

**VALOR EN RIESGO PARA UN PORTAFOLIO DE ACTIVOS A TRAVÉS DEL METODO
DE CÓPULAS**

MAURICIO GUZMÁN ARANGO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y ECONÓMICAS
ECONOMÍA
SANTIAGO DE CALI
2013**

**VALOR EN RIESGO PARA UN PORTAFOLIO DE ACTIVOS A TRAVÉS DEL METODO DE
CÓPULAS**

MAURICIO GUZMÁN ARANGO

Código: 0925252

**Trabajo de Grado Presentado como
Requisito Parcial para Optar al Título de
Economista**

Tutor:

Jorge Mario Uribe Gil

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y ECONÓMICAS
ECONOMÍA
SANTIAGO DE CALI
2013**

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	5
ESTADO DEL ARTE.....	8
MARCO TEÓRICO	16
METODOLOGÍA.....	18
DATOS.....	27
CONCLUSIONES	40
BIBLIOGRAFÍA.....	43

Resumen

En el presente documento se estima el valor en riesgo (VaR) de un portafolio de acciones conformado por la acción de Bancolombia y la acción de Ecopetrol. Se calcula el VaR a través de la metodología de cópulas la cual identifica la estructura de dependencia que poseen los activos que contiene el portafolio, además tiene como principio fundamental no seguir los supuestos de normalidad en los rendimientos dado que la evidencia empírica demuestra que los rendimientos de los precios de los activos financieros tienen una forma leptocúrtica. Los resultados en esta investigación muestran que las acciones se encuentran con un nivel bajo de dependencia y que el valor en riesgo encontrado utilizando cópulas es menor que el encontrado por medio de la simulación histórica.

Palabras Clave: Valor en Riesgo, cópulas, coeficiente de dependencia, distribuciones marginales.

Clasificación JEL: C51, C52, C53, G1, G11, G12, O16.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales retos de investigación para la economía, en el área financiera, consiste en alcanzar una mayor comprensión sobre el riesgo y su incidencia en las expectativas de inversión de los agentes económicos. Con lo anterior se encuentra la identificación de los riesgos que se originan cuando los agentes económicos deciden invertir sus recursos para la adquisición de algún activo, con el objetivo de obtener mayores rendimientos con el mínimo riesgo posible; sin embargo, dichas inversiones se pueden ver afectadas cuando se altera el funcionamiento de los mercados, lo que tendrá un efecto negativo en la valoración del activo (Torrero 2008). De esta manera, se explica como el riesgo se relaciona positivamente con los rendimientos, dado que ante un mayor retorno esperado mayor es el riesgo en el que se incurrirá.

Dado el entorno negativo de los riesgos que enfrentan los inversionistas, se distinguen diferentes tipos de riesgo, como lo son los riesgos de: mercado, crédito, liquidez, operativo, país, y por último, el sistémico, según la OCC Banking Circular (1993). El tipo de riesgo usado como referencia para el presente trabajo es el riesgo de mercado, el cual se define como la pérdida en el valor de los activos causada por algunos movimientos adversos en los factores que determinan su precio, dentro de estos factores de riesgo se encuentran las tasas de interés o el tipo de cambio.

Ahora, para observar el perfil de riesgo que puede adjudicarse a cada agente, se le puede clasificar como conservador, moderado o amante al riesgo. La diferencia que se puede observar entre cada uno de los tipos de perfiles anteriormente mencionados, está en la disposición de asumir posibles pérdidas en su capital. Un agente con perfil conservador, no tolerará pérdidas en su capital, mientras que un amante al riesgo tendrá toda la disposición a asumir pérdidas en su acervo de capital en cualquier etapa de la inversión.

Dado el crecimiento en las volatilidades del sector financiero, es necesario gestionar el riesgo de una manera eficiente. Una medida de riesgo que calificaría para hacerlo es el

Valor en Riesgo (Value at Risk) que por sus siglas en ingles se conoce como VaR, la cual cuantifica todos los riesgos relacionados con un portafolio de inversión, que se ha logrado convertir en una de las herramientas más importantes en la determinación de los requerimientos mínimos de capital. Esta medida resume todo el riesgo de mercado en los que puede incurrir una cartera de activos en una única cifra, dada una probabilidad específica.

La medición del riesgo VaR, puede ser calculada por diferentes métodos dependiendo del modelo elegido, de esta misma manera los modelos serán agrupados. Uno de los grupos lo conforman los modelos por simulación histórica y por simulación Montecarlo, el cual es frecuentemente utilizado por el sector bancario. En el segundo grupo, se encuentran los modelos paramétricos que utilizan correlaciones, basadas en el análisis de varianzas y covarianzas. En el tercer grupo, están los modelos de duración y convexidades. Por último, el cuarto grupo lo conforman los modelos de peor escenario o máximo valor en riesgo (Torres y Olarte, 2009).

Comúnmente, la distribución conjunta de los retornos financieros se modela suponiendo normalidad, lo que implica que se tomen supuestos como la simetría de la distribución de los retornos, colas livianas y una dependencia lineal que se puede observar por medio de la correlación entre los activos. Sin embargo, a través de la evidencia empírica (Giacomini, 2005) se ha podido demostrar que asumir normalidad en la distribución de los retornos no es del todo apropiado, ya que es necesaria la utilización de un método más flexible para ajustar las distribuciones marginales para que así se pueda obtener la distribución del portafolio.

Además el riesgo de un portafolio de inversión depende de las relaciones de dependencia que contengan los activos que conforman tal portafolio. Según Nelsen (1999) las cópulas muestran toda la información con respecto a la dependencia entre variables. Logrando

capturar las relaciones no lineales que puedan existir mientras que otras técnicas solo capturan las correlaciones lineales.

Ante la inestabilidad que se logra evidenciar en los mercados financieros, se toma el VaR como una herramienta para la medición del riesgo, donde su simplicidad al momento de aplicarlo es su mayor atractivo para la realización de las estimaciones, con las cuales se encuentra la cantidad de dinero que se puede perder a una determinada probabilidad. Por otra parte, se considera las cópulas como la mejor metodología para encontrar el VaR, dado que permite modelar la estructura de dependencia que tiene un conjunto de variables, con sus respectivos factores de riesgo asociados.

De esta manera, para obtener la cuantificación de las pérdidas del portafolio, se realizará un ejercicio exploratorio con el cual se pretende determinar el VaR por medio de cópulas de las dos acciones colombianas de mayor bursatilidad en el mercado accionario entre el 4 de febrero de 2002 y el 4 de diciembre de 2012. También se utilizan ciertas técnicas econométricas para eliminar problemas de heterocedasticidad en los retornos, para encontrar la distribución marginal que mejor se ajuste a los datos. Además, se exponen las relaciones de dependencia mediante cópulas. Por último, se calcula el VaR para un nivel de confianza de un 99%.

Este documento consta de cinco secciones, incluida esta introducción. En la segunda sección se realiza una revisión de literatura de trabajos tanto nacionales como internacionales que han abordado el tema del valor en riesgo y utilizan métodos de cópulas. En la tercera se presenta el marco teórico y la metodología. Luego en la cuarta se exponen la descripción de los datos y los resultados de las estimaciones realizadas. Por ultimo en la quinta sección se realizan las conclusiones obtenidas con la realización de este trabajo.

ESTADO DEL ARTE

LITERATURA INTERNACIONAL

Para situarnos en nuestro entorno de investigación, es necesario mencionar que Hoeffding (1948) fue el pionero de la idea de una función que caracterizara y evidenciara la estructura de dependencia entre varias variables aleatorias. Aunque fue Sklar (1959) quien verdaderamente estableció y logró definir las cópulas, como una función que obtiene una distribución multivariada como función de distribuciones marginales univariadas.

Schweizer (1991) definió que la primera persona que introdujo el término cópula fue Sklar, quien logra mostrar cómo la cópula era una función que tenía como fin conectar las distribuciones multivariadas con cada una de las distribuciones marginales.

Linsmeier y Pearson (1996) mostraron el peligro en el cual se incurre al momento de aplicar el VaR en periodos de tiempo que no sean típicos, por ejemplo cuando en determinado periodo de tiempo se presenta baja volatilidad en los rendimientos y en los precios del mercado. En una situación como la anterior se subestimaría el valor obtenido del valor en riesgo y viceversa.

Fisher (1997) mostró el interés de los estadísticos para el uso de las cópulas de dos maneras, la primera era el estudio de las mediciones de las relaciones de dependencia, y la segunda, fue el punto de partida para la construcción de las distribuciones bivariadas.

Klugman y Parsa (1999) en su investigación analizan un portafolio de seguros y encuentra la estimación de la distribución conjunta para cada uno de los montos correspondientes a los tipos de indemnización.

Li (1999) en su trabajo revisa el problema de la correlación en el incumplimiento de los modelos de riesgo de crédito y muestra que la teoría de la correlación de activos proporcionada por *CreditMetrics* en aquella época, es equivalente a utilizar la función de la cópula normal.

Embrechts, McNeil y Straumann (2002) en su trabajo estudiaron las limitaciones del coeficiente de correlación lineal como única medida de dependencia y evidenciaron la gran influencia que poseen los conceptos fundamentales de dependencia y correlación con el manejo del riesgo en el mercado. Concluyen que la correlación simplemente es una medida escalar que no identifica estructuras de dependencia, además que los riesgos perfectamente dependientes no tienen correlaciones iguales a 1 o -1. También muestran que la correlación no es invariante cuando se trabajan con retornos logarítmicos de variables financieras. Recomiendan el uso de cópulas para intentar extraer la estructura de dependencia de la distribución conjunta, como también para sacar la dependencia y el comportamiento marginal.

Bouyé, Durrleman, Nikeghbali, Riboulet y Roncalli (2000) revisaron diferentes problemas financieros y mostraron cómo podrían ser resueltos mediante cópulas. Usaron cópulas para medir el riesgo operacional y estudiaron escenarios de estrés multidimensional. De esta manera concluyeron que la cópula es una herramienta muy efectiva para la gestión del riesgo, dado que cumple con su principal objetivo: modelar la dependencia entre los riesgos. Dejan en evidencia la necesidad de encontrar otras funciones de cópulas como lo son la *normal* y la *t-student*.

Trivedi y Zimmer (2005) muestran en su trabajo el conjunto de cópulas paramétricas, especificando su estimación e inferencia basadas en procedimientos estándar de máxima verosimilitud. Utilizan programas econométricos como *Stata*, *Limdep* y *SAS*. Logrando exponer una ventaja sustancial de cópulas sobre los enfoques de simulación recientemente propuestos basadas en la modelización conjunta.

Kole, Koedijk, y Verbeek (2005) presentan en su trabajo las pruebas de selección de una cópula para gestionar el riesgo de una cartera bien diversificada que consiste en acciones, bonos y bienes raíces. Realizan pruebas tradicionales para la hipótesis de distribución como la *Kolmogorov – Smirnov* y *Anderson – Darling*. Obtienen que la cópula *Gaussiana*, muestra la dependencia en el centro e independencia en las colas; la cópula *Gumbel*, centra principalmente en la dependencia en las colas. Dichas cópulas están claramente rechazadas. Mientras que la cópula *t-student* puede capturar la dependencia tanto a nivel central como en las colas. Concluyen que la *t-student* captura el comportamiento empírico de las colas con precisión, que la cópula *Gaussiana* subestima el riesgo mientras que la cópula *Gumbel* lo sobrestima.

Arnold (2006) analiza la estructura de dependencia entre diferentes tipos de cambio para el dólar, encontrando una dependencia entre las monedas europeas predominantemente elíptica, mientras que para monedas que geográficamente se encuentran aisladas parecen exhibir valores extremos de dependencia, así como la dependencia elíptica. Concluyen que los pocos resultados en el estudio, pueden ser ocasionados por no tener en cuenta las volatilidades a la hora de transformar los datos. La volatilidad de los datos financieros puede variar semanalmente debido a algún acontecimiento socio-económico y político que influya en los mercados de cambio.

Téllez y Velázquez (2009) toman como base para su investigación estimar el riesgo de mercado a través de VaR, usando conjuntamente la teoría de valores extremos y el enfoque de cópulas. Lo hacen para un portafolio conformado con el 50% de los recursos para S&P 500 y el otro 50% en el IPC de México. Primero realizan un ARMA-GARCH para quitar los problemas de heterocedasticidad que tengan los rendimientos; luego estandarizan los residuales y los ajustan a la Distribución Generalizada de Pareto, posteriormente estiman la cópula que mejor modela la estructura de dependencia de los valores extremos y por último, estiman el VaR.

Cherubini y Luciano (2000) utilizaron en su trabajo las funciones cópula para evaluar las probabilidades en las colas y el *trade-off* con el riesgo de mercado a un nivel de confianza

dado, dejando a un lado los supuestos de normalidad en los retornos. Presentan una aplicación de dos índices del mercado de valores para cada mercado en el que se quiere recuperar la distribución de probabilidad marginal. Este trabajo lo enfocan para el análisis de trade-off en el comportamiento de FTSE100 y S&P100. El análisis empírico se hizo utilizando las marginales empíricas y Gaussianas, demostrando que existe un trade-off entre mayores colas pesadas pues mayores van a ser los percentiles de las distribuciones marginales.

Romero (2002) mostró el uso de una función cópula para capturar eventos extremos, probando que el uso de cópulas elípticas es fácil de aplicar para los modelos que usarán simulaciones Montecarlo. Para esto utilizó 10 acciones del mercado bursátil italiano para probar que el asumir una distribución normal univariada de los retornos logarítmicos de las acciones, provocaría una subestimación del VaR y de las pérdidas esperadas para cualquier portafolio. Mientras que si se utiliza una cópula *t-student* se obtendrán resultados más adecuados y acordes para una medición del riesgo.

Giacomini (2005) en su estudio estimó el valor en riesgo de un portafolio bivariado, examinándolo por medio de tres cópulas diferentes, la *Clayton*, la *Gumbel* y la *Gaussiana*, encontrando una diferencia entre las estimaciones por cada una de las cópulas, es decir, por medio de las cópulas *Clayton* y *Gaussian* se estaba sobrestimando el VaR mientras que por *Gumbel* se aproximaban a valores más deseables para la investigación y tenía una representación más acorde con respecto a la relación de dependencia entre las variables. Concluye que para entender bien las cópulas hay que tener presente la obtención de resultados realistas y útiles para elegir correctamente qué función muestra la estructura de dependencia en el portafolio de inversión. Lo anterior es logrado con una correcta aplicación de cópulas y comparación de ellas para saber si el VaR es sobrestimado o subestimado.

Micocci y Masala (2004) buscaron modelar la estructura de dependencia entre los retornos de tres activos, dejando a un lado los supuestos de normalidad en la distribución de las marginales. Para esto hicieron uso de cópulas *t-student* y *arquimediana* y modelaron dicha estructura de dependencia. Obteniendo como resultado que los retornos de los activos tienen colas pesadas lo que comprueba que el uso del supuesto de normalidad está errado, mientras que la cópula *t-student* tiene un mejor ajuste a los cuantiles altos de la distribución.

Rank (2002) comparó los resultados de un método tradicional y uno alternativo como es el caso de las cópulas. Para su investigación utilizó las series históricas de diferentes tipos de cambio, calculando el VaR a través de simulación Montecarlo y cópulas *Frank* y *Gumbel* – *Hougaard*. Encontró que la *Gumbel* – *Hougaard* describe adecuadamente las dependencias positivas. Mientras que por medio de la cópula *Frank* se obtienen resultados más acordes para el VaR, por lo que es de mejor aceptación para este trabajo. Concluye que mientras las cópulas sean usadas con la misma distribución de sus marginales como las de una *t-student*, los resultados serán mejores que los que se obtienen con métodos tradicionales como la simulación Montecarlo y el método de varianza-covarianza.

Rosenberg y Schuermann (2004) utilizan en su trabajo cópulas para la construcción de la distribución de riesgo para un banco, de manera que se combinan los diferentes tipos de riesgo que existen. Logran una distribución conjunta que contiene todos los riesgos en los que puede incurrir el banco. Concluyen que esta medida no es del todo efectiva, ya que es mejor combinar riesgos que tengan similitudes como el riesgo de mercado y el de crédito, para obtener resultados más realistas y concluyentes, debido a que si se comparan todos los riesgos, deben ser tratados con procesos diferentes y puede presentar problemas durante su cálculo.

Estos trabajos aportan un gran avance en las técnicas de medición de riesgo, dado que al trabajar con cópulas, muchos de los problemas que presentaban las metodologías para la medición, como los supuestos de normalidad, subestimación y sobrestimación del riesgo, serán solucionados al utilizar esta técnica. También se tendrá en cuenta la autocorrelación, la heterocedasticidad, dependencia lineal y no lineal, además de las colas pesadas que presentan las series financieras.

LITERATURA NACIONAL

Arango, Arias, Gómez, Salamanca y Vásquez (2005) proponen una metodología para el cálculo del VaR en el sector bancario Colombiano y es básicamente una adaptación a la metodología creada por *RiskMetrics*, calculando el valor en riesgo condicionalmente suponiendo la utilización de un proceso de media móvil con ponderación exponencial (EWMA) para los segundos momentos de las funciones de pérdida. Por otra parte, Melo y Becerra (2006) aplican diversas metodologías para la medición del riesgo por medio del VaR y expected shortfall (ES). La investigación es dividida en dos partes; la primera cuenta con metodologías como la simulación histórica y la teoría del valor extremo (EVT). La segunda parte cuenta con metodologías ARMA-GARCH y ARMA-GARCH-EVT, cabe aclarar que esta última metodología EVT modela la dependencia y no tiene supuestos de normalidad. Las anteriores metodologías son aplicadas para las variaciones diarias de la tasa interbancaria; obteniendo que los mejores resultados los muestran las metodologías que aplican el ARMA-GARCH y ARMA-GARCH-EVT. Mientras que las que muestran unos resultados más deficientes son la simulación histórica y la teoría del valor extremo.

Becerra y Melo (2008) realizaron un estudio donde mostraron la definición, las implicaciones y las metodologías para la medición del riesgo por medio de cópulas. Analizan un portafolio compuesto por activos del mercado accionario colombiano. Encuentran que al momento de evaluar el VaR a través de cópulas y compararlo con metodologías tradicionales, obtienen dos conclusiones. La primera, es que los métodos

que no cuentan como constantes los momentos condicionales de los activos, obtienen resultados más concluyentes. Y la segunda, que los modelos que eliminan los supuestos de normalidad en la distribución de las marginales, cuantifican de una mejor manera el riesgo del portafolio. En este sentido, las cópulas ofrecen una estructura analítica que es más eficiente al momento de medir el riesgo.

Torres y Olarte (2009) utilizaron cópulas *Frank*, *Gumbel*, *Clayton* y *t-student* en tres diferentes distribuciones marginales: la empírica, la uniforme y la t-student, para medir el riesgo de un portafolio de activos conformado por dos acciones colombianas. Observaron que la cópula *Clayton* tuvo resultados similares a los de la simulación histórica, lo que indica que el cálculo del VaR es mejor a través de las cópulas *Frank* y *Gumbel*. Destacan la utilización de la cópula t para los activos financieros por su clara representación en las colas pesadas. Además explican el uso de distribuciones marginales uniformes por la facilidad que se tiene para poner punto de comparación y adicionalmente, se toma como una medida de incertidumbre, ya que se asigna la misma probabilidad de ocurrencia a todos los posibles eventos.

Uribe (2011) utilizó la metodología de cópulas para la determinación de contagio financiero entre el mercado colombiano y el estadounidense durante el periodo de crisis subprime. Obtuvo como resultado, que no hay mayores indicios de contagio financiero durante las épocas de eventos extremos. Aclara que los resultados obtenidos no significan que no exista una dependencia entre los mercados, la explicación está en que esta correlación no se hizo más fuerte de lo que se esperaba ante eventos de esta magnitud.

Uribe y Ulloa (2012) realizaron para diferentes países de Latinoamérica la medición del riesgo durante eventos extremos, en el cual exponen diferentes teorías para demostrar que la teoría del VaR no resulta adecuada en los momentos en que se está en presencia de un evento extremo. Para cumplir con el objetivo se necesita realizar el estudio mediante metodologías que satisfagan los axiomas de coherencia. Por esta razón realizan

las medidas del riesgo por otro tipo de estimación que brindan una mejor respuesta ante choques extremos. Por último, dejan claro que para un mercado accionario como el colombiano, no es necesario aplicar otras metodologías, ya que al ser este un mercado sin tanta interacción con el riesgo, los valores aportados por el VaR son cercanos a la realidad.

MARCO TEÓRICO

La inversión es una actividad económica en la cual los agentes deberán elegir en condiciones de riesgo e incertidumbre. La condición de riesgo implica que hay un pleno conocimiento respecto al valor de los rendimientos cuando se presenta una dispersión de flujos inesperados debidos a movimientos en las variables a estudiar, esto recibirá el nombre de utilidad esperada. La condición de incertidumbre implica que no se conocen las probabilidades de los sucesos, como consecuencia de la degeneración de las anteriores. Von Neumann y Morgenstern (1944) demuestran que el comportamiento de los agentes económicos en situaciones de incertidumbre será con el que logren maximizar el valor esperado de su utilidad. Para lograr este objetivo, el agente tiene que medir los diferentes niveles de riesgo en los que hay que incurrir para maximizar su utilidad.

De esta manera se logra que el valor en riesgo sea definido por JP Morgan (1993) como la máxima pérdida posible de un portafolio para un nivel de confianza α y un periodo t de tiempo. También se puede ver como el α -ésimo cuantil de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, en otras palabras el VaR, es el más adecuado entre todos los peores posibles casos que contiene la distribución.

Según Aragonés y Blanco (2000) es necesario que se tenga un mayor control sobre los riesgos, el cual es obtenido por medio de la información brindada por las instituciones encargadas de estar vigilando las decisiones que se toman en un mercado financiero. Según Peña (2002) las primeras recomendaciones tuvieron lugar en el año de 1993, cuando el grupo de estudio de los derivados globales (Global Derivates Study Group) recomendó a todos aquellos agentes que tuvieran contacto con el sector financiero que era necesario tener medidas consistentes para calcular diariamente el riesgo de sus derivados.

Actualmente, se encuentra que existen diferentes factores de riesgo que interactúan con los activos financieros, lo cual ha generado un desarrollo en los mecanismos para

identificar dichas interacciones. Es por esta razón que se debe manejar las dependencias identificadas para lograr una mejor aproximación a la medición del riesgo. De esta manera Embrechts, McNeil y Straumann (2002) demuestran que el modelar esta medida de dependencia por medio de las cópulas, es la técnica más satisfactoria al momento de utilizarla para medir el riesgo.

Para Nadiezhda (2010) la efectividad de la medición del riesgo por medio de cópulas está en que por medio de la utilización de éstas se toman los comportamientos asimétricos que puedan existir en el mercado, además que tendrá la opción de suponer otro tipo de distribuciones diferentes a la normal para aplicarle a los activos, ya que de esta manera se logra obtener resultados más acordes y cercanos a la realidad, lo que permitiría contrastar los diferentes resultados obtenidos y evitar problemas de sesgo al momento de emitir resultados como causa de sobrestimaciones y/o subestimaciones del riesgo.

METODOLOGÍA

La metodología de la investigación se basa en las técnicas anteriormente expuestas en la revisión de literatura, teniendo una focalización en los estudios que hacen uso de las copulas para medir el riesgo de mercado.

Primero se deben transformar los precios diarios de las acciones en rendimientos logarítmicos de la forma:

$$x = \ln \frac{P_1}{P_0} \quad [1]$$

Donde P_1 es el precio actual de la acción y P_0 es el precio anterior de esta.

De esta manera, para arreglar todos los problemas de heterocedasticidad que tengan las series se deberá realizar una filtración de la media y la varianza por medio de un modelo ARMA-GARCH. Donde la ecuación de la media estaría representada por el proceso AR (p) de la forma

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t \quad [2]$$

Y el proceso MA (q) de la forma:

$$Y_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad [3]$$

$$Z_t \approx RB(0, \sigma^2)$$

Para así obtener un proceso ARMA(p,q):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad [4]$$

Mientras que el proceso de la varianza está representado de la siguiente manera:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i}^2 \quad [5]$$

$$p \geq 0, q > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0 \text{ donde } \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$$

$$\overline{\Phi_{t-1}}$$

Después de este proceso se obtienen los residuales, con los cuales se trabajaran. Es necesario estandarizar dichos residuales, para lo cual se dividen por la desviación estándar del proceso ARMA-GARCH.

A partir de los residuales estandarizados, es necesario determinar la distribución marginal por la cual serán evaluados los datos; lo anterior es para observar el comportamiento de cada activo riesgoso. Para esto se realizará un ajuste por distribuciones que logran describir las series. Se destaca que la distribución que mejor modela el comportamiento de activos financieros es la distribución *t-student* (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997), ya que da peso a los eventos que ocurren en el centro sin dejar fuera los eventos que suceden en las colas de la distribución. Por medio del estadístico *Kolmogorov – Smirnov* se verifica si ésta es la distribución que mejor ajuste presenta a las marginales de los retornos.

Los parámetros de las distribuciones marginales serán calculados a través del método de pseudo máxima verosimilitud, para que después estos sean utilizados en la determinación de la estructura de dependencia para las cópulas.

Una vez estimados dichos parámetros se genera una pseudo muestra aleatoria la cual obedece al mismo número de datos con que cuenta la serie original. Dicha pseudo muestra se debe ajustar de manera adecuada a las series, y para comprobar la veracidad de esta, se usa nuevamente la prueba *Kolmogorov – Smirnov* para probar si se distribuye de manera uniforme entre cero y uno. La pseudo muestra se definirá de la siguiente manera:

$$F_i(Z_i) = u_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad [6]$$

Después de generado dicho vector de pseudo muestras, se procede a calcular y escoger la cópula que mejor se ajusta a las series financieras.

Antes de entrar en el tema de las cópulas, es necesario remitirse al teorema de Sklar (1959), el cual plantea que cada una de las funciones de distribución multivariada contiene cópulas y toda cópula puede ser usada junto a sus distribuciones marginales univariadas para construir distribuciones marginales multivariadas (McNeil *et al* 2005). Es decir, si F es la función de distribución conjunta con marginales $F_1, \dots, F_n$ existirá una cópula para todo $z_i \in \mathbb{R} = [-\infty, \infty]$

$$F(r_1, \dots, r_n) = C(F_1(r_1), \dots, F_n(r_n), \theta) \quad [7]$$

Adecuadamente se define una cópula como una función que captura toda la información de la distribución conjunta de dos variables que no es considerada por sus distribuciones marginales (Cardona, 2010), en otras palabras, captura toda la información referente a la dependencia de la distribución conjunta. Su uso se presenta cuando se requiere la función de distribución conjunta y no son suficientes los dos primeros momentos. También es frecuente su uso cuando la correlación lineal se queda corta en términos de información.

$$C: [0,1]^d \rightarrow [0,1] \quad [8]$$

Dicha expresión cumple con las siguientes propiedades para cada $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in [0,1]^d$ $j \in \{1, \dots, n\}$

1. Si $u_j = 0$ entonces $C(u_1, \dots, u_n) = 0$ para cada $j = 1, \dots, n$
2. $C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j$
3. Para cada $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in [0,1]^d$, $v_j \leq u_j$, $V_c(u, v) \geq 0$

Donde $V_c(u, v)$ esta dada por $\sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(g_{li_1}, \dots, g_{ni_n})$ y $g_{j1} = v_j$ y $g_{j2} = u_j$

Dadas las anteriores propiedades se afirma que las cópulas son funciones uniformes multivariadas, crecientes y además no negativas. Siguiendo el teorema de Sklar se tiene que a partir de las funciones marginales $F_1, \dots, F_n$ donde $u_i = F_i(u_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ la cópula se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(r_1, r_2, \dots, r_n) &= P(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2, \dots, R_n \leq r_d) \\ &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_d) \quad [9] \\ F(r_1, r_2, \dots, r_n) &= C(u_1, u_2, \dots, u_d, \theta) \end{aligned}$$

Donde $(U_1, U_2, \dots, U_3)$ son variables aleatorias distribuidas uniformes.

Si las funciones marginales F_i son continuas entonces la cópula que estará asociada a la función de distribución será única:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_d)\} \quad [10]$$

Para una cópula continua su función de densidad está definida por la siguiente ecuación:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1, \dots, u_d} \quad [11]$$

Para las variables aleatorias independientes $X_1, \dots, X_n$ la cópula de X es el producto que está definido por:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F_x(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^n F_{x_j}(x_j) \quad [12]$$

La ecuación (11) muestra como el producto de la cópula que es el mismo para cualquier distribución marginal y determina la estructura de dependencia entre las variables univariadas. Según Giacomini (2005) hay diferentes formas de cópulas entre las cuales se encuentra:

Cóputas Elípticas

Dichas cóputas son utilizadas en estudios financieros ya que garantizan el principio de diversificación de los portafolios. Las cóputas más populares que tiene esta familia son la *Gaussiana* y la *t- student*.

La cóputa *Gaussiana* muestra la estructura de dependencia de una distribución normal multivariada. La combinación entre distribuciones marginales normales más una cóputa *Gaussiana* generara como resultado distribuciones normales multivariadas. La expresión para la cóputa *gaussiana* es la siguiente:

$$C^{G\alpha}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{2(1-\theta^2)}\right) dx dy \quad [13]$$

Donde x y y se distribuyen de manera normal con el coeficiente de correlación de Pearson $\theta \in [-1, 1]$ y $\phi^{-1}()$ es la función inversa de la distribución normal estándar.

Mientras que la cóputa *t-student* estará definida por:

$$C^{G\alpha}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(1 + \frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{2(1-\theta^2)}\right)^{\frac{v+2}{2}} dx dy \quad [14]$$

Donde x y y se distribuyen conjuntamente *t-student* con el coeficiente de correlación de Pearson $\theta \in [-1, 1]$ y $t_v^{-1}()$ es la función inversa de la distribución *t-student* con v grados de libertad.

Cabe mencionar que ante valores elevados de v la probabilidad de ocurrencia en las colas de la distribución disminuirá. De la misma manera cuando $v \rightarrow \infty$ la cóputa *t* convergerá en una *Gaussiana* (Cherubini 2004). Una de las características especiales de esta cóputa,

es la captura de dependencia tanto en el centro como en las colas de la distribución, mientras que la *Gaussiana* solamente toma la dependencia en el centro.

Cópula Frank

Esta cópula implica independencia asintótica de las colas de la distribución, es simétrica y asigna probabilidad cero a eventos que están dentro de las colas. Es considerada de la familia de las arquimedianas y se corre el riesgo de que no sea la cópula apropiada en diferentes campos, como lo es el campo de los seguros dado que tiene el error de considerar la misma dependencia de eventos grandes o pequeños. La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por la siguiente expresión:

$$C_{Frank}(u, v) = \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta_u} - 1)(e^{-\theta_v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right] \forall \theta \in]-\infty, \infty[\setminus \{0\} \right\} \quad [15]$$

Cópula Clayton

Esta cópula es efectiva para mostrar la dependencia negativa, lo cual no significa que se les asignara más peso a eventos al lado izquierdo de la función son frecuentemente usadas en la teoría de valor extremo de varias variables además de presentar asimetría. Tiene la forma:

$$C_{Clayton}(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad [16]$$

Este tipo de cópulas es llamada *Cook – Johnson*, siendo muy significativa e importante cuando se está estudiando temas de valor extremo multivariante, dado que es una cópula *asimétrica*.

Se debe tener en cuenta qué cópula(s) se va(n) a seleccionar, ya que dependiendo de nuestro objetivo de estudio variarán los resultados. Esto dependerá del tipo de dependencia que posean los datos o de la focalización del estudio. En definitiva, se observa que para estudiar la dependencia en el centro y en las colas de una distribución pueden ser analizadas por separado o de manera grupal, ya que por medio de cópulas se puede manejar y generalizar la dependencia entre las variables.

Después de estimar las cópulas para las pseudo muestras obtenidas, se realizan pruebas estadísticas para determinar cuál de todas tiene un mejor ajuste a los datos; para esto se aplicarán criterios conocidos como el de Akaike (AIC), el Bayesiano (BIC) y el log de verosimilitud, corregidos por Joe (1997).

Luego para calcular el VaR se debe simular un vector de datos con la cópula que anteriormente se escogió como la que mejor se ajustaba a los datos. Dado que el valor en riesgo tiene que ser generado a través de rendimientos de las acciones, se debe hacer un proceso de desestandarización que consiste en que cada valor de la simulación obtenida anteriormente deberá ser evaluado por la distribución inversa *t-student*, para que de esta forma se tenga un valor diferente a una distribución uniforme. Después de este paso, se debe multiplicar los valores encontrados por la desviación estándar del modelo GARCH que ha proyectado para el periodo $t+1$, esto se hace para evaluar dicho rendimiento al día siguiente de la última observación, luego se suma el valor de la media que ha sido pronosticada por el modelo ARMA para el periodo $t+1$.

Finalmente, se ponderarán los rendimientos simulados después de este proceso inverso, para este trabajo se supone que cada acción tiene la misma ponderación (50/50). Para que de esta manera, se proceda a realizar las estimaciones del VaR a un nivel de confianza de 99% y 95%. Antes de terminar se definirá formalmente el concepto de valor en riesgo VaR.

De esta manera se denomina a $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in S_n$ como un portafolio con posiciones en n activos financieros, donde w_i es el peso de cada activo i en el portafolio y $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{n,t})^T$ un vector aleatorio no negativo de los precios de los activos en el tiempo t , donde $S_{i,t}$ es el precio de cada activo i del portafolio en el tiempo t . El valor del portafolio w está dado por:

$$V_t = \sum_{j=1}^n w_j S_{j,t} \quad [17]$$

La variable aleatoria $L_{t+\tau} = (V_{t+\tau} - V_t)$ es la función de pérdidas y ganancias, la cual expresa el cambio en el valor del portafolio entre los τ periodos, donde τ es el número de periodos proyectados de la variable aleatoria. Dado V_t y $V_{t+\tau}$ la función $L_{t+\tau}$ está dada por:

$$L_{t+\tau} = (V_{t+\tau} - V_t) \quad [18]$$

$$L_{t+\tau} = \sum_{j=1}^n w_j S_{j,t+\tau} - \sum_{j=1}^n w_j S_{j,t} \quad [19]$$

$$L_{t+\tau} = \sum_{j=1}^n w_j (S_{j,t+\tau} - S_{j,t}) \quad [20]$$

Considerando los retornos logarítmicos como $X_{t+\tau} = \ln S_{t+\tau} - \ln S_t$ y haciendo $\tau = 1$ se tiene que $L_{t+1} = \sum_{j=1}^n w_j S_{j,t} (e^{X_{j,t+1}} - 1)$, como L_t es una variable aleatoria continua se sabe que $F_L(x) = P(L \leq x)$. De esta manera, el valor en riesgo a un nivel de significancia α para el portafolio w está definido como el α -cuantil para $F_L: VaR(\alpha) = F_L^{-1}(\alpha)$. La función de distribución de pérdidas dependerá del proceso aleatorio asociado a los activos riesgosos que influyen en las pérdidas y ganancias del portafolio.

Los modelos analíticos de formas paramétricas, son los modelos que calculan el VaR partiendo de un supuesto para la función de pérdidas y ganancias, dicho supuesto es la suposición de distribuciones *normales* o *t-student*, donde la distribución de la función de pérdidas y ganancias puede ser descrita por sus dos primeros momentos (media y

varianza) y a partir de estos se construye el VaR. En la *t-student* para determinados grados de libertad, se presenta una curtosis más alta que la de la distribución normal y por este motivo los eventos extremos tienen mayor probabilidad de ocurrencia. De esta manera el VaR podrá ser calculado así para el caso de una distribución t, la cual es la aplicada en este trabajo:

$$P[r_t \geq VaR] = 1 - \alpha \quad [21]$$

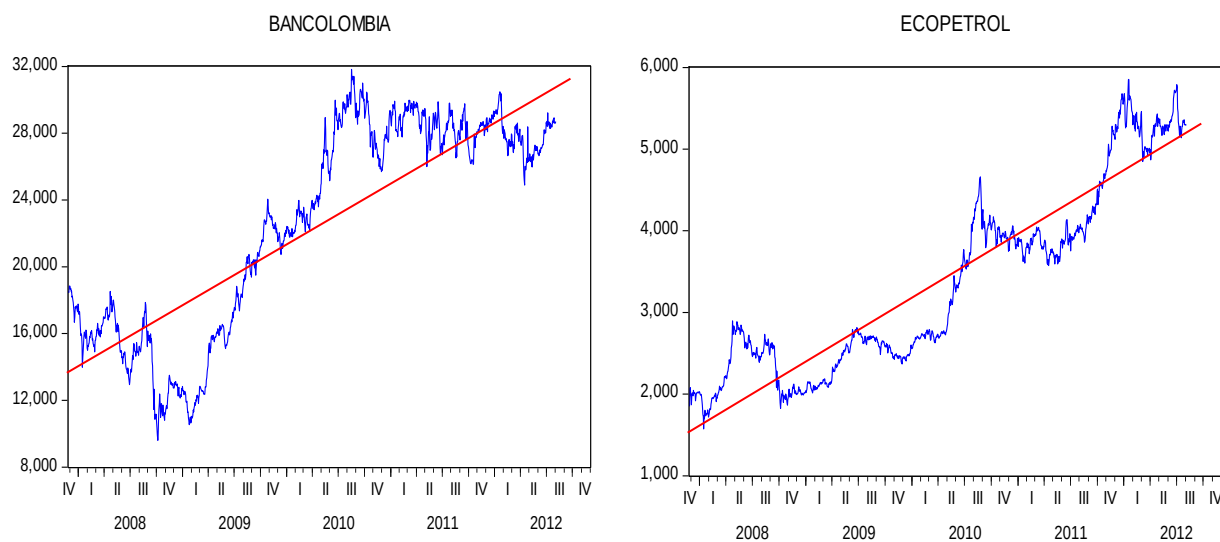
$$VaR = t_v^{-1}(\alpha) \equiv t_{v,\alpha} \quad [22]$$

Donde $t_v^{-1}(\alpha)$ es la función inversa de la distribución t y $t_{v,\alpha}$ es el α -ésimo cuantil de una distribución t con v grados de libertad.

DATOS

Los datos corresponden a los precios diarios de dos acciones colombianas Bancolombia y Ecopetrol para el periodo comprendido entre el 4 de febrero de 2002 y el 4 de diciembre de 2012. Se utilizó el informe de clasificación del tipo de bursatilidad de las acciones colombianas que generó la Superintendencia Financiera de Colombia en el mes de Febrero del año 2013 para elegir las acciones que presentaban una alta bursatilidad según el reporte para el mercado accionario. El portafolio consiste en la ponderación equitativa entre los dos activos, es decir, que cada uno tiene el 50% de este.

En la figura 1 se muestra el comportamiento de las series financieras en niveles durante el periodo de estudio. De las gráficas se puede analizar el comportamiento con tendencia al alza, dado que cuando muestran caídas se recuperan rápidamente. Mientras que en la tabla 1 se presentan las estadísticas descriptivas básicas, donde se puede observar que el precio medio para la serie de Bancolombia fue de \$22.472 y para la serie de Ecopetrol fue de \$3.343. El grado de asimetría es acusadamente positivo y la acumulación de casos en las colas fue mayor que la que podría corresponder a una distribución normal, además el signo que presenta dicho coeficiente es negativo para la serie de Bancolombia y positivo para la serie de Ecopetrol, lo que indica que en la serie de Bancolombia podrán presentarse sesgos en la cola inferior de la distribución mientras que para la serie de Ecopetrol los sesgos se presentarían en la cola superior de la distribución. Por otra parte, si se observa que el valor que se obtiene para la curtosis es mayor que cero, esto nos lleva a pensar que es de una distribución que tiene un valor esperado de cero. Se efectuaron pruebas de normalidad para las series financieras, para esto se realizó el estadístico *Jarque Bera* obteniendo como resultado que no hay pruebas que confirmen la existencia de normalidad.



Fuente: Elaboración propia

Figura 1. Series en Niveles de los Activos Financieros

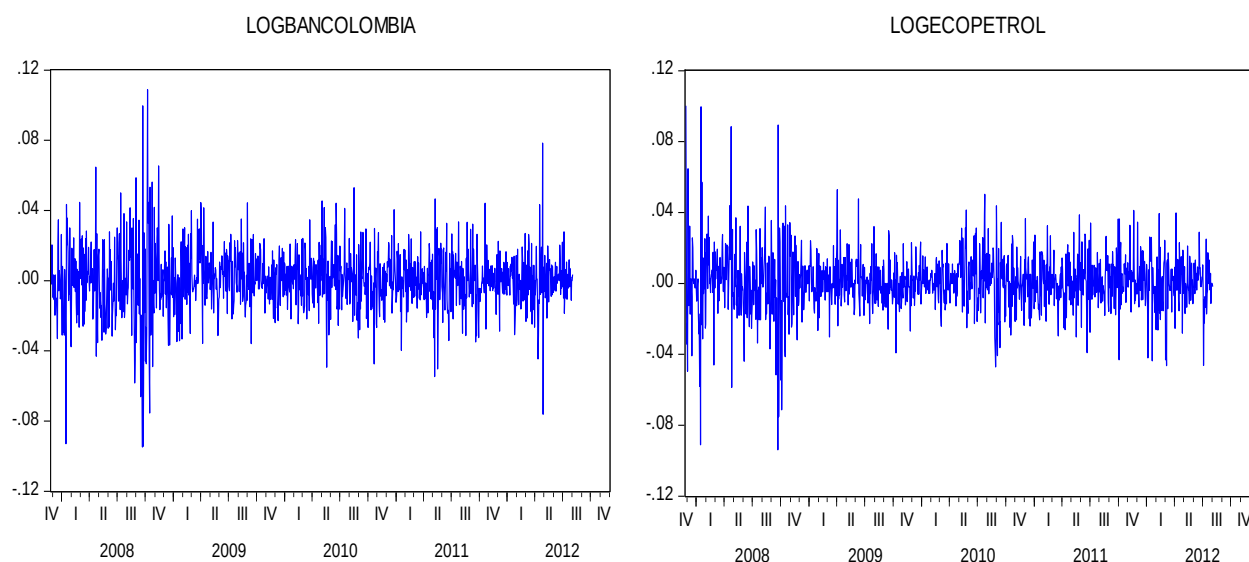
	<i>Bancolombia</i>	<i>Ecopetrol</i>
<i>Mean</i>	22.472	3343,078
<i>Median</i>	237000	2785
<i>Maximum</i>	31820	5850
<i>Minimum</i>	9600	1575
<i>Std. Dev.</i>	6295,598	1129
<i>Skewness</i>	-0,377	0,5246
<i>Kurtosis</i>	1,628	2,0532
<i>Jarque-Bera</i>	124,88	101,78
<i>Probability</i>	0	0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 1. Estadísticas Descriptivas de las Series Financieras

La figura 2 contiene los retornos logarítmicos de las series financieras, donde se puede evidenciar que hay una alta presencia de heterocedasticidad y que existe una volatilidad diaria alta. Esto también se logra observar en la tabla 2 donde claramente muestra que hay una mayor dispersión de los datos, ya que la desviación estándar en promedio es alta. Como consecuencia de lo anterior se posee una distribución leptocúrtica de colas gruesas, siendo reflejada por el valor de la kurtosis que supera el valor de 3, que es la principal

característica de una distribución normal. De esta misma manera se realiza la prueba de normalidad *Jarque Bera* en la cual se rechaza la hipótesis de normalidad al 5% de significancia. También se evidencian que los niveles de asimetría se alejan de 0, lo que nos lleva a concluir que los retornos no se distribuyen normales.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 2. Retornos Logarítmicos de las Series Financieras

	<i>BANCOLOMBIA</i>	<i>ECOPETROL</i>
<i>Mean</i>	0,000359	0,00086
<i>Median</i>	0	0
<i>Maximum</i>	0,108813	0,100212
<i>Minimum</i>	-0,094834	-0,093783
<i>Std. Dev.</i>	0,018339	0,01677
<i>Skewness</i>	-0,048171	0,097359
<i>Kurtosis</i>	7,1610	8,444
<i>Jarque-Bera</i>	882,02	1.510,68
<i>Probability</i>	0	0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Estadísticas Descriptivas de los Retornos Logarítmicos

En la tabla 3 se pueden verificar las salidas de los modelos ARMA-GARCH, donde según los resultados el modelo adecuado para modelar los retornos de la serie Bancolombia es un ARMA(2,2) GARCH(1,1), mientras que para los retornos de Ecopetrol el modelo adecuado resultó ser un ARMA(2,1) GARCH(3,1). Como bien se puede apreciar en ambas salidas los parámetros de ambos modelos son significativos al 5%. En la figura 3 se realiza el análisis de correlograma en niveles que hace referencia a la prueba de autocorrelación serial, probando que al no ser significativos los rezagos se rechaza la hipótesis de autocorrelación. En la figura 4 se hace el análisis de sus residuales al cuadrado el cual evalúa la heterocedasticidad en varianza, donde se rechaza la existencia de autocorrelación. Bajo esta estimación, los errores obtenidos resultan ser independientes en el tiempo y validan todas las condiciones con las cuales se identifica un ruido blanco.

Dependent Variable: LOGBANCOLOMBIA
Method: ML - ARCH
Date: 03/16/13 Time: 10:10
Sample (adjusted): 11/30/2007 8/02/2012
Included observations: 1220 after adjustments
Convergence achieved after 19 iterations
MA Backcast: 11/28/2007 11/29/2007
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(5) + C(6)*RESID(-1)^2 + C(7)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.404250	0.051141	7.904548	0.0000
AR(2)	-0.919612	0.052739	-17.43690	0.0000
MA(1)	-0.399033	0.042450	-9.400037	0.0000
MA(2)	0.944285	0.041930	22.52035	0.0000
Variance Equation				
C	1.83E-05	4.26E-06	4.298161	0.0000
RESID(-1)^2	0.114285	0.016477	6.936206	0.0000
GARCH(-1)	0.826987	0.024727	33.44470	0.0000
R-squared	0.007119	Mean dependent var	0.000345	
Adjusted R-squared	0.004670	S.D. dependent var	0.018345	
S.E. of regression	0.018302	Akaike info criterion	-5.357536	
Sum squared resid	0.407331	Schwarz criterion	-5.328236	
Log likelihood	3275.097	Hannan-Quinn criter.	-5.346508	
Durbin-Watson stat	1.985667			
Inverted AR Roots	.20-.94i	.20+.94i		
Inverted MA Roots	.20+.95i	.20-.95i		

Dependent Variable: LOGECOPETROL
Method: ML - ARCH
Date: 03/16/13 Time: 10:30
Sample (adjusted): 11/30/2007 8/02/2012
Included observations: 1220 after adjustments
Convergence achieved after 30 iterations
MA Backcast: 11/29/2007
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(5) + C(6)*RESID(-1)^2 + C(7)*GARCH(-1) + C(8)*GARCH(-2) + C(9)*GARCH(-3)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000892	0.000354	2.519094	0.0118
AR(1)	0.606733	0.203261	2.984994	0.0028
AR(2)	-0.074027	0.036351	-2.036470	0.0417
MA(1)	-0.587607	0.208331	-2.820547	0.0048
Variance Equation				
C	1.91E-05	3.50E-06	5.463460	0.0000
RESID(-1)^2	0.118212	0.015696	7.531284	0.0000
GARCH(-1)	1.585917	0.087141	18.19948	0.0000
GARCH(-2)	-1.220990	0.123029	-9.924433	0.0000
GARCH(-3)	0.442410	0.064933	6.813347	0.0000
R-squared	-0.001449	Mean dependent var	0.000765	
Adjusted R-squared	-0.003919	S.D. dependent var	0.016534	
S.E. of regression	0.016566	Akaike info criterion	-5.577516	
Sum squared resid	0.333725	Schwarz criterion	-5.539845	
Log likelihood	3411.285	Hannan-Quinn criter.	-5.563337	
Durbin-Watson stat	2.083717			
Inverted AR Roots	.44	.17		
Inverted MA Roots	.59			

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Estimación de los modelos ARMA-GARCH

Date: 05/22/13 Time: 22:20
Sample: 11/30/2007 8/02/2012
Included observations: 1220
Q-statistic probabilities adjusted for 4 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.013	0.013	0.2080	
		2 0.025	0.025	1.0023	
		3 0.008	0.007	1.0833	
		4 0.003	0.002	1.0929	
		5 0.013	0.012	1.2854	0.257
		6 -0.009	-0.010	1.3920	0.499
		7 0.050	0.050	4.5135	0.211
		8 0.020	0.019	4.9886	0.288
		9 0.005	0.002	5.0175	0.414
		10 -0.037	-0.039	6.6855	0.351
		11 -0.033	-0.032	8.0094	0.332
		12 -0.015	-0.014	8.3006	0.405
		13 -0.005	-0.002	8.3290	0.501
		14 0.033	0.033	9.7142	0.466
		15 -0.027	-0.028	10.620	0.476
		16 0.033	0.032	11.984	0.447
		17 -0.008	-0.004	12.054	0.523
		18 -0.023	-0.020	12.711	0.549
		19 -0.030	-0.027	13.803	0.541
		20 0.025	0.028	14.578	0.556
		21 0.007	0.002	14.647	0.621
		22 0.009	0.009	14.757	0.679
		23 -0.012	-0.016	14.938	0.727
		24 0.031	0.032	16.100	0.710
		25 -0.009	-0.009	16.201	0.758
		26 -0.008	-0.003	16.274	0.802

Correlograma residuales ARMA(2,2)-GARCH(1,1)

Date: 05/22/13 Time: 22:09
Sample: 11/30/2007 8/02/2012
Included observations: 1220
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.045	0.045	2.4455	
		2 -0.012	-0.014	2.6181	
		3 -0.001	-0.000	2.6198	
		4 0.017	0.017	2.9701	0.226
		5 0.011	0.010	3.1220	0.373
		6 -0.022	-0.023	3.7421	0.442
		7 -0.007	-0.005	3.8087	0.577
		8 -0.051	-0.052	7.0328	0.318
		9 0.056	0.061	10.919	0.142
		10 0.017	0.011	11.285	0.186
		11 0.022	0.023	11.872	0.221
		12 -0.048	-0.049	14.699	0.143
		13 0.014	0.018	14.944	0.185
		14 -0.018	-0.026	15.362	0.222
		15 -0.028	-0.025	16.356	0.230
		16 0.001	0.002	16.357	0.292
		17 -0.003	0.004	16.368	0.358
		18 0.073	0.070	22.959	0.115
		19 -0.002	-0.006	22.962	0.150
		20 0.026	0.021	23.813	0.161
		21 0.005	0.007	23.846	0.202
		22 -0.009	-0.015	23.949	0.245
		23 -0.016	-0.015	24.270	0.280
		24 0.005	0.010	24.301	0.332
		25 0.057	0.060	28.361	0.202
		26 -0.000	0.003	28.361	0.245

Correlograma residuales ARMA(2,1)-GARCH(3,1)

Fuente: Elaboración propia

Figura 3. Correlogramas de Residuales modelos ARMA-GARCH

Date: 05/22/13 Time: 21:24
Sample: 11/30/2007 8/02/2012
Included observations: 1220
Q-statistic probabilities adjusted for 4 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.041	0.041	2.0963	
		2 -0.015	-0.017	2.3750	
		3 -0.015	-0.014	2.6575	
		4 -0.010	-0.009	2.7686	
		5 -0.016	-0.016	3.0912	0.079
		6 -0.011	-0.010	3.2406	0.198
		7 -0.003	-0.003	3.2507	0.355
		8 -0.005	-0.005	3.2785	0.512
		9 -0.010	-0.010	3.3985	0.639
		10 -0.025	-0.025	4.1835	0.652
		11 0.089	0.090	13.847	0.054
		12 0.015	0.006	14.108	0.079
		13 -0.049	-0.049	17.133	0.047
		14 0.015	0.022	17.429	0.065
		15 -0.023	-0.025	18.059	0.080
		16 -0.005	-0.002	18.096	0.113
		17 -0.010	-0.009	18.230	0.149
		18 -0.050	-0.052	21.351	0.093
		19 0.019	0.023	21.780	0.114
		20 0.040	0.037	23.744	0.095
		21 -0.023	-0.025	24.425	0.108
		22 0.070	0.066	30.579	0.032
		23 0.010	-0.002	30.694	0.044
		24 -0.028	-0.018	31.657	0.047
		25 -0.003	-0.001	31.670	0.063
		26 0.021	0.022	32.242	0.073

Correlograma residuales cuadrado ARMA(2,2)-GARCH(1,1)

Fuente: Elaboración Propia

Date: 05/22/13 Time: 21:23
Sample: 11/30/2007 8/02/2012
Included observations: 1220
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.045	0.045	2.5306	
		2 0.001	-0.001	2.5312	
		3 -0.002	-0.002	2.5376	
		4 0.013	0.013	2.7427	0.098
		5 0.012	0.011	2.9188	0.232
		6 -0.030	-0.031	3.9901	0.263
		7 0.000	0.003	3.9901	0.407
		8 -0.050	-0.050	7.0187	0.219
		9 0.039	0.043	8.8456	0.182
		10 0.017	0.014	9.1998	0.239
		11 0.018	0.017	9.5894	0.295
		12 -0.054	-0.056	13.184	0.154
		13 0.019	0.025	13.648	0.190
		14 -0.024	-0.031	14.362	0.214
		15 -0.037	-0.033	16.056	0.189
		16 -0.009	-0.007	16.154	0.241
		17 -0.009	-0.002	16.248	0.298
		18 0.066	0.064	21.726	0.115
		19 0.002	-0.001	21.729	0.152
		20 0.033	0.025	23.050	0.148
		21 0.003	0.004	23.060	0.188
		22 -0.013	-0.019	23.284	0.225
		23 -0.018	-0.019	23.670	0.257
		24 0.008	0.012	23.741	0.306
		25 0.063	0.066	28.637	0.156
		26 0.003	0.004	28.648	0.192

Correlograma residuales cuadrado ARMA(2,1)-GARCH(3,1)

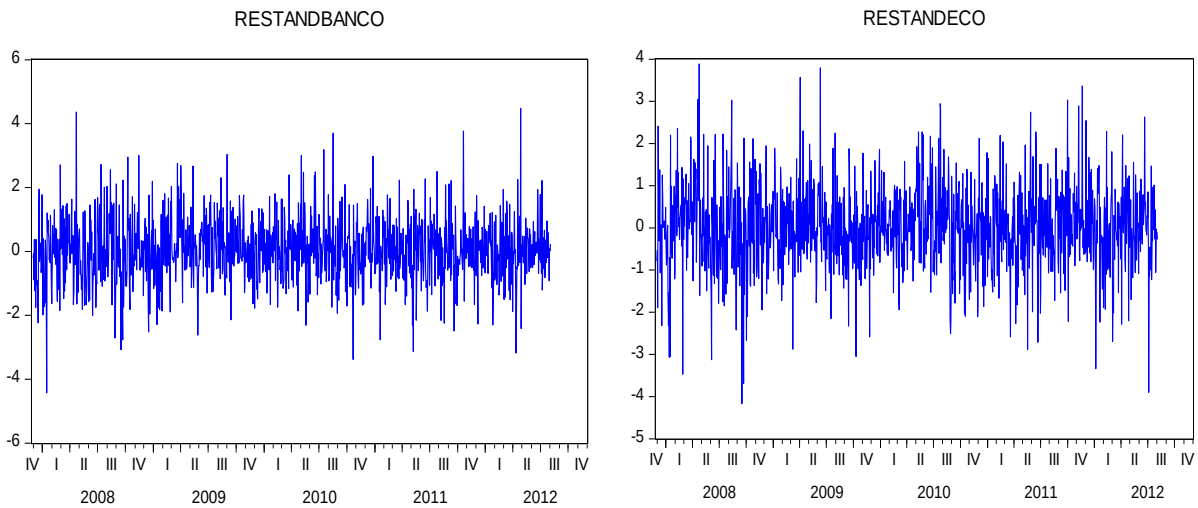
Figura 4. Correlogramas de los Residuales al Cuadrado modelos ARMA-GARCH

Después de obtener los residuales del modelo es necesario estandarizarlos. Los residuos estandarizados tienen media cero y varianza 1 lo que permite distinguir los residuos grandes, por tal motivo, si hay valores que sean mayores a 2 o menores a -2 serán clasificados como anormales. En la tabla 4 se presentan las estadísticas descriptivas de los residuales estandarizados los cuales muestran una media para ambas variables de cero y una desviación estándar igual a 1, mientras que la curtosis tiene como resultado que no hay indicios de que la distribución de los residuales sea normal y la prueba del *Jarque Bera* confirma que no hay evidencias suficientes para que la distribución de los residuales estandarizados sea normal ya que el valor que se obtuvo para ambas series es muy alto. En la figura 5 se exponen el gráfico de cada uno de los residuales estandarizados de las series, donde se verifica la información obtenida en la tabla 4 y se comprueba la información empírica donde los residuales estandarizados deben tener media cero y varianza 1, aproximadamente.

	<i>Bancolombia</i>	<i>Ecopetrol</i>
<i>Mean</i>	0,032326	0,000627
<i>Median</i>	-0,000784	-0,001376
<i>Maximum</i>	4,48	3,888
<i>Minimum</i>	4,4235	-4,1667
<i>Std. Dev.</i>	0,999442	1
<i>Skewness</i>	0,174095	-0,036
<i>Kurtosis</i>	4,334	4,35
<i>Jarque-Bera</i>	96,60	92,94
<i>Probability</i>	0	0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. Estadísticas Descriptivas de los Residuales Estandarizados



Fuente: Elaboración propia

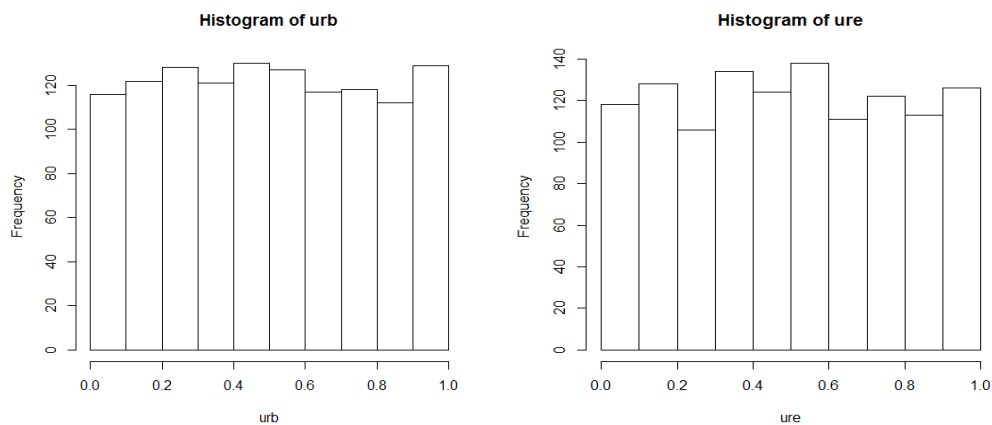
Figura 5. Gráfico de Residuales Estandarizados

Luego con estos residuales se construyó la pseudo muestra, la cual debe distribuirse de manera uniforme para garantizar el cumplimiento del teorema de Sklar. Para verificar lo anterior, se utilizará la prueba de *Kolmogorov – Smirnov* (KS) sobre ambas series. En la tabla 5 se muestran los estadísticos descriptivos de la pseudo muestra donde incluyen la prueba KS cuyo resultado que se distribuyen uniforme dado que el p-valor de la prueba es mayor a 0.05 lo que significa que no hay suficientes evidencias para rechazar la hipótesis de que se distribuyen uniforme. En la figura 6 se muestran los histogramas de las pseudo muestras “urb”, que grafica la distribución para la acción de Bancolombia y “ure” que muestra la distribución que tienen para la acción de Ecopetrol. Con los anteriores se valida la prueba KS mencionada en la tabla 5, cuya finalidad es probar que las pseudo muestras tienen una distribución uniforme.

	<i>Pseudo muestra Bancolombia</i>	<i>Pseudo muestra Ecopetrol</i>
<i>Media</i>	0,5	0,5
<i>Error típico</i>	0,00826136	0,00826136
<i>Mediana</i>	0,5	0,5
<i>Desviación estándar</i>	0,288556898	0,288556898
<i>Varianza</i>	0,083265083	0,083265083
<i>Curtosis</i>	-1,2	-1,2
<i>Coef. de asimetría</i>	-4,66929E-15	4,04462E-15
<i>Rango</i>	0,998361998	0,998361998
<i>Mínimo</i>	0,000819001	0,000819001
<i>Máximo</i>	0,999180999	0,999180999
<i>KS-D</i>	0,022	0,813
<i>KS-p value</i>	0,813	0,813

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5. Estadísticas Descriptivas de la Pseudo Muestra



Fuente: Elaboración propia

Figura 6. Gráfico Distribuciones Uniformes Series Financieras

Después de probar el estadístico KS en las pseudo muestras y comprobar que estaba distribuido uniforme entre 0 y 1, se han elegido algunas cópulas para probar su ajuste con los datos. La cópula *Gaussiana* (normal) es de mayor énfasis en la dependencia en el centro de la distribución, no recoge asimetrías y tiene como gran defecto que puede no detectar la dependencia en las colas. La cópula *t-student* cubre todos los errores que comete la anterior cópula, ya que se especializa en las colas de la distribución pero no abandona el centro de la misma por lo que recoge una descripción más detallada y veraz de los datos. La cópula *Frank* es simétrica y asigna probabilidades de ocurrencia con un valor de cero a los eventos que están en las colas. Por último, está la cópula *Clayton*, la cual asigna una probabilidad mucho mayor a los eventos que ocurren en el lado izquierdo de la distribución, en otras palabras es ideal para mostrar los detalles de la dependencia negativa. En la tabla 6 se muestran los resultados de las estimaciones de las cópulas y se sombreando los valores de los criterios de selección, los cuales fueron el AIC, BIC y el log de verosimilitud, donde se tiene que el BIC asume que el modelo que más se ajusta a los datos está contenido en la muestra y mide su grado de certeza mientras que el AIC tiene como principal cualidad que no asume que el modelo que más se ajuste a los datos esté entre los candidatos, es por esto que calcula la discrepancia que indicará la distancia entre la probabilidad generada por el modelo y la realidad.

	<i>Parametro</i>	<i>Error Estand</i>	<i>Estad. Z</i>	<i>P-valor</i>	<i>Log. Ver</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
Normal	0,4256	0,0176	24,16	0,0	120,06	-238,12	-233,02
t	0,3608	0,0346	10,42	0,0	83,37	-164,746	-159,63
Frank	2,8719	0,1854	15,49	0,0	121,39	-240,79	-235,68
Clayton	0,6289	0,0473	13,32	0,0	115,22	-228,44	-223,34

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6. Copulas Estimadas

La cópula que mejor se ajustó a la estimación de dependencia fue la cópula *elíptica t*, que en pocas palabras es la que mejor describe la relación de dependencia que tienen los dos activos financieros. Esta cópula muestra una alta dependencia asintótica en las colas y es

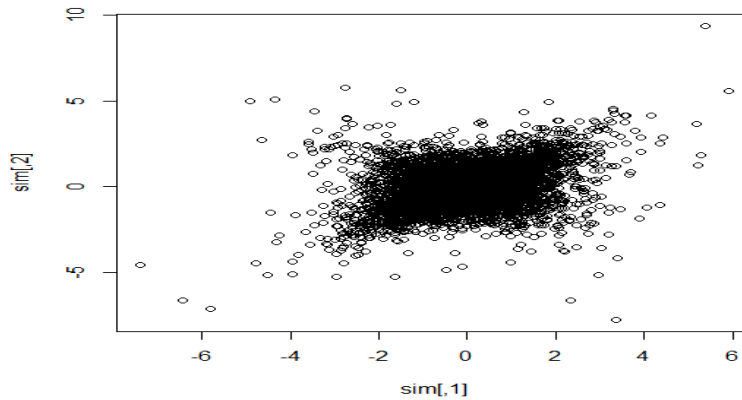
por esta razón que es escogida dentro del campo de las finanzas para que modele las relaciones existentes entre los activos. En la tabla 7 se presenta la estimación de los coeficientes de correlación de las pseudo muestras de los activos financieros con la cópula *t*. Se utilizan el *Rho* de *Spearman* y el *Tau* de *Kendall* ya que se está suponiendo que las distribuciones de las series no son normales, estos coeficientes toman valores entre -1 y 1, y se interpretan de la misma forma como se hace con el coeficiente de correlación de Pearson. Se evidencia que los porcentajes de correlación entre las pseudo muestras no son lo suficientemente altos como para concluir que ante eventos extremos que ocurran en alguno de los dos activos, este se verá reflejado en la proporción presentada en la tabla por cada uno de los coeficientes en el otro activo. Entonces se concluye que los activos están correlacionados pero no en la medida, como para dar un veredicto al respecto de la correlación y dependencia, por el contrario, si se hicieran los análisis e interpretaciones se podría incurrir en errores.

	<i>Rho Spearman</i>	<i>Tau Kendall</i>
<i>T</i>	0,4192275	0,2912304

Fuente: Elaboración propia

Tabla 7. Medida de Dependencia de las Pseudo Muestras en la Copula Escogida

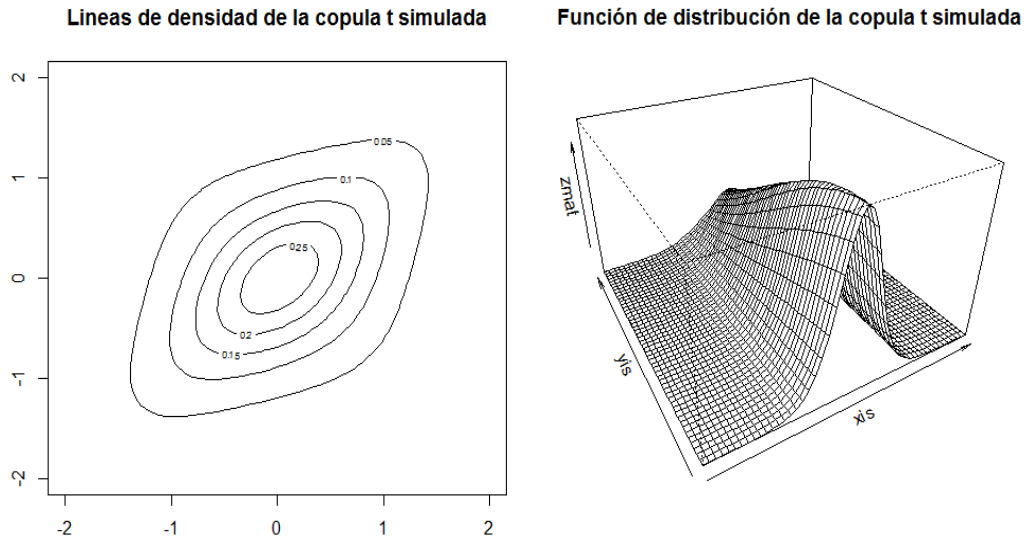
Después de saber cuál de las cópulas es la que mejor se ajusta a la pseudo muestra utilizada, se procede a simular unos 10000 datos para que de esta forma se pueda generar la cópula, esto se hace para ver los diferentes valores de θ . En la figura 6 se observa el gráfico de dispersión de la cópula, el cual permite representar gráficamente el nivel de relación entre dos variables. Se obtiene que los valores que están cerca de cero tiendan a tener una mayor dependencia, también se observa que hay dependencia en las colas dado que el gráfico tiene forma de cruz y se muestra la presencia de algunos datos que tienen comportamiento anormal.



Fuente: Elaboración propia

Figura 6. Gráfico de Dispersión de la Copula

En la figura 7 se observa el gráfico de líneas de contorno o también llamadas líneas de densidad y la función de densidad de la cópula simulada que tratarán de graficar la estructura de dependencia, donde claramente se evidencia la forma elipsoide constante que muestra la dependencia en las colas de la distribución dentro del gráfico de contorno y muestra las colas de la distribución un poco alargadas hacia los cuadrantes izquierdo inferior y derecho superior, lo que deja como evidencia el grado de dependencia que puede llegar a tener la distribución en las colas. Por otra parte, en el gráfico de distribución parece que no se tiene igualdad de forma con respecto a la densidad de la cópula original, pero se puede explicar de la misma manera que si se observa un máximo de densidad lo que sugiere que existe un caso de dependencia, y este caso estaría situado en el centro de la distribución; en zonas diferentes a esta parece que no existe ningún caso de dependencia.



Fuente: Elaboración propia

Figura 7. Gráfico de Contorno de la Copula Simulada

Por último, para el cálculo del VaR se observa que el porcentaje de pérdidas obtenido mediante el uso de la cópula t con un nivel de confianza del 95% y del 99% fue del 3,47% para la acción de Bancolombia mientras que para la acción de Ecopetrol fue de 2,63%, lo anterior con una probabilidad del 5%, además la máxima pérdida en la cual se está dispuesto a incurrir para este portafolio será del 6,1%. Para un nivel de significancia del 1% se obtuvo que la máxima pérdida que puede llegar a ocurrir en este portafolio para la acción de Bancolombia será de 4,23% mientras que para la acción de Ecopetrol es de 3,25%. La máxima pérdida del portafolio para este nivel de significancia es de 7,4%.

Para obtener una mejor explicación del valor encontrado, se realizó el análisis del VaR a través de simulación histórica, donde se obtuvo como resultado que para un nivel de significancia (α) del 5% que la máxima pérdida del portafolio sería de 6,79% y para un nivel de confianza del 99% dio como resultado 8,83%. Después de este proceso es conveniente hacer una comparación de los resultados obtenidos expuestos en la tabla 8 para el valor en riesgo a través de la metodología de cópulas y el resultado que se obtiene a partir del VaR por medio de la metodología tradicional como lo es simulación histórica. Puede observarse que los resultados obtenidos por la simulación histórica sobreestiman la

pérdida del portafolio, ya que el porcentaje de la máxima pérdida en el portafolio es mayor al porcentaje del VaR obtenido mediante el uso de cópulas. La explicación de esta sobreestimación se debe a los grandes eventos extremos por lo cual pasan las economías anualmente, lo que no es corregido por la metodología tradicional.

		<i>Cópula T</i>			<i>Simulación Histórica</i>		
	<i>α</i>	<i>Bancolombia</i>	<i>Ecopetrol</i>	<i>Portafolio</i>	<i>Bancolombia</i>	<i>Ecopetrol</i>	<i>Portafolio</i>
<i>PORTAFOLIO</i>	1%	3,473%	2,633%	6,106%	3,796%	2,998%	6,794%
	5%	4,236%	3,258%	7,494%	4,552%	4,286%	8,838%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8. Resultados del análisis VaR Vs Simulación Histórica

CONCLUSIONES

Las cópulas han ayudado a la realización del estudio de la conformación de un portafolio de dos activos del mercado accionario colombiano, aplicándoles esta metodología para calcular su valor en riesgo. Se realizó el estudio con cópulas *Normal*, *t*, *Frank* y *Clayton* a las cuales se les eliminaron los supuestos de normalidad en la distribución de los retornos de las acciones.

Al momento de analizar las series financieras y los retornos logarítmicos de estas series, se encontró que había presencia de clusters de volatilidad. Por esta razón se utilizaron los modelos $ARMA(p,q)$ - $GARCH(p,q)$ que son los adecuados para estudiar y modelar estos comportamientos en los retornos de los activos financieros. Estas series financieras muestran un efecto de apalancamiento ya que las acciones se ven más afectadas ante noticias negativas que ante las positivas, esto quiere decir que si el precio de una acción cae, generará unas predicciones de mayor volatilidad que producirá grandes y notables cambios en los precios.

Para la obtención de las distribuciones marginales se hizo caso a la literatura empírica y a estudios anteriores que muestran que la distribución *t* es la que mejor se ajusta los datos de series de tiempo de retornos logarítmicos. Se presentaron diferentes cópulas como funciones que se aproximan al comportamiento de las series financieras a partir de sus distribuciones marginales. Según el resultado empírico de este documento, se obtuvo que la función cópula que mejor se acopla a los retornos logarítmicos de las series financieras fuera la *t*, de esta manera se describe la estructura de dependencia que tienen los dos activos del portafolio. Por otra parte, las medidas de concordancia representadas para este trabajo por el *Tau* de *Kendall* y el *Rho* de *Spearman* se obtuvieron después de seleccionar la cópula y dieron como resultado valores mayores a cero, lo que significa que cuando el precio de una acción cae, la otra acción probablemente también tendrá un declive en su precio.

De la misma manera el Valor en Riesgo (VaR) se ha ido popularizando como una de las mejores herramientas para la evaluación de riesgos. Es de vital importancia mencionar que uno de los aspectos más importantes que tiene la teoría de valor en riesgo es el supuesto de normalidad en la distribución de los precios de los activos, mientras que en la actualidad se ha demostrado que dichos supuestos han sido descartados y se han ido aplicando otros tipos de distribución diferentes a la normal. Lo anterior se evidencia en el caso de este documento, en el cual se mencionó que los datos habían sido distribuidos bajo una t dado que mostraban un mejor ajuste a las series financieras. Para este documento se realizó la estimación del VaR con un nivel de confianza del 95% y 99%, para el portafolio conformado por dos activos del mercado accionario colombiano cada uno con un 50% de participación, teniendo como resultado que para un 95% el valor máximo que se estaría dispuesto a perder para la acción de Bancolombia sería del 3,47% y para la acción de Ecopetrol sería de 2,63%; mientras que el VaR para un nivel de confianza del 99% tiene que la máxima pérdida para Bancolombia sería del 4,2% y para Ecopetrol sería de 3,25%. También se observaron las cifras como máxima pérdida del portafolio teniendo como resultado que para el nivel de confianza del 95% se espera una máxima pérdida del 6,106% mientras que para el análisis a un 99% de confianza se obtuvo que el VaR es del 7,494%.

Respecto a los resultados de este trabajo, se evidencia que el mercado accionario puede ser objetivo de los inversionistas tanto locales como extranjeros, debido a la baja probabilidad de grandes pérdidas que existe en el mercado colombiano. De esta forma, también es correcto incluir a los hacedores de política para que generen incentivos a los inversionistas extranjeros y así tener un mayor crecimiento económico.

Además con la aplicación de cópulas de la familia elíptica se garantiza la condición de subaditividad, la cual está asociada con el principio de diversificación. Demostrando lo que Markovits (1952) explicó con la teoría de carteras: entre más activos tenga una cartera, menor será el riesgo.

Es conveniente decir que la metodología del VaR tiene ciertas limitaciones por el hecho de que no hay una única forma de estimarlo. Por otra parte, Jorion (1997) en su trabajo señaló que el VaR es una medida subjetiva para la estimación del riesgo. Por consiguiente se decide complementar dicha metodología con el uso de cópulas para que se logre evitar caer en trampas o vacíos experimentales lo que conlleva a generar una mejor estimación del riesgo y una eficaz modelación de las dependencias estructurales. También hay que decir que a pesar de la complejidad que puede representar aplicar esta última metodología, se ha convertido en una herramienta poderosa para la economía financiera contemporánea.

BIBLIOGRAFÍA

Aragonés, J. y Blanco, C. (2000). Valor en Riesgo: Aplicación a la gestión empresarial. Pirámide. Madrid.

Arango, J. P., Arias, M., Gómez, E., Salamanca, D. y Vásquez, D. M. (2005). "Estimación de los requerimientos de capital por riesgo de mercado", *Reporte de Estabilidad Financiera*, Diciembre de 2005, pp. 88-99.

Arnold, H (2006). *Dependence Modelling via the Copula Method*. Macquarie University Campus.

Becerra, O. y Melo, L. F. (2008). "Usos e implicaciones de la cópula en la medición del riesgo financiero", *Borradores de Economía*, No. 489, Banco de la República.

Bouye, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, y G., Roncalli, T. (2000), "Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications".

Campbell, J.Y., Lo, A. y MacKinlay, A.C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princenton University Press.

Cardona, D. (2010) Dependencia Estructural en los Mercados Bursátiles de Colombia y Estados Unidos: Una Aproximación Usando Cópulas.

Cherubini, U., y Luciano, E. (2000) Value at Risk Trade-off and Capital Allocation with Copulas. Turin. 2000.

Embrechts, P., McNeil, A. J. y Straumann, D. (2002), Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls, in M. A. H. Dempster, ed., 'Risk Management: Value at Risk and Beyond', pp. 176–223.

Fisher, N. I. (1997). Copulas. In: *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Update Vol. 1, 159-163. John Wiley Sons, New York.

Giacomini, E. (2005). Risk Managment with Copulae. Center for Applied Statistics and Econometrics, Humbolt – Universität zu Berlin. Berlin, p. 8-46.

Hoeffding, W. (1948): A Class of Statistics With Asymptotically Normal Distribution. *Annals Math. Statistics*, 19: 293-325.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Londres: Chapman & Hall.

Jorion, P. (1997); *Valor en Riesgo*. Universidad de California, Irvine. McGraw-Hill.

Kole, E., Koedijk K., y Verbeek M. (2005). "Testing copulas to model financial dependence", Department of Financial Management, RSM Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands.

Klugman, S. A., y R. Parsa (1999), Fitting bivariate loss distributions with copulas. *Ins. Math. Econ.* **24**, 139–148.

Li, D. (1999), "On default correlation: A copula function approach," working paper, RiskMetrics Group, New York.

Linsmeier, J y Pearson, N. (1996), *Risk measurement: An Introduction to Value at Risk*. University of Illinois.

Markowitz, H. (1952), Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

McNeil, A.; Frey, R., y Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton University Press, pp.538.

Melo, L. F., y Becerra, O. (2006). “Una aproximación a la dinámica de las tasas de interés de corto plazo en Colombia a través de Modelos GARCH Multivariados”, *Borradores de Economía*, No. 366, Banco de la República de Colombia.

Micocci, Marco., y Masala, Giovanni. Backtesting Value at risk Estimation with non Gaussian Marginals. University of Cagliari. Italia. Mayo, 2004. P. 1-18.

Morgan J.P. y Co., Inc., Andersen A. y Co. SC, and Financial Engineering Limited, The J.P. Morgan/Arthur Andersen (1993). *Guide to Corporate Exposure Management, RISK*.

Nadiezhdá, T. (2010). “Valoración del Riesgo Utilizando Cópulas como Medida de la Dependencia: Aplicación al Sector Financiero Mexicano (2002-2008)”. Universidad Complutense de Madrid.

Nelsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.

Peña, I. (2002). *La Gestión de Riesgos Financieros de Mercado y de Crédito*. Prentice Hall.

Rank, J. (2002) Improving VaR Calculation by Using Copulas an non-Gaussian Margins. University of Oxford, Mathematical Finance. November, 2002. P. 1-54.

Rosenberg, J., y Schuermann, T. (2004) A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat Tailed Risk. Federal Reserve Bank of New York. Staff Report No. 185. Mayo, 2004. P. 3-56.

Romero, C. (2002). Applying Copula Function to Risk Management. Banca di Roma. Italia.

Salinas, S.M., Maldonado D., Diaz L.G. (2010). "Estimación del riesgo en un portafolio de activos". *Apuntes del CENES*, N° 50, p. 117-150.

Schweizer, B. (1991). Thirty years of copulas. In: *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*, 13-50. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Sklar, A (1959): Fonctions de Repartition `a n-dimensions et Leur Marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris.8: 229-231.

Téllez, J., y Velázquez O. (2009). "*Valor en Riesgo usando Valores Extremos y Copulas*". Instituto Tecnológico de Monterrey.

Torrero, A. (2008); La Crisis Financiera Internacional. Documento de trabajo 08/2008, Instituto Universitario de Análisis Económico y Social. Universidad de Alcalá.

Torres, G. I., y Olarte, A. M. (2009), "Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas". *Revista Ad-Minister*, Vol. XV, pp. 113-136.

Trivedi, P. y D. Zimmer, (2005), 'Copula Modeling: An Introduction for Practitioners', *Foundations and Trends in Econometrics*, 1, 1, 1-110.

Uribe, J.M. (2011). "Contagio Financiero: Una Metodología para su Evaluación Mediante Coeficientes de Dependencia Asintótica", *Lecturas de Economía*, 75, pp. 29-57.

Uribe, J.M., y Ulloa, I.M. (2012). "La medición del riesgo en eventos extremos. Una revisión metodológica en contexto", *Lecturas de Economía*, 76, pp. 87-117.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). The Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.