacción de dos modos de falla, como en las interacciones resaltadas a continuación, entre otras:

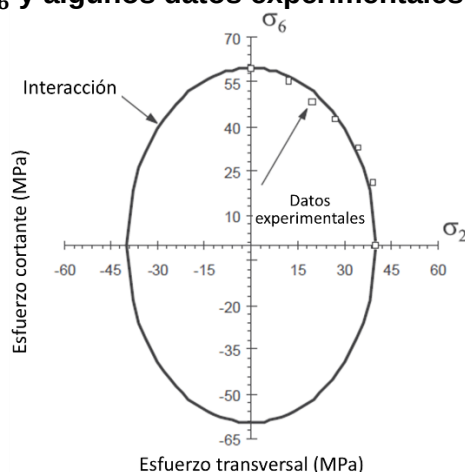
- $\sigma_2 > 0$ y σ_6 (Empeora): Ambos modos generan los mismos tipos de grietas en la matriz
- $\sigma_2 < 0$ y σ_6 (Mejora): La resistencia a cortante se ve mejorada por $\sigma_2 < 0$, ya que las grietas de la matriz que genera σ_6 deben superar la fricción causada por la compresión al cerrar las grietas. Se puede modelar este efecto con el Criterio de M-C, ver *Ángulo del plano de fractura en compresión transversal*, α_0 :
- $\sigma_1 < 0$ y σ_6 (Empeora): La cortante causa daño por cortante y reduce el módulo a cortante G_{12} , lo cual reduce la resistencia a compresión longitudinal según la *Ecuación 20* de la Tabla 6.4.

En el subcapítulo *Ángulo del plano de fractura en compresión transversal*, α_0 :, se nombró el Criterio de Puck, el cual es un Criterio de Falla Cuadrático. Para estos Criterios Cuadráticos, la envolvente de falla es una superficie suave en el espacio de los esfuerzos, como el mostrado en la Figura 6.15 proyectado sobre el plano $\sigma_2 - \sigma_6$. En esta se comparan exitosamente los datos experimentales con el Criterio de Interacción de Falla, en el que interactúan modos de falla dominados por la matriz. Sin embargo, es insatisfactorio para comparar la interacción entre modos de falla de fibra (tensión y compresión longitudinal) con los demás modos de falla. Por ejemplo, Criterios de falla cuadráticos como Tsai-Hill y Tsai-Wu incluyen una interacción artificial impuesta entre todos los modos (Barbero, 2017). Los Criterios Cuadráticos de falla permiten calcular una sola Razón de Resistencia R que resume el estado de esfuerzos con relación a la resistencia, aunque no da información del modo de falla dominante, lo que dificulta mejorar el material desde el diseño, al contrario de

lo que permite tener varias Razones de Resistencia. Ante estas dificultades se presenta el Criterio de Interacción de Falla que se muestra en la Tabla 6.10, en el que se separan los modos de falla de matriz y de fibra:

- Para la falla dominante de fibra, la *Ecuación 37* definida con el operador de Macaulay es idéntica al Criterio del Máximo Esfuerzo en la dirección longitudinal, sin reconocer interacción con los otros modos.
- Para la falla dominante de matriz, la *Ecuación 38* incluye coeficientes f_i y f_{ij} donde la resistencia a compresión se define como valores positivos. La envolvente de falla es una elipse como la Figura 6.15 y según mostró (Derek Hull, 1996, p171) tiene buena correlación con los datos experimentales

Figura 6.15. Envolvente de falla según Criterio de Interacción de Falla en el espacio $\sigma_2 - \sigma_6$ y algunos datos experimentales



Fuente: Modificado de (Barbero, 2017)

Para un caso de diseño se tiene un punto calculado para los esfuerzos considerados, el cual puede estar dentro (zona segura) o fuera de la envolvente (requiere cambios de diseño). Para saber qué tan conservativo es el diseño, se incluye la Razón de Resistencia R cambiando $\sigma_i^f = R\sigma_i$ en las Ecuaciones 37 y 38, para obtener las Ecuaciones 39 y 40 en la Tabla 6.10. De esta manera se evalúan los dos modos de falla y para un laminado se pueden evitar al añadir láminas en las direcciones adecuadas. Sin embargo, comenta (Barbero, 2017) que este criterio es deficiente en que: para predecir falla se mezclan modos de tracción y compresión que no están relacionados; y que se asume que cada modo de falla aumenta su influencia sobre los otros (proporcional al valor del esfuerzo, inversamente proporcional al valor de resistencia), que tampoco es así, porque hay una física compleja detrás de los diferentes modos de falla.

Tabla 6.10. Criterio de Interacción de Falla

FALLA DOMINANTE	ECUACIÓN	COMENTARIO	Ecuación incluyendo R
Fibra	$\langle \sigma_1^f / F_{1t} \rangle + \langle -\sigma_1^f / F_{1c} \rangle - 1 = 0$	$\langle x \rangle$: Parte positiva de x F_{1t}, F_{1c} : Valores positivos	$R_1 = \langle F_{1t} / \sigma_1 \rangle + \langle -F_{1c} / \sigma_1 \rangle$ <i>Ecuación 39</i> En la cual $\sigma_1 \neq 0$

	<i>Ecuación 37</i>		
Matriz	$f_{22}(\sigma_2^f)^2 + f_{44}(\sigma_4^f)^2 + f_{55}(\sigma_5^f)^2 + f_{66}(\sigma_6^f)^2 + f_2(\sigma_2^f) - 1 = 0$ <i>Ecuación 38</i>	$f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}}$ $f_{22} = \frac{1}{F_{2t}F_{2c}}$ $f_{44} = \frac{1}{(F_4)^2}$ $f_{55} = \frac{1}{(F_5)^2}$ $f_{66} = \frac{1}{(F_6)^2}$	$[f_{22}\sigma_2^2 + f_{44}\sigma_4^2 + f_{55}\sigma_5^2 + f_{66}\sigma_6^2]R_2^2 + (f_2\sigma_2)R_2 - 1 = 0$ <i>Ecuación 40</i> Se resuelve con la ecuación cuadrática, seleccionando para R el menor valor positivo
- El superíndice f indica que σ_i^f es un estado de esfuerzos que produce falla, donde $i = 1, 2, 4, 5, 6$, y cada combinación de estos genera una envolvente de falla - Operador de Macaulay: $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + x)$ Donde $ x $ es el valor absoluto del argumento x .			

6.2.4. FALLA HIGROTÉRMICA

Se incluye el cambio en temperatura ΔT y el cambio en concentración de humedad Δm para la expansión higrotérmica en el criterio de falla, como términos sobre los que no se tiene control. De esta manera, se introduce la Razón de Resistencia R para encontrar las cargas mecánicas máximas que la lámina puede resistir, bajo cambios ambientales constantes en temperatura ΔT y humedad Δm . Del Criterio del Máximo Esfuerzo retomamos que la resistencia a tracción en la dirección de la fibra puede incluir los esfuerzos higrotérmicos, donde el efecto de la carga higrotérmica equivale a una reducción de la resistencia a tracción, de la siguiente manera: $F_{1t} = R_1\sigma_1 + \sigma_1^{HT}$. Podemos reescribir el Criterio del Máximo Esfuerzo incluyendo los esfuerzos higrotérmicos, de acuerdo con lo mostrado en la Tabla 6.11, tomando positivos los valores F_{1c} y F_{2c} . El Criterio de la Máxima Deformación con las deformaciones higrotérmicas se muestra en la Tabla 6.12. El Criterio de Interacción de Falla con las deformaciones higrotérmicas se muestra en la Tabla 6.13. En este, R_2 se calcula con la *Ecuación 43* y si el radical fuera negativo, indicaría que tan solo las cargas higrotérmicas inducirían falla del laminado. De la Tabla 6.13 se seleccionaría la Razón de Resistencia menor de R_1 y R_2 .

En las ecuaciones de las Tabla 6.11 y Tabla 6.13 se incluye el esfuerzo higrotérmico σ_i^{HT} , y en la Tabla 6.12 se incluye la deformación higrotérmica ε_i^{HT} , para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (Shan, Zhao, Hong, Liu, & Zhang, 2018). El esfuerzo y la deformación higrotérmicas se muestran en la *Ecuación 45* y en la *Ecuación 46*, respectivamente en la Tabla 6.14. Estos se obtienen al despejarlos de la relación constitutiva del material ortotrópico elástico lineal del Anexo D. *Relaciones constitutivas del material ortotrópico elástico lineal* (Gibson, 2016), la cual se muestra reducida a la *Ecuación 44* en estado de esfuerzos plano, donde $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$. La ecuación simplificada se muestra en la *Ecuación 47*, de acuerdo con (Tuttle, 2013).

Tabla 6.11. Criterio del Máximo Esfuerzo modificado con Esfuerzo Higrotérmico

OCURRE FALLA	CUANDO	EN DISEÑO
$\sigma_1 + \sigma_1^{HT} > F_{1t}$	$\sigma_1 > 0$	$R_1 = \frac{F_{1t} - \sigma_1^{HT}}{\sigma_1}$
$abs(\sigma_1 + \sigma_1^{HT}) > F_{1c}$	$\sigma_1 < 0$	$R_1 = \frac{-F_{1c} - \sigma_1^{HT}}{\sigma_1}$
$\sigma_2 + \sigma_2^{HT} > F_{2t}$	$\sigma_2 > 0$	$R_2 = \frac{F_{2t} - \sigma_2^{HT}}{\sigma_2}$
$abs(\sigma_2 + \sigma_2^{HT}) > F_{2c}$	$\sigma_2 < 0$	$R_2 = \frac{-F_{2c} - \sigma_2^{HT}}{\sigma_2}$
$\sigma_4 + \sigma_4^{HT} > F_4$	$\sigma_4 > 0$	$R_4 = \frac{F_4 - \sigma_4^{HT}}{\sigma_4}$
$abs(\sigma_4 - \sigma_4^{HT}) > F_4$	$\sigma_4 < 0$	$R_4 = \frac{F_4 + \sigma_4^{HT}}{\sigma_4}$
$\sigma_5 + \sigma_5^{HT} > F_5$	$\sigma_5 > 0$	$R_5 = \frac{F_5 - \sigma_5^{HT}}{\sigma_5}$
$abs(\sigma_5 - \sigma_5^{HT}) > F_5$	$\sigma_5 < 0$	$R_5 = \frac{F_5 + \sigma_5^{HT}}{\sigma_5}$
$\sigma_6 + \sigma_6^{HT} > F_6$	$\sigma_6 > 0$	$R_6 = \frac{F_6 - \sigma_6^{HT}}{\sigma_6}$
$abs(\sigma_6 - \sigma_6^{HT}) > F_6$	$\sigma_6 < 0$	$R_6 = \frac{F_6 + \sigma_6^{HT}}{\sigma_6}$

Tabla 6.12. Criterio de la Máxima Deformación modificado con Deformación Higrotérmica

OCURRE FALLA	CUANDO	EN DISEÑO	Estimación de deformación última con la resistencia última
$\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{HT} > \varepsilon_{1t}$	$\varepsilon_1 > 0$	$R_1 = \frac{\varepsilon_{1t} - \varepsilon_1^{HT}}{\varepsilon_1}$	$\varepsilon_{1t} - \varepsilon_1^{HT} = \frac{F_{1t}}{E_1}$
$abs(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{HT}) > \varepsilon_{1c}$	$\varepsilon_1 < 0$	$R_1 = \frac{-\varepsilon_{1c} - \varepsilon_1^{HT}}{\varepsilon_1}$	$\varepsilon_{1c} - \varepsilon_1^{HT} = \frac{F_{1c}}{E_1}$
$\varepsilon_2 + \varepsilon_2^{HT} > \varepsilon_{2t}$	$\varepsilon_2 > 0$	$R_2 = \frac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_2^{HT}}{\varepsilon_2}$	$\varepsilon_{2t} - \varepsilon_2^{HT} = \frac{F_{2t}}{E_2}$
$abs(\varepsilon_2 + \varepsilon_2^{HT}) > \varepsilon_{2c}$	$\varepsilon_2 < 0$	$R_2 = \frac{-\varepsilon_{2c} - \varepsilon_2^{HT}}{\varepsilon_2}$	$\varepsilon_{2c} - \varepsilon_2^{HT} = \frac{F_{2c}}{E_2}$
$abs(\varepsilon_4 + \varepsilon_4^{HT}) > \gamma_{4u}$		$R_4 = \frac{\gamma_{4u} - \varepsilon_4^{HT}}{abs(\varepsilon_4)}$	$\gamma_{4u} - \varepsilon_4^{HT} = \frac{F_4}{G_{23}}$
$abs(\varepsilon_5 + \varepsilon_5^{HT}) > \gamma_{5u}$		$R_5 = \frac{\gamma_{5u} - \varepsilon_5^{HT}}{abs(\varepsilon_5)}$	$\gamma_{5u} - \varepsilon_5^{HT} = \frac{F_5}{G_{13}}$
$abs(\varepsilon_6 + \varepsilon_6^{HT}) > \gamma_{6u}$		$R_6 = \frac{\gamma_{6u} - \varepsilon_6^{HT}}{abs(\varepsilon_6)}$	$\gamma_{6u} - \varepsilon_6^{HT} = \frac{F_6}{G_{12}}$

Tabla 6.13. Criterio de Interacción de Falla modificado con Esfuerzos higrotérmicos

FALLA DOMINANTE	COMENTARIO	Ecuación incluyendo R
Fibra	$\langle x \rangle$: Parte positiva de x F_{1t}, F_{1c} : Valores positivos	$R_1 = \left\langle \frac{F_{1t} - \sigma_1^{HT}}{\sigma_1} \right\rangle + \left\langle -\frac{F_{1c} + \sigma_1^{HT}}{\sigma_1} \right\rangle$ <i>Ecuación 41</i> En la cual $\sigma_1 \neq 0$

Matriz	$f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}}$ $f_{22} = \frac{1}{F_{2t}F_{2c}}$ $f_{44} = \frac{1}{(F_4)^2}$ $f_{55} = \frac{1}{(F_5)^2}$ $f_{66} = \frac{1}{(F_6)^2}$	$[f_{22}\sigma_2^2 + f_{44}\sigma_4^2 + f_{55}\sigma_5^2 + f_{66}\sigma_6^2]R_2^2$ $+ 2\left(f_{22}\sigma_2\sigma_2^{HT} + f_{44}\sigma_4\sigma_4^{HT} + f_{55}\sigma_5\sigma_5^{HT} + f_{66}\sigma_6\sigma_6^{HT} + \frac{1}{2}f_2\sigma_2\right)R_2$ $+ [f_{22}(\sigma_2^{HT})^2 + f_{44}(\sigma_4^{HT})^2 + f_{55}(\sigma_5^{HT})^2 + f_{66}(\sigma_6^{HT})^2 + f_2\sigma_2^{HT} - 1] = 0$ Ecuación 42 Se resuelve con la ecuación cuadrática, en cual se tiene $aR_2^2 + 2bR_2 + c = 0$, seleccionando para R el menor valor positivo
- Ecuación Cuadrática: $R_2 = \frac{1}{a}(-b + \sqrt{b^2 - ac})$ Ecuación 43 - El superíndice f indica que σ_i^f es un estado de esfuerzos que produce falla, donde $i = 1, 2, 4, 5, 6$, y cada combinación de estos genera una envolvente de falla - Operador de Macaulay: $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + x)$ Donde x es el valor absoluto del argumento x.		

Tabla 6.14. Deformaciones y esfuerzos higrótérmicos

$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & \\ & & & S_{44} & & \\ & & & & S_{55} & \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m$	Ecuación 44
$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 = 0 \\ \sigma_4 = \tau_{31} = 0 \\ \sigma_5 = \tau_{32} = 0 \\ \sigma_6 = \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 = \gamma_{31} \\ \varepsilon_5 = \gamma_{32} \\ \varepsilon_6 = \gamma_{12} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m \right) \right\}$ Despejando los esfuerzos de la Ecuación 44 Simplificación de la Ecuación 44 (Tuttle, 2013): $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \Delta m$ y con: $\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 + \alpha_3\Delta T + \beta_3\Delta m$	Ecuación 47

Esfuerzo higrorotérico	$\begin{bmatrix} \sigma_1^{HT} \\ \sigma_2^{HT} \\ \sigma_3^{HT} \\ \tau_{31}^{HT} \\ \tau_{32}^{HT} \\ \tau_{12}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m \right\}$	Ecuación 45
Deformación higrorotérica	$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{HT} \\ \varepsilon_2^{HT} \\ \varepsilon_3^{HT} \\ \gamma_{31}^{HT} \\ \gamma_{32}^{HT} \\ \gamma_{12}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m$	Ecuación 46

6.2.5. DIAGRAMA DEL PROCESO DE DISEÑO

En este subcapítulo se propone el proceso de diseño de un laminado polimérico sometido a temperatura y humedad, mediante un diagrama de flujo. Se aclara que, aunque la finalidad es el diseño de un laminado, en este trabajo se cubre el diseño de la lámina mediante la micromecánica.

Se tuvieron en cuenta recomendaciones de

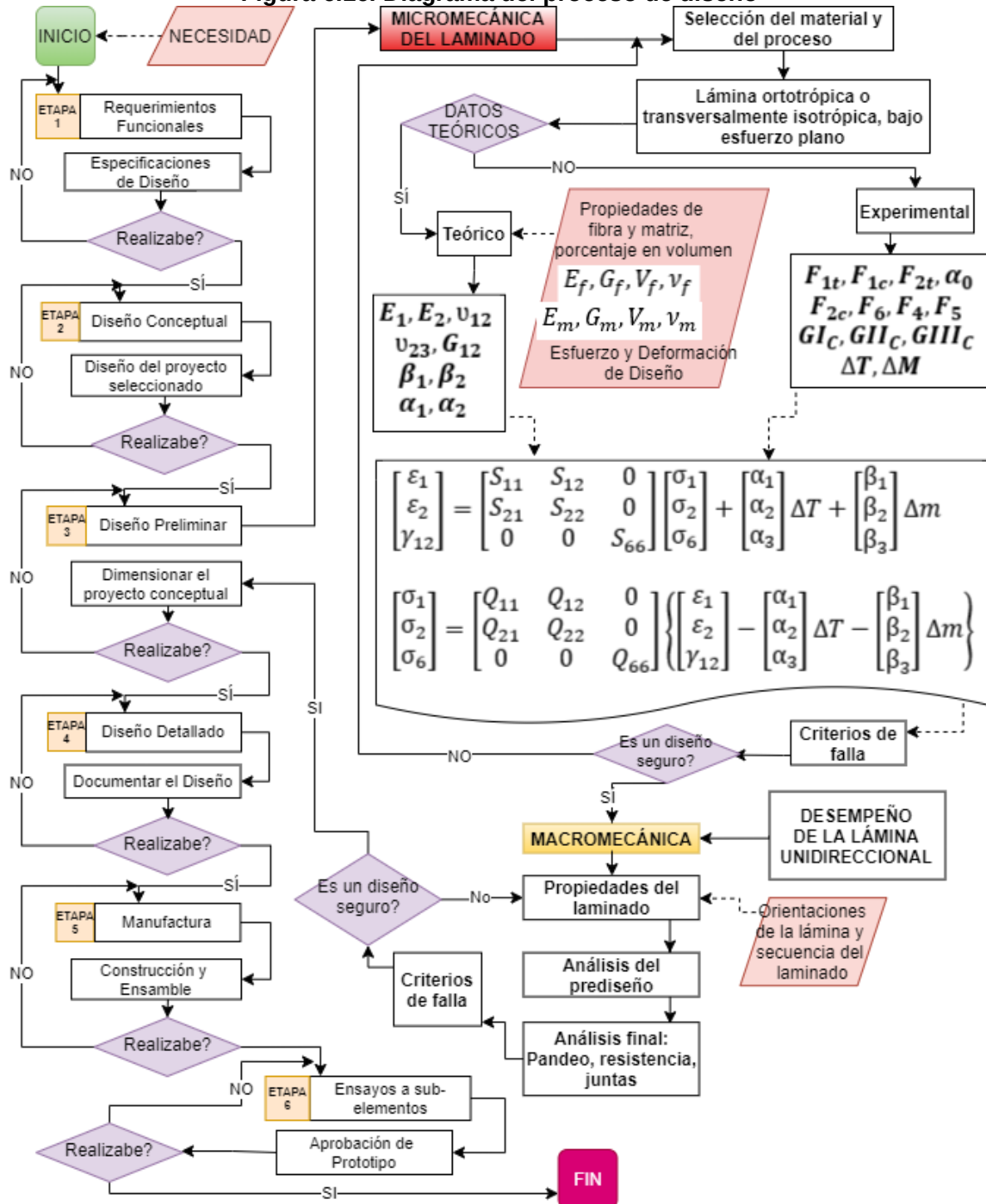
- (Matthews, 2018), con respecto a prediseño, caracterización del material y análisis del diseño final
- (Moura Miranda, Ferreira de Amorim Júnior, Neto, & Silva Diniz, 2015) con respecto a descripción de etapas de diseño de un material compuesto
- (Gibson, 2016), con respecto al diagrama de flujo de análisis de laminados
- (Shokrieh, Ghasemi, & Mosalmani, 2017), quien propuso un diagrama de flujo de la micromecánica de un tejido, empezando por la curva de esfuerzo-deformación de la lámina y luego sus matrices de acople y rigidez
- (Choi & Sankar, 2006), quien propone calcular los esfuerzos de la lámina, incluir los esfuerzos por temperatura, y por último comparar con el criterio del máximo esfuerzo

Se propone una metodología con etapas principales en orden cronológico en la Figura 6.16, con las etapas siguientes:

- Etapa 1. Requerimientos funcionales: Se define el problema interpretando, limitando y listando las variables objetivamente con respecto al diseño de la lámina
- Etapa 2. Diseño conceptual: Realizar diagramas y esquemas de la idea, que permitan apreciar lo que demanda el proyecto
- Etapa 3. Diseño preliminar: Realizar los cálculos para establecer materiales y configuraciones que cumplan los requerimientos y especificaciones. En esta etapa se desglosa la propuesta del proceso de diseño desde la micromecánica, para una lámina de material compuesto fibrorreforzado:
 - Se Inicia por la selección de los materiales y el proceso de manufactura
 - Se asume que el material es ortotrópico y si es fibrorreforzado con fibras

- largas, se asume transversalmente isotrópico. El material estará sometido a esfuerzo plano.
- Si se tienen los datos teóricos de porcentaje en volumen, módulos de Young y coeficientes de Poisson de la matriz y el refuerzo: se calculan los módulos de Young y cortante; coeficientes de Poisson, de expansión térmica y por expansión de humedad
 - Si no se tienen datos teóricos de resistencias de la lámina, de la temperatura a estado inicial y final, y del contenido de humedad inicial y final, se realiza un procedimiento experimental
 - Con los datos teóricos, experimentales y con los esfuerzos o deformaciones aplicadas, se calcula la matriz de acople o de rigidez. Con esta matriz se determina el estado de esfuerzos o de deformaciones del material
 - Se analiza el diseño propuesto con el criterio de falla que se escoja
 - Si no es un diseño seguro, verificar los materiales seleccionados y el proceso de manufactura con el que puede modificar el porcentaje en volumen de matriz-refuerzo. Si es un diseño seguro se puede proceder a estudiar la macromecánica
 - En función de las orientaciones de las láminas y la secuencia del laminado, se calculan las propiedades del laminado. Se analiza el prediseño. Se realiza un análisis final teniendo en cuenta pandeo, resistencia, ensamble, uniones.
 - Se analiza con un criterio de falla. Si no es un diseño seguro, se verifican las propiedades del laminado en función de la orientación de las capas y su secuencia de apilado. Si el diseño es seguro, se dimensiona el proyecto conceptual y se pasa a la Etapa 4
- Etapa 4. Diseño detallado: Se establece el proceso de manufactura cumpliendo con seguridad operacional, confiabilidad del producto, y documentando detalladamente el proceso para posterior producción
 - Etapa 5. Manufactura: Se utilizan los recursos para obtener y ensamblar el producto con los materiales y forma establecida previamente
 - Etapa 6: Ensayos: Se chequean las especificaciones de diseño del prototipo con respecto a los requerimientos funcionales

Figura 6.16. Diagrama del proceso de diseño



7. CONCLUSIONES

- Es posible estimar la degradación higrotérmica de la resistencia o rigidez de un compuesto, al utilizar una ecuación empírica para degradar la propiedad deseada de la matriz y emplea esa propiedad degradada en la ecuación de micromecánica correspondiente.
- En ensayos a 50°C la resistencia a cortante interlaminar de los compuestos de fibra de vidrio/epoxy, fibra de carbono/epoxy, fibra de kevlar/epoxy, decrece al compararla con la resistencia a temperatura ambiente hasta un 47 %, 81 % y 65 % para dichos compuestos, respectivamente
- La fórmula más precisa para estimar el coeficiente por expansión térmica fue derivada por Levin
- Las propiedades que dependen de la humedad son el contenido de humedad de saturación o humedad en equilibrio M_m , y la difusividad de humedad o cociente de difusividad
- Si el material cumple con los tres puntos definidos por (Wong, 2013) en la gráfica de contenido de humedad $M_t(\%)$ vs raíz cuadrada del tiempo entre el espesor $\sqrt{(t/l)}$, entonces cumple con las leyes de Fick. Los puntos son: La pendiente de la zona lineal inicial se mantiene recta hasta el 60 % de la humedad de saturación; luego de la línea recta, la pendiente disminuye gradualmente hasta alcanzar un valor de equilibrio en la humedad de saturación; al realizar las curvas de contenido de humedad vs $\sqrt{(t/l)}$ para diferentes espesores de un mismo material, estas deben ser superimponibles
- Si el material tiene comportamiento fickiano, se puede estimar su contenido de humedad con la ecuación $M(T, t)$ a un tiempo dado
- Para un material es posible conocer la dependencia de la difusión con la temperatura usando la expresión de Arrhenius, conociendo las propiedades de transporte de humedad, si existe relación lineal entre la escala logarítmica de la difusión ($\log D$) y el inverso de la temperatura ($1/T$)
- En los materiales compuestos reforzados unidireccionalmente con fibras largas, el esfuerzo a fluencia coincide con la resistencia última y se presentan daños internos antes de alcanzar la resistencia última
- Los criterios de falla del máximo esfuerzo, la máxima deformación y la interacción de falla, pueden modificarse incluyendo los efectos higrotérmicos sobre el material en forma de esfuerzo o deformación higrotérmica
- Fue posible proponer un diagrama de flujo del proceso de diseño, definido en 6 etapas, centrando el diseño de la lámina en la Etapa 3: Diseño preliminar, a partir de los datos teóricos y experimentales sobre las propiedades del material, como se ha descrito en este documento escrito

RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se recomienda:

- Realizar un estudio a mayor profundidad sobre los diferentes elementos de volumen representativo que se pueden proponer para otros tipos de láminas, como tejidos y láminas con polvo de refuerzo
- Estudiar a más profundidad los distintos criterios de falla que se han propuesto en el WWFE
- Realizar un estudio de la manera de analizar la micromecánica mediante:
 - Elementos Finitos mediante diversos tipos de software
 - Métodos de microscopía óptica, fotografía digital, microscopía electrónica de barrido
 - Ensayos mecánicos sobre filamentos de fibra de refuerzo
 - Ensayos térmicos sobre la matriz polimérica, como análisis termogravimétrico (TGA) y Differential Scanning Calorimetry (DSC)
 - Estudio de reología sobre la matriz polimérica
- Realizar un estudio para medir, estimar y observar los efectos que la humedad y temperatura tienen sobre las propiedades de la interfaz entre la fibra y la matriz, mediante técnicas instrumentales como Microscopía Electrónica de Barrido (SEM), Microscopía Electrónica de Transmisión (TEM), dilatometría, que permitan estimar los cambios dimensionales
- Realizar un estudio de la determinación del esfuerzo de adhesión entre la fibra y la matriz con modelos de interfaz como el Modelo de Zona Cohesiva, que permite realizar un análisis de mecánica de fractura extenso, por lo que no se desarrolló a profundidad en este documento
- Realizar un análisis comparativo de las propiedades de refuerzo con fibras naturales y sintéticas
- Realizar un estudio de la macromecánica de los laminados fibrorreforzados y sus criterios de falla

BIBLIOGRAFÍA

- Adams, D. F., Carlsson, L. A., & Pipes, R. B. (2002). *Experimental characterization of advanced composite materials, third edition. Experimental Characterization of Advanced Composite Materials, Third Edition*. <https://doi.org/10.1201/noe1587161001>
- Arai, M., Noro, Y., Sugimoto, K., & Endo, M. (2008). Mode I and mode II interlaminar fracture toughness of CFRP laminates toughened by carbon nanofiber interlayer. *Composites Science and Technology*, 68(2), 516–525. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.06.007>
- ASTM D2344. (2016). ASTM D2344 / D2344M - 16 Standard Test Method for Short-Beam Strength of Polymer Matrix Composite Materials and Their Laminates. *Annual Book of ASTM Standards*, 00(2016), 1–8. <https://doi.org/10.1520/D2344>
- ASTM D3039. (2014). Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. *Annual Book of ASTM Standards*, 1–13. <https://doi.org/10.1520/D3039>
- ASTM D3846 - 08. (2015). ASTM D3846 - 08(2015) Standard Test Method for In-Plane Shear Strength of Reinforced Plastics. *Annual Book of ASTM Standards*, 08.02(Reapproved 2015), 1–3. <https://doi.org/10.1520/D3846-08R15>
- ASTM D3914 - 02. (2016). ASTM D3914 - 02(2016) Standard Test Method for In-Plane Shear Strength of Pultruded Glass-Reinforced Plastic Rod, i(Reapproved), 1–5. <https://doi.org/10.1520/D3914-02R16>
- ASTM D4255. (2015). ASTM D4255 / D4255M - 15a Standard Test Method for In-Plane Shear Properties of Polymer Matrix Composite Materials by the Rail Shear Method. *Annual Book of ASTM Standards*, 15.03(2015a), 14. https://doi.org/10.1520/D4255_D4255M-15A
- ASTM D4475 - 02. (2016). ASTM D4475/D4475M-16: Standard Test Method for Apparent Horizontal Shear Strength of Pultruded Reinforced Plastic Rods By the Short-Beam Method. *ASTM Standard*, 14(Reapproved), 3–5. <https://doi.org/10.1520/D4475-02R16>
- ASTM D5379. (2019). ASTM D5379 / D5379M - 19 Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method. *Annual Book of ASTM Standards*, 15.03(2019), 1–14. https://doi.org/10.1520/D5379_D5379M-19
- ASTM D5528 - 13. (2013). ASTM D5528 - 13 Standard Test Method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites. *Annual Book of ASTM Standards*, 15.03(2013), 1–13. <https://doi.org/10.1520/D5528-13>
- ASTM D695. (2015). Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Plastics. *Annual Book of ASTM Standards*, 08.01(2015), 1–8. <https://doi.org/10.1520/D0695-15>
- ASTM D7905. (2019). ASTM D7905 / D7905M - 19e1 Standard Test Method for Determination of the Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites. *Annual Book of ASTM Standards*, 15.03(2019e1), 18. https://doi.org/10.1520/D7905_D7905M-19E01
- ASTM E1309-00. (2011). Standard Guide for Identification of Fiber-Reinforced Polymer-Matrix Composite Materials in Databases. *ASTM Book of Standards*, 00(Reapproved 2005), 1–15. <https://doi.org/10.1520/E1309-00R11>
- ASTMD3410. (2003). ASTM D3410M - Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading. *Annual Book of ASTM Standards*, 15.03(Reapproved 2008), 1–16. <https://doi.org/10.1520/D3410>
- ASTMD3518. (2007). Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix

- Composite Materials by Tensile Test of a $\pm 45^\circ$ Laminate. *Annual Book of ASTM Standards*, 94(Reapproved), 1–7. <https://doi.org/10.1520/D3518>
- ASTMD5229. (2014). ASTM D 5229– 14 – Standard Test Method for Moisture Absorption Properties and Equilibrium Conditioning of Polymer Matrix Composite Materials. *Annual Book of ASTM Standards*, 92(Reapproved), 1–19. https://doi.org/10.1520/D5229_D5229M-14
- Barbero, E. J. (2017). *Introduction to composite materials design* (3rd ed.). Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, CRC Press.
- Bhalchandra, S. A., & Shiradhonkar, Y. S. (2012). Determination of properties of transversely isotropic lamina using micromechanics approach. *Cement and Concrete Composites*, 48, 9588–9593.
- Brewis, D. M., Comyn, J., & Shalash, R. J. A. (1982). The effect of moisture and temperature on the properties of an epoxide-polyamide adhesive in relation to its performance in single lap joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2(4), 215–222. [https://doi.org/10.1016/0143-7496\(82\)90028-8](https://doi.org/10.1016/0143-7496(82)90028-8)
- C613-19 ASTM International. (1997). Standard test method for constituent content of composite prepreg by soxhlet extraction. *ASTM International*, 97(Reapproved 2008), 1–8. <https://doi.org/10.1520/C0613>
- Chamis, C. C. (1983). Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties. In *Thirty-eighth Annual Conference of the Society of the Plastics Industry (SPI). Reinforced Plastics/Composites Institute. Houston, Texas, February 7-11, 1983* (p. 19). Cleveland: NASA. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19830011546>
- Chawla, K. K. (2013). *Composite Materials. Science and Engineering* (Third). Birmingham: Springer New York. <https://doi.org/10.1017/978-0-387-74365-3>
- Choi, S., & Sankar, B. V. (2006). Micromechanical Analysis of Composite Laminates at Cryogenic Temperatures. *Journal of Composite Materials*, 40(12), 1077–1091. <https://doi.org/10.1177/0021998305057365>
- Christian, S. J. (2009). *Mechanical Characterization and Structural Assessment of Biocomposites for Construction*. Stanford: ProQuest Dissertations And Theses; Thesis (Ph.D.)--Stanford University.
- D 618 -13 ASTM International. (2000). Standard Practice for Conditioning Plastics for Testing. *American Society for Testing and Materials*, i, 7–10. <https://doi.org/10.1520/D0618-13.2>
- D2584-18 ASTM International. (2018). Standard Test Method for Ignition Loss of Cured Reinforced Resins. *ASTM D 2584-18*, 18–20. <https://doi.org/10.1520/D2584-18.2>
- D2734-16 ASTM International. (2003). Standard Test Methods for Void Content of Reinforced Plastics. *Astm D 2734-16*, 08(Reapproved), 3–5. <https://doi.org/10.1520/D2734-09.2>
- D3171-15 ASTM International. (2015). D3171 - Standard Test Methods for Constituent Content of Composite Materials. *ASTM International*, 1–11. <https://doi.org/10.1520/D3171-15.2>
- D792 – 13 ASTM standards. (2013). D792 – 13: Standard Test Methods for Density and Specific Gravity (Relative Density) of Plastics by Displacement. *ASTM International*, 15(3), 145–149. <https://doi.org/10.1520/D0792-13.2>
- Daniel, I. M., & I. Ishai, O. (1994). *Engineering mechanics of composite materials*. New York: Oxford University Press, Inc.
- Daniel, I. M., & Ishai, O. (2006). *Engineering mechanics of composite materials. Materials & Design* (2nd ed., Vol. 17). New York: Oxford University Press, Inc.

- [https://doi.org/10.1016/s0261-3069\(97\)87195-6](https://doi.org/10.1016/s0261-3069(97)87195-6)
- Daricik, F., & Aslan, Z. (2017). Characterization of Delamination Crack in Multidirectional E-glass/epoxy Composite under Mode I Loading. *European Mechanical Science*, 1(4), 117–128. <https://doi.org/10.26701/ems.341788>
- Dávila, C. G., Camanho, P. P., & Rose, C. A. (2005). Failure criteria for FRP laminates. *Journal of Composite Materials*, 39(4), 323–345. <https://doi.org/10.1177/0021998305046452>
- Dvorak, G. J., & Laws, N. (1986). Analysis of first ply failure in composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5–6), 763–770. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(86\)90039-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(86)90039-1)
- Eftekhari, M., & Fatemi, A. (2016). Tensile behavior of thermoplastic composites including temperature, moisture, and hygrothermal effects. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2016.03.011>
- Gibson, R. F. (2016). *Principles of composite material mechanics* (4th ed.). Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, CRC Press.
- Gillham, J. K. (1990). Formation and properties of thermosetting and high Tg polymeric materials. In O. Güven (Ed.), *NATO ASI Series: Crosslinking and Scission in Polymers* (pp. 171–198). Ankara, Turkey: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1924-2>
- Gledhill, R. A., Kinloch, A. J., & Shaw, S. J. (1980). A Model for Predicting Joint Durability. *The Journal of Adhesion*, 11(1), 3–15. <https://doi.org/10.1080/00218468008078901>
- Guermazi, N., Ben Tarjem, A., Ksouri, I., & Ayedi, H. F. (2013). On the durability of FRP composites for aircraft structures in hygrothermal conditioning. *Composites Part B: Engineering*, 85, 294–304. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.035>
- Hedrick, I., & Whiteside, J. (1977). Effects of environment on advanced composites structures. In *Dynamics Specialists Conference* (pp. 0–17). Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics. <https://doi.org/10.2514/6.1977-463>
- Hinton, M. J., Kaddour, A. S., & Soden, P. S. (2004). *Failure criteria in fibre reinforced polymer composites: The World Wide Failure Exercise. A composites science and technology compendium*. (M. J. Hinton, A. S. Kaddour, & P. S. Soden, Eds.) (1st ed.). Oxford: Elsevier Ltd.
- Horgan, C. O., & Carlsson, L. A. (2000). Saint-Venant End Effects for Anisotropic Materials. *Comprehensive Composite Materials*, (February), 5–21. <https://doi.org/10.1016/b0-08-042993-9/00034-6>
- Horgan, C. O., & Simmonds, J. G. (1994). Saint-Venant End Effects In Composites. *Composites Engineering*, 4(3), 279–286. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(94\)00034-6](https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)00034-6)
- Hull, D., & Clyne, T. W. (1996). *An Introduction to Composite Materials (Cambridge Solid State Science Series)* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. Retrieved from <http://b-ok.org/book/1133234/e0b6e4%0Ahttp://www.amazon.com/Introduction-Composite-Materials-Cambridge-Science/dp/0521388554>
- Hull, Derek. (1996). *An Introduction to Composite Materials* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. Retrieved from <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9781139170130/type/book>
- Ji, A. H., Lu, M., Zha, M., Dong, B. Z., Gao, L. H., & Dai, Z. D. (2014). Model I Interlaminar Fracture Toughness of Carbon Fiber Reinforced Polymer Matrix Composites. *Advanced Materials Research*, 887–888, 81–85. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.887-888.81>
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials* (2nd ed.). Ann Arbor: Taylor & Francis Group, CRC Press.

- Khoramishad, H., Crocombe, A. D., Katnam, K. B., & Ashcroft, I. A. (2011). Fatigue damage modelling of adhesively bonded joints under variable amplitude loading using a cohesive zone model. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(18), 3212–3225. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.09.008>
- Kwang-Hee, I., Cheon-Seok, C., Sun-Kyu, K., & In-Young, Y. (2001). Effects of temperature on impact damages in CFRP composite laminates. *Composites Part B: Engineering*, 32(8), 669–682. Retrieved from [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(01\)00046-4](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(01)00046-4)
- Laffan, M. J. (2012). Testing the toughness of polymer matrix composites. *Failure Mechanisms in Polymer Matrix Composites: Criteria, Testing and Industrial Applications*, 110–128. <https://doi.org/10.1016/B978-1-84569-750-1.50005-7>
- Laidler, K. J. (1984). The Development of the Arrhenius Equation. *Journal of Chemical Education*, 61(6), 494–498.
- Li, J., Lee, S. M., Lee, E. W., & O'Brien, T. K. (1997). Evaluation of the Edge Crack Torsion (ECT) Test for Mode III Interlaminar Fracture Toughness of Laminated Composites. *Journal of Composites Technology and Research*, 19(3), 174–183. <https://doi.org/10.1520/ctr10028j>
- Liljedahl, C. D. M. (2006). Modelling the interfacial degradation in adhesively bonded joints, (February), 298.
- Liu, S., Cheng, X., Zhang, Q., Zhang, J., Bao, J., & Guo, X. (2016). An investigation of hygrothermal effects on adhesive materials and double lap shear joints of CFRP composite laminates. *Composites Part B: Engineering*, 91, 431–440. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.01.051>
- Liu, X., Sun, T., Wu, Z., & He, H. (2018). Mode II interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites with synthetic boehmite nanosheets at room temperature and low temperature. *Journal of Composite Materials*, 52(7), 945–952. <https://doi.org/10.1177/0021998317716529>
- Loh, W. K., Crocombe, A. D., Abdel Wahab, M., & Ashcroft, I. (2005). Modelling Anomalous Moisture Uptake, Swelling and Thermal Characteristics of a Rubber Toughened Epoxy Adhesive. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 25, 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2004.02.002>
- Martin, R. H. (1989). Evaluation of the Split Cantilever Beam for Mode III Delamination Testing. *Administración Nacional de Aeronáutica y Del Espacio (NASA)*, (March 1989), 59. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19890012761>
- Mase, G. T., & Mase, G. E. (1999). *Continuum mechanics for engineers - 2nd Edition*.
- Matthews, B. (2018). Applied stress analysis section 11 composite materials. In *General Dynamics Convair Division* (p. 92). Irvine: Convair.
- Meng, M., Rizvi, M. J., Grove, S. M., & Le, H. R. (2015). Effects of hygrothermal stress on the failure of CFRP composites. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.016>
- Mortell, D. J., Tanner, D. A., & McCarthy, C. T. (2017). A virtual experimental approach to microscale composites testing. *Composite Structures*, 171, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.016>
- Moura Miranda, B., Ferreira de Amorim Júnior, W., Neto, F., & Silva Diniz, D. D. (2015). Design and Fabrication of a Laboratorial Resin Transfer Moulding Equipment. In *Proceedings of the 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering* (p. 9). Rio de Janeiro: abcm - associação brasileira de engenharia e ciências mecânicas. <https://doi.org/10.20906/cps/cob-2015-1188>
- Mubashar, A. (2010). Modelling degradation in adhesive joints subjected to fluctuating service conditions. Retrieved from <https://dspace.lboro.ac.uk/dspace-jspui/bitstream/2134/6336/2/PhD Thesis - Aamir.pdf>

- Puck, A., & Schürmann, H. (2002). Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12-13 SPECIAL ISSUE), 1633–1662. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(01\)00208-1](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(01)00208-1)
- Ray, B. C., Prusty, R. K., & Rathore, D. K. (2018). *Fibrous Polymeric Composites: Environmental Degradation and Damage*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, CRC Press.
- Robinson, P., & Song, D. Q. (1994). The development of an improved mode III delamination test for composites. *Composites Science and Technology*, 52(2), 217–233. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(94\)90207-0](https://doi.org/10.1016/0266-3538(94)90207-0)
- Rouchon, J. (1990). Certification of large aircraft composite structures, recent progress and new trends in compliance philosophy. *17th ICAS Congress*, 1, 1439–1447. <https://doi.org/0-930403-78-9>
- Ruiz, E., Ferreira Benevides, A., & Bourdon, S. (2013). Advanced Training in the Manufacturing of Composites. Bogotá D.C.: ERFT Composites.
- Saidpour, H., Barikani, M., & Sezen, M. (2003). Mode-II Interlaminar Fracture Toughness of Carbon/Epoxy Laminates. *Iranian Polymer Journal*, 2(5), 389–400. Retrieved from [http://roar.uel.ac.uk/1033/1/Saidpour%2C H %282003%29 IPJ 12 %285%29 389.pdf](http://roar.uel.ac.uk/1033/1/Saidpour%2C%20H%282003%29IPJ12%285%29389.pdf)
- Shan, M., Zhao, L., Hong, H., Liu, F., & Zhang, J. (2018). A progressive fatigue damage model for composite structures in hygrothermal environments. *International Journal of Fatigue*, 111, 299–307. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.02.019>
- Shen, C. H., & Springer, G. S. (1976). Moisture Absorption and Desorption of Composite Materials. *Journal of Composite Materials*, 10(1), 2–20. <https://doi.org/10.1177/002199837601000101>
- Shirrell, C. D. (1978). Diffusion of Water Vapor in Graphite/Epoxy Composites. *Advanced Composite Materials—Environmental Effects*, 21–42. <https://doi.org/10.1520/STP34856S>
- Shokrieh, M., Ghasemi, R., & Mosalmani, R. (2017). A general micromechanical model to predict elastic and strength properties of balanced plain weave fabric composites. *Journal of Composite Materials*, 51(20), 2863–2878. <https://doi.org/10.1177/0021998317716530>
- Smiley, A. J., & Pipes, R. B. (1987). Rate sensitivity of mode II interlaminar fracture toughness in graphite/epoxy and graphite/PEEK composite materials. *Composites Science and Technology*, 29(1), 1–15. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(87\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(87)90033-9)
- Tada, H., Paris, P. C., & Irwin, G. R. (2010). *Stress Analysis Results for Common Test Specimen Configurations. The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition*. <https://doi.org/10.1115/1.801535.ch2>
- Tan, S. C. (1992). Stress analysis and the testing of Celanese and IITRI compression specimens. *Composites Science and Technology*, 44(1), 57–70. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(92\)90025-X](https://doi.org/10.1016/0266-3538(92)90025-X)
- Tuttle, M. E. (2013). *Structural analysis of polymeric composite materials* (2nd ed.). Boca Raton, FL: CRC PressTaylor & Francis Group, LLC.
- US Department of Defense. (2002). Composite Materials Handbook Volume 1: Polymer Matrix Composites - Guidelines for Characterisation of Structural Materials. *Composite Materials Handbook Series*, 1(June), 1–586.
- Wang, A. S. D. (1983). Fracture Mechanics of Sublaminar Cracks in Composite Materials. *Air Force Office of Scientific Research*, 67.
- Wong, K. J. (2013). *Moisture absorption characteristics and effects on mechanical behaviour of carbon/epoxy composite: application to bonded patch repairs of composite structures*. Université de Bourgogne. Bourgogne: HAL.

<https://doi.org/10.1109/IVMSPW.2013.6611889>

Zehnder, A. T. (2007). *Lecture Notes on Fracture Mechanics*. Cornell University. Ithaca: Cornell University.

Zhao, D., & Wang, Y. (1998). Mode III fracture behavior of laminated composite with edge crack in torsion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 29(2), 109–123. [https://doi.org/10.1016/S0167-8442\(98\)00023-8](https://doi.org/10.1016/S0167-8442(98)00023-8)

Zoghi, M. (2014). *The International Handbook of FRP Composites in Civil Engineering*. Boca Raton, FL: CRC PressTaylor & Francis Group, LLC. <https://doi.org/10.1111/j.1574-6941.2007.00310.x>

ANEXO A. ENSAYOS ESTÁNDARES RELATIVOS A FRACCIÓN DE PESO O VOLUMEN

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
1	ASTM D792 (D792 – 13 ASTM standards, 2013)	Densidad y gravedad específica (densidad relativa) del compuesto por desplazamiento. Recomendado para especímenes de volumen cuya medición no es tan precisa. Ensayar plásticos sólidos en agua (especímenes de 1 – 50 g)	$spgr_{23/23^{\circ}C} = a/(a + w - b)$ $D^{23^{\circ}C}, kg/m^3 = spgr\ 23 / 23^{\circ}C \times 997,5$ Si el agua no está a 23°C, usar la tabla de corrección del standard
2	ASTM D618 (D 618 -13 ASTM International, 2000)	Acondicionamiento de los especímenes para ensayos en laboratorio. Para el acondicionamiento el primer número indica la duración en horas, el segundo es la temperatura en grados Celsius, el tercero es la humedad relativa controlada.	Procedimiento A: Si el espécimen es igual o menor a 7 mm (0,25 in.) acondicionar a 40/23/50; pero si es mayor acondicionar a 88/23/50
3	ASTM D2584 (D2584-18 ASTM International, 2018)	Contenido de resina en el compuesto por quemado en horno. Acondicionar los especímenes según el procedimiento A del estándar ASTM D618. Secar el crisol en horno, pesar los especímenes en el crisol, calentar el contenido hasta ignición con un mechero hasta que queden cenizas y luego en el horno mufla hasta que el material carbonáceo desaparece. Pesar el residuo. Hacerlo para 3 muestras.	$R = [(W_1 - W_2)/W_1] * 100$
4	ASTM D2734 (D2734-16 ASTM International, 2003)	Contenido de vacío del compuesto, en porcentaje de volumen. Obtener la densidad del compuesto (D) de ASTM D792, o calcular como masa sobre volumen si este se puede calcular de forma precisa a partir de las dimensiones. Obtener la densidad del refuerzo (d) de ASTM D792, removiendo aire atrapado con vacío de al menos 3 mm Hg y varios ciclos. Obtener el contenido de resina en el	$T_d = 100/(R/D + r/d)$ $V = 100 (T_d - M_d)/T_d$

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
		compuesto (R) con ASTM D2584.	
5	ASTM D3171 (D3171-15 ASTM International, 2015)	Determinación del contenido constitutivo del material compuesto por Digestión de Matriz. Método I: Se elimina físicamente la matriz por digestión sin afectar el refuerzo, para calcular contenido de refuerzo o matriz y el porcentaje de volumen vacío. Método II: Se aplica a materiales laminados de peso superficial de fibra conocido, para calcular el contenido de refuerzo o de matriz y el espesor de la lámina curada basado en el espesor del laminado, pero no aplica para medir el volumen de vacío.	Para digerir la matriz se implementan químicos como: ácido nítrico, ácido sulfúrico/peróxido de hidrógeno, glicol de etileno/hidróxido de potasio, hidróxido de sodio, ácido clorhídrico, ácido nítrico en un horno de microondas; o también quemado de matriz en un horno muffle, o en un horno de purga de nitrógeno. Para el método II se debe conocer la masa de una hoja de refuerzo/ unidad de área, y el número de capas en el espécimen.
6	ASTM C613 (C613-19 ASTM International, 1997)	Determinación del contenido constitutivo del material compuesto por Extracción Solvente Soxhlet. Para determinar el contenido de matriz, de refuerzo, y material de relleno (si aplica) del material compuesto.	Se implementa un extractor Soxhlet con un reactivo para resinas, como: Dimetilformamida (DMF) (CH ₅) ₂ NCHO (Catalogado en Grupo 3 como "posible carcinógeno humano" y se considera una toxina reproductiva); Etanol (alcohol etílico) C ₂ H ₅ OH. Como agente de lavado se puede usar: Acetona (2-propanona), CH ₃ COCH ₃ ; Agua destilada o desmineralizada.

LISTA DE SÍMBOLOS

- **ASTM D792**

spgr_{23/23°C}: Gravedad específica (densidad relativa) – Relación de la masa del volumen igual de la porción impermeable de un material a 23 °C con respecto a la masa de un volumen igual de agua destilada a la misma temperatura.

a: Masa aparente del espécimen en aire, sin alambre ni plomada

b: Masa aparente del espécimen completamente inmersa y suspendida en agua (con plomada y alambre, si usados)

w: Masa aparente de la plomada o alambre inmersos en agua

D^{23°C}: Densidad del espécimen en agua a 23°C

- **ASTM D2734**

T_d: Densidad teórica del compuesto

R: Porcentaje en peso de la resina en el compuesto

No.	STANDARD	PARA	FÓRMULA Y COMENTARIO
r:	Porcentaje en peso del refuerzo en el compuesto		
D:	Densidad de la resina		
d:	Densidad del refuerzo		
	• ASTM D2584		
R:	Pérdida por ignición – Contenido de resina en el compuesto en porcentaje de peso		
W₁:	Peso del espécimen en gramos		
W₂:	Peso del residuo en gramos		

ANEXO B. TENSOR DE COEFICIENTES ELÁSTICOS Y SIMETRÍA

Tensor de coeficientes elásticos (81 componentes)					
$C_{ijkl} =$	C_{1111}	C_{1112}	C_{1113}	C_{1121}	C_{1122}
	C_{1211}	C_{1212}	C_{1213}	C_{1221}	C_{1222}
	C_{1311}	C_{1312}	C_{1313}	C_{1321}	C_{1322}
	C_{2111}	C_{2112}	C_{2113}	C_{2121}	C_{2122}
	C_{2211}	C_{2212}	C_{2213}	C_{2221}	C_{2222}
	C_{2311}	C_{2312}	C_{2313}	C_{2321}	C_{2322}
	C_{3111}	C_{3112}	C_{3113}	C_{3121}	C_{3122}
	C_{3211}	C_{3212}	C_{3213}	C_{3221}	C_{3222}
	C_{3311}	C_{3312}	C_{3313}	C_{3321}	C_{3322}
En azul: Simetría mayor En café: Simetría menor por columnas, donde: $C_{1112} = C_{1121}$; $C_{1113} = C_{1131}$; $C_{1123} = C_{1132}$; $C_{1212} = C_{1221}$; $C_{1213} = C_{1231}$; $C_{1223} = C_{1232}$; $C_{1312} = C_{1321}$; $C_{1313} = C_{1331}$; $C_{1323} = C_{1332}$; $C_{2112} = C_{2121}$; $C_{2113} = C_{2131}$; $C_{2123} = C_{2132}$; $C_{2212} = C_{2221}$; $C_{2213} = C_{2231}$; $C_{2223} = C_{2232}$; $C_{2312} = C_{2321}$; $C_{2313} = C_{2331}$; $C_{2323} = C_{2332}$; $C_{3112} = C_{3121}$; $C_{3113} = C_{3131}$; $C_{3123} = C_{3132}$; $C_{3212} = C_{3221}$; $C_{3213} = C_{3231}$; $C_{3223} = C_{3232}$; $C_{3312} = C_{3321}$; $C_{3313} = C_{3331}$; $C_{3323} = C_{3332}$; En verde: Simetría menor por filas, donde: $C_{1211} = C_{2111}$; $C_{1212} = C_{2112}$; $C_{1213} = C_{2113}$; $C_{1222} = C_{2122}$; $C_{1223} = C_{2123}$; $C_{1233} = C_{2133}$; $C_{1311} = C_{3111}$; $C_{1312} = C_{3112}$; $C_{1313} = C_{3113}$; $C_{1322} = C_{3122}$; $C_{1323} = C_{3123}$; $C_{1333} = C_{3133}$; $C_{2311} = C_{3211}$; $C_{2312} = C_{3212}$; $C_{2313} = C_{3213}$; $C_{2322} = C_{3222}$; $C_{2323} = C_{3223}$; $C_{2333} = C_{3233}$;					
Tensor de coeficientes elásticos (36 componentes, simplificada por simetrías menores)					
$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix}$					
Tensor de coeficientes elásticos (21 componentes, simplificada por simetría mayor)					
$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}$ <i>Simétrico</i>					
Simetrías menores $C_{ijkm} = C_{jikm} = C_{ijmk}$					
Simetría del tensor Esfuerzos	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	$C_{ijkm} = C_{jikm}$			
Simetría del tensor Deformaciones	$\varepsilon_{km} = \varepsilon_{mk}$	$C_{ijkm} = C_{jimk}$			

ANEXO C. MATRIZ DE COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA CUERPOS DE DIFERENTE SIMETRÍA MATERIAL

Cuerpo con un plano de simetría (x_1x_2)

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & \\ & & & C_{54} & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Simétrico

36 constantes reducidas a 20. Con la existencia de una función energía de deformación se reducen de 20 a 13: $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$

Ortotrópico: Cuerpo con dos o tres planos de simetría ($x_1x_2 - x_2x_3$ y x_1x_3)

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Simétrico

20 constantes reducidas a 12. Con la existencia de una función energía de deformación se reducen de 12 a 9: $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$

Transversalmente Isotrópico: Cuerpo con un eje de simetría (un plano de simetría)

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{21} & C_{32} & C_{22} & & & \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}$$

Simétrico

Se describe con cinco constantes elásticas $C_{11}, C_{12}, C_{23}, C_{22}$, y C_{55} . Requiere: $E_1; E_2; G_{12} = G_{13}; \nu_{12} = \nu_{13}$; y ν_{23} ; donde $G_{23} = \frac{1}{2} E_2/(1 + \nu_{23})$

Isotrópico: Cuerpo con tres planos y tres ejes de simetría

$$C_{\alpha\beta} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \end{bmatrix}$$

Fuente: (Chawla, 2013)

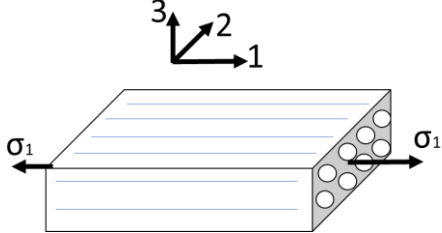
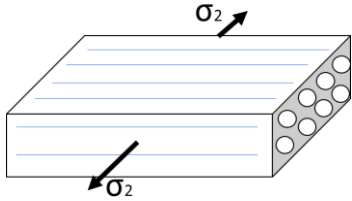
**ANEXO D. RELACIONES CONSTITUTIVAS DEL MATERIAL ORTOTRÓPICO
ELÁSTICO LINEAL**

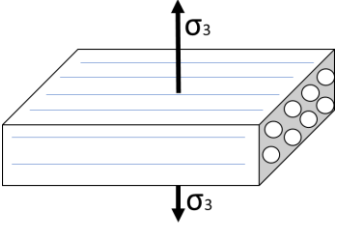
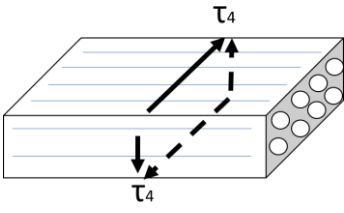
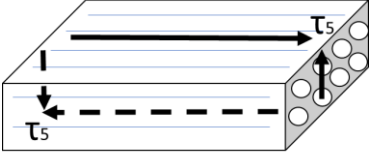
Con matriz de rigidez	Con matriz de conformidad
$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & \\ & & & S_{44} & & \\ & & & & S_{55} & \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$
Reducción por estado de esfuerzo plano: $\sigma_3 = 0$; $\tau_{23} = \sigma_4 = 0$; $\tau_{13} = \sigma_5 = 0$ $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$ Al expandir se obtiene: $\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 \end{aligned}$ Sustituyendo ε_3: $\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6 \end{aligned}$ De donde se puede escribir: $Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad (i, j, = 1, 2, 6)$	
Ortotrópico Especial: Reducida por estado de esfuerzo plano $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$ Donde: $Q_{11} = \frac{S_{22}}{(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)} = \frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}}$	Ortotrópico Especial: Reducida por estado de esfuerzo plano $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$ Donde: $\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{12} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} \end{aligned}$

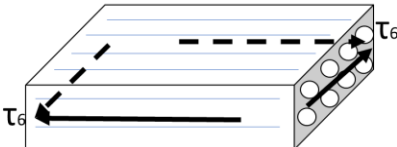
$Q_{12} = -\frac{\frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}}{S_{12}} = \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)} = \frac{C_{33}}{C_{33}}$ $\frac{\nu_{12}E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} = \frac{\nu_{21}E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} = Q_{21}$ $Q_{22} = \frac{S_{11}}{(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)} = \frac{C_{22}C_{33} - C_{23}^2}{C_{33}}$ $= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ $Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} = C_{66} = G_{12}$ Los términos $Q_{16} = Q_{26} = 0$, entonces las deformaciones normales producen esfuerzos normales y las deformaciones cortantes producen esfuerzos cortantes	$S_{22} = \frac{1}{E_2}$ $S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$ $S_{23} = -\nu_{23}/E_2$ $\epsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \text{ (Ortotrópico)}$ $\epsilon_3 = S_{12}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \text{ (Transversalmente Isotrópico, donde } S_{13} = S_{12})$ Los términos $S_{16} = S_{26} = 0$, entonces los esfuerzos normales producen deformaciones normales y los esfuerzos cortantes producen deformaciones cortantes
Ortotrópico General: Con matriz de rigidez transformada $\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$ Los términos $\bar{Q}_{16}$ y $\bar{Q}_{26}$ no son cero, entonces las deformaciones unidireccionales normales producen tanto esfuerzos normales como cortantes y viceversa, es decir, hay acople entre los componentes normales y cortantes	Ortotrópico General: Reducida por estado de esfuerzo plano $\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$ Los términos $\bar{S}_{16}$ y $\bar{S}_{26}$ no son cero, entonces los esfuerzos unidireccionales normales producen tanto deformaciones normales como cortantes y viceversa, es decir, hay acople entre los componentes normales y cortantes

Fuente: (Adams et al., 2002)

ANEXO E. RELACIONES ENTRE CONSTANTES MATEMÁTICAS Y CONSTANTES INGENIERILES

Experimento para relacionar constantes ingenieriles	Ecuaciones
Tensión uniaxial longitudinal 	De la ley de Hooke con matriz de conformidad, bajo esta carga: $\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 & \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 \\ \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1 & \varepsilon_4 &= S_{14}\sigma_1 \\ \varepsilon_5 &= S_{15}\sigma_1 & \varepsilon_6 &= S_{16}\sigma_1\end{aligned}$ De las consideraciones ingenieriles: $\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \sigma_1/E_1 & \varepsilon_2 &= -\nu_{12}\sigma_1/E_1 \\ \varepsilon_3 &= -\nu_{13}\sigma_1/E_1 & \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = \frac{\eta_{1,23}}{E_1}\sigma_1 \\ \varepsilon_5 &= \gamma_{13} = \frac{\eta_{1,13}}{E_1}\sigma_1 & \varepsilon_6 &= \gamma_{12} = \frac{\eta_{1,12}}{E_1}\sigma_1\end{aligned}$ Al relacionarlas: $\begin{aligned}S_{11} &= 1/E_1 & S_{12} &= -\nu_{12}/E_1 & S_{13} &= -\nu_{13}/E_1 \\ S_{14} &= \eta_{1,23}/E_1 & S_{15} &= \eta_{1,13}/E_1 & S_{16} &= \eta_{1,12}/E_1\end{aligned}$ Para el material ortotrópico: $\eta_{1,12} = \eta_{1,13} = \eta_{1,23} = 0$
Tensión uniaxial transversal en el plano 	De la ley de Hooke con matriz de conformidad, bajo esta carga: $\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2 & \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2 \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2 & \varepsilon_4 &= S_{24}\sigma_2 \\ \varepsilon_5 &= S_{25}\sigma_2 & \varepsilon_6 &= S_{26}\sigma_2\end{aligned}$ De las consideraciones ingenieriles: $\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -\nu_{21}\sigma_2/E_2 & \varepsilon_2 &= \sigma_2/E_2 \\ \varepsilon_3 &= -\nu_{23}\sigma_2/E_2 & \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = \frac{\eta_{2,23}}{E_2}\sigma_2 \\ \varepsilon_5 &= \gamma_{13} = \frac{\eta_{2,13}}{E_2}\sigma_2 & \varepsilon_6 &= \gamma_{12} = \frac{\eta_{2,12}}{E_2}\sigma_2\end{aligned}$ Al relacionarlas: $\begin{aligned}S_{12} &= -\nu_{21}/E_2 & S_{22} &= 1/E_2 & S_{23} &= -\nu_{23}/E_2 \\ S_{24} &= \eta_{2,23}/E_2 & S_{25} &= \eta_{2,13}/E_2 & S_{26} &= \eta_{2,12}/E_2\end{aligned}$ Para el material ortotrópico: $\eta_{2,12} = \eta_{2,13} = \eta_{2,23} = 0$
Tensión uniaxial transversal fuera del plano	De la ley de Hooke con matriz de conformidad, bajo esta carga: $\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{13}\sigma_3 & \varepsilon_2 &= S_{23}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= S_{33}\sigma_3 & \varepsilon_4 &= S_{34}\sigma_3\end{aligned}$

	$\varepsilon_5 = S_{35}\sigma_3 \qquad \varepsilon_6 = S_{36}\sigma_3$ De las consideraciones ingenieriles: $\varepsilon_1 = -\nu_{31}\sigma_3/E_3 \qquad \varepsilon_2 = -\nu_{32}\sigma_3/E_3$ $\varepsilon_3 = \sigma_3/E_3 \qquad \varepsilon_4 = \gamma_{23} = \frac{\eta_{3,23}}{E_3}\sigma_3$ $\varepsilon_5 = \gamma_{13} = \frac{\eta_{3,13}}{E_3}\sigma_3 \qquad \varepsilon_6 = \gamma_{12} = \frac{\eta_{3,12}}{E_3}\sigma_3$ Al relacionarlas: $S_{13} = -\nu_{31}/E_3 \quad S_{23} = -\nu_{32}/E_3 \quad S_{33} = 1/E_3$ $S_{34} = \eta_{3,23}/E_3 \quad S_{35} = \eta_{3,13}/E_3 \quad S_{36} = \eta_{3,12}/E_3$ Para el material ortotrópico: $\eta_{3,12} = \eta_{3,13} = \eta_{3,23} = 0$
Cortante pura fuera del plano (plano 2-3) 	De la ley de Hooke con matriz de conformidad, bajo esta carga: $\varepsilon_1 = S_{14}\sigma_4 \qquad \varepsilon_2 = S_{24}\sigma_4$ $\varepsilon_3 = S_{34}\sigma_4 \qquad \varepsilon_4 = S_{44}\sigma_4$ $\varepsilon_5 = S_{45}\sigma_4 \qquad \varepsilon_6 = S_{46}\sigma_4$ De las consideraciones ingenieriles: $\varepsilon_1 = \eta_{23,1}\sigma_4/G_{23} \qquad \varepsilon_2 = \eta_{23,2}\sigma_4/G_{23}$ $\varepsilon_3 = \eta_{23,3}\sigma_4/G_{23} \qquad \varepsilon_4 = \gamma_{23} = \sigma_4/G_{23}$ $\varepsilon_5 = \gamma_{13} = \frac{\mu_{23,13}}{G_{23}}\sigma_4 \qquad \varepsilon_6 = \gamma_{12} = \frac{\mu_{23,12}}{G_{23}}\sigma_4$ Al relacionarlas: $S_{14} = \eta_{23,1}/G_{23} \quad S_{24} = \eta_{23,2}/G_{23} \quad S_{34} = \eta_{23,3}/G_{23}$ $S_{44} = 1/G_{23} \quad S_{45} = \mu_{23,13}/G_{23} \quad S_{46} = \mu_{23,12}/G_{23}$ Para el material ortotrópico: $\eta_{23,1} = \eta_{23,2} = \eta_{23,3} = \mu_{23,12} = \mu_{23,13} = 0$
Cortante pura fuera del plano (plano 1-3) 	De la ley de Hooke con matriz de conformidad, bajo esta carga: $\varepsilon_1 = S_{15}\sigma_5 \qquad \varepsilon_2 = S_{25}\sigma_5$ $\varepsilon_3 = S_{35}\sigma_5 \qquad \varepsilon_4 = S_{45}\sigma_5$ $\varepsilon_5 = S_{55}\sigma_5 \qquad \varepsilon_6 = S_{56}\sigma_5$ De las consideraciones ingenieriles: $\varepsilon_1 = \eta_{13,1}\sigma_5/G_{13} \qquad \varepsilon_2 = \eta_{13,2}\sigma_5/G_{13}$ $\varepsilon_3 = \eta_{13,3}\sigma_5/G_{13} \qquad \varepsilon_4 = \gamma_{23} = \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}}\sigma_5$ $\varepsilon_5 = \gamma_{13} = \sigma_5/G_{13} \qquad \varepsilon_6 = \gamma_{12} = \frac{\mu_{13,12}}{G_{13}}\sigma_5$

	Al relacionarlas: $S_{15} = \eta_{13,1}/G_{13} \quad S_{25} = \eta_{13,2}/G_{13} \quad S_{35} = \eta_{13,3}/G_{13}$ $S_{45} = \mu_{13,23}/G_{13} \quad S_{55} = 1/G_{13} \quad S_{56} = \mu_{13,12}/G_{13}$ Para el material ortotrópico: $\eta_{13,1} = \eta_{13,2} = \eta_{13,3} = \mu_{13,12} = \mu_{13,23} = 0$				
Cortante pura en el plano (plano 1-2) 	De la ley de Hooke con matriz de conformidad, bajo esta carga: $\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{16}\sigma_6 & \varepsilon_2 &= S_{26}\sigma_6 \\ \varepsilon_3 &= S_{36}\sigma_6 & \varepsilon_4 &= S_{46}\sigma_6 \\ \varepsilon_5 &= S_{56}\sigma_6 & \varepsilon_6 &= S_{66}\sigma_6 \end{aligned}$ De las consideraciones ingenieriles: $\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \eta_{12,1}\sigma_6/G_{12} & \varepsilon_2 &= \eta_{12,2}\sigma_6/G_{12} \\ \varepsilon_3 &= \eta_{12,3}\sigma_6/G_{12} & \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}}\sigma_6 \\ \varepsilon_5 &= \gamma_{13} = \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}}\sigma_6 & \varepsilon_6 &= \gamma_{12} = \sigma_6/G_{12} \end{aligned}$ Al relacionarlas: $S_{16} = \eta_{12,1}/G_{12} \quad S_{26} = \eta_{12,2}/G_{12} \quad S_{36} = \eta_{12,3}/G_{12}$ $S_{46} = \mu_{12,23}/G_{12} \quad S_{56} = \mu_{12,13}/G_{12} \quad S_{66} = 1/G_{12}$ Para el material ortotrópico: $\eta_{12,1} = \eta_{12,2} = \eta_{12,3} = \mu_{12,13} = \mu_{12,23} = 0$				
CONSTANTES MATEMÁTICAS CON CONSTANTES INGENIERILES					
CONSTANTES DE CONFORMIDAD MATERIAL ANISOTRÓPICO					
$S_{11} = 1/E_1$	$S_{12} = -\nu_{21}/E_2$	$S_{13} = -\nu_{31}/E_3$	$S_{14} = \eta_{23,1}/G_{23}$	$S_{15} = \eta_{13,1}/G_{13}$	$S_{16} = \eta_{12,1}/G_{12}$
$S_{12} = -\nu_{12}/E_1$	$S_{22} = 1/E_2$	$S_{23} = -\nu_{32}/E_3$	$S_{24} = \eta_{23,2}/G_{23}$	$S_{25} = \eta_{13,2}/G_{13}$	$S_{26} = \eta_{12,2}/G_{12}$
$S_{13} = -\nu_{13}/E_1$	$S_{23} = -\nu_{23}/E_2$	$S_{33} = 1/E_3$	$S_{34} = \eta_{23,3}/G_{23}$	$S_{35} = \eta_{13,3}/G_{13}$	$S_{36} = \eta_{12,3}/G_{12}$
$S_{14} = \eta_{1,23}/E_1$	$S_{24} = \eta_{2,23}/E_2$	$S_{34} = \eta_{3,23}/E_3$	$S_{44} = 1/G_{23}$	$S_{45} = \mu_{13,23}/G_{13}$	$S_{46} = \mu_{12,23}/G_{12}$
$S_{15} = \eta_{1,13}/E_1$	$S_{25} = \eta_{2,13}/E_2$	$S_{35} = \eta_{3,13}/E_3$	$S_{45} = \mu_{23,13}/G_{23}$	$S_{55} = 1/G_{13}$	$S_{56} = \mu_{12,13}/G_{12}$
$S_{16} = \eta_{1,12}/E_1$	$S_{26} = \eta_{2,12}/E_2$	$S_{36} = \eta_{3,12}/E_3$	$S_{46} = \mu_{23,12}/G_{23}$	$S_{56} = \mu_{13,12}/G_{13}$	$S_{66} = 1/G_{12}$
CONSTANTES DE CONFORMIDAD MATERIAL ORTOTRÓPICO					

$S_{11} = 1/E_1$	$S_{12} = -\nu_{21}/E_2$	$S_{13} = -\nu_{31}/E_3$	0	0	0
$S_{12} = -\nu_{12}/E_1$	$S_{22} = 1/E_2$	$S_{23} = -\nu_{32}/E_3$	0	0	0
$S_{13} = -\nu_{13}/E_1$	$S_{23} = -\nu_{23}/E_2$	$S_{33} = 1/E_3$	0	0	0
0	0	0	$S_{44} = 1/G_{23}$	0	0
0	0	0	0	$S_{55} = 1/G_{13}$	0
0	0	0	0	0	$S_{66} = 1/G_{12}$

CONSTANTES DE RIGIDEZ CON LAS DE CONFORMIDAD

$C_{11} = \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S}$	$C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S}$	$C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S}$
$C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}$	$C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}$	$C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S}$
$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}$	$C_{55} = \frac{1}{S_{55}}$	$C_{66} = \frac{1}{S_{66}}$
Donde, $S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} =$ $= S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$		

CONSTANTES DE RIGIDEZ

$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}$	$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta}$	$C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta}$	0	0	0
$C_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1E_3\Delta}$	$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}$	$C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}$	0	0	0
$C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}$	$C_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}$	$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}$	0	0	0
0	0	0	$C_{44} = G_{23}$	0	0
0	0	0	0	$C_{55} = G_{13}$	0
0	0	0	0	0	$C_{66} = G_{12}$
Donde, $\Delta = \frac{1}{E_1E_2E_3} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_{21} & -\nu_{31} \\ -\nu_{12} & 1 & -\nu_{32} \\ -\nu_{13} & -\nu_{23} & 1 \end{vmatrix} =$ $= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$					

Fuente: (Daniel & I. Ishai, 1994)