



“Diseño de un recurso didáctico interactivo: El uso de Paradojas de Probabilidad mediadas por Geogebra para identificar heurísticas en el pensamiento aleatorio”

Stefany Galvis Dinas

Código 201127616

Leydi Johana Ospina Campo

Código 201324270

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2019



“Diseño de un recurso didáctico interactivo: El uso de Paradojas de Probabilidad mediadas por Geogebra para identificar heurísticas en el pensamiento aleatorio”

Stefany Galvis Dinas

Código 20112761

Leydi Johana Ospina Campo

Código 201324270

Trabajo de grado para optar el título de:

Licenciada en Matemáticas y Física

Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Director

Mg. Diego Diaz

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2019

AGRADECIMIENTOS

Inicialmente damos gracias a Dios por acompañarnos en cada una de las etapas de nuestras vidas, por todas las bendiciones que hemos recibido en todo momento de nuestras carreras, por darnos fortaleza en los momentos de debilidad y sobre todo mucha sabiduría y entendimiento para lograr culminar una meta más.

Damos gracias a nuestras familias que han sido pilares fundamentales en nuestras vidas, especialmente a nuestras madres, por el empeño que hicieron por darnos una mejor educación, por los buenos principios que nos inculcaron y que hicieron que nos convirtieran en unas personas de bien, con valores para vivir en sociedad.

Encarecidamente le agradecemos a nuestro director de trabajo de grado, el docente Mg. Diego Díaz por habernos brindado la oportunidad de trabajar bajo su asesoría, por sus orientaciones, por su valioso tiempo y dedicación.

A nuestros docentes y evaluadores que contribuyeron con sus grandes aportes para la elaboración de este trabajo, por su paciencia y sobre todo por brindarnos la oportunidad de compartir y enriquecer nuestro conocimiento bajo su compañía, con su dedicación y comprensión. Por último, agradecemos a nuestros compañeros que nos acompañaron, e hicieron que nuestro estudio fuera más enriquecedor durante nuestras carreras. Asimismo, agradecemos a la Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito y a la docente Mg. Linda Erika López por habernos brindado la oportunidad de implementar el recurso didáctico interactivo y apoyar su granito de arena en el desarrollo de este trabajo.

Muchas gracias

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	10
INTRODUCCIÓN	11
CAPITULO I	13
1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	13
1.1. Planteamiento del problema.....	13
1.2. Justificación	18
1.3. Objetivos.....	21
1.3.1. <i>Objetivo General</i>	21
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	21
1.4. Antecedentes.....	22
CAPITULO II.....	27
2. MARCO TEÓRICO	27
2.1. Perspectiva matemática.....	28
2.1.1. <i>El hombre y la probabilidad</i>	28
2.1.2. <i>Las paradojas en la historia de la probabilidad</i>	32
2.1.3. <i>Concepto de paradoja y de probabilidad</i>	32
2.1.4. <i>La simulación: un instrumento de modelización en probabilidad</i>	36
2.2. Perspectiva cognitiva	40
2.2.1. <i>Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico.</i>	40
2.2.2. <i>Implicaciones para la enseñanza</i>	46
2.4. Referentes curriculares.....	46
2.4.1. <i>Lineamientos curriculares de matemáticas</i>	47
2.4.2. <i>Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas</i>	48
2.4.3. <i>Derechos Básicos de Aprendizaje</i>	51
2.5 La importancia del uso de las TICS.....	53
CAPITULO III.....	56
3. METODOLOGÍA.....	56
3.1. Taller de Diseño de Recursos Didácticos Interactivos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística utilizando GeoGebra.	56
3.1.1. <i>Objetos de aprendizaje</i>	57
3.1.2. <i>Fases en el Diseño de Recursos Didácticos</i>	59

3.1.3. Aspectos relevantes en el Diseño de un Recurso Didáctico Interactivo.....	61
3.2. Presentación de metodología en el presente trabajo.....	63
CAPITULO IV.....	65
4. FASES EN EL DISEÑO DEL RECURSO DIDÁCTICO	65
4.1 Fase 1: Reflexión y análisis.....	65
4.1.1 Software Geogebra.....	65
4.1.2. Selección de paradojas	66
4.2. Fase 2: Diseño y maquetación	71
4.2.1. Contexto escolar	71
4.2.2. Diseño de actividad sin el uso de Geogebra	75
4.2.3. Diseño del recurso didáctico interactivo	79
4.3. Fase 3: Revisión y evaluación.....	92
4.3.1. Heurísticas en el razonamiento probabilístico en la implementación de la actividad sin el uso de Geogebra.	93
4.3.2. Heurísticas en el razonamiento probabilístico en la implementación del recurso didáctico interactivo.	105
CONCLUSIONES	116
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Tablero del juego de perros y chacales. Tomado de Google imágenes.	29
Ilustración 2. Grabado en la que aparece la Reina Egipcia Nefertari jugando el Senet (New Kingdom – Dynasty 18, 1549 – 1298 antes de Cristo). Tomado de Google imágenes.	30
Ilustración 3. Juego Real de Ur, Museo Británico. Tomado de Google imágenes.	30
Ilustración 4. Diagrama de árbol ilustrando el juego. Tomada de Batanero, C. y Contreras, J. (2009, p. 181).....	68
Ilustración 5. Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito. Tomada de Google Mapas.	72
Ilustración 6. Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito. Tomada de Google Mapas.	73
Ilustración 7. Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito. Tomada de Google Mapas.	73
Ilustración 8. Material manipulativo cajas mágicas (construcción propia)	76
Ilustración 9. Situación 1 que recrea la paradoja de Monty Hall. Tomada de https://eltamiz.com/2008/06/16/la-caja-de-bertrand/	77
Ilustración 10. Interrogantes de la situación 1.	77
Ilustración 11. Situación 2 que recrea la paradoja de la falacia del jugador tomada de Gardner, M. (1983, p. 87)	79
Ilustración 12. Interrogantes de la situación 2.	79
Ilustración 13. Pantalla # 1 de situación 1. El dilema de Homero	81
Ilustración 14. Pantalla # 2 de situación 1. El dilema de Homero	81
Ilustración 15. Pantalla # 3 de situación 1. El dilema de Homero	82
Ilustración 16. Pantalla # 4 de situación 1. El dilema de Homero	83
Ilustración 17. Pantalla # 4(jugada particular) de situación 1. El dilema de Homero	84

Ilustración 18. Pantalla # 4(jugada particular) de situación 1. El dilema de Homero	84
Ilustración 19. Pantalla # 4(jugada particular) de situación 1. El dilema de Homero	85
Ilustración 20. Consignas de situación 1. El dilema de Homero	86
Ilustración 21. Pantalla # 1 de situación 2. La falacia de Lisa	87
Ilustración 22. Pantalla # 2 de situación 2. La falacia de Lisa	87
Ilustración 23. Pantalla # 3 de situación 2. La falacia de Lisa	88
Ilustración 24. Pantalla # 4 de situación 2. La falacia de Lisa	89
Ilustración 25. Pantalla # 5 de situación 2. La falacia de Lisa	90
Ilustración 26. Pantalla # 5 (jugada particular) de situación 2. La falacia de Lisa	91
Ilustración 27. Consignas de situación 2. La falacia de Lisa	92
Ilustración 28. Respuestas a pregunta 1, estudiante 3, 11 y 13.....	94
Ilustración 29. Respuestas a pregunta 2, estudiante 10 y 11.....	95
Ilustración 30. Respuestas a pregunta 3, estudiante 5 y 11.....	95
Ilustración 31. Respuestas a pregunta 1, estudiantes 4 y 7.	96
Ilustración 32. Respuesta a pregunta 1, estudiantes 1 y 17.....	97
Ilustración 33. Respuesta a pregunta 2, estudiante 5.	98
Ilustración 34. respuesta a pregunta 3, estudiante 10.....	98
Ilustración 35. Respuesta a pregunta 1, estudiante 22.	98
Ilustración 36. Respuesta a pregunta 2, estudiante 7.	99
Ilustración 37. Respuesta a pregunta 3, estudiante 7 y 14.	99
Ilustración 38. Respuesta a pregunta 1, estudiante 1, 18 y 22.	100
Ilustración 39. Respuesta a pregunta 2, estudiante 5,6 y 18.	101
Ilustración 40. Respuestas a pregunta 1, estudiantes 8 y 18.	102
Ilustración 41. Respuestas a pregunta 2, estudiante 3,13 y 18.....	102
Ilustración 42. Respuestas a pregunta 1, estudiante 9.....	103

Ilustración 43. Respuestas a pregunta 2, estudiante 4.....	103
Ilustración 44. Respuestas a pregunta 1, estudiante 7 y 21.....	104
Ilustración 45. Respuestas a pregunta 2, estudiante 11 y 21.....	104
Ilustración 46. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 20.	106
Ilustración 47. Respuesta a la pregunta 2, estudiante 20	106
Ilustración 48. Respuesta a la pregunta 4, estudiante 22	107
Ilustración 49. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 12.	107
Ilustración 50. Respuesta a la pregunta 2, estudiantes 18, 5 y 12.....	108
Ilustración 51. Respuestas a la pregunta 3, estudiantes 20 y 12.	108
Ilustración 52. Respuesta a la pregunta 4, estudiante 12.	108
Ilustración 53. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 16.	109
Ilustración 54. Respuesta a la pregunta 2, estudiante 6.	109
Ilustración 55. Respuesta a la pregunta 3, estudiante 8.	110
Ilustración 56. Respuesta a la pregunta 4, estudiante 5.	110
Ilustración 57. Respuesta de la pregunta 1, estudiante 2.	110
Ilustración 58. Respuestas de la pregunta 2, estudiantes 1 y 11.	111
Ilustración 59. Respuesta de la pregunta 3, estudiante 21.	111
Ilustración 60. Respuestas de la pregunta 4, estudiantes 7 y 21.	111
Ilustración 61. Respuestas a la pregunta 1, estudiante 19 y 16.....	112
Ilustración 62. Respuestas a la pregunta 2, estudiantes 7, 19 y 2.	113
Ilustración 63. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 11 y 5.	113
Ilustración 64. Respuesta a la pregunta 2, estudiantes 12 y 22.....	114
Ilustración 65. Respuesta de la pregunta 1, estudiante 12.	114
Ilustración 66. Respuestas de la pregunta 2, estudiantes 14 y 17.	115

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad. Tomada de Batanero, C. (2005) pág. 256	36
Tabla 2. Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados sexto a séptimo. Tomado de MEN (2006).....	49
Tabla 3. Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados octavo a noveno. Tomado de MEN (2006)	50
Tabla 4. Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados décimo a undécimo. Tomado de MEN (2006)	51
Tabla 5. Derechos Básicos de Aprendizaje con relación a la probabilidad de los grados de sexto a undécimo. Tomado de MEN (2016).....	52
Tabla 6. Muestra los numerosos indicadores que caracterizan dicho cambio. Tomado de Gámez, A., y Marín, L. (2011). Pág. 79.	62
Tabla 7. Heurísticas e implicaciones.	117
Tabla 8. Resultados en porcentajes de los resultados obtenidos en las preguntas en la situación 1.	119
Tabla 9. Resultados en porcentajes de los resultados obtenidos en las preguntas en la situación 2.	120

RESUMEN

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas junto con la historia de las matemáticas muestran una fuerte relación, cuando se explora esta última, sirve para entender que las matemáticas las podemos encontrar en el contexto social y cultural, en constante evolución según las necesidades que en su momento se tiene. Por consiguiente, la finalidad de este trabajo es exaltar algunos momentos importantes de la probabilidad, pues se quiere hacer uso de paradojas clásicas de probabilidad, por medio de un diseño de un recurso didáctico interactivo en Geogebra, el cual busca que se potencialice el aprendizaje de la probabilidad, con ayuda de diferentes actividades planteadas en el recurso donde se le permite al docente determinar las heurísticas que presentan los estudiantes en el momento de resolver los problemas o situaciones que incluyen la probabilidad.

Palabras Claves: Diseño de recurso didáctico interactivo, probabilidad, paradoja, simulaciones, Geogebra y heurísticas.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se realiza en los programas de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas y licenciatura en matemática y física, en el contexto de la línea de formación de Tecnología de la Información y Comunicación (TIC) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, sede Meléndez.

Para el desarrollo de este trabajo se consideraron los antecedentes nacionales e internacionales en relación con el desarrollo histórico de la probabilidad y las paradojas clásicas de probabilidad, con el objetivo de fortalecer el vínculo entre la probabilidad y algunos elementos de su historia, por medio de la aplicación de un recurso didáctico interactivo a estudiantes de undécimo grado, el cual les permitió representar, explicar, razonar y refutar los sucesos y hallazgos en el desarrollo de dicho recurso.

Se presentan cuatro capítulos. En el capítulo I, se dan a conocer las generalidades del trabajo, como el planteamiento del problema, que contextualizan y sustentan su pertinencia; la justificación; los objetivos y los antecedentes. La finalidad es dar cuenta de la caracterización de un diseño de un recurso didáctico interactivo, el cual se desarrollará desde la perspectiva del taller de diseño de recursos didácticos interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, haciendo uso de Geogebra, un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades, en donde se quiere simular paradojas clásicas de probabilidad.

En el capítulo II, se presentan algunos referentes teóricos donde se identifican varias perspectivas que permiten fundamentar el trabajo: matemática, cognitiva y los referentes curriculares.

La primera perspectiva corresponde al desarrollo histórico de la probabilidad, donde se hace un recorrido mostrando la construcción de esta, y cómo surgen las paradojas a través de esta construcción, a su vez muestra los diferentes significados que se le atribuyen a la probabilidad en la sociedad actual. En la segunda perspectiva, se retoman aspectos para el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del recurso didáctico interactivo, y los referentes curriculares: los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencias y los derechos básicos de aprendizaje, son los encargados de sustentar el diseño del recurso.

En el capítulo III, se aborda la metodología utilizada para la elaboración y puesta en marcha del recurso, esta se desarrolla a partir del taller de diseño de recursos didácticos interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, el cual permite fundamentar el diseño del recurso didáctico interactivo en Geogebra y de donde se tuvo en cuenta para este trabajo de grado tres fases: de reflexión y análisis, de diseño y maquetación y de revisión y evaluación.

En el capítulo IV, se desarrollan las tres fases (de reflexión y análisis, de diseño y maquetación y de revisión y evaluación) que se proponen en la metodología presente en el capítulo III.

Finalmente se dan a conocer las conclusiones generales, las cuales incluyen aspectos relacionados con el problema, la metodología y el marco teórico, los objetivos y su pertinencia para el desarrollo del trabajo.

En específico, este trabajo pretende hacer un aporte a la labor de los docentes de matemáticas, dado que se quiere que el recurso didáctico interactivo a desarrollar esté a disposición del público en general, puesto que se tiene un interés por el papel que juegan las tecnologías computacionales en el aprendizaje de las matemáticas.

CAPITULO I

1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

1.1. Planteamiento del problema

Según Fernández, F., Romero, J. & Vergara, M. (2015, p. 24) a nivel nacional, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 1998, 2006), promueven la importancia de aplicar los conocimientos básicos de probabilidad en la toma de decisiones. Pero, como muestra Agnelli, H. (2009, p. 24) aunque la probabilidad está incluida en los planes de estudio de matemáticas en la educación básica, media y en los cursos iniciales de estadística en las universidades, no se le está dando mucha importancia a su enseñanza y en consecuencia tampoco a su propia formación disciplinar, dado que, llevar a cabo de forma efectiva la enseñanza de la Probabilidad en la educación media pareciera que es vista por muchos docentes, quienes no han tenido una buena formación específica en el tema, no como un componente necesario en la formación de sus estudiantes sino como una obligación curricular adicional.

Como cita Batanero, C. (2013, p. 2) se está tratando con ideas muy abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del estudiante, como sí sucede con los conceptos geométricos o numéricos, estos conceptos básicos se pueden concretar con objetos físicos, además, de tener la propiedad de ser reversible, es decir que pueden volver a su estado inicial, como lo es el caso del Tangram. En cambio, no se presenta una experiencia concreta similar de lo

aleatorio, pues no es posible manipular estos fenómenos para provocar un resultado específico, ni reponer los objetos a su primer momento devolviendo la acción.

Es por ello, que el docente de matemáticas requiere una gama muy variada de conocimiento y experiencia en matemáticas, que Ball, D., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012) “denominan conocimiento matemático para la enseñanza, y que incluye, el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden cada contenido, conocimiento del currículo y de las estrategias instruccionales” (p. 2). Así mismo, es importante que los docentes estén conscientes de algunas dificultades y sesgos que pueden manifestar los estudiantes en su proceso de aprendizaje, en este caso en el contexto de la probabilidad (Stohl, H. 2005, citado en Arteaga, P., Contreras, J., Díaz, C., y Ortiz, J. 2011, p. 939). Con lo anterior, lo que se quiere lograr entonces, es que los estudiantes construyan su conocimiento de forma activa, que sean capaces de configurar el pensamiento aleatorio.

Actualmente, la estadística tiene un avance considerable dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, principalmente por la utilización de otras áreas y la constante aparición en muchas situaciones de la vida cotidiana de la sociedad actual. La presencia de conceptos estadísticos en los diferentes medios de comunicación es un claro ejemplo, donde se resalta la necesidad de comprender disciplina de las matemáticas para conocer la realidad a la cual estamos expuestos (Pajares, A. y Tomeo, V. 2009, p. 2). Por ello se debe formar a los estudiantes para el análisis crítico de las informaciones estadísticas, evitando que ellos confíen en presentaciones falsas y realicen interpretaciones sesgadas.

Batanero, C. (2006, p. 1) afirma que los fines de la enseñanza de la probabilidad en la educación obligatoria, son dos principalmente:

- La probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas.

- La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, D. 1998, citado en Batanero, C. 2006, p. 1).

Por esta razón, la enseñanza de la probabilidad no debería estar limitada a algoritmos, pues como se mencionó anteriormente se considera que esta es importante, pues es aplicable en el mundo real.

Sin embargo, la construcción de este aprendizaje de la probabilidad, no ha sido una tarea sencilla, pues, como se afirma en Velásquez, M. (2014) “la naturaleza de la probabilidad difiere de la de otros contenidos matemáticos, las diferencias inherentes a la contraposición entre determinismo e incertidumbre crean la necesidad de buscar estrategias para promover aprendizajes significativos de acuerdo con el nivel y el rango de edades de los estudiantes”(p. 11), además, menciona que es necesario el uso de estrategias para promover aprendizajes significativos y permitir que los estudiantes pasen de intuiciones sobre el azar y la probabilidad a la construcción de nociones básicas.

Esta cimentación debería facilitar la posterior formalización de los conceptos ligados a estos enfoques, de manera que en niveles posteriores se logre una comprensión más profunda de la probabilidad.

No obstante, el docente debe buscar estrategias para la enseñanza de la probabilidad que permitan dar cuenta de situaciones de la vida real, como lo menciona Osorio, M., Suárez, A. y Uribe, C. (2013) “generalmente, el proceso de la enseñanza de la Probabilidad comienza con la presentación de conceptos que previamente ha preparado el docente junto con ejemplos, el uso de algún material manipulativo y ocasionalmente el computador, todo con el interés de que el estudiante se apropie del tema y haga posteriormente su aplicación en un contexto” (p. 129).

Una de las estrategias para el aprendizaje de la probabilidad es aquella que menciona Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. y Gea, M., (2012): “son varios los autores que justifican el interés de utilizar paradojas sencillas para plantear situaciones motivadoras en el aula que puedan beneficiar el desarrollo de la motivación y metacognición de los estudiantes y hacerles descubrir conexiones entre la historia y la vida cotidiana”. (p. 5)

Lesser, L (1998, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 4) indica que emplear inteligentemente las paradojas en la clase de matemáticas favorece una pedagogía constructivista, fomentando un aprendizaje significativo teniendo en cuenta las creencias previas, siendo el docente el encargado de posibilitar este aprendizaje.

Falk, R y Konold, C (1992, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 4) afirman que para el estudio de paradojas en probabilidad se necesita, una reflexión de sus propios pensamientos, lo cual es esencial tanto como el aprendizaje de la solución correcta para lograr una profundización matemática abstracta. Además, Konold, C. (1994, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 4) resalta la gran motivación que se tiene a partir de la obtención de resultados en la resolución de paradojas, que estimula en los estudiantes una exploración del problema más formalmente.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C. (2009), agregan que “una mirada a la historia permite tomar conciencia que los objetos probabilísticos son consecuencia del ingenio y de la construcción humana que da respuesta a situaciones problemáticas. Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los estudiantes que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzos” (p. 2).

Por lo anterior, se puede afirmar que el estudiante se puede favorecer con el desarrollo de su interés y de su capacidad para reflexionar sobre sus procesos de pensamiento y la forma en que aprenden, revelando las relaciones entre la historia y la vida cotidiana, además de dar

cuenta sobre la importancia de la enseñanza de la probabilidad desde las paradojas, pues beneficia el razonamiento probabilístico que se requiere al enfrentarse al azar del mundo que le rodea y mejorar sus intuiciones. Como sostuvo Fischbein, E. (1975, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 10) la diferencia entre el azar y lo deducible no se presenta de forma natural y completamente al nivel de las operaciones formales, dado que interviene las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que dirigen el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

Otra estrategia que puede brindar grandes aportes es el uso de las tecnologías, puesto que como menciona Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. y Gea, M. (2012) “El estado actual de la tecnología permite las simulaciones y los experimentos, que ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos y podrían servir para explorar situaciones probabilísticas de la vida real, sin necesidad de un gran nivel de formalización” (p. 10), Cabe resaltar que esto depende de las hipótesis y modelos teóricos que se establezcan en el momento de diseñar alguna modelación para experimentar.

Autores como León, N (2009, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 10) mencionan que la historia de la probabilidad muestra situaciones interesantes y llamativas, que pueden llevar a realizar una consideración sobre la existencia del azar en la vida diaria además de ayudar a motivar el estudio por parte de los estudiantes. González, P. (2004, citado en Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 10) también plantea que emplear la historia con fines didácticos está ligada al conocimiento histórico del docente y su proyección para adecuar este saber a los intereses y necesidades de los estudiantes. Por lo anterior, el estudio de la historia de la probabilidad y de las paradojas asociadas a la misma será entonces un elemento de gran importancia para la preparación de los docentes.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, este trabajo plantea la siguiente pregunta problema: **¿Qué heurísticas se presentan en el pensamiento aleatorio, a través del uso de paradojas de probabilidad mediadas por Geogebra en estudiantes de secundaria, por medio del diseño de un recurso didáctico interactivo?**

1.2. Justificación

En primer lugar, Teniendo en cuenta que la historia de la probabilidad muestra situaciones interesantes y llamativas, que ayudan a motivar el estudio por parte de los estudiantes (Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 10) se plantea la necesidad de integrar la historia de la probabilidad en el diseño de actividades, experiencias o situaciones en pro del proceso de aprendizaje de la probabilidad.

Como segunda medida, se busca reconocer las heurísticas que se han identificado a través de la historia de la probabilidad sobre algunos conceptos y teorías que se muestran actualmente alrededor de esta, que brinda a docentes en ejercicio y en formación tener un amplio conocimiento sobre los mismos.

Como tercer aspecto, se propone la pertinencia de hacer uso de estrategias significativas en el aprendizaje de los estudiantes, como el uso de las tecnologías en un ambiente escolar, proporcionando a los estudiantes una apropiación del concepto matemático.

Y, por último, se hace énfasis en un objeto matemático significativo en el ámbito escolar, el cual es la probabilidad, más específicamente el uso de paradojas de probabilidad.

En el momento de implementar actividades en el aula y hacer que la historia juegue un papel importante, el estudiante puede notar que los diversos procesos de transformación que ha sufrido un objeto matemático son esenciales, así como también se reflejan los diferentes

contextos donde surgió el interés de dar respuesta a los cuestionamientos presentados y resalta el valor que tiene los planteamientos históricos dentro del aula. Como Anacona, M (2003) menciona, “esta clase de estudios ofrece significativos aportes a la educación matemática, pues tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han incidido en la construcción de una teoría, permite formarse una idea más completa del discurso matemático en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, los cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada y netamente formal”. (p. 32)

Se puede evidenciar que son pocos los estudios sobre cómo la historia de la probabilidad es integrada en la educación matemática a nivel nacional como internacional. Así pues, la propuesta del presente trabajo busca mediante un diseño de un recurso didáctico interactivo incorporar las paradojas de probabilidad y algunos elementos de su historia, en donde el docente esté presente como orientador y el estudiante logre potenciar su proceso de aprendizaje, comprendiendo que la articulación entre matemáticas y la historia de la misma ayuda en el fortalecimiento del concepto involucrado. Pues como menciona Anacona, M (2003), “la historia se puede emplear para propiciar un acercamiento distinto al conocimiento matemático. Se pueden convertir los datos de un estudio histórico en actividades de naturaleza lúdica” (p. 42).

Es importante señalar, que la construcción de una experiencia de aula, en donde interviene el desarrollo histórico de un objeto matemático, se puede considerar un gran instrumento de trabajo adecuado, lo cual puede lograr beneficiar el trabajo de los docentes quienes solo se rigen en ocasiones al texto, puesto que “una manera de ver la intervención directa de la historia en la enseñanza de las matemáticas es a través de la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico” (Anacona, M. 2003, p. 38). Esto no solo beneficia a los docentes, ya que se involucra de manera directa a los estudiantes que se

favorecen con las diferentes metodologías a usar en la ejecución de actividades didácticas en el aula de clase.

Por lo mencionado anteriormente, se puede decir que para el docente es de gran importancia la historia de las matemáticas en la selección de las actividades, puesto que es posible encontrar en ella el surgimiento de objetos matemáticos importantes que han ayudado en el desarrollo de las diferentes teorías, que pueden fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula y evitar que aparezcan en el razonamiento probabilístico de los estudiantes algún tipo de heurística.

De acuerdo con lo expuesto hasta el momento, la historia de las matemáticas ofrece la capacidad de descubrir una serie de problemáticas que el docente puede atender, puesto que, según Anacona, M “ofrece un rico manantial de problemas que pueden ser objeto de un tratamiento lúdico. Distintos momentos y grandes problemas teóricos, que ocuparon un lugar de importancia en la historia, se pueden convertir en actividades de matemáticas recreativas, en las que el juego y todos sus componentes pedagógicos ocupen un lugar central”. (2003, p. 42)

Por otro lado, en los Lineamientos Curriculares en matemáticas (MEN, 1998) se plantea que “en las matemáticas escolares el desarrollo del pensamiento aleatorio mediante contenidos de la probabilidad y la estadística debe estar imbuido de un espíritu de exploración y de investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes. Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas” (p. 47). Se considera

que puede ser aquí, donde la implementación de un recurso didáctico interactivo motive en los estudiantes dar solución a problemas que involucran paradojas de probabilidad, surgidas a través de la historia.

Ahora, el desarrollo de este pensamiento aleatorio, parte de la intuición que generalmente se desarrolla desde los primeros grados de escolaridad, por tanto, en grado undécimo este pensamiento debe alcanzar un mayor nivel, dejando de lado un poco la intuición y pasando más a la experimentación. Así, este trabajo se enfoca en dar a conocer un recurso didáctico interactivo, en el cual se pueden identificar heurísticas que presentan los estudiantes en el pensamiento aleatorio.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Identificar heurísticas en el pensamiento aleatorio a través del uso de paradojas de probabilidad mediadas por Geogebra en estudiantes de secundaria, por medio del diseño de un recurso didáctico interactivo.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Reconocer las heurísticas que se han presentado en la solución de algunas paradojas clásicas a través de la historia de la probabilidad, teniendo en cuenta algunos referentes teóricos.

- Diseñar e implementar un recurso didáctico interactivo, a través de Geogebra sobre paradojas de probabilidad.
- Contrastar las heurísticas detectadas en los estudiantes teniendo en cuenta la implementación del recurso didáctico interactivo y una actividad sin el uso del programa.

1.4. Antecedentes

En el marco del desarrollo de este trabajo, se realizó una búsqueda de investigaciones asociadas al tema central de este trabajo.

La búsqueda fue realizada haciendo uso de bases de datos, bibliotecas y utilizando descriptores como simulaciones, probabilidad, diseño de recursos didáctico, con los cuales obtuvimos publicaciones de conferencias, publicaciones de grupos de educación matemática etc. Estos documentos fueron clasificados en categorías, teniendo en cuenta el énfasis que los relaciona con los propósitos de este trabajo, de la siguiente manera:

Se identificaron documentos a nivel nacional e internacional que abordan la necesidad de alternativas, de estrategias, de recursos didácticos, de utilización de instrumentos tecnológicos y de una exhaustiva formación de docentes, para el aprendizaje de la probabilidad.

✓ Documentos relacionados con las alternativas y contextos para el aprendizaje de la probabilidad:

En el documento de Osorio, M., Suárez, A., y Uribe, C. (2013), denominado *Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad*, nos muestra que el rápido avance tecnológico y el creciente uso del computador en la sociedad, particularmente en el contexto académico, genera en los docentes la necesidad de utilizar

estrategias novedosas para captar el interés de los estudiantes por el aprendizaje de la probabilidad. Luego realizan una recopilación de software educativo que ayuda para alcanzar dicho aprendizaje, así como simuladores, applets, actividades lúdicas, metodologías basadas en la práctica, y otras estrategias que se han empleado en el mismo sentido. Luego de la revisión, se confirma que en el ámbito académico existe una preocupación general por el desarrollo y uso de diferentes herramientas y estrategias que complementan el quehacer del docente en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

El documento elaborado por Penalva, M., Posadas, J. y Roig, A. (2010), denominado *Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad*, tiene el objetivo de caracterizar la actividad de resolución y planteamiento de problemas en el dominio de la probabilidad. En él se describen los recursos, las heurísticas y el tipo de razonamiento de los estudiantes cuando resuelven y plantean problemas de probabilidad e identifican la demanda cognitiva de los problemas propuestos. Los estudiantes deben resolver un problema y generar un problema original a partir de una situación dada, involucrando en ambas tareas determinados conceptos de probabilidad. Los resultados indican que la relación entre la manera de resolver los problemas y la actividad de formular problemas es compleja, pero proporciona información sobre los procesos de aprendizaje de la probabilidad.

✓ **Documentos relacionados con la importancia de la implementación de estrategias o recursos didácticos interactivos para el aprendizaje de la probabilidad.**

El documento realizado por Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2009), denominado *Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico*, fue elaborado con el objetivo de analizar algunas paradojas clásicas asociadas al desarrollo histórico de la probabilidad y su utilidad para diseñar situaciones didácticas. Además, nos muestra que es necesario un cambio en la metodología, recomendando la presentación, tanto

del enfoque clásico, como del frecuencial de la probabilidad, este último basado en simulaciones o experimentos, también, que algunos docentes pudieran no estar familiarizados con la metodología propuesta o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus estudiantes, pero que es de gran importancia apoyar a los estudiantes y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos, puesto que se quiere que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase.

Además, en el trabajo desarrollado por Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. (2012), denominado *Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas*, se reflexiona sobre el interés de las paradojas para organizar situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas. Un caso particularmente relevante es la probabilidad, pues en su desarrollo histórico aparecen numerosas paradojas que se reproducen, a veces, en las intuiciones erróneas de los estudiantes. Se analiza una de estas paradojas, mostrando los contenidos de probabilidad que pueden emplearse al trabajar con la misma y los posibles razonamientos erróneos de los estudiantes.

El documento elaborado por Agnelli, H. y Peparelli, S. (2011), denominado *Las paradojas, un vehículo para superar obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad*, Nos muestra que muchas de las concepciones erróneas acerca de la probabilidad que tienen los estudiantes, no desaparecen con un curso formal de probabilidades, sino que es necesario el diseño de actividades tendientes a superar aquellas dificultades que persisten al finalizar la enseñanza, por tal motivo se recomienda trabajar con un conjunto de problemas prototípicos que permitan promover la discusión de los elementos básicos de la naturaleza aleatoria del fenómeno a modelar, la manera de construir el modelo, las herramientas a utilizar para hallar la solución y la interpretación que esta merece.

Siendo la teoría de la probabilidad un campo especialmente rico en paradojas se considera entonces, que el tratamiento de paradojas y cuasi paradojas puede aportar elementos que permitan consolidar el aprendizaje de las nociones probabilísticas en el aula, posibilitando que el estudiante argumente discuta y examine sus conocimientos e intuiciones.

✓ **Documentos relacionados con el uso de artefactos tecnológicos en el aprendizaje de la probabilidad.**

En el documento producido por Santos, L. (2007), denominado *La educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales*, se resalta la importancia de utilizar distintas herramientas computacionales y proporcionar información relevante sobre las transformaciones curriculares y enfoques de instrucción que el empleo de tales herramientas demanda, puesto que es notable el desarrollo de la tecnología y el reconocimiento de que distintos instrumentos pueden ofrecer diferentes caminos y oportunidades para los estudiantes en los procesos de comprender y resolver problemas matemáticos, entonces, se hace necesario que la herramienta a utilizar sea potencial para la construcción del conocimiento de los estudiantes.

Además, en el trabajo realizado por Godino, J. (1995), denominado *¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística?*, se analiza la influencia del uso de la tecnología en el desarrollo y difusión de la estadística en los últimos años. Como consecuencia, razonan la necesidad de propiciar una renovación de los contenidos y metodología en la enseñanza de esta asignatura, haciéndola más significativa. Finalmente presentan ejemplos de las diversas modalidades del uso de la tecnología como ayuda para el aprendizaje de conceptos y métodos estadísticos.

La ponencia socializada por Suárez, A. y Uribe, C. (2013), denominada *Software educativo para el aprendizaje de la probabilidad*, muestra una propuesta metodológica para

la enseñanza de la Probabilidad, basada en software educativo. Dicha propuesta se origina en los problemas de aprendizaje detectados por los autores en los estudiantes de estadística de la universidad de Tunja y en investigaciones previas. La idea principal de la ponencia es el diseño un micromundo particular para cada área del conocimiento, de manera que el estudiante se visualice como profesional y reconozca la importancia de la probabilidad en su quehacer.

En el documento de Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C. y Fernandes, J. (2009), denominado *A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações*, se aborda la cuestión de la utilización de la simulación en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad, discutiendo potencialidades y limitaciones respecto a otros enfoques. Se da como ejemplo el problema de Monty Hall y se presentan algunas implicaciones del uso de la simulación para la enseñanza de probabilidades y estadística. Además, plantean que la principal razón para usar la simulación en la enseñanza de la probabilidad y estadística viene de la dificultad en ir más allá de los tradicionales juegos de azar y de problemas simples a través de otros métodos. La utilización de la simulación, incluso sin el apoyo de ordenadores, permite abordar situaciones más realistas y resolver problemas más sofisticados.

✓ **Documento relacionado con la formación de docentes para la enseñanza de la probabilidad.**

En el trabajo realizado por Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2011), denominado *Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los docentes*, se analiza el contenido necesario para la preparación didáctica de docentes para la enseñanza de la probabilidad y se sugieren las posibilidades que las paradojas clásicas de probabilidad

ofrecen para organizar actividades didácticas que puedan contribuir a esta formación. Se presenta también un ejemplo indicando los diversos tipos de análisis didáctico.

CAPITULO II

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico que soporta el problema de investigación de este trabajo está dividido en tres perspectivas:

- Perspectiva matemática, que está relacionada a la noción matemática, en este caso la probabilidad.
- Perspectiva cognitiva en donde se retoman aspectos para el análisis de los resultados obtenidos en el recurso didáctico interactivo.
- Por último, se presenta el referente curricular que guía la propuesta de manera objetiva, como son, los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje elaborados por el MEN (1998, 2006 y 2016)

2.1. Perspectiva matemática

2.1.1. *El hombre y la probabilidad*

El hombre siempre ha estado acompañado de la incertidumbre, pero a medida que transcurre el tiempo ha querido predecir ciertos eventos haciendo que esta merme. Sin embargo, no ha sido posible que se extinga, aún hay incertidumbre en algunos sucesos que ocurren, por ejemplo, en el clima, no es posible inferir con certeza, si en un sitio en particular, a una hora en particular, lloverá dentro de un mes. Como se ha discutido en Behar, R. (2009), actualmente la incertidumbre y el azar no se evidencian únicamente como una falta del conocimiento, se reconoce que estos son esenciales y permanentes en un ser o en una cosa, que son inseparables de él por formar parte de su naturaleza y no depender de algo externo.

Cuando se quiere realizar un rastreo para la introducción y el desarrollo de la teoría de la probabilidad siempre se hace alusión a los juegos de azar, y es importante especificar que estas situaciones de azar puro, como lo son los juegos asociados al lanzamiento de dados, o de la moneda, fueron aquellos que indujeron las reflexiones iniciales, aunque tardías, que conllevan a la edificación de los primeros modelos matemáticos para describir el comportamiento del azar, (Behar, R., 2009).

Como lo plantea David, F. (1962, citado en Behar, R., 2009), “los juegos de azar han sido objeto de recreación del ser humano desde hace muchos siglos, como lo demuestran los hallazgos de hermosas piezas de juegos de mesa que eran usados en Egipto y en Palestina, inclusive 3000 años antes de Cristo”. Algunos de estos juegos de mesa, que han sido encontrados en tumbas de la realeza egipcia, pero que también eran vistos en todas las clases sociales de aquella época eran: Behar, R. (2009):

- **El juego de perros y chacales**

No ha sido posible hallar explícitamente las reglas de este juego, pero hay algunas conjeturas de estas. El tablero fue hallado en una tumba egipcia, específicamente un tablero fue descubierto en la tumba de Reny-Seneb, dinastía XII, aproximadamente 1800 antes de Cristo. Pertenece a la familia de los juegos llamados “Juegos de los 30 puntos” o “Juego de los 58 huecos”. Muchos de los trozos de este juego han sido encontrados en Egipto, de igual manera en Palestina, Mesopotamia y Asiria.

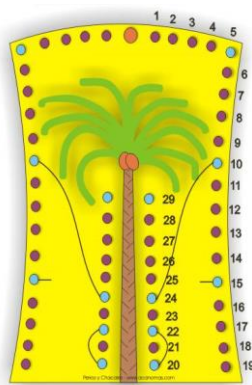


Ilustración 1. Tablero del juego de perros y chacales. Tomado de Google imágenes.

- **El Juego del Senet**

Este juego era muy tradicional y conocido en el antiguo Egipto, contenía un número de dos, cinco o siete piezas por jugador. La tabla de juego minuciosamente esculpida fue encontrada en la tumba del rey Tutankhamon de lajas de piedra caliza con líneas esculpidas en ellos o simples trozos de madera.

El tablero del Senet tenía 30 cuadros que eran atravesados por una ruta en forma de “S”. Los jugadores ponían sus piezas alternativamente sobre los primeros 10 a 14 primeros cuadros del tablero. Ellos iban avanzando de acuerdo con los resultados del lanzamiento de algunos objetos como pequeños palos, huesos u otro objeto que hacía las veces de dado. El

propósito del juego parece haber sido, cambiar de lugar las piezas hasta los últimos cuadros del tablero, removiendo las piezas que constituían obstáculo en el camino. Parece que el hecho de llegar al cuadrado numero 26 llamado *Nefer* era buen augurio.



Ilustración 2. Grabado en la que aparece la Reina Egipcia Nefertari jugando el Senet (New Kingdom – Dynasty 18, 1549 – 1298 antes de Cristo). Tomado de Google imágenes.

- **El Juego Real de Ur**

La pieza de este juego fue hallada al sur de Irak y data de aproximadamente 2600 años antes de Cristo. Se cree que sus reglas pueden ser similares a las del conocido juego de Damas Chinas.



Ilustración 3. Juego Real de Ur, Museo Británico. Tomado de Google imágenes.

- **Los cubos o dados**

Eran huesos especiales de animales, como el hueso astrágalo o talus, hueso del talón de un animal corredor, que eran usados por los antiguos para crear números al azar, en varios juegos de mesa.

- **El Juego de pares o nones**

Ha sido usado para propósitos de adivinación desde los primeros registros de la historia y es todavía usado entre tribus africanas.

- **El Juego de cartas**

Fue inventado alrededor del año 1.350 después de Cristo, pero una vez apareció poco a poco comenzó a desplazarse por los dados como instrumento de juego y como narradores de la suerte, pues en un principio, las cartas eran muy costosas y estaban más allá del alcance de un jugador promedio. Su influencia en la temprana historia de la probabilidad fue muy tenue.

Huygens, C. y Bernoulli, J. conceptuaron sobre la aleatoriedad en términos de los dados. La mezcla de dados y cartas comenzó con Montmort y De Moivre. Hoy en día, los dados son usados con poca frecuencia, salvo por los juegos de niños y por los casinos, sin embargo, la cartomancia en muchas formas ha sobrevivido.

Según Hacking, I. (1975. Citado en Batanero, C. 2005, p. 253), no se sabe con exactitud cuándo se iniciaron los juegos de azar, ni se deduce por qué el cálculo de probabilidades se desarrolla mucho más tarde que otras ramas de las matemáticas. A pesar de la inclinación por los juegos y su premio económico, la aparición que había de ideas combinatorias y filosóficas sobre el azar o de la disponibilidad de registros estadísticos, la probabilidad estuvo ausente como idea matemática hasta el siglo XVII.

2.1.2. Las paradojas en la historia de la probabilidad

“La construcción de la teoría de la probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de esta” (Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. 2005 citado en Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. 2009, p. 2). Cuando se analiza la historia se llega a la conclusión de que los objetos probabilísticos no estuvieron desde un principio, sino que fueron fruto del ingenio y la construcción humana para dar respuesta a situaciones problemáticas.

Székely, G. (1986 citado en Batanero, C. 2005) menciona que “el desarrollo progresivo de la probabilidad estuvo unido a un gran número de paradojas que muestran la diferencia entre los aspectos intuitivos y formales del tema”. (p. 253)

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2009) mencionan que no es difícil encontrar paradojas en la historia de probabilidad y estadística, ya que esta está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición en estadística y probabilidad, con frecuencia nos engaña. Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas que algunas personas le dieron, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos. (p. 2)

Estos problemas fueron resueltos, en su mayoría, mediante un cambio de punto de vista sobre la situación dada y en general, implicaban la introducción de nuevos conceptos. (Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. 2012, p. 4).

2.1.3. Concepto de paradoja y de probabilidad

- **Significado de paradoja**

Según Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. (2012) “una paradoja es un resultado o idea que, aparentemente, es opuesta a la opinión general, porque lleva implícita una contradicción lógica que, a primera vista, no se percibe. Una vez resuelta, generalmente se produce un aprendizaje, bien de un concepto que no se conocía o de una relación entre conceptos que aparecía oculta en el problema” (p. 4)

Por otra parte, Agnelli, H., y Peparelli, S. (2011), asumen que una paradoja probabilística es una situación problemática que puede arrojar más de un resultado, de allí que, pueda considerarse que, en el abordaje de estas, un sujeto se vea abocado a revisar de manera crítica sus concepciones y adoptar nuevas soluciones. (p. 2)

Por lo cual concluimos que una paradoja es un problema que da resultados o ideas que, aparentemente, son lo contrario a lo que generalmente se cree, ya que implícitamente lleva una contradicción lógica casi imperceptible y es necesario hacer una revisión crítica de las concepciones que se tienen y tomar nuevas soluciones. Para que, una vez que se le encuentra solución se produzca un aprendizaje.

Además de paradojas se puede encontrar las cuasi paradojas, las cuales Leviatan (2002, p. 3) asume como situaciones que arrojan resultados contrarios a la intuición y al sentido común y que favorecen al mejoramiento y a la reformulación de intuiciones. Estas muchas veces son introducidas en una clase de probabilidad porque son parte de un plan más grande, puesto que Leviatan en su documento afirma que previo al tratamiento de un tema, en primera instancia es necesario solicitar al estudiante que responda un cuestionario sobre problemas que involucren el tema a desarrollar; como segunda instancia es necesario guiar la discusión en la clase acompañada por una selección de “cuasi paradojas” probabilísticas y finalmente se debe discutir acerca de alguna famosa paradoja relacionada con el tema en tratamiento.

- **Significado de probabilidad**

Los diferentes significados que se le atribuyen a la probabilidad pueden reflejar las distintas concepciones que se encuentran latentes en la solución de problemas cotidianos de probabilidad y que al mismo tiempo ayudan a entender mejor los distintos errores que se comenten (Pérez, E., 1990, citado en Batanero, C. 2005, p. 252)

Según Batanero, C. (2005, p. 252 - 255), a lo largo de su desarrollo histórico, diferentes significados han sido asociados a este concepto y todavía coexisten:

Significado intuitivo: las ideas intuitivas aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, hacen uso de frases comunes para cuantificar los sucesos inciertos y expresan su grado de creencia en ellos.

Significado laplaciano: a partir de la correspondencia entre Pascal y Fermat donde dan solución a algunos problemas asociados a los juegos de azar, se considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad. A partir de allí, estos personajes y sus contemporáneos hablan de sus resultados en términos de *apuesta equitativa o división de la apuesta*. Hasta llegar a la definición: “Si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia”

La definición más conocida bajo esta aproximación es aportada por Laplace en 1.814 como: “una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles”, hoy se conoce como regla de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en número finito de posibilidades.

Significado frecuencial: Bernoulli sugirió que era posible asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos, a partir de la frecuencia relativa observada en una serie de grande de ensayos del experimento. A partir de esto, se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse.

Significado subjetivo: En el enfoque subjetivo ya no es necesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones para dar sentido a la probabilidad, pues Keynes, Ramsey y De Finetti describen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia de la persona, quien los asigna sobre el suceso dado.

Significado matemático: durante el siglo XX, hubo contribuciones al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Kolmogorov usó la idea de Borel donde veía la probabilidad como un tipo de especial de medida, para aplicar la teoría de conjuntos y de la medida y así deducir una axiomática que han aceptado todas las escuelas, independientemente del significado otorgado a la naturaleza de la probabilidad. Desde ese momento, la probabilidad es simplemente un modelo matemático que se puede usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios, de igual manera es útil es casi todos los campos de la actividad humana.

Batanero, C. (2005), plantea una tabla, en la cual muestra los elementos que caracteriza los diferentes significados de la probabilidad:

Tabla 1

Elementos característicos de los significados de la probabilidad.

Significado	Campos de problemas	Algoritmo y procedimiento	Elementos lingüísticos	Definiciones y propiedades	Algunos conceptos relacionados
-------------	---------------------	---------------------------	------------------------	----------------------------	--------------------------------

Intuitivo	Sorteos. Adivinación.	Manipulación de generadores de azar: Dados, Cartas, etc.	Lenguaje ordinario.	Opinión impredecible, creencia.	Suerte. Destino.
Clásica	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar.	Combinatoria. Proporciones. Análisis a priori de las estructuras del experimento.	Triangulo aritmético. Listados de sucesos. Formulas combinatorias.	Cociente de casos favorables y posibles. Equiprobabilidad de sucesos simples.	Esperanza. Equitatividad. Independencia.
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones	Registros de datos estadísticos a posteriori. Ajuste de curvas matemáticas. Análisis matemático. Simulación.	Tablas y gráficos estadísticos. Curvas de densidad. Tablas de números aleatorios. Tablas de distribuciones.	Límite de las frecuencias relativas. Carácter objetivo basado en la evidencia empírica.	Frecuencia relativa. Universo. Variable aleatoria. Distribución de probabilidad.
Subjetiva	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles.	Teorema de Bayes. Asignación subjetiva de probabilidades.	Expresión de la probabilidad condicional.	Carácter subjetivo. Revisable con la experiencia.	Probabilidad condicional. Distribuciones a priori y a posteriori.
Axiomática	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios y abstractos.	Teoría de conjuntos. Álgebra de conjuntos. Teoría de la medida.	Símbolos conjuntista.	Función medible.	Espacio muestral. Espacio de probabilidad. Conjuntos de Borel.

Tabla 1. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad. Tomada de Batanero, C. (2005) pág. 256

2.1.4. La simulación: un instrumento de modelización en probabilidad

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como proceso de modelización. En términos de Henry, M. (1997, citado en Batanero, C. 2009). "un modelo es

una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad". (p. 39)

Según Batanero, C. (2009, p. 39), la modelización, su constante parecido con la realidad y su avance continuo actúan en cada fase de la resolución de problemas estadísticos, no sólo en el análisis de datos en situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico, es decir, la modelización forma parte inseparable de la actividad estadística. Como indica McLean, A. (2001, citado en Batanero, C. 2009), "el razonamiento estadístico no es muy diferente del razonamiento científico o incluso del razonamiento "cotidiano". Es habitual usar modelos, aun sin ser conscientes de ello, así es como creamos modelos de las personas con base en su raza, sexo, condición social o aspecto. Aunque, no es regular que la enseñanza de la estadística en secundaria o incluso en la universidad enfatice en la modelización. Esto puede dar cuenta de la dificultad en los estudiantes por reconocer el modo particular de razonamiento estadístico, en el cual la modelización juega un papel muy importante". (p. 40)

También, Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2009), indican que dentro de la probabilidad existe un gran número de problemas o paradojas en estadística y probabilidad que puede hacer dudar incluso a los expertos. Es por esto, que es importante construir intuiciones correctas en este campo. Por esta razón, se cree indispensable dar a conocer a los estudiantes actividades de estadística y probabilidad, en forma de juegos y experimentos. Sin embargo, las actividades a desarrollar no se deben escoger al azar. Es preciso un principio de organización, en la forma de la espiral curricular, escalonada por las ideas fundamentales. (p. 6)

Batanero, C. (2009) menciona que “enseñar la probabilidad como una actividad de modelización y no como un conjunto de teoremas matemáticos que se deducen de una serie de axiomas, no es una tarea sencilla. Para facilitar este trabajo a los docentes, la Comisión ínter - IREM¹ para la enseñanza de la estadística y probabilidad organizó hace unos años un proceso de reflexión sobre el trabajo de modelización en la enseñanza de las probabilidades, produciendo algunas sugerencias, como los pasos esenciales en la actividad de modelización para la enseñanza de la probabilidad en secundaria con el enfoque recomendado en los nuevos currículos franceses:

1. Observación de la realidad.
2. Descripción simplificada de la realidad.
3. Construcción de un modelo.
4. Trabajo matemático con el modelo.
5. Interpretación de resultados en la realidad.” (p. 40)

Por medio de estos pasos Batanero, C. (2009) menciona que se reconoce el funcionamiento de la actividad de investigación y también de la forma en que se aprende en la vida diaria. Además, que el propósito de realizar una modelización es obtener una mejor comprensión de una parte del universo, para poder predecirla y si es posible, controlarla. (p. 41)

En el estudio de la probabilidad lo que le da mayor interés es la exploración de las posibilidades de algún experimento y de sus aplicaciones a casos reales, y una pregunta que es típica en el docente es si sería posible realizar un estudio intuitivo de estos temas con ayuda del material concreto, calculadoras u ordenadores (Batanero, C. 2009, p. 45).

¹ Los IREM (Instituts de Recherche sur Enseignement des Mathématiques) son centros de investigación y desarrollo en didáctica de las matemáticas en diversas localidades francesas. Hay un total de 15 comisiones ínter - IREM, que agrupan investigadores interesados en un mismo tema, para realizar un trabajo cooperativo.

Como indica Girard, J. (1997, Citado en Batanero, C. 2009), “al trabajar mediante simulación se está ya modelizando porque se debe no sólo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de esta, que se quiere simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado” (p. 45). Esto es importante, puesto que cualquier problema probabilístico implica una serie de experimentos aleatorios compuestos de una determinada manera. Cada uno de estos experimentos puede ser simulado con un modelo convenientemente escogido.

Batanero, C. (2009), indica que, “aunque es importante que los estudiantes realicen algunas actividades de simulación con apoyo de material manipulativo, como monedas, dados o ruletas, con tablas de números aleatorios y calculadoras, es realmente el ordenador el que proporciona una mayor potencia de simulación, construcción de modelos y exploración de estos” (p. 46 - 47). Pues, la versatilidad de algunos programas permite que sean los estudiantes aquellos que formulen y exploren sus propios problemas e introducirse de forma experimental en la modelización estadística y probabilística de un gran número de situaciones reales.

Además, como dicen Gámez, A., y Marín, L. (2011), “en la enseñanza del siglo XXI no podemos volver la espalda al uso de las TIC, ya que su uso permite reforzar conceptos, aclarar dudas y resolver problemas de una forma más efectiva, y concretamente en la enseñanza de la estadística se ve claramente que el uso de plataformas educativas y la incorporación de recursos didácticos interactivos, facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje. El uso de recursos didácticos interactivos permite así mismo la evaluación, la autoevaluación y la evaluación entre iguales” (p. 74).

2.2. Perspectiva cognitiva

2.2.1. *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico.*

Se reconoce la importancia de los trabajos realizados por Pólya desde la educación matemática para el favorecimiento del aprendizaje de la resolución de problemas, puesto que Pólya, a través del libro “Como plantear y resolver problemas”, introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, pero particularizamos para el presente trabajo a ciertas heurísticas presentes en situaciones probabilísticas.

En Díaz, C. (2003) se menciona que a través del tiempo algunos autores tales como Laplace, Edwards, Lindamn y Savage, han ahondado sobre el razonamiento probabilístico y que los autores Kahneman y Tversky propusieron el programa “Heurísticas y sesgos” donde se da a conocer los errores que las personas cometen en el momento de realizar juicios de probabilidad y agregan que estos errores se deben a un obstáculo de la capacidad de procesar la información. A partir de lo anterior, se menciona que se han llevado a cabo muchas investigaciones para estudiar estos errores sistemáticos y la forma para evitarlos, esto para, ayudar a las personas en la exactitud de sus juicios. (p. 2)

Según Díaz, C. (2003, p. 3), por lo regular, las personas no poseen un buen razonamiento estadístico cuando deducen intuitivamente algún suceso incierto, ya que no han aprendido leyes que permitan exceder sus capacidades de cálculo mental. Por el contrario, creen en reglas relativamente simples y que presentan una validez ficticia, pueden pensarse como lógico seguirlas, pero en muchos casos conllevan a sesgos predecibles, estas son llamadas *heurísticas*, las cuales orientan sus juicios.

Díaz, C. (2003, p. 3) presenta tres procedimientos heurísticos: representatividad, disponibilidad y ajuste-anclaje.

Representatividad

La representatividad hace referencia a la relación entre muestra y población, como también entre un resultado y modelo, dentro de un juicio. Por ejemplo, puede entenderse el modelo como una moneda, y el resultado puede referirse a la secuencia de sellos o caras. Con situaciones como esta, la representatividad puede ser estudiada empíricamente por las personas, cuando se les pregunta sobre qué es más representativo en una moneda, si la secuencia de caras o la secuencia de sellos. (Clavería, A. y Clavería, R., 2004, p. 39)

Kalil, L., Melo, W., Schneider, D., Stein, L., y Tonetto, L. (2006, p. 186) mencionan que la representatividad se determina por el gran parecido de un evento en particular con la mayoría de los demás de una misma clase. Así pues, se considera entonces que, para predecir la ocurrencia de un evento, se debe revisar el nivel en el cual es similar a las principales características de la población de origen. Por ejemplo, si una persona tiene las mismas características sobre su personalidad de un grupo de personas, se dice entonces, que esta persona es representativa de ese grupo.

Según Kalil, L., et al (2006, p. 186), algunas situaciones favorecen el uso de la heurística de la representatividad, como, por ejemplo: cuando se pide encontrar la probabilidad de que un objeto A pertenezca a la clase del objeto B y la probabilidad de que del objeto A se obtenga un resultado B. Para esto, Kalil, L., et al (2006, p. 186), menciona que las personas evalúan las probabilidades relacionadas en cuanto a si A es similar a B, utilizando de esta forma la heurística de la representatividad como base para su análisis probabilístico.

La representatividad puede ser explicada desde el ejemplo de Steve según Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 186). Steve es un hombre muy

tímido, con poco interés en las personas o en el mundo real. Steve es una persona con un alma ordenada, por lo cual tiene todo ordenado y estructurado, tiene gran pasión por el detalle. A partir de esta descripción, ¿Cuál es la probabilidad de predecir con seguridad la profesión de Steve?, de acuerdo con los principios de la heurística de la representatividad, la posibilidad, por ejemplo, que Steve sea bibliotecario, está asociada al grado de similitud entre su personalidad y las características de dicha profesión.

Cuando las personas se enfrentan a situaciones donde deben inferir un razonamiento estadístico conlleva la comprensión de dos ideas sobre el muestreo que aparentemente son contrarias: La representatividad de una muestra y la variabilidad muestral, una propone que ésta ofrece información sobre la población y la otra indica que las muestras varían entre sí (Díaz, C., 2003, p. 3).

No se puede negar que utilizando esta heurística regularmente se obtiene buenas respuestas, puesto que las muestras y los resultados más significativos tienen una mayor probabilidad de ocurrir, pero centrarse sólo en la semejanza entre la muestra con la población de origen puede conllevar a no tener en cuenta otros elementos esenciales de la información, como el tamaño de la muestra y omitir resultados anteriores, ocasionando algunas falencias como (Díaz, C., 2003, p. 3-5):

- **Insensibilidad al tamaño de la muestra:** Se da por creer que la probabilidad de una muestra es independiente de su tamaño.
- **Concepciones erróneas sobre el azar:** Se da por creer que una secuencia pequeña de resultados debe representar fielmente sus características. Es por esto, que al observar secuencias relativamente ordenadas no coinciden con el resultado de un suceso aleatorio.

- **Falacia de las tasas base:** Se da cuando una persona ignora información general de un suceso para determinar la probabilidad de ocurrencia y se centra en la información específica.
- **Falacia de la conjunción:** Se da por creer que es más probable la intersección de dos sucesos que su unión.

Disponibilidad

Tversky, A., y Kahneman, D (1974 citado en Clavería, A. y Clavería, R. 2004, p. 49), afirma que la heurística de disponibilidad hace referencia a la estrategia de considerar la ocurrencia de un evento, mediante situaciones relacionadas con este que llegan a la mente. Medin, D. y Ross, B., (1997 citado en Clavería, A. y Clavería, R. 2004, p. 50) definen la heurística de disponibilidad como la tendencia a realizar un juicio basado en información que llega con gran facilidad a la mente. Por ejemplo, al consultarle a una persona si se puede encontrar palabras en inglés que empiezan con la letra t o con la letra k, inmediatamente la persona pensaría en palabras con estas letras, por tanto, una persona posiblemente pensaría más en letras con la letra t y concluir que la letra t es más frecuente que la k.

Según Kardes, F., (2002 citado en Clavería, A. y Clavería, R. 2004, p. 50), la heurística de disponibilidad conlleva a predecir un evento a partir de que vayan llegando ejemplos relevantes relacionados a este a la mente. Si los ejemplos llegan fáciles y rápido, se dice que están “disponibles” en la mente, por lo tanto, el evento a pronosticar es bastante que un caso contrario.

Uno de los estudios más importante sobre la heurística de la disponibilidad fue hecho por Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado en Clavería, A. y Clavería, R. 2004), donde se

les planteo a los que participaron el siguiente interrogante: si una palabra de tres letras se muestra aleatoriamente en un texto en inglés, ¿qué es más frecuente que la palabra empiece con la letra r o que tenga la letra en la tercera posición? Gran parte de los participantes estimaron de forma errónea pues consideraron más probable encontrar palabras que empiecen con la letra r, porque es más fácil recordar las palabras que empiezan por esta letra. Según Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 50), el uso de la heurística de la disponibilidad conlleva en ocasiones, a creer que la memoria de largo plazo influye en la predicción de un evento, lo cual no estaría bien.

Así mismo, Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 185) menciona que la imaginación juega un papel importante en la heurística de la disponibilidad, puesto que ayuda en la valoración de la frecuencia y la probabilidad de ocurrencia de un evento. De igual forma, la imaginación está asociada al interés que tiene la persona por el evento, aunque también, se debe poner en evidencia que esto, puede influenciar de forma negativa en la estimación de probabilidades, puesto que la imaginación de una persona está limitada.

Según Díaz, C. (2003, p. 5) algunas veces las personas calculan la probabilidad de un suceso teniendo en cuenta ejemplos de este: “generalmente se evocan con más facilidad ejemplos de clases grandes que ejemplos de categorías menos frecuentes”. Al usar esta heurística se ocultan falencias relacionados con la falta de capacidad combinatoria:

- **Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos:** Se da cuando se cree que una categoría cuyos ejemplos se recuperan fácilmente parecerá más numerosa que una categoría de igual frecuencia, pero cuyos ejemplos sean menos recuperables.
- **Sesgos debidos a la efectividad de un proceso de búsqueda:** Se da cuando se considera con más facilidad encontrar cierto suceso que otro.

- **Experiencia:** Se da porque en varias ocasiones una persona puede recordar su punto de vista mejor de lo que puede recordar el punto de vista de la otra persona.

Ajuste – Anclaje

Según Kalil, L., et al, (2006, p. 183), los términos de ajuste y anclaje se popularizaron en la literatura sobre el juicio y la toma de decisión por Tversky y Kahneman (1974). Al tomar decisiones o realizar estimaciones, las personas utilizan este tipo de heurística, que se basa en encontrar un punto de partida (ancla) y adaptar con la información que se tenga. Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 183) plantea el anclaje y el ajuste como un proceso donde las personas construyen estimaciones a partir de un valor inicial para luego acomodarlo y presentar una respuesta final.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 183), menciona que, en varios estudios, para el proceso de anclaje, las personas inicialmente realizan una comparación entre el valor del ancla con el valor objetivo. Por ejemplo, Tversky y Kahneman propusieron el siguiente estudio: “se pidió a un grupo de estudiantes que estimaran el porcentaje de países africanos en las Naciones Unidas, antes de realizar esta estimación, debían girar una rueda con números entre 1 y 100. El grupo que recibió el número 10 como ancla inicial estimó un 25% en promedio, mientras que el grupo que recibió el número 65 como valor inicial tuvo una estimación media del 45%”.

El anclaje se produce también cuando el individuo realiza su estimación a partir de un resultado de un cálculo incompleto (Tversky, A., y Kahneman, D., 1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 183-184). En otro estudio de Tversky y Kahneman, se les pidió a los estudiantes en un tiempo de 5 segundos, resolver el siguiente producto: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ mientras que el otro debía resolver en el mismo tiempo, el producto

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$. El resultado estimado en la primera secuencia fue de 2.250, mientras que el resultado estimado en el segunda fue de 512. Tversky, A., y Kahneman, D. (1974 citado Kalil, L., et al, 2006, p. 184) afirma que el resultado de los primeros pasos de la multiplicación sirvió de ancla para la estimación final de los dos grupos.

Según Díaz, C. (2003, p. 6) se puede encontrar situaciones en las que se hacen estimaciones teniendo en cuenta un valor inicial y después se hacen ajustes hasta llegar a la respuesta final. El valor inicial o ajuste tienden a ser insuficiente y conduce a estimaciones diferentes que están sesgadas por los valores iniciales, llevando a un ajuste erróneo.

2.2.2. Implicaciones para la enseñanza

Díaz, C., (2003, p. 10) afirma que prácticamente toda la estadística está compuesta de ideas sobre condicionamiento, independencia y muestreo, donde los razonamientos intuitivos llevan a sesgos sistemáticos. Los estudiantes hoy en día necesitan vivir experiencias sobre los fenómenos aleatorios, proponerles problemas en donde se incluyan estos fenómenos y discutir las concepciones erróneas que se presentaron en su solución, puesto que la enseñanza formal ya no es suficiente para superar estos errores.

Díaz, C. (2003, p. 10) recomienda permitir a los estudiantes experimentar con ordenadores simulaciones de situaciones aleatorias, puesto que, esto contribuye a mejorar la comprensión del estudiante de las ideas de variabilidad muestral, estadístico y su distribución

2.4. Referentes curriculares

Para el diseño del recurso didáctico interactivo, se tendrá en cuenta en primer lugar todos los referentes curriculares que ayudan a orientarlo de manera objetiva, como lo son, los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los

Derechos Básicos de Aprendizaje elaborados por el MEN (1998, 2006 y 2016). Estos referentes nos muestran la objetividad de lo que se propone desde los planteamientos normativos que plantea el MEN.

2.4.1. Lineamientos curriculares de matemáticas

Teniendo en cuenta los lineamientos curriculares de matemáticas planteados por el MEN (1998), Dentro de estos, se tienen en cuenta tres (3) aspectos importantes:

- Los procesos generales: que tienen que ver con el aprendizaje, estos pueden ser el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos,
- Los conocimientos básicos: que tienen que ver con procesos específicos que fomentan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, y
- El contexto: tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende.

Tales aspectos tienen que ser descritos y enlazados en cualquier participación planeada en el aula, puesto que, posibilitan el desarrollo de habilidades y conocimientos en matemática.

De acuerdo con lo anterior, el diseño del recurso didáctico interactivo está situado en un contexto de resolución de problemas a través de una situación matemática, apuntando al desarrollo del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, siendo este conocimiento básico en el que se abordaran procesos tales como, el razonamiento, la resolución de problemas y la comunicación.

Los estándares básicos de competencia en matemáticas planteados por el MEN (2006, p. 52), afirma que la resolución de problemas hace parte de un proceso (formulación, tratamiento y resolución de problemas) que debe de estar presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica, más aun, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, ya que, las situaciones problema brindan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los estudiantes. Estos problemas pueden surgir del todo aquello que nos rodea en nuestra vida cotidiana, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, transformándose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad.

Además, el MEN (2006, p. 52), plantea que la formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas producidos por una situación problema ayudan a crear una actitud mental perseverante e inquisitiva, abrir una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas, lo cual es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas.

Se quiere dar a conocer un recurso didáctico interactivo que posibilite al estudiante en el refuerzo de sus conocimientos desde un enfoque experimental.

2.4.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

El diseño del recurso didáctico interactivo tiene en cuenta la coherencia vertical que se propone en los estándares básicos de competencias en matemáticas planteados por el MEN (2006), es decir, que el estudiante necesitará poner en práctica aquellos conocimientos

adquiridos en años anteriores, por lo cual se ha realizado una revisión en los estándares correspondientes al pensamiento aleatorio y sistemas de datos desde los primeros grados de la educación secundaria hasta el conjunto de grados décimo a undécimo, como se observa en la siguiente tabla.

Tabla 2

Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados sexto a séptimo.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS	
GRADOS	ESTÁNDAR
Sexto a séptimo	Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
	Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
	Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.

Tabla 2. Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados sexto a séptimo. Tomado de MEN (2006)

Se puede notar que desde los primeros grados de secundaria se realiza un trabajo inicial con respecto a la aplicación de estrategias de solución a situaciones que involucran el objeto matemático, así como también se propone un acercamiento a la probabilidad en el cálculo de ocurrencia de eventos, identificando propiedades y características de ello.

Tabla 3

Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados octavo a noveno.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS	
GRADOS	ESTÁNDAR
Octavo a noveno	Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
	Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
	Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

Tabla 3. Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados octavo a noveno. Tomado de MEN (2006)

Desde los estándares anteriormente mencionados, se puede notar que ha dado una continuidad en el trabajo con los conceptos básicos de probabilidad, por lo cual se espera que el estudiante tenga conocimiento de las variables didácticas que intervienen, como espacio muestral, independencia, diagrama de árbol, técnicas de conteo, entre otros. Así mismo, se pretende que el estudiante este más familiarizado con los elementos necesarios para el cálculo de probabilidad.

Para finalizar se presentan los estándares encontrados en el conjunto de grados de décimo a undécimo en relación con el objeto matemático.

Tabla 4

Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados décimo a undécimo.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS	
GRADOS	ESTÁNDAR
Décimo a undécimo	Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para

	estudiar un problema o pregunta.
	Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
	Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).
	Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Tabla 4. Estándares del pensamiento aleatorio y sistema de datos con relación a la probabilidad de los grados décimo a undécimo. Tomado de MEN (2006)

En consecuencia, se ha podido evidenciar que los estudiantes en grado decimo y undécimo ya poseen conocimiento con respecto al objeto matemático tomado en consideración. En este sentido el diseño del recurso didáctico interactivo tiene la finalidad de hacer que el estudiante ponga en práctica estos conocimientos previos en relación con los elementos conceptuales de probabilidad y sus propiedades.

2.4.3. Derechos Básicos de Aprendizaje

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), planteados por el MEN (2016), han sido propuestos en concordancia con los Estándares Básicos de Competencias y con los Lineamientos Curriculares, así mismo se definen como una herramienta que permite identificar los saberes básicos que los estudiantes deben adquirir en cada grado, de esta manera se realiza una revisión en algunos ítems relacionados con probabilidad y se tendrán en cuenta para el proceso de aprendizaje que propone en el MEN.

Tabla 5

Derechos básicos de aprendizaje con relación a la probabilidad de los grados sexto a décimo.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE	
GRADOS	ÍTEM
Sexto	A partir de la información previamente obtenida en repeticiones de experimentos aleatorios sencillos, compara las frecuencias esperadas con las frecuencias observadas.
Séptimo	Usa el principio multiplicativo en situaciones aleatorias sencillas y lo representa con tablas o diagramas de árbol. Asigna probabilidades a eventos compuestos y los interpreta a partir de propiedades básicas de la probabilidad.
Octavo	Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.
Décimo	Propone y realiza experimentos aleatorios en contextos de las ciencias naturales o sociales y predice la ocurrencia de eventos, en casos para los cuales el espacio muestral es indeterminado.
Undécimo	Plantea y resuelve problemas en los que se reconoce cuando dos eventos son o no independientes y usa la probabilidad condicional para comprobarlo.

Tabla 5. Derechos Básicos de Aprendizaje con relación a la probabilidad de los grados de sexto a undécimo. Tomado de MEN (2016)

Por consiguiente, se puede constatar que hay una estrecha relación entre los Estándares planteados en los grados de escolaridad mencionados y los DBA (2016). Esta fue una de las razones que se puso en consideración para pensar en la construcción de un recurso didáctico interactivo, que ponga en ejecución los conocimientos adquiridos respecto a probabilidad, evidenciando a través de estos referentes que el grado en que se podía contemplar tal construcción es en grado undécimo.

2.5 La importancia del uso de las TICS

Según Santos, L. (2007), se propone dentro del currículo matemático que los estudiantes hagan uso de las herramientas computacionales en su proceso de aprendizaje. No obstante, el docente al enfrentarse a la gran evolución de la tecnología y el hecho de resaltar que diferentes instrumentos pueden brindar una variedad de caminos y oportunidades para los estudiantes en los procesos de comprender y resolver problemas matemáticos debe explorar la potencialidad que presentan algunas de esas herramientas en la construcción del conocimiento. (p. 35)

Santos, L. (2007) cita que las herramientas computacionales promueven un cambio en lo que los estudiantes pueden elaborar con las representaciones convencionales y amplían el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar. Esto se puede ver cuando los estudiantes son capaces de mover, invertir, reducir, visualizar relaciones. Así mismo, cuando los estudiantes adquieren la habilidad de utilizar nuevas herramientas, pueden de igual manera, examinar las formas en que algunas representaciones que se realizan empleando la tecnología se diferencian de las representaciones convencionales. (p. 37)

El software dinámico resulta una herramienta útil en la construcción de simulaciones, puesto que facilitan el aprendizaje en los estudiantes, en particular, Santos, L. (2007) menciona que el uso de software dinámico como Cabri Geometry, Sketchpad o Geogebra, ofrecen algunas herramientas permitiendo que los estudiantes puedan desarrollar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Además, les otorga la habilidad de efectuar frecuentes exploraciones y comprobar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. (p. 38)

Zbiek, R., Heid, M., y Blume, G. (2007, citado en Santos, L. 2007) “distinguen dos tipos de actividad matemática donde el empleo de herramientas computacionales juega un papel importante: las actividades técnicas y conceptuales. Las técnicas se refieren a las acciones sobre los objetos matemáticos o sobre sus representaciones como realizar una construcción geométrica, una medición, un cálculo numérico, una manipulación algebraica, resolver una ecuación, recoger datos, ordenarlos, etc. Mientras que una actividad conceptual se refiere a aspectos relacionados con formas de comprender ideas y resolver problemas matemáticos” (p. 49). En ese proceso, es necesario que, en el momento de realizar un diseño de un recurso didáctico interactivo, este les permita a los estudiantes comunicar y buscar conexiones, estructuras y relaciones matemáticas.

Según Godino, J. (1995, p. 6) la exploración que permiten las herramientas computacionales en situaciones estadísticas y probabilísticas posibilita la resolución de problemas mediante la creación de recursos con los que se pueden interactuar. La viabilidad de crear simulaciones de experimentos aleatorios hace posible la experimentación, observación y exploración de conceptos estadísticos y probabilísticos. Igualmente, brinda la oportunidad de cambiar los parámetros a los que está sometido el comportamiento de estos conceptos, de una forma interactiva, y de observar el efecto producido, mediante las representaciones gráficas, proporcionando una experiencia que no es fácil alcanzar en la vida real.

El fundamento de la simulación de fenómenos aleatorios se basa en dos principios dados por Heitele, D. (1975, citado en Godino, J. 1995, p. 6). El primero es la concepción frecuencial de la probabilidad, que se considera como el número a que tendería la frecuencia relativa de un suceso, al repetir indefinidamente un experimento aleatorio, el valor que se obtiene es aproximado, no en el sentido ordinario del análisis numérico, sino en el sentido estadístico y probabilístico, de convergencia de las frecuencias relativas a las

correspondientes probabilidades teóricas. El segundo principio es la posibilidad de estudiar las propiedades de un fenómeno aleatorio, sustituyéndolo por otro "isomorfo".

Fischbein, E. (1975, citado en Godino, J. 1995, p. 7) afirma que por medio de la simulación en las herramientas computacionales se crea un modelo sintetizado de aquel fenómeno, quitando las variables sin importancia a su estructura, reduciendo el tiempo y de gran manipulación por el estudiante. El empleo de simulaciones permite poner en manos del estudiante un nuevo instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, ayudando a mermar el problema de la falta de experiencia estadística y probabilística y a mejorar la intuición probabilística que, en general, no se desarrollan espontáneamente.

CAPITULO III

3. METODOLOGÍA

3.1. Taller de Diseño de Recursos Didácticos Interactivos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística utilizando GeoGebra.

El taller de diseño de recursos didácticos interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística utilizando GeoGebra, es el referente que guiará el diseño del recurso didáctico planteado para este trabajo de grado. Este fue desarrollado por Dr. Antonio Gámez Mellado y Dr. Luis Miguel Marín Trechera. Ellos lo realizaron con los siguientes objetivos:

- Mostrar las ventajas de organizar los contenidos en objetos de aprendizaje y las características de este paradigma educativo.
- Mostrar el proceso de desarrollo de material educativo para su uso en la red seguido por los miembros del Departamento de Estadística de la Escuela Superior de Ingeniería de la Universidad de Cádiz.
- Compartir los recursos generados con compañeros de otras universidades.
- Generar una dinámica de trabajo entre grupos de innovación docente de distintas universidades.

El taller describe la participación que tuvo en una serie de proyectos de innovación docente recogidos en el catálogo de experiencias de este tipo de la Universidad de Cádiz. Así mismo, detalla todo el proceso de creación de recursos didácticos interactivos útiles para la

enseñanza y aprendizaje de la estadística en el entorno universitario, muestra cinco (5) fases que se contemplan en este proceso, desde la fase de planteamiento y objetivos, pasando por la fase de diseño y desarrollo, la fase de implantación o puesta en práctica, la fase de evaluación y mejora, y por último la fase de rediseño.

De igual manera, el taller recalca la importancia de cada una de las fases y se centra especialmente en la fase de diseño y desarrollo, en donde se realiza una descripción de forma detallada de los pasos a seguir en el diseño de un recurso didáctico interactivo concreto. Muestra que para diseñar recursos didácticos interactivos se pueden utilizar distintas herramientas de diseño, describen en particular cómo se pueden crear recursos didácticos interactivos, tipo applets de Java, utilizando GeoGebra.

Por último, se muestran algunas consideraciones, reflexiones y conclusiones que pueden resultar interesantes para el diseño de objetos de aprendizaje, de forma que estos objetos de aprendizaje puedan incorporarse en cualquier plataforma de aprendizaje. Por ejemplo, “GeoGebra permite la generación de materiales interactivos de una alta calidad con un esfuerzo menor que con otras herramientas de diseño de autor. La capacidad de exportación a distintos formatos es una de las potencialidades que tiene esta herramienta informática. La apariencia visual, la calidad del diseño y la capacidad de cálculo son realmente asombrosas”, (Gámez, A., y Marín, L., 2011, p. 95).

3.1.1. Objetos de aprendizaje

El taller muestra como uno de sus objetivos “mostrar las ventajas de organizar los contenidos en objetos de aprendizaje y las características de este paradigma educativo”, pero ¿qué significa objeto de aprendizaje?, Gámez, A., y Marín, L. (2011, p. 75) dicen que se

pueden localizar diversas definiciones del concepto “objeto de aprendizaje” dadas por diferentes autores y que de todas ellas se puede destacar las siguientes:

- Un recurso digital que puede ser reutilizado para ayudar en el aprendizaje.
- Una entidad digital o no digital que puede usarse para el aprendizaje, educación o entrenamiento.
- Recursos digitales modulares, identificados de manera única y con meta etiquetas, que pueden ser usados como soporte para el aprendizaje.
- Fragmentos interactivos de e-learning, orientados a la Web y diseñados para explicar un objetivo de aprendizaje independiente.
- Cualquier recurso digital que es encapsulado en una lección o un conjunto de lecciones que conforman unidades, módulos, cursos e incluso programas.
- Fragmentos autocontenidos, reutilizables y de alta calidad que se pueden combinar en cursos, actividades de aprendizaje para satisfacer las necesidades del estudiante.
- Nuevo modelo para el aprendizaje digital en el que el contenido de aprendizaje puede fluir entre sistemas y se puede combinar, reutilizar y actualizar de manera continua.

En el taller se describen los objetos de aprendizaje como “pequeñas piezas de información, de contenidos educativos, diseñados con el fin primordial de facilitar el aprendizaje: usamos objetos de aprendizaje para que los estudiantes aprendan. Por ello, los objetos de aprendizaje deben describirse de una manera clara, sencilla y eficiente, pensando en su utilización por estudiantes de distintos niveles y con una gran disparidad de conocimientos previos”.

Además, nos muestra que la característica principal es que estos puedan ser utilizados y reutilizados en diferentes contextos, y que al ser integrados en una plataforma de aprendizaje virtual es cuando los objetos de aprendizaje despliegan todo su potencial.

3.1.2. Fases en el Diseño de Recursos Didácticos.

Según lo mencionado por Gámez, A., y Marín, L. (2011, p. 77), hay un grupo de aspectos importantes para tener en cuenta en las distintas fases de diseño, planificación, seguimiento y evaluación de una actividad formativa:

1. Diseñar buenos materiales didácticos.
2. Realizar una eficaz comunicación-interacción.
3. Llevar a cabo una evaluación adecuada.
4. Contar con la motivación y el entusiasmo del docente.
5. Disponer de unas herramientas informáticas útiles y versátiles.
6. Tener el compromiso por parte de la Institución.
7. Establecer indicadores que nos permitan proponer acciones de mejora.

Estos siete aspectos, exigen a los docentes meditar sobre su estilo de enseñanza y sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. La labor del docente excede del diseño de este tipo de materiales, pero sí debería ser de interés del propio centro educativo. De esta forma, se podrían diseñar objetos de aprendizaje de este tipo, u otro similar, que fuesen de utilidad para un área de conocimiento o disciplina. Gámez, A., y Marín, L. (2011 p. 78) afirman que, en algunas Universidades, ya existe un gabinete de diseño e implementación de este tipo de recursos didácticos interactivos, en otras, hoy día es todavía una utopía.

Gámez, A., y Marín, L. (2011) mencionan que “algunos docentes opinan que la adaptación de los materiales de clase presencial a la enseñanza virtual o al aula virtual no es una tarea sencilla. Disponer de materiales tipo imprimible, fundamentalmente archivos PDF, no garantiza que estos materiales sean adecuados para su uso en el aula virtual. A veces, la labor más compleja es la adaptación de los materiales que disponemos” (p. 77)

Sin embargo, no se ha podido plantear una definición única y consensuada sobre qué se considera buen material educativo, pero la simple adaptación de materiales tradicionales, no suele ser siempre la mejor opción.

Gámez, A., y Marín, L. (2011) mencionan que “hay una regla de oro en la enseñanza con apoyo en el Aula Virtual. Los materiales deben estar siempre en continua revisión y actualización, por tanto, la mejora de las funcionalidades, adaptación al medio y la reusabilidad deben ser características que siempre deberíamos tener en cuenta. En estos términos, se considera de especial relevancia para el diseño de materiales interactivos, la mejora continua de los mecanismos de interacción y de la incorporación de las tecnologías informáticas más novedosas, durante todo el proceso” (p. 77)

Por lo anterior y por el carácter abierto de la enseñanza virtual, el estudiante siempre tendrá a su disposición la última versión. Además, para la elaboración de los materiales interactivos y su uso en la red, se debe disponer de un buen diseño y una excelente maqueta, unos materiales adecuados a la actividad docente programada.

El diseño de materiales interactivos es fundamental en la web, y también es fundamental en la enseñanza virtual, pues permite a nuestros estudiantes disponer de aplicaciones visuales que explican conceptos complejos, o permiten visualizar de forma clara errores o confusiones comunes.

En resumen, en el diseño de un recurso didáctico se deben contemplar al menos las siguientes fases o etapas:

- Fase de reflexión y análisis.
- Fase de diseño y maqueta.
- Fase de revisión y evaluación.

- Fase de mejora y rediseño.

3.1.3. Aspectos relevantes en el Diseño de un Recurso Didáctico Interactivo.

Como resultado del proceso de innovación, el docente debe de estar al día o adelante en recursos de información. Según Gámez, A., y Marín, L. (2011, p. 79), hoy en día se está produciendo un cambio en el rol del personal docente, en sus modelos pedagógicos y en la forma de llevar a cabo sus funciones, cambio que influye en gran manera en el rol del estudiante. Los indicadores que producen dicho cambio se pueden observar en la siguiente tabla.

Tabla 6

Cambios en el sistema educativo universitario.

ANTERIOR	NUEVO
Docente como sabio, gestor solidario de los contenidos y autónomo en su gestión docente	Deja de ser fuente de todo conocimiento y pasa a actuar como guía de los estudiantes
Enfoque docente centrado en el docente	Enfoque docente centrado en el estudiante
Metodología conductista / constructivista	Metodología socio – constructivista
Contenidos fuertemente estructurados y dirigidos (libros de texto, problemas)	Contenidos abiertos, débilmente estructurados
Atención a la mejora de la calidad de las lecciones magistrales	Atención a la gestión de la pléyade de recursos de aprendizaje
Aprendizaje memorístico del conocimiento	Elaboración de nuevos conocimientos y adquisición de destrezas
Rol pasivo del estudiante	Rol activo, participativo y colaborativo
Estructuras jerárquicas y cerradas	Estructuras distribuidas y abiertas
Trabajo individual	Trabajo en equipo

Infraestructura locales y aisladas	Redes universitarias
Enseñanza presencial con apoyo en campus virtual	Implantación generalizada de entornos virtuales
Objetivo docente: desarrollar contenidos	Objetivo docente: desarrollar competencias
Exceso de contenidos teóricos	Aproximación a los problemas reales
Uso cerrado de los recursos, manipulable exclusivamente por el docente	Uso abierto de los recursos, manipulable también por el estudiante
Fuentes de información, pocas y restringidas	Numerosas fuentes de información
Limitado uso de metodologías alternativas	Pléyade de actividades, Software libre y social

Tabla 6. Muestra los numerosos indicadores que caracterizan dicho cambio. Tomado de Gámez, A., y Marín, L. (2011). Pág. 79.

Teniendo en cuenta la información de la Tabla 2, se puede observar que es importante que los materiales y recursos didácticos sean abiertos, estructurados y manipulables por los estudiantes, que puedan distribuirse en plataformas de aprendizaje, que utilicen software libre y que se distribuyan a través de redes universitarias. Además, permite dar cuenta que los recursos interactivos que ofrezcan retroalimentación efectiva al estudiante, y que se puedan incorporar para su uso en la web son los recursos didácticos del presente y del futuro.

Gámez, A., y Marín, L. (2011) citan que “un aspecto importante en el momento de concebir y diseñar un objeto de aprendizaje es que este tenga en sí mismo un valor añadido, que aporte valor en algún aspecto del aprendizaje, como la aclaración de un concepto o de un término, o que proporcione una interacción efectiva y útil al estudiante. Esta fase del diseño y concepción es la más compleja. No es fácil pensar y reflexionar sobre qué debe incorporar un recurso didáctico, y en qué aspecto debe ofrecer interacción y/o retroalimentación” (p. 80)

Para el diseño de recursos didácticos que realmente sean útiles y efectivos para el aprendizaje lo importante no es la tecnología informática que se ponga en uso, sino que el

recurso diseñado cumpla con el objetivo para el que fue concebido. En cualquier caso, existen en la actualidad herramientas informáticas que facilitan el proceso de construcción de objetos de aprendizaje y la reusabilidad como eXe Learning, Reload, Hot Potatoes, GeoGebra, etc.

En particular GeoGebra, “permite la generación de materiales interactivos de una alta calidad con un esfuerzo menor que con otras herramientas de diseño de autor. La capacidad de exportación a distintos formatos es una de las potencialidades que tiene esta herramienta informática. La apariencia visual, la calidad del diseño y la capacidad de cálculo son realmente asombrosas”. (Gámez, A., y Marín, L. 2011, p. 95)

3.2. Presentación de metodología en el presente trabajo

Este trabajo tiene una metodología de tipo cualitativa, pues como menciona Mesías, O. (2004, p. 2), este tiene como finalidad un acercamiento naturalista e interpretativo de la realidad que se está estudiando, en este caso la probabilidad y algunas de sus paradojas clásicas.

Para el diseño del recurso didáctico interactivo haciendo uso de paradojas de probabilidad mediadas por Geogebra en estudiantes de secundaria, se tendrán en cuenta las tres primeras fases mencionadas en el taller de diseño de recursos didácticos interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística utilizando Geogebra, pues la última fase, se aleja de los objetivos planteados en el presente trabajo:

- Fase de reflexión y análisis.
- Fase de diseño y maquetación.
- Fase revisión y evaluación.

Fase 1: Reflexión y análisis

En esta fase se espera dar cuenta de dos aspectos fundamentales, como son: las paradojas de probabilidad a utilizar y la importancia de escogencia del software Geogebra, que buscan aportar a uno de los objetivos específicos de este trabajo, diseñar e implementar un recurso didáctico interactivo, a través de Geogebra sobre paradojas de probabilidad.

Fase 2: Diseño y maquetación

En esta fase, después de haber seleccionado las paradojas a trabajar se realiza la construcción del recurso didáctico con el uso de Geogebra, además, se plantean las diferentes situaciones a presentar al estudiante con la idea de que este proponga su solución. A esta fase, se le agrega la implementación del recurso didáctico interactivo en estudiantes de grado undécimo de educación media de una institución educativa de la ciudad de Santiago de Cali, con el propósito de lograr el cumplimiento total del segundo objetivo específico.

Fase 3: Revisión y evaluación.

En esta fase, se realizará el análisis de los resultados obtenidos con la implementación del recurso didáctico interactivo y la actividad sin el uso del programa, teniendo en cuenta las heurísticas planteados por Diaz, C. (2003), para así, dar cuenta del último objetivo específico.

Al finalizar estas tres fases, se realizan las respectivas conclusiones, recomendaciones y se agregan los anexos del trabajo realizado.

CAPITULO IV

4. FASES EN EL DISEÑO DEL RECURSO DIDÁCTICO

4.1 Fase 1: Reflexión y análisis

4.1.1 Software Geogebra

Geogebra es un software matemático interactivo, el cual es de gran importancia para la educación en colegios y universidades, actualmente se ha podido encontrar diversas razones por la cual es el apropiado para el diseño del recurso didáctico interactivo, entre estas podemos ver:

- Geogebra es un software libre que puede ser usado para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles de la educación, de igual manera es de fácil acceso, permite que los estudiantes puedan visualizar, representar y experimentar con objetos matemáticos, de manera que se adquiriera un aprendizaje significativo.
- Geogebra combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. De igual manera combina diferentes sistemas de representación, tales como la vista algebraica, la vista gráfica y hoja de cálculo.
- Geogebra presenta una barra de herramientas que puede ser configurada para permitir la visibilidad de los botones necesarios. Además, permite que el diseño del recurso sea publicado en su página oficial y pueda ser utilizado y adaptado de acuerdo con las necesidades de otros usuarios por vía online o por medio de la versión portable.

Además, es de gran importancia la práctica y destreza que se tiene en el empleo de algunas herramientas de Geogebra adquiridas en los cursos de la línea TICEM que ofrece el programa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física, los cuales pertenecen al Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

4.1.2. Selección de paradojas

Paradoja “El dilema de Monty Hall”

Según Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. (2011, p. 12) esta es una de la variante más conocida de la “Paradoja de la caja de Bertrand”. Su construcción se realizó teniendo en cuenta un concurso de la televisión americana "Let's Make a Deal" (Hagamos un trato) y así mismo se le denominó de esta manera por el presentador del concurso, Monty Hall. Este concurso dio origen a polémicas relacionadas con posibles soluciones del problema matemático latente y de la misma manera se puede evidenciar las intuiciones incorrectas en relación con la probabilidad condicional. La formulación más conocida de este problema proviene de una carta a la columna de Marilyn vos Savant en Parade Magazine y se reproduce a continuación.

La paradoja es conocida por el siguiente enunciado: “Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas. Detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de cada una de las otras, una cabra. Escoges una puerta, digamos la #1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, que contiene una cabra. Si el presentador te pregunta si prefieres cambiar de puerta. ¿Es mejor para ti cambiar o deberías mantener tu elección inicial?”

Según Batanero, C., Contreras, J. y Fernández, J. (2009, p. 180 - 183) cuando se emplea en ejercicios el problema de Monty Hall, en un curso de probabilidad, se le puede cuestionar a los estudiantes de la siguiente manera: ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia entre cambiar o no? Así mismo deben justificar su decisión con un argumento de tipo probabilístico.

La respuesta a ello se desarrolla en identificar en ver qué tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche, el que cambia de puerta o el que no cambia.

A continuación, se presenta algunas de las soluciones intuitivas que se proporcionan frente a esta situación:

Solución intuitiva 1

A partir del planteamiento de la situación, se considera que hay dos puertas sin premio y una con premio. Lo que significa, que la posibilidad de elegir la puerta premiada es $1/3$. Si no se cambia solo se tiene $1/3$ de posibilidades de ganar y $2/3$ de perder. Si, por el contrario, se cambia de puerta, la probabilidad de ganar será la misma que elegir inicialmente la puerta sin premio, es decir $2/3$.

Solución intuitiva 2

Se hace uso del diagrama en árbol para llegar a distintas posibilidades. Como primera instancia, se tiene en cuenta el experimento “puerta que tiene el premio” (cada puerta tiene probabilidad $1/3$). Seguidamente, se considera la puerta que se elige ($1/3$ cada puerta). Los dos primeros experimentos mencionados son independientes. El tercer experimento es la puerta que abre el locutor, que es dependiente de los anteriores. Cada experimento señalado en la ilustración 4.

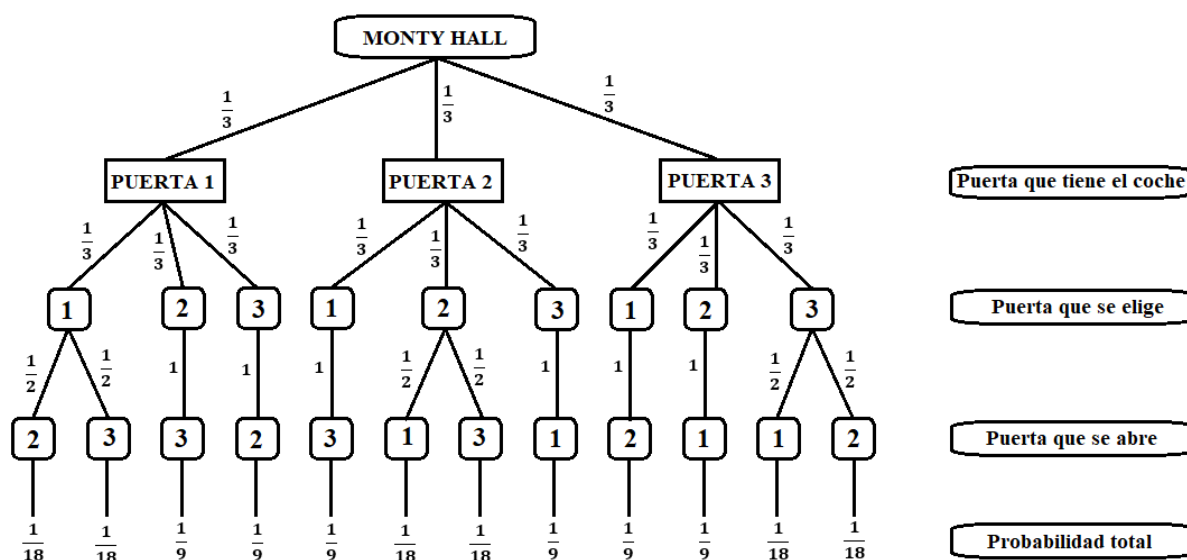


Ilustración 4. Diagrama de árbol ilustrando el juego. Tomada de Batanero, C. y Contreras, J. (2009, p. 181)

Si no se cambia de puerta, sumando las probabilidades de todas las ramas del árbol (elegir puerta 1 si el coche está en la 1; elegir puerta 2, si el coche está en la puerta 2 y elegir puerta 3 si el coche está en la 3), las posibilidades de ganar son de $\frac{1}{3}$. Cada uno de estos sucesos compuestos tiene probabilidad $\frac{1}{9}$.

Ahora si se supone que se cambia, en el caso de que se elija una puerta con una cabra, el presentador muestra la otra cabra, entonces se cambia (a la puerta que tiene el coche) y se gana. Por ejemplo, si estando el coche en la puerta 1, se elige la puerta 2, el presentador muestra la puerta 3 y sólo se puede cambiar a la 1, que es la que tiene el coche. Este suceso tiene probabilidad de $\frac{1}{9}$. Lo mismo ocurriría si estando el coche en la puerta 1, se elige la 3.

Si se escoge la puerta con coche, el presentador muestra una de las dos puertas que tiene la cabra. Si estando el coche en la puerta 1, se elige la puerta 1, el presentador abre la puerta 2 o la 3, cada una de ellas con probabilidad $\frac{1}{18}$, en total $\frac{1}{9}$. Si se cambia de puerta se pierde con probabilidad $\frac{1}{9}$. Como hay tres puertas, la probabilidad total de ganar cambiando sería $\frac{2}{3}$ y la de perder cambiando sería $\frac{1}{3}$.

Solución formal

La solución formal de este problema se encuentra las propiedades de la probabilidad condicionada. Para llegar a la solución se tiene en cuenta los siguientes sucesos:

- A: El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.
- B: El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.
- G: El jugador gana el coche.

Se quiere calcular $P(G)$ (Probabilidad que el jugador gane el coche) para cada tipo de jugador, el que cambia de puerta y el que no cambia. Para hallar $P(G)$, se puede notar que $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$, puesto que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \Omega$. Esto es equivalente a decir que $\{A, B\}$ es una partición de Ω , siendo Ω el espacio muestral del experimento; por tanto, aplicando el axioma de la unión de probabilidades.

$$P(G) = P((G \cap A) \cup (G \cap B)), \text{ luego}$$

$$P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B), \text{ luego}$$

$$P(G) = P(G/A) P(A) + P(G/B) P(B),$$

Por aplicación de la regla de Laplace: $P(A)=1/3$ y $P(B)=2/3$ pues hay un coche y dos cabras.

Finalmente, se debe encontrar la probabilidad de ganar de cada tipo de jugador:

- Jugador que nunca cambia:

En este caso $P(G/A) = 1$ y $P(G/B) = 0$. Por lo tanto,

$$P(G) = 1 (1/3) + 0 (2/3) = 1/3$$

- Jugador que siempre cambia:

En este caso $P(G/A) = 0$ y $P(G/B) = 1$. Por donde,

$$P(G) = 0 (1/3) + 1 (2/3) = 2/3$$

Es claro que la mejor estrategia es cambiar de puerta, pues la probabilidad de ganar si se cambia es el doble de la que no se cambia.

Paradoja “Falacia del jugador”

según Arévalo, M., Montanero, J. y López, E. (2015, p. 83) esta es también denominada falacia de Montecarlo, debido a un hecho inusual que sucedió en el Casino de Montecarlo el 18 de agosto de 1913. Ese día, en el juego de la ruleta francesa, la bola cayó 26 veces seguidas en números de color negro. Durante una seria seguida de tiradas, los jugadores perdieron mucho dinero apostando a rojo, debido a que pensaban que no podía seguir saliendo negro una vez más.

Desde un punto de vista lógico, Arévalo, M., Montanero, J. y López, E. (2015, p. 83) mencionan que se debe razonar en que, si se supone que se dan las condiciones de simetría adecuadas, una secuencia de 20 negros seguidos es tan probable como cualquier otra y, por lo tanto, no debería haber condición para apostar en la jugada 21. No obstante, una persona que no esté dispuesta a asumir la hipótesis de simetría de la ruleta y cuyo único conocimiento acerca de la misma es que ha proporcionado 20 negros en las últimas 20 veces que ha rodado, puede verse inducida a pensar que la ruleta esta trucada, lo cual le conduciría a apostar de nuevo por el negro. Pero eso es justo lo contrario de lo que hizo la mayoría, arrastrada por la creencia de que ya tocaba rojo para compensar.

Morales, L. (2015) menciona algunos posibles pensamientos que, al trabajar con esta falacia, las personas empiezan a cuestionar y analizar:

- Un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir porque no ha ocurrido durante cierto periodo.
- Un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto periodo.
- Un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir si no ocurrió recientemente.
- Un suceso aleatorio tiene menos probabilidad de ocurrir si ocurrió recientemente.

Según Morales, L., las probabilidades de que algo suceda en la siguiente realización del experimento no está necesariamente relacionado con lo que ya sucedió.

El ejemplo muy conocido para analizar este caso con los estudiantes es el de tirar varias veces una moneda. Considerando que la moneda es justa, la probabilidad de obtener cara o sello es igual a $1/2$. De manera general, la probabilidad de que salgan n caras de manera consecutiva se determina de la siguiente forma: $P(\cap_{i=1}^n Ai) = \frac{1}{2^n}$

Morales, L. (2015) propone que si, al realizar el experimento resultan 5 tiros consecutivos en los que sale cara. Los estudiantes podrían pensar que la probabilidad de que el siguiente tiro sea cara es igual a $1/64$. Este es el paso falaz del razonamiento, ya que esta probabilidad se puede calcular antes de que se realice el experimento de lanzar las 6 caras consecutivas. Los resultados después de lanzar ya no son desconocidos para nosotros y, por lo tanto, la probabilidad de que salga cara o sello en el siguiente intento es exactamente la misma: $1/2$.

Razonar que es más probable que el próximo lanzamiento será sello en vez de cara debido a los anteriores lanzamientos es la falacia: la idea de que una racha de suerte pasada influye de alguna forma en las posibilidades futuras.

4.2. Fase 2: Diseño y maqueta

4.2.1. Contexto escolar

El recurso didáctico interactivo en Geogebra se implementó en la Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito, el cual surgió del convenio inter administrativo

celebrado entre la Gobernación del Valle del Cauca. El Municipio de Cali y la Universidad del Valle.

Su construcción obedeció al empeño de la comunidad a cuya cabeza se ubicó un significativo número de líderes comunitarios quienes después de mucho trabajo consiguieron que en septiembre de 1997 iniciara actividades el Instituto Técnico Multipropósito. Al darse fusión de los centros docentes en la actual institución, esta sede ubicada en la Cra. 56 no. 7 oeste - 190 del sector Bella Suiza, continuó atendiendo los niveles de básica secundaria y media técnica.



Ilustración 5. Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito. Tomada de Google Mapas.



Ilustración 6. Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito. Tomada de Google Mapas.



Ilustración 7. Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito. Tomada de Google Mapas.

Las jornadas que ofrece son mañana, tarde, noche, completa y jornada única. En cuanto a los niveles tiene:

Secundarias: Desde el grado sexto a Noveno.

Educación Media: Desde grado décimo a undécimo.

Así mismo cuenta con especializaciones en industriales, académicas y comerciales. Los estudiantes cuentan con sala de sistemas y así mismo cada salón de clase está dotado con computadores para cada estudiante.

Cabe resaltar que, para la implementación del recurso didáctico interactivo, particularmente para el presente trabajo se escogió el grado undécimo, el cual estaba conformado por 22 estudiantes con edades que oscilan entre los 16 a los 18 años.

Misión de la Institución Educativa: La Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito es un establecimiento oficial, presta el servicio público educativo en los niveles de preescolar, básica y media técnica a los (as) niños (as) y jóvenes de la Ciudad de Cali. Promueve la inclusión, la atención a la diversidad, la construcción de conocimientos científicos, el desarrollo de competencias, la sana convivencia, la formación de actitudes de conservación del medio ambiente y la valoración de los derechos humanos y de su cultura; a través de la implementación de pedagogías activas, el uso creativo de la tecnología, la interacción con el entorno y con otras comunidades, para formar seres humanos felices, autónomos, solidarios y comprometidos con su desarrollo personal y el de la sociedad.

Visión de la Institución Educativa: La Institución Educativa Técnico Industrial Multipropósito, aspira a consolidarse como un establecimiento de excelencia en la formación de ciudadanos participativos con conocimientos, habilidades y valores para la convivencia y el trabajo, que les permitan participar de manera autónoma en la solución de sus problemas cotidianos y de los de su entorno, siendo actores creativos, productivos, con liderazgo en el mejoramiento personal y en el de su comunidad, en una sociedad democrática en continuo cambio.

4.2.2. Diseño de actividad sin el uso de Geogebra

El diseño de la actividad sin el uso de Geogebra fue considerada para recuperar saberes y opiniones de los estudiantes sobre aquellos conocimientos matemáticos e históricos que conocían o desconocían de los grados escolares anteriores, basado en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas MEN (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2016). La actividad fue llevada a cabo por medio de 2 situaciones, con un tiempo de duración de 1 hora reloj, cabe aclarar que tanto la actividad sin el uso de Geogebra y la actividad usando este recurso se realizó en dos sesiones.

Situación 1: La primera situación se planteó con el objetivo de identificar heurísticas que los estudiantes manifiestan al presentar una actividad de tipo probabilístico e histórico, así mismo como lo afirma Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), se busca que los estudiantes sean capaces de “proponer y realizar experimentos aleatorios en contextos de las ciencias naturales o sociales y predecir la ocurrencia de eventos”.

La situación 1 tiene como objetivo recrear la paradoja de Monty Hall, donde el estudiante podrá explorar y predecir la ocurrencia de eventos, siguiendo unas instrucciones y con la utilización de material manipulativo, este consistía en cajas con tres divisiones de forma horizontal y estas con dos cajones cada una, dentro de estos se encontraba 2 círculos de color azul, dos de color amarillo, y uno de color amarillo y otro de color azul, así como se muestra a continuación.



Ilustración 8. Material manipulativo cajas mágicas (construcción propia)

De esta manera, se espera que los estudiantes lleven a cabo el desarrollo de la situación 1 teniendo en cuenta desempeños, como, por ejemplo: resolver y plantear problemas usando conceptos básicos de conteo, probabilidad y muestra. Estos desempeños se encuentran establecidos en los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas MEN (2006).

A partir de lo mencionado, para la solución de la situación, el estudiante debe hacer uso de conceptos como: sucesos posibles, suceso imposible, suceso seguro, probabilidad, dependencia, conteo y muestra. Todo esto con la intención de provocar una experiencia en el estudiante, donde pueda relacionar los conceptos probabilísticos e históricos con su entorno.

Con la intención de articular los referentes matemáticos, teóricos e históricos, se plantea la siguiente situación que tiene por objetivo recrear la paradoja de Monty Hall, y a su vez busca que los estudiantes de grado undécimo exploren a gran profundidad elementos de tipo probabilístico. Con el siguiente texto se le da inicio al desarrollo de la primera situación:



Situación N° 1

Lee la siguiente situación:

Tú, querido y jugoso lector, has sido capturado por los alienígenas, y despiertas en una pequeña celda en la que hay una mesa con tres cajas de acero, cada una con un pequeño agujero. Uno de los malvados alienígenos se encuentra al lado de la mesa y cuando te ve despertar sonríe maliciosamente, mostrando sus ocho hileras de afiladísimos dientes y babeando con profusión.

“Hola, humano”, te dice el monstruo con voz gorgoteante y rasposa, “Esto es un experimento para determinar tu capacidad matemática... puedes considerarlo un juego”. Mientras sus ojos lacrimosos te observan con apetencia, el alienígena sigue hablando: “En una de estas tres cajas hay un círculo amarillo y otro azul. En otra de las cajas hay dos círculos amarillos, y en otra hay dos círculos azules. Mete la mano en una y saca un círculo”, ordena el monstruo. Ahora es cuando comienza el juego”, anuncia con su horrible voz. “¿De qué color es el otro círculo que hay en la caja, amarillo o azul?”

Ilustración 9. Situación 1 que recrea la paradoja de Monty Hall. Tomada de

<https://eltamiz.com/2008/06/16/la-caja-de-bertrand/>

Los estudiantes realizan la lectura y seguidamente se les pidió utilizar el material manipulativo para dar respuesta a los siguientes interrogantes:

1. ¿Qué color elegirías, amarillo o azul? ¿Por qué?

2. ¿Qué opción te da la máxima probabilidad de escapar de las intenciones del alienígena?

Ilustración 10. Interrogantes de la situación 1.

Seguidamente se les solicitó a los estudiantes formar grupos de 4 estudiantes y se le entregó el material manipulativo a cada grupo, dado a conocer en la ilustración 8, para que reunidos entre ellos discutieran esta primera situación.

Situación 2: Así mismo como en la anterior situación, esta segunda se plantea con la intención de identificar heurísticas que los estudiantes muestran al desarrollar una actividad de tipo probabilístico e histórico, como lo afirma Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), también se quiere lograr que los estudiantes sean capaz de “proponer y realizar experimentos aleatorios en contextos de las ciencias naturales o sociales y predice la ocurrencia de eventos, en casos para los cuales el espacio muestral es indeterminado”.

La situación 2 tomada de Gardner, M. (1983, p. 87), tiene como objetivo recrear la paradoja de la falacia del jugador, donde el estudiante podrá explorar y predecir la ocurrencia de eventos siguiendo las instrucciones.

Se espera que con esta situación los estudiantes desarrollen desempeños como, por ejemplo: proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas, es importante mencionar que estos desempeños se encuentran en los Estándares Básicos de Competencias MEN (2006).

Por otra parte, esta actividad es adaptada e implementada a partir de algunos elementos históricos de las paradojas, extraídos del texto de Gardner, M. (1983), llamado Paradojas que hacen pensar. Con la intención de articular los referentes teóricos e históricos, se retoma la siguiente situación que tiene por objetivo recrear la paradoja de la Falacia del jugador, que busca que los estudiantes de grado undécimo exploren a gran profundidad elementos de tipo probabilístico. Con el siguiente texto se le da inicio al desarrollo de la segunda situación:



Situación N° 2

Situación planteada en Gardner (1983):

Los señores Buenafé tienen cinco niñas y ningún niño.

- La señora Buenafé: ¡Cuánto espero que nuestro próximo bebé no sea otra niña!
- El señor Buenafé: Querida, después de cinco niñas, forzosamente tiene que ser un niño.

Ilustración 11. Situación 2 que recrea la paradoja de la falacia del jugador tomada de Gardner, M. (1983, p. 87)

Realizando la lectura de esta, se les pide a los estudiantes que reunidos en los mismos grupos de trabajo discutan y resuelvan las siguientes preguntas:

1. ¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

2. ¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

Ilustración 12. Interrogantes de la situación 2.

4.2.3. Diseño del recurso didáctico interactivo

El recurso didáctico interactivo está diseñado en el contexto de Los Simpson, esta serie es de origen estadounidense y cuenta con el mayor número de temporadas al aire en comparación con otras series de su tipo y tiene como público objetivo a una variedad de grupos que van desde los niños hasta los adultos. La serie ha sido traducida a más de 25 idiomas, según el periódico New York Times es la serie con más influencia en todo el mundo. Además, algunos medios de comunicación sostienen que: "Los Simpson son la serie

animada más longeva en la historia de la televisión y una de las franquicias más reconocidas del mundo del entretenimiento alrededor del mundo. La serie cuenta con 31 Premios Emmy, un People's Choice Award y una nominación a los Premios Oscar por el corto *The Longest Daycare*. En 2015 la serie recibió otras cinco nominaciones a los Emmy, incluyendo *Mejor Programa Animado*" (El Colombiano, 2016).

El recurso consta de 2 situaciones en Geogebra, inicialmente se espera que el estudiante al interactuar reconozca el contexto que se está presentando, es decir, situaciones que se presentan con los personajes de los Simpson y se generan un problema que se necesita resolver. Cada situación está conformada por un applet que ha sido diseñado en Geogebra y una serie de consignas que se entregará al estudiante en material impreso.

El recurso cuenta con una serie de retroacciones que se interpretan como acciones validas o invalidas, permitiendo validar sus conocimientos. Otro aspecto importante del recurso es que el estudiante lo asuma como un desafío personal que le permita desarrollar las situaciones con mayor interés, puesto que se requiere de su ayuda para que los personajes inmersos en las situaciones puedan solucionar sus problemas.

A continuación, se hará una descripción puntual de las situaciones, en el orden que serán presentadas a los estudiantes:

Situación 1. El dilema de Homero: En este primer applet el estudiante se enfrenta a una situación basada en la paradoja "El dilema de Monty Hall" y también está incluido un cuestionario impreso de 4 preguntas de tipo abierto, a medida que el estudiante interactúa con el recurso se puede dar respuesta a las preguntas planteadas.

Inicialmente el recurso ofrece una portada (pantalla # 1) de la ciudad de Springfield y el título "The Simpsons", adicionalmente se encuentra un botón "SIGUIENTE", al oprimirlo este lleva a una presentación del televisor (pantalla # 2) que es común en la serie y en donde

la mayoría de las veces se titula el capítulo, en este caso se encuentra el título “Ahora veremos... El dilema de Homero”, en esta pantalla ya se puede observar dos botones “ATRÁS” y “SIGUIENTE”, uno permite regresar a la pantalla # 1 y el otro permite ir a una nueva pantalla.



Ilustración 13. Pantalla # 1 de situación 1. El dilema de Homero

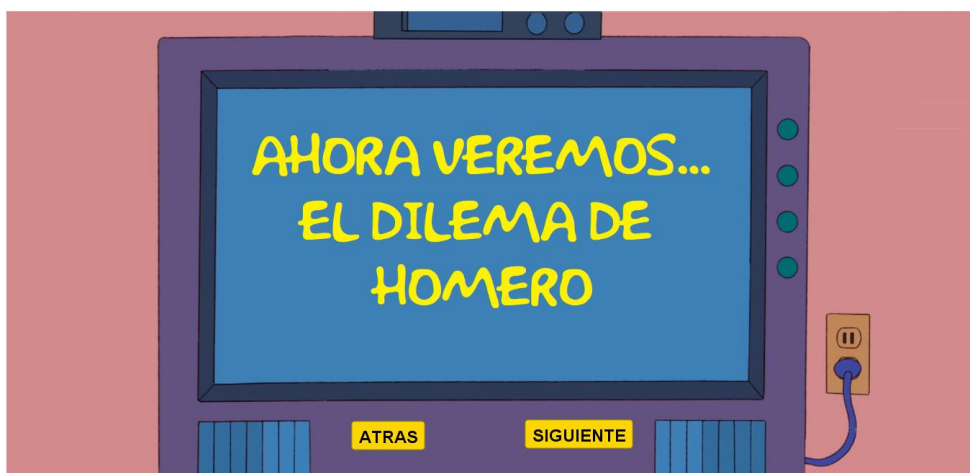


Ilustración 14. Pantalla # 2 de situación 1. El dilema de Homero

Al oprimir el botón “SIGUIENTE” se presenta la situación en la que se ve sumergido Homero y su amigo Moe (pantalla # 3):

“Burns le ha regalado dos entradas a una gran final de béisbol a Homero, por su buen rendimiento en la central nuclear donde labora.

Homero piensa detenidamente a quien llevar, pues quiere ir con uno de sus amigos, pero no logra decidirse. Por lo tanto, crea un juego que trata de tres sobres: en uno Homero ha metido las dos boletas para entrar al juego y los otros dos los deja vacíos.

Luego se dirige a la casa de Moe y le plantea lo siguiente:”. De nuevo se puede visualizar los dos botones “ATRÁS” y “SIGUIENTE” que cumplen la misma función mencionada anteriormente.

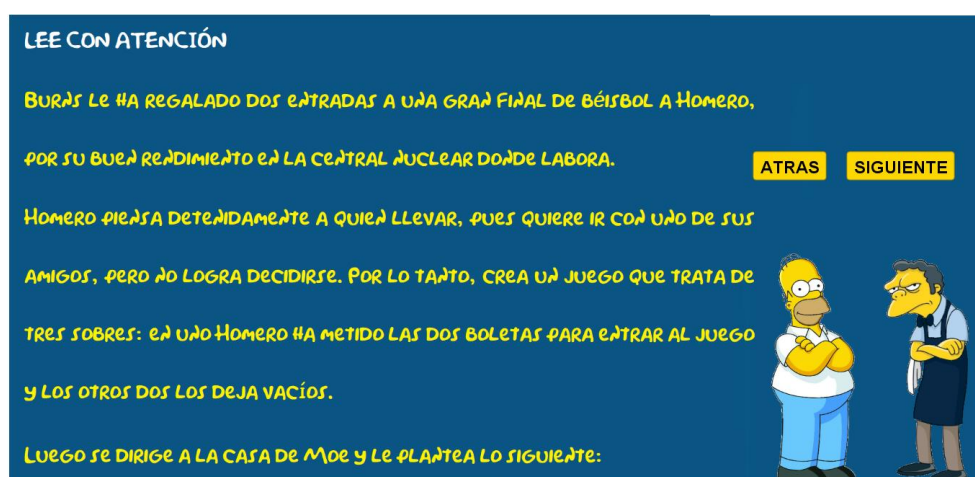


Ilustración 15. Pantalla # 3 de situación 1. El dilema de Homero

En la siguiente presentación (pantalla # 4) se puede encontrar lo siguiente:

- En la parte superior izquierda se encuentra lo que le plantea Homero a Moe:

“Tengo tres sobres y en uno de ellos hay dos boletas para ir a la final de béisbol conmigo, así que escoge uno.

En el momento en que Moe escoge un sobre, sin abrirlo aún, Homero abre uno de los otros dos y le muestra que está vacío. Ahora Moe tiene una última oportunidad de cambiar el sobre escogido”

- En la parte superior derecha se encuentra un botón titulado “ATRÁS” que permite regresar a la anterior pantalla,
- En la parte central izquierda se encuentra dos botones titulados “INICIO” y “REPETIR”, además se puede observar la simulación del experimento con los sobres, se encuentran tres sobres, cada uno enumerado del 1 al 3,
- En la parte inferior izquierda se observa un recuadro titulado “ELECCIÓN INICIAL”,
- En la parte central se encuentra un recuadro en donde se registrará automáticamente los casos que se presenten (Jugadas, Éxitos, Fracazos, Mantiene la elección y Cambia de elección), y
- En la parte inferior derecha de la pantalla se puede ver una imagen de Homero. (Observar ilustración 10)



Ilustración 16. Pantalla # 4 de situación 1. El dilema de Homero

Una vez el estudiante oprima sobre la casilla de control (1, 2 o 3) que desea escoger de la elección inicial, aparece un recuadro titulado “ELECCIÓN DEFINITIVA”, se abre uno de los sobres que se encuentra vacíos y en la imagen de Homero sale un globo en donde pregunta ¿Cambiarías de sobre o te quedas con el inicial?, el estudiante ahora puede cambiar

de elección o continuar con la elección anterior. Observar ilustración 11 (ejemplo de una jugada):

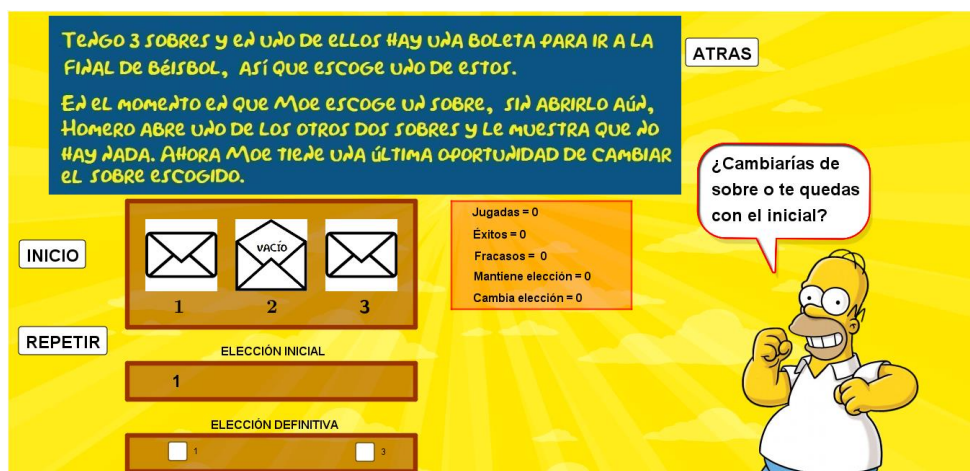


Ilustración 17. Pantalla # 4(jugada particular) de situación 1. El dilema de Homero

Una vez el estudiante escoja de nuevo, el recurso retroalimenta con una imagen de Moe contento diciendo “Has ganado” o una imagen de Moe enojado diciendo “Has perdido”. Observar ilustración 12 (ejemplo de una jugada)



Ilustración 18. Pantalla #4(jugada particular) de situación 1. El dilema de Homero

Este experimento se puede repetir varias veces oprimiendo el botón titulado “REPETIR”, una vez oprimido, el recuadro que se encuentra en el centro automáticamente se completa. Observar ilustración 13 (ejemplo de una jugada)



Ilustración 19. Pantalla # 4(jugada particular) de situación 1. El dilema de Homero

A medida que el estudiante repite el experimento en el recuadro se registra cada uno de los sucesos ocurridos.

Una vez el estudiante haya realizado la repetición del experimento varias veces y a partir del recuadro que nos ofrece la frecuencia en que se repite los sucesos, se puede dar respuesta a las preguntas que se les entrego en material impreso, estas se pueden observar en la siguiente ilustración 14:



Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

EL DILEMA DE HOMERO

¿Cómo podrías saber cuál es el sobre que contiene las boletas para entrar a la gran final?

¿Qué cambia cuando Homero muestra un sobre vacío de los dos que quedaban?

¿Debe Moe mantener su elección original o escoger el otro sobre?

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

Ilustración 20. Consignas de situación 1. El dilema de Homero

Con el botón “INICIO”, el estudiante puede empezar de nuevo el experimento y el recuadro donde se registraba la frecuencia de cada suceso vuelve a encontrarse en limpio.

Geogebra cuenta con una plataforma virtual en donde existe una variedad de construcciones geométricas a las que se puede acceder desde cualquier usuario y además se puede trabajar sobre ellas incluso proponer propias construcciones. Para la simulación de los sobres, se tomó como base un recurso que se encuentra en la plataforma en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/eKz8S9hQ>, Geogebra permite observar el paso a paso que se llevó a cabo para la construcción del recurso por medio de una opción llamada “Protocolo de construcción”, a partir de este protocolo se simuló el experimento con los sobres.

Situación 2. La falacia de Lisa: En este segundo applet el estudiante se enfrenta a una situación basada en la paradoja “La falacia del jugador” y también está incluido un

cuestionario impreso de 3 preguntas de tipo abierto, a medida que el estudiante interactúa con el recurso se puede dar respuesta a las preguntas planteadas.

Inicialmente el recurso ofrece una portada (pantalla # 1) de la familia Simpson sosteniendo un cartel que dice “The Simpsons”, adicionalmente se encuentra un botón “SIGUIENTE”, al oprimirlo este lleva a una presentación del televisor (pantalla # 2), en este caso se encuentra el título “Ahora veremos... La falacia de Lisa”, en esta pantalla al igual que en la anterior situación se puede observar dos botones “ATRÁS” y “SIGUIENTE”, los cuales cumplen la misma función anteriormente mencionada.



Ilustración 21. Pantalla # 1 de situación 2. La falacia de Lisa



Ilustración 22. Pantalla # 2 de situación 2. La falacia de Lisa

Al oprimir el botón “SIGUIENTE” se presenta la situación en la que se ve sumergida Lisa, puesto que es una niña vegetariana (pantalla # 3):

“Como Homero se fue a la gran final de béisbol, el resto de la familia decide irse a la fiesta de cumpleaños de Milhouse. Cuando llegan a la fiesta se encuentran con todos los niños de Springfield.

A medida que pasa el tiempo, durante la fiesta van realizando juegos y otras actividades. Seguidamente procedieron a repartir la comida para los niños, había de dos tipos: hamburguesas Krusty y rosquilla con glaseado rosa. Esta comida venia empacada y no se podían ver para ser escogidas.” De nuevo se puede visualizar los dos botones “ATRÁS” y “SIGUIENTE”.

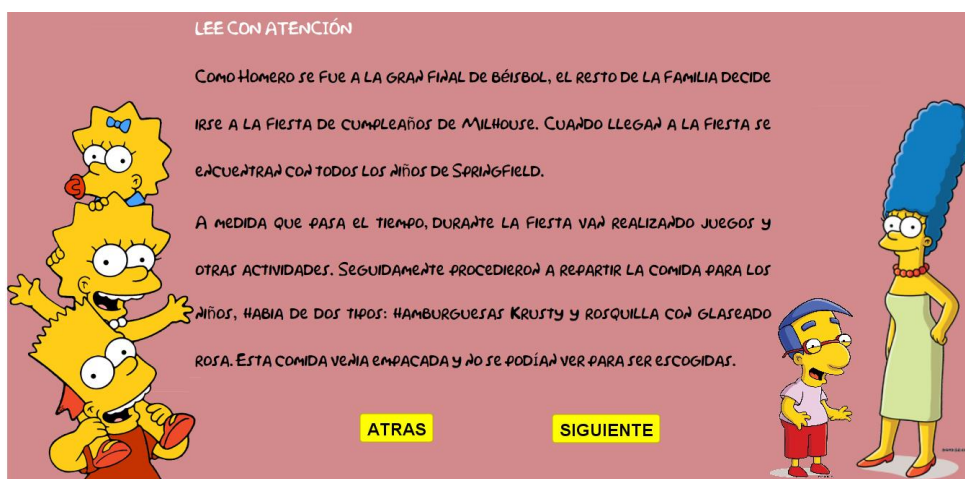


Ilustración 23. Pantalla # 3 de situación 2. La falacia de Lisa

En la siguiente presentación (pantalla # 4) se puede encontrar la continuación a la situación que se está planteando y en esta vez se ve sumergido Milhouse ya que se puede observar lo siguiente:

“Para la repartición de la comida, debían organizarse por filas e iban entregándole una caja. Cuando iban avanzando, Lisa se dio cuenta que a las tres personas que estaban delante

de ella les había tocado hamburguesa Krusty, por ende, ella asumió que la caja que le tocaría tendría una hamburguesa Krusty.

Milhouse al ver a Lisa tan preocupada, decide ayudarle a salir de la duda...”. Nuevamente se puede visualizar los dos botones “ATRÁS” y “SIGUIENTE” y a Milhouse afirmándole a Lisa que el la ayudara y a Lisa preocupada en el suelo pues teme comerse un animalito.

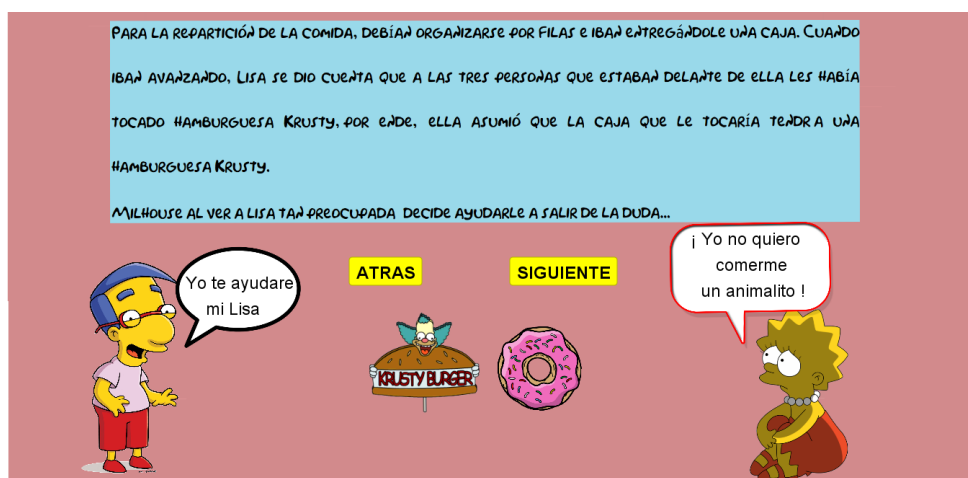


Ilustración 24. Pantalla # 4 de situación 2. La falacia de Lisa

En la siguiente presentación (pantalla # 5) se puede encontrar lo siguiente:

- En la parte superior izquierda se encuentra planteado:

“La bandeja es como una ruleta, lo que saques al girarla será la comida que te darán en la fiesta, los tres niños delante de Lisa sacaron Hamburguesa Krusty, por ende, Lisa cree que también le tocara una.

¿Estás de acuerdo con lo que Lisa afirma?”

Además, se encuentra un botón titulado “ATRÁS” que permite regresar a la anterior pantalla.

- En la parte inferior derecha se encuentra una imagen de Lisa deseando sacar una Dona,
- En la parte izquierda se encuentra dos botones titulados “GIRAR LA RULETA” y “REINICIO”, además se puede observar la simulación del experimento con la ruleta, se encuentra la ruleta dividida en 8 partes iguales, en donde una parte representa una Dona y otra representa una Hamburguesa Krusty intercalado, lo que quiere decir que 4 son Donas y 4 son Hamburguesas Krusty, y
- En la parte del centro se encuentra un recuadro que dice “Oprime la opción que sacaste en la ruleta, dos botones titulados “Hamburguesa Krusty” y “Dona con glaseado”, una casilla al lado de cada botón que representa la cantidad de veces que se oprime el botón y un recuadro que dice “Cantidad de giros realizados = ...”, en este recuadro se muestra la cantidad de veces que ha sido girada la ruleta.

(Observar ilustración 19)



Ilustración 25. Pantalla # 5 de situación 2. La falacia de Lisa

Una vez el estudiante oprima el botón “GIRAR LA RULETA”, la ruleta gira aleatoriamente señalando uno de los dos tipos de comida, después de haber girado la ruleta el recuadro que cuenta la cantidad de veces que se gira cambia automáticamente mostrando que

ya se realizó un giró, el estudiante ahora tiene la responsabilidad de oprimir el botón que corresponde a lo que mostro la ruleta y de inmediato la casilla que se encuentra al lado va realizando el conteo y la imagen de lisa cambia dependiendo lo que se oprima, si es una Dona lisa continua contenta con el mensaje “Dona ¡Que rico!””, en el caso contrario Lisa se muestra deprimida con el mensaje “NO quiero hamburguesa”. Observar ilustración 20 (ejemplo de una jugada):



Ilustración 26. Pantalla # 5 (jugada particular) de situación 2. La falacia de Lisa

A medida que el estudiante repite el experimento al girar de nuevo la ruleta, debe oprimir el botón que señale lo que mostro la ruleta y las casillas van registrando la cantidad de veces que se dio cada uno de los sucesos en la ruleta, además se va realizando el conteo de los giros automáticamente.

Una vez el estudiante haya realizado la repetición del experimento varias veces y a partir de la frecuencia en que se repite los sucesos, se puede dar respuesta a las preguntas que se les entrego en material impreso, estas se pueden observar en la siguiente ilustración 21:



LA FALACIA DE LISA

¿Cuántos tipos de comida hay?

¿Tendrá razón Lisa? ¿Por qué?

¿Crees que influye en la comida de Lisa que los demás hayan recibido hamburguesa Krusty?

Ilustración 27. Consignas de situación 2. La falacia de Lisa

Con el botón “REINICIO”, el estudiante puede empezar de nuevo el experimento y el recuadro donde se registraba la frecuencia de cada suceso vuelve a encontrarse en limpio.

Para la simulación de la ruleta, se tomó como base un recurso que se encuentra en la plataforma en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/n7djpTK2>, a partir del protocolo de la construcción se simuló el experimento con la ruleta de la situación con Lisa.

4.3. Fase 3: Revisión y evaluación

4.3.1. Heurísticas en el razonamiento probabilístico en la implementación de la actividad sin el uso de Geogebra.

La metodología utilizada para llevar a cabo el desarrollo de esta primera sesión permitió que los estudiantes, de manera general, manifestaran una buena disposición pues hubo bastante participación por parte del grupo. Es importante mencionar, que antes del inicio de esta primera parte, se realizó al grupo preguntas de apertura sobre la definición de un suceso posible, suceso imposible, suceso seguro, probabilidad. Así mismo, se les propuso a los estudiantes que escogieran un evento que mejor representará las definiciones anteriores. De esta primera iniciativa que se planteó como apertura a la actividad, se pudo concluir que:

- Los estudiantes relacionaron el tiempo climático, la muerte, el lanzamiento de una moneda o un dado, los días de la semana, entre otras situaciones de su diario vivir, para ejemplificar sus definiciones.

Situación 1

- **La pregunta 1:** ¿Qué color elegirías, amarillo o azul? ¿Por qué?

Esta primera pregunta se pudo evidenciar que el 27% de los estudiantes usaron la heurística de la representatividad, el 27% utilizaron la heurística de la disponibilidad, el 9% de los estudiantes no lograron dar respuesta y el 37% restante respondió correctamente a esta pregunta.

- **La pregunta 2:** ¿Da igual lo que elijas?

Para esta pregunta, el 23% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 27% no sabían dar respuesta y el 50% de los estudiantes contestaron correctamente a esta.

- **La pregunta 3:** ¿Qué opción te da la máxima probabilidad de escapar de las intenciones del alienígena?

Los estudiantes para realizar sus estimaciones, en esta pregunta el 41% hicieron uso de la heurística de la representatividad, el 5% no lograron dar respuesta y el 54 % respondieron correctamente.

Heurística de la Representatividad: a continuación, se muestra algunas de las respuestas que presentaron en común los estudiantes

- **Pregunta 1:**

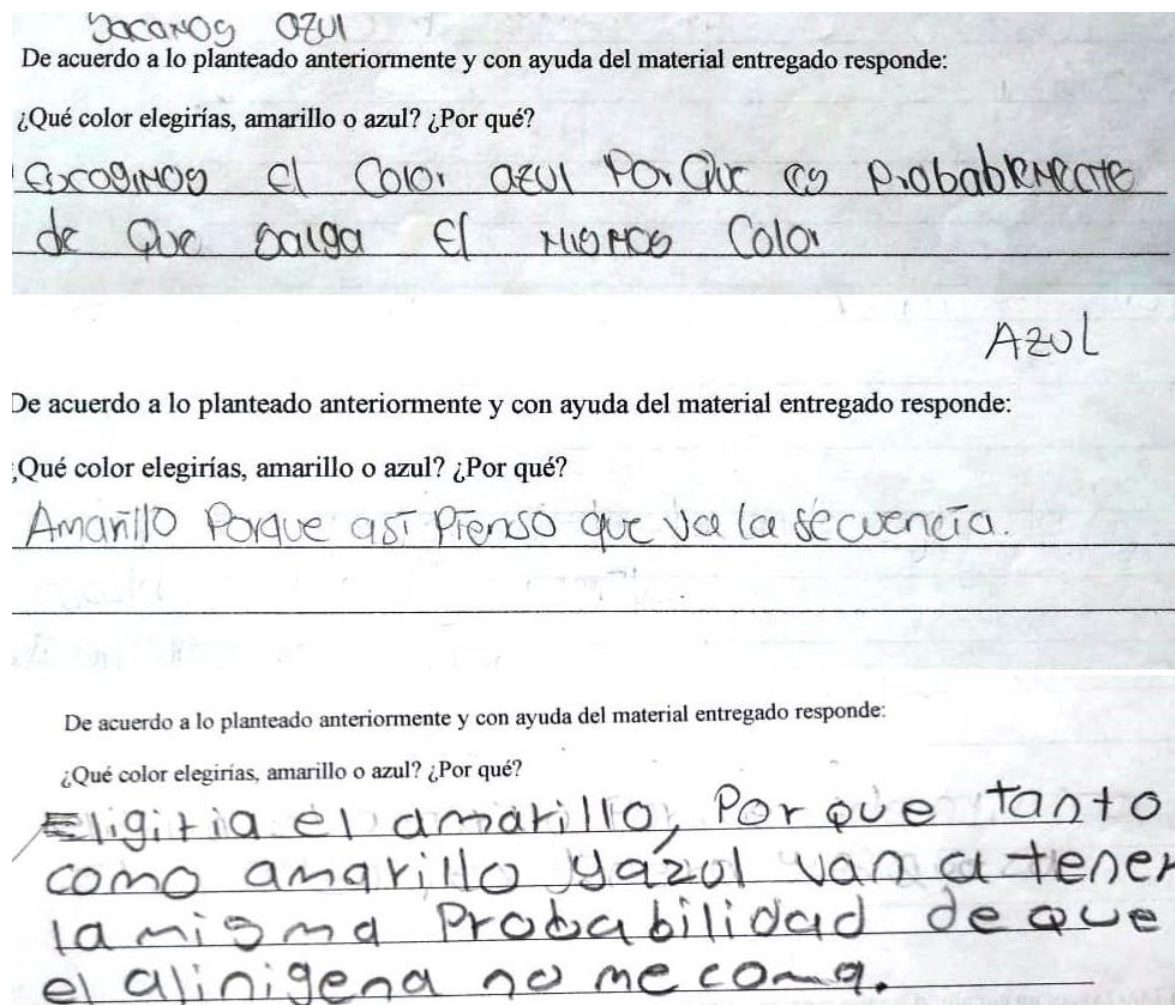


Ilustración 28. Respuestas a pregunta 1, estudiante 3, 11 y 13.

- **Pregunta 2:**

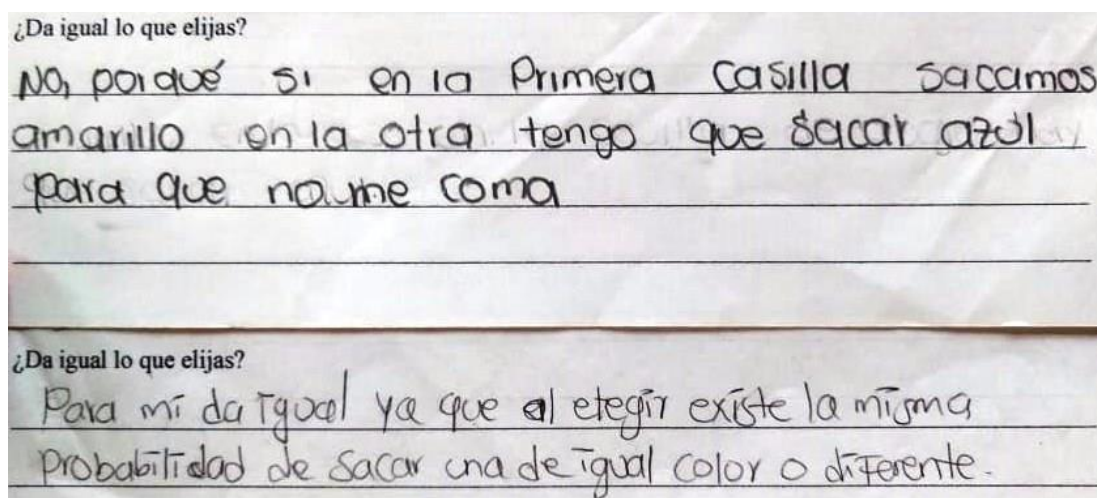


Ilustración 29. Respuestas a pregunta 2, estudiante 10 y 11.

- **Pregunta 3:**

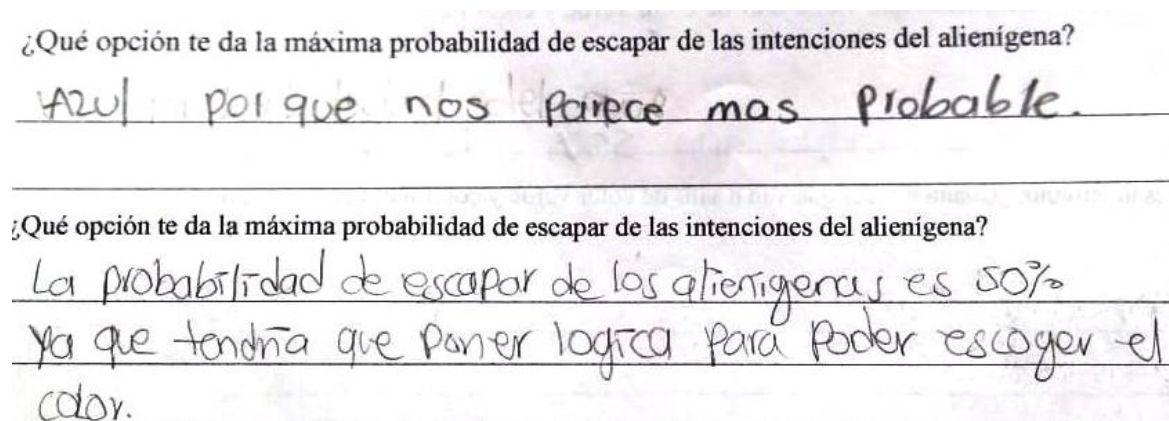


Ilustración 30. Respuestas a pregunta 3, estudiante 5 y 11.

A partir de estos resultados, se pudo ver que los estudiantes estimaron que la probabilidad de seguir con el mismo color o elegir otro, era la misma, por lo cual se evidenció que no tenían en cuenta el tamaño de la muestra. Así también se pudo identificar que los juicios que realizaron los estudiantes no son a partir del evento anteriormente ocurrido, el cual fue haber sacado ya un círculo de determinado color, por lo tanto, se consideró que los estudiantes no relacionaron la muestra y la población, es decir, tomaron

decisiones con base creencias sobre la posibilidad de que un evento incierto ocurra, lo que sería una respuesta de la heurística de la representatividad.

Heurística de la Disponibilidad: las respuestas que presentaron en común los estudiantes son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

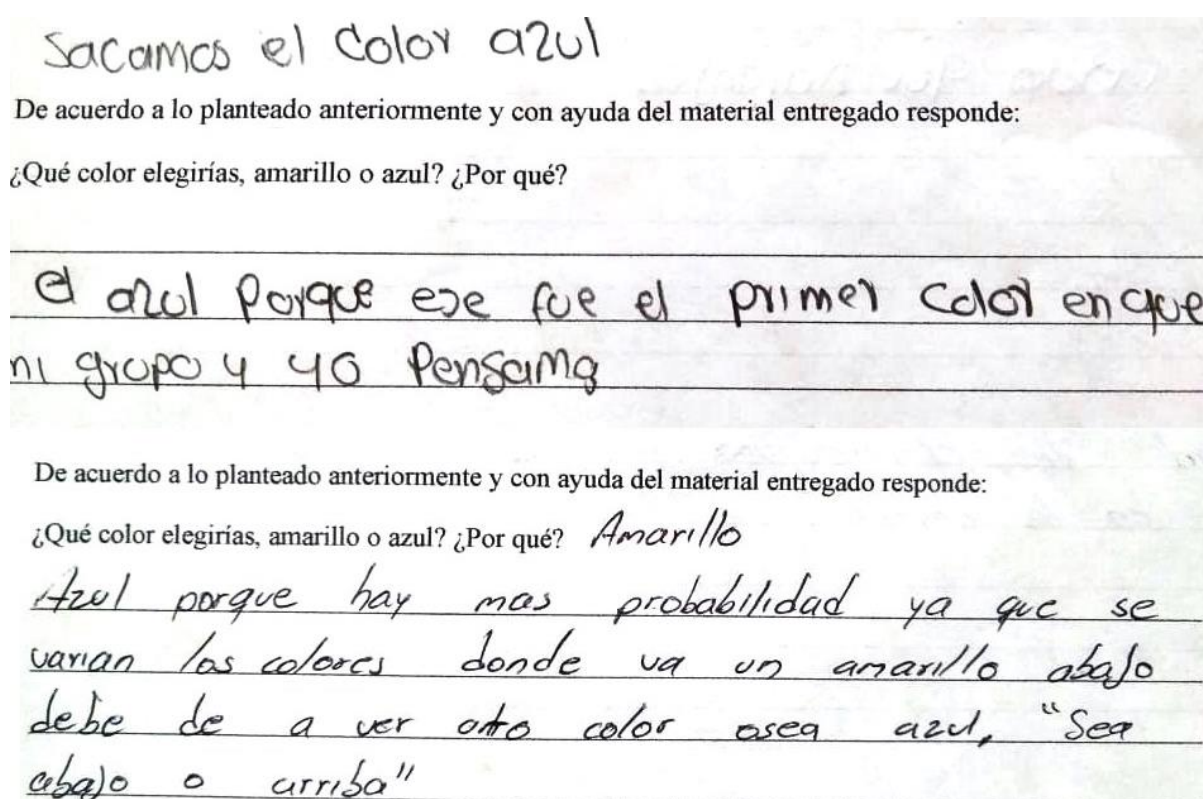


Ilustración 31. Respuestas a pregunta 1, estudiantes 4 y 7.

Con estos resultados, se pudo ver que los estudiantes realizaron estimaciones conforme iban llegando ejemplos o situaciones del diario vivir a su mente, que se relacionaron con esta pregunta, por lo cual, en el caso del estudiante 4, asumió, que haber obtenido ya el color azul, el siguiente seguiría siendo azul el que encontraría en el otro cajón, pues era el color que ya tenía presente por el evento ya ocurrió. Por otro lado, se presentó el caso del estudiante 7, que, aunque respondió bien a la pregunta, se pudo ver que sus

argumentos los baso en la suposición de una secuencia, que tenía presente en su mente, es decir, que para este estudiante si ya se había obtenido el color azul, el siguiente sería amarillo, y así sucesivamente. En la construcción de sus juicios en los estudiantes, jugó un papel importante la imaginación de estos, pues les permitió recordar la frecuencia y la probabilidad de ocurrencia de hechos pasados, que fueron de interés para ellos, y así predecir el color que obtendrían, lo que sería una respuesta de la heurística de la disponibilidad.

No saben dar razón para su elección: se creó esta categoría con la intención de ubicar el otro porcentaje de estudiantes que no utilizaron las heurísticas de la representatividad y la de disponibilidad, y a su vez, tampoco son respuestas correctas, por los argumentos utilizados en las preguntas. Las respuestas que los estudiantes presentaron en común son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

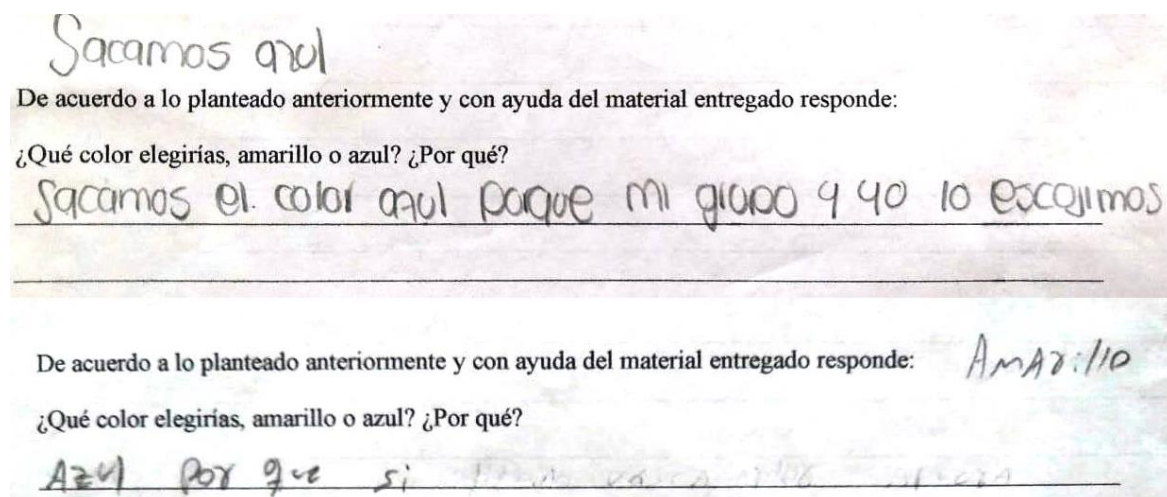


Ilustración 32. Respuesta a pregunta 1, estudiantes 1 y 17.

- **Pregunta 2:**

¿Da igual lo que elijas?
No.

Ilustración 33. Respuesta a pregunta 2, estudiante 5.

- **Pregunta 3:**

¿Qué opción te da la máxima probabilidad de escapar de las intenciones del alienígena?
la probabilidad es de sacar la circunferencia correcta.

Ilustración 34. respuesta a pregunta 3, estudiante 10.

A partir de estos resultados, se pudo notar que los estudiantes no tenían claro sus argumentos, lo que indico que sus respuestas fueron basadas en la intuición.

Correctas: se creó esta categoría con la intención de ubicar el otro porcentaje de estudiantes que dieron respuestas correctas. Las respuestas que los estudiantes presentaron en común son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

De acuerdo a lo planteado anteriormente y con ayuda del material entregado responde:
¿Qué color elegirías, amarillo o azul? ¿Por qué? Amarillo
Azul porque el primero que sacamos fue
Amarillo entonces hay mas probabilidades de
sacar Azul en la siguiente escogida ya que hay
mas Azules que Amarillos osea que es mas probable sacar
Azul.

Ilustración 35. Respuesta a pregunta 1, estudiante 22.

- **Pregunta 2:**

¿Da igual lo que elijas?

No porque hay mas azules que amarillos y no da la misma probabilidad de salvarse si elegimos los amarillos y no los azules. cuando con los calculos, hay mas azules

Ilustración 36. Respuesta a pregunta 2, estudiante 7.

- **Pregunta 3:**

¿Qué opción te da la máxima probabilidad de escapar de las intenciones del alienígena?

el azul porque hay mas azules que amarillos, la probabilidad de salvarnos seria con los azules ya que hay mas

¿Qué opción te da la máxima probabilidad de escapar de las intenciones del alienígena?

Hay una probabilidad de 3/5 de escapar del alienígena

Ilustración 37. Respuesta a pregunta 3, estudiante 7 y 14.

A partir de los resultados mostrados anteriormente, se pudo evidenciar que los estudiantes utilizaron argumentos adecuados para realizar las estimaciones sobre la probabilidad del color que los salvaría, puesto que, al emplear las cajas con los círculos de colores, los estudiantes pudieron recrear la situación propuesta.

Situación 2

- **La pregunta 1:** ¿Tendrá razón el buen señor? ¿por qué?

Esta primera pregunta se pudo evidenciar que el 42% de los estudiantes usaron la heurística de la representatividad, el 21% utilizaron la heurística de la disponibilidad, el 4% de los estudiantes no lograron dar respuesta y el 33% restante respondió correctamente a esta pregunta.

- **La pregunta 2:** ¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebe que los anteriores hayan sido niñas? ¿por qué?

Para esta pregunta, el 25% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 42% hicieron uso de la heurística de la disponibilidad, el 4% no sabían dar respuesta y el 29% de los estudiantes contestaron correctamente a esta.

Heurística de la representatividad: las respuestas que presentaron en común los estudiantes son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

la Señora buena fe tiene mas probabilidad de tener otro niño porque ya ha tenido 5 niñas

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

tiene razón porque en la genetica cuando nace muchos hijos con el mismo sexo es probable que le salga del otro sexo, y así mas posibilidades de que al siguiente hijo le salga un niño.

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

Si porque puede haver una posibilidad de que sea niño porque el señor lo afirma y es seguro que va hacer niño.

Ilustración 38. Respuesta a pregunta 1, estudiante 1, 18 y 22.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

yo si creo que influya por la probabilidad de mayoría de niñas.

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

Puede ser que si porque sino se sabe si es niña o niño.

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

creo que como dice la genética que cuando uno tiene mas niñas y un solo niño es probable que le salga un niño en su siguiente embarazo.

Ilustración 39. Respuesta a pregunta 2, estudiante 5,6 y 18.

Con estos resultados, se pudo analizar que los estudiantes construyeron los juicios a partir de la similitud con el suceso anterior, es decir, que consideraron que el próximo evento cumpliría con la misma característica de este último, así entonces, los estudiantes estimaron que como ya habían salido varias veces niña, el próximo sería niña también. Sin embargo, se presentaron casos donde las respuestas eran correctas, en cuanto a que el señor Buenafé no tendría razón a que el próximo bebe sería niño, pero los argumentos de los estudiantes se centraron en realizar predicciones sin tener en cuenta de que los sucesos son independientes, es decir, que la probabilidad de que tengan un niño no dependía de la probabilidad de que ya tengan cinco niñas, lo que sería una respuesta de la heurística de la representatividad.

Heurística de la disponibilidad: las respuestas que presentaron en común los estudiantes son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

no porque es la favorable que salga niña que niño
por genes

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

tiene razón porque en la genética cuando nace muchos
hijos con el mismo sexo es probable que le salga del otro sexo,
y ahí mas posibilidades de que el siguiente hijo le salga un niño.

Ilustración 40. Respuestas a pregunta 1, estudiantes 8 y 18.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

Que influye el hombre a tener mas espermatozoides
para una niña que de niño.

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

no porque conozco casos de personas
que tienen 5 hijas no todo tiene que
ser mujer

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

creo que como dice la genética que cuando uno tiene mas
niños y un solo niño es probable que le salga un niño en
su siguiente embarazo.

Ilustración 41. Respuestas a pregunta 2, estudiante 3,13 y 18.

A partir de los resultados anteriores, se pudo observar que los estudiantes para dar respuesta a ello trajeron alusión a su mente experiencias que ya habían vivido ellos o alguien cercano, al estimar el sexo del próximo bebe. Así mismo, los estudiantes plantearon

predicciones con base en lo que tenían en su mente en el instante que se realizó la actividad, pues, como es el caso del estudiante 18 que relaciono la pregunta con la genética explicando que como ya se había tenido varias niñas, se podía concluir que el próximo sería niño, pues fue lo que su memoria fácilmente pudo recordar en ese momento, lo que sería una respuesta de la heurística de la representatividad.

No saben dar razón para su elección: Las respuestas que los estudiantes presentaron en común son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

no pues esta muy demoras

Ilustración 42. Respuestas a pregunta 1, estudiante 9.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

puede ser que si se sale niña es el mismo sexo pero si sale niño diferente

Ilustración 43. Respuestas a pregunta 2, estudiante 4.

Con estas respuestas, se pudo analizar que los estudiantes no presentaban claridad en sus argumentos, por lo cual la intuición para predecir el suceso.

Correctas: Las respuestas que los estudiantes presentaron en común son las siguientes:

- **Pregunta 1:**

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

No tiene razón porque el no puede manipular el genero con el que va a nacer el bebe

¿Tendrá razón el buen señor? ¿Por qué?

NO, por que segun márkov este Proceso no cuenta las veces anteriores si no la Probabilidad de cada uno

Ilustración 44. Respuestas a pregunta 1, estudiante 7 y 21.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

No tiene nada que ver porque el sexo de los anteriores bebes no define el sexo del proximo.

¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebé que los anteriores hayan sido niñas? ¿Por qué?

NO por que es un proceso ciclico de dos Probabilidades que no recuerda procesos anteriores a estos

Ilustración 45. Respuestas a pregunta 2, estudiante 11 y 21.

A partir de las respuestas dadas anteriormente, se pudo notar que los estudiantes emplearon argumentos adecuados para realizar las estimaciones sobre el sexo del nuevo bebe, con ayuda de los conocimientos que han adquirido durante su proceso de aprendizaje.

4.3.2. Heurísticas en el razonamiento probabilístico en la implementación del recurso didáctico interactivo.

Como se mencionó anteriormente se trabajó en dos sesiones de una hora reloj cada una, en la segunda sesión se llevó a cabo la puesta en acción del recurso didáctico interactivo diseñado en Geogebra.

Dado que el aula cuenta con computadores portátiles, cada estudiante trabajó con ayuda de uno y se les presentó a los estudiantes el recurso a partir de la plataforma virtual de Geogebra, como se mencionó anteriormente el recurso presenta dos situaciones:

Situación 1. El dilema de Homero:

Situación 2. La falacia de Lisa:

De forma general los estudiantes no mostraron problema para entender los enunciados de las cuestiones.

Para analizar las respuestas de los cuestionarios se procedió a realizar una revisión exhaustiva independientemente a cada uno de los cuestionarios, es decir, las diferentes respuestas dadas por los estudiantes en cada pregunta.

Para facilitar la presentación y la discusión de los resultados obtenidos, se indicarán en diferentes secciones y se ilustrarán con resultados de los cuestionarios:

Situación 1. El dilema de Homero:

- **Pregunta 1:** ¿Debe Moe mantener su elección original o escoger el otro sobre?

En esta pregunta, se pudo observar que el 9% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 9% la heurística de la disponibilidad, el 5% no logro dar razón a la pregunta y el 77% contesto correctamente.

- **Pregunta 2:** teniendo en cuenta la anterior pregunta ¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

En esta pregunta, se pudo observar que el 18% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 23% la heurística de la disponibilidad, el 14% no logro dar razón a la pregunta y el 45% contesto correctamente.

- **Pregunta 3:** ¿Cómo podrías saber cuál es el sobre que contiene las boletas para entrar a la gran final?

En esta pregunta, se pudo observar que el 9% de los estudiantes utilizaron la heurística de la disponibilidad, el 9% no logro dar razón a la pregunta y el 82% contesto correctamente.

- **Pregunta 4:** ¿Qué cambia cuando Homero muestra un sobre vacío de los dos que quedaban?

En esta pregunta, se pudo observar que el 9% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 5% la heurística de la disponibilidad y el 86% contesto correctamente.

Heurística de la representatividad: se presentó en común las siguientes respuestas:

- **Pregunta 1:**

¿Debe Moe mantener su elección original o escoger el otro sobre?

yo creo que otro por que con el otro tiene igual de posibilidades

Ilustración 46. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 20.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

No los 2 que igual son y son de probabilidad

Ilustración 47. Respuesta a la pregunta 2, estudiante 20

- **Pregunta 4:**

¿Qué cambia cuando Homero muestra un sobre vacío de los dos que quedaban?

Cambia en que ya solo quedan dos posibilidades y se puede cambiar por el que Homero tiene en mano o bien el que se eligió primero.

Ilustración 48. Respuesta a la pregunta 4, estudiante 22

Los estudiantes en estas respuestas manifiestan explícitamente su expectativa en la conservación de la probabilidad habiendo Homero abierto otro sobre, queriendo decir que este hecho no interfiere en su decisión ni en la posibilidad de ganar, otros estudiantes agregan diciendo que en lo único que cambia es en tener otra oportunidad de cambiar de decisión, pero que para ellos ambas tienen la misma posibilidad. En estos estudiantes se puede observar que dan argumentos para justificar incorrectamente, lo que sería una respuesta de la heurística de la representatividad.

Heurística de la disponibilidad: se presentó en común las siguientes respuestas:

- **Pregunta 1:**

¿Debe Moe mantener su elección original o escoger el otro sobre?

Debe ser seguro y mantener su decisión

Ilustración 49. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 12.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

Hay diferencia, ya que cada elección es diferente, pero a veces tiendes que queden con tu elección inicial.

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

no hay diferencia cada que corra el 2 me sale el 1 ganador y cada que escojo 1 el 2 me sale ganador por la probabilidad

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

NO

por que a veces cuando elegimos lo correcto nos quieren poner en duda para que fracasemos

Ilustración 50. Respuesta a la pregunta 2, estudiantes 18, 5 y 12.

- **Pregunta 3:**

¿Cómo podrías saber cuál es el sobre que contiene las boletas para entrar a la gran final?

Cuando escoge por ej: 1 y sale uno vacío ej: 2 el dice que si estás seguro o queremos cambiarles como si estuviéramos equivocados y si estuvieran equivocados

¿Cómo podrías saber cuál es el sobre que contiene las boletas para entrar a la gran final?

No se sabe bien, solo debemos tener seguridad en nuestras decisiones

Ilustración 51. Respuestas a la pregunta 3, estudiantes 20 y 12.

- **Pregunta 4:**

¿Qué cambia cuando Homero muestra un sobre vacío de los dos que quedaban?

nos enteramos de donde podía estar, si antes del vacío o después del vacío

Ilustración 52. Respuesta a la pregunta 4, estudiante 12.

Los estudiantes en estas respuestas realizan un juicio basado en situaciones de su vida cotidiana, puesto que afirman que por el hecho de haber estado seguro con la decisión inicial es mejor seguir con esta y ganar, es decir, relacionan la seguridad en sus actos con el hecho de obtener buenos resultados. Por otro lado, algunos estudiantes acertaron en la respuesta, pero se basan en pocos experimentos realizados en el recurso, como si siempre sucediera de esa manera, volviéndolo algo general, en otro caso se dio el hecho de creer que Homero cumplía el papel de persuadir a los estudiantes en cambiar de opinión y no poder lograr que Moe ganara las boletas, lo cual es incorrecto. En estos estudiantes se puede observar que dan argumentos a partir de ejemplos relevantes en sus mentes, lo que sería una respuesta de la heurística de la disponibilidad.

No saben dar razón para su elección: Se presentó la siguiente respuesta:

- **Pregunta 1:**

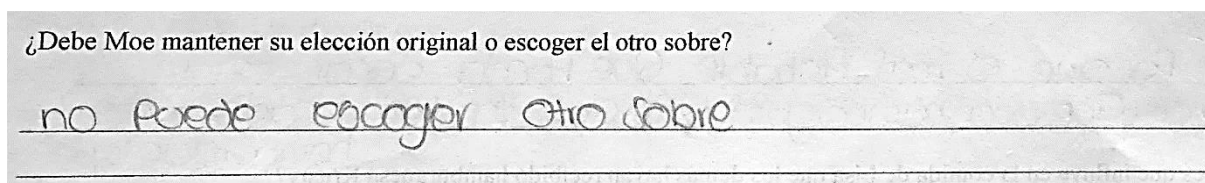


Ilustración 53. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 16.

- **Pregunta 2:**

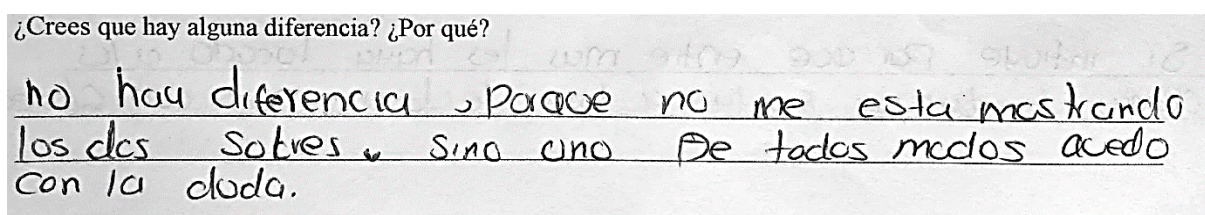


Ilustración 54. Respuesta a la pregunta 2, estudiante 6.

- **Pregunta 3:**

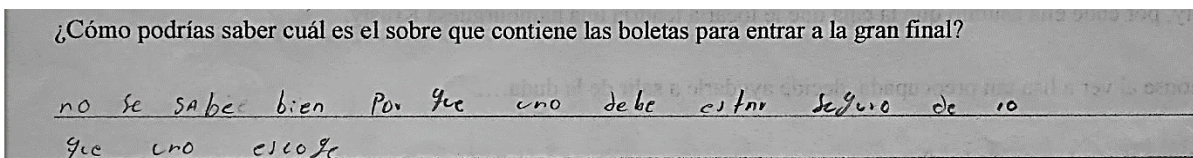


Ilustración 55. Respuesta a la pregunta 3, estudiante 8.

- **Pregunta 4:**

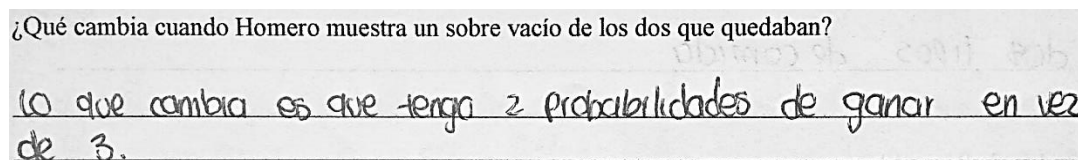


Ilustración 56. Respuesta a la pregunta 4, estudiante 5.

Los estudiantes en estas respuestas realizan afirmaciones en donde se puede observar que no manejan un buen lenguaje formal de la probabilidad y en varias ocasiones no saben justificar su respuesta. Es importante tener en cuenta este grupo de estudiantes que dan respuestas confusas o no logran contestar, puesto que indican que actúan por intuición y no son capaces de argumentar su respuesta.

Correctos: se presentaron en común las siguientes respuestas:

- **Pregunta 1:**

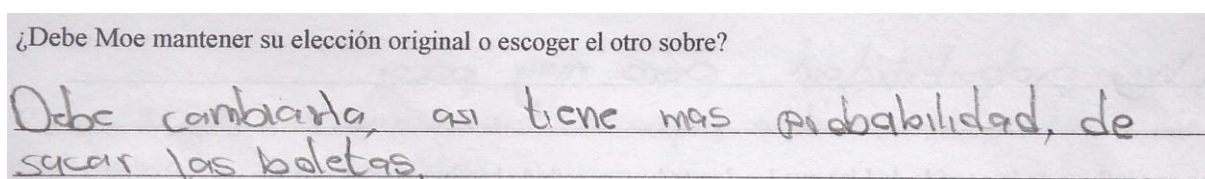


Ilustración 57. Respuesta de la pregunta 1, estudiante 2.

- **Pregunta 2:**

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

Sí, por que manteniendo su elección, tiene menos probabilidad, que cambiando de elección.

¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué?

Sí, porque al hacer el ejercicio, dice que cambiando la elección es más probable ganar.

Ilustración 58. Respuestas de la pregunta 2, estudiantes 1 y 11.

- **Pregunta 3:**

¿Cómo podrías saber cuál es el sobre que contiene las boletas para entrar a la gran final?

no se sabe realmente cual pero hay mas probabilidades de escoger el correcto si meo cambio de opinion

Ilustración 59. Respuesta de la pregunta 3, estudiante 21.

- **Pregunta 4:**

¿Qué cambia cuando Homero muestra un sobre vacío de los dos que quedaban?

Cambian las opciones, o volver a escoger el mismo, o elegir el unico sobre que no se abrió

¿Qué cambia cuando Homero muestra un sobre vacío de los dos que quedaban?

lo cambia todo, ya que cambia la probabilidad cuando Homero abre uno, ya que las posibilidades aumentan si escoges el otro sobre

Ilustración 60. Respuestas de la pregunta 4, estudiantes 7 y 21.

Los estudiantes en estas respuestas realizan afirmaciones correctas por medio de argumentos contruidos a partir de lo observado en el recuso didáctico interactivo.

Situación 2. La falacia de Lisa:

La situación inicia con la pregunta ¿Cuántos tipos de comida hay?, es una pregunta que tiene como intención verificar las opciones con la que se contaba para realizar el experimento, esta pregunta no se tiene en cuenta para el análisis, puesto que se pudo observar que todos los estudiantes respondieron correctamente: Se tiene dos opciones, hamburguesa Krusty y dona con glaseado.

- **Pregunta 1:** ¿Tendrá razón Lisa? ¿Por qué?

En esta pregunta, se pudo observar que el 41% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 18% la heurística de la disponibilidad y el 41% contesto correctamente.

- **Pregunta 2:** ¿Crees que influye en la comida de Lisa que los demás hayan recibido hamburguesa Krusty?

En esta pregunta, se pudo observar que el 36% de los estudiantes utilizaron la heurística de la representatividad, el 18% la heurística de la disponibilidad, el 5% no logro dar razón a la pregunta y el 41% contesto correctamente.

Heurística de la representatividad: se presentó en común las siguientes respuestas:

- **Pregunta 1:**

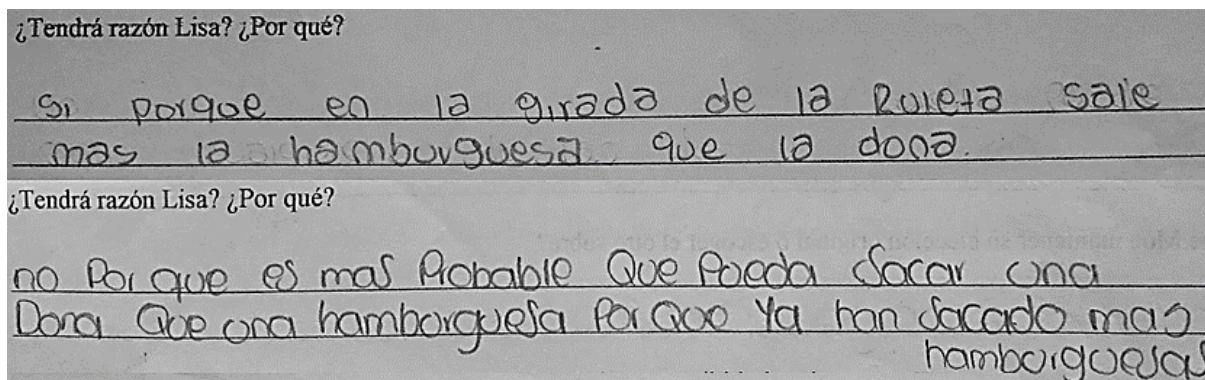


Ilustración 61. Respuestas a la pregunta 1, estudiante 19 y 16.

- **Pregunta 2:**

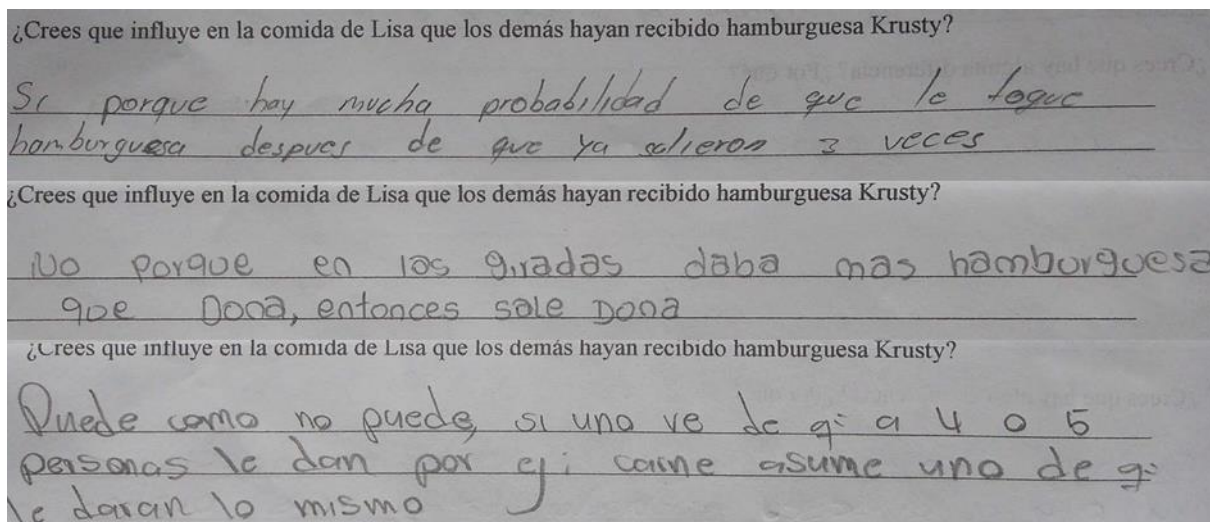


Ilustración 62. Respuestas a la pregunta 2, estudiantes 7, 19 y 2.

Los estudiantes en estas respuestas confían indebidamente en las pequeñas muestras y creen que con unas pocas series del experimento se podrá verificar que como viene saliendo hamburguesa hay más posibilidad de que la tendencia continúe o por el contrario que la tendencia se invierta y que por fin saldría una dona para compensar, ellos creen que los resultados antes mencionados interfieren en el que sigue, pero no tienen en cuenta que estos son independientes. En estos estudiantes se puede observar que dan argumentos para justificar incorrectamente, lo que sería una respuesta de la heurística de la representatividad.

Heurística de la disponibilidad: se presentaron en común las siguientes respuestas:

- **Pregunta 1:**

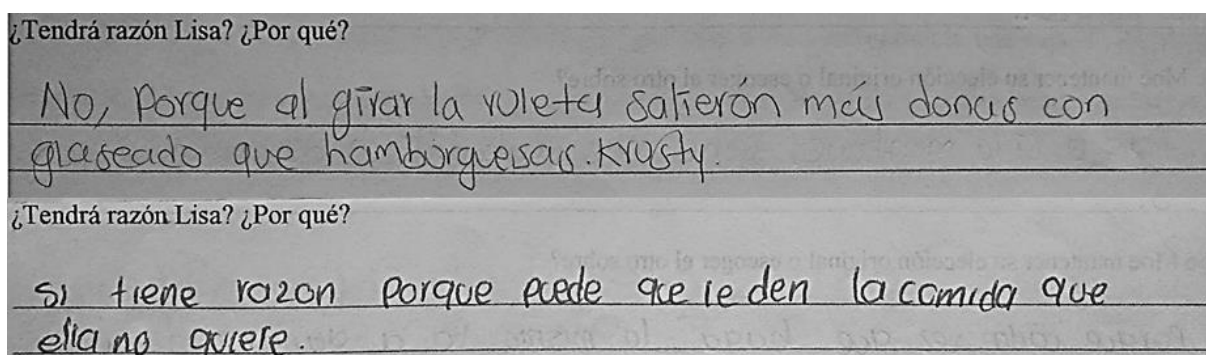


Ilustración 63. Respuesta a la pregunta 1, estudiante 11 y 5.

- **Pregunta 2:**

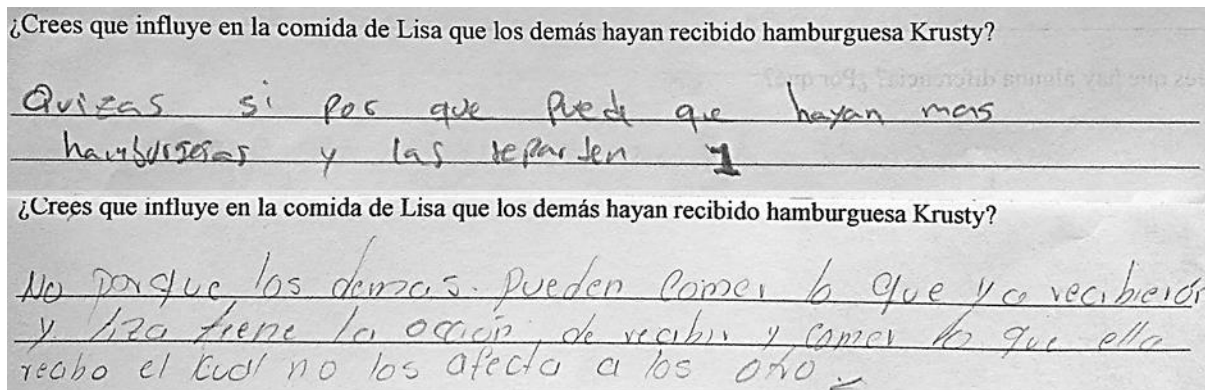


Ilustración 64. Respuesta a la pregunta 2, estudiantes 12 y 22.

Los estudiantes en estas respuestas realizan un juicio basado en situaciones de su vida cotidiana, puesto que realizan argumentaciones a partir de otros sucesos que no se han mencionado en la situación, tales como: hay más hamburguesas y por ende se reparten primero, Lisa puede recibir lo que le salga en la ruleta, esto no quiere decir que se lo debe comer, relacionar el disgusto con el hecho de obtenerlo, si no le gusta, entonces le tocara. Por otro lado, algunos estudiantes acertaron en la respuesta, pero se basan en pocos experimentos realizados en el recurso, como si siempre sucediera de esa manera, volviéndolo algo general. En estos estudiantes se puede observar que dan argumentos a partir de ejemplos relevantes en sus mentes, lo que sería una respuesta de la heurística de la disponibilidad.

No saben dar razón para su elección: Esto se presentó en un estudiante, puesto que dejó el espacio en blanco y no respondió la pregunta que se planteó.

Correctos: se presentó en común las siguientes respuestas:

- **Pregunta 1:**

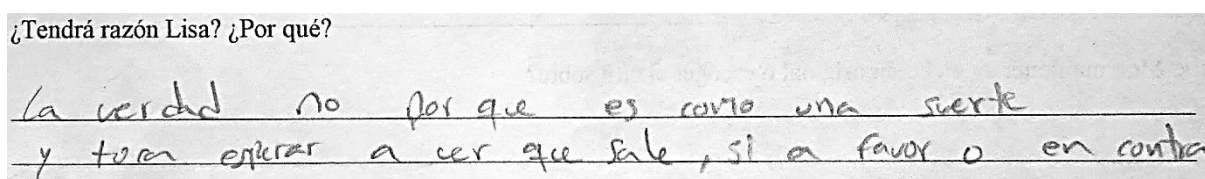


Ilustración 65. Respuesta de la pregunta 1, estudiante 12.

- **Pregunta 2:**

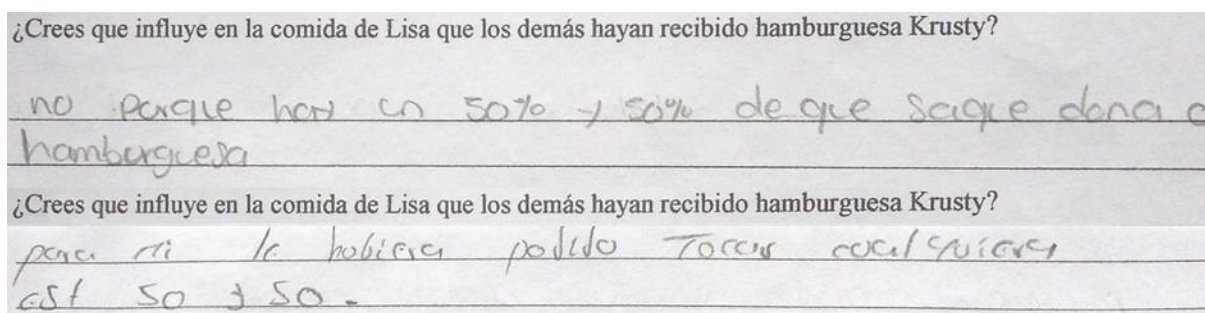


Ilustración 66. Respuestas de la pregunta 2, estudiantes 14 y 17.

Los estudiantes en estas respuestas realizan afirmaciones correctas por medio de argumentos contruidos a través del tiempo y de lo observado en el recuso didáctico interactivo.

CONCLUSIONES

Se presentarán las conclusiones generales del trabajo teniendo en cuenta en primer lugar los argumentos expuestos en el planteamiento del problema, el marco teórico y la metodología, en segundo lugar, enfocado hacia el cumplimiento de los objetivos propuestos. En este trabajo se diseñó un recurso didáctico interactivo en el software Geogebra, en donde se simulaban dos paradojas de probabilidad clásicas para identificar las heurísticas que presentaban en el pensamiento aleatorio los estudiantes de grado 11° de un colegio de la ciudad de Cali.

Respecto al planteamiento del problema se confirmó que es importante preguntarse sobre ¿Qué heurísticas se presentan en el pensamiento aleatorio, a través del uso de paradojas de probabilidad mediadas por Geogebra en estudiantes de secundaria, por medio del diseño de un recurso didáctico interactivo? Dado que se puede ver como un aporte teórico y práctico para la comunidad educativa.

El marco teórico contemplado brindó elementos importantes para el trabajo, específicamente la perspectiva matemática, pues permitió el reconocimiento del surgimiento de la probabilidad y las paradojas de probabilidad, estos aspectos históricos no deben dejarse en el pasado, ya que se ha podido evidenciar que es enriquecedor reconocer el desarrollo que se ha presentado, las heurísticas que se usan en la solución de problemas, identificar en el presente si aún persisten y como evitarlas a partir del uso de estrategias. Además, permitió el logro de los objetivos propuestos, dado que el primer objetivo específico planteado fue de reconocer las heurísticas que se han presentado en la solución de algunas paradojas clásicas a través de la historia de la probabilidad, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 7

Heurísticas e implicaciones.

HEURÍSTICA	OCASIONA
Heurística de la representatividad	• Insensibilidad al tamaño de la muestra. • Concepciones erróneas sobre el azar. • Falacia de las tasas base. • Falacia de la conjunción.
Heurística de la disponibilidad	• Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos. • Sesgos debidos a la efectividad de un proceso de búsqueda. • Sesgos debidos a su experiencia.
Ajuste – Anclaje	• Estimaciones sesgadas.
Otros sesgos presentados	• Juicios erróneos sobre frecuencias. • Calibración de los juicios. • Sesgo de equiprobabilidad. • “Outcome approach” o Enfoque en el resultado aislado.

Tabla 7. Heurísticas e implicaciones.

Desde la metodología inspirada en el Taller de Diseño de Recursos Didácticos Interactivos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística utilizando GeoGebra, se evidenció el cumplimiento del segundo objetivo específico que plantea diseñar e implementar un recurso didáctico interactivo, a través de Geogebra sobre paradojas de probabilidad. Mostrando la importancia de innovar en el aula de clase permitiendo en el estudiante analizar,

reflexionar, inferir y conjeturar conceptos matemáticos como la probabilidad y de esta forma romper con el esquema tradicional de la enseñanza, lo cual demuestra que sí es posible trabajar en el aula incorporando elementos históricos que se relacionen con situaciones de la vida diaria de los estudiantes. Este taller favoreció el desarrollo del recurso, pues a partir de las diferentes fases fue posible diseñar, implementar y evaluar satisfactoriamente el recurso.

Con respecto al tercer objetivo que plantea contrastar las heurísticas detectadas en los estudiantes teniendo en cuenta la implementación del recurso didáctico interactivo y una actividad sin el uso del programa, se puede concluir que:

Referente a la situación 1: En la actividad sin el uso de Geogebra y en el recurso didáctico interactivo se basaban en la paradoja clásica “El dilema de Monty Hall”.

La pregunta 1:

- ¿Qué color elegirías, amarillo o azul? ¿Por qué? (en la actividad sin el uso de Geogebra)
- ¿Debe Moe mantener su elección original o escoger el otro sobre? (en el recurso didáctico interactivo)

La pregunta 2:

- ¿Da igual lo que elijas? (en la actividad sin el uso de Geogebra)
- ¿Crees que hay alguna diferencia? ¿Por qué? (en el recurso didáctico interactivo)

La pregunta 3:

- ¿Qué opción te da la máxima probabilidad de escapar de las intenciones del alienígena? (en la actividad sin el uso de Geogebra)
- ¿Cómo podrías saber cuál es el sobre que contiene las boletas para entrar a la gran final? (en el recurso didáctico interactivo)

Cada una de las preguntas realizadas ya sea en la actividad sin el uso de Geogebra o en el recurso didáctico interactivo están relacionadas entre sí, puesto que ambas preguntan lo mismo, pero para contextos diferentes.

Los resultados obtenidos en cada una de las preguntas los podemos observar en la siguiente tabla:

Tabla 8

Resultados en porcentajes de los resultados obtenidos en las preguntas realizadas en la actividad sin el uso de Geogebra y el recurso didáctico interactivo.

SITUACIÓN 1						
Categorías	PREGUNTA 1		PREGUNTA 2		PREGUNTA 3	
	Sin Geogebra	Con Geogebra	Sin Geogebra	Con Geogebra	Sin Geogebra	Con Geogebra
Representatividad	27%	9%	23%	18%	41%	0%
Disponibilidad	27%	9%	0%	23%	0%	9%
No saben dar razón	9%	5%	27%	14%	5%	9%
Correctas	37%	77%	50%	45%	54%	82%

Tabla 8. Resultados en porcentajes de los resultados obtenidos en las preguntas en la situación 1.

Referente a la situación 2: En la actividad sin el uso de Geogebra y en el recurso didáctico interactivo se basaban en la paradoja clásica “La falacia del jugador”.

La pregunta 1:

- ¿Tendrá razón el buen señor? ¿por qué? (en la actividad sin el uso de Geogebra)
- ¿Tendrá razón Lisa? ¿Por qué? (en el recurso didáctico interactivo)

La pregunta 2:

- ¿Crees que influye en el sexo del nuevo bebe que los anteriores hayan sido niñas?
¿por qué? (en la actividad sin el uso de Geogebra)
- ¿Crees que influye en la comida de Lisa que los demás hayan recibido hamburguesa Krusty? (en el recurso didáctico interactivo)

Al igual que en la situación 1, cada una de las preguntas realizadas ya sea en la actividad sin el uso de Geogebra o en el recurso didáctico interactivo están relacionadas entre sí, puesto que ambas preguntan lo mismo, pero para contextos diferentes.

Los resultados obtenidos en cada una de las preguntas los podemos observar en la siguiente tabla:

Tabla 9

Resultados en porcentajes de los resultados obtenidos en las preguntas realizadas en la actividad sin el uso de Geogebra y el recurso didáctico interactivo.

SITUACIÓN 2				
Categorías	PREGUNTA 1		PREGUNTA 2	
	Sin Geogebra	Con Geogebra	Sin Geogebra	Con Geogebra
Representatividad	42%	41%	25%	36%
Disponibilidad	21%	18%	42%	18%
No saben dar razón	4%	0%	4%	5%
Correctas	37%	41%	29%	41%

Tabla 9. Resultados en porcentajes de los resultados obtenidos en las preguntas en la situación 2.

Se puede concluir de los resultados que se obtuvieron en las situaciones 1 y 2 a nivel general, que influyó significativamente la utilización del recurso para disminuir el uso de

heurísticas, pues los estudiantes podían acceder a una herramienta que simulaban las situaciones y permitía repetir este experimento las veces que el necesitara.

Ahora, es muy importante destacar que la aplicación de este tipo de herramientas didácticas les proporciona a los docentes en formación y en ejercicio, transformar el esquema que habitualmente emplean para enseñar diversos conceptos matemáticos, pues con estas se les motiva a cambiar sus rutinas, convirtiendo una experiencia cotidiana, en un nuevo descubrimiento probabilístico.

La enseñanza de las matemáticas necesita que los docentes procuren brindar espacios de aprendizaje significativo y comprensivo para los estudiantes y así permitir que estos participen activamente en la reconstrucción y validación del saber matemático, haciendo uso de elementos históricos representativos y los tecnológicos, con la intención de explorar nuevas estrategias que le ayude a los estudiantes buscar soluciones a las situaciones que se le planteen dentro y fuera del aula.

Por consiguiente, Las actividades planteadas de esta forma despierta gran motivación por los estudiantes, pues dejan de lado la educación tradicional, facilitando el entendimiento de los conceptos matemáticos. Es importante destacar que este tipo de actividades se pueden llevar a cabo tanto en la educación media como en curso iniciales de probabilidad en las universidades.

Para finalizar, queda abierta la oportunidad de poner en práctica el recurso didáctico interactivo para dar cuenta de la potencialización que produce en el aprendizaje de los estudiantes, con la intención de evaluarlo y hacerlo evolucionar. Así mismo se espera, que se construyan otras actividades en Geogebra que aporten al pensamiento aleatorio de los estudiantes por medio de elementos históricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agnelli, H. (2009). Relevancia de la enseñanza de la Probabilidad. *Ciencias Económicas*, 2(7), 23-33.
- Agnelli, H., y Peparelli, S. (2011). Las paradojas, un vehículo para superar obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad. *Revista de Educación Matemática*. 1 – 12.
- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*, 8(1), 30-46.
- Arévalo, M., Montanero, J. y López, E. (2015). Intuición y probabilidad. *LI Olimpiada Matemática Española*. 83.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, J. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon*, 28(2), 7-20.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2009). Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico. *Actas de las XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas*.
- Arteaga, P., Contreras, J., Díaz, C. y Ortiz, J. (2011). Paradojas como recurso didáctico en la formación de docentes para enseñar probabilidad. Capítulo 4. El pensamiento del docente, sus prácticas y elementos para su formación profesional. *CLAME: comité latinoamericano de matemática educativa A. C.*
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación. *Conferencia presentada en el III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, centro de investigação em educação da universidade do Minho. Braga, Portugal.

- Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 37-54.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. Investigación en el aula de matemáticas. *Estadística y Azar CD-ROM*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C., Contreras, J. y Fernandes, J. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62, 11-18.
- Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. y Gea, M. (2012). El valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas*, 261, 78-84.
- Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. y Gea, M. (2012). La paradoja de Simpson. *Suma*, 71, 27-34.
- Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C. y Fernandes, J. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, 18(1), 161-183.
- Batanero, C., Contreras, J. y Díaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los docentes. *Paradigma*, 32(2), 53-68.
- Behar, R. (2009). El ABC de la teoría de la probabilidad. En Capítulo 1: Domesticando el azar: Breve búsqueda del origen de la teoría de la probabilidad. Primera edición, Santiago de Cali. Universidad del Valle.
- Clavería, A. y Clavería, R., (2004). Heurísticas: Origen y consecuencias. Universidad de Chile. Santiago de Chile, 37- 66.

- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, 3611-3621.
- Díaz, C. y De la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 55, 245-260.
- Fernández, F., Romero, J. y Vergara, M. (2015). Razonamiento probabilístico en estudiantes de undécimo grado. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 23-26.
- Gámez, A., y Marín, L. (2011). Taller de Diseño de Recursos Didácticos Interactivos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística utilizando GeoGebra. II Jornadas, 73 – 97.
- Gardner, M. (1981). Paradojas que hacen pensar. *Ediciones Labor*. Barcelona.
- Godino, J. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística? *UNO*, 5, 45-56.
- Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros docentes de educación primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Kalil, L., Melo, W., Schneider, D., Stein, L., y Tonetto., (2006). O papel das heurísticas no julgamento e na tomada de decisão sob incerteza. *Estudos de psicologia*, 23(2), 181-189.
- Leviatan, T. (2002). On the use of paradoxes in the teaching of probability. *Proceedings of ICOTS*, 6.
- Mesías, O. (2004). La investigación cualitativa. Seminario de tesis. Universidad central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Santafé de Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Santafé de Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Santafé de Bogotá, Colombia.
- Morales, L. (2015). Apuntes y Tareas Probabilidad e Inferencias. Tarea 5, 5.2 Falacia del apostador. 32 – 33.
- Osorio, M., Suárez, A., y Uribe, C. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (38).
- Pajares, A. y Tomeo, V. (2009). Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: experimentos y materiales. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander, España.
- Penalva, M., Posadas, J. y Roig, A. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación matemática*, 22(3), 23-54.
- Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, 21(2), 39-77.
- Santos, L. (2007) La educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (8), 35-54. Querétaro. México.

- Suárez, A. y Uribe, C. (2013). Software educativo para el aprendizaje de la probabilidad. *Conferencia presentada en el II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática*. Tunja, Colombia.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science*, 185 (4157), 1124-1131.
- Velásquez, M. (2014). *Secuencia didáctica: introducción a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad para estudiantes de grado quinto de primaria*. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia, Colombia.