

¿CÓMO INTERVIENEN LAS DIFERENTES RELACIONES QUE SUSCITAN EL
ÁREA Y EL PERÍMETRO EN EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN?

Claudia Ximena Bustamante Puertas

Marylin Córdoba Castillo



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2020

¿CÓMO INTERVIENEN LAS DIFERENTES RELACIONES QUE SUSCITAN EL
ÁREA Y EL PERÍMETRO EN EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN?

Claudia Ximena Bustamante Puertas

1604262

Marylin Córdoba Castillo

1604259

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en
Educación, énfasis en Educación Matemática

Dirigido por:

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenía



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2020

Agradecimientos

A Dios por siempre iluminar y orientar mis
pasos

Y a todos quienes han contribuido y aportado
su granito de arena para culminar este logro.

Ximena Bustamante.

AGRADECIMIENTOS

a Dios por la oportunidad de realizar este

estudio, la gloria sea para Él.

a mi familia por el apoyo de mis padres, mi

esposo, mi hijo y mis hermanas.

a mi compañera Claudia por su paciencia y

perseverancia.

al profesor Gustavo Adolfo Marmolejo

Avenía por su paciencia y enseñanza. Y a todas

las personas que de alguna manera me

aportaron para el desarrollo de este trabajo

Marylin C.

RESUMEN

Con este trabajo se pretende diseñar una actividad como propuesta de aula en geometría, en el que se prevé que uno de los contenidos que propician la adquisición de la actividad cognitiva, es la conservación del área y perímetro como temática que permite acceder de forma directa a la enseñanza temprana en los ciclos de la educación básica, además de ser uno de los contenidos indicados para el desarrollo de la visualización, puesto que para su adquisición se recurre al uso de figuras involucrando a los estudiantes en actividades en las que se requiere de su uso. En este sentido, caracterizar las tareas sobre áreas de figuras bidimensionales, según la forma como se plantea la visualización, sea un primer aspecto para conocer cómo la visualización es y puede ser desarrollada en la enseñanza de las matemáticas.

En este trabajo se caracteriza como la visualización es promovida, a través del tratamiento del concepto de áreas de superficies planas y del contorno de figuras. Se diseñó una metodología de análisis conformada por categorías, a saber: desde lo didáctico, elementos de magnitud de medida asociados, elementos visuales a incluir, elementos y función de control y por último, la articulación visual-control en los que se promueve el estudio de la relación del área y el perímetro. Cabe enfatizar que de la metodología de análisis emergen las categorías de análisis.

Para el diseño de la metodología de análisis, la selección de datos, y el análisis de los resultados se incluyó una adaptación de los referentes teóricos expuestos por Duval (1995, 2003, 2005) sobre la visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales.

También se tiene en cuenta la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010) sobre la existencia de ciertos elementos que guían las maneras de proceder de los estudiantes al enfrentarse con actividades matemáticas. Se diseñarán tres situaciones organizadas en tres o cuatro tareas cada una; la primera situación centrada en la relación de conservación del área, la segunda centrada en la conservación del contorno de las figuras y la tercera situación alude a la relación existente entre estas.

Palabras clave: Registros semióticos de representación, visualización, figuras geométricas, aprehensión operatoria, reconfiguración, elementos de control visual, áreas de superficies planas, contorno de figuras.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	11
I. CAPÍTULO PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	14
1.2.1 Pregunta.....	19
1.2.2 Objetivo general	20
1.2.3 Objetivos específicos	20
1.2.4 Cuestiones que guían la consecución de los objetivos específicos.....	20
II. CAPÍTULO MARCO DE REFERENCIA	22
2.1.1 Importancia de las figuras geométricas en la enseñanza de la geometría	22
2.1.2 La visualización y la enseñanza de la geometría	24
2.1.3 Las figuras geométricas y la visualización	25
2.1.4. La visualización y las figuras geométricas	27
2.1.5 Formas de discriminar en una figura geométrica	28
2.2 operaciones visuales en el estudio del área y su relación con el perímetro	30
2.3 Elementos generales de control visual.....	31
2.3.1. Elementos generadores de control visual.....	31
2.3.2 Funciones de control visual.....	33
2.4 Referentes matemáticos que determinan el estudio de la magnitud	35
2.4.1 Rol de la visualización en el desarrollo de ideas matemáticas que determinan el estudio de la relación perímetro-área	37
III. CAPÍTULO METODOLOGÍA	39
3.1. Aproximación metodológica.....	39
3.2. Población y criterios de selección	40
3.3. Unidades de análisis e Instrumentos de recolección de datos.....	41
3.4. El trabajo de campo	44
3.5. Diseño de instrumento de análisis.....	48
3.6. Instrumento de análisis.....	52
3.7 Ejemplo codificación de una tarea	59
3.7.1. Contextualización y descripción de la tarea.....	59
3.7.2. Proceso de codificación de la tarea	60
IV. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN MOMENTO 1.....	62
4.1 Análisis de resultados M1.....	63
4.1.1 Análisis predictivo M1	63
4.1.2 procedimientos de resolución de las tareas propuestas según el éxito o fracaso alcanzado....	70
4.1.3 Análisis de resultados descriptivo del M1.....	73
4.1.4 Discusión de resultados M1	95
4.1.5 Trabajo previo	97
4.1.6 El área y el desarrollo de la aprehensión operatoria	97
4.1.7 La intervención de las acciones sobre los soportes consideradas por los estudiantes en T1.4 las tareas (T1.1, T1.2, T1.3 Y T1.5) del M1.....	103
4.2 Consideraciones para la síntesis de datos.....	111
V. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN MOMENTO 2.....	115

5.1 Análisis de resultados M2.....	115
5.1.1. Análisis predictivo de M2	115
5.1.2 Análisis de resultados descriptivo del M2.....	123
5.1.3 Discusión de resultados M2	137
5.1.4 Trabajo previo	137
5.1.5 El perímetro y el desarrollo de la deconstrucción dimensional de formas.....	138
5.1.6 La intervención de las acciones sobre los soportes consideradas por los estudiantes en las Tareas G2T1 y en el otro grupo de tareas G2T2 del M2	142
VI. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN MOMENTO 3.....	146
6.1 Análisis de resultados M3.....	146
6.1.1 Análisis predictivo de M3	146
6.1.2 Análisis de resultados descriptivo del M3.....	152
6.1.3 Discusión de resultados M3	171
6.1.4 Trabajo previo	171
6.1.5 Establecimiento de relaciones entre el área y el perímetro: Articulación entre la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas.....	171
6.1.6 La intervención de las acciones sobre los soportes consideradas por los estudiantes en las Tareas 3.4. y el resto de tareas (T3.1, T3.2 y T3.3) del M3	176
6.1.7 La intervención de las dificultades consideradas por los estudiantes en las Tareas 3.4. y el resto de tareas (T3.1, T3.2 y T3.3) del M3	180
VII. CAPÍTULO CONCLUSIONES.....	184
VIII. BIBLIOGRAFÍA.....	192
ANEXOS.....	198
Anexo 1. La propuesta de enseñanza	198
Anexo 2. Ideas que guiaron el diseño de la propuesta de enseñanza.....	203
Anexo 3. Categoría de operaciones	207
Anexo 4. Rejilla de Análisis	228
Anexo 5. Entrevista semiestructurada.....	229
Anexo 6. Procedimientos	230

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Categoría: Operaciones Visuales (Adaptación realizada de Marmolejo, 2013a)	55
Tabla 2. Categoría: Elementos de control	56
Tabla 3. Categoría: Acciones sobre el soporte de papel.....	58
Tabla 4. Categoría: Dificultades y potencialidades.....	59
<i>Tabla 5. Codificación unidad de análisis T3.3E5</i>	<i>61</i>
Tabla 6. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento del área de superficies planas de las tareas propuestas	64
Tabla 7. Frecuencia de aparición de los procedimientos asociados al éxito y fracaso global en la propuesta de enseñanza	72
Tabla 8. Comparativo de procedimientos y tareas globales en la propuesta de enseñanza	73
Tabla 9. Frecuencia de aparición de los procedimientos asociados al éxito y fracaso en el M1 ..	74
Tabla 10. Comparativo de procedimientos y tareas M1	74
Tabla 11. Frecuencia de aparición de las familias visuales globales en la propuesta de enseñanza	76
Tabla 12. Comparativo de familias visuales y tareas global en la propuesta de enseñanza	77
Tabla 13. Frecuencia de aparición de las familias visuales en el M1	78
Tabla 14. Comparativo de las familias visuales	79
Tabla 15. Frecuencia de aparición de las Acciones sobre el soporte global en la propuesta de enseñanza	80
Tabla 16. Comparativo de Acciones visuales y tareas globales de la propuesta de enseñanza	81
Tabla 17. Frecuencia de aparición de las Acciones sobre el soporte en el M1.....	82
Tabla 18. Comparativo de las Acciones sobre el soporte y procedimiento en el M1	83
Tabla 19. Frecuencia de aparición de las Dificultades globales en la propuesta de enseñanza	83
Tabla 20. Comparativo de Dificultades y tareas globales de la propuesta de enseñanza	84
Tabla 21. Frecuencia de aparición de las dificultades y potencialidades en el M1	85
Tabla 22. Comparativo de dificultades y procedimientos en el M1	86
Tabla 23 Porcentaje de procedimientos PE y PNE que conforman el procedimiento con éxito PX	99
Tabla 24 Síntesis de datos	112
Tabla 25. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento de la longitud de contorno de las tareas propuestas M2.....	116
Tabla 26. Frecuencias de aparición de los procedimientos asociados al éxito y fracaso en el M2	124
Tabla 27. Comparativo de procedimientos y tareas M2	124
Tabla 28. Frecuencia de aparición de las familias visuales en el M2.....	126
Tabla 29. Comparativo de las familias visuales y procedimientos en el M2.....	128
Tabla 30. Frecuencia de aparición de las Acciones sobre el soporte en el M2.....	128
Tabla 31. Comparativo de las Acciones sobre el soporte y los procedimientos en el M2.....	129
Tabla 32. Frecuencia de aparición de las Dificultades y potencialidades en el M2	130
Tabla 33. Comparativo de Dificultades y potencialidades en los procedimientos del M2	131
Tabla 34. Porcentaje de procedimientos PE y PNE que conforman el procedimiento con éxito PX del M2	138
<i>Tabla 35. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento de la R(p/a) de las tareas propuestas M3</i>	<i>147</i>
Tabla 36. Frecuencia de aparición de los procedimientos asociados al éxito y fracaso en el M3	153
Tabla 37. Comparativo de procedimiento y tareas M3	153

Tabla 38. Frecuencia de aparición de las familias visuales en el M3	156
Tabla 39. Comparativo de las familias visuales y procedimientos en el M3.....	157
Tabla 40. Frecuencia de la Acciones sobre el soporte en el M3.....	158
Tabla 41. Comparativo de las Acciones sobre el soporte y los procedimientos en el M3.....	159
Tabla 42. Frecuencia de aparición de las Dificultades y potencialidades en el M3	160
Tabla 43. Comparativo de Dificultades y potencialidades en los procedimientos del M3	161
Tabla 44 Porcentaje de procedimientos PE y PNE que conforman el procedimiento con éxito PX del M3	172

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 Resultados Icfes 2016.....	17
Ilustración 2 Esquema de los momentos de intervención y análisis.....	21
Ilustración 3 Unidad de análisis T3.3E4	61
Ilustración 4. Flujo visual T1.1 del M1	64
Ilustración 5. Flujo Visual T1.2 del M1	66
Ilustración 6. Flujo Visual T1.3 del M1	67
Ilustración 7. Flujo Visual T1.4 del M1	68
Ilustración 8. Flujo Visual T1.5 del M1	70
Ilustración 9. Flujo Visual T2.2 del M2	117
Ilustración 10. Flujo Visual T2.2 del M2	118
Ilustración 11. Flujo Visual T2.3 del M2	119
Ilustración 12. Flujo Visual T2.4 del M2	119
Ilustración 13 Flujo Visual T2.5 del M2	120
Ilustración 14. Flujo Visual T2.6 del M2	121
Ilustración 15 .Flujo Visual T2.7 del M2	122
Ilustración 16. Flujo Visual T2.8 del M2	123
Ilustración 17. Flujo Visual T3.1 del M1	147
Ilustración 18. Flujo Visual T3.1 del M3	148
Ilustración 19. Orden de las figuras de mayor a menor longitud de contorno de la T3.1 del M3	149
Ilustración 20. Flujo Visual T3.2 del M3	149
Ilustración 21. Flujo Visual T3.3 del M3	151
Ilustración 22. Flujo Visual T3.4 del M3	152
Ilustración 23. Flujo Visual T3.4 del M3	152

INTRODUCCIÓN

En esta investigación, la actividad cognitiva a considerar es la visualización, al tener en cuenta la aprehensión operatoria de las figuras bidimensionales y la deconstrucción dimensional (Duval, 1998) aplicadas sobre una configuración al estudiar una actividad matemática, además se estudian los elementos de control visual propuestos por Marmolejo y Vega, (2012) como acciones que conduzcan a la resolución de la problemática planteada, o que suscite la exploración de resoluciones.

La intención de la investigación recae en la visualización, pues, es una actividad cognitiva que implica cambios figurales y/o dimensionales sobre una configuración geométrica. Por otro lado, la visualización debe propiciarse como objeto de reflexión en el aula (Duval, 1998).

En cuanto a la relación perímetro y área (en adelante $R(p/a)$), se realiza una reflexión que exige el desarrollo de acciones visuales. Puntualmente de tareas que susciten la articulación de operaciones y construcciones dimensionales, al comparar dos figuras con igual área no siempre tiene igual perímetro o viceversa, para lo cual es necesario aplicar transformaciones superficiales y longitudinales a las figuras.

El trabajo de Fandiño y D'amore (2007) muestra que el obstáculo para la construcción del conocimiento de $R(p/a)$ es de carácter didáctico dado que en las clases solo se usan figuras convexas excluyendo las figuras cóncavas, no se explicita la relaciones entre las magnitudes de área y perímetro y se promueve el poco uso de transformaciones sobre las figuras.

Estudios como los realizados por Marmolejo, Sánchez y Londoño (2017), señalan que los docentes no generan espacios para la reflexión de la visualización y no le dan un

espacio adecuado en la enseñanza, por lo cual sugiere que en el aula de clase se deben propiciar actividades de la visualización al sugerir transformaciones a las figuras.

De esta manera, este trabajo propone la articulación de dos clases de visualizaciones: aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de las formas (Duval, 2004a, 2004b). A partir de la $R(p/a)$, en particular una relación de complejidad media y dos relaciones de complejidad alta según el estudio realizado por Fandiño y D'Amore (2007). De acuerdo a lo anterior, se tuvo en cuenta primero una propuesta centrada en la aprehensión operatoria, luego otro tipo de tareas con énfasis en la deconstrucción dimensional de las formas para finalmente explorar cómo los estudiantes lograban la articulación de estas dos clases de visualización.

A continuación, se puntualiza los referentes conceptuales que suscitaron la formulación del problema en estudio y el diseño del instrumento metodológico; de este último emergen las categorías de análisis. En primera instancia, se resalta la importancia en la enseñanza de la Geometría de las figuras geométricas-bidimensionales y se considera el análisis funcional del rol de la visualización vinculado a las figuras geométricas (Duval, 1999; 2003, 2004) y los elementos que en el estudio del área incluida su relación con el perímetro, le determina (Marmolejo y González, 2013a). Posteriormente, se caracteriza semióticamente qué es una figura, se establecen las nociones de estructura y función de control visual (Marmolejo y González, 2015, 2017a). Finalmente, se presentan los referentes matemáticos que determinan el estudio de la $R(p/a)$ y se establece el vínculo con la visualización.

El diseño de situaciones de aprendizaje que se implementaron en este trabajo, desde el punto de vista semiótico y cognitivo vinculado con los sistemas y los registros semióticos de representación, se centra en la relación de área y perímetro de figuras

bidimensionales, teniendo en cuenta los procesos de visualización que propone Raymond Duval.

El diseño metodológico en el que se desarrolló la investigación es a través del estudio de caso y se enfocó en los estudiantes, profesores y saber, como elementos que constituyen una relación fuerte entre sí. Siendo una investigación de carácter cualitativa y descriptiva Bisquerra (1989), dado que estudia de manera particular a los estudiantes de grado quinto de la Institución José María Córdoba sede Manuela Beltrán, de acuerdo con unas preguntas de investigación que guiaron cada uno de los objetivos específicos del trabajo.

Este trabajo se inscribe en la línea de Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes del área de Educación Matemática, como requisito para obtener el título de Magister en Educación con Énfasis en Educación Matemática.

El presente informe se organiza en cinco capítulos: en el primero, por un lado, se hace una presentación de las preguntas de investigación y los objetivos. En el segundo capítulo, se da cuenta de los referentes teóricos que caracterizan el estudio; y que guiaron el diseño de las tareas de enseñanza propuestas a un grupo de estudiantes de grado quinto de la educación básica primaria.

En el tercer capítulo se describe la implementación correspondiente a la propuesta metodológica, en el cuarto capítulo se hace referencia a la presentación de los resultados del estudio y a su posterior discusión entre los cuales se destacan: a) presentación de la propuesta de enseñanza, b) descripción de los momentos a considerar para el estudio de la R(p/a) y c) procedimientos visuales esperados y elementos de control privilegiados. Finalmente, se realizan las conclusiones, en las cuales se proponen aspectos a considerar en futuros estudios.

I. CAPÍTULO PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes

La importancia de las figuras geométricas en cuanto al aprendizaje de las matemáticas, radica en que, son importantes soportes heurísticos para el desarrollo de las actividades geométricas. En el cual las figuras geométricas bidimensionales son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado los conceptos matemáticos (Duval 1999).

Duval (2010) estudia en dos tipos de transformaciones sobre las figuras. Las primeras *modificaciones mereológicas* tienen que ver con descomponer una figura en otras figuras (subfiguras); las segundas *proceso de deconstrucción dimensional* tienen que ver con la posibilidad de descomponer una figura en unidades figurales de una dimensión inferior.

De otra parte, estudios como los de Marmolejo y Vega (2012) afirman que la visualización es una actividad cognitiva que debe ser enseñada y deben propiciar espacios en el currículo escolar de la básica primaria, para que las figuras sean verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de actividades matemáticas.

El estudio de Marmolejo, Sánchez & Londoño (2017), muestra que los maestros no promueven tareas de R(p/a) ni identifican el rol de la visualización, siendo en algunos casos estudiantes de licenciatura y maestros en ejercicio; por lo cual la investigación sugiere que en los programas de formación de profesores este asunto sea un objeto de estudio y reflexión.

Fandiño y D'amore (2007) concluyen en su estudio que las relaciones entre el perímetro y el área no son solo de naturaleza epistemológica, sino también de naturaleza didáctica, dado que casi nunca se enseña a hacer transformaciones sobre las figuras de

forma tal que se conserve o se modifique el área o el perímetro, pues los estudiantes asocian la palabra transformación a la reducción y ampliación de la figura.

Con respecto al área de superficies planas Marmolejo y González (2013a), afirman que este es un contenido favorable para la visualización porque se involucran procesos tales como la construcción de la magnitud área, la medida de cantidades del área, construcción de las fórmulas y aplicación de estas y la diferenciación entre el área y el perímetro de una figura, producen operaciones que transforman las figuras. Además este tema constituye una gran oportunidad para impulsar la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas, pues la comparación de figuras a partir de cantidades de área es un lugar especial para el desarrollo de habilidades visuales desde los primeros ciclos de escolaridad, sin desconocer que este objeto métrico tiende a ser un elemento de reflexión a lo largo de toda la educación básica; propiciando una entrada a la enseñanza de la geometría Marmolejo y González (2015a).

Chamorro (2010) hace una reflexión acerca de la enseñanza y aprendizaje de la medida para lo cual enuncia que se debe tener en cuenta que la medida no solo se asocia con la asignación numérica, sino que también se debe promover la estimación.

1.2 Planteamiento del problema

Desde 1994 con la aparición de la Ley General de Educación 115, el país sentó las bases para un nuevo proceso de transformación de la enseñanza de las matemáticas, entregando a las escuelas la autonomía sobre el desarrollo de sus propuestas de formación, acompañando el proceso con la construcción y consolidación de documentos como: Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006).

Sin embargo, pese a los esfuerzos de los maestros por implementar en las aulas de clases esta perspectiva para la enseñanza de las matemáticas los resultados obtenidos en la mayoría de escuelas en el país no son alentadores, teniendo en cuenta el reporte de las pruebas nacionales al encontrar promedios por debajo de los esperados a nivel nacional, regional y local (ICFES, 2017).

Es claro que lo aprendido en la escuela y cómo se aplican los aprendizajes en la vida cotidiana se reflejan indudablemente en los resultados de las pruebas aplicadas cada año, sin descartar que existen factores sociales, culturales, familiares etc., que influyen en el resultado obtenido por los estudiantes. En las Pruebas Saber se evalúan los desempeños de los estudiantes de quinto grado de la básica primaria en términos de lo que es capaz de hacer un estudiante en relación con las competencias y componentes, determinado de acuerdo a los puntajes obtenidos en cada una de ellas, los cuales no son satisfactorios según los resultados en las Pruebas Saber 2016 realizada a los estudiantes de grado quinto al presentar mayor dificultad en el pensamiento geométrico – métrico específicamente en la institución educativa en el cual se ejerce la carrera docente.

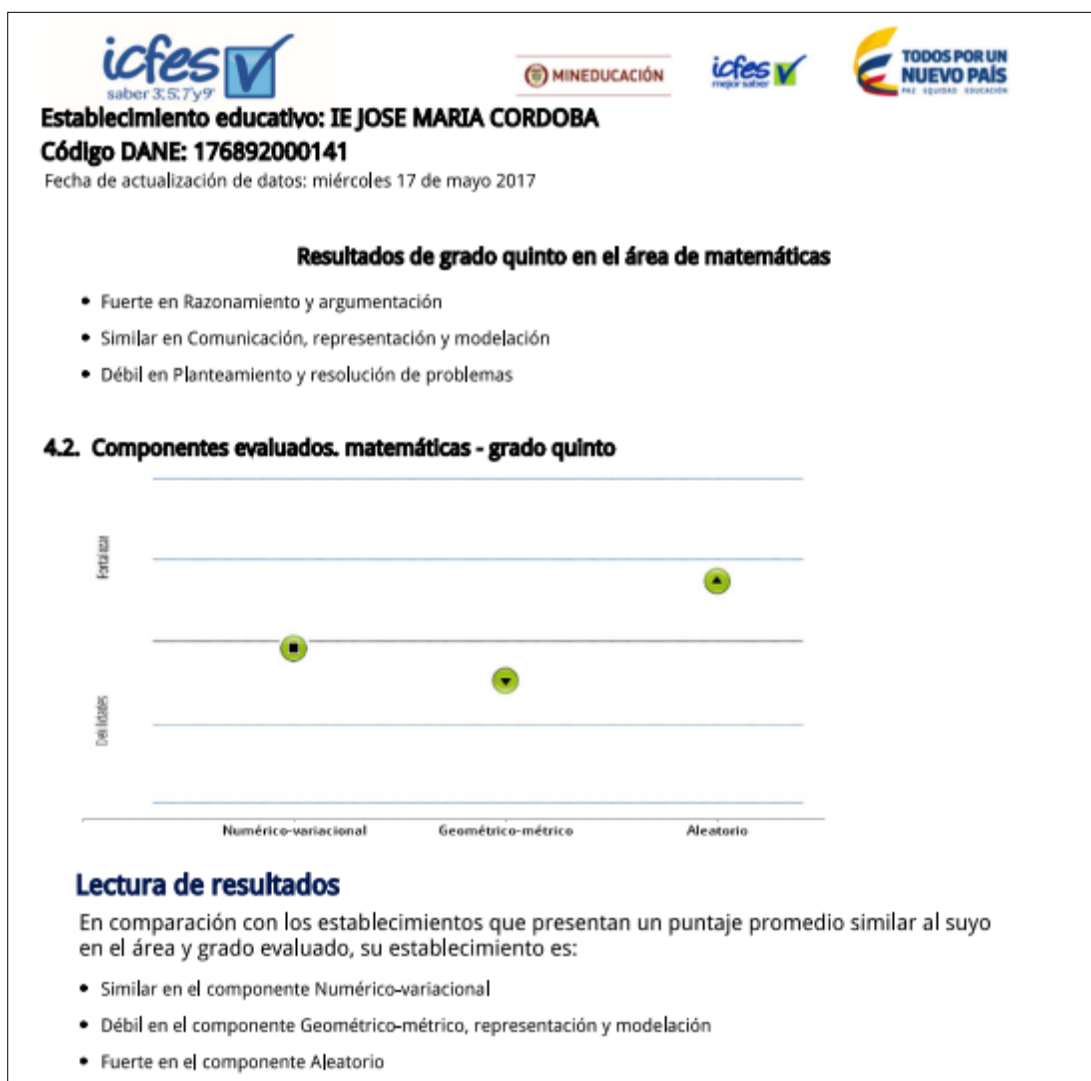


Ilustración 1 Resultados Icfes 2016.

Para atender esta dificultad se centrará la atención en un pensamiento y en alguno de los procesos y sistemas que se le asocian, más concretamente en el componente geométrico - métrico valorado por las pruebas nacionales. Además, bajo este contexto escolar es que se formula esta propuesta de incluir reflexiones de orden semiótico cognitivo y en la organización de una parte del currículo escolar de matemáticas, en el desarrollo del pensamiento métrico y el sistema de medidas centrado en la magnitud área y en la medida del contorno de una superficie serán de nuestro interés; al proponer específicamente que uno de los tres procesos cognitivos (construcción, visualización y razonamiento) involucrados con el estudio de la geometría que plantea Raymond Duval, sea privilegiado.

En este trabajo, el segundo: la visualización, asociada a las figuras geométricas bidimensionales, el funcionamiento cognitivo de cada actividad ocurre por separado, pero es posible que la visualización se privilegie como puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción geométricas (Duval, 1998a).

Entre los distintos tipos de representaciones que se movilizan en la geometría, las figuras geométricas¹ juegan un papel determinante; constituyen un soporte intuitivo para la actividad geométrica (Duval, 1999).

De otra parte, un aspecto a considerar en esta investigación es la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010) al resaltar la existencia de ciertos elementos que promueven el recurso a procedimientos a seguir en resolución de tareas matemáticas, al tener en cuenta tanto la planificación de comportamientos y selección de acciones como la evaluación de las decisiones realizadas y los resultados de los planes ejecutados. Una estructura de control es todo conjunto de elementos y estrategias que en el desarrollo y comprensión de una actividad matemática “permite expresar los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios que hace posible decidir si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (Balacheff y Gaudin, 2010, p.192).

En primera medida se tiene en cuenta una perspectiva semiótica y cognitiva del aprendizaje de las matemáticas, en particular desde la actividad de visualización que propone la teoría de Duval (1999), pues requiere simultánea y articuladamente de varios sistemas de representación semiótica; así mismo la estructura de control implementada por

¹ Duval (2004a) define una figura geométrica a partir de la configuración de al menos dos unidades figurales elementales. Identifica como unidades figurales elementales: punto, recta, arco o curva, ángulo, cruz, triángulo, rectángulo, cuadrado, curva en punta, curva en e, óvalo y circunferencia.

Balacheff y Gaudin (2010) y los elementos visuales como control de decisiones propuestas por Marmolejo (2014) en la resolución de problemas, al incluir la construcción y conservación del área relacionada con la magnitud longitud como lugar de reflexión.

El área de superficies planas es un contenido propicio para trabajar desde la visualización, no sólo por tratarse de un tópico cuya construcción se realiza durante la mayor parte de la educación básica, sino porque procesos como la construcción de la magnitud área, la medida de cantidades de área y la diferenciación entre el área y el perímetro de una figura, suscita la aplicación de operaciones que transforman bidimensionalmente las figuras y el paso de centrar la atención en la superficie de una figura a hacerlo en algunas de sus partes constituyentes de dimensión inferior. Estos aspectos son determinantes en cualquier investigación que considere la visualización como un objeto de estudio (Duval, 2003, 2005).

Para lograr que los estudiantes puedan discriminar de manera eficiente las distintas formas de ver las figuras geométricas y además puedan acceder a ellas como verdaderos soportes intuitivos, se hace necesario y determinante que en la educación desde los primeros años de escolaridad y específicamente en los currículos educativos, se otorgue el espacio para implementar su enseñanza como plantea Marmolejo y Vega (2012), por tanto en el presente trabajo se plantea la siguiente pregunta:

¿Cómo los estudiantes utilizan los elementos de control visual para comprender las diferentes relaciones que suscitan el área y el perímetro?

1.2.1 Pregunta

¿Cuál es el rol que los estudiantes asignan a los elementos de control visual al explicitar procedimientos visuales que faciliten el estudio de la R (p/a)?

1.2.2 Objetivo general

Caracterizar el rol de la visualización en el estudio de las diferentes relaciones que suscitan el área y el perímetro.

1.2.3 Objetivos específicos

- Establecer ideas matemáticas que permitan el diseño de tareas que susciten el estudio de la R (p/a) desde una perspectiva visual.
- Determinar los aspectos visuales que propician la inclusión de ideas matemáticas asociadas al estudio de la R (p/a).
- Determinar las estrategias que los estudiantes consideran para suscitar la articulación entre los aspectos visuales e ideas matemáticas que subyacen al estudio de la R(p/a).

1.2.4 Cuestiones que guían la consecución de los objetivos específicos

En cuanto al primero de los objetivos específicos: ¿Qué rol desempeñaron las acciones visuales (transformaciones visuales y elementos de control visual) considerados por las estudiantes en formación para establecer ideas matemáticas que susciten el estudio de la R (p/a)? ¿Todos los elementos de control visual considerados por las estudiantes en formación fueron objeto de reflexión? ¿Cuáles son las ideas matemáticas que se consideran para suscitar el estudio de la R (p/a) desde una perspectiva visual?

En cuanto al segundo de los objetivos específicos: ¿Qué aspectos visuales (operaciones, estructuras y funciones de control) fueron considerados por las estudiantes en formación? ¿Cuáles aspectos visuales (operaciones, estructuras y funciones de control) propiciaron la inclusión de las ideas matemáticas asociadas al estudio de la R (p/a)?

¿Cuáles elementos y funciones de control visual propiciaron la inclusión de operaciones asociados al estudio de la R (p/a)?

En cuanto al tercero de los objetivos específicos: ¿Cuáles estrategias usaron los estudiantes para el desarrollo de las tareas? ¿Qué tipo de representaciones usaron en el desarrollo de las tareas propuestas? ¿Qué tipos de desarrollo se identifican en los estudiantes al articular las dos clases de visualización, teniendo en cuenta los elementos de control? ¿Qué reflexiones en torno a R (p/a) se identificaron

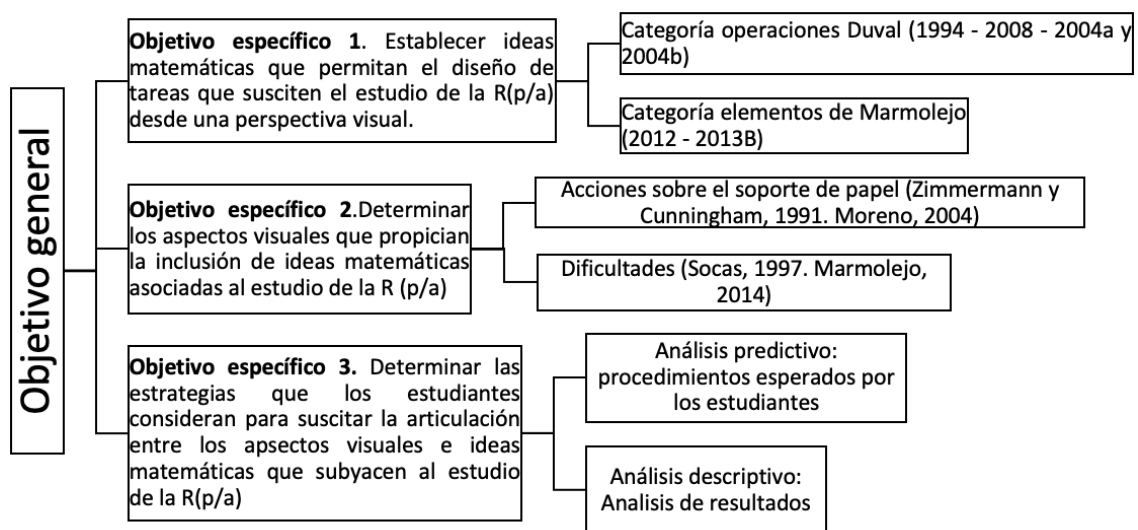


Ilustración 2 Esquema de los momentos de intervención y análisis.

II. CAPÍTULO MARCO DE REFERENCIA

A continuación, se puntualizan los referentes conceptuales que suscitaron la formulación del problema en estudio y el diseño del instrumento metodológico. Son tres los apartados a considerar; en el primero, se resalta la importancia en la enseñanza de la Geometría de las figuras geométricas bidimensionales además se considera el análisis funcional del rol de la visualización vinculado a las figuras geométricas (Duval, 1999; 2003, 2004a, 2004b) y los elementos, que en el estudio del área incluida su relación con el perímetro, le determinan (Marmolejo y González, 2013a). En el segundo apartado, se caracteriza semióticamente qué es una figura (Duval, 2004a), se establecen las nociones de estructura y función de control visual (Marmolejo y González, 2015b, 2018b). Finalmente, en el tercer apartado se presentan los referentes matemáticos en palabras de Marmolejo y González (2015a), determinan el estudio de la $R(p/a)$ y se establece el vínculo con la visualización. Es decir, se centra la atención específicamente en las ideas matemáticas que se identifican en la $R(p/a)$.

2.1 Visualización asociada a las figuras geométricas

2.1.1 Importancia de las figuras geométricas en la enseñanza de la geometría

Las matemáticas se han catalogado por su carácter abstracto; como una disciplina de conocimiento de difícil acceso; a lo cual se le atribuye el bajo nivel alcanzado por estudiantes de educación básica y media. El desarrollo del conocimiento matemático cuenta al menos con dos características de la actividad cognitiva propia de este saber, los objetos matemáticos no son nunca objetos accesibles por la percepción como pueden serlo los objetos de otras disciplinas (Duval, 2004a).

Por consiguiente, para comprender el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes es importante tener claro que el funcionamiento cognitivo implicado por la

adquisición de los conocimientos geométricos no es el mismo que en otras disciplinas, pues se debe recurrir a varios registros de representación semióticos² para efectuar tratamientos que benefician esta área. Por ello Raymond Duval (2001), plantea dos preguntas que constituyen el centro del aprendizaje: ¿Cómo se aprende a cambiar de registro de representación? y ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación propuesta? Muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas están originadas por el desconocimiento del profesor de los fenómenos relativos a estas cuestiones (Duval,1996).

De otra parte, podría decirse con Raymond Duval (2004a), que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama registros de representación semiótica, no parece posible aprender y comprender dicho contenido; “la competencia de comunicación se refleja justamente a través de diferentes lenguajes con las que se expresan y representan lenguajes propios de las matemáticas” (p.115). Por tanto, al no ser asequibles los objetos matemáticos³ de forma directa, es preciso recurrir a sus representaciones, las cuales a su vez establecen varios registros de representación⁴, al ser necesarios para realizar tratamientos matemáticos (Duval, 2004a).

² “Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas. ... permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes” (Duval, 1999 p. 34).

³ En el presente trabajo objeto matemático “es, o representa, una cualidad o una acción que tiene la función de organizar o interpretar un contexto. Así pues, los objetos matemáticos son una función organizativa o interpretativa del contexto” (Pecharromán, 2014, p. 112) En el presente trabajo son objetos matemáticos el área y perímetro.

⁴ sistema de signos que cumple tres actividades cognitivas: 1. construcción de una o varias marcas que representan un sistema determinado. 2. Transformar las representaciones con reglas propias del sistema en otras representaciones distintas a las iniciales y 3. convertir las representaciones dadas de un sistema en otro sistema (Duval, 2004a)

En consecuencia, esta investigación es considerada bajo una perspectiva semiótica, del aprendizaje y la comprensión de las matemáticas al transitar por la diferenciación que se haga entre el objeto y su representación, por la reunión de distintos tipos de registros de representación semióticos; además de tener en cuenta la coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza (Marmolejo 2014). Es decir, para que la actividad geométrica rinda resultados satisfactorios, Duval propone que debe existir coordinación entre la figura y el discurso, desde un punto de vista cognitivo para el aprendizaje de los conocimientos geométricos y, además, un tratamiento simultáneo entre el enunciado y la figura.

2.1.2 La visualización y la enseñanza de la geometría

La enseñanza de la geometría genera preocupación entre los educadores debido al bajo desempeño de los estudiantes de la I.E. José María Córdoba de Yumbo- Valle evidenciado en los resultados obtenidos en pruebas nacionales Saber 5 del año 2017. De igual forma, es conocido que no ha tenido el espacio necesario en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX; situación que se responsabiliza al abandono como objeto de estudio (Villani, 1998 citado por Marmolejo, 2014).

Actualmente existen educadores y académicos interesados en cambiar esta realidad que la geometría enfrenta y están empeñados en darle un lugar importante dentro del papel que cumplen las matemáticas (Duval, 1998, Marmolejo, 2012).

Atendiendo a esta necesidad, la visualización se constituye como uno de los procesos con un enorme potencial debido a que no es adquirida de forma simple, ni obvia y menos espontánea, por el contrario, requiere de tratamientos figurales dispuestos a un aprendizaje específico (Marmolejo y Vega, 2012).

Para lograr que los estudiantes puedan discriminar de forma eficaz, las diferentes maneras de ver que permite las figuras geométricas y, además, puedan acceder a las figuras como verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de las actividades matemáticas, plantean Marmolejo y Vega (2012) necesario y determinante que en la educación desde los primeros años de escolaridad específicamente, en los currículos educativos se otorgue el espacio para implementar su enseñanza.

La investigación asume una perspectiva teórica que considera, por un lado, que la particularidad de los objetos matemáticos exige para su aprendizaje que las actividades cognitivas fundamentales requieren de variados sistemas de representación semiótica. Por otro, el aprendizaje de la geometría, en particular, ocurre mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, cada una con sus funciones epistemológicas específicas (Duval, 1999, 2011).

2.1.3 Las figuras geométricas y la visualización

La visualización, cuestión de interés en este trabajo de investigación, puede privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción geométrica (Duval, 1998). La visualización también adquiere matices diferentes según el registro de representación considerado, para nuestro caso, las figuras geométricas, la importancia de este tipo de representaciones, radica en que “dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten explorar, anticipar; permiten adoptar aquella conducta de abducción que limita de entrada las hipótesis a considerar en cuestión, captando solo la atención sobre aquellos aspectos susceptibles de conducir a la solución” (Duval 2004a, p.161).

Duval (2004a), indica que las unidades figurales elementales, se consideran como la combinación de dos tipos de variables visuales de naturaleza diferente, al estar ligada al

número de dimensiones (cero, uno y dos); y la otra se encuentra relacionada con variaciones de naturaleza cualitativa, por ejemplo de forma (línea recta o línea curva, contorno abierto o cerrado de una gestalt), variaciones de tamaño, de orientación (en relación al plano fronto-paralelo, variaciones de granulación, de color, etc.)

La potencialidad de las figuras geométricas con relación al aprendizaje de las matemáticas reside en que son un importante apoyo heurístico en el desarrollo de las actividades geométricas, así mismo permiten considerar las alternativas o estrategias de solución de un problema mediante la conducta de abducción. Duval (2004a), señala que la conducta de abducción guía la deducción cuando de hablar del papel heurístico de las figuras se trata y para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad matemática, es necesario distinguir el tipo de aprehensión capaz de ayudar en la solución a un problema planteado. Una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente (perceptual, operatoria y discursiva), asimismo es posible realizar a las figuras modificaciones entre las que se encuentran: las mereológicas, las ópticas o las posicionales.

Con cada modificación se realizan varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística (Marmolejo y Vega, 2012). Es claro, que la productividad heurística de una figura tiene que ver con las modificaciones que se producen al determinar la operación cognitiva a considerar. De otro lado, la presencia de factores de visibilidad⁵ incide para discriminar las sub-figuras o sub-configuraciones de una figura, necesarias para un problema geométrico propuesto. Entre los factores de

⁵ Resaltan el atributo de forma en una figura, generando la aplicación de operaciones (Marmolejo y González, 2015b).

visibilidad se encuentran: el fondo cuadriculado, la complementariedad de formas, el fraccionamiento, entre otros, Marmolejo y Vega (2012).

A pesar de la existencia de los factores de visibilidad, “Los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica” (Gal & Linchevski, 2010 citado por Marmolejo, 2014), actividad que no es suficiente para la comprensión y significado en el aprendizaje de las matemáticas; pues se centra en lo que “a primera vista se ve” en la figura geométrica, generando poco desarrollo de habilidades cognitivas. Esta situación según indica Marmolejo y Vega (2012), no es una dificultad exclusiva de los estudiantes, pues a través de investigaciones han logrado constatar que incluso los docentes presentan deficiencia en el acto de “ver” y continúa siendo de enorme complejidad, lejos de ser un asunto obvio y espontáneo.

Específicamente en la educación básica los estudiantes deben a partir del reconocimiento visual de las figuras, aprovechar los factores de visibilidad, además tener en cuenta los procedimientos efectuados en las figuras para lograr potenciar el desarrollo de tareas matemáticas. Estos estudiantes al ser capaces de movilizar tratamientos y conversiones figúrales permiten que la visualización sea una herramienta estratégica que el mundo actual exige; de ser implementada en la escuela, Marmolejo y Vega (2012).

2.1.4. La visualización y las figuras geométricas

Duval, (2003) expone a diversos autores que proponen la visualización desde diferentes conceptos, asumiendo el término como el estudio de imágenes, representaciones mentales, representaciones semióticas de una naturaleza analógica (figuras, gráficos, esquemas, tablas, etc.). El mismo autor señala que la visualización adquiere matices y características cambiantes según el tipo de registro semiótico, en este sentido, el presente trabajo resalta que al mencionar el término visualización se hace referencia a la forma

específica del acto de “ver” asociado a la representación de naturaleza analógica. Es preciso decir, que el interés se centra en la visualización asociada al registro semiótico de las figuras, específicamente en las representaciones figurales de naturaleza bidimensional.

Al adaptar la definición asumida por Duval (2003), reconoce la visualización como una herramienta heurística que facilita la interpretación y resolución de una tarea o actividad cognitiva propuesta, que beneficia la conceptualización. Duval (2004b) propone dos maneras de visualizar, fundamentadas en la descomposición de una figura en unidades figurales. La primera forma de descomponer, “consiste en descomponer en unidades figurales del mismo número de dimensiones” (Duval, 2004b, pp. 177) es decir, una figura se puede descomponer en unidades figurales de igual dimensión o unidades figurales de formas diferentes.

La segunda forma de descomposición es la deconstrucción dimensional de las formas y “consiste en descomponer una figura en unidades figurales de un número de dimensiones inferior al de la figura” (Duval, 2004b, pp.177) es así como una figura de dos dimensiones se puede descomponer en unidades figurales de una dimensión. Según Duval, (2004b) estas dos formas de descomponer son opuestas, debido a que la primera se puede efectuar en actividades manuales porque implican la conservación del número de dimensiones y la segunda es importante la actividad discursiva puesto que el número de dimensiones no puede ser mostrado, solo nombrado; es así como se toma conciencia de que lo que se nombra efectivamente es lo que se muestra.

2.1.5 Formas de discriminar en una figura geométrica

Para detallar la contribución heurística de la figura en la actividad geométrica es necesario identificar el tipo de aprehensión⁶, Duval (2004a) expuso que una misma figura da lugar a unas aprehensiones de diferente naturaleza estas son: Perceptiva, operatoria y discursiva, las cuales son formas de discriminación de la figura en las que hay casos en que se relacionan o se oponen, además este tipo de aprehensiones determinan la visualización; al ser las dos últimas aprehensiones quienes determinan el estudio de la relación perímetro área, aspecto de interés en la investigación.

Para caracterizar el rol de la visualización vinculada al estudio de la geometría se exige articular la información visual que proviene de la aprehensión operatoria y la discursiva. La primera aprehensión “se centra sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y, por consiguiente, sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen” (Duval, 1998b, p.62), además, aporta información sobre las modificaciones figurales que permiten las figuras: meteorológicas (relación entre las partes y el todo), posicionales (cuando se realizan transformaciones en la figura tales como trasladar o rotar) y ópticas (cuando se amplía, reduce o se deforma la figura inicial) (Duval, 1998). Todas, de naturaleza diferentes y promovidas por operaciones distintas.

En cuanto a la aprehensión discursiva, está “relacionada con la descomposición de una figura en unidades figurales de dimensión inferior al de la figura (cambio dimensional). Es decir, que solamente las figuras no constituyen un registro de tratamiento autónomo; puesto que realizar el reconocimiento perceptivo de una figura o de sus unidades constituyentes no es suficiente, es preciso tener en cuenta el enunciado de la tarea, determinar las propiedades y condiciones a garantizar. En otras palabras, “la

⁶ Condiciones visuales que la figura como representación gráfica determina (Galeano, 2015).

introducción de una figura geométrica necesariamente es discursiva” (Duval, 1999, p.160).

La aprehensión discursiva implica una subordinación de la aprehensión perceptiva, dado que las propiedades de las figuras no surgen de los trazos sobre esta, sino a partir de los axiomas y enunciaciones que se realiza (Duval, 2004a). Con relación a la aprehensión operatoria cuando existe una congruencia de un tratamiento matemático no es necesaria la aprehensión discursiva, pero si no existe esta congruencia se hace necesaria la tarea de la demostración en tal caso la aprehensión discursiva (Marmolejo, 2014).

En conclusión, es importante mencionar que las aprehensiones operatoria y discursiva son apropiadas para la enseñanza, pues su importancia reside en que originan un aumento en la complejidad cognitiva en el estudio de las matemáticas (Duval, 2004a). Con referencia a la aprehensión operatoria Duval, (2004a) afirma que existen tres condiciones necesarias para su cumplimiento: primera, que en el desarrollo de la actividad no apliquen teoremas, definiciones, axiomas, propiedades etc. que ayuden en la resolución de la tarea. Segunda regla la actividad propuesta no debe implicar ningún cambio de dimensión y tercera condición el ejercicio debe dar lugar a factores de visibilidad que facilite o retarde la aprehensión operatoria (Duval, 2004a). En cuanto a la aprehensión discursiva se destaca la coordinación que debe existir entre el enunciado de la tarea y las unidades figúrales constitutivas que la conforman; y depende de “una deconstrucción dimensional de la manera normal de ver en las figuras” (Duval, 2004a. p.19).

2.2 operaciones visuales en el estudio del área y su relación con el perímetro

Estudios tal como el de Marmolejo y González (2013a, 2015a) proponen un marco interpretativo que permite determinar cómo las aprehensiones operatoria y discursiva se

introducen en tareas que suscitan el estudio de algunas magnitudes. En este sentido, el diseño propuesto del presente trabajo, determinó diferentes tipos de operaciones visuales: reconfiguración (simple y lineal) y cambio dimensional.

Las operaciones visuales entendidas como “acciones que se aplican sobre la figura en estudio y que producen sobre ella transformaciones figurales” (Marmolejo y Vega, 2012, p.17); la primera de las operaciones reconfiguración simple, se relaciona cuando una figura inicial se transforma en otra figura de diferente forma con igual cantidad de superficie (Marmolejo y González, 2013a); la segunda operación la reconfiguración lineal (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017), centra la atención en el contorno de la figura y se realizan operaciones sobre unidades constitutivas de una dimensión. Además, se divide en dos operaciones de igual naturaleza, la linealización consiste en aplicar composiciones de rotación y traslación convirtiendo el contorno de una figura en una línea recta (Duval, 2004b) y la deslinealización alude a la descomposición dimensional 1D/2D, que permite la construcción o reconstrucción de una figura (Marmolejo, 2014).

2.3 Elementos generales de control visual

2.3.1. Elementos generadores de control visual

En esta investigación se considera, que el control de las acciones cognitivas se relaciona con el esquema de comportamientos y selección de procedimientos, de acuerdo con la resolución de un problema (Balacheff y Gaudin, 2010). En cuanto a la visualización, las estructuras de control visual se consideran como un conjunto de elementos y estrategias que se utilizan de manera explícita o implícita en una actividad de matemática que ejercen un control sobre el desarrollo de la secuencia visual, siendo los elementos generadores de control visual “aquellos elementos y estrategias que caracterizan una estructura de control visual” (Marmolejo y González, 2015b, p. 310).

Las estructuras de control han permitido definir cuatro aspectos asociados a la visualización de figuras geométricas, es el caso del *procedimiento*, *contenido*, *visibilidad* e *iconismo*. Cada uno de estos elementos son definidos por Marmolejo (2014), el *procedimiento* se caracteriza cuando de manera explícita se destina las acciones para realizar sobre una figura y es ejercido de forma directa, por réplica o por referencia. El *contenido* hace referencia de manera explícita o implícita a la temática a tratar, tal como las definiciones de objetos matemáticos, fórmulas o propiedades de la actividad propuesta, es decir, cuando se evidencia conceptos matemáticos que se exigen en el desarrollo de la tarea o en el enunciado se muestran definiciones para el proceso de resolución. Por último, el *iconismo* alude a la representación de un objeto físico o de una acción física, esas características del objeto o la acción física son las que guían la forma de ver (Marmolejo y González, 2015b).

En último lugar, la visibilidad se conforma de dos grupos que a su vez se componen por varios elementos que pueden facilitar o impedir las formas de ver en la figura. Estos grupos son: Los factores de visibilidad y los elementos de contraste. Los primeros distinguen la característica de la forma de la figura promoviendo el uso de operaciones. Los elementos de contraste hacen énfasis en el color y textura de la figura de partida, en particular el contraste en tono y grosor de las unidades de dimensión que forman el contorno de una figura y las que constituyen el fondo cuadriculado al representar la figura. Otro elemento de contraste es el color dado que destaca ciertas partes de una figura; el punteado cuando se realizan trazos discontinuos para centrar la atención en fraccionamientos o ejes de simetría entre otros; los índices son la introducción de elementos que complementan la información de la figura tales como letras, segmentos continuos, flechas curvas y rectas, nombres de unidades, valor de la medida de unidad y espacios en blanco (Marmolejo y González, 2015b).

Es importante mencionar que el elemento de control Iconismo, introducido en las actividades matemáticas en muchos casos se presentan de manera incorrecta al ignorar las propiedades que caracterizan la conformación y tratamientos de las figuras geométricas afectando el carácter heurístico que desempeñan las figuras en el estudio de las matemáticas pues se convierte en un obstáculo para el estudio de la visualización (Marmolejo, 2016).

2.3.2 Funciones de control visual

En el desarrollo de la visualización, además de las estructuras de control visual se considera las funciones de control visual, que se determinan de acuerdo al número de elementos generadores de control visual incluidos en las tareas planteadas, son tres las funciones de control visual (Marmolejo y González, 2015b). La función simple o disjunta se produce “si el elemento o los elementos generadores de control presentes en la tarea suscita la manera de ver específica y pertinente a la resolución de la tarea planteada” (Marmolejo y González, 2015b. p.320). Cuando el elemento de control es uno se denomina función simple y determina parte o todos los elementos visuales y es función disjunta cuando son varios elementos de control y “cada uno induce control en partes distintas de la secuencia visual; de esta manera su aplicación de manera secuencial determina, parcial o totalmente, la manera de ver que se establece” (Marmolejo 2017 p.7).

Son dos maneras de función simple o disjunta, en la primera se destacan todos los aspectos del orden visual de la tarea, es decir que se determina el tipo de visualización a usar y en la otra destaca uno o algunos elementos de la secuencia visual por lo cual no podría establecerse el tipo de visualización (Marmolejo, 2017).

Según la identificación de los elementos visuales en una secuencia visual se determinan los niveles de complejidad, al existir actividades de menor y parcial dificultad

Por tanto, el estudiante debe ser autónomo e identificar elementos no controlados y tenerlos en cuenta en el desarrollo de la actividad propuesta. Es por ello, que las actividades por el cual, el control está parcialmente enfatizado es un medidor visual debido a que los estudiantes aplican los contenidos y habilidades visuales aprendidas, por lo tanto, al no determinar la función visual, el tipo de visualización es útil para evaluar el desarrollo visual y apropiación de conceptos matemáticos (Marmolejo, 2017).

Función por refuerzo sucede “cuando son varios los elementos generadores de control introducidos en la tarea propuesta, que en conjunto imponen una única manera de ver pertinente a su desarrollo o comprensión” (Marmolejo y González, 2015b, p. 321). Es decir, en este caso todos los elementos presentados producen focalizar la atención en un solo aspecto de la actividad visual presentada (Marmolejo, 2017).

En el desarrollo de la visualización se debe identificar y diferenciar las diversas transformaciones que se puedan realizar en la figura, para reconocer la manera como se determina la visualización. De este modo, las tareas diseñadas con este fin deben proponer elementos de control que inciten a la focalización de aspectos que determinen la visualización. Sin embargo, estos elementos pueden ser inadvertidos para quien las resuelve, por lo cual quien las diseña debe proponer las condiciones para que los elementos de control desempeñen el papel asignado. En efecto el papel de esta función es determinante debido a que los elementos de control presentados no consideran a un único elemento de control (Marmolejo 2017).

Las potencialidades que brinda la función por refuerzo dependen de la naturaleza de los elementos de control y la presentación del desarrollo de la tarea, pues al desarrollar una actividad que contenga la función por refuerzo se debe considerar todos o al menos

dos de los elementos que lo generan, si por el contrario se tiene en cuenta uno y el resto se ignora, pasa a considerarse como una función simple (Marmolejo, 2017)

Teniendo en cuenta el elemento de control distinguido o el que pasó inadvertido se identifican formas inapropiadas de solucionar la actividad. Tal es el caso de los elementos iconismo y visibilidad que conducen a formas incorrectas de proceder (Marmolejo, 2014), porque se ignoran las propiedades de la figura y por ende su tratamiento adecuado (Marmolejo, 2017).

La función ambigua se produce: Cuando varios elementos ejercen control sobre la manera de ver la figura, algunos introducen maneras de ver pertinentes para la resolución de la tarea propuesta, mientras que otros, por el contrario, suscitan visualizaciones de naturaleza distinta en el tópico de estudio o no pertinentes a la resolución de la tarea propuesta. (Marmolejo y González, 2015b). También la ambigüedad se identifica por la presencia parcial de los elementos de control (Marmolejo, 2017). El papel adecuado que desempeña la función ambigua se relaciona con la evaluación de la visualización por lo cual deben proponerse actividades que brinden autonomía a quienes las resuelvan para que seleccionen el tipo de visualización conveniente (Marmolejo, 2017).

2.4 Referentes matemáticos que determinan el estudio de la magnitud

Marmolejo (2016 p.34) afirma que “El concepto de magnitud de área empieza a construirse cuando se opera la superficie de una figura y se diferencia de las demás partes que le componen, como es el caso de las líneas, los puntos y los ángulos” Por su parte, Chamorro (1997, citado por Marmolejo, 2015a) considera que la presentación de figuras dibujadas sobre la hoja de papel no favorece la precisión y diferencia entre las magnitudes longitud y área.

Una magnitud según Chamorro y Belmonte (2000) responde a una característica física, en otras palabras, a un atributo observable (como longitud y superficie). Se clasifican los objetos teniendo en cuenta aquella característica, de esta manera se define una relación de equivalencia que facilita dicha clasificación. De este modo se plantea que el objeto m está relacionado con el objeto m' ($m \text{ I } m'$) y se cumplen las siguientes propiedades:

- ❖ Reflexiva: ($m \text{ I } m'$) cualquier objeto m
- ❖ Simétrica: Si ($m \text{ I } m'$) entonces ($m' \text{ I } m$)
- ❖ Transitiva: si ($m \text{ I } m'$) y m' y m'' entonces ($m \text{ I } m''$)

Es importante recalcar que estas tres propiedades definen la relación de equivalencia; para lo cual la definición de cualquier magnitud supone una abstracción que se efectúa al considerar como cantidad de magnitud un conjunto agrupado por una propiedad común: ser igual respecto a ese atributo. Lo que distingue estos atributos de otros, es definir una ley de composición interna (*) (Chamorro y Belmonte, 2000).

Sea A el conjunto de todas las magnitudes y a, b, c elementos de este conjunto, con una ley de composición interna (*). Las propiedades que cumplen son las siguientes:

- ❖ Asociativa: $a*(b*c) = (a*b)*c$
- ❖ Conmutativa: $a*b = b*a$
- ❖ Existencia del elemento neutro: Existe a que pertenece a N y en el conjunto A se llama e . $a*e = e*a = a$

Las anteriores propiedades definen al conjunto A , como un semianillo conmutativo con elemento neutro (Chamorro y Belmonte, 2000). De este modo, se define las magnitudes área y longitud que se presentan en el diseño de las tareas.

2.4.1 Rol de la visualización en el desarrollo de ideas matemáticas que determinan el estudio de la relación perímetro-área

Autores como Marmolejo, Sánchez y Londoño (2017) proponen el estudio de $R(p/a)$, como un contenido ideal para promover el desarrollo de la visualización debido a que estas dos magnitudes el área y el perímetro, movilizan diferentes formas de ver en las figuras, tal como pasar de centrar la atención en la superficie de una figura para focalizar la visualización en las unidades figurales constituyentes de la dimensión y ejecutar operaciones sobre ellas para descomponer o reorganizar una figura en otra de contorno global distinto. De este modo el establecimiento de relaciones entre el área y el perímetro, genera formas de ver tal como la deconstrucción dimensional de las formas (Duval, 2004b).

Según Duval (2004b) la descomposición dimensional de las formas es un proceso en oposición a los procesos de organización y reconocimiento perceptivo de las figuras. Pues, la primera ley de organización y reconocimiento perceptivo de las formas es en unidades de 2D sobre las unidades 1D o 0D. Es decir que “se ve en primer lugar un cuadrado o un rectángulo antes de ver cuatro lados” (Duval, 2004b, p. 181), esto se interpreta de manera que los trazos que se perciben en los bordes de las figuras son inseparables de la superficie que delimitan.

Por esta razón, Duval (2004b) expone que no es suficiente el desarrollo de tareas que originen la aplicación de cambios dimensionales en la figura de inicio y en las unidades 1D. El desarrollo de la deconstrucción dimensional de las formas exige la aplicación de operaciones sobre las unidades figurales 1D. Según Marmolejo, (2014) las tareas en las

cuales el tipo de visualización se determina por lengua natural propician la deconstrucción dimensional de las formas.

En conclusión, es necesario no solo identificar la visualización en el área y perímetro; es importante estudiar las distintas visualizaciones que surgen en el estudio de la $R(p/a)$ pues según Marmolejo, Sánchez y Londoño (2017) es un lugar propicio para estudiar distintas visualizaciones. En particular en el presente trabajo se plantea que la $R(p/a)$ es favorable para la deconstrucción dimensional de las formas.

III. CAPÍTULO METODOLOGÍA

En este apartado se describe la metodología utilizada en el presente trabajo de investigación. En la primera parte, se presenta el enfoque metodológico del trabajo, luego se describe la población y los criterios de selección como objeto de estudio. Posteriormente, se define, tipifica y ejemplifica el instrumento metodológico diseñado, además se describe el trabajo de campo y se muestra un ejemplo de codificación de uno de los procedimientos analizados en el estudio. Es preciso enfatizar que del instrumento de análisis emergen las categorías de análisis.

3.1. Aproximación metodológica

La naturaleza de la investigación es mixta debido a que se recolectan y se analizan datos cualitativos y cuantitativos (Hernández Sampieri, Fernández, & Baptista, 2010), los datos se recogieron a través de las producciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas propuestas y de la explicación (oral) de sus formas de proceder.

Se considera el estudio de casos como la particularidad y la complejidad de un caso singular para comprender la actividad que se propone (Stake, 1998); por tal motivo, se focalizó la atención en un grupo de estudiantes de una institución de carácter oficial.

Con el fin de describir los procesos desarrollados por los estudiantes que participaron en el trabajo de investigación, el análisis de los datos se realizó de manera inductiva, al proponer categorías de investigación a partir de los análisis de las producciones realizadas por los estudiantes, estableciendo asociaciones y relaciones entre las categorías para deducir ideas generales del estudio (Bisquerra, 1989).

El análisis de datos es de control (Calderón & León, 2012 citando a Artigue, 1995), lo que indica que se considera una parte descriptiva y predictiva junto con algunas

hipótesis de diseño relacionadas a los elementos de control (Marmolejo y González 2015b) y el desarrollo de la visualización (Marmolejo y Vega, 2012, Duval, 2004a, 2004b) en las tareas propuestas, para plantear en el aula de clases. A través de la observación participante (Puebla, Alarcón, Valdés, Pastellides y Gómez, 2010) se obtienen los datos, mientras se participa de las actividades propias del grupo que se estudia.

3.2. Población y criterios de selección

Se trabajó un estudio de caso para el desarrollo del presente trabajo de investigación; la población queda delimitada por el caso: Los 37 estudiantes de grado quinto cuatro, de la IE José María Córdoba de Yumbo (en adelante Institución JMC).

La institución JMC cuenta con 2.500 estudiantes de Transición a Grado 11 en los niveles de educación de Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media, se encuentra ubicada en el perímetro Urbano del Municipio de Yumbo, su población es mixta y su estado sociocultural es heterogéneo, los estudiantes se encuentran en estratos 1, 2 y 3.

Además, la I.E. cuenta con tres sedes: la sede central ofrece Educación Media Técnica con énfasis en Administración, integrando su currículo con el SENA, (Programa Documentación y registro de operaciones contables). La sede Pedro Sánchez Tello y la sede Manuela Beltrán. En la última de las sedes, fue aplicada la propuesta de estudio con los 37 estudiantes de grado quinto, con edades que oscilan entre los 10 y 12 años en la jornada de la tarde. Este nivel cuenta con una profesora en formación con especialidad en matemáticas, sin embargo, los estudiantes no habían experimentado con actividades relacionadas con la visualización y las relaciones del perímetro y área.

En la institución JMC, existen seis niveles en grado quinto los cuales obtuvieron un desempeño básico en el componente geométrico-métrico de la prueba Saber 2016,

siendo este uno de los motivos para centrar la atención en este año escolar, además, de encontrarse accesibilidad al curso al desempeñarse allí la maestra en formación.

3.3. Unidades de análisis e Instrumentos de recolección de datos

El trabajo se centra en el estudio de la conservación del área y del perímetro, además de las relaciones que puedan surgir entre estas dos magnitudes. Las situaciones están encaminadas a controlar las acciones cognitivas de los estudiantes, a través de los elementos de control visual (Marmolejo y González, 2015b).

El diseño propuesto cuenta con diecisiete tareas y se divide en tres Momentos (Ver Anexo 3)

Momento 1 (M1): La conforman cinco tareas sobre la conservación de la cantidad de superficie y la construcción del área como magnitud, privilegiando la reconfiguración y la aprehensión operatoria en figuras bidimensionales.

Momento 2 (M2): Se proponen ocho tareas sobre la conservación del perímetro teniendo en cuenta la deconstrucción dimensional de formas, (*la reconfiguración lineal (p.59), la linealización (p.59) y deslinealización (p.59).*)

Momento 3 (M3): Se encuentran cuatro tareas para propiciar la relación perímetro área.

Para el diseño de las tareas se tuvo en cuenta una serie de decisiones (ideas de diseño ver anexo 4) que buscan promover tanto el desarrollo visual como el estudio de las relaciones entre el área y el perímetro, lo cual permite conformar las siguientes ideas de diseño.

Hipótesis de diseño sobre el desarrollo de la visualización:

- La visualización es una cuestión de tratamiento de información y es susceptible de ser enseñada (Duval, 2004a; Marmolejo y Vega, 2012).
- Para el desarrollo de la visualización es necesario por separado reflexionar sobre la visualización bidimensional y unidimensional y luego se proponen tareas que las articulen (Duval, 2004a).
- El desarrollo de la Aprehensión Operatoria requiere: designación en lengua natural de las operaciones, elementos generadores de control visual que promuevan operaciones unidimensionales, factores de visibilidad que resalten la complejidad cognitiva de la tarea que incluya los elementos de control que por sí mismos y de manera independiente favorezcan la visibilidad de la reconfiguración, y en conjunto ejerzan una función por refuerzo (Duval, 2004a; Marmolejo y González, 2015b, Marmolejo, Vega y Galeano, 2017).
- Descomponer figuras propuestas de 2D en unidades de 1D (deconstrucción dimensional de las formas Duval, 2004b), usando las operaciones de reconfiguración lineal, linealización y deslinealización de la figura es otra de las hipótesis a tener en cuenta en el diseño de la propuesta de estudio. La primera de las operaciones suscita los cambios de anclaje configural unidimensional (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017 p.7), importante para movilizar especialmente el objeto matemático de la longitud de contorno de las figuras en cuestión.
- Se consideró tener en cuenta tres pasos importantes, para el proceso de aprendizaje y enseñanza del área (Marmolejo y González, 2015a), el perímetro y la relación de estas dos magnitudes, estos elementos son: elementos constitutivos de la visualización, las funciones visuales, los elementos y clases de control visual.

Las siguientes hipótesis de diseño sobre la R(p/a) se pueden dividir en dos partes:

- Es necesario proponer tareas que promuevan como objetivo central la magnitud-área y del mismo modo otro paquete de tareas que resalte la magnitud-perímetro, para luego, establecer de manera simultánea a ellas la articulación entre los dos (Duval,1999).
- Es importante mencionar que el estudio cualitativo de las magnitudes área y perímetro y los términos cantidad de superficie y longitud de contorno ayudaron a establecer la articulación R(p/a). (propia)
- La Enseñanza del área debe privilegiar la noción de área como una magnitud autónoma, diferenciando la cantidad de área, de la superficie y del número (Douady y Perrín 1989 citadas por Marmolejo y González, 2015a).

Sobre el vínculo visualización- objeto matemático (R(p/a)):

- Al promover el desarrollo visual en las figuras, será posible aplicar transformaciones y a su vez generar un vínculo entre las dos magnitudes en cuestión. En palabras de D'Amore y Fandiño, (2007, p.61) “Casi nunca se hacen transformaciones sobre las figuras de forma que se conserven o se modifiquen área o perímetro”.
- Las operaciones visuales involucradas en el diseño de la propuesta fueron fundamentalmente guiadas por la reconfiguración: la simple al permitir que dos o más subfiguras de una superficie se transformaran para el caso de las unidades de 2D, y la reconfiguración lineal, al reflejar la linealización de las figuras identificando las unidades de 1D y aplicando operaciones de traslación y rotación a las mismas.

Teniendo en cuenta lo anterior, se asumieron como unidades de análisis en la investigación las producciones escritas de los estudiantes, al resolver las tareas planteadas,

como lo son la ficha de trabajo y los recortes que representan las figuras de estudio en cada tarea planteada. En cuanto, a los instrumentos de recolección de datos se consideró registros audio-visuales tomados durante la clase en la aplicación y, en algunos casos, entrevistas semi-estructuradas (con la intención de ampliar y de manera fiel precisar las descripciones y las explicaciones desarrolladas por los estudiantes). Lo cual indica, que el resultado de comparar y reunir datos como los obtenidos por medio de los procedimientos descritos en las fichas de trabajo (cualitativo) y, por otro lado, los datos organizados bajo las tablas de frecuencia (cuantitativo); se encuentra esta mezcla mixta al garantizar la conexión entre el análisis cualitativo de los datos y la recolección de datos cuantitativos.

Para la identificación de las unidades de análisis, se realizó la siguiente convención, para la producción del estudiante 1 se asignó E1, el procedimiento del estudiante 2 E2, E3 para el procedimiento del estudiante 3 y de igual manera hasta E37 producción del estudiante 37.

3.4. El trabajo de campo

El trabajo de campo se realizó en dos fases: estudio piloto (Hernández Sampieri, Fernández, & Baptista, 2010) y aplicación de la propuesta, mientras que la primera de las fases permitió poner a prueba las tareas y decisiones implementadas en el diseño, la segunda fase fue la oportunidad de ajustar estrategias para potenciar el paquete de tareas, además de tener presente centrar la atención en información con mayor detalle para identificar los datos necesarios, y aportar en el análisis de los mismos. El reporte de los resultados de la investigación recae, en los datos encontrados en la segunda de las fases, a continuación, se detalla lo anterior:

En la primera fase, se llevó a cabo el estudio piloto, para facilitar la realización de ajustes necesarios, se aborda la aplicación del diseño con el grupo 5-4 de la jornada de la

tarde, conformado por 37 estudiantes del año lectivo 2017 de la institución JMC sede Manuela Beltrán, con la intención de poner a prueba la pertinencia y efectividad del diseño de las actividades propuestas, con las condiciones y exigencias involucrados para la aplicación, material que se aprovecha para garantizar la confiabilidad y validez del instrumento de análisis.

Se debe mencionar que previo al estudio, los estudiantes no habían adelantado procesos de enseñanza relacionados con el tema en cuestión. Es decir, ninguno de los estudiantes había participado en propuestas de enseñanza sobre el papel de las figuras en las matemáticas y sus posibilidades operatorias y heurísticas.

En esta primera fase también, se propuso elaborar una guía de preguntas para aplicar una entrevista semiestructurada (Hernández, Sampieri, Fernández, & Baptista, 2010), al precisar conceptos y rescatar información amplia acerca del modo de proceder por parte de los estudiantes. Algunas de las cuestiones en las que aportó esta fase para la siguiente aplicación del diseño, fue reconocer la incidencia del lenguaje escrito y representaciones gráficas, como un factor importante para identificar información, por lo que se enfatizó a los estudiantes en describir minuciosamente, de forma clara y precisa paso a paso los procedimientos implementados en el desarrollo de las unidades de análisis en adelante (U.A.) También, se consideró disminuir el tiempo en la propuesta de trabajo de campo específicamente en la actividad de puesta en común en binas, lo que generaba reiteraciones en las soluciones de las tareas, para lo cual se implementó socializar al interior de cada bina y manifestar a través de un participante los acuerdos sobre las formas de proceder para solucionar las tareas. El pilotaje se llevó a cabo en seis sesiones de clase, con una duración de noventa minutos aproximadamente entre cada tarea.

En cuanto a la segunda fase, se describe en ella, la dinámica de la clase al desarrollar las tareas diseñadas por los estudiantes. Cabe mencionar que el grupo de estudiantes seleccionados para realizar la puesta en acto del diseño de tareas, fueron 37 estudiantes de la jornada de la tarde de la institución JMC sede Manuela Beltrán de grado quinto en su primer periodo de clases académica año lectivo 2018. La aplicación fue dirigida por la docente titular del grado, quien además cumple el rol de investigadora del presente estudio, en adelante docente investigadora. Además, de contar con el apoyo de la compañera investigadora de diseño de los tres Momentos y diecisiete tareas en la logística de la puesta en escena.

En esta segunda fase, se consideraron cuatro instancias en la aplicación de la propuesta diseñada. La contextualización, el trabajo individual, trabajo en binas y puesta en común. Mientras que, en la primera, la docente investigadora presenta un recorte ampliado que representa las figuras a trabajar colocándolo en el tablero, en adelante se denomina (soporte 2), inmediatamente se proyecta en el video beam la consigna para leerla, y luego, preguntar al grupo en general que ideas surgían para el desarrollo de la tarea de acuerdo a la interpretación y comprensión del enunciado. En la segunda instancia una vez identificada la consigna del problema planteado, la profesora entregaba a los estudiantes recortes que representan las figuras (soporte 2), que se encuentran en las tareas y los invita a resolver la problemática de forma escrita en su ficha de trabajo en adelante (soporte 1), al consignar la manera de proceder que, de manera posterior a la presentación, cada uno asume para el desarrollo de la tarea individual. Los estudiantes emplearon entre quince y treinta minutos en la resolución de cada una de las actividades.

En la tercera instancia, los estudiantes socializan con su bina (compañero de mesa), analizando la manera como cada uno resolvió la problemática planteada. La atención recaerá por completo en la producción escrita realizada por cada uno de ellos. El propósito

de esta tarea apunta a que los estudiantes a partir del contorno de la figura guíen la transformación a aplicar. Además de tener en cuenta la descripción del procedimiento realizado por cada uno de los estudiantes y escoger el método de resolución, más original y sencillo, o si era el caso, generar entre ambos estudiantes una nueva manera de proceder.

Es importante mencionar que mutuamente los estudiantes manifiestan las debilidades de los procedimientos presentados como también sus fortalezas, comentarios que serán insumos notables en análisis posteriores. El tiempo destinado para compartir sus producciones individuales y acordar una respuesta en bina es entre quince y veinte minutos.

Finalmente, en la última instancia, la docente investigadora abrió el espacio para que las binas participen y expongan al resto de sus compañeros el procedimiento por ellos destacado, a su vez deben considerar las debilidades y las fortalezas de los procedimientos presentados. Al finalizar la puesta en común de las binas, la docente investigadora realiza las correcciones y ampliaciones del caso y consigna las conclusiones que se desprende de cada tarea. Esta actividad ocupó entre veinte y treinta minutos para socializar, concluir y cerrar cada tarea.

En esta instancia se recogió a cada estudiante el registro de su ficha de trabajo, en el cual se encontraba una de las maneras de proceder que se presentaron en la puesta en común y que se establecieron de manera individual, las diferencias y similitudes con el procedimiento en el trabajo individual realizado anteriormente y el proceder que de manera común se adoptó. Las sesiones requeridas para llevar a cabo la aplicación de la propuesta de enseñanza fueron entre quince y veinte días aproximadamente con tiempos diarios de hora y media cada una.

Los datos de la investigación fueron filtrados de carácter cualitativo, el propósito consistió en comparar, describir y explicar el proceso cognitivo de los estudiantes que participaron de la aplicación de los tres momentos y diecisiete tareas propuestas por los diseñadores. Las tareas sometidas a estudio presentan un nivel de investigación de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa (Bisquerra, 1989).

El análisis de resultados tuvo como objetivo determinar las estrategias de solución de los estudiantes, por tanto, este análisis se compone de un conjunto de hipótesis.

3.5. Diseño de instrumento de análisis

El conjunto de procedimientos y herramientas que se implementaron para recoger, validar y analizar la información fueron las categorías que fueron incluidas en las tareas diseñadas y las categorías de resultados detectadas en las U.A. desarrolladas por los estudiantes. De acuerdo a la recolección de los datos, la información arrojada permitió lograr los objetivos planteados en este estudio.

A continuación, se detalla el diseño del instrumento de análisis en dos Momentos.

En el primer Momento del diseño del instrumento de análisis se tuvieron en cuenta las dos categorías de análisis de diseño; en la categoría de análisis de operaciones se determinaron nueve operaciones visuales (Reconfiguración simple (RS), Cambio Dimensional (CD), Linealización (L), Deslinealización (DL), Reconfiguración lineal (RL), Reconfiguración parcial superficial (RPS), Reconfiguración Parcial lineal (RPL), Anamorfosis (Ana), Cuadratura (Cuad)), las últimas dos operaciones fueron detectadas en la revisión de las unidades de análisis (U.A.) desarrolladas por los estudiantes, las demás operaciones fueron esperadas en el proceso de resolución de las tareas.

En la categoría de elementos de control presenta cuatro subcategorías que previo a denominarse, generaron complejidad debido a la gran variedad de asociaciones, por lo que fue necesario reunir y fusionar los componentes (procedimiento, contenido, visibilidad, iconismo) y las funciones de control visual (simple, por refuerzo y ambigua) con la intención de generar subcategorías manejables que proporcionen facilitar la síntesis de las subcategorías de diseño, atendiendo el número de elementos generadores de control visual y a la función de control visual. Estas subcategorías se determinaron iconismo compuesto (ver p.60), elemento de control visual por procedimiento directo (p.61), elemento de control visual por procedimiento de réplica (p.61) y elemento de control visual discursivo (p.61)).

La primera subcategoría se encuentra conformada por la unión de elementos de procedimiento y visibilidad, y prevalece el iconismo al tener en cuenta las características físicas de los objetos; en estas tareas por ejemplo se hizo alusión a una camisa y árbol de navidad. Cabe precisar que el elemento generador de control de contenido no aplicó en el diseño de esta tarea, puesto que el iconismo se incluyó con la intención de controlar la construcción del concepto de cantidad de superficie de área.

En la segunda y tercera subcategoría se tuvo en cuenta como elemento de control visual predominante, el procedimiento y junto a la visibilidad y el contenido determinan el tipo de visualización a considerar para ambas subcategorías, es preciso decir que en la segunda subcategoría prevalece el procedimiento directo y el despliegue de los procedimientos es total o parcial, al tener en cuenta el orden de resolución, las indicaciones y la representación de la figura de partida y llegada para desarrollar la tarea. Y en la tercera, el procedimiento de réplica es elemento que sobresale en el proceder de las tareas, caracterizado por seguir los procedimientos que fueron aplicados en tareas previas. Ninguna de las dos subcategorías presenta iconismo.

En la cuarta subcategoría se encuentran asociadas tareas que no privilegia el elemento generador de control visual de visibilidad ni iconismo. Es decir, no fueron incluidos factores de visibilidad, aunque se introduce en el enunciado el índice para designar las figuras a representar en la tarea, también fueron abordados, el elemento de control visual de contenido asociado a las ideas matemáticas relacionadas con la conservación del orden y la equivalencia de las figuras de la cantidad de superficie y el procedimiento por réplica.

En el segundo Momento del diseño del instrumento de análisis con la intención de verificar y validar la efectividad de las categorías y subcategorías encontradas antes y después de la puesta en juego de las tareas propuestas, se identificaron estructuras predominantes en el diseño desarrollado por los estudiantes y por parte de los diseñadores al interpretar las U.A. Por ello, fueron analizadas 17 tareas diseñadas y puestas a prueba por los estudiantes lo que se denominó como unidades de análisis., al revisar las U.A, fueron consideradas un total de 629 tareas. Para el registro de estas tareas se propuso una rejilla con tres entradas, en la primera entrada se registró el tipo de procedimiento⁷ de la unidad de análisis, luego en la segunda entrada se escribió el código de la tarea y en la última entrada se determinó la dificultad, de igual manera se realizó este proceso para determinar las acciones realizadas sobre los soportes de papel.

En el tercer Momento del diseño del instrumento de análisis, se presentaron las dos categorías que emergieron en el análisis de las U.A. desarrolladas por los estudiantes, entre ellas, la categoría de acciones sobre los soportes de papel, al tener en cuenta dos soportes, la ficha de trabajo se encuentra la consigna de la tarea (soporte 1) y los recortes de las

⁷ Se clasificaron las producciones escritas en seis maneras de proceder: procedimiento esperado con éxito, procedimiento esperado con éxito parcial, procedimiento esperado con error, procedimiento no esperado con éxito, procedimiento no esperado con éxito parcial y procedimiento no esperado con error (p. 89)

representaciones de las figuras y las tiras de papel que se proporcionaron para el desarrollo de la tarea (soporte 2). Para el registro de las acciones realizadas sobre los dos soportes de papel se procedió a construir una rejilla, en la primera entrada se escribió el código de la tarea, en la segunda el tipo de procedimiento y la tercera la acción sobre el soporte.

En primera medida se identificaron 13 acciones las dos primeras disyunción y superposición se fusionaron en una sola subcategoría porque el objetivo de estas acciones fue el de comparar Disyunción/superposición (p.62); la tercera y cuarta acción se unieron porque se relacionaron con la representación de operaciones de 1D y 2D Trazos auxiliares⁸ (p. 62); la copia y recorte quedaron como una sola subcategoría porque al realizar la copia o calcar la figura el paso a seguir era cortar Calcar/recortar (p. 62); en la acción de dibujar se incorporó también la copia deformada pues eran dibujos que representaban las diferentes operaciones realizadas sobre las figuras Dibujos (p. 62); flechas, índices y uso de color se reunieron en una subcategoría que se denominó contraste porque fueron utilizadas con el fin de llamar la atención sobre partes o acciones realizadas sobre la representación de las figuras Contraste (p. 62). Finalmente son 5 acciones sobre el soporte del papel (superponer/disyunción, calcar/ recortar, trazos auxiliares, dibujos y contraste/ índice).

Del mismo modo, la categoría de dificultades y posibilidades se encuentra a partir del análisis de las U.A. desarrolladas por los estudiantes, revisión que a su vez permitió reconocer una lista de trece dificultades, lo que condujo a disminuir el número y hacerlas manejables, agrupando de acuerdo a las similitudes, además se contrastó la clasificación de dificultades que Socas (1997) presenta en su estudio, al mismo tiempo que se tuvo en

⁸ TA2D Identificación de unidades figúrales de dos dimensiones, TA1D identificación de unidades figúrales de una dimensión.

cuenta algunas dificultades que Fandiño y D'Amore (1997) plantean en relación al aprendizaje de la R (p/a).

Con la información anterior se plantearon tres grupos de dificultades, las primeras se relacionan cuando se percibió que en la unidad de análisis había confusión en la interpretación de la consigna de la tarea de modo que no fue claro reconocer la figura inicial o final, también sucedió cuando la descripción del procedimiento fue incompleta y de este modo presentaba incoherencias, a estas se llamaron dificultades asociadas a la consigna estructura o lenguaje (DEC p. 63) de la tarea propuesta (adaptada de Socas, 1997).

El segundo grupo de dificultades se les denominó asociadas a las exigencias visuales solicitadas (DAV p. 63), debido a que se notó la ausencia de transformaciones en la figura sobre el soporte de papel y la falta de conservación de la longitud (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017). Por último, el tercer grupo se caracterizó por la confusión que se presentó en la comprensión y aplicación del objeto matemático en estudio tal como el área, perímetro o la relación entre las dos magnitudes (DAO p.64), que se evidenció cuando la relación de orden solicitada no se cumplió.

3.6. Instrumento de análisis

El instrumento metodológico considerado en el presente trabajo contempló 4 categorías de análisis: operaciones (Duval, 2004a, 2004b; Marmolejo y González 2013b; Marmolejo, Vega y Galeano 2017), Elementos de control (Marmolejo & González, 2013a; Marmolejo, 2014), Dificultades (Socas, 1997; Fandiño y D'Amore, 2007) y Acciones sobre el soporte (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017). Mientras que las dos primeras categorías de análisis fueron determinadas en el diseño de las tareas y aluden a la visualización, los dos restantes, se extrajeron directamente de las producciones escritas al

evidenciar dificultades en la manipulación de los soportes en que se representan las figuras en estudio.

Categoría 1: Operaciones visuales

La categoría de operaciones visuales de naturaleza cognitiva alude a la visualización, la importancia de las operaciones en palabras de Duval (1999): las operaciones visuales son acciones cognitivas que permiten la modificación en las figuras: “...las figuras permiten distintos tipos de modificaciones, por cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística” (p.156); pues permiten determinar la naturaleza de los cambios figurales introducidos e inducen la comprensión de propiedades y conceptos de área (Marmolejo y Vega, 2012).

En esta investigación se tuvieron en cuenta especialmente tres tipos de operaciones: La reconfiguración simple, presente en su mayoría en las tareas del M1 y M3 al privilegiar como idea matemática la conservación del orden y la equivalencia entre figuras de igual cantidad de superficie y diferente forma, en el M1; y para el M3 se aluden a tres relaciones presentes en la asociación de los conceptos de área y perímetro al generar distintas relaciones de orden y equivalencia a partir de la longitud de contorno y cantidad de superficie de las figuras propuestas, con el fin de suscitar tres casos de relaciones entre la magnitud área y perímetro propuesto por Fandiño y D’Amore (2007).

Entre las relaciones planteadas se encuentran:

- La cantidad de superficie de la Figura A’ es igual a la cantidad de superficie de la Figura B’, y la longitud de contorno de la Figura A’ es mayor que la longitud de contorno de la Figura B’.

- La longitud de contorno de la Figura C' es mayor que la longitud de contorno de la Figura D' y la cantidad de superficie de la Figura C' es menor que la cantidad de superficie de la Figura D'
- La cantidad de superficie de la Figura E' es mayor que la cantidad de superficie de la Figura F' y la longitud de contorno de la Figura E' es menor que la longitud de contorno de la Figura F'.

Las tareas del M2 se caracterizaron especialmente por privilegiar la operación de reconfiguración: lineal y parcial lineal, se destaca el concepto de longitud de contorno teniendo como fundamento descomponer la figura propuesta de dos dimensiones en unidades figuralas de una dimensión (deconstrucción dimensional de las formas) tal como lo plantea Duval, (2004b) al generar relaciones de orden y equivalencia entre los contornos de longitud de figuras cóncavas, sin uso de número, unidades de medida y patrón de medida.

En este estudio se centra la atención en la operación de reconfiguración, que se divide en tres procedimientos visuales de naturaleza diferente: reconfiguración simple, reconfiguración lineal (Linealización), reconfiguración parcial lineal (Deslinealización) (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017). Ahora bien, la atención de la investigación recayó en promover la operación de reconfiguración, la forma como los estudiantes resolvieron las tareas propuestas suscitó la consideración de operaciones de naturaleza distinta, en este sentido, un total de siete operaciones fueron contempladas, de las cuales solo cuatro se asocian a la reconfiguración: simple, lineal, parcial y parcial superficial.

En la Tabla 1. se presentan las operaciones visuales que los investigadores intentaron promover en la resolución de las tareas aplicadas en la investigación, asimismo, aquellas operaciones que, de naturaleza distinta, fueron consideradas por los estudiantes al resolver

las tareas en cuestión. A partir de las producciones de los estudiantes, en el anexo 1 se ejemplifica cada una de las operaciones reseñadas en la Tabla 1.

Tabla 1. Categoría: Operaciones Visuales (Adaptación realizada de Marmolejo, 2013a)

Reconfiguración simple (RS)	La figura de partida se transforma en otra de forma distinta e igual cantidad de área. Las unidades 2D que la conforman (o algunas de ellas) son ubicadas bajo la acción de traslaciones o rotaciones o reflexiones en lugares distintos al inicialmente ocupado por ellas (Marmolejo y González 2013a) Ver anexo 2
Cambio Dimensional (CD)	Sobre una figura bidimensional, en primera instancia, se reconoce una forma de esa misma dimensión y, sólo en segundo lugar, se pasa a discriminar los lados que la constituyen (Marmolejo y González, 2015 ^a , 2013a)
Linealización (L)	Al centrar la atención en los lados de los contornos de la figura en cuestión y sobre ellos se realizan operaciones (rotación, traslación, etc.) de 1D y volver el contorno de la figura a partir de los segmentos de la misma, una línea recta (Duval, 2004b).
Deslinealización (DL)	Descomposición dimensional 1D/2D, que permite la construcción o reconstrucción deductiva de los objetos representados de una figura en articulación con la actividad discursiva. Es decir, la descomposición en unidades figurales por deconstrucción dimensional de una forma Duval (2004b).
Reconfiguración lineal (RL)	Se ejecuta mediante la composición de rotaciones, fraccionamientos y traslación de segmentos. (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017) Se realiza una adaptación a la definición dada por (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017), pues, en este caso no hay eliminación de fracciones de segmentos porque se está intentando establecer relaciones de equivalencia. Además, es posible añadir o eliminar líneas de segmento de las figuras a construir.
Anamorfosis (Ana)	Se aplica sobre la figura de partida un proceso de deformación continuo de tres maneras diferentes: por achicamiento o agrandamiento o por arrastre (Marmolejo y González 2013a).
Cuadratura (Cuad)	Cuando el contorno de la figura de partida dificulta calcular de manera exacta y directa el área de la figura, es necesario aplicar una estimación para determinar la cantidad de superficie y compararla con la figura de llegada, al tener en cuenta transformaciones de la figura inicial acotando el área de forma cuadrada (adaptado de Marmolejo y González 2013a).
Reconfiguración Parcial Lineal (RPL)	Descompone dimensionalmente la figura 2D/1D reconoce similitudes, diferencias entre los contornos de las figuras y ejecuta operaciones como traslación y rotación sobre sus unidades constituyentes 1D.

Reconfiguración parcial superficial (RPS)

Pasa de centrar la atención en las figuras de inicio y llegada, a hacerlo en una de las partes en que fueron divididos (subfiguras), he introduce un nuevo tipo de fraccionamiento.

Categoría 2: Elementos generadores de control visual

“La introducción de ciertos elementos en la figura o la consideración de algunas de sus características, privilegian unas formas de ver en detrimentos de otras” (Marmolejo y González, 2015b, p. 316). Los Elementos de control destacan en las figuras el atributo de forma y suscita la aplicación de la reconfiguración asimismo las partes claves a discriminar en la transformación de la figura inicial son convexas, el grado de inclinación permite una fácil identificación de las partes claves (Marmolejo y González, 2015b), la forma del contorno de la figura promueve “pistas” para identificar la visualización a aplicar, como consecuencia los estudiantes realizan un bajo número de operaciones de traslación y rotación a aplicar en la figura inicial (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017).

En la siguiente tabla se presenta los cuatro grupos de elementos de control considerados mediante la agrupación de distintos elementos generadores de control tenidos en cuenta en el diseño de las tareas.

Tabla 2. Categoría: Elementos de control

Iconismo compuesto (IC)	Se consideran los enunciados o consignas de las tareas, las explicaciones realizadas en lengua natural y las imágenes que representan un objeto físico; así como acciones y/o situaciones que demarcan elementos visuales a privilegiar en el desarrollo o comprensión de la tarea expuesta. (Marmolejo y González, 2015b: 311).
Elemento de control visual por procedimiento directo (PD)	Está conformado por elementos de control y el contenido magnitud junto al procedimiento directo y la visibilidad determinan el tipo de visualización.
Elemento de control visual por procedimiento de réplica (PR)	Está conformado por los elementos de control, la visibilidad junto al procedimiento de réplica y el contenido determinan el tipo de visualización.
Elemento de control visual discursivo (ED)	Está presente en tareas en las cuales la visualización es inducida a través de procedimientos previos, y la visibilidad está parcialmente presente, (sólo se evidencia en lengua natural las acciones a aplicar) ya que los factores de visibilidad y los elementos de control están ausentes.

Categoría 3: Acciones sobre el soporte

Para Zimmermann y Cunningham (1991) las representaciones mentales y externas realizadas con el uso de lápiz y papel son importantes en la comprensión del objeto matemático.

En la investigación el término soporte alude a representaciones simbólicas con el objeto de reseñar, explicar o argumentar un procedimiento realizado, también se asume como soporte a todo tipo de materiales a través del cual se realizan manipulaciones sobre las representaciones, entre otras, doblado y recortes (Moreno, 2004), en la investigación se contempló como soportes tanto la ficha de trabajo (material de fotocopia que incluye la consigna), representaciones de figuras recortadas (material manipulable recortado en papel, que proporciona la realización de transformaciones a la figura en cuestión al ser entregado junto con la ficha de trabajo) y tiras de papel (material manipulable que posibilita realizar marcaciones sobre si, estimando longitudes de contorno de figuras).

Las acciones sobre el soporte 2 evidenciaban en la mayoría de casos las distintas operaciones que se realizaron sobre la figura, representando estas con el soporte 2, en algunas ocasiones permitió evidenciar las otras categorías propuestas en la investigación.

A continuación, en la tabla se define cada una de las diferentes acciones sobre los soportes.

A partir de las producciones de los estudiantes, en el anexo dos se ejemplifica cada una de las operaciones reseñadas en la Tabla 3.

Tabla 3. Categoría: Acciones sobre el soporte de papel

Superposición/Disyunción (SD)	Acción sobre el soporte 2 con el fin de comparar y determinar el orden o equivalencia de la cantidad de superficie o longitud de contorno. Se identifica de dos maneras, por un lado, sucede cuando las ubicaciones de los recortes de las figuras se ubican una encima de la otra de tal manera que los lados de sus contornos se comparan entre sí. Por otro lado, ocurre si la figura inicial y final se colocan una al lado de la otra y se procede a comparar la cantidad de superficie (Adaptado de Marmolejo, Vega y Galeano, 2017) Ver anexo 2.
Calcar/ Recortar (CR)	Acción sobre el soporte 1 o 2, que consiste en calcar un recorte de las figuras dadas sobre la hoja de papel y/o procede mediante un corte a lo largo de los contornos de la figura, recortando la totalidad de superficie del papel en que se representa la figura (Adaptado de Marmolejo, Vega y Galeano, 2017)
Trazos auxiliares (TA)	Trazos realizados sobre los soportes 1 o 2, con el fin de representar las unidades figurales de dos dimensiones (TA2D) o identificar unidades figurales de una dimensión (TA1D), lo anterior con el fin de establecer relaciones de orden o equivalencia entre las magnitudes área o perímetro.
Dibujos (D)	Dibujos a mano alzada con el fin de comunicar y explicitar la manera de proceder (Gómez y Catalán, 2015)
Contraste/Índice (CON)	“son estímulos que destacan atributos” (Marmolejo y González, 2015b p. 317) de color en el contorno y superficie de la figura, trazos discontinuos sobre la figura, flechas e índices; con la finalidad de comunicar el procedimiento desarrollado.

Categoría 4: Dificultades y Potencialidades

Las dificultades se conectan y se componen de redes complejas que se evidencian en forma de obstáculos en la práctica del desarrollo de la tarea (Socas, 1997). Cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de tareas, se presentan figuras, se percibe que hay dificultades para acceder a casos, los estudiantes representan (Marmolejo, 2014).

En este estudio se identificaron 3 dificultades las cuales fueron adaptadas de Socas (1997): las relacionadas con el lenguaje, las de naturaleza visual y las relacionadas con el objeto matemático (área, perímetro y la relación de estas magnitudes). A partir de las producciones de los estudiantes en el anexo dos se ejemplifica cada una de las operaciones reseñadas en la Tabla 4.

Tabla 4. Categoría: Dificultades y potencialidades

Dificultades en la consigna (estructura o lenguaje) de la tarea propuesta (DEC)	Relacionada con la manera de comprender el enunciado de la tarea. Puede suceder cuando el estudiante no comprende el enunciado dando un sentido distinto y así confundir la figura inicial con la final. Otra manera de manifestar esta dificultad sucede cuando el estudiante describe o justifica de forma confusa el desarrollo de la tarea, es decir que se refleja incoherencia entre lo que está escrito y lo mostrado en el soporte de papel, otro caso es cuando la descripción del proceso es incompleta y por ende se presenta ambigüedad en la interpretación de la tarea (adaptada de Socas, 1997).
Dificultades asociadas a las exigencias visuales solicitadas (DAV)	Se evidencia cuando en el soporte de papel no se muestra transformaciones, es decir que no hay trazos al identificar las unidades figurales de dos o una dimensión de las figuras propuestas. También puede ocurrir cuando existe una ausencia de conservación de la longitud (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017) y hay diferencia entre el perímetro y el número de lados de las figuras propuestas. Otro caso que demuestra esta dificultad es cuando en la manipulación del soporte de papel (figura recortada) no identifica la superficie con los bordes de la figura y procede a pegar las subfiguras identificadas sobre la superficie omitiendo los límites de la figura (Chamorro, 1997)
Dificultades asociadas a la R (p/a), al área y al perímetro (DAO):	Se evidencia cuando en la descripción del procedimiento no se diferencia el concepto de cantidad de superficie y la longitud de contorno. También sucede cuando en el procedimiento no se establece la relación de orden entre las magnitudes solicitada por la tarea (adaptada de Socas, 1997).

3.7 Ejemplo codificación de una tarea

En este apartado se ejemplifica la aplicación del instrumento de análisis anteriormente descrito, para ello se contextualiza y se codifica una tarea presente en la propuesta de enseñanza.

3.7.1. Contextualización y descripción de la tarea

La tarea analizada a continuación correspondió a la tercera tarea del M3, que privilegia relaciones entre cantidad de superficie y longitud de contorno. Esta tarea se compone de un enunciado que describe directamente las características de la figura final, es decir relaciona la Figura inicial con la final C' y D' respectivamente.

La figura inicial (Figura C') se presenta con el elemento generador de visibilidad (complementariedad de formas y las características del contorno) siendo el elemento de contraste una forma de control, debido a que la Figura C' posee un fondo blanco y su línea de contorno presenta grosor. El otro elemento generador de control es el procedimiento directo: el enunciado establece el orden de la resolución de la tarea, primero, enuncia la relación de orden con respecto a la longitud de contorno y después la relación de orden de la cantidad de superficie. Estos elementos de control generan una autonomía en la manera de visualizar lo que suscita una función ambigua.

La tarea pretendía promover la aplicación de operaciones de naturaleza 1D y 2D tales como reconfiguración lineal, cambio dimensional y la reconfiguración simple. La reconfiguración lineal con el fin de establecer las relaciones de orden en la longitud de contorno de la figura C' y D', el cambio dimensional porque la visualización se centra en unidades figurales 1D y 2D y la reconfiguración simple para establecer la relación de orden entre la cantidad de superficie.

La siguiente codificación permite no solo analizar si se tuvieron o no en cuenta los elementos de control visual introducidos, sino que también permite reconocer e identificar qué tipo de proceder implementó para solucionar la problemática de las tareas.

A continuación, en la Tabla 5 se aprecia la tarea 3.3 del M3, del estudiante E5 la cual ha sido codificada a manera de ejemplo.

3.7.2. Proceso de codificación de la tarea

La codificación de una U.A. permite evidenciar y corroborar los elementos de control visual que se incluyeron en las tareas de diseño, del mismo modo refleja la relación entre las dos magnitudes de estudio.

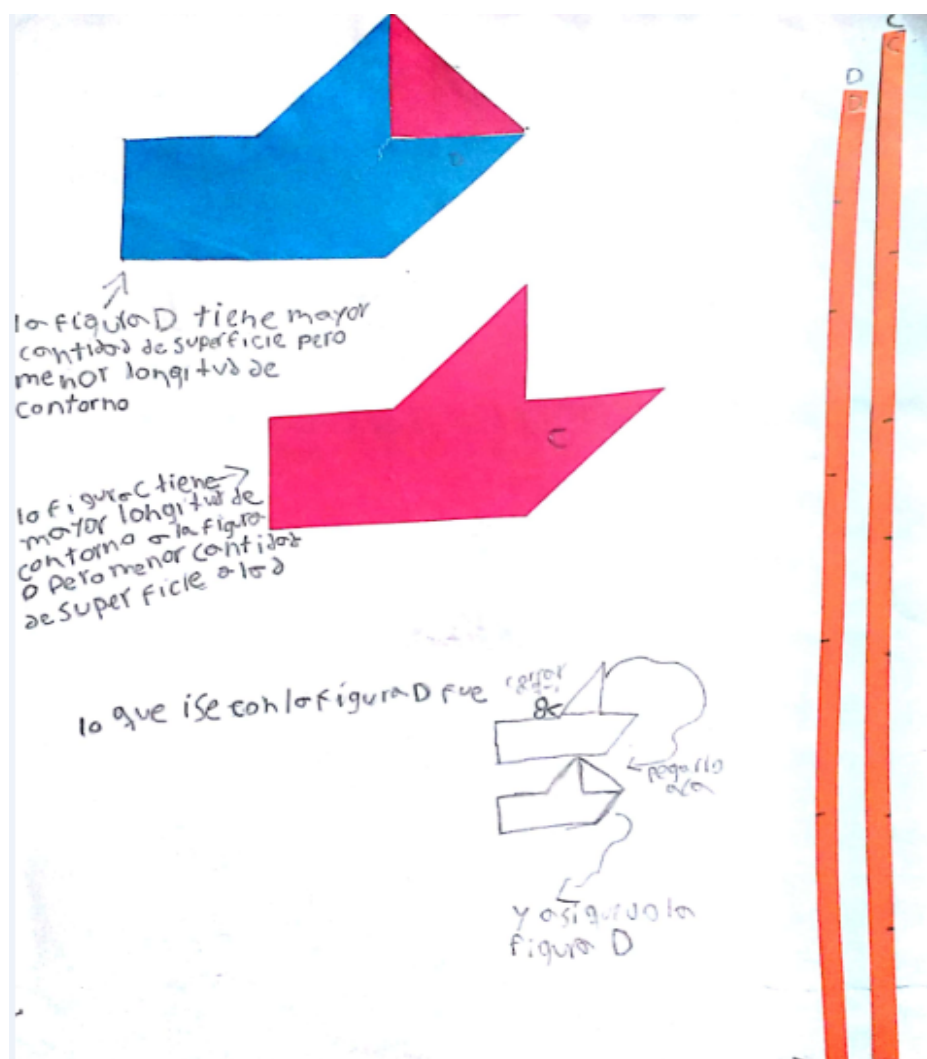


Ilustración 3 Unidad de análisis T3.3E4

Tabla 5. Codificación unidad de análisis T3.3E5

Categoría	Descriptor		
Operaciones	Reconfiguración Lineal (RL)	Cambio dimensional (CD)	Reconfiguración simple (RS)
Elemento de control	Elemento de control visual por procedimiento directo (EPD)		
Acciones sobre el soporte de papel	Superponer/Disyunción (SD)	Trazos auxiliares (TA1D) (TA2D)	Dibujos (D) Contraste/Índice (CON)
Dificultades	--		

Fuente: Elaboración propia

IV. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN MOMENTO 1

El capítulo presenta los datos recolectados en el estudio y su interpretación. Inicialmente, se reseña y caracteriza la propuesta de enseñanza considerada en el estudio. Posteriormente, la atención recae en el tratamiento de los resultados, se hace desde tres lugares distintos: análisis de las tareas (de carácter predictivo), análisis de resultados (de carácter descriptivo) y contraste (discusión de resultados). Mientras que, el primero de los análisis permite la consecución de los dos primeros objetivos específicos⁹ del trabajo, el segundo y tercer análisis, por su parte, hacen lo propio con el último de los objetivos específicos¹⁰.

Así, pues, en el análisis de resultados predictivo se reseñan las operaciones visuales (Marmolejo y González, 2013b), que se pretendieron suscitar para guiar la resolución de las tareas planteadas, donde, la inclusión de ciertos elementos de control visual (Marmolejo y González, 2015b), fueron las estrategias cognitivas que intentaron apoyar la explicitud de tales operaciones. En cuanto al análisis de resultados descriptivo, se caracteriza cómo los estudiantes analizados procedieron al resolver las tareas propuestas, en este sentido, fueron tres los aspectos que fungieron como elementos de caracterización: dificultades y potencialidades (p.60), acciones aplicadas sobre el soporte de papel (p.59) y la articulación de las operaciones visuales implementadas (p.56) y los elementos de control (p.57) este último son considerados (en adelante familias visuales). Finalmente, en el análisis de contraste, tras comparar las operaciones visuales que se pretendían fueran

⁹ Establecer ideas matemáticas que permitan el diseño de tareas que susciten el estudio de la R(p/a) desde una perspectiva visual, y determinar los aspectos visuales (operaciones, estructuras y funciones de control) que, a través del diseño de tareas, propician la inclusión de ideas matemáticas asociadas al estudio de la R(p/a))

¹⁰ Determinar las estrategias que los estudiantes consideran para suscitar la articulación entre los aspectos visuales e ideas matemáticas que subyacen al estudio de la R(p/a)

movilizadas y las que realmente fueron aplicadas, y sin perder de referente las dificultades y potencialidades encontradas, así como los soportes contemplados, se estableció la efectividad de los elementos de control incluidos y su rol tanto en el desarrollo de las aprehensiones operatoria y discursiva como en el aprendizaje de la R(p/a).

4.1 Análisis de resultados M1

4.1.1 Análisis predictivo M1

El diseño global de la propuesta de enseñanza se compuso de diecisiete tareas divididas en tres Momentos, a saber: M1, M2 y M3. La división en los Momentos reseñados corresponde a los propósitos didácticos de las tareas propuestas y que se asocian a la intencionalidad de promover tanto el desarrollo visual como el estudio del objeto matemático a tratar. En este orden de ideas, las tareas del M1 (Tareas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5), tienen por objeto suscitar el desarrollo de la aprehensión operatoria y el estudio del área como un tipo de magnitud, puntualmente, las relaciones de orden y de equivalencia entre figuras bidimensionales según sus áreas (Ver Anexo 1).

En este apartado se expresan las operaciones visuales que se esperaba, fueran consideradas para guiar la resolución de las tareas que constituyen el primero de los momentos en que se dividió la propuesta de enseñanza implementada en la investigación; igualmente, se reseñan los elementos de control incluidos con el fin de suscitar y aludir a cómo su inclusión pretende promover la aplicación de las operaciones visuales en juego.

En la Tabla 8, con el objeto de guiar la lectura del análisis de resultados del M1, se presenta de forma esquemática las operaciones visuales que se pretendieron fueran promovidas en las cinco tareas propuestas y se reseñan los elementos de control incluidos para tal fin.

Tabla 6. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento del área de superficies planas de las tareas propuestas

TAREA	OPERACIÓN VISUAL A PROMOVER	ELEMENTOS DE CONTROL INCLUIDOS
1.1	Reconfiguración simple	-Iconismo (contexto de costura). -Factores de visibilidad (complementariedad de formas). -Procedimiento (directo y por referencia).
1.2		-Factores de visibilidad (figuras convexas) -Procedimiento (Directo) -Contenido (Cantidad de superficie y relación de equivalencia entre cantidades de superficie)
1.3		- Procedimiento (Directo y por réplica) -Contenido (relación de equivalencia entre cantidades de superficie)
1.4		-Contenido: (relación de equivalencia entre cantidades de superficie). -Contraste: (grosor, sombreado, color)
1.5		-Factores de visibilidad (figuras convexas) -Procedimiento (Directo y por réplica) -Contenido (Relación de orden y equivalencia entre cantidades de superficie)

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan los procedimientos esperados y efectos de la inclusión de los elementos de control visual al resolver las tareas de cada Momento de la propuesta de enseñanza.

Tarea 1.1: para resolver la problemática expuesta en la Tarea se debe reconfigurar un decágono irregular (figura de partida) en un rectángulo (figura de llegada), ver Ilustración 2.

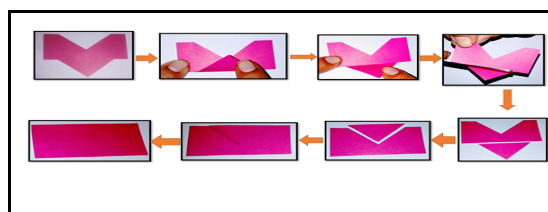


Ilustración 4. Flujo visual T1.1 del M1

Con el objeto de suscitar la aplicación de la operación antes reseñada fueron incluidos en el diseño de la pregunta, de forma simultánea, tres elementos de control, a saber: iconismo (contexto de costura), factor de visibilidad (complementariedad de formas) y procedimiento a) presentación simultánea de las figuras de partida y de llegada

y b) procedimiento por referencia: (“realizarle una cobija a su mascota con un retazo de tela” y “acomodar la tela”).

Por un lado, el iconismo pretende suscitar el considerar la acción de recortar trozos de tela y unirlos, en consecuencia, propiciar el fraccionamiento de la figura de partida y la reacomodación de las partes fraccionadas, Por otro lado, la complementariedad de formas (parte cóncava y convexa de la figura de partida) intenta suscitar tanto la focalización sobre las subfigura claves a discriminar: triángulo y heptágono irregular e instaurar la operación intrareconfiguración a aplicar (traslación vertical hacia arriba del triángulo), como el establecimiento del lugar donde el triángulo debe ser desplazado para lograr completar la Figura de llegada B (rectángulo). Finalmente, los dos tipos de procedimientos contemplados pretenden transformar la figura inicial en otra de contorno diferente, que conserva la cantidad de superficie de área entre las dos figuras, objeto matemático en estudio que al aplicar la operación de reconfiguración promueve la modificación de las figuras geométricas para dar soluciones a las problemáticas planteadas en la propuesta de enseñanza.

Tarea 1.2: Para solucionar esta Tarea se debe reconfigurar un octágono irregular (figura de partida) en un heptágono (figura de llegada), ver Ilustración 3.

Con la intención de promover la aplicación de la operación antes mencionada se introdujeron en el diseño de la actividad, al mismo tiempo, tres elementos de control: factor de visibilidad (regiones poligonales (sub-figuras) mostradas en exceso en la figura inicial), procedimiento a) presentación simultánea de las figuras de partida y llegada y b) procedimiento directo: “Juan afirma que la Figura C tiene mayor cantidad de superficie que la Figura D. Al contrario, Valentina dice que la Figura C es quien tiene la menor cantidad de superficie” al seguir las indicaciones para resolver la problemática y el

contenido al responder la pregunta ¿Quién de los dos tiene la razón? con respecto a la relación de orden y equivalencia entre ambas figuras.

Por un lado, los factores de visibilidad incluidos pretendieron centrar la atención sobre las sub-figuras convexas de la figura de partida, suscitando el considerar la acción de realizar trazos auxiliares focalizando sobre las sub-figuras claves a discriminar: triángulos rectángulo e isósceles y propiciar un nuevo reacomodamiento aplicando la operación de intrareconfiguración al rotar y trasladar cada una de las sub-figuras a 315° en el lugar donde debe ser desplazado para lograr obtener la Figura de llegada D (heptágono), para concluir, los dos tipos de procedimientos consentidos, pretender transformar la figura inicial en otra de contorno distinto, que además de conservar la cantidad de superficie entre las dos figuras logré establecer la relación de equivalencia entre las figuras, propiedad matemática de nuestro interés para dar solución a problemáticas incluidas en la propuesta de este estudio.

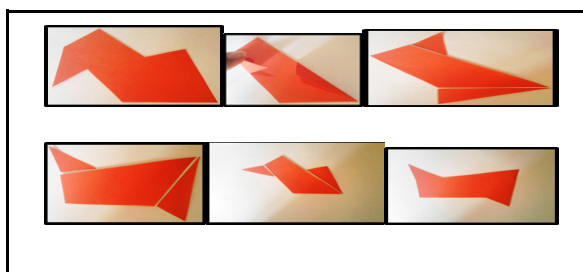


Ilustración 5. Flujo Visual T1.2 del M1

Estos elementos de control generan mayor complejidad con respecto a la tarea anterior al aumentar la cantidad de sub-figuras reorganizadas para garantizar el cumplimiento de la condición propuesta con relación a la conservación de la cantidad de superficie entre dos figuras de diferente forma. Tal como se observa en la ilustración 2.

Tarea 1.3: Para solucionar la problemática de esta tarea se debe aplicar la operación de reconfiguración simple a un triángulo rectángulo (figura inicial) en un cuadrado (figura final), ver Ilustración 4.

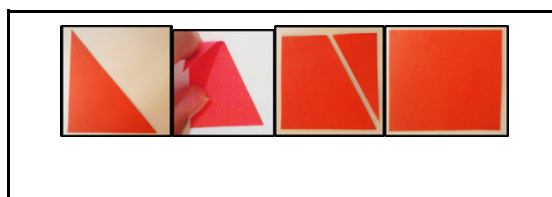


Ilustración 6. Flujo Visual T1.3 del M1

Para lograr ejecutar la operación señalada, fue necesario introducir en el diseño de la tarea tres elementos de control, a cumplir: factores de visibilidad (la convexidad en el contorno de las figuras), el procedimiento a) presentación paralela de las figuras de partida y llegada y b) procedimiento por réplica: al reproducir procedimientos previos y de esta manera dar paso al contenido demostrando que las figuras E y F tienen igual cantidad de superficie, aunque la forma de las figuras sea diferente.

Es así, como los factores de visibilidad pretenden promover el trazo instantáneo de una línea auxiliar que divide la Figura E en dos sub-figuras, por consiguiente, propiciaría el fraccionamiento de la figura de partida y la acomodación de la parte fraccionada, por otro lado, la convexidad en el contorno de las figuras y la posición entre ellas suscita focalizar la atención sobre la sub-figura clave a discriminar: triángulo e instaurar la operación intrareconfiguración a aplicar (rotación de 180° vertical se hacía en sentido a las manecillas del reloj), como el establecimiento del lugar donde el triángulo debe ser desplazado para lograr completar la Figura de llegada F (cuadrado). Finalmente, los dos tipos de procedimientos contemplados pretenden transformar la figura inicial en otra de contorno diferente, que conserva la cantidad de superficie de área entre las dos figuras, como se puede apreciar en la ilustración 4.

Tarea 1.4: Para resolver esta Tarea se debe aplicar la operación de reconfiguración por ensamblaje a la Figura G que contiene una sub-figura sombreada en su interior. Ver la Ilustración 5.

Para ejecutar la operación reseñada fue necesario adherir al diseño de la actividad, al mismo tiempo, tres elementos de control, así: factores de visibilidad (parte sombreada de la figura, además, del grosor en el rayado), procedimiento a) presentación de la Figura G y b) procedimiento por referencia: (¿Cuál es la cantidad de área representada por la parte sombreada? Explicar qué transformaciones sufrió la figura), acción que es guiada por la característica de la figura de llegada. Finalmente, el contenido: al determinar qué cantidad de superficie corresponde específicamente a la parte sombreada.

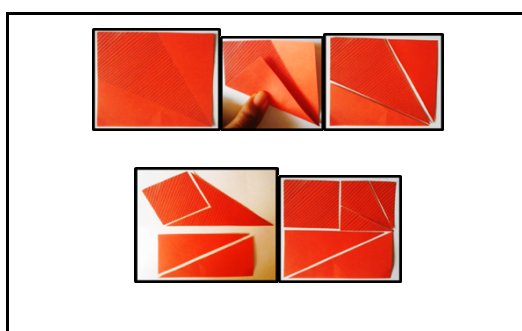


Ilustración 7. Flujo Visual T1.4 del M1

Los factores de visibilidad como el grosor del rayado, promueven centrar la atención en la sub-figura sombreada, pero al mismo tiempo permite el reconocimiento de sub-figuras convexas (triángulos rectángulos), elemento de control que suscita realizar dos trazos auxiliares, por consiguiente, posibilita el fraccionamiento de la Figura G y da pie a reacomodar las partes fraccionadas de igual forma (triángulos) reconfigurando en un rectángulo, de otra parte, el procedimiento por referencia es orientado por las características de la figura de llegada focalizando la atención en la sub-figura sombreada, y reconociendo sub-figuras claves a discriminar (convexas) como un cuadrado al interior de la misma, para considerar establecer la reconfiguración de sub-figuras conformando nuevas sub-figuras (rectángulo) que permitan dar forma a la figura de inicio al haber cambiado su organización interna. Finalmente, el contenido se refleja al determinar la cantidad de superficie representada por una parte sombreada de la Figura G.

Tarea 1.5: Para resolver la problemática expuesta en la Tarea se debe reconfigurar un trapecio Figura I en un rectángulo vertical figura H, y responder las afirmaciones dadas en la pregunta diseñada.

Con la intención de aplicar la operación mencionada, se incluyeron tres elementos de control en la actividad: factores de visibilidad (figuras convexas, contraste color), procedimiento a) presentación de las figuras en cuestión y b) procedimiento directo: solicita de manera explícita en la consigna el procedimiento a seguir, a través de las afirmaciones, en donde el estudiante se ve enfrentado a responder si las considera falsas o verdaderas y posteriormente justificarlas. Por último, el contenido en donde las afirmaciones guían el proceder del estudiante al realizar comparaciones entre las Figuras H, I, J y K; fijando la atención especialmente en la longitud de contorno para cumplir con la condición solicitada.

Los factores de visibilidad, por un lado, procuran enfocar la atención en las sub-figuras convexas, propiciando compararlas a través de la operación de disyunción para considerar la acción de realizar trazos auxiliares promoviendo el fraccionamiento de la Figura I al ser la primera sugerida por las afirmaciones dadas en la consigna y transformarla en la Figura H, por otro lado, es clave que las afirmaciones orienten las acciones para justificar el orden de mayor a menor de las figuras en cuestión como lo propone el procedimiento directo. Para concluir se logre ordenar la equivalencia de las cantidades de superficies representados por cuatro figuras, reconociendo que la Figura J cuenta con mayor cantidad de superficie gracias a la sub-figura que se muestra en exceso, lo que permite realizar un acercamiento al siguiente Momento de tareas.

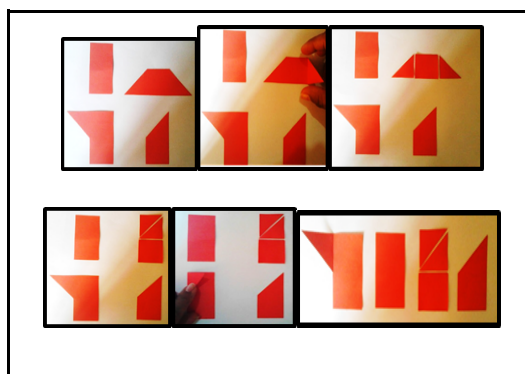


Ilustración 8. Flujo Visual T1.5 del M1

Cabe mencionar que esta tarea a diferencia de las anteriores presenta un nivel de complejidad mayor al presentar cuatro figuras para determinar la relación de orden y equivalencia entre unas y otras figuras, de acuerdo a su cantidad de superficie, en donde la sub-figura convexa que conforma el resto de figuras es el triángulo, situación que propicia la introducción de la magnitud longitud de contorno, objeto matemático de interés en el segundo Momento de tareas diseñadas de la propuesta de enseñanza.

Para el siguiente apartado de análisis de resultados descriptivos, es preciso tener en cuenta la asociación de procederes que se entrelazaron, de acuerdo a su similitudes entre si, es el caso de PNP-PN y PEE-PP con la intención de manejar los resultados de forma más sintética, diferente situación se presenta con PE y PNE al ser procederes disjuntos (Ver anexo 6).

4.1.2 procedimientos de resolución de las tareas propuestas según el éxito o fracaso alcanzado

Procedimiento esperado (PE): Alude a todo procedimiento de resolución que, implementado por los estudiantes analizados, coincidió, en su totalidad, con lo expuesto en el análisis predictivo, es decir, que exteriorizó las operaciones visuales que fueron

expuestas en el análisis de resultados descriptivo, y que movilizó la consideración de los elementos de control incluidos en el diseño.

Procedimiento esperado con error (PEE) y Procedimiento esperado con éxito parcial (PP): Estos procedimientos han sido fusionados debido a su estrecha relación, al pertenecer al nivel de proceder esperados y estar relacionados con el fracaso al resolver las actividades propuestas, el primero cayó en error, situación que se presenta por no considerar en su totalidad los elementos de control visual incluidos, lo que desencadena otros errores de carácter estructural en la comprensión de la consigna, del mismo modo dificultades que atañen al conocimiento del objeto matemático puesto en juego, en este caso relacionado a la cantidad de superficie M1.

Finalmente, el segundo proceder con un éxito parcial se refleja en el siguiente ejemplo: se tiene en cuenta la operación esperada para la resolución de la tarea, en este caso reconfiguración simple, pero, además, se realiza un fraccionamiento a las subfiguras y al reconfigurar, no se establece la misma cantidad de superficie que en la figura final, provocando un error, proceder que inició siendo lo esperado.

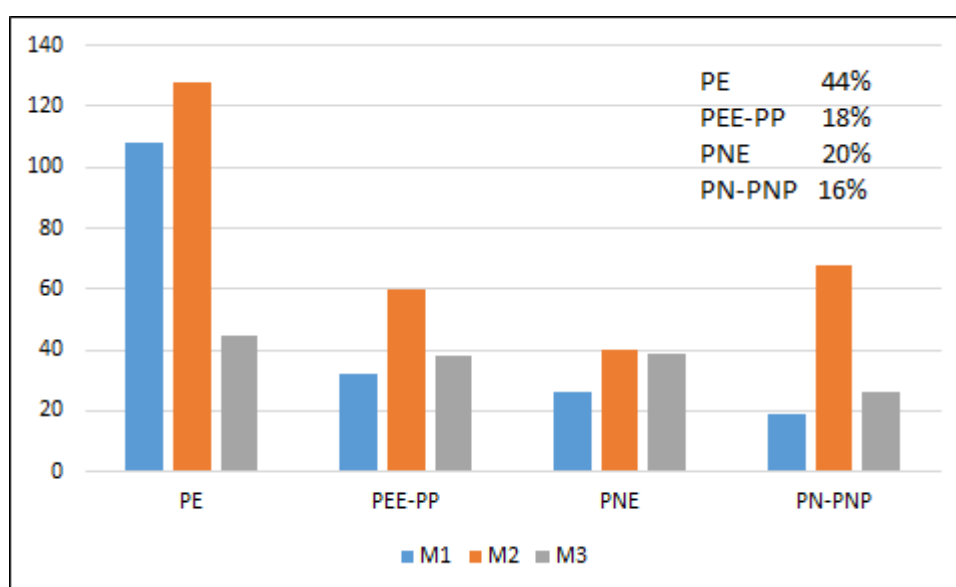
Procedimiento no esperado con éxito (PNE): considera los proceder que suscitaron una resolución adecuada de la tarea expuesta pero que involucran operaciones visuales distintas a las estipuladas en los análisis de resultados.

Procedimiento no esperado con error (PN) y Procedimiento no esperado con éxito parcial (PNP): tiene en cuenta todo tipo de proceder que diferente al previsto en los análisis de resultados, conduce al error. Es decir, aunque no considera los elementos de control esperados se aproxima un poco a la resolución solicitada, pero por dificultades en la comprensión de la consigna o en el reconocimiento del objeto matemático llega al error.

A continuación, se presentan los resultados generales de la investigación, con respecto a los procedimientos de mayor recurrencia por parte de los estudiantes en los tres momentos del estudio.

La Tabla 9 se reseña cómo los procedimientos de éxito y fracaso que aparecieron en la investigación; permiten en adelante realizar los análisis pertinentes para dar respuesta a la pregunta de estudio.

Tabla 7. Frecuencia de aparición de los procedimientos asociados al éxito y fracaso global en la propuesta de enseñanza



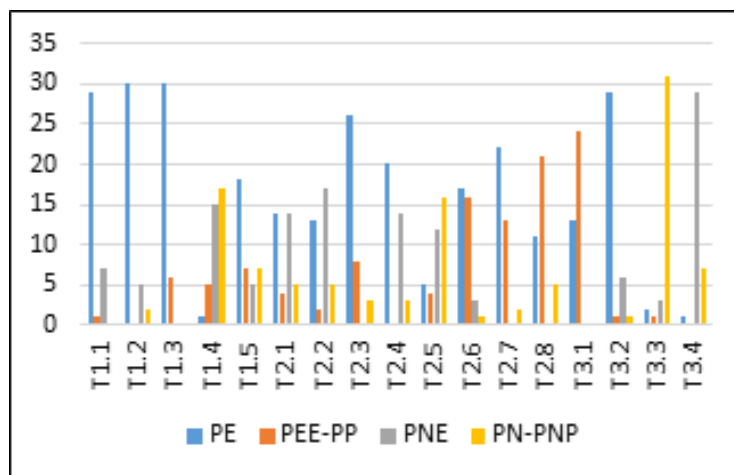
Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 9 se reseña como los procedimientos aparecieron en los tres momentos, destacando el procedimiento PE con mayor recurrencia (44%), en especial en los M1 y M2 de la propuesta de enseñanza. Los procedimientos PNE, PEE-PP, PN-PNP. Con porcentajes de, 20%, 18% y 16% respectivamente son en su orden los más bajos, lo que indica que en la mayor cantidad de tareas los elementos de control no hicieron el efecto esperado. En cuanto a los otros procedimientos tales como PEE-PP y PN-PNP, que representan un 34% a pesar de las dificultades, se logró otra solución no esperada con

éxito parcial, mostrando el error o dificultad como una posibilidad de explorar otra solución.

En la Tabla 10, se muestra el análisis comparativo de los procedimientos de las tareas propuestas, desde M1 hasta M3 (17 tareas), para un total de 629 U.A.

Tabla 8. Comparativo de procedimientos y tareas globales en la propuesta de enseñanza



Fuente: Elaboración propia.

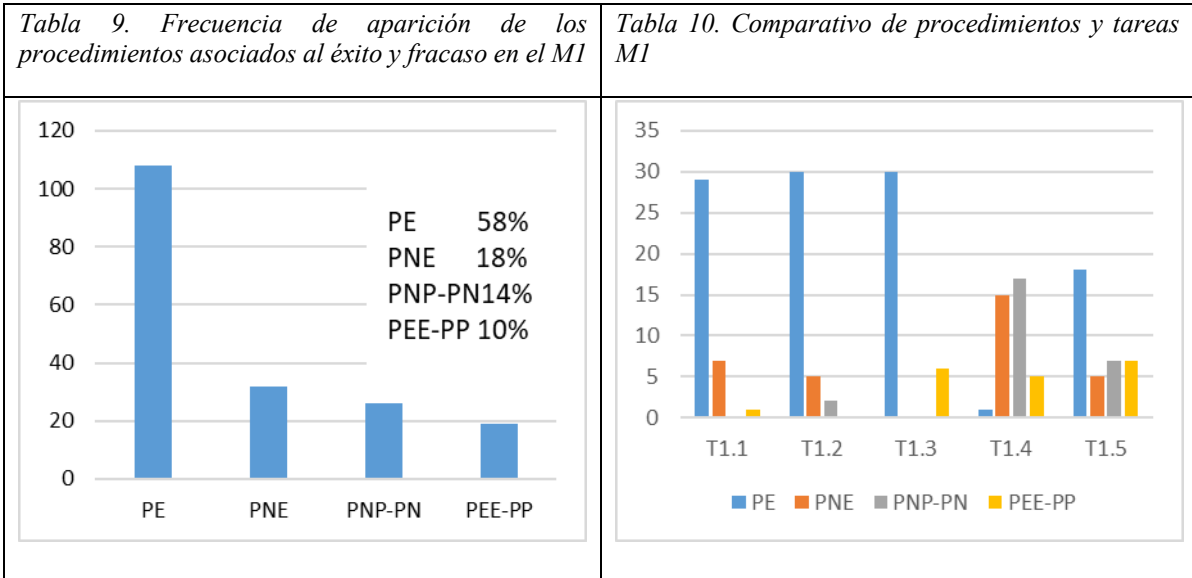
Como se puede ver en la tabla anterior, se exponen tareas en cada uno de los momentos donde hay una alta frecuencia de PE tal es el caso de T1.1, T1.2, T1.3, T2.3, T2.7 y T3.2, las tareas de M1 representan el 15%, de M2 21% y la única tarea de M3 el 8%, para un total de 44% de las tareas donde se evidencia más éxito.

4.1.3 Análisis de resultados descriptivo del M1

En las Tablas 11 y 12 se reseñan la frecuencia de aparición de los procedimientos de éxito y fracaso evidenciados, respectivamente, en el grueso de las tareas que componen el M1 de la propuesta de enseñanza, y según el tipo de tareas implementadas.

En la Tabla 11 el proceder de mayor intervención fue el procedimiento esperado (PE), con 108 U.A. de recurrencia entre los cuatro procederes, destacándose, además, como el procedimiento más adoptado por los estudiantes al solucionar las tareas propuestas. Del

mismo modo, cabe señalar que el resto de procedimientos (PNE, PNP-PN, PEE-PP), aunque con menor frecuencia se observan constantes entre sí, con frecuencias entre 19 y 32 U.A. y un porcentaje entre 10% y 18% frente a la acogida por parte de los estudiantes al resolver las actividades.



Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 12 por su parte, indica que al comparar los procedimientos y tareas del M1 el proceder PE se convierte en el más acogido al momento de solucionar las actividades, aunque su presencia en la T1.4 es escasa al igual que los procederes (PNP-PN, PEE-PP) aspectos que se ampliarán con mayor detalle en adelante al establecer la frecuencia de aparición de cada procedimiento según el número de tareas implementadas en el estudio del M1.

Procedimiento esperado con éxito PE:

La Tabla 11 muestra que el procedimiento PE es el más considerado en las tareas que suscitan el desarrollo de la aprehensión operatoria y el estudio de las relaciones de orden y equivalencia entre áreas: más de la mitad de los procedimientos explicitados por los estudiantes al resolver tales tareas, lo consideran (58%). La Tabla 12, por su parte, muestra que este procedimiento es el más considerado (entre 78% y 81% procedimientos

evidenciados) en las tareas que suscitan menor complejidad visual (T1.1, T1.2 y T1.3), mientras que en la segunda de mayor complejidad (T1.4), su presencia es mínima 3% (un estudiante). En cuanto a T1.5, fue contemplada por el 49% procedimientos desarrollados por los estudiantes.

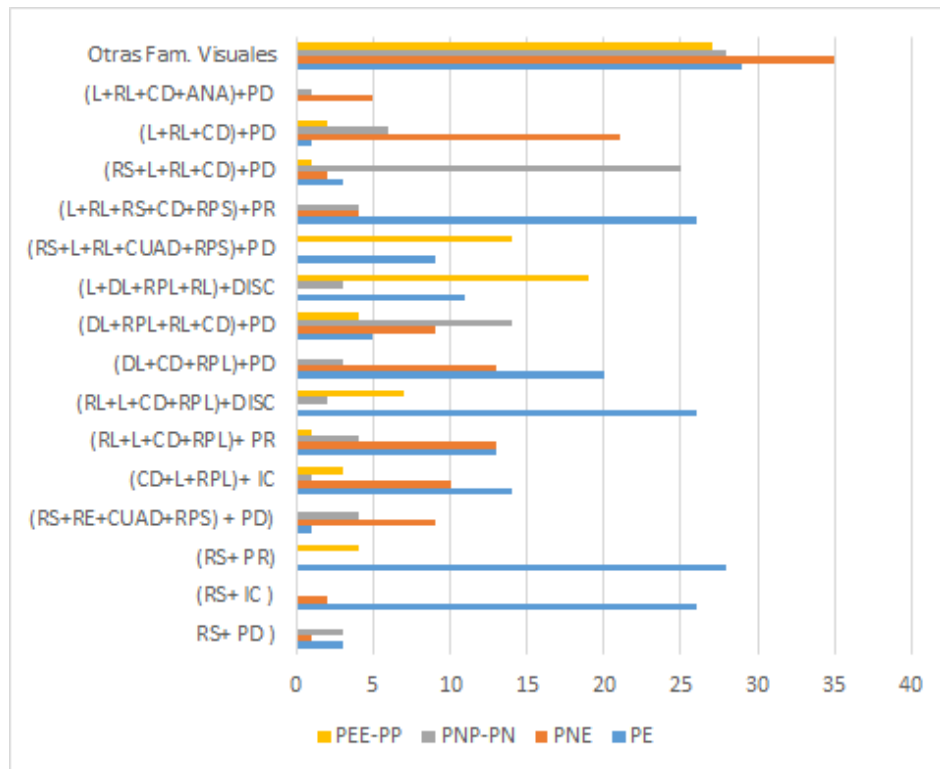
Los resultados anteriores indican que el éxito en el despliegue de procedimientos al desarrollar las tareas, se debe específicamente a la implementación de las hipótesis y objetivos propuestos en el diseño, en donde los elementos de control introducidos como la complementariedad de formas en la figura de la T1.1, el uso de procedimientos como el de réplica y directo en las T1.2 y T1.3, permiten seguir las instrucciones y recomendaciones para solucionar cada problemática a través de la lengua natural por medio de la consigna de las tareas y otros elementos de control evidenciados como la posición de las figuras, el color, el índice, entre otras; intervienen en la resolución y promoción de actividades centradas en hallar la cantidad de superficie en por lo menos dos figuras al determinar su orden y equivalencia como una relación asociada al objeto matemático.

En general, los resultados manifiestan que el procedimiento PE, permeó todas las tareas en su desarrollo, además, las dos tareas en las que se contemplan todos los procedimientos fueron las T1.4 y T1.5; no se debe olvidar que el nivel de complejidad es ascendente en la resolución de las problemáticas, lo cual señala que los elementos de control en algunos casos se presentaron como obstáculos y/o oportunidades de acceder a nuevas formas de solución o de fracasar en el intento, específicamente, al fungir en la aplicación de fórmulas como es el caso de la T1.4 al incluir operaciones no esperadas (fórmulas, anamorfosis) y de añadir o eliminar subfiguras de la figura inicial para transformar todas las figuras de la T1.5 en la misma figura, distorsionando la relación de orden y equivalencia de la cantidad de superficie y evadir el acercamiento al siguiente

objeto matemático de longitud de contorno como fue el caso de los procedimientos desarrollados por algunos estudiantes específicamente en estas dos tareas.

En cuanto a las familias visuales identificadas en la investigación, se encuentran reportadas las de mayor frecuencia en la Tabla 13.

Tabla 11. Frecuencia de aparición de las familias visuales globales en la propuesta de enseñanza

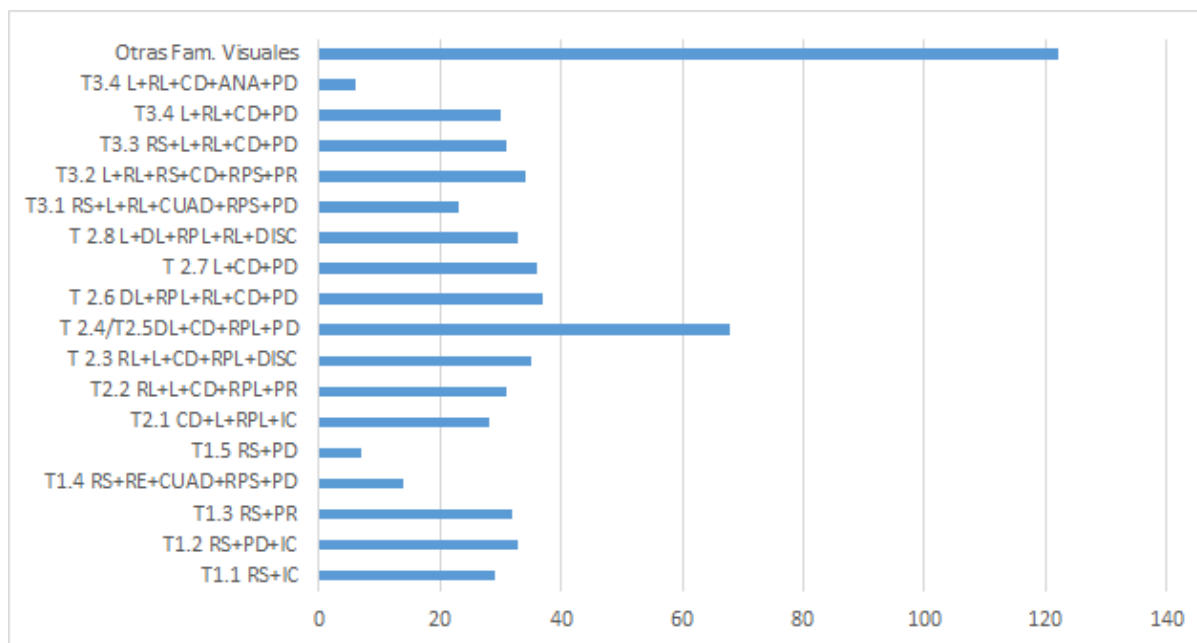


Fuente: Elaboración propia.

En las Familias visuales identificadas en la investigación presentadas en la Tabla 13, se muestran las de mayor frecuencia en cada uno de los momentos, en total se reportaron 15 familias, cada procedimiento PE, PNE, PNP-PN, PEE-PP se representa respectivamente por familias visuales de mayor porcentaje tales como: (RS+PR/RL+L+CD+RPL+DISC/ L+RL+RS+CD+RPS+PR), (L+RL+CD+PD), (RS+L+RL+CD+PD), (L+DL+RPL+RL+DISC) oscilan entre 6% y 5% de las familias de todos los momentos.

Con relación a las familias visuales a continuación en la Tabla 14 se presenta la familia visual más representativa en cada una de las tareas de la propuesta de enseñanza.

Tabla 12. Comparativo de familias visuales y tareas global en la propuesta de enseñanza

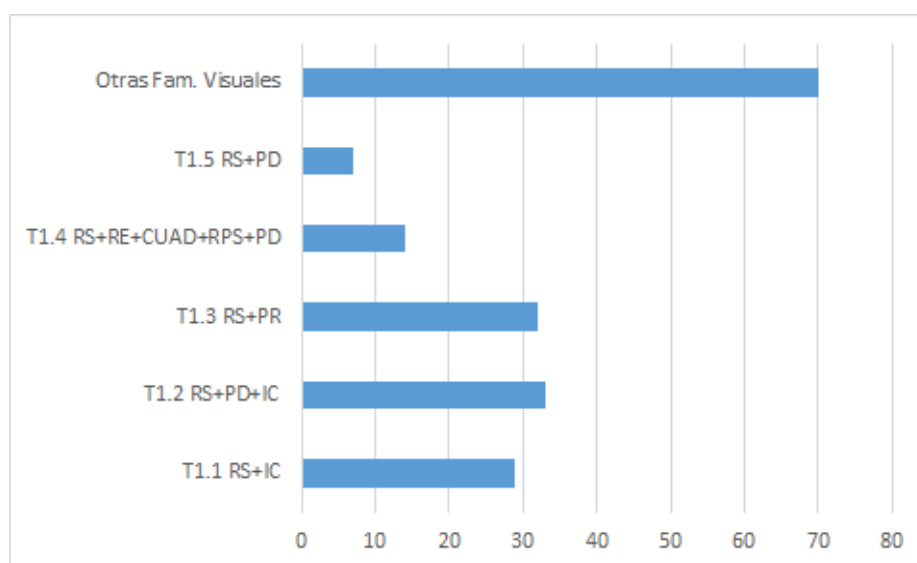


Fuente: este estudio. Elaboración propia.

En la Tabla 14 se reflejan las familias visuales de mayor frecuencia en las U.A, así que cada una de las tareas de la propuesta de enseñanza se representa por una familia visual. El grupo de las otras familias visuales se compone de familias visuales que no tenían compatibilidad con las reportadas en la gráfica. Para el caso de M1 todas las familias visuales guardan en común la reconfiguración simple, operación cognitiva esperada para este paquete de tareas, los porcentajes oscilan entre 1% al 6%. La segunda parte de esta gráfica corresponde a las tareas de M2, estas U.A en su mayoría se componen de familias visuales compuestas por las operaciones visuales esperadas tal como la linealización y deslinealización, el porcentaje de familias visuales están entre 6% al 13%. Por último, las tareas correspondientes a M3 de T3.1 a T 3.3 presentan una única familia visual, por el contrario, para T3.4 ocurrió distinto, pues se presentaron dos familias visuales L+RL+CD+PD representa el 6% y L+RL+CD+PD el 1%, sobre las 629 U.A.

Las familias visuales que caracterizan el presente Momento son cinco, se identifican por su alta recurrencia (114 unidades de análisis entre todas (U.A.)), en la resolución de las tareas, el resto de tareas desarrolladas fueron 71, las cuales no tuvieron relación entre sí. Es decir, contaban con diversidad de operaciones y elementos de control visual que no permiten asociarlas.

Tabla 13. Frecuencia de aparición de las familias visuales en el M1



Fuente: Elaboración propia.

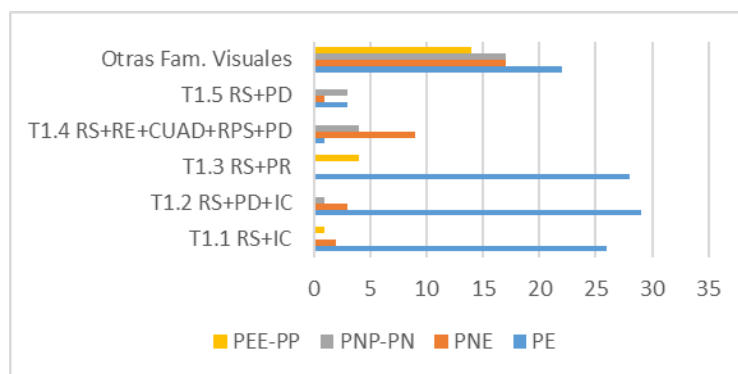
En la Tabla 15 se reseñan las familias visuales acogidas por los estudiantes al solucionar las actividades, en donde se observan operaciones y elementos de control visual esperados, los cuales fueron incluidos en las tareas para llegar al éxito, en especial en las T1.1, T1.2 y T1.3.

Cabe mencionar que, además, se adoptan otras operaciones y elementos de control visual no esperados como es el caso de las tareas T1.2 y T1.4, al aplicar el iconismo compuesto y la cuadratura en las actividades cuando no se previó, situación que genera una oportunidad de solución o posibles dificultades. En ese caso, los resultados muestran que las T1.5 y T1.4 fueron actividades en donde las familias visuales tenidas en cuenta para su resolución no fueron similares a las incluidas en el diseño de las tareas, como lo

indican las frecuencias observadas en la Tabla 15 con el 3% para la T1.5 y el 8% para la T1.4, en donde la recurrencia en las U.A. fueron 6 y 14 respectivamente.

A continuación, se presenta la Tabla 16 que permite reseñar el comparativo entre las familias visuales y los procedimientos caracterizados. Es importante decir que las cinco familias visuales presentes cuentan con un 62% y otras familias visuales no consideradas por su extensa combinación de operaciones y elementos de control visual ocupan un 38% dentro del total de las tareas propuestas para el M1.

Tabla 14. Comparativo de las familias visuales

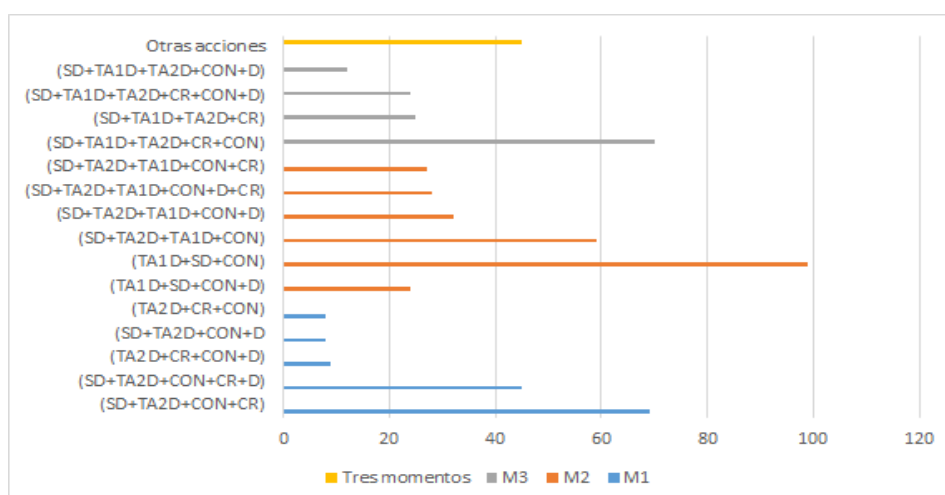


Fuente: este estudio. Elaboración propia.

La Tabla 16 permite observar que las familias visuales de mayor incidencia en el M1, cuentan con la presencia del proceder PE, situación que atribuye el éxito de las tres primeras tareas del M1 y la T1.5 final. En cuanto a la T1.4 solo se evidenció una U.A. que cumpliera la condición solicitada.

En cuanto a las Acciones sobre el soporte identificadas en la investigación se encuentran 15 acciones que se representan en la Tabla 17.

Tabla 15. Frecuencia de aparición de las Acciones sobre el soporte global en la propuesta de enseñanza

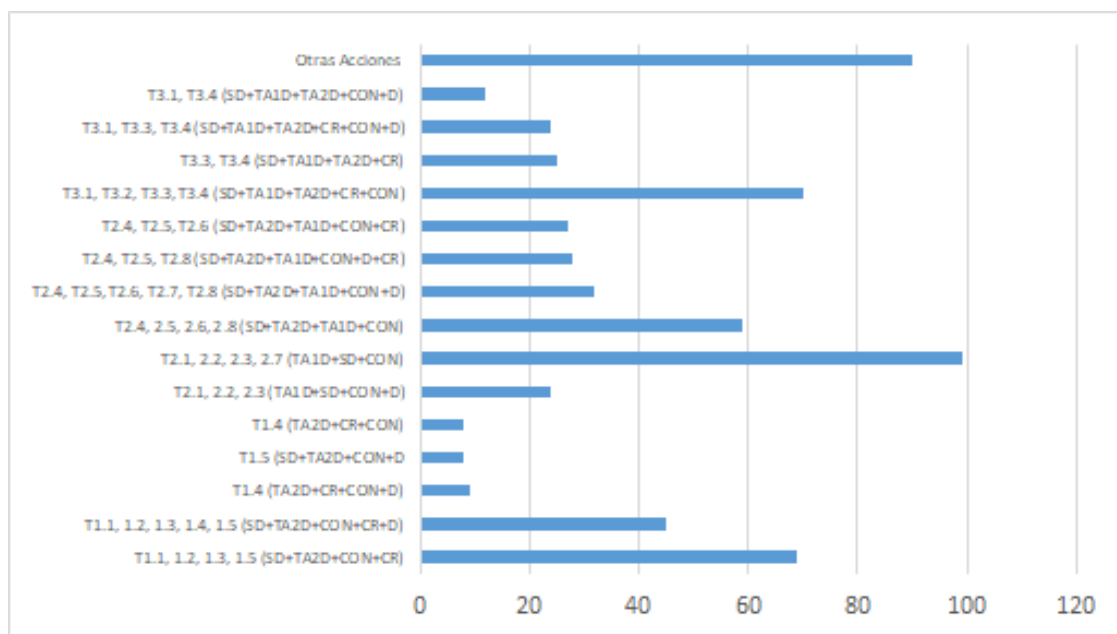


Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 17 se muestra las acciones en los tres momentos de la propuesta de enseñanza, tienen mayor porcentaje en particular tres grupos de acciones (TA1D+SD+CON), (SD+TA1D+TA2D+CR+CON) y (SD+TA2D+CON+CR); los porcentajes son 18% y los dos últimos de grupo 13%. Lo que muestra es que las acciones sobre el soporte relacionadas con las unidades figurales 1D se facilitaron para los estudiantes, cuestión que también sucedió para las acciones relacionadas con unidades figurales de 2D y la articulación de estas dos, es decir que los soportes entregados para el desarrollo en cada uno de los momentos fueron propicio para la solución de la propuesta de enseñanza.

A continuación, se presentan en la Tabla 18 acciones sobre el soporte por cada una de las tareas que componen la propuesta de enseñanza.

Tabla 16. Comparativo de Acciones visuales y tareas globales de la propuesta de enseñanza

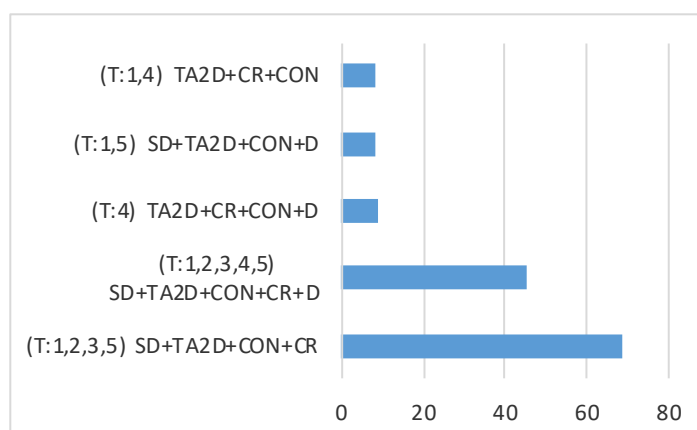


Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 18 se destaca los siguientes grupo de acciones junto con el grupo de tareas: T (2.1, 2.2, 2.3, 2.7), (TA1D+SD+CON); T(1.1, 1.2, 1.3, 1.5), (SD+TA2D+CON+CR); T (3.1, 3.2, 3.3, 3.4); (SD+TA1D+TA2D+CR+CON) de modo que sus porcentajes son respectivamente 18% y 13% las dos últimas. Es decir que estas acciones sobre el soporte de papel destacadas en la Tabla 18 se relacionan con las acciones que se establecieron en el análisis predictivo, por lo cual es posible afirmar que este tipo de tareas de M1, M2, y M3 promueve acciones que generan la reflexión de la visualización en 1D, 2D y su articulación.

En la Tabla 19 se exponen las acciones con mayor frecuencia (139 U.A.), sobre los soportes en que se representan las figuras; repartidas en cinco grupos de acciones incluidas en el despliegue de los procedimientos ejecutados con un 74% al resolver las tareas del M1. Además, en 46 U.A. se encontraron otras agrupaciones de acciones con el 25% de las tareas restantes analizadas en este momento.

Tabla 17. Frecuencia de aparición de las Acciones sobre el soporte en el M1



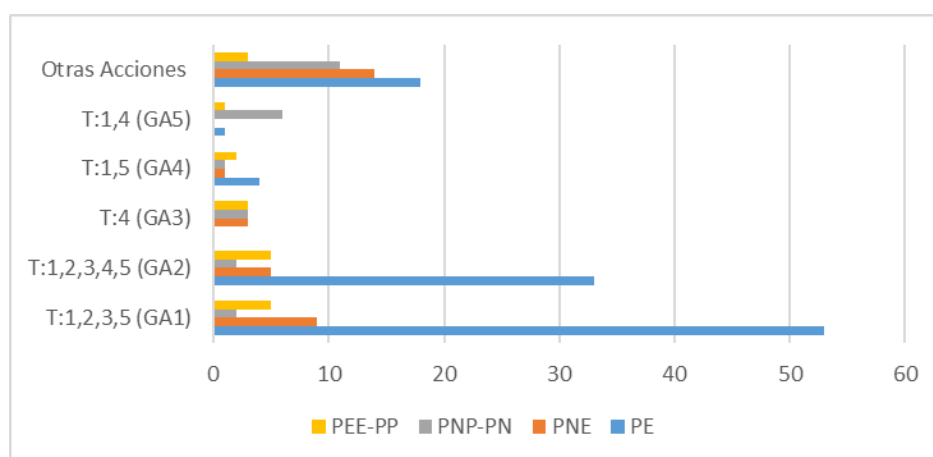
Fuente: Elaboración propia.

La acción que ocupa el primer puesto es 1(SD+TA2D+CON+CR) con 37%, le sigue 2(SD+TA2D+CON+CR+D) con 24% y los tres grupos de acciones 3(TA2D+CR+CON+D), 4(SD+TA2D+CON+D) y 5(TA2D+CR+CON) restantes con un 5% y 4% para los dos últimos. Se destaca que el grupo de acciones 2 en adelante (GA2), es el único que cuenta con acogida entre las cinco tareas que conforman este momento, lo que demuestra que estos resultados de éxito en gran proporción se deben a la inclusión de acciones en el desarrollo de las tareas que así lo permitieron como se destaca en la Tabla 19 al considerarse en los tres grupos similares acciones.

A continuación, se presenta la Tabla 20 que permite reseñar el comparativo entre las Acciones sobre el soporte y los procedimientos caracterizados.

Las Acciones sobre el soporte que caracterizan el procedimiento PE en este momento, han sido identificadas entre todas las tareas como se reseña en la Tabla 20. Se encuentran particularmente en los GA 1,2 y 4, incluso en el grupo de otras acciones como el mayor de los procedimientos adoptado por los estudiantes al resolver las actividades propuestas. En el GA 3 y 5, la presencia de este procedimiento está ausente para el primero y en baja frecuencia para el segundo.

Tabla 18. Comparativo de las Acciones sobre el soporte y procedimiento en el M1

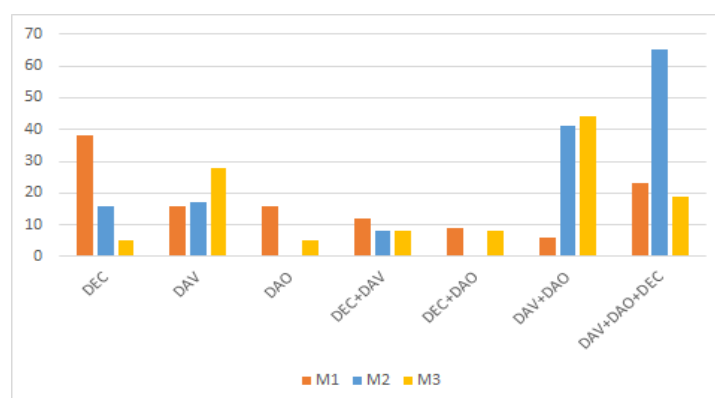


Fuente: este estudio. Elaboración propia.

La Tabla 20 indica que el PE cuenta con un 109 de U.A. que representa el 59% al estar relacionado con la categoría de acciones sobre el soporte en el M1. Es decir, que las acciones favorecidas por los estudiantes al resolver las tareas fueron las acertadas e incluidas en el diseño de las actividades de este momento.

En cuanto a las Dificultades y potencialidades identificadas en la investigación se encuentran las que a continuación se muestran en la Tabla 21, presentadas por los distintos momentos de la propuesta de enseñanza.

Tabla 19. Frecuencia de aparición de las Dificultades globales en la propuesta de enseñanza



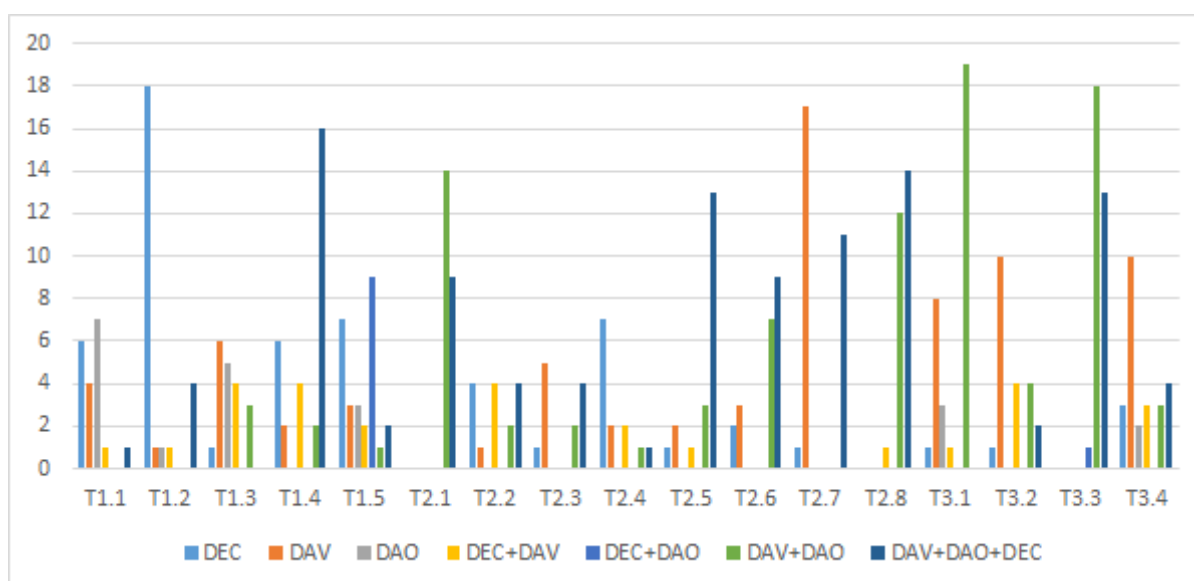
Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 21 se logra identificar que se destacan dos grupos de dificultades (DAV+DAO+DEC) en M1 21%, M2 61% y M3 18%; segundo grupo (DAV+DAO) en

M1 6%, M2 45%, M3 48% y DAV en M1 26%, M2 28%, M3 46%. El primer grupo se destaca en M2 con 61% es decir que en la mayoría de tareas presentaron simultáneamente estas tres dificultades, en cuanto al segundo grupo de dificultades se presentaron mayormente en M3 con un 48% de modo que las tareas de este momento presentaron dificultad frente a las dificultades visuales y dificultad frente a la comprensión de la R(p/a) que fue el objeto matemático tratado en este momento. Finalmente, la DAV también se muestra con mayor frecuencia en M3 de modo que las tareas propuestas en este momento generaron una mayor complejidad en la visualización.

A continuación, se presenta la Tabla 22, donde se muestra las dificultades en cada una de las tareas de la propuesta de enseñanza.

Tabla 20. Comparativo de Dificultades y tareas globales de la propuesta de enseñanza



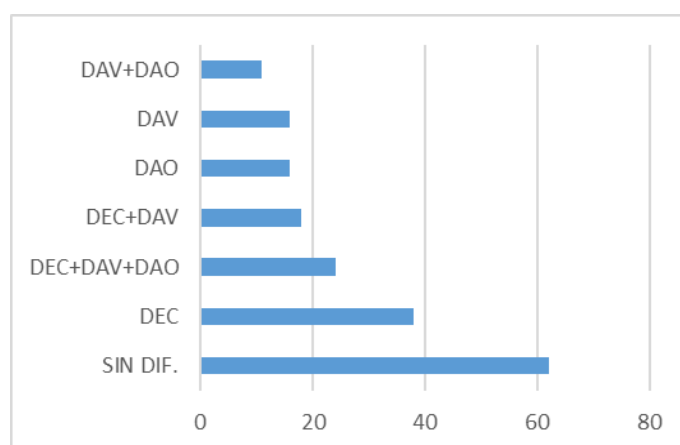
Fuente: Elaboración propia.

Con relación a lo que muestra la Tabla 22 es posible inferir que el grupo de dificultad (DAV+DAO+DEC) está presente en por lo menos en una tarea cada momento en T1.4, T2.5, T2.8 y T3.3 el porcentaje oscila entre 3% al 4% en comparación al resultado global de dificultades. El otro grupo de dificultad (DAV+DAO) presente en las tareas de los dos últimos momentos M2 y M3, T2.1, T2.8, T3.1, T3.3 con un porcentaje entre 4% y 5%; se presentan en las tareas iniciales donde se va a introducir el objeto matemático por

un lado la longitud de contorno y por otro la R(p/a). Por último, la dificultad DAV se presenta mayormente en T2.7 y T 3.2 con porcentajes de 4% y 2% respectivamente, estas tareas exigen transformaciones visuales para establecer la relación de orden entre las magnitudes propuestas.

En relación a las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M1, se caracterizan aquellas que por su alta recurrencia se presentaron al resolver las actividades propuestas, tal como se reseña en la Tabla 23.

Tabla 21. Frecuencia de aparición de las dificultades y potencialidades en el M1



Fuente: Elaboración propia.

En este momento las dificultades (p.62) DEC, DAO y DAV se combinaron y se mostraron individual como lo reseña la Tabla 23, destacándose seis grupos simultáneamente con un grupo que no indica dificultades en la solución con un 33% como el dato más alto de la tabla.

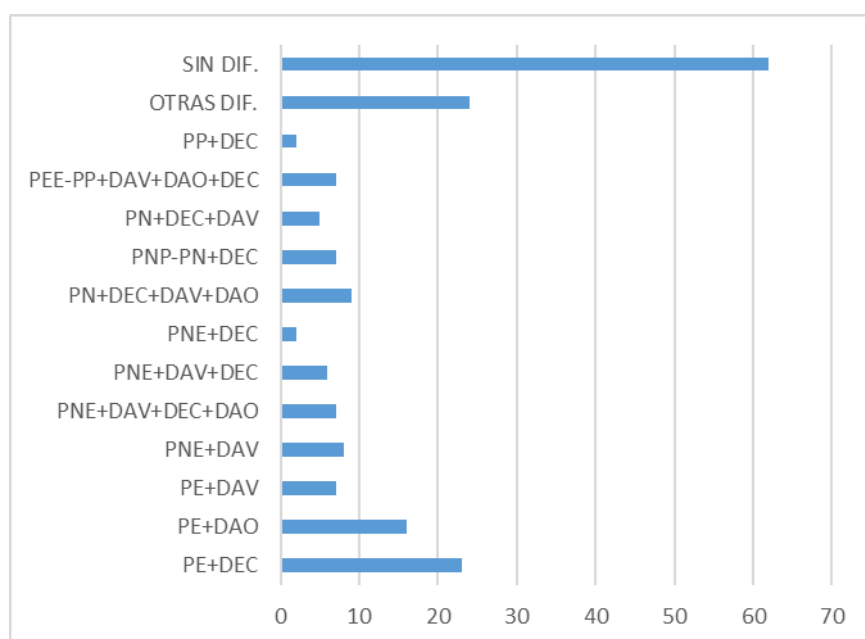
La dificultad que predomina al desarrollar las actividades es DEC con el 20% y en adelante el resto de agrupaciones de dificultades se encuentran entre el 6% y el 13% reportados.

Estos resultados indican que en este momento a pesar de presentarse dificultades que impidieron el éxito esperado al solucionar las tareas, es mayor el grupo sin dificultades

lo que permite considerar que los elementos de control y las operaciones incluidas al diseñar las actividades en su mayoría fueron efectivos.

A continuación, se presenta la Tabla 24 que permite reseñar el comparativo entre las Dificultades y los procedimientos caracterizados en este momento del estudio.

Tabla 22. Comparativo de dificultades y procedimientos en el M1



Fuente: este estudio. Elaboración propia.

En la Tabla 24 aparecen doce grupos de dificultades relacionadas con los cuatro procedimientos ya caracterizados, además de otras dificultades que por su variada combinación no fueron posible asociar con un 13% del total de tareas desarrolladas en el M1. Entre las dificultades de mayor recurrencia se encuentran PE+DEC y PE+DAO (en adelante GD1- y GD2) con un 12% y 9% respectivamente, seguido por el procedimiento PN que combina las tres dificultades (GD3) al resolver las tareas propuestas con un 5% como tercer puesto de la tabla.

Los tres primeros grupos resaltados anteriormente por su alto puntaje, se encuentran presentes en las tareas T1.1, T1.2, T1.3 y T1.5 específicamente para los grupos

de dificultad GD1 (4+17+1+1) y GD2 (7+1+5+3) en el orden como aparecen las tareas. Se destaca especialmente en el primer caso que a pesar de considerar los elementos de control y operaciones esperadas PE, la dificultad DEC se refleja en la T1.2 con mayor frecuencia (17 U.A) y en el segundo caso la dificultad DAO se evidencia en la T1.1 con mayor frecuencia (7 U.A) llegando finalmente al éxito.

En conclusión, la dificultad DEC, está relacionada con el procedimiento esperado con éxito PE, lo que indica que se presentó problemas en la comprensión del enunciado de la tarea al evidenciar confusión en el proceder, dando un sentido distinto a la figura inicial con respecto a la final en el despliegue de procedimientos. También se refleja esta dificultad cuando en el desarrollo de los procedimientos se describe o justifican de forma confusa los pasos a seguir, lo que resalta en su mayoría la incoherencia y la poca correspondencia entre lo escrito con relación a las acciones en el soporte 1 y 2 de papel, lo que genera ambigüedad al realizar el análisis y ser necesario recurrir a entrevistas semiestructuradas (ver Anexo 5) y videos.

De otra parte, la dificultad asociada al objeto matemático (DAO) relacionada con el procedimiento PE, evidencia el no cumplimiento de las ideas matemáticas puestas en juego, con respecto a la magnitud área, para este momento, en particular, al transformar una figura de partida en otra de llegada sin tener en cuenta conservar la cantidad de superficie de área entre las figuras.

La tarea T1.4 específicamente, lleva a determinar que el nivel de complejidad obstaculizo el papel de los elementos de control visual incluidos, especialmente al implementar otras operaciones no esperadas como la anamorfosis y la fórmula para calcular el área, al obviar la reconfiguración de las subfiguras que le permitiera determinar la cantidad de superficie de la subfigura sombreada, aunque cabe mencionar que hubo

aproximaciones en la resolución de la tarea de no ser por dificultades asociadas a las exigencias visuales, y al objeto matemático en este caso relacionadas con el área las cuales influyeron en el fracaso, de lo contrario probablemente se alcanzaría el éxito en la tarea.

Procedimiento esperado con error (PEE) y Procedimiento esperado con éxito parcial (PP):

En este momento los procedimientos en cuestión ocuparon la última posición en la Tabla 11, con respecto a la frecuencia de aparición de fracaso para este caso en particular, del mismo modo, se evidencia en la Tabla 12 que las tareas T1.1, T1.3, T1.4 y T1.5 obtuvieron un porcentaje de 3%, 16%, 14% y 19% respectivamente de acuerdo al orden de las tareas al comparar los procedimientos con las tareas del M1. Lo que indica que la T1.2 no registró dato, además de observarse mayor incidencia del procedimiento en las tareas T1.3 y T1.5 al considerar los elementos de control y operaciones esperadas de forma parcial, lo que provoca caer en errores al resolver las actividades.

Familias visuales:

En el paquete de tareas del M1, los procedimientos esperados con error PEE y esperado con éxito parcial PP, no tuvieron mucha aceptación dentro de las familias visuales aplicadas por los estudiantes al desarrollar las U.A.; el primero no obtuvo notoriedad entre las familias visuales de mayor acogida por los estudiantes al solucionar las tareas y el segundo ocupó el último puesto en la Tabla 16 con un porcentaje del 3% en el total de actividades del M1.

En cuanto al grupo de otras familias visuales en la misma Tabla, estos procedimientos contaron con una frecuencia de 14 U.A. que corresponde al 8% al relacionar las familias visuales y los procedimientos del M1, lo que indica que este proceder tuvo más alta incidencia en este grupo con respecto al anterior.

Las tareas T1.1 y T1.3 cuentan con 1 y 4 U.A. que reflejan un 5 % al presentar este proceder PEE-PP, lo que demuestra que a pesar de considerar la operación de reconfiguración simple en el caso de la primera tarea, al aplicar otra operación como el fraccionamiento sobre la subfigura en cuestión (triángulo) para el desarrollo de la tarea; lo que se logra es perder de vista la complementariedad de la figura inicial y caer en el error de reconfigurar la nueva subfigura pegando subfiguras sobre otras, descuidando conservar la cantidad de superficie.

Finalmente, estos dos procederes asumen los elementos de control de manera parcial y no total como es lo esperado, es decir, que los elementos de control visual fungen como obstáculos en la resolución de las actividades al promover otras formas inesperadas de solucionar.

Acciones sobre el soporte:

En la Tabla 19 es posible observar cómo es reiterativa la implementación de acciones que promueven la identificación de unidades figurales de 2D al incluir los trazos auxiliares, esto como consecuencia del propósito en las tareas del M1 en donde específicamente se pretende hallar el orden y la equivalencia de figuras según la cantidad de superficie de área.

Las acciones sobre el soporte de papel en el M1, indican que favorecen la movilización del objeto matemático con relación al área de superficies planas, al delegar en acciones como el calcado, la realización de trazos, recortes, dobleces, entre otras, la responsabilidad de garantizar la justificación al desarrollo de procedimientos que logren alcanzar el resultado esperado, tal como se refleja en la Tabla 20 con el procedimiento esperado con éxito (PE), el cual en su mayoría se destaca por su alta recurrencia entre los procedimientos utilizados para la resolución de las tareas por parte de los estudiantes.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M1 en relación con los procedimientos PEE-PP se encuentran rodeado por el conjunto de dificultades caracterizado en este estudio, lo que señala que fueron las causantes de no completar con éxito las tareas, con mayor incidencia se muestran en las T1.3 y T1.5 respectivamente, al no considerar en su totalidad los elementos de control visual planteados en las actividades, presentando en particular en estas tareas problemas al trazar la línea auxiliar de forma correcta y tener en cuenta la alineación de las figuras E y F especialmente, lo que al no ser bien trazado y posterior a ello bien recortado genera errores lo que imposibilita terminar con éxito la tarea.

Otras de las dificultades presentes, tiene que ver con relación a las dificultades asociadas a la estructura o lenguaje de la consigna (DEC) al no observarse en la revisión de las U.A. desarrolladas por los estudiantes la correspondencia necesaria para explicar los procesos utilizados para responder a la problemática. Es decir, en varias U.A. faltó describir ampliamente las acciones consideradas para lograr acceder en su totalidad a los elementos de control y a la respuesta esperada.

Procedimiento no esperado con éxito (PNE):

El procedimiento no esperado con éxito, por su parte, es el segundo más contemplado, siendo significativa la diferencia con el primero de los procedimientos: en este caso, lo evidencian menos de la quinta parte de los procedimientos de los estudiantes (el 18%) ver Tabla 11.

Al revisar el comparativo entre procedimientos y tareas del M1 es posible determinar que este proceder PNE aparece en las tareas T1.1, T1.2, T1.4 y T1.5 tal como

se observa en la Tabla 12, con una frecuencia (7, 5, 15 y 5) U.A. que la posiciona como el segundo proceder de mayor adopción y un porcentaje total de 18% en el M1.

Familias visuales:

Se resalta que el procedimiento no esperados con éxito PNE se encuentra en segundo puesto en la Tabla 16 como los procederes de mayor acogida al relacionarse con la familia visual que los estudiantes implementaron para solucionar las tareas del M1.

Las familias de visualización promovidas en la resolución de las tareas del M1 fueron cinco (ver Tabla 15 p.88), la cuarta familia visual especialmente (RS+RE+CUAD+RPS+PD) permite ejemplificar la razón por que algunas tareas se encuentran bajo esta caracterización a pesar de cumplir con la condición solicitada, y es por el uso de operaciones, elementos de control y funciones no establecidas para las tareas.

Es el caso de la T1.4 donde se observa en la familia visual la operación de cuadratura de la figura, deformando la figura dada, valiéndose de la reconfiguración parcial superficial (RPS) y el uso de la operación de intraconfiguración; conjunto de operaciones que no permitieron mostrar a los estudiantes que adoptaron este tipo de procedimiento, reconocer el camino esperado, pero que después de intentarlo llegan a conseguir responder, aunque el proceso no fuere el preparado. De acuerdo a lo anterior el proceder PNE ocupa la mayor recurrencia en la T1.4 con una frecuencia de 9 U.A. y el 24% con respecto al mismo proceder en el resto de la tarea.

En otras tareas T1.1, T1.2 y T1.5 la frecuencia (2, 3 y 1) del PNE es adoptada con bajo nivel, debido al fuerte impacto de los elementos de control visual, al permitir acceder a las operaciones esperadas; cabe mencionar que lo mismo no sucede con la T1.3 en donde no fue considerado este proceder PNE.

Acciones sobre el soporte:

En la Tabla 20 se observan las acciones sobre los soportes de papel, asociadas con los procedimientos PNE y PNP-PN con baja frecuencia a comparación del procedimiento PE. Es así, como estos procederes muestran la introducción de la superposición o comparación por disyunción de figuras (SD), trazos auxiliares para identificar unidades figurales de 2D (TA2D), recorte de subfiguras (CR) y la implementación de elementos de contraste (CON), lo que significa que a pesar de incluir las mismas acciones no necesariamente se generan iguales formas de proceder, por lo tanto, se determina que las aplicaciones de algunas acciones no determinan el procedimiento de una tarea. Lo que deja ver que las figuras se movilizaron de forma estática y se genera los procedimientos ya mencionados como resultados del análisis de las U.A. desarrollados por los estudiantes.

En otras palabras, el procedimiento no esperado con éxito (PNE) muestra que los estudiantes no solo identificaron las unidades de 2D, sino que también centraron la visualización en las unidades constituyentes de 1D. Pero a pesar que la visualización es promovida por distintos elementos de control, la visualización según Duval (2005), no es de naturaleza estática o icónica, debido a que en las U.A. se muestra la posibilidad de haber discriminado unidades de dimensión 1 y 2. Elementos que para el caso del procedimiento PN no resulta evidente.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M1 para PNE se pueden observar en la Tabla 24, al evidenciar en el cuarto lugar el registro del procedimiento asociado con la dificultad DAV (GD4) con 4%, que aunque de baja recurrencia indica que las tareas que fueron desarrolladas por este proceder, además de no considerar en su totalidad los elementos de control visual incluidos, presentaron problemas al no lograr identificar unidades figurales de 2D, lo que a su vez genera dificultades para

alcanzar el éxito y en el afán de llegar a la respuesta los estudiantes proceden de manera inesperada.

Procedimiento no esperado con error (PN) y Procedimiento no esperado con éxito parcial (PNP):

Estos procederes ocupan dentro de la frecuencia de aparición asociados al éxito y fracaso en el M1, el tercer puesto con una recurrencia de 26 U.A. y un 14% del total de las tareas. Al tiempo que se encuentran en las tareas de mayor complejidad como lo son T1.2, T1.4 y T1.5 con un registro (2, 17 y 7) U.A. y un porcentaje de (5%, 46% y 19%) respectivamente de acuerdo al orden de las actividades. Estos resultados señalan que los procedimientos no esperados, aunque no son mayoría frente al resto de procederes en las tareas del M1, dejan al descubierto interrogantes al ser desplegados para desarrollar las actividades en segundo y tercer lugar respectivamente.

Familias visuales:

En la Tabla 16 se destaca la relación de los procedimientos no esperados (PNP-PN) con las familias visuales por ocupar el tercer puesto de mayor registro con un porcentaje de 4% al solucionar las tareas propuestas del M1.

Las familias de visualización promovidas en la resolución de las tareas del M1 con relación al procedimiento PN, se evidencian en las T1.2, T1.4 y T1.5 en donde se pueden establecer que al pretender usar el elemento de iconismo para solucionar se cae en el error, pues confunde el propósito de la actividad involucrando objetos de fácil reconocimiento como zapatos, animales como es el caso de la T1.2 al denominar que las figuras no cumplen con la relación solicitada intentando aplicar la operación de cuadratura, al tener la intención de utilizar el procedimiento de réplica confundiendo el elemento de control de complementariedad de formas tal como se realizó en la T1.1, tarea en donde este

proceder no se reflejó; al igual que en la T1.3. Además, del uso indiscriminado de operaciones como la anamorfosis, la superposición de las figuras, buscando a través del calcado de las figuras hallar formas de ver; todo lo anterior, en la angustia de solucionar la problemática.

Acciones sobre el soporte:

Las acciones sobre los soportes en que se representan las figuras que fueron incluidas en las Tareas del M1 para los procedimientos PNP- PN se reflejaron en todas las tareas en donde, por ejemplo, a pesar de utilizar acciones (SD+TA2D+CR+CON+D) en adelante (GA2), que al ser aplicadas en las tareas (T1.4) generarían buenos argumentos para sustentar el resultado favorable de las tareas, obstaculizaron el desarrollo de la misma, arrojando errores en el procedimiento. Lo que significa que los elementos de control visual fueron ignorados o un obstáculo en la resolución de las tareas. La tarea en cuestión específicamente T1.4, los estudiantes en su mayoría utilizaron la subfigura sombreada, a la cual se le debía identificar la cantidad de superficie con respecto a la figura total, pero al mostrarse con líneas de grosor rayadas en su interior, generaba el fraccionamiento de la misma, y a su vez permitía visualizar dos triángulos rectos los cuales fácilmente al ser reconfigurados formaban un rectángulo, lo que posibilitó acercarse a la respuesta de la problemática, lo que sucede es que los estudiantes manifestaban no lograr transformar la figura en la inicial al haber hecho uso de este procedimiento, pues la subfigura sombreada de característica cóncava limitaba un poco el ejercicio de trazar líneas auxiliares (opción no muy obvia) para reconfigurar y el temor de los estudiantes por equivocarse los alejaba aún más de la respuesta.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M1 en el PN se pueden evidenciar en la Tabla 24 en el octavo lugar (GD8), en donde se

encuentran tres dificultades en conjunto dentro del procedimiento, como mayor representatividad en los procedimientos no esperados con el porcentaje más alto 5%, lo que permite establecer que la suma de las dificultades intervino para que se diera el despliegue de procederes no deseados en el M1.

4.1.4 Discusión de resultados M1

Este apartado presenta la comparación entre las formas de proceder esperadas por los investigadores y los elementos incluidos para su explicitación (análisis de predictivo) y el cómo la población participante procedió (análisis de resultados descriptivo). Su objeto es establecer el grado de asertividad de las ideas que se consideraron para guiar el diseño y aplicación de la propuesta de enseñanza considerada en la investigación.

Como se mencionó en el capítulo de metodología, tres ideas de diseño fueron contempladas: 1) vínculo entre el estudio de la magnitud (área y perímetro) y el desarrollo de la visualización (aprehensión operatoria y cambio dimensional de formas); 2) papel de los elementos de control en la enseñanza de la visualización; y 3) las figuras recortadas en papel favorecen la delimitación entre longitud y superficie.

Este apartado muestra información abundante a contemplar en la enseñanza de la relación perímetro-área y para el desarrollo de la visualización. No obstante, por cuestiones de espacio y tiempo el escrito se desarrolla en los aspectos, a los ojos de los investigadores, más relevantes y que los resultados expresan con mayor consistencia.

Teniendo en cuenta lo anterior, cada idea de diseño se divide en tres apartados: elementos de control visual, acciones sobre el soporte de papel y dificultades, el primero (primera idea de diseño) se divide en cuatro sub-apartados. Donde cada sub-apartado pretende responder, respectivamente, a cuestiones como ¿Qué papel desempeña el estudio

de las relaciones que suscitan el área y el perímetro en el desarrollo de la visualización? Para lograr lo anterior, se recuerda sintéticamente (en cada sub-apartado) cómo los investigadores intentaron promover la idea de diseño referenciada. Luego, se establece el grado de consecución de la idea en cuestión. Para lo cual se asume que los procedimientos con éxito (esperados y no esperados) constituyen indicadores para establecer si la idea de diseño fue asertiva o no. Esto, pues, corresponde al despliegue de PE donde consideran todas las operaciones contempladas en el diseño de la propuesta de enseñanza. Los procedimientos no esperados con éxito (PNE), se caracterizan por no acceder completamente a los procederes esperados sino de manera parcial, con relación específicamente a las operaciones, involucra nuevas operaciones que generan otras posibilidades y permite el acercamiento al éxito en la resolución de las tareas (ver análisis predictivo M1, M2 y M3) en adelante llamaremos a la unión de los porcentajes entre estos dos procederes PE y PNE como procedimientos con éxito (PX).

Es importante mencionar que en cada sub-apartado se consideran los tres momentos en que los investigadores dividieron la propuesta de enseñanza, a saber: a) área y aprehensión operatoria, b) perímetro y deconstrucción dimensional de formas, y c) articulación entre la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas, y el área y el perímetro.

Por consiguiente, en cada sub-apartado se describe, explica y justifica el porqué de la apreciación reseñada, entre otros aspectos, se alude a factores de visibilidad que promueven el desarrollo de operaciones para la resolución de las problemáticas planteadas como la reconfiguración simple, permitiendo reflejar el uso de transformaciones sobre las figuras conservando la misma cantidad de superficie, en el caso del M1.

4.1.5 Trabajo previo

A continuación, se presenta el análisis de los resultados del M1 y M2, teniendo en cuenta la relación entre cada una de las tareas del respectivo momento. Luego se presenta como las diferencias y similitudes entre las tareas tuvieron efecto en los aciertos o desaciertos en la resolución. También se tendrá en cuenta algunos aportes de investigaciones relacionadas con lo que moviliza cada uno de los momentos.

4.1.6 El área y el desarrollo de la aprehensión operatoria

Las tareas del primer momento de la propuesta de enseñanza consideran las relaciones de equivalencia y orden entre áreas como objetos de reflexión. Puntualmente, su resolución solicita evidenciar que dos figuras de forma distinta tienen la misma cantidad de área (T1.1 T1.2 y T1.3) o cantidades de área distintas (T1.4 y T1.5). El único recurso posible para resolver las tareas es la aplicación de la operación de reconfiguración simple, en caso de que la relación de orden y equivalencia sea el objeto de consideración. La operación de reconfiguración es quien, en mayor grado, determina la Aprehensión operatoria (es la más compleja de considerar y es esencial en tareas de demostración). Por otra parte, las tareas se organizaron de menor a mayor grado de complejidad cognitiva. Es decir, la exigencia visual (aplicar la operación de reconfiguración) es menor en la tarea previa y mayor en la que le precede. Por tanto, los estudiantes deben evidenciar mayores habilidades visuales al pasar (resolver con éxito) de una tarea a la siguiente.

Todo lo anterior, junto al hecho que los estudiantes al resolver las tareas no tenían experiencia previa en torno a la aplicación de la operación de reconfiguración, nos permite afirmar, por un lado, que si los estudiantes resuelven con éxito las tareas planteadas (procedimientos con éxito esperado y no esperado) entonces evidencian el desarrollo de

habilidades visuales asociadas a la aprehensión operatoria (desarrollo visual), y, por otro lado, que las tareas propuestas fueron promotoras del desarrollo visual reseñado.

Dos criterios consideraremos para evidenciar si hubo o no desarrollo de la aprehensión operatoria (procedemos de igual forma para el caso de la deconstrucción dimensional de formas y la articulación entre las dos formas de ver reseñadas). El primero, considera el porcentaje de tareas que muestran un PX (suma de los porcentajes de las tareas que en su resolución se caracterizan por explicitar un procedimiento de resolución PE o PNE). El segundo, centra su atención en el aumento, constancia o disminución de los procedimientos de éxito de una tarea a la siguiente.

Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos que hubo:

- **Desarrollo Óptimo de la Aprehensión operatoria (AO)**, si el porcentaje de éxito de las tareas es alto (superior al 75%) y este a) aumenta o b) permanece constante al pasar de una tarea a la siguiente. Esta decisión se asume, pues, si los estudiantes enfrentan tareas donde el grado de complejidad aumenta de una a la siguiente, entonces, ellos deben poner en acto, de una tarea a la siguiente, acciones visuales cada vez más elaboradas. Por tanto, el aumento en el porcentaje de éxito del grueso de estudiantes al pasar de una Tarea a la siguiente indica que ellos están venciendo las limitaciones que se le están colocando. En consecuencia, están mostrando mayores habilidades visuales para lograr el aumento en el éxito.
- **Desarrollo intermedio de la Aprehensión operatoria (AO)**, en casos donde a) el porcentaje de PX es superior al 60% y no aumenta ni permanece constante al pasar de una tarea a la siguiente o b) si el porcentaje PX es menor del 60% pero aumenta de una tarea a la siguiente. Lo anterior se considera, pues, cada una de las tareas propuestas tenía una complejidad ascendente y resolver una tarea, pero

no las siguientes, no implicaba que el estudiante no replicará o siguiera las instrucciones, sino que a pesar que aplicaba la reconfiguración simple como en las otras tareas no lo hacía de la manera esperada, sin embargo, se atrevía a realizar trazos y movimientos que al inicio de la resolución de las tareas no proponía.

- **Desarrollo limitado de la Aprehensión operatoria (AO)**, cuando el porcentaje de PX es inferior al 60% y este disminuye o permanece constante de una tarea a la siguiente. Esto se contempla ya que en las resoluciones de las tareas se observó limitaciones en la transformación de las figuras, es decir no se identificaban trazos o ideas generadas por las figuras propuestas.
- Con el objeto de determinar si la propuesta de enseñanza aplicada en la investigación promovió o no el desarrollo de la AO y establecer cómo se logró o por qué no se logró, se reseña en la Tabla 25 los porcentajes de PX alcanzados por los estudiantes en cada una de las Tareas que conforman el M1 de la propuesta. En la misma Tabla se diferencia para cada Tarea el valor que corresponde al PE y a PNE.

Tabla 23 Porcentaje de procedimientos PE y PNE que conforman el procedimiento con éxito PX

	PE	PNE	PX
T1.1	78	19	97
T1.2	81	13	94
T1.3	81	0	81
T1.4	3	40	43
T1.5	49	13	62

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados expuestos en la Tabla 25 evidencian que ninguna de las tareas promovió un desarrollo óptimo de la Aprehensión operatoria. Asimismo, que T1.1, T1.2, T1.3 y T1.5 favorecieron un desarrollo parcial de la AO, pues, el porcentaje de PX en las

tres tareas fue mayor que el 60%. En T1.3, adicionalmente se evidencia una disminución en el porcentaje de PX en relación a la tarea anterior. Finalmente, en T1.5 se evidencia un aumento en el porcentaje de éxito en relación a la anterior.

Son varios los aspectos de naturaleza visual que explican la diferencia entre el porcentaje de PX alcanzado en el desarrollo de T1.4 y el alcanzado en el resto de tareas (T1.1, T1.2, T1.3, T1.5): el tipo de operación aplicado, las partes donde se aplican dicha operación y los elementos de control introducidos. En T1.4 es necesario la reconfiguración simple y configuración, no hay un procedimiento definido y además presenta un desdoblamiento lineal. Con respecto al otro grupo de tareas que se componen del procedimiento directo y réplica y la operación es la reconfiguración simple.

En cuanto al primer aspecto, en T1.4 se precisa la aplicación compuesta de dos operaciones (configuración y reconfiguración simple), mientras que en el resto de tareas basta con aplicar una reconfiguración simple. En relación al segundo aspecto, en T1.4 la comparación que se precisa es entre dos sub-figuras de la figura de partida. Sobre estas dos partes se debe focalizar la atención y aplicar las operaciones de configuración y reconfiguración simple. En este caso, el contorno de la figura de partida no es transformado. Al contrario, en T1.1, T1.2, T1.3 y T1.5 la transformación recae en el contorno de la figura de partida. Esto mediante la acción de una reconfiguración simple.

Finalmente, en lo relacionado con el tercero de los aspectos visuales reseñados previamente, en T1.4 no existe alusión puntual y precisa al procedimiento como elemento de control. Si bien se alude a que la figura debe ser transformada a siguiente Figura G (“La muestra una parte sombreada. ¿Cuál es la cantidad de área representada por la parte sombreada? Explica qué transformaciones sufre la figura y cómo obtuviste la

respuesta”)¹¹, la acción reseñada no refiere explícitamente a las partes de las figuras que deben ser comparadas, en consecuencia, transformadas. En este orden de ideas, la acción referida puede constituir un elemento que desfavorece la visibilidad de las operaciones a aplicar y de los lugares donde hacerlo. Esto debido a que en las tareas previas se viene operando sobre la figura dada de tal forma que se produce una nueva figura con contorno global distinto e igual área. Entonces, si en T1.4, la tarea que sigue, se alude a la acción de transformar, bien podría pasar que los estudiantes focalizarán la atención en la globalidad de la figura dada, no en sus partes. Si proceden de esta manera, el resolver asertivamente la tarea es una cuestión imposible. Lo anterior nos lleva a afirmar que la referencia a la acción transformar no constituyó, en la mayoría de los casos, un elemento de control (procedimiento por referencia) que favorezca la aplicación de las acciones visuales en juego. Al contrario, tal designación reforzó un procedimiento por réplica. El cual entorpece el desarrollo adecuado de la actividad planteada.

No es el caso para el resto de tareas. En ellas, la composición de al menos dos tipos de procedimientos es una cuestión explícita y puntualmente reseñada. Por ejemplo, en T1.1, está presente los procedimientos por referencia y directo; y en T1.2, T1.3 y T1.5, los procedimientos directo y por réplica.

Por otro lado, pero en el mismo orden de ideas, la presencia de los elementos de control como el desdoblamiento lineal y el contraste, presentes únicamente en T1.4, funcionan como un elemento adicional que obstaculiza la adecuada resolución de la problemática planteada. El primero de los elementos de control, pues, hay un desdoblamiento lineal. Es decir que en una misma configuración hay subfiguras que

¹¹ Enunciado de T1.4 de M1 (Ver Anexo 1)

comparten lados. En cuanto al segundo elemento de control, pues, implica, central la atención en la parte más compleja donde las acciones para aplicar sobre las subfiguras son más difíciles de identificar.

La T1.4 es cognitivamente más compleja que las tareas anteriores, porque propone realizar una reconfiguración de dos subfiguras en una configuración y establecer una relación de orden entre las subfiguras. Se propuso la T1.4 con el fin que los estudiantes superarán la complejidad visual a partir de haber resuelto las anteriores tareas. Se consideró que la T1.5 era más compleja porque se debía no solo establecer la relación de orden de dos figuras, sino de varias figuras además de poder sacar una unidad figural 2D común a las 4 figuras. Sin embargo, la investigación evidenció que la T1.4 es más compleja que la T1.5, pues se comprueba esto con el porcentaje PX de cada tarea. Pues los estudiantes en su mayoría identificaron la unidad figural 2D común en todas las figuras, facilitando así establecer la relación de orden de todas las figuras.

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indican que:

- a. comparar entre sí sub-figuras de una figura y en el proceso aplicar operaciones de naturaleza distinta (reconfiguración simple y configuración) sobre unas y otras es una exigencia cognitivamente más alta que solicitar transformar una figura en otra mediante la aplicación de una reconfiguración simple.
- b. Si vamos a aplicar tareas que vayan de menor complejidad a mayor complejidad, es necesario tener en cuenta que existen factores asociados que facilitan o dificultan la visualización, según Padilla, (1992, citado por Marmolejo 2014) afirma que el reducido número de rotaciones y traslaciones facilita la reconfiguración, por tanto, es necesario que

las tareas que se propongan se organicen de acuerdo al número de trazos que deben realizarse. En cuanto al desdoblamiento lineal, es un obstáculo en relación a las operaciones que se deben aplicar, se considera que deben de proponerse tareas previas no solo de reconfiguración sino de configuración pues investigaciones como las de Duval (2005) afirman que los estudiantes privilegian una visualización estática, es decir que no es fácil la identificación de unidades figurales de 2D, cuando se presenta el desdoblamiento lineal.

c. Los resultados del estudio también indican la necesidad de incluir tareas intermedias entre el resto de tareas, pues, los porcentajes de PX siempre disminuyeron de una tarea a la siguiente. Son necesarias tareas con factores de visibilidad que destaquen, las características del contorno de la figura a reconfigurar (las partes en que se encuentra dividida la figura a reconfigurar deben ser desplazadas dentro de la figura o por el contrario salir de la figura) como lo señala Marmolejo, (2014). También se considera pertinente la solicitud explícita de la operación de reconfiguración (Marmolejo, vega y Galeano, 2017). Se considera que estas dos recomendaciones, mejoraría los porcentajes de PX pues la reconfiguración como se mencionan en algunas investigaciones, es una operación poco explorada y necesaria para el desarrollo de la aprehensión operatoria, menciona Marmolejo y Vega (2012) que el área es un campo propicio para el desarrollo de la visualización, por lo cual la reconfiguración como operación cognitiva debe estar presente en los procesos de aprendizaje de la visualización.

4.1.7 La intervención de las acciones sobre los soportes consideradas por los estudiantes en T1.4 las tareas (T1.1, T1.2, T1.3 Y T1.5) del M1.

Son varios los aspectos de naturaleza visual que explican la diferencia entre el porcentaje de PX alcanzado en el desarrollo de T1.4 y el alcanzado en el resto de tareas

(T1.1, T1.2, T1.3, T1.5) en cuanto a las acciones sobre el soporte en que se fueron representadas las figuras, son cuestiones que explican la diferencia entre T1.4 y el resto de tareas, las siguientes: el tipo de acciones aplicado, las partes donde se aplican dichas acciones y las acciones sobre el soporte introducidas.

En cuanto al primer aspecto, en la T1.4 no se precisa la inclusión de acciones como la superposición y disyunción sobre los soportes de papel, al tener en cuenta dos tipos de soportes, la ficha de trabajo donde se encuentra la consigna (soporte 1) y los recortes de las representaciones de las figuras (soporte 2) para favorecer la aplicación de las operaciones esperadas (configuración y reconfiguración simple) y solucionar la actividad problemática. Mientras que en el resto de tareas basta con superponer la figura de inicio con la de llegada para generar formas de ver que influyen en el proceder, para llegar al éxito de las tareas. Es decir, en la T1.4 se presenta una única figura, mientras en el resto de tareas se transforma la figura de partida con el referente de la figura de llegada para solucionar.

En relación al segundo aspecto, la T1.4 al caracterizarse por no incluir en su diseño factores de visibilidad, sino únicamente elementos de contraste, genera entre las posibles acciones con mayor demanda, la aplicación de dibujos, calcado y recorte en la figura inicial; a comparación del resto de actividades, en donde no solo se centra la atención en la figura de partida como sucede en esta tarea T1.4, sino en la figura de llegada como referente para solucionar las tareas T1.1 a T1.5. La inclusión de figuras sombreadas, engrosar las líneas de los segmentos, son algunos de los elementos de contraste que se encuentran en la T1.4, una de las acciones que con mayor demanda se realizó en esta tarea por los estudiantes fue el dibujo como la figura que representa el objeto o la acción ejecutada sobre la figura.

Finalmente, en lo relacionado con el tercero de los aspectos mencionados anteriormente, en la T1.4 para alcanzar el objetivo de la actividad de conocer la cantidad de área representada por la parte sombreada, se observa la aplicación del uso de fórmulas tradicionales, acción no esperada ni propuesta en el diseño de la tarea, y tampoco promovida en el resto de tareas implementadas.

La responsabilidad de las acciones sobre el soporte de las figuras se pueden ver reflejados en la resolución de las tareas, al implementar el trazo de líneas auxiliares sobre los soportes de las figuras y promocionar la aplicación de operaciones de reconfiguración simple como la operación de mayor incidencia en el primer paquete de tareas de la propuesta, y considerar el elemento de control visual de complementariedad de formas para las actividades T1.1 y T1.3; movilizand la identificación de unidades figurales 2D tal como una subfigura en cada actividad, para dar solución a la problemática y el trazo de dos líneas auxiliares para identificar dos subfiguras en el caso de la T1.2, para su transformación, lo que aumenta el grado de complejidad de una tarea a otra. Del mismo modo, acciones como los elementos de contraste e índice (color, flechas, letras) fueron incluidos en los procedimientos de los estudiantes con alta recurrencia permitiendo explicar y argumentar los procedimientos ejecutados favoreciendo el rendimiento positivo para la resolución de las tareas.

En otras acciones sobre el soporte como la superposición, se observó una alta demanda especialmente en las tareas T1.1 a T1.5 debido a las figuras de partida y llegada que se proponen en estas actividades, al identificar el reconocimiento de las unidades figurales de 1D y 2D, logrando aplicar las operaciones esperadas. De igual forma, la acción de calcado de las figuras como soporte, en particular en la T1.4, fueron acciones realizadas por los estudiantes, con la intención de no manipular los soportes dados por los investigadores, lo cual generó el agrandamiento y achicamiento de la figura inicial

(anamorfosis), cayendo en un obstáculo esta acción y no propiamente en una forma esperada de solucionar la problemática.

Las acciones sobre el soporte influyeron de manera negativa cuando se observa que los elementos de control visual obstaculizan la forma de ver, al aplicar las operaciones no consideradas para la resolución, y no lograr promover las transformaciones esperadas, lo que a su vez genera que la T1.4 se caracterice con un desarrollo de la AO limitado.

En cuanto a las acciones que aparecen en la tarea T1.4 (calcado, dibujo y fórmulas) son entonces la diferencia entre el resto de las tareas T1.1, T1.2, T1.3 T1.5 (trazos auxiliares 1D y 2D y superposición) planteadas en la propuesta de enseñanza, donde los resultados de la investigación ponen en evidencia que este tipo de acciones pueden llegar a explicar por qué esa diferencia entre los porcentajes arrojados en el estudio, específicamente con relación a la influencia de las acciones y el bajo rendimiento en la T1.4.

Se consideraron también en tareas como la T1.4 acciones sobre el soporte como elementos de control de contraste al engrosar algunas líneas de la figura y sombrear una subfigura de la figura inicial para contribuir en la aplicación de una reconfiguración y posterior configuración de la figura, para determinar la cantidad de superficie en particular de la subfigura en cuestión. Pero, lo que sucedió específicamente es que los estudiantes no lograron realizar el salto que se esperaba al resolver las primeras tareas e incursionar con la propuesta de esta cuarta actividad (T1.4), lo que generó recurrir a otras opciones como considerar tratamientos aritméticos como la sustitución de valores en fórmulas, que conllevan a que se ignore la verdadera naturaleza del concepto de área (Dickson et al 1991; citado por MEN, 1998).

Es así como, acciones sobre el soporte como superponer las figuras recortadas (soportes) fueron acciones de mayor uso por los estudiantes, para comparar y determinar el orden o equivalencia de la cantidad de superficie con el fin de dar cumplimiento al objetivo del M1, especialmente en las tareas T1.1, T1.2, T1.3, T1.5, lo cual no fue tan frecuente en el caso de la disyunción de las figuras. De igual forma, importante a destacar en el proceso de resolución de los estudiantes tiene que ver con el uso de contraste/ índice donde las distintas representaciones que los estudiantes utilizan son acompañadas de letras, flechas y en algunos casos colores marcados sobre las líneas de contorno de las figuras para comunicar su procedimiento.

Específicamente en las tareas T1.1, T1.2, T1.3, T1.5, las acciones sobre el soporte de papel consideradas por los estudiantes intervinieron en el paquete de actividades propuestas del M1 en general como la asociación de acciones a las cuestiones cognitivas de las operaciones y a las cuestiones cognitivas de control de los elementos de control, donde definitivamente, cuando se aplica la operación de reconfiguración simple y se considera elementos de control visual por procedimiento directo y factores de visibilidad de complementariedad de formas favorece el desarrollo de la AO.

Es por tal motivo que se puede concluir que las acciones visuales que se consideraron en la investigación, para el caso del primer paquete de tareas del M1, ninguna promovió un desarrollo óptimo para la promoción de la AO. Así mismo, las tareas T1.1, T1.2, T1.3, T1.5, favorecieron un desarrollo parcial mientras que la T1.4 se caracterizó por un desarrollo limitado.

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indican que:

- a. Es claro que acciones como realizar trazos auxiliares 1D y 2D y la superposición entre las figuras de partida y llegada, favorecen la aplicación de la reconfiguración simple, mientras que las acciones como el calcado, dibujo y fórmulas; obstaculizan la aplicación de configurar y reconfigurar una figura, tal como es caso de la tarea T1.4.
- b. Es probable que los elementos de control en donde se extrae perceptivamente los datos de la representación dada, hayan sido articulados a las acciones como el uso de fórmulas, consideradas por los estudiantes y esto explique la diferencia entre las posibilidades de desarrollo visual que permitió la T1.4 en relación a las tareas restantes. Es decir, al asociar acciones, con operaciones, con elementos de control; en este caso en particular, se tiene la reconfiguración simple y se introducen elementos de control donde la visualización es inducida a través de procedimientos previos y se evidencia en lengua natural las acciones a aplicar, donde los factores de visibilidad están ausentes; parece que promueve la implementación de fórmulas tradicionales, el calcado de figuras que distorsionan el área de la figura de partida y esas acciones no permiten el desarrollo de la visualización.

Eso quiere decir, que la aplicación de esas acciones en tareas donde se exige encontrar la cantidad de área representada por la parte sombreada de una figura, tal como lo sugiere (Padilla, 1992) y al considerar como elemento de control la consigna a través de la expresión: “explica qué transformaciones sufre la figura” se espera que sea suficiente, para acceder al éxito.

Esto explica que es pertinente tener en cuenta en próximas aplicaciones, incluir tareas previas que consoliden la propuesta de la tarea T1.4, puesto que no fue

suficiente lo planteado para vencer las diferencias que caracterizan esta tarea en relación a las que venían aplicándose, donde se privilegien figuras sombreadas. De allí, por qué los bajos resultados o los obstáculos en el intento de promover el desarrollo de la AO.

- c. A futuros diseñadores se les recomienda que cuando propongan tareas donde se incluyan operaciones de configuración y reconfiguración y se introduzcan elementos de control guiados por la consigna con ausencia de factores de visibilidad; acciones como el uso de fórmulas y el calcado de las figuras pueden generar otro tipo de operaciones inesperadas que pueden obstaculizan este tipo de trabajo visual y eso explicaría porque esas tareas las ubicamos como limitantes para el desarrollo de la visualización.

4.1.8 La intervención de las dificultades consideradas por los estudiantes en T1.4 las tareas (T1.1, T1.2, T1.3 Y T1.5) de M1.

Son varios los aspectos que explican el PX alcanzado en el desarrollo de T1.4 y en el resto de tareas, a continuación, se describe cómo intervinieron las dificultades únicamente encontradas en la T1.4 en comparación al otro grupo de tareas T1.1, T1.2, T1.3 y T1.5. Se encuentran tres grupos de dificultades DAV, DAV+DAO, DEC+DAV+DAO para T1.4. Seguidamente hablaremos de cada una de ellas, en general DAV fue una dificultad común a los dos grupos, por consiguiente, solo se expone los dos últimos grupos.

En cuanto al primer grupo de dificultad DAV+DAO que se identificaron en T1.4, se puede decir que los estudiantes no lograron discriminar las transformaciones adecuadas y económicas en la resolución del problema, es decir que a pesar de proponer una solución

no fue la más óptima, debido a la cantidad de trazos que realizaron sobre la figura, además al establecer las relación de orden de la magnitud área, no fue determinada correctamente, evidenciándose algunos errores en la relación de orden.

El segundo grupo de dificultad DEC+DAV+DAO además de tener las características del grupo anterior cuenta con la dificultad DEC, esta dificultad está relacionada con el lenguaje con el cual describe el desarrollo de la tarea, sin embargo, este lenguaje no corresponde con el proceso que el estudiante ha llevado a cabo en la tarea.

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indican que:

- a. Configurar una figura conservando las características del contorno y además establecer una relación de orden entre dos subfiguras, es una actividad cognitiva que puede generar DAV, pues es necesario generar trazos pertinentes, potentes y económicos para el desarrollo de la tareas (Marmolejo, 2014), pues algunas investigaciones han informado que para muchos estudiantes, “ver” en una figura las relaciones o propiedades que corresponden a la resolución esperada no es fácil (Marmolejo y Vega, 2012)
- b. En cuanto la identificación de DEC es posible mostrar cómo lo dicen algunas investigaciones que las figuras por sí mismas no logran develar sus propiedades y relaciones (Duval, 2004a), por ello es importante que las tareas de visualización vayan acompañadas de la actividad discursiva, se considera necesario que el desarrollo de la actividad geométrica sea con “tratamientos figúrales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva” (Duval, 2004a p. 155).

4.2 Consideraciones para la síntesis de datos

Esta consideración tiene en cuenta los tipos de visualización promovidos en las tareas de la propuesta de enseñanza y tiene como propósito aportar en la respuesta a la cuestión: ¿Cuáles estrategias usaron los estudiantes para el desarrollo de las tareas? se construyó una tabla para analizar los datos. Cada entrada se compone de una unidad de análisis. Se establecieron cuatro categorías: operaciones visuales, elementos generadores de control visual, acciones sobre el soporte, dificultades y potencialidades. La primera estaba dividida en nueve subcategorías Reconfiguración simple (RS), Cambio Dimensional (CD), Linealización (L), Deslinealización (DL), Reconfiguración lineal (RL), Anamorfosis (Ana), Cuadratura (Cuad), Reconfiguración Parcial lineal (RPL), Reconfiguración parcial superficial (RPS). La segunda dividida en cuatro Iconismo compuesto (IC), Elemento de control visual por procedimiento directo (PD), Elemento de control visual por procedimiento de réplica (PR), Elemento de control visual discursivo (ED). La tercera dividida en cinco superposición/Disyunción (SD), Calcar/Recortar (CR), trazos auxiliares (TA), Dibujos (D) y contraste/Índice (CON) y por último la cuarta categoría dividida en tres dificultades: en la consigna (estructura o lenguaje) de la tarea propuesta (DEC), dificultades asociadas a las exigencias visuales solicitadas (DAV), dificultades asociadas a la R(p/a), al área y al perímetro (DAO) (ver anexo 2).

En este sentido fue posible detectar en las 629 tareas 67 familias visuales, 60 acciones sobre el soporte de papel, debido al considerado número de combinaciones se reportaron las familias visuales y las acciones sobre el soporte de papel con mayor frecuencia quedando 15 familias visuales y 15 acciones sobre el soporte de papel reportadas. El proceso de la síntesis de datos se presenta de manera esquemática en la Tabla 7:

Tabla 24 Síntesis de datos

Operaciones Visuales Reconfiguración simple (RS), Reconfiguración por Ensamblaje (RE), Cambio Dimensional (CD), Linealización (L), Deslinealización (DL), Reconfiguración lineal (RL), Anamorfosis (Ana), Cuadratura (Cuad), Reconfiguración Parcial lineal (RPL), Reconfiguración parcial superficial (RPS)	Elementos generadores de control Iconismo compuesto (IC), Elemento de control visual por procedimiento directo (PD), Elemento de control visual por procedimiento de réplica (PR), Elemento de control visual discursivo (ED)	Acciones sobre el soporte Superposición/Disyunción (SD), Calcar/Recortar (CR), trazos auxiliares (TA), Dibujos (D) y contraste/Índice (CON)	Dificultades y potencialidades Dificultades: en la consigna (estructura o lenguaje) de la tarea propuesta (DEC), dificultades asociadas a las exigencias visuales solicitadas (DAV), dificultades asociadas a la R(p/a), al área y al perímetro (DAO)
629 unidades de análisis	Acciones sobre el soporte	Dificultades y potencialidades	
Estructuras de control visual (familias visuales)			
RS+IC	SD+TA2D+CON+CR	DAV+DAO	
RS+PD+IC	SD+TA2D+CON+CR+D	DAV	
RS+PR	TA2D+CR+CON+D	DAO	
RS+RE+CUAD+RPS+PD	SD+TA2D+CON+D	DEC+DAV	
CD+L+RPL+IC	TA2D+CR+CON	DEC+DAV+DAO	
RL+L+CD+RPL+PR	TA1D+SD+CON+D	DEC	
RL+L+CD+RPL+DISC	TA1D+SD+CON		
DL+CD+RPL+PD	SD+TA2D+TA1D+CON		
DL+RPL+RL+CD+PD	SD+TA2D+TA1D+CON+D		
L+CD+PD	SD+TA2D+TA1D+CON+D+CR		
L+DL+RPL+RL+DISC	SD+TA2D+TA1D+CON+CR		
RD+L+RL+CUAD+RPS+PD	SDTA1D+TA2D+CR+CON		
L+RL+RS+CD+RPS+PR	SD+TA1D+TA2D+CR		
RS+L+RL+CD+PD	SD+TA1D+TA2D+CR+CON+D		
L+RL+CD+PD	SD+TA1D+TA2D+CON+D		

Primera consideración de síntesis de datos: familias visuales y acciones sobre el soporte de papel

A la unión de las familias visuales y acciones se les nombró desarrollo visual debido a que se compone de las distintas operaciones cognitivas y representaciones que los estudiantes usaron para resolver las tareas propuestas. Debido al considerado número de familias visuales y acciones, se eligieron las de mayor frecuencia y luego se agruparon en tres grandes grupos teniendo en cuenta la naturaleza de las operaciones cognitivas, a continuación, se definen.

Desarrollo visual bidimensional (DVB): Está conformado por cuatro familias visuales determinadas por la reconfiguración simple, reconfiguración parcial superficial y tres elementos de control: iconismo compuesto, procedimiento directo y procedimiento por réplica. Las representaciones para este desarrollo visual se componen de trazos auxiliares que resaltan unidades figuralas de dos dimensiones, recortes, comparación por superposición, dibujos y flechas.

Desarrollo visual unidimensional (DVU): Está conformado por dos grupos de acciones y un total de seis familias visuales determinadas por operaciones cognitivas de naturaleza unidimensional: reconfiguración lineal, linealización, deslinealización, reconfiguración parcial lineal y cambio dimensional, y cuatro elementos de control: iconismo compuesto, procedimiento directo y procedimiento réplica. Las representaciones para este tipo de desarrollo visual son trazos auxiliares que resaltan unidades figuralas de una dimensión, disyunción, algunas flechas y dibujos.

Desarrollo visual total (DVT): Se compone por cinco familias visuales y seis combinaciones de acciones sobre el soporte de papel. Este tipo de desarrollo visual está compuesto por la articulación simultánea de operaciones de naturaleza bidimensional y

unidimensional entre las cuales se destacan: reconfiguración simple, linealización, delinealización, reconfiguración lineal, cambio dimensional. Presenta los elementos de control procedimiento directo y por réplica. Las representaciones usadas son trazos auxiliares de 1 y 2 dimensiones, comparación por disyunción y superposición, dibujos y algunos elementos de contraste.

Según la forma como se agruparon los desarrollos visuales es posible dar respuesta a la cuestión anteriormente mencionada. Así, los tres desarrollos visuales definidos anteriormente se agruparon en tres categorías según el grado de complejidad introducido; de mayor a menor grado de complejidad visual son:

- **Máximo (MÁX):** las figuras desempeñan un desarrollo visual total.
- **Intermedio compuesto (INC):** Este tipo de tareas presenta el desempeño de las figuras con un desarrollo visual unidimensional.
- **Intermedio (INT):** las figuras promueven un desarrollo visual bidimensional.

Para la enseñanza de la visualización y teniendo en cuenta a Duval (2004a, 2004b), se deben considerar dos formas de discernir información en las figuras geométricas: la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de las formas. Estas investigaciones muestran que para el desarrollo de la aprehensión operatoria es necesario el diseño de tareas donde el proceso de resolución no se exija aplicar cambios dimensionales. En relación a la deconstrucción dimensional de las formas, Duval (2004b) expone que no basta con cambios dimensionales en la figura propuesta. El desarrollo de la deconstrucción dimensional de las formas exige, aplicación de operaciones sobre las unidades de dimensión 1 que constituyen la figura.

En consecuencia, las tareas de la propuesta de enseñanza promueven el desarrollo visual total, bidimensional y unidimensional. De manera que las posibilidades de reflexionar sobre la aprehensión operatoria serán por medio de tareas que induzcan un DVB. En cuanto a las tareas que movilicen DVU determinarán las opciones de enseñanza de la deconstrucción dimensional de las formas, y las tareas que promuevan DVT caracterizan la enseñanza de la articulación de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de las formas.

V. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN MOMENTO 2

El presente apartado muestra los datos recogidos en la propuesta de enseñanza para su comprensión. En la primera parte se describe y caracteriza el conjunto de tareas considerada en la investigación. en la segunda parte, se centra la atención en el tratamiento de los datos, teniendo en cuenta tres aspectos importantes: análisis de las tareas (de carácter predictivo), análisis de resultados (de carácter descriptivo) y contraste (discusión de resultados).

5.1 Análisis de resultados M2

5.1.1. Análisis predictivo de M2

En el Momento 2 (Tareas 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8), por su parte, considera el desarrollo de la prehensión discursiva, particularmente, lo relacionado a la aplicación de cambios dimensionales en la forma de ver una figura bidimensional; y matemáticamente, la cuestión a asumir es el perímetro como magnitud (relaciones de orden y equivalencia entre figuras según sus perímetros, (ver Anexo 1).

A continuación, se desarrolla el análisis de resultados del conjunto de las tareas del M2, orientado al estudio del perímetro (longitud de contorno) junto con las distintas relaciones de orden y equivalencia que subyacen. Este M2 cuenta con ocho tareas que se divide en tres grupos según el tipo de operación que se tiene en cuenta. Las tareas T2.1, T2.2, T2.3 están diseñadas con el fin del uso de la operación de linealización para el desarrollo de la tarea; las tareas T2.4, T2.5 y T2.6 se enfocan en la operación de deslinealización; por último, las tareas T2.7 y T2.8 comprenden tareas donde es necesario el uso de la operación de linealización y deslinealización; en todas las tareas es necesario el cambio dimensional.

La siguiente Tabla 26 tiene como fin mostrar de una manera esquemática la operación visual y los elementos de control incluidos en el diseño de las tareas.

Tabla 25. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento de la longitud de contorno de las tareas propuestas M2

TAREA	OPERACIÓN VISUAL A PROMOVER	ELEMENTOS DE CONTROL INCLUIDOS
T2.1	Linealización Cambio dimensional	- Iconismo (contexto de la pregunta) - Procedimiento (directo) existe una figura de partida y una figura de llegada. - Visibilidad (elementos de contraste: grosor del contorno de la figura)
T2.2	Linealización Cambio dimensional	- Visibilidad (elementos de contraste: grosor del contorno de la figura, grado de inclinación de la figura, paralelismo entre lados) - Procedimiento por réplica - Contenido (def. longitud de contorno, relación de orden y equivalencia de longitud de contorno)
T2.3	Linealización Cambio dimensional	- Procedimiento por réplica - Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno)
T2.4	Deslinealización Cambio dimensional	- Procedimiento directo - Visibilidad (factores de visibilidad paralelismo entre dos lados, grosor en los lados de una figura)
T2.5	Deslinealización Cambio dimensional	- Procedimiento directo - Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno) - Visibilidad (elementos de contraste grosor en el contorno de la línea, factor de visibilidad: inclinación en la línea)
T2.6	Deslinealización Cambio dimensional	- Procedimiento directo y réplica - Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno)
T2.7	Linealización Cambio dimensional	- Procedimiento directo - Visibilidad (elementos de contraste: grosor de los lados de la figura) - Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno)
T2.8	Linealización Deslinealización Cambio dimensional	- Procedimiento por réplica - Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno)

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan los procedimientos esperados y efectos de la inclusión de los elementos de control visual al resolver las tareas de cada momento de la propuesta de enseñanza.

Tarea 2.1

Para resolver la tarea es necesario el cambio dimensional de 2D a 1D fijando la atención en cada uno de los lados que compone la figura inicial para operar rotaciones y/o traslaciones sobre cada uno de estos lados (linealización) y de esta manera determinar la figura final, teniendo en cuenta la equivalencia entre las longitudes de contorno de la figura inicial y final.

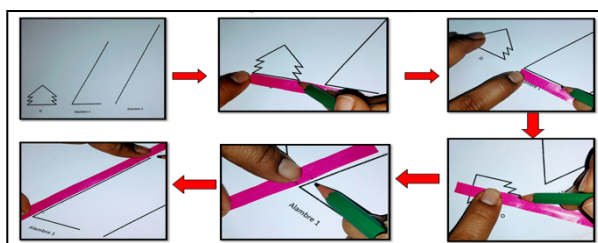


Ilustración 9. Flujo Visual T2.2 del M2

Con el fin de suscitar las operaciones de cambio dimensional y linealización, se tuvieron en cuenta los elementos de control: Iconismo, debido al contexto de la pregunta pues se asocia el alambre como el material de uso para la realización de la figura; procedimiento (directo) dado que se plantea una figura inicial y final; por último la visibilidad (elementos de contraste) debido al fondo blanco y grosor de las figuras; además de la posición en que cada figura presentada pues todas se presentan a igual altura.

En consecuencia, según el elemento de control iconismo se espera que el estudiante asocie la característica moldeable del alambre con los distintos movimientos (rotación o traslación) que puede realizar con cada uno de los lados de la figura inicial y de esta manera puede Linealizar la figura inicial. Con relación a los elementos de control Procedimiento (directo) y visibilidad (elementos de contraste) guía a identificar de manera inmediata que la Figura L (figura inicial) tiene igual longitud de contorno que el Alambre 1, por la posición en que se presentan, es decir una seguida de la otra, además, que la parte inferior de la figura inicial es de igual longitud de contorno al lado inferior del Alambre 1.

Tarea 2.2

Para la resolución de la tarea es necesario realizar un cambio dimensional de 2D a 1D para relacionar de esta manera la figura inicial con una linealización y poder determinar la equivalencia de la longitud de contorno de las figuras.

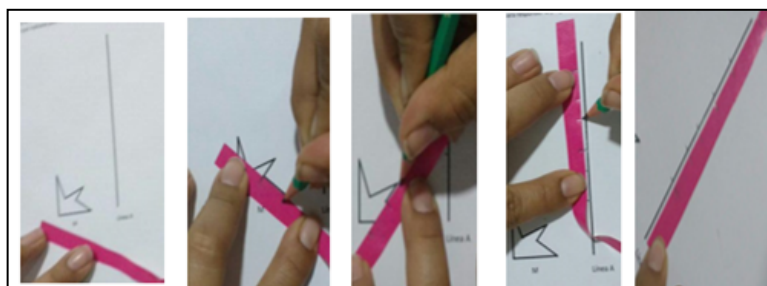


Ilustración 10. Flujo Visual T2.2 del M2

Los elementos de control incluidos en el diseño de la tarea son la visibilidad (elementos de contraste) fondo blanco y grosor de los lados de la figura, ángulos con respecto a la posición de la figura inicial y final; el procedimiento por réplica teniendo en cuenta el procedimiento de la tarea anterior; finalmente el contenido debido a que la tarea involucra directamente algunos conceptos relacionados con la longitud de contorno y la relación de orden y equivalencia.

Teniendo en cuenta que la visibilidad fue un elemento de control incluido en el diseño de las tareas, se pretende fijar la atención en el lado paralelo al segmento de línea (figura final) y de esta manera linealizar la figura inicial, procediendo de igual manera que T2.1. Puesto que la tarea expresa directamente los términos: longitud de contorno, mayor que y menor que; hace referencia explícita del contenido a tratar.

Tarea 2.3

Para la resolución de esta tarea, es necesario tener en cuenta las longitudes de contorno de las anteriores figuras iniciales presentadas en T2.1 y T2.2, debido a que debe compararlas para poder responder la afirmación verdadera, es así como realiza la

linealización de cada una de las figuras y las líneas que corresponden a los respectivos contornos de las figuras, luego procede a comparar la longitud de contorno.

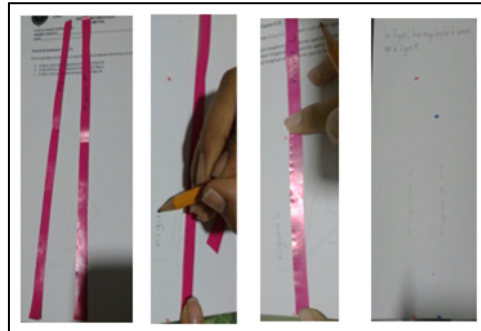


Ilustración 11. Flujo Visual T2.3 del M2

Los elementos de control tenidos en cuenta para el diseño de esta tarea solo fueron dos el procedimiento por réplica y el contenido. Debido a que se usaron figuras planteadas en las tareas anteriores de modo que no se propuso nuevas figuras.

El procedimiento por réplica y el contenido fueron los elementos de control, es necesario replicar como procedimiento la operación de la linealización en cada una de las figuras para poder proceder con la comparación de la longitud de contorno y explícitamente la tarea introduce el contenido a tratar en la resolución de la tarea.

Tarea 2.4

Para la resolución de esta tarea es necesario el cambio dimensional de 2D a 1D y la deslinealización de la figura, es decir, fijar la visualización en el segmento de línea y por medio de rotaciones sobre el segmento construir la figura final solicitada.

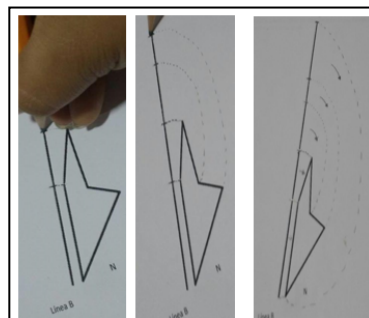


Ilustración 12. Flujo Visual T2.4 del M2

Los elementos de control incluidos en el diseño de esta tarea es el procedimiento directo y la visibilidad (factores de visibilidad) pues se presenta una figura de fondo blanco y se resalta el grosor de su contorno además el segmento de línea (figura inicial) es paralela con un lado de la figura final.

La tarea presenta una figura inicial (segmento de línea B) y una figura final (Figura N), por tanto, se debe centrar su visualización solamente en las figuras presentadas, siendo así un procedimiento directo, además el paralelismo entre el segmento de línea y un lado de la figura centra la atención en el segmento de línea y de este modo se van dividiendo segmentos que se van rotando hasta formar la figura final.

Tarea 2.5

Para la resolución de esta tarea es necesario un cambio dimensional de 1D a 2D, y de este modo deslinealizar el segmento de línea C, proponiendo a partir de este los cuatro segmentos que serán los lados de la figura final solicitada.

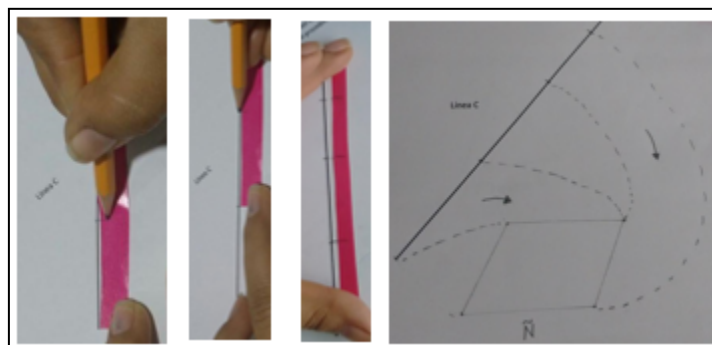


Ilustración 13 Flujo Visual T2.5 del M2

Los elementos de control incluidos en el diseño de esta tarea son el procedimiento directo, hay una figura inicial (segmento de línea C) y aunque no se muestra la figura final en el enunciado se caracteriza, debe ser de cuatro lados y de igual longitud de contorno que la figura inicial. El enunciado introduce de manera explícita el contenido a desarrollar en la tarea en cuanto a la visibilidad se resalta el grosor del segmento de línea C.

Es necesario proponer una figura de cuatro lados que cumplan las condiciones dadas en el enunciado de la tarea, de este modo los elementos de control de procedimiento directo y contenido guían la visualización; en cuanto a la visibilidad de la figura inicial el ángulo de inclinación es agudo de modo que no limita la visualización con respecto a la figura de cuatro lados que se debe proponer.

Tarea 2.6

Para resolver esta tarea el estudiante debe tener presente las tareas previas debido a que debe proponer una nueva figura comparando las longitudes de contorno, de modo que debe acudir al cambio dimensional de 1D a 2D y deslinealizar para proponer la figura.

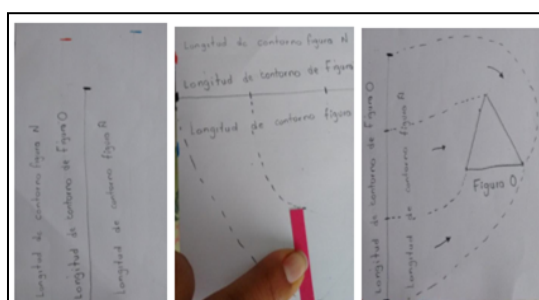


Ilustración 14. Flujo Visual T2.6 del M2

Los elementos de control incluidos es el procedimiento directo y por réplica, debido a que en el enunciado se explicitan las indicaciones que orienta la manera de proceder en la tarea, además es necesario usar procedimientos aprendidos en las otras tareas. La tarea no presenta figuras nuevas, es decir usa figuras de tareas anteriores y propone las características de la figura final a partir de explicitar el contenido a tener en cuenta en la tarea.

En esta tarea el enunciado es quien guía la visualización del desarrollo de la tarea siendo los elementos de control procedimiento (directo y réplica) y contenido, determinantes para el desarrollo visual de la tarea.

Tarea 2.7

Para el desarrollo de esta tarea es necesario un cambio de dimensional de 2D a 1D, con el fin de linealizar los contornos de las figuras propuestas y de este modo comparar de manera visual las líneas de los contornos y proceder a ordenarlas de mayor a menor.

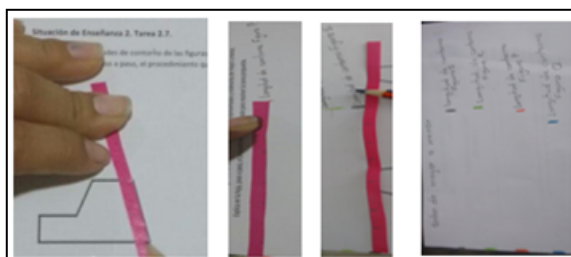


Ilustración 15 .Flujo Visual T2.7 del M2

Los elementos de control en esta tarea fueron tres: el procedimiento por réplica debido a que usar lo aprendido a lo largo de las tareas en particular el cambio dimensional y la linealización de las figuras; el contenido es un elemento de control explícito en el enunciado de la tarea debido a que enuncia los conceptos a trabajar en el desarrollo de la tarea y por último la visibilidad porque el fondo blanco de las figuras resalta el grosor del contorno de la figura.

Con relación a la visibilidad se propusieron figuras cóncavas, en particular las Figuras P y Q fueron figuras que se diferenciaban porque la Figura Q tiene un lado más que la Figura P, esto con la intención de familiarizar las relaciones que se pueden establecer entre el área y el perímetro en el M3.

Tarea 2.8

Para el desarrollo de esta tarea es necesario la linealización realizada en T2.7 de las Figuras P y Q; para proponer una figura con una longitud de contorno mayor que la longitud de contorno de la Figura Q y menor que la longitud de contorno de la Figura P, por tanto, el cambio dimensional que debe aplicar es de 1D a 2D.

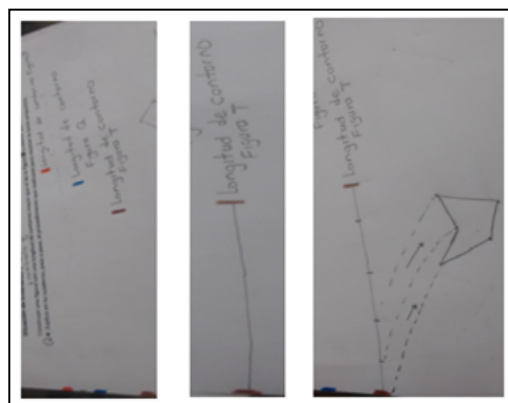


Ilustración 16. Flujo Visual T2.8 del M2

Los elementos de control utilizados en esta tarea es el procedimiento por réplica y directo, debido a que se debe aplicar procedimientos utilizados en las anteriores tareas del M2. El procedimiento directo y el otro elemento de control contenido están explícitos en el enunciado de la tarea, porque caracteriza y determina las condiciones de la figura solicitada con respecto a la longitud de contorno, es decir que guían la visualización.

5.1.2 Análisis de resultados descriptivo del M2

En las Tablas 27 y 28 se muestra la frecuencia de los procedimientos de éxito y fracaso de las tareas correspondientes al M2 de la propuesta de enseñanza. En la Tabla 9 el mayor proceder fue el procedimiento esperado PE, con 128 U.A. de recurrencia entre los cuatro proceder, destacándose, además, como el procedimiento más adoptado por los estudiantes al solucionar las tareas propuestas. Del mismo modo, cabe señalar que el resto de procedimientos (PNE, PNP-PN, PEE-PP), aunque con menor frecuencia se observan constantes entre sí, con frecuencias entre 19 y 32 U.A.

Tabla 26. Frecuencias de aparición de los procedimientos asociados al éxito y fracaso en el M2

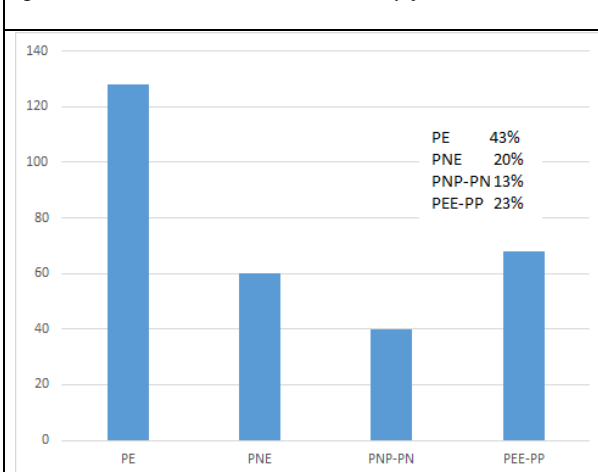
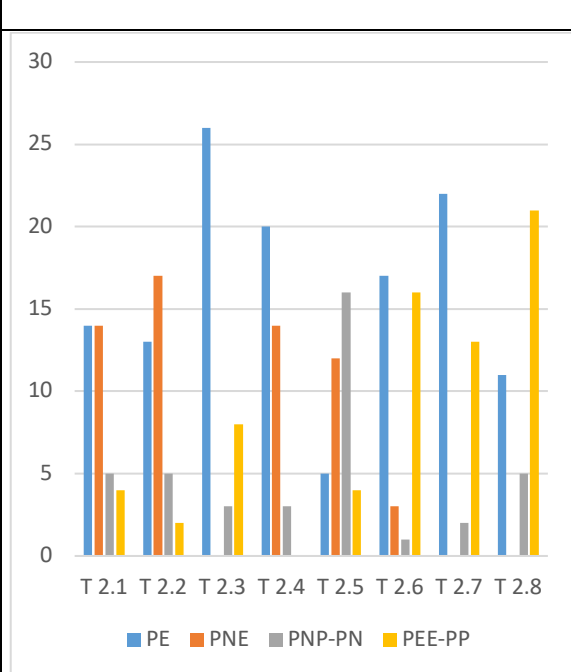


Tabla 27. Comparativo de procedimientos y tareas M2



Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 28 muestra los procedimientos PE, los cuales tienen mayor frecuencia en T2.1, T2.2, T2.3, T2.4, T2.6 y T 2.7, cuatro de estas tareas tienen procedimiento son directo y dos tareas con procedimiento de réplica. Con respecto a la Tabla 9, indica que el procedimiento con mayor acogida fue el PE en cuanto a la resolución de tareas de M2, sin embargo, en la T2.5 este proceder es escaso.

Procedimiento esperado con éxito (PE):

En la Tabla 27 muestra que PE es el más considerado en las tareas de M2, estas tareas suscitan las relaciones de orden y equivalencia entre las longitudes de contorno corresponden a un 43% de U.A con PE. La Tabla 28 muestra que las tareas donde mayor porcentaje de ocurrencia de PE fueron la T2.3, T2.4 y T2.7 correspondientes a 70%, 54% y 59% respectivamente. Las otras tareas T2.1, T2.2, T2.5, T2.6 y T2.8 se ubican por debajo

de 50% de las U.A es decir que el porcentaje de PE de estas tareas están entre el 29% al 45%.

El éxito esperado de las tareas se relaciona con las hipótesis de diseño y los elementos de control propuestos en cada una de las tareas, con respecto a T2.3 es una tarea que propone el procedimiento por réplica debido a que se requiere la aplicación de lo aprendido en las tareas T2.1 y T2.2, para poder establecer la relación de orden de la longitud de contorno. Con respecto a la T2.4 los factores de visibilidad juegan un papel fundamental dado que se privilegia un mismo aspecto de la secuencia visual, estos factores de visibilidad generan ideas en el desarrollo de la figura inicial y final, debido a la posición y elementos de contraste con la que se presenta la figura. En cuanto al desarrollo de T2.7 es una tarea con procedimiento directo que genera establecer una relación de orden en la longitud de contorno de las figuras, es decir que a pesar que la naturaleza de diseño es distinta a la T2.3 se asemejan en lo que proponen, comparar longitudes de contorno. Estas tareas proponen figuras cóncavas, es decir polígonos irregulares.

A modo general, los resultados presentan que el PE, estuvo presente en todas las tareas. El M2 estuvo diseñado de tal manera que se presentaban dos tareas y la siguiente a ella solicitaba lo aprendido en las antecedentes, para poder concluir con todo el M2 en la T2.8 se solicitaba aplicar las dos operaciones visuales de la tarea aprendidas en la tarea: linealización y deslinealización, obteniendo un 29% de PE.

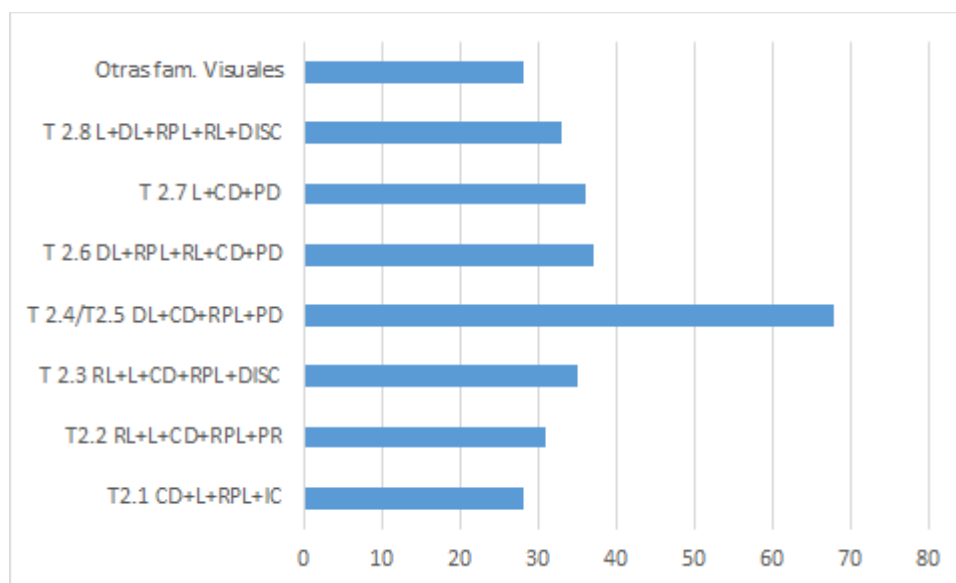
En la T2.1 y T 2.2 se obtuvo PE respectivamente 37% y 35%, en la T2.3 se usaba lo aprendido en las dos anteriores por tanto el porcentaje de PE ascendió a 70% y con estas tres tareas se concluía la presentación del concepto de linealización. En cuanto a T2.4, T2.5 y T2.6 presentaban la deslinealización, la T 2.4 tenía una función por refuerzo por lo tanto se privilegiaba un mismo aspecto en la secuencia visual presentando la figura inicial

y figura final, guiando la operación de la deslinealización por ello un porcentaje de 54% de PE, la T2.5 solo presentaba la figura inicial y se debía proponer la figura final, por tanto hubo mayor complejidad en esta tarea generando así un 13% de PE, el cierre de esta tarea fue la T2.6 a pesar de cumplir una función ambigua porque no se privilegia ninguna secuencia visual el porcentaje de PE fue de 45%. Hasta aquí se podría decir que las operaciones visuales de linealización y deslinealización fueron aplicadas de la manera esperada.

Finalmente, la linealización en T2.7 fue desarrollada de manera correcta, generando un porcentaje de 59%. Para el desarrollo de la T2.8 que fue aplicar las dos operaciones y hacer un procedimiento por réplica el porcentaje de PE fue de 29%.

En cuanto a las familias visuales del M2 se identificaron 7 familias en el desarrollo de las tareas en 268 U.A identificadas y 28 familias visuales donde las operaciones fueron diversas y no se evidenciaba la aplicación esperada de los elementos de control. A continuación, se muestra la Tabla 29 la frecuencia de familias visuales en el M2

Tabla 28. Frecuencia de aparición de las familias visuales en el M2



Fuente: Elaboración propia.

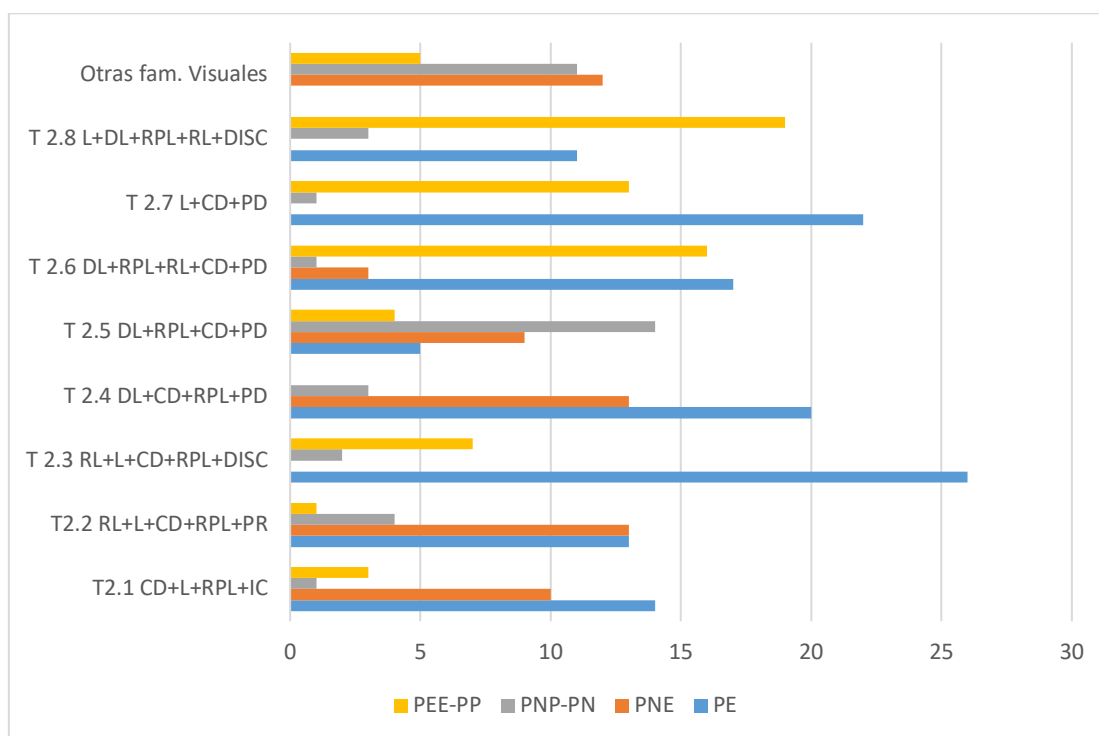
En la Tabla 29 se muestran las siete familias visuales identificadas en M2, las tareas T2.4 y T2.5 (DL+RPL+RL+CD+PD) tienen la misma familia visual y se representa con un 23%, el resto de las familias visuales de M2, oscilan entre 9% al 13% y cada tarea se representa por una única familia visual.

Las familias visuales se determinan por la operación y el elemento de control, 23% DL+CD+RPL+PD (T2.4/T2.5); 13% DL+RPL+RL+CD+PD (T2.6); 12% L+CD+PD (T2.7); este grupo de tareas se identifican por el procedimiento directo, de modo que los elementos de control de estas tareas definieron la operación cognitiva esperada en estas cuatro tareas, por consiguiente la unión de los porcentajes de las familias visuales de estas tareas es 48%, estas U.A mostraron la operación cognitiva privilegiada.

Las familias visuales L+DL+RPL+RL+DISC (T2.8) y RL+L+CD+RPL+DISC (T2.3), corresponden al 12% y 11%, las cuales evidencian las operaciones cognitivas esperadas en estas tareas, se agrupan estas dos tareas por el tipo de elemento de control presente en el diseño de las tareas, es decir que los elementos de control elegidos privilegiaron operaciones unidimensionales.

Las familias visuales RL+L+CD+RPL+PR (T2.2) y CD+L+RPL+IC (T2.1) muestran el porcentaje 10% y 9% respectivamente mostrando, en estas tareas se introducía por primera vez las operaciones de naturaleza unidimensional en particular la linealización, la familia visual que representa está T2.1 tiene como elemento de control el iconismo, de manera que este elemento de control contribuyó para la introducción de las operaciones unidimensionales. Con respecto a la T2.2 da cuenta que el elemento de control réplica funcionó pues se aplicó las operaciones unidimensionales que se esperaban.

Tabla 29. Comparativo de las familias visuales y procedimientos en el M2

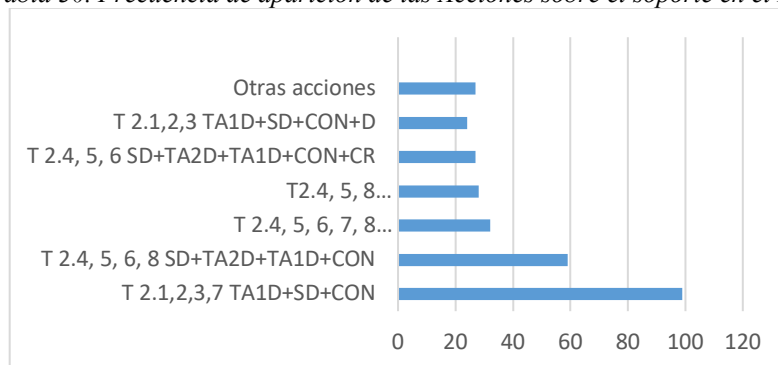


Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 30 permite observar que en la mayoría de las familias visuales de M2 cuentan con PE, donde la mayor incidencia de este proceder es en T2.3, T2.7 y T2.4, en el resto de tareas también está presente excepto en la clasificación de otras familias visuales.

En la Tabla 31 se presentan las acciones sobre el soporte de papel de mayor frecuencia; se presentan 6 acciones sobre el soporte de papel de las tareas de M2.

Tabla 30. Frecuencia de aparición de las Acciones sobre el soporte en el M2

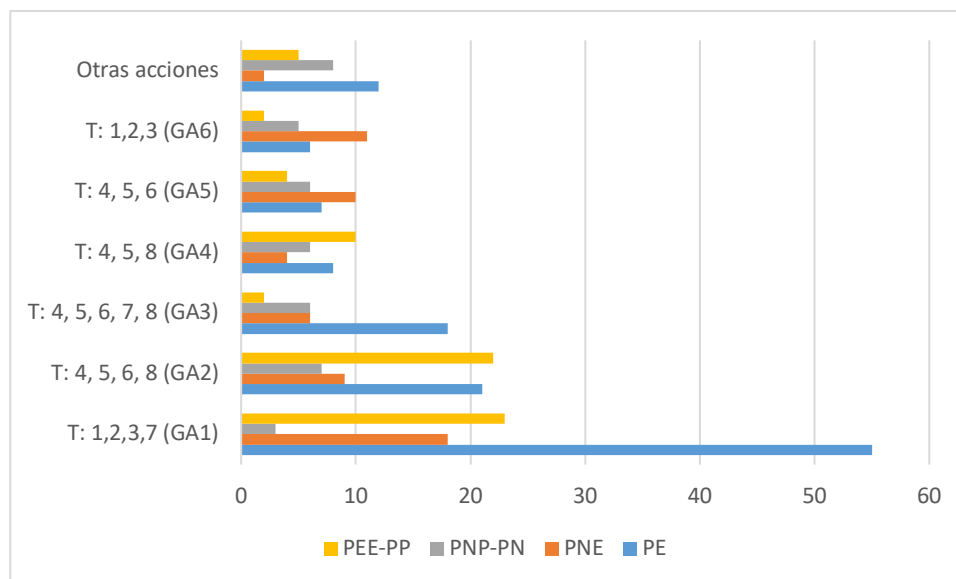


Fuente: este estudio. Elaboración propia.

La acción en el primer puesto es 1(TA1D+SD+CON) con el 33%, continúa 2 (SD+TA2D+TA1D+CON) con 19%, 3(SD+TA2D+TA1D+CON+D) con 10%, 4(SD+TA2D+TA1D+CON+D+CR), 5(SD+TA2D+TA1D+CON+CR) las dos con 9% y por último 6(TA1D+SD+CON+D) con 8%, en adelante se nombran cada uno de los grupos de acciones GA, junto con el número. Los GA1 y GA6 se destaca por estar en las primeras tres tareas, esto debido a que fue la introducción a la operación de linealización, estos dos grupos difieren en que algunas U.A había dibujos como parte de la argumentación en el proceso. Caso similar ocurre con GA3 y GA4, se identifican en T2.4, T2.5, T2.6 donde el objetivo fue la operación de la deslinealización. Los resultados anteriores indican que los elementos de control planeados en estas tareas donde el objetivo fue la operación de linealización y deslinealización funcionaron de la manera esperada.

A continuación, se presenta la Tabla 32 que muestra el comparativo de las acciones sobre el soporte y los procedimientos definidos en la investigación.

Tabla 31. Comparativo de las Acciones sobre el soporte y los procedimientos en el M2

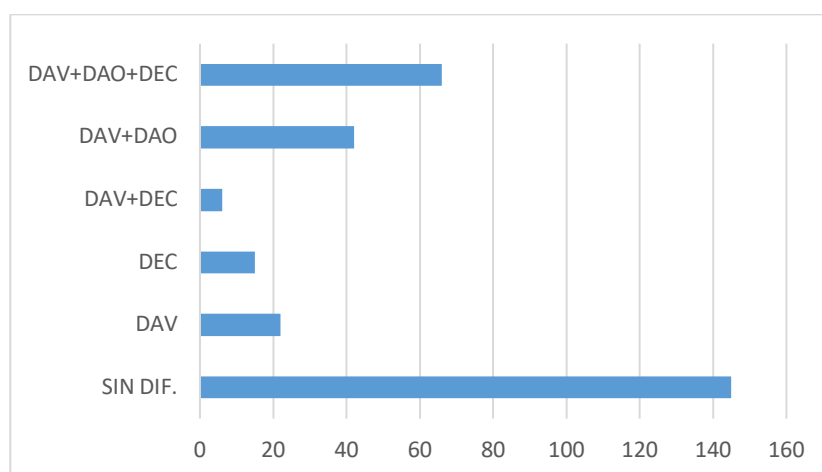


Fuente: Elaboración propia.

Las acciones sobre el soporte reportadas se presentan en el procedimiento PE corresponden a un 42% de todos los grupos reportados. Es decir que este procedimiento se encuentra presente en las distintas acciones reportadas, debido a que los elementos de control efectuaron los resultados esperados.

En relación a las dificultades y potencialidades asociadas a la solución de las tareas de M2, se caracterizan aquellas que por su alta recurrencia se presentaron en el momento de desarrollo de las tareas, tal como se reseña en la Tabla 33.

Tabla 32. Frecuencia de aparición de las Dificultades y potencialidades en el M2



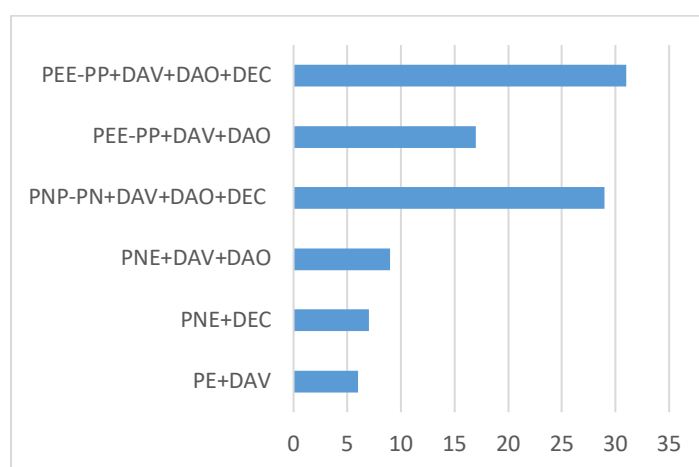
Fuente: Elaboración propia.

Tal como se reseña en la Tabla 33 se presentan dos dificultades DAV y DEC de manera individual y el resto de grupos son combinaciones de dificultades, y el grupo de mayor porcentaje con un 49% corresponde a la resolución de las tareas sin dificultad. El grupo de dificultades que predomina con un 22% es de las tres dificultades DAV+DAO+DEC, posterior a ello el grupo de DAV+DAO con un porcentaje de 14%. De modo que predomina DAV, dado que aparece sola y en los otros grupos dos grupos de mayor porcentaje, es decir que se presentó una complejidad visual con relación a las transformaciones que exige M2.

Los anteriores resultados indican que a pesar de las dificultades identificadas en la resolución de las tareas de M2, es mayor el grupo sin dificultades por lo que es posible considerar que las ideas de diseño que incluyen los elementos de control y operaciones surgieron un efecto positivo en el desarrollo de las tareas.

A continuación, se presenta la Tabla 34 donde se muestra el comparativo entre las dificultades y los procedimientos caracterizados.

Tabla 33. Comparativo de Dificultades y potencialidades en los procedimientos del M2



Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 34 aparecen 6 grupos de dificultades relacionadas con los cuatro procedimientos, las dificultades de cada procedimiento con mayor recurrencia son PEE-PP+DAV+DAO+DEC con 10% y PNP-PN+DAV+DAO+DEC con 9% (en adelante GD1 y GD2) seguido de PNE+DAV+DAO con 3% (GD3) por último PE+DAV con 2% (GD4). El resto de las dificultades presentadas oscilan entre 2% a 5%. Se presentan estos seis grupos de dificultades debido a que son las dificultades representativas en porcentaje en cada uno de los procedimientos de M2, es decir que en total se muestra el 33% de dificultades, el resto de agrupaciones fueron muy variadas en total fueron 22 grupos de dificultades junto a procedimientos.

Los dos primeros grupos GD1 y GD2, tiene mayor U.A en las tareas T2.1, T2.5, T2.6 y T2.7, respectivamente cada par de tareas con GD1 y GD2, estas tres últimas tareas de manera explícita tiene la indicación de establecer la relación de orden entre la longitud de contorno, se presentan estas tres dificultades debido a que no hay un establecimiento correcto de la relación de orden, pues faltó precisión, la comprensión del enunciado es regular y la visualización no toma en cuenta todos los elementos de control.

En cuanto a los dos grupos restantes GD3 y GD4, por un lado, GD3 la componen dos dificultades identificadas por un lado está establecer de manera imprecisa las marcaciones del contorno de la figura lleva a que la relación de orden se plantee incorrectamente, generando una dificultad en la comprensión del objeto matemático tratado. Por último, GD4, aunque hay una dificultad visual con respecto a la exactitud de las marcaciones para determinar la relación de orden hay una respuesta esperada a lo que plantea la tarea.

Procedimiento esperado con error (PEE) y Procedimiento esperado con éxito parcial (PP):

Esta manera de proceder según la Tabla 27 ocupó el segundo lugar con respecto a los otros procedimientos con un 23% de U.A. Con respecto a las tareas según la Tabla 28 en las siguientes tareas se presentó esta forma de proceder T 2.8, T 2.6, T 2.7, T 2.3, T 2.5, T 2.1 y T 2.2 respectivamente en porcentaje 56%, 43%, 35%, 21%, 10%, 10% y 5%. En T 2.4 esta manera de proceder no se presentó debido a que predominó PE con un 54%, en términos generales fue una tarea donde el elemento de control directo, junto con los otros elementos guio la manera de ver esperada.

Familias visuales:

En las tareas de M2, los PEE-PP las familias visuales con mayor acogida estuvieron en las tareas T 2.8, T 2.6 y T 2.7 según la Tabla 28. El mayor proceder ocurrió en la T 2.8, esta tarea exige establecer el orden de la magnitud perímetro y proponer una nueva figura, es por esto que la familia visual con mayor proceder es L+DL+RPL+RL+DISC, aunque hay un error y un éxito parcial la operación aplicada es la esperada.

En cuando a las tareas T2.6 y T2.7, con familia visual DL+RPL+RL+CD+PD y L+CD+PD tiene en común el cambio dimensional y el elemento de control PD relacionado con el procedimiento directo, estas dos tareas se diferencian en la operación que se debe aplicar y representan el 5% y 4%.

En cuanto a la tarea T2.4 esta manera de proceder no está, por que el mayor número de maneras de proceder fue PE, esto indica que la función por refuerzo con la cual se diseñó esta tarea guió la visualización de tal manera que no hubo procedimientos PEE-PP.

Acciones sobre el soporte:

En la Tabla 32 se muestran las distintas acciones sobre el soporte de papel, algunas acciones se repiten en varias tareas, es el caso de la identificación de unidades figurales de 1D en todas las formas de proceder convergen. Debido a que el objetivo de M2 es fijar la visualización en el contorno de las figuras, pues los elementos de control de visibilidad determinan la visualización. El grupo que se presentó en mayor porcentaje son GA2 y GA1 en este procedimiento oscila entre 1% y 2% en este diseño de tareas de M2 los elementos de control de visibilidad favorecen la fijación de la visualización en el contorno y por ende en la comparación del contorno de la figura, es decir el establecimiento de orden en los perímetros de las figuras.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M2 en relación con los procedimientos PEE-PP, la mayoría de las dificultades que corresponden a este proceder es 7% siendo tres dificultades simultáneamente en la resolución de la tarea con este tipo de proceder. Lo que implica una mala interpretación en el enunciado de la tarea o descripción confusa del desarrollo de la tarea (DEC), incorrecta comprensión del objeto matemático (DAO) y por último dificultad en las exigencias visuales de la tarea (DAV).

Las otras dificultades que le siguen a este grupo son DAV+DAO representadas por un 5% de los procedimientos. En tercer lugar, está el procedimiento con DAV con un 3%. De manera que siempre prevaleció la DAV, a pesar que es un grupo de minoría se aclara que los elementos de control de visibilidad no funcionaron en este porcentaje.

Procedimiento no esperado con éxito (PNE):

El PNE, ocupó el tercer lugar más usado en la solución de las tareas de M2, es así como representa un 20% de U.A. Al revisar el comparativo se evidencia este proceder en T2.2, T2.1, T 2.4, T2.5 y T2.6, aunque no fueron los procedimientos esperados, lograron el éxito en el desarrollo de las tareas.

Familias visuales:

Las familias de visualización promovidas en la resolución de las tareas de M2 en PNE fueron cuatro tal como se muestra en la Tabla 30. Las primeras dos familias visuales se establecieron en T2.2 RL+L+CD+RPL+PR y T 2.4 DL+CD+RPL+PD con 4%; en segundo lugar, está T2.1 CD+L+RPL+IC y T2.5 DL+RPL+CD+PD con 3% y el cuarto lugar T2.6 DL+RPL+RL+CD+PD con 1%. Estas familias visuales tienen en común las operaciones tales como CD, L y DL que son las operaciones que se propone en M2. A

pesar que son las operaciones esperadas, se identificaron otras operaciones que, aunque no son esperadas ayudaron a la resolución de la tarea en cuestión.

En este grupo de tareas T2.3, T2.7 y T2.8, no hay este tipo de proceder en las dos primeras tareas privilegia el PE, mientras que en la tarea T2.8 es mayor el número de PEE-PP con 6%. Es así como en las dos primeras tareas T2.3 y T 2.7 se cumple la función de los elementos de control.

Acciones sobre el soporte:

En la Tabla 32 Se observan las acciones asociadas a los soportes de papel con PNE, se privilegia la identificación de unidades figuales de 1D, y la comparación para el establecimiento de orden de la magnitud longitud, esto ocurre con T2.1, T2.2, T2.3 y T2.7 (TA1D+SD+CON) con 6%; es decir que las acciones privilegian las operaciones esperadas, sin embargo se evidencian en las tareas T2.4, T2.5 y T2.6 (SD+TA2D+TA1D+CON+CR) con 3% la identificación de unidades figuales de 2D, no era lo esperado sin embargo los conocimientos previos aprendidos en M1 ayudaron a encontrar la solución pues en estas tareas la operación era linealizar y deslinealizar y proponer figuras en 2D.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociadas a la resolución de las tareas de M2 para PNE se pueden observar en la Tabla 34, que la mayoría de estos procedimientos se desarrollaron sin dificultad equivalente al 11%. Los demás PNE con una, dos o tres dificultades oscilan entre 0.7% al 3%, este último porcentaje equivalen a las dificultades DAV y DAO, es decir que la dificultad mayor estuvo en el desarrollo visual de la tarea y la comprensión del objeto matemático, en este caso la relación de orden que se debía

establecer entre los perímetros, por tanto, es posible que los elementos de control visual no tuvieron el efecto esperado.

Procedimiento no esperado con error (PN) y Procedimiento no esperado con éxito parcial (PNP):

Estos procederes ocupan el cuarto lugar en comparación a los otros, representando el 13%, equivalente a 37 U.A. En todas las tareas se presenta esta manera de proceder siendo con mayor frecuencia T2.5 representando el 43% en esta tarea; en T2.1, T2.2 y T2.8 representan el 13% en cada uno, en T2.3 y T2.4 representa el 8%, en T2.7 se compone de un 5% y finalmente el T 2.6 en este proceder corresponde a 2%. Estos resultados dejan en evidencia que el porcentaje de no responder frente a la tarea propuesta es poco y por ello funcionan los elementos de control con el cual se propusieron las tareas.

Familias visuales:

En la Tabla 30 se destaca la relación de los procedimientos no esperados (PNP-PN) con las familias visuales en particular en la T2.5 (DL+RPL+CD+PD) se encuentra la mayor concentración de familia visual con respecto a este proceder con un 5%. Las familias de visualización con relación a este proceder tienen cambio dimensional, importante en M2, la dificultad se asocia cuando el estudiante propone la figura final, hay una complejidad debido a la conservación de la longitud de contorno.

Acciones sobre el soporte:

Las acciones sobre los soportes que fueron incluidas en las tareas del M2 para los procedimientos PNP-PN se pueden evidenciar en la Tabla 32, tienen en común la identificación de unidades figurales de 1D, no se esperaba la identificación de unidades figurales de 2D puesto que todas las tareas estaban diseñadas para centrar la visualización

en los contornos de la figura, a pesar de ello relacionaron lo aprendido de M1 con las siguientes tareas.

Este procedimiento se destaca en las tareas T2.4, T2.5, T2.6, T2.8 con GA2 representado por 2% en el resto de procedimientos los porcentajes son menores, a pesar que fue un procedimiento que no logró el éxito, se evidencia el uso de las tareas previstas para la solución de las tareas.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociadas a la resolución de las tareas de M2, se pueden evidenciar en la Tabla 34, la mayor dificultad estuvo en la combinación de las tres dificultades DAV+DAO+DEC, con un porcentaje de 9%, el resto de las dificultades están entre 0,3% a 2%. Debido a que el porcentaje en general del procedimiento fue bajo, en general las cifras de las dificultades

Las dificultades asociadas a las tareas de M2 se ubica en segundo lugar el grupo GD2 según la Tabla 34 y representa el 10% sobre las dificultades identificadas en M2, de modo que los estudiantes que resolvieron las tareas de M2 con PNP-PN presentaron las tres dificultades (DAV+DAO+DEC) en el desarrollo de sus tareas, es decir que no lograron el objetivo de M2.

5.1.3 Discusión de resultados M2

5.1.4 Trabajo previo

Para el segundo paquete de tareas M2, enfatiza en operaciones de reconfiguración lineal al centrar la atención en el contorno de la figura; lo que a su vez genera el desarrollo de la aprehensión discursiva y la deconstrucción dimensional de las formas, como los

procesos que se aplican en el desarrollo de las problemáticas de la propuesta de enseñanza a la población participante en la investigación.

5.1.5 El perímetro y el desarrollo de la deconstrucción dimensional de formas.

En el M2 de la propuesta de diseño, el objetivo con relación a la enseñanza de la magnitud es establecer las relaciones de orden y equivalencia en la longitud de contorno. Para el desarrollo de este objetivo se tomaron algunas decisiones, por ejemplo, para nombrar el concepto de perímetro se estableció enunciar, longitud de contorno recurriendo al lenguaje natural (Fandiño y D'Amore, 2009), de modo que se tuvo en cuenta también la aprehensión discursiva relacionada con el cambio dimensional de la figura.

Con el fin de generar las relaciones de orden entre la magnitud perímetro sin necesidad del uso de número y teniendo en cuenta las características cualitativas se propusieron en todas las tareas ejercicios que promovieron las relaciones de orden a partir de la deconstrucción de la figura dimensional, de manera que las operaciones visuales promovidas fue la linealización y deslinealización de la figura.

Con el objetivo de determinar si la propuesta de enseñanza aplicada en la investigación promovió o no el desarrollo de la deconstrucción dimensional de las formas y establecer porque se logró o no, se reseña en la Tabla 35 los porcentajes de éxito alcanzados por los estudiantes en cada una de las tareas que conforman M2.

Tabla 34. Porcentaje de procedimientos PE y PNE que conforman el procedimiento con éxito PX del M2

	PE	PNE	PÉxito
T 2.1	38	38	76
T2.2	35	46	81
T 2.3	70	0	70
T 2.4	54	38	92
T 2.5	14	32	46
T 2.6	46	8	54

T 2.7	59	0	59
T 2.8	30	0	30
Fuente: Elaboración propia.			

Los resultados expuestos en la Tabla 35 evidencian que ninguna de las tareas promovió un desarrollo óptimo de la deconstrucción dimensional de las formas. Las tareas (2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8) favorecieron un desarrollo parcial de la deconstrucción dimensión de las formas, pues, el PX de las cuatro primeras tareas fue mayor al 60%. En T2.5 y T2.8, se evidencia la disminución en el PX en relación a la tarea anterior. Son diversos los aspectos de visualización que explican la desigualdad entre el porcentaje PX alcanzado en el desarrollo del grupo de las cuatro primeras tareas T2.1, T2.2, T2.3, T2.4 en adelante G2T1 y el resto de tareas T2.5, T2.6, T2.7, T2.8 (G2T2) el tipo de operación aplicado, las condiciones de la figura y los elementos de control incluidos.

En cuanto al primer aspecto, en el grupo de tareas G2T2 se realiza la aplicación de dos operaciones: linealización y deslinealización, además de la articulación de estas. Mientras que en G2T1 se aplicaba la linealización y deslinealización sin articulación. En relación al segundo aspecto, las tareas (T2.5, T2.6, T2.8) no había una representación de la figura final, sólo en T2.5 se enuncia que se debe construir un cuadrilátero. En conclusión, estas tareas disminuyeron el porcentaje de éxito porque la solución de la tarea era necesario proponer las figuras finales. Por el contrario, G2T1 siempre tuvieron la figura final definida desde el inicio.

Finalmente, en lo relacionado con el tercero de los aspectos visuales, G2T2 a pesar que el procedimiento es directo, solo se describe una característica general de la figura final, de modo que la figura que construya el estudiante cumpla la relación de orden de longitud de contorno establecida en el enunciado. A diferencia de G2T1 donde el procedimiento también fue directo, pero se representaban las dos figuras, tanto la inicial

como la final, esto pudo ser un elemento que desfavorece a G2T2 de modo que se les dificulta el proponer la figura final con la relación de orden solicitada.

Para G2T1 las figuras presentaban factores de visibilidad, tales como inclinación y paralelismo entre algunos lados de la figura inicial y final, de modo que el procedimiento presente fue directo y por réplica, facilitando la aplicación de la operación solicitada, linealización (T2.1, T2.2, T2.3) y deslinealización (T2.4). Caso contrario en (T2.6, T2.8) no se presentaron figuras, sin embargo, hacían alusión a figuras de otras tareas como figuras iniciales y describen las condiciones de la figura final. Para (T2.5, T2.7) se presentaron figuras iniciales y se describió la condición de orden de las figuras finales, por tanto, se deben proponer figuras en su mayoría cóncavas para el cumplimiento de la condición de orden con relación a la longitud de orden, durante M2 se presentaron este tipo de figuras, pero los estudiantes a pesar de ello poco recurrieron a estas, ocasionando el no cumplimiento de la relación de orden establecida.

La T2.5, T2.6 y T2.8 son cognitivamente más complejas que el resto de tareas porque a pesar de estar presente algunos elementos de control, la articulación de las operaciones linealización y deslinealización, implicaba la precisión de las longitudes de contorno y proponer figuras distintas a los polígonos regulares que generalmente se usan en clase. Y muchos de los estudiantes se equivocaron en la precisión de la longitud de contorno.

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indica que:

- a) Una manera de revisar el uso de los elementos de control es articular la confrontación entre los procesos predictivos y el análisis de los resultados para de este modo saber si estos contribuyen al desarrollo visual (Marmolejo, 2014), por

ello en esta propuesta de enseñanza en particular M2 podemos determinar que los elementos de control usados para el estudio cualitativo de la magnitud perímetro, el procedimiento directo y los factores de visibilidad, es posible que favorezca el desarrollo de la aprehensión discursiva.

- b) Duval (2010) menciona que los programas de estudio de geometría se centran en presentar a las figuras a partir de rectas, lo que lleva a pensar a las figuras en 1D, más que en figura de 2D, pues este orden de la introducción de las figuras lleva a pensar que una figura de 2D no se descompone perceptivamente en una red de rectas, por eso la deconstrucción dimensional requiere ser introducida, porque esta operación cognitiva va en contra de los procesos espontáneos de la identificación de formas. Es posible que construir una figura conservando una relación de orden en la longitud de contorno a partir de la operación de la deslinealización es una exigencia cognitivamente más alta que solicitar la linealización de una figura, este tipo de tareas corresponden a M2 es una propuesta posible para la introducción de la deconstrucción dimensional de las formas, tal como lo sugiere Raymond Duval.
- c) Marmolejo (Valdivia 2017) plantea que caracterizar la estructura del contenido es determinante para comprender algunos fenómenos que surgen en el aprendizaje de la visualización, por esto los elementos de control bastan para asegurar las formas de proceder. Para el diseño de esta propuesta de enseñanza en particular el estudio cualitativo del perímetro se propusieron aplicar tareas que vayan de menor a mayor complejidad, es necesario tener en cuenta que las tareas de menor complejidad requieren como elemento de control procedimiento directo donde se propongan la figura inicial y final, también elementos de visibilidad que resalten el contorno de la figura.

5.1.6 La intervención de las acciones sobre los soportes consideradas por los estudiantes en las Tareas G2T1 y en el otro grupo de tareas G2T2 del M2

Los aspectos relacionados con las acciones sobre el soporte de papel para G2T1 en su gran mayoría tienen que ver con la identificación de trazos en una dimensión a partir de un soporte (tira de papel), la comparación por medio de la disyunción, algunos elementos de contraste y dibujos con el fin de indicar el procedimiento desarrollado. Esto en cuanto a las tareas T2.1 a T2.3, donde el objetivo fue la linealización, en cuanto a la T2.4 que introduce la deslinealización por primera vez en el M2, se introducen otras acciones tales como los trazos de dos dimensiones sobre el soporte de papel (tira de papel y hoja de trabajo). En el otro grupo de tareas G2T2, se hacen presente los trazos auxiliares de una y dos dimensiones, debido a la articulación de la linealización y deslinealización, esto demuestra que la deconstrucción dimensional de las formas se logra en G2T2, sin embargo, no en el porcentaje esperado la mayoría de obstáculos fue en la precisión del uso de los soportes.

Las distintas acciones consideradas en el desarrollo de estas tareas consideraron la identificación de trazos auxiliares en una dimensión representando la operación cognitiva de linealización, sin embargo, la precisión en los estudiantes fallo, de manera que las respuestas no fueron las esperadas. En cuanto a la deslinealización en las tareas T 2.5, T 2.6 y T 2.8, se representan por medio de trazos auxiliares de dos dimensiones para la construcción de la figura solicitada. No obstante, no fue suficiente para mejorar el porcentaje de éxito en las tareas, pues G2T2 tenían como objetivo, la articulación de la linealización y deslinealización, y en estas tareas (T 2.5, T2.6, T 2.8) se esperaba que los estudiantes propusieran la figura final, cuestión que no ayudó mucho debido a que G2T1

siempre había una figura final, es decir que los soportes funcionaron siempre y cuando había la figura inicial y final.

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indica que:

- a. Duval (2010) en su investigación señala que para la enseñanza de algunas operaciones cognitivas de naturaleza visual es necesario dejar a un lado la actividad gráfica y cambiarla por manipulaciones físicas, esta propuesta de enseñanza considero soportes de papel para el estudio cualitativo del perímetro, en particular para M2 las tiras de papel fue el soporte utilizado para que el estudiante representará la relación de orden que solicitaba la tarea. Se sugiere que para que la aplicación sobre estos soportes es necesario la precisión y la claridad del concepto, para el desarrollo de la tarea propuesta.
- b. Zúñiga y García (2015) informan a partir de su estudio que el uso de recursos de diferente naturaleza refiriéndose a materiales manipulativos, estimulan la aparición de nuevas estrategias para la resolución del problema, a pesar que algunos estudiantes propusieron las mismas figuras (polígonos regulares) que se les presenta en clase, otro grupo de estudiantes exploraron otros tipos de figuras. En la propuesta de aprendizaje

M2 los soportes de papel son materiales que aportan para la representación de las operaciones cognitivas en el desarrollo de las tareas, y son mucho más efectivos cuando en la tarea propuesta se propone la figura inicial y final.

5.1.7 La intervención de las Dificultades consideradas por los estudiantes en G2T1 y en el otro grupo de tareas G2T2 del M2

Las dificultades presentadas en G2T1 fueron pocas, en su mayoría fueron las relacionadas con DAV, en consecuencia, la precisión de las medidas con las tiras de papel fue regular, es decir hubo error, sin embargo, las respuestas fueron no esperadas con éxito. Otra dificultad recurrente en este grupo de tareas fueron las dificultades relacionadas con el lenguaje DEC, presentadas en la escritura del proceso de solución de la tarea. En cuanto a las dificultades del resto de tarea G2T2, fueron escasas a pesar del bajo porcentaje en PX, es por ello que las tareas G2T1 fueron tareas que perfeccionaron las operaciones cognitivas de la linealización y deslinealización. por ello en las tareas posteriores, la redacción, lo visual y lo escrito mejoraron.

Las dificultades en este M2 aparecieron de manera descendente, inicialmente aparecieron en mayor proporción tres tipos de dificultades DAV, DAO y DEC, primero en T2.1, luego en T2.2 DAV y DEC, en T2.3 DAV, estas tres tareas concluyen la conceptualización de la linealización, las dificultades fueron pocas. Es decir que las tareas propuestas para la apertura y significación de la linealización fueron tareas acordes a lo esperado, a pesar de las pocas dificultades, además que fueron tareas propicias para la introducción de la deslinealización, puesto que las tareas posteriores no se identificaron en mayor medida las dificultades.

En cuanto a G2T2 las dificultades en su gran mayoría surgieron porque no lograban proponer una figura final conforme a lo que se establece en el enunciado de la tarea, es decir a los estudiantes se les dificultó la creación de figuras, realizar una figura a partir de las indicaciones del enunciado.

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indica que:

- a. Las tareas de deslinealización donde se debe proponer una figura convexa son de un nivel de dificultad mayor, es decir las dificultades relacionadas con la visualización, debido a que se trabajan poco en el aula de clase, por ello es necesario que en las clases de geometría no solo se exponen las figuras tradicionales y regulares, sino figuras con orificio e irregulares como lo expone Fandiño y D'Amore (2007). También señala Duval (2010) que el trabajo en Geometría que se realiza con estudiantes de 5 a 11 años se restringe a la identificación de objetos geométricos tales como el triángulo, segmento, la recta entre otros, esto hace que se reduzca al aprendizaje de vocabulario, por tanto, en propuestas de enseñanza como la presente se dificulta cuando se trata de proponer figuras a partir de la deconstrucción dimensional de las formas.
- b. Es preciso enunciar que el desarrollo de la aprehensión discursiva suscita complejidad cognitiva como lo menciona Duval (2004a), esta aprehensión caracteriza el desarrollo de la visualización y exige el reconocimiento de algunas unidades figúrales de una configuración geométrica, cuando el desarrollo de esta aprehensión no es simultánea con el aprendizaje de la geometría y se presentan de manera separada, ocurre dificultades tal como DEC acompañadas por DAV, por tanto como lo menciona Marmolejo (2014) la figura por sí misma debe de ir acompañada de una articulación referencial entre la figura y el enunciado.

VI. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN MOMENTO 3

6.1 Análisis de resultados M3

6.1.1 Análisis predictivo de M3

La propuesta de enseñanza diseñada (Ver Anexo 1) pretende introducir a los estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, al estudio de la $R(p/a)$, por primera vez y desde una perspectiva semiótica y cognitiva visual, al privilegiar la magnitud área y longitud que privilegia la magnitud como objeto de reflexión, centrando el estudio a la $R(p/a)$. En donde se relacionan características cualitativas de las figuras con los conceptos de la magnitud de superficie y contorno, y se establecen relaciones entre ellas.

Además, se exploran herramientas para comparar figuras según sus perímetros y áreas, también, se promueve la construcción de figuras con características cóncavas y se analizan las posibilidades y tipos de relación entre las dos magnitudes contempladas.

En la Tabla 36, con el objeto de guiar la lectura del análisis de resultados del M3, se presenta de forma esquemática las operaciones visuales que se pretenden sean promovidas en las cuatro tareas propuestas y se reseñan los elementos de control incluidos para tal fin.

Tabla 35. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento de la R(p/a) de las tareas propuestas M3

TAREA	OPERACIÓN VISUAL A PROMOVER	ELEMENTOS DE CONTROL INCLUIDOS
3.1	Reconfiguración lineal y simple	-Factores de visibilidad (complementariedad de formas y las características del contorno). -Procedimiento (Directo). -Contenido (la relación de orden y equivalencia de las figuras según su cantidad de superficie y su longitud de contorno).
3.2		Factores de visibilidad (figuras convexas) -Procedimiento (Réplica) -Contenido (Relación cuando el área es igual y el perímetro aumenta)
3.3		Factores de visibilidad (la convexidad en el contorno de las figuras) - Procedimiento (Directo). -Contenido (proponer una figura de llegada con menor longitud de contorno y mayor cantidad de superficie)
3.4		- Factores de visibilidad (parte sombreada de la figura, contraste de grosor, rayado) - Procedimiento (Directo) -Contenido: determina la longitud de contorno, para proponer otra figura de contorno diferente con menor cantidad de superficie)

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan los procedimientos esperados y efectos de la inclusión de los elementos de control visual al resolver las tareas de cada momento de la propuesta de enseñanza.

Tarea 3.1

La resolución de esta tarea requiere ordenar de mayor a menor cuatro figuras representadas, tanto en cantidad de superficie como en longitud de contorno; para ello, la aplicación de la operación de reconfiguración lineal y simple es pertinente (Ver Tabla 1 p.56).

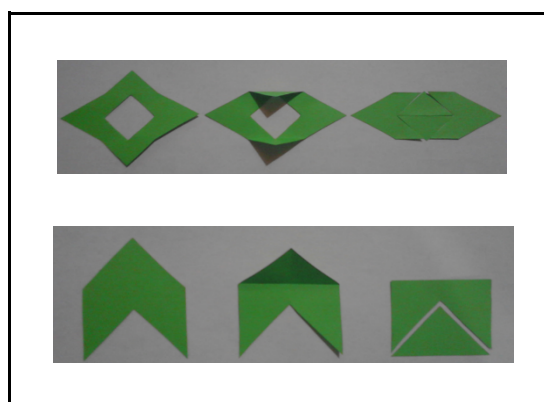


Ilustración 17. Flujo Visual T3.1 del M1

En cuanto a los elementos de control visual, son tres los que se incluyen: procedimiento, visibilidad y preguntas. Mientras que los dos primeros, pretenden

promover la aplicación de la operación de reconfiguración, el tercer elemento de control apunta a suscitar la reflexión sobre la articulación de los procedimientos visuales considerados en los dos paquetes previos de tareas (M1 y M2).

En este sentido, el procedimiento como elemento de control se determina a través de acciones realizadas en tareas anteriores, cabe mencionar que al inicio de cada tarea, se dará a los estudiantes una copia recortada de las cuatro figuras presentadas en la consigna de la misma escala de la ficha de trabajo; además de tiras de papel para desarrollar su proceder; así, se pretende que los estudiantes transformen las figuras dadas en otras y logren articular los M1 y M2 de las primeras tareas para hallar las posibles relaciones entre sí, ordenando las figuras de mayor a menor cantidad de superficie como se puede observar en la ilustración 16.

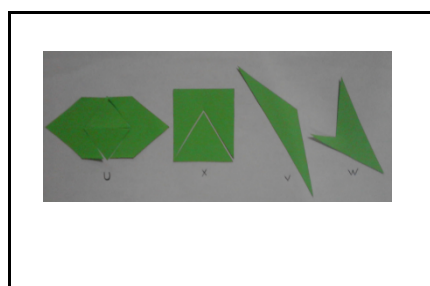


Ilustración 18. Flujo Visual T3.1 del M3

La visibilidad por su parte, está presente en la Figura U con hueco que privilegia el contorno y tiene como característica ser cóncava, el elemento de control visual en esa Figura es la complementariedad de formas (ver Tabla 2 p. 59), también, la Figura W se caracteriza por el uso de red de rectas, en el cual se espera que los estudiantes se apoyen en la reconfiguración lineal, para tomar los segmentos de líneas de la figura y linealizarlos; de esta manera lograr hallar la relación de equivalencia y orden entre magnitudes. Su discriminación propiciará la comparación entre las figuras y determinará cómo transformarlas.

En cuanto al tercer elemento de control (preguntas), se incluye a través de la explicación de preguntas abiertas, es el caso de ¿Cuál es la principal conclusión que puedes sacar al comparar las cuatro figuras reseñadas? La cual será expuesta por el educador a la vez que se desarrolle la tarea, con lo cual se pretende generar reflexión sobre los procesos a considerar en su resolución.

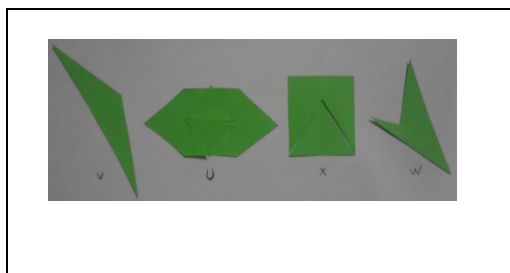


Ilustración 19. Orden de las figuras de mayor a menor longitud de contorno de la T3.1 del M3

La segunda parte para dar solución a la tarea tiene que ver con la linealización de los segmentos de líneas de las figuras dadas en la consigna, para lo cual se requiere el uso de la tirita de papel; para que de esta manera los estudiantes determinen el orden de las figuras de mayor a menor longitud de contorno.

Tarea 3.2

La tarea solicita construir una figura diferente a la dada, que cumpla la condición de tener igual cantidad de superficie y mayor longitud de contorno. Su desarrollo exige la aplicación de operaciones de reconfiguración lineal y simple (Ver ilustración 18).

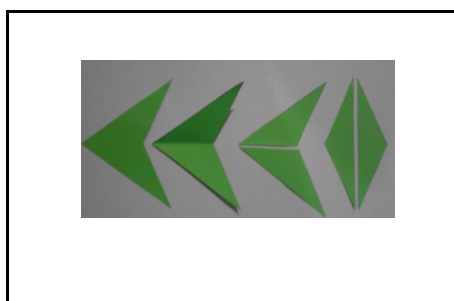


Ilustración 20. Flujo Visual T3.2 del M3

Los elementos de control visual que se incluyen en el proceso de resolución son dos, primero, el procedimiento que se evidencia cuando de manera explícita en la consigna de

la tarea se solicita construir una figura que cumpla ciertas condiciones, es decir, tener en cuenta la relación: “Cuando el área es igual y el perímetro aumenta”. y en la lengua natural, se designan acciones que dirigen la manera de proceder, por ejemplo, al observar el recorte de la figura, el indicio que se da a los estudiantes es realizar transformaciones a la figura al dividirla en sub-figuras convexas, y aplicar rotaciones o traslaciones.

El efecto visual que se pretende promover es el uso de la reconfiguración simple, al fraccionar la figura inicial en sub-figuras y reorganizarse para garantizar la relación propuesta. Segundo, la visibilidad, a través de los factores de visibilidad usados en tareas previas, se relaciona con las características del contorno de la figura inicial (figura cóncava) al dar indicios de transformar sub-figuras convexas, para comparar los contornos de la longitud de las figuras y linealizar la figura con la ayuda de tiras de papel, que permitan acceder a la relación propuesta.

Tarea 3.3

La naturaleza de esta tarea es similar a la anterior, pues en ella se solicita a través de la consigna un orden de resolución de la tarea, al enunciar la relación de orden entre dos figuras, una dada y otra por construir, al expresar: “la Figura C’ es mayor que la longitud de contorno de la Figura D’ y la cantidad de superficie de la Figura C’ es menor que la cantidad de superficie de la Figura D’”. Igualmente, este hecho, exige la aplicación de operaciones de reconfiguración lineal, para lo cual, se debe operar sobre los lados que componen la Figura C’ para comparar la longitud de contorno para la construcción de la figura D’. Además de la reconfiguración simple en donde la figura de partida debe transformarse en otra figura de mayor cantidad de superficie, para establecer la relación de orden y proponer la figura de llegada D’.

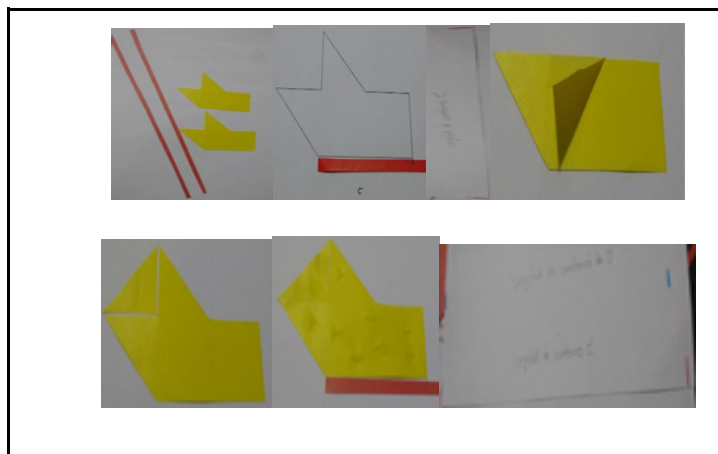


Ilustración 21. Flujo Visual T3.3 del M3

En este sentido, los elementos de control visual que las estudiantes en formación incluyen son el procedimiento y la visibilidad. El primer elemento de control, se evidencia en la consigna de la tarea al sugerir la acción a realizar en el enunciado; primero, al cumplir la condición dada en la relación de orden con respecto a la longitud de contorno y luego con la relación a la cantidad de superficie. El segundo elemento de control visibilidad, por su parte, se da al incluir grosor y contorno en la figura representada. La visualización se centra en las unidades constitutivas 1D, en este caso los segmentos que componen los lados de la Figura C'.

Tarea 3.4

En esta tarea se pretende establecer una relación de orden entre la figura de partida y la figura de llegada que permita articular los procedimientos realizados con anterioridad en los M1 y M2, en este caso hay que hacer uso de la reconfiguración simple para construir una Figura F' con menor cantidad de área que la Figura E, al aplicar operaciones de reconfiguración lineal y simple, se espera que los estudiantes transformen la figura E' en una figura cóncava al realizar dos cortes que lo concedan (Ver ilustración 20).

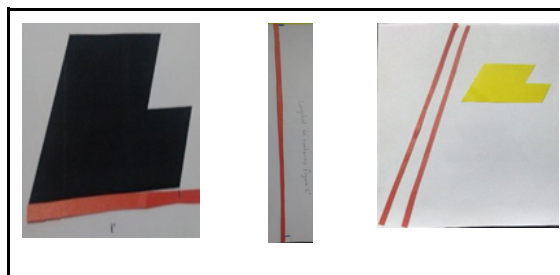


Ilustración 22. Flujo Visual T3.4 del M3

En otro momento de la tarea es necesario cumplir la siguiente condición dada en el enunciado: la longitud de contorno de la Figura E' es menor que la longitud de contorno de la Figura F', para la resolución, es necesario contemplar acciones visuales, entre otras, pasar de centrar la atención en la superficie de las figuras a focalizarse en sus unidades unidimensionales entre segmentos. Es decir, para proponer la Figura F' con mayor longitud de contorno se debe aplicar operaciones sobre los lados de la Figura E' y hacer uso de tiritas de papel para establecer elementos que permitan la comparación entre el contorno de las figuras en cuestión (Ver ilustración 21).



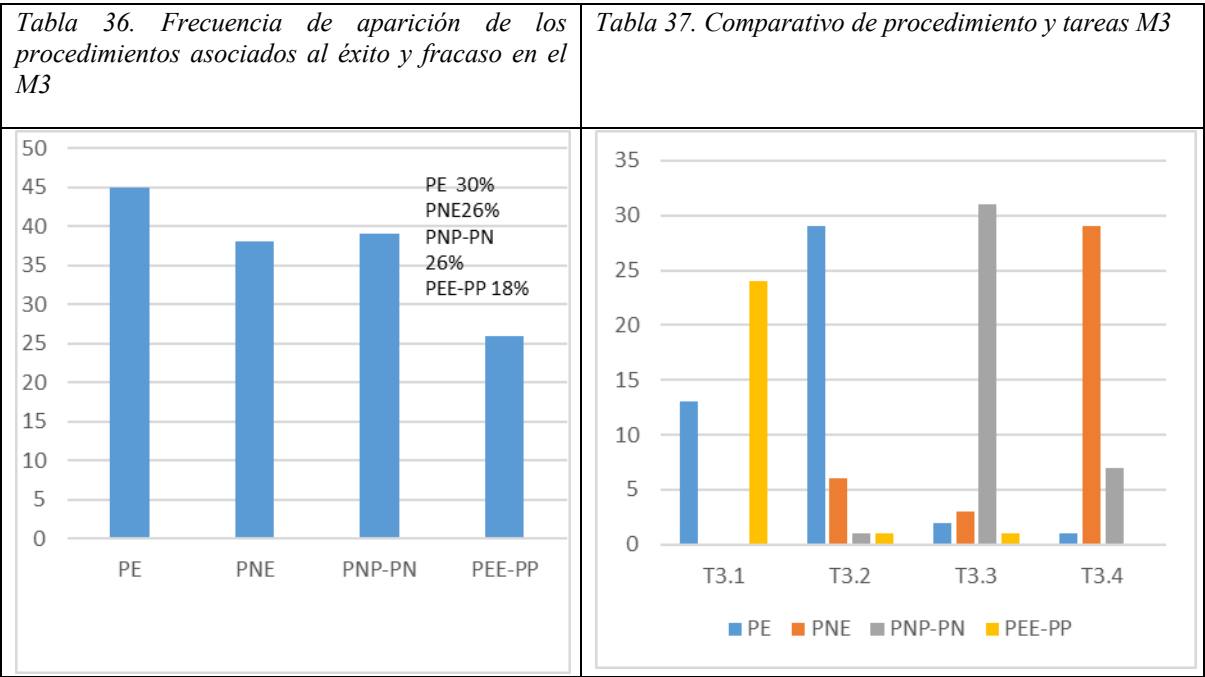
Ilustración 23. Flujo Visual T3.4 del M3

En este sentido, los elementos de control que se incluyen son dos, procedimiento y visibilidad, el primero se da cuando en la consigna de la tarea se pide comparar la cantidad de superficie, y el contorno de las figuras, mediante el cumplimiento de la relación y el segundo elemento de control se privilegia cuando se presenta la Figura E'; es decir, no posee grosor de contorno y pasa a centrar la atención en la cantidad de superficie.

6.1.2 Análisis de resultados descriptivo del M3

En las Tablas 37 y 38 se reseñan, para la primera la frecuencia de aparición de los procedimientos de éxito y fracaso evidenciados, respectivamente, en el grueso de las tareas que componen el M3 de la propuesta de enseñanza, y según el tipo de tareas implementada.

Para la segunda, Tabla 37 el proceder de mayor intervención fue el procedimiento esperado PE, con 45 unidades de análisis en adelante (U.A.) de recurrencia entre los cuatro procederes, destacándose, además, como el procedimiento más adoptado por los estudiantes al solucionar las tareas propuestas. Del mismo modo, cabe señalar que el resto de procedimientos (PNE, PNP-PN, PEE-PP), aunque con menor frecuencia se observan constantes entre sí, con frecuencias 38, 39 y 26 U.A. y un porcentaje entre 18% y 26% frente a la acogida por parte de los estudiantes al resolver las actividades.



Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 38 por su parte, indica que al comparar los procedimientos y tareas del M3 el proceder PE se convierte en el más acogido al momento de solucionar las actividades, aunque su presencia en las T3.3 y T3.4 es escasa al igual que en el proceder (PEE-PP) aspectos que se ampliarán con mayor detalle en adelante al establecer la

frecuencia de aparición de cada procedimiento según el número de tareas implementadas en el estudio en el M3.

Procedimiento esperado con éxito (PE):

La Tabla 9 muestra que el procedimiento esperado con éxito es el más considerado en las tareas que suscitan el desarrollo de la aprehensión operatoria y discursiva articulando los procedimientos visuales considerados en los dos paquetes previos de tareas (M1 y M2) y el estudio de relaciones entre cantidad de superficie y longitud de contorno, con un porcentaje de 30% lo que indica que los estudiantes al resolver las tareas accedieron a este tipo de procedimiento en su mayoría.

La Tabla 38, por su parte, muestra que este procedimiento es el más considerado en las T3.1 y T3.2 con un porcentaje de 9% y 20% respectivamente, mientras que en las T3.3 y T3.4 las posibilidades de este proceder se ven reducidas a 1% en cada tarea.

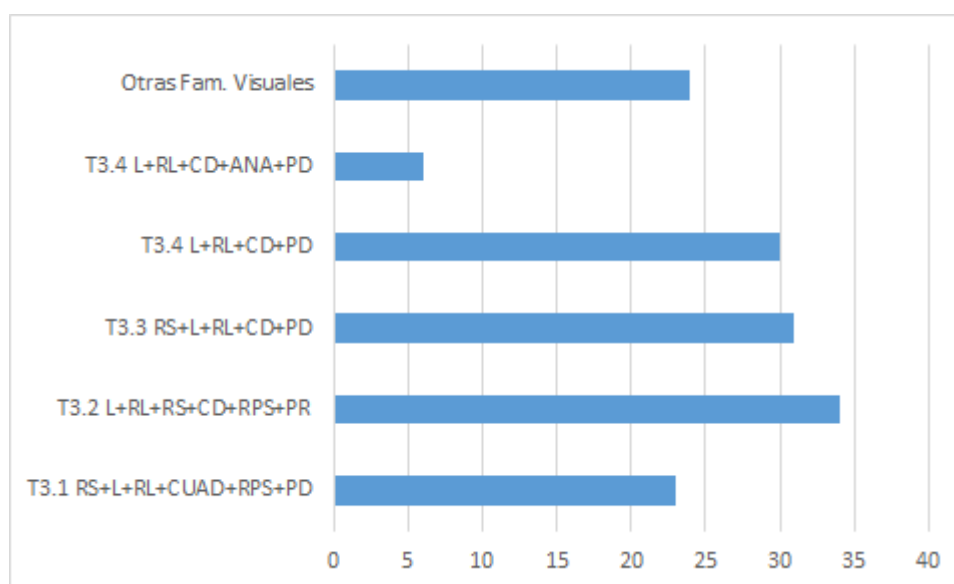
Los resultados anteriores indican que el éxito en el despliegue de procedimientos al desarrollar las tareas se debe específicamente a la implementación de las hipótesis y objetivos propuestos en el diseño, en donde los elementos de control introducidos como usar figuras con hueco dentro de la figura (Fig.U) y el uso de figuras cóncavas (Fig. w y x) señalado por Fandiño y D'Amore (2009) en la T3.1, el uso de procedimientos como el de réplica y directo en las T3.2, T3.3 y T3.4, permiten seguir las instrucciones y recomendaciones para solucionar cada problemática a través de la lengua natural por medio de la consigna de las tareas y otros elementos de control anteriormente vistos en la resolución de las tareas como factores de visibilidad en las subfiguras convexas, como la complementariedad de formas y las características del contorno con y sin grosor, el color, el índice, entre otras; intervienen en la resolución y promoción de actividades centradas

en hallar la articulación de los procedimientos vistos en paquetes de tareas previas, para construir figuras con relaciones determinadas.

En general, los resultados manifiestan que el procedimiento PE, permeo todas las tareas en su desarrollo, aunque en las T3.3 y T3.4 con una y dos U.A. respectivamente a su favor, lo que supone fue un proceder dentro de estas tareas, muy bajo. No se debe olvidar que el nivel de complejidad es ascendente en la resolución de las problemáticas, en especial en las tareas mencionadas, lo cual señala que los elementos de control en algunos casos se presentaron como obstáculos y/o oportunidades de acceder a nuevas formas de solución o de fracasar en el intento, específicamente, al intentar aplicar operaciones esperadas (añadir o retirar subfiguras) en la figura inicial, para cumplir con éxito la condición de las tareas como es el caso de la T3.3 y T3.4 al incluir operaciones 1D al trasladar o rotar lados de la figura dada para proponer una figura nueva con menor longitud de contorno y operaciones 2D con una figura nueva con menor cantidad de área que la figura dada; objetivos a desarrollar para responder de manera esperada el tercer y último paquete de tareas en el cual se generan distintas relaciones de orden y equivalencia a partir de la longitud de contorno y cantidad de superficie de las figuras propuestas, con el fin de suscitar tres casos entre la magnitud área y perímetro propuesto por D'Amore y Fandiño (2007).

Las familias visuales que caracterizan el presente momento son cuatro, se identifican por su alta recurrencia (107 unidades de análisis entre todas (U.A.)), en la resolución de las tareas, el resto de tareas desarrolladas fueron 41, las cuales no tuvieron relación entre sí. Es decir, contaban con diversidad de operaciones y elementos de control visual que no permiten asociarlas.

Tabla 38. Frecuencia de aparición de las familias visuales en el M3



Fuente: Elaboración propia.

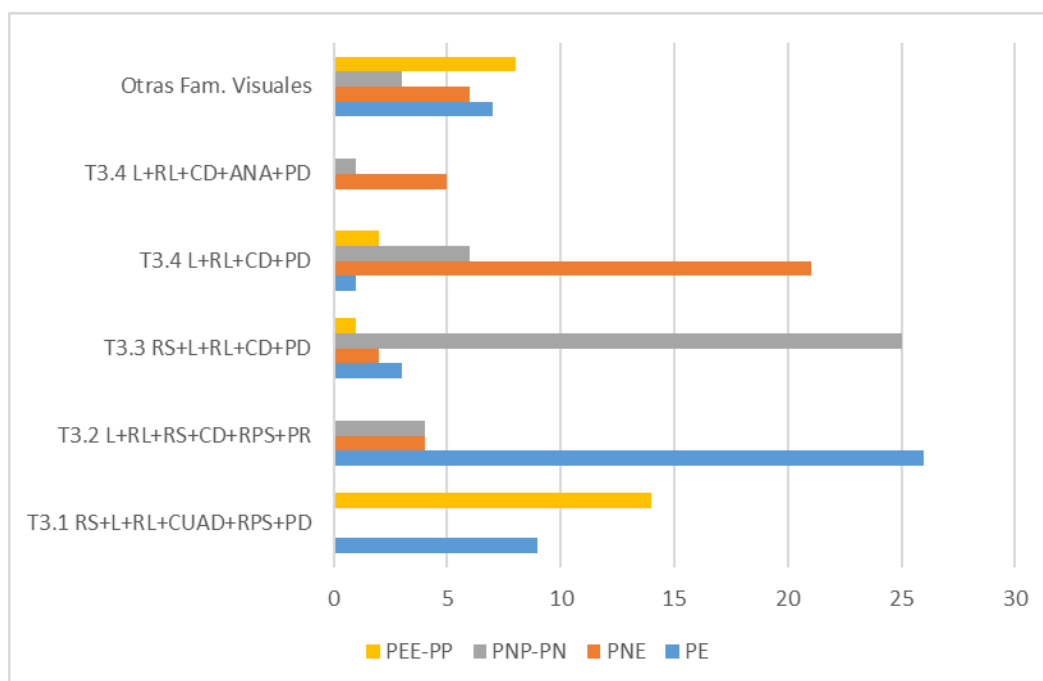
En la Tabla 39 se reseñan las familias visuales acogidas por los estudiantes al solucionar las actividades, en donde se observan operaciones y elementos de control visual esperados, los cuales fueron incluidos en las tareas para llegar al éxito, en especial en las T3.3, y T3.4 actividades de más alto nivel de complejidad.

Cabe mencionar que además se adoptan otras operaciones y elementos de control visual no esperados como es el caso de las tareas T3.1 y T3.2, al aplicar la operación de Reconfiguración Lineal (RL) al linealizar y deslinealizar las líneas de segmento de una figura y adicionar más segmentos para reconstruir una nueva figura ajustada a la condición de la tarea. También al implementar la operación de Reconfiguración Parcial Simple (RPS) introduciendo nuevos tipos de fraccionamientos a la figura dada, otra operación no esperada y tomada en cuenta por los estudiantes en la resolución de este paquete de tareas fue la operación de Cuadratura (Cuad) situación que genera una oportunidad de solución o posibles dificultades. En ese caso, los resultados muestran que las T3.1 y T3.2 fueron actividades en donde las familias visuales tenidas en cuenta para su resolución no fueron similares a las incluidas en el diseño de las tareas, como lo indican las frecuencias

observadas en la Tabla 14 (p.87) con el 16% para la T3.1 y el 19% para la T3.2, en donde la recurrencia en las U.A. fueron 23 y 28 respectivamente.

A continuación, se presenta la Tabla 40 que permite reseñar el comparativo entre las familias visuales y los procedimientos caracterizados. Es importante decir que las cinco familias visuales presentes cuentan con un 83% y otras familias visuales no consideradas por su extensa combinación de operaciones y elementos de control visual ocupan un 16% dentro del total de las tareas propuestas para el M3.

Tabla 39. Comparativo de las familias visuales y procedimientos en el M3

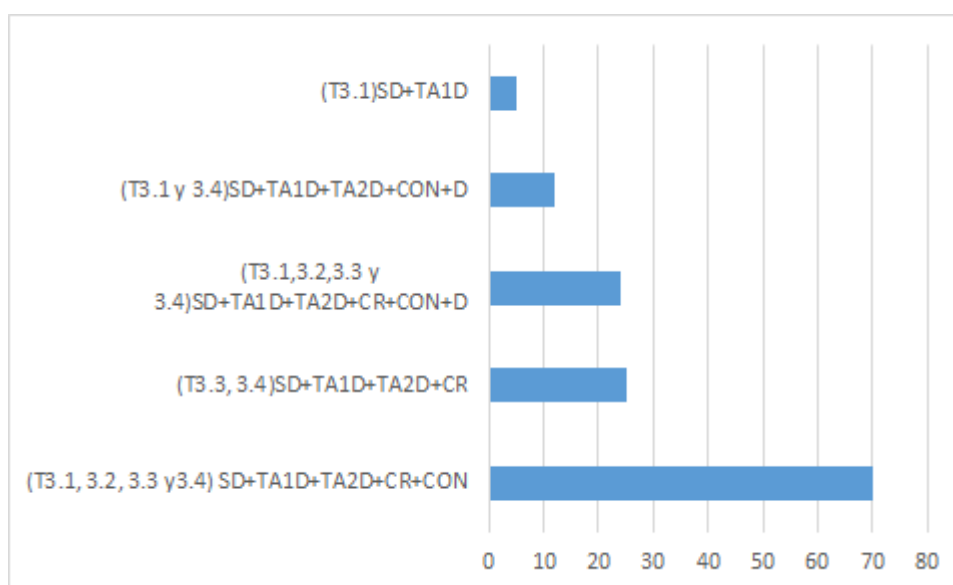


Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 40 permite observar que la familia visual de mayor incidencia en el M3 se encuentra en la T3.2 con la presencia del proceder PE, el cual cuenta con el 31% de aceptación en el despliegue de las tareas resueltas en el M3 con relación al resto de procedimientos que obtuvieron menor aprobación. Seguido a lo anterior, cabe mencionar que las T3.1, T3.3, T3.4 incluyendo otras familias con múltiples combinaciones, muestran en su orden la presencia del PE; situación que atribuye el éxito del proceder en el M3.

En la Tabla 41 se exponen las acciones con mayor frecuencia (136 U.A.), sobre los soportes en que se representan las figuras; repartidas en cinco grupos de acciones incluidas en el despliegue de los procedimientos ejecutados con un 92% al resolver las tareas del M3. Además, en 12 U.A. se encontraron otras agrupaciones de acciones con el 8% de las tareas restantes analizadas en este momento.

Tabla 40. Frecuencia de la Acciones sobre el soporte en el M3



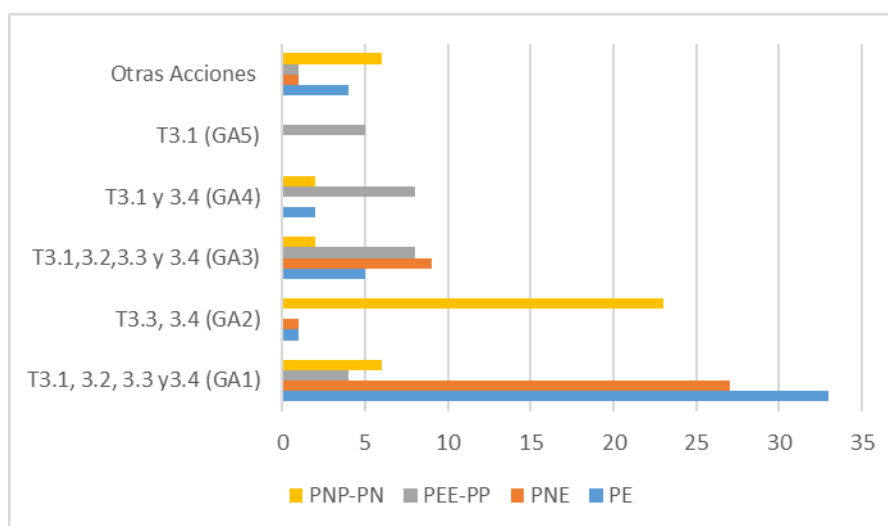
Fuente: Elaboración propia.

La acción que ocupa el primer puesto es 1(SD+TA1D+TA2D+CR+CON) con 47%, le sigue 2(SD+TA1D+TA2D+CR) con 17% y los tres grupos de acciones 3(TA2D+CR+CON+D), 4(SD+TA2D+CON+D) y 5(TA2D+CR+CON) restantes, con un 16%, 8% y 3% registrado en el desarrollo de las tareas del M3. Se destaca que el grupo de acciones 1 en adelante (GA1), es el único que cuenta con acogida entre las cinco tareas que conforman este momento, lo que demuestra que estos resultados de éxito en gran proporción se deben a la inclusión de acciones en el desarrollo de las tareas que así lo permitieron como se destaca en la Tabla 38 al considerarse en los tres grupos siguientes acciones similares, situación que no se consigue en el último grupo de acciones (GA5).

A continuación, se presenta la Tabla 39 que permite reseñar el comparativo entre las Acciones sobre el soporte y los procedimientos caracterizados.

Las Acciones sobre el soporte que caracterizan el procedimiento PE en este momento, han sido identificadas entre todas las tareas como se reseña en la Tabla 42. Se encuentran particularmente en los GA 1 y 3, incluso en el grupo de otras acciones como el segundo mayor de los procedimientos adoptado por los estudiantes al resolver las actividades propuestas. En el GA 2,4 y 5, la presencia de este procedimiento está ausente para el quinto y en baja frecuencia para el segundo y cuarto.

Tabla 41. Comparativo de las Acciones sobre el soporte y los procedimientos en el M3

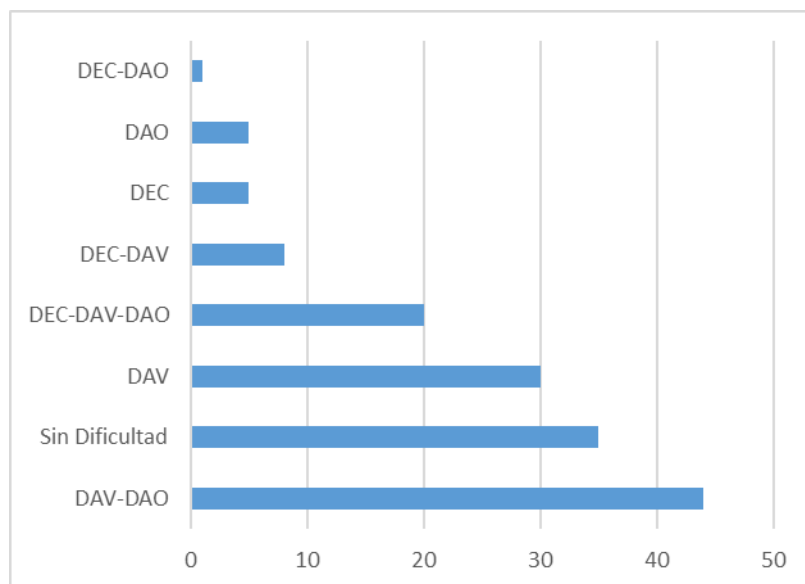


Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 42 indica que el PE cuenta con un 45 de U.A. que representa el 30% al estar relacionado con la categoría de acciones sobre el soporte en el M3. Es decir, que las acciones favorecidas por los estudiantes al resolver las tareas fueron las acertadas e incluidas en el diseño de las actividades de este momento, aunque se observa reñido el resultado con relación a otros proceder.

En relación a las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M3, se caracterizan aquellas que por su alta recurrencia se presentaron al resolver las actividades propuestas, tal como se reseña en la Tabla 43.

Tabla 42. Frecuencia de aparición de las Dificultades y potencialidades en el M3



Fuente: Elaboración propia.

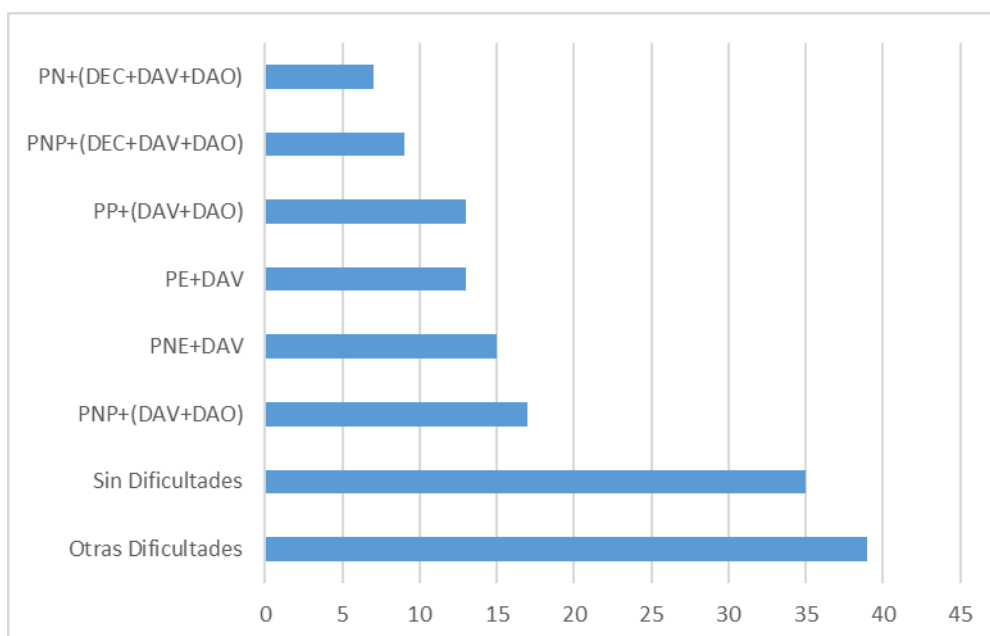
Las dificultades se combinaron y se mostraron individual como lo muestra la Tabla 43, destacándose siete grupos simultáneamente con un grupo que no indica dificultades en la solución con un 24% como el segundo dato más alto de la Tabla.

La dificultad que predomina al desarrollar las actividades es la combinación de dos dificultades DAV-DAO con el 30% y en adelante el resto de agrupaciones de dificultades se encuentran entre el 3% y el 20% reportados.

Estos resultados indican que en este momento a pesar de presentarse dificultades que impidieron el éxito esperado al solucionar las tareas, el segundo puntaje de mayor incidencia lo tiene el grupo sin dificultades lo que permite considerar que los elementos de control y las operaciones incluidas al diseñar las actividades del M3 fueron parcialmente efectivos.

A continuación, se presenta la Tabla 44 que permite reseñar el comparativo entre las Dificultades y los procedimientos caracterizados en este momento del estudio.

Tabla 43. Comparativo de Dificultades y potencialidades en los procedimientos del M3



Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 44 aparecen seis grupos de dificultades relacionadas con los cuatro procedimientos ya caracterizados, además de otras dificultades que por su variada combinación no fueron posible asociar con un 26% del total de tareas desarrolladas en el M3. Entre las dificultades de mayor recurrencia se encuentran PNP+(DAV+DAO) y PNE+(DAV) (en adelante GD1- y GD2) con un 11% y 10% respectivamente, seguido por el procedimiento PE+(DAV) (GD3) al resolver las tareas propuestas con un 9% como tercer puesto de la Tabla. En adelante los grupos se caracterizan por combinar dos y tres dificultades ya reseñadas, con datos que oscilan entre 5% y 9% para este paquete de tareas (M3).

Los dos primeros grupos resaltados anteriormente por su alto puntaje, se encuentran presentes en las tareas T3.3 y T3.4 específicamente para los grupos de dificultad GD1 (17 U.A.) y GD2 (10 U.A.) en el orden como aparecen las tareas. El tercer

grupo GD3 se evidencia en las T3.1 y T3.2 con datos entre el 6 y 7 (U.A.) en cada tarea reseñada. Se destaca especialmente en los dos primeros casos que no se consideraron los elementos de control y operaciones esperadas PE, pero coinciden en los tres grupos la dificultad DAV reflejada en su mayoría en las T3.3 y T3.4, como las tareas que con frecuencia revelaron dificultades asociadas a las exigencias visuales solicitadas.

En conclusión, la dificultad DAV, está relacionada con los procedimientos no esperados parcial o con éxito, lo que indica que se presentaron problemas en el reconocimiento de elementos de control y operaciones esperadas para solucionar las tareas, además de realizar marcaciones inconsistentes a las figuras dadas o construidas, lo que sugiere que algunos estudiantes no lograron identificar unidades figurales 1D o 2D.

De otra parte, la dificultad asociada al objeto matemático (DAO) relacionada con el procedimiento PNP, evidencia el no cumplimiento de las ideas matemáticas puestas en juego, con respecto a la magnitud área y perímetro, para este momento, en particular, al no considerar las relaciones entre cantidad de superficie y longitud de contorno.

Las tareas T3.3 y T3.4 específicamente, establecen relaciones de mayor exigencia mencionadas por Fandiño y D'Amore (2007), “cuando el perímetro disminuye y el área aumenta y viceversa” lo que lleva a determinar que el nivel de complejidad obstaculizo el papel de los elementos de control visual incluidos, especialmente al implementar otras operaciones no esperadas como la cuadratura o aplicar una reconfiguración simple, cuando se esperaba una lineal o la operación de linealización o tan sencillo como seguir el orden establecido en los enunciados para desarrollar las tareas; al privilegiar la relación de orden con respecto a la longitud de contorno y luego con relación a la cantidad de superficie lo cual en particular en las tareas señaladas generó complicaciones en su resolución, lo anterior entonces, influyó en el fracaso, de lo contrario probablemente se alcanzaría el

éxito con el GD3 PE+DAV en tercer lugar, a pesar de la dificultad asociada a lo visual en las tareas de esta paquete tres.

Procedimiento esperado con error (PEE) y Procedimiento esperado con éxito parcial (PP):

En este momento los procedimientos en cuestión ocuparon la última posición en la Tabla 37, con respecto a la frecuencia de aparición de fracaso para este caso en particular, del mismo modo, se evidencia en la Tabla 38 que las tareas T3.1, T3.2 y T3.3 obtuvieron un porcentaje de 65%, 3% y 3% respectivamente de acuerdo al orden de las tareas al comparar los procedimientos con las tareas del M3. Lo que indica que la T3.4 no registro dato, además de observarse mayor incidencia del procedimiento en la tarea T3.1 al considerar los elementos de control y operaciones esperadas de forma parcial, lo que provoca caer en errores al resolver las actividades.

Familias visuales:

En el paquete de tareas del M3, los procedimientos esperados con error PEE y esperado con éxito parcial PP, se hicieron presente en las tareas T3.1, T3.3 y T3.4; con datos de recurrencia muy bajos (14, 1, 2. U.A.) en su orden. Es decir, este proceder no obtuvo notoriedad entre las familias visuales de mayor acogida por los estudiantes al solucionar las tareas y ocupó el último puesto en la Tabla 37 con un porcentaje del 17% en el total de actividades del M3.

En cuanto al grupo de Otras familias visuales en la misma Tabla, estos procedimientos contaron con una frecuencia de 8 U.A. que corresponde al 5% al relacionar las familias visuales y los procedimientos del M3, lo que indica que este proceder tuvo más alta incidencia en el anterior grupo con respecto a este.

En consecuencia, los datos demuestran que a pesar de considerar la operación de reconfiguración lineal especialmente en el desarrollo de la T3.1(en donde este proceder obtuvo mayor frecuencia) con el objetivo de determinar la relación de orden y equivalencia de las figuras según su cantidad de superficie y su longitud de contorno, se interpuso la operación no esperada de cuadratura particularmente aplicada en la Fig. U caracterizada por privilegiar el contorno de la figura con un agujero, otra operación no esperada es la reconfiguración parcial superficial (RPS) en la cual la atención de los estudiantes pasa de centrarse en la figura de inicio a hacerlo en una de las partes en que fue dividida, introduciendo un nuevo fraccionamiento en algunos casos o perdiendo de vista poder comparar los segmentos de línea de las figuras U, X, V y W, en otras palabras, atender el contorno de las figuras, para acceder a la respuesta de la tarea.

Finalmente, estos dos procedimientos asumen los elementos de control de manera parcial y no total como es lo esperado, es decir, que los elementos de control visual funcionan como obstáculos en la resolución de las actividades al promover otras formas inesperadas de solucionar.

Acciones sobre el soporte:

En la Tabla 41 es posible observar cómo es reiterativa la implementación de acciones que promueven la identificación de unidades figurales 1 y 2D al operar en las unidades constitutivas de la figura e incluir también, trazos auxiliares, esto como consecuencia del propósito en las tareas del M3 en donde específicamente se pretende articular los procedimientos visuales considerados en los dos paquetes de tareas previos M1 y M2, para hallar la relación entre la cantidad de superficie y la longitud de contorno.

Las acciones sobre el soporte de papel en el M3, indican que favorecen la movilización del objeto matemático con relación a las magnitudes en cuestión, al delegar en acciones como trazos auxiliares de 1 y 2 dimensiones (TA1D) (TA2D), recortes,

dobleces, entre otras, la responsabilidad de garantizar el desarrollo de procedimientos que logren alcanzar el resultado esperado, tal como se refleja en la Tabla 42 con el procedimiento esperado con éxito (PE), el cual en su mayoría se destaca por su alta recurrencia entre los procedimientos utilizados para la resolución de las tareas por parte de los estudiantes.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M3 en relación con los procederes PEE-PP se encuentran rodeado por el conjunto de dificultades caracterizado en este estudio, lo que señala que fueron las causantes de no completar con éxito la T3.1, con mayor incidencia respectivamente, al no considerar en su totalidad los elementos de control visual planteados en las actividades, presentando en particular en esta tarea problemas al cumplir con la condición solicitada de ordenar de mayor a menor las cuatro figuras dadas, teniendo en cuenta las magnitudes en cuestión. Lo que constituye dificultades específicamente asociadas con las exigencias visuales (DAV) al no identificar las unidades figúrales 1 y 2D, además, de no realizar correctamente la operación de linealización en las figuras, en particular la Fig. U que se distingue por tener un agujero con la intención de centrar la atención en su contorno, de otra parte, se suma a lo anterior la dificultad DAO asociada al objeto matemático, propiamente a las magnitudes de área y perímetro; al realizar marcaciones inconsistentes sobre los segmentos de línea de las figuras y al sobre pegar subfiguras entre sí; lo que genera errores que imposibilitan terminar con éxito la tarea.

Procedimiento no esperado con éxito (PNE):

El procedimiento no esperado con éxito, por su parte, es el tercero más contemplado, con 38 U.A. presentes en este momento y un 26% de frecuencia de aparición, lo cual coincide con el proceder PNP-PN, ver Tabla 37.

Al revisar el comparativo entre procedimientos y tareas del M3 es posible determinar que este proceder PNE aparece en las tareas T3.2, T3.3 y T3.4 tal como se observa en la Tabla 38, con una frecuencia (6, 3 y 29) U.A. que la posiciona como el tercer proceder de mayor adopción y un porcentaje total de 26% en el M3.

Familias visuales:

Se resalta que el procedimiento no esperados con éxito PNE se encuentra en segundo puesto en la Tabla 37 como los procederes de mayor acogida al relacionarse con la familia visual que los estudiantes implementaron para solucionar las tareas del M3.

Las familias de visualización promovidas en la resolución de las tareas del M3 fueron cinco (ver Tabla 6 p.7), con respecto a este proceder la familia visual reflejada en su mayoría es la T3.4 (L+RL+CD) + PD) lo que permite ejemplificar la razón por que algunas tareas se encuentran bajo esta caracterización a pesar de cumplir con la condición solicitada, y es por el uso incorrecto de operaciones como la linealización, pues, al focalizar la atención en las unidades constitutivas 1D para determinar la longitud del contorno y proponer una nueva figura se cae en el error de descuidar la precisión al marcar los segmentos de línea, de igual forma al implementar la operación de reconfiguración lineal, se linealiza, deslinealiza y adiciona líneas de segmento para cumplir con la condición establecida “construir una figura con menor cantidad de superficie que la figura dada” pero no se logra interpretar el enunciado generando obstáculos el orden al ejecutar las operaciones. También, los elementos de control de contraste como el color y el grosor

fueron omitidos, lo que indica que no se reconoce la forma de la figura, ni se pasa a discriminar los lados que la constituyen percibiendo los bordes o contorno de la figura; sino que se aplica la operación de reconfiguración simple como primera opción a efectuar, confundiendo el objetivo de la tarea.

Es el caso de la T3.4 donde se observa otra familia visual (L+RL+CD+ANA) +PD en la cual la operación de anamorfosis de la figura, se encuentra presente, variando la conservación de la forma de la figura por achicamiento o agrandamiento, deformando la figura dada, impidiendo llegar al éxito en esta tarea. Es decir, que el mal uso de operaciones que no permiten mostrar a los estudiantes que adoptaron este tipo de procedimiento, reconocer el camino esperado, pero que después de intentarlo llegan a conseguir responder, aunque el proceso no fuere el preparado. De acuerdo a lo anterior el proceder PNE ocupa la mayor recurrencia en la T3.4 con una frecuencia de 26 U.A. y el 18% con respecto al mismo proceder en el resto de la tarea.

En las tareas T3.2 y T3.3 la frecuencia (6 y 3) del PNE es adoptada con bajo nivel, debido al fuerte impacto de los elementos de control visual, al permitir acceder a las operaciones esperadas; cabe mencionar que lo mismo no sucede con la T3.1 en donde no fue considerado este proceder PNE.

Acciones sobre el soporte:

En la Tabla 42 se observan las acciones sobre los soportes de papel, asociadas con los procedimientos PNE, específicamente en los GA1, GA3 y GA2 con baja frecuencia (27, 9 y 1U.A.) y un 26% a comparación del procedimiento PE con 30%. Es así, como estos procederes muestran la aplicación de la superposición o comparación por disyunción de figuras (SD), la identificación de unidades figural de 1 y 2D (TA1D), (TA2D), recorte de subfiguras (CR) y la implementación de elementos de contraste (CON),

En otras palabras, el procedimiento no esperado con éxito (PNE) muestra que los estudiantes consideraron los elementos de control incluidos los cuales promueven la visualización, objetivo que no se cumplió totalmente al desarrollar las tareas de este paquete y muestra cómo las figuras se presentan de forma estática. Lo que deja ver que las figuras se movilizaron de forma estática y se genera el procedimiento ya mencionado como resultados del análisis de las U.A. desarrollados por los estudiantes.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M3 para PNE se pueden observar en la Tabla 40, al evidenciar en el cuarto lugar el registro del procedimiento asociado con la dificultad DAV (GD4) con 10%, que aunque de baja recurrencia indica que las tareas que fueron desarrolladas por este proceder, además de no considerar en su totalidad los elementos de control visual incluidos, presentaron problemas al no lograr realizar con precisión las demarcaciones en el contorno de las figuras, pues no se aplica la operación de linealización de manera adecuada con relación a la condición solicitada en particular en la T3.4 que presenta mayormente esta dificultad; además de sobre pegar las subfiguras entre sí omitiendo la conservación de la magnitud área, lo cual genera inconsistencias para llegar al éxito.

Procedimiento no esperado con error (PN) y Procedimiento no esperado con éxito parcial (PNP):

Estos procederes ocupan dentro de la frecuencia de aparición asociados al éxito y fracaso en el M3, el segundo puesto compartido con el procedimiento PNE (38 U.A.) con una recurrencia de 39 U.A. una más con respecto al otro proceder mencionado y un 26% del total de las tareas en el cual coinciden ambos procederes. Al tiempo que se encuentran en las tareas de mayor complejidad como lo son T3.3, T3.4 y T3.2 con un registro (31,7 y

1) U.A. y un porcentaje de (84%, 19% y 3%) respectivamente de acuerdo al orden de las tareas. Estos resultados señalan que los procedimientos no esperados, aunque no son mayoría frente al resto de procederes en las tareas del M3, dejan al descubierto interrogantes al ser desplegados para desarrollar las actividades en segundo y tercer lugar respectivamente.

Familias visuales:

En la Tabla 40 se destaca la relación de los procedimientos no esperados (PNP-PN) con las familias visuales por compartir el segundo puesto con el PNE de mayor registro con un porcentaje de 26% al solucionar las tareas propuestas del M3.

Las familias de visualización promovidas, en la resolución de las tareas del M3 con relación a estos procedimientos, se evidencian en las T3.3, T3.4, T3.2 y otras familias; con una frecuencia de (25, 7, 4 y 3 U.A.) en el orden señalado, lo que indica a su vez, que este proceder se presenta con alta incidencia en la T3.3 al no seguir las instrucciones del enunciado y cambiar en su mayoría el orden de ejecución de las operaciones, particularmente al realizar la reconfiguración simple (RS) y no la linealización (L) y la reconfiguración lineal (RL) esperadas en el desarrollo de la tarea y construir una nueva figura que cumpliera las exigencias solicitadas, se cae en inconsistencias con respecto a la longitud de contorno. Sin desconocer que el objetivo de la actividad es de alta complejidad según Fandiño y D'Amore (2009).

Acciones sobre el soporte:

Las acciones sobre los soportes en que se representan las figuras que fueron incluidas en las Tareas del M3 para los procedimientos PNP- PN se reflejaron en la mayoría de las tareas en donde, por ejemplo, a pesar de utilizar acciones

(SD+TA1D+TA2D+CR) en adelante (GA2), que al ser aplicadas en las T3.3 y T3.4 generarían buenos argumentos para sustentar el resultado favorable de las tareas, obstaculizaron el desarrollo de la misma, arrojando errores en el procedimiento. Lo que significa que los elementos de control visual fueron ignorados o un obstáculo en la resolución de las tareas. En las tareas en cuestión T3.3 y T3.4, los estudiantes en su mayoría utilizaron las acciones esperadas para su resolución, pero al leer el enunciado no logran interpretar y comprender la característica de la figura de llegada lo que produjo calcular la longitud de contorno de la figura inicial y no relacionar en algunos casos la importancia de la longitud de contorno de la figura de llegada para cumplir con la condición solicitada en la tarea. Ahora bien, para llegar con éxito a que la figura C' fuera de menor cantidad de superficie con respecto a la figura D' algunos estudiantes intentaban reducir la cantidad de superficie inicial suprimiendo una subfigura de la figura de partida, lo cual no era un camino a tener en cuenta, por lo tanto, no llegaban a cumplir satisfactoriamente la tarea.

Dificultades y potencialidades:

Las dificultades y potencialidades asociados a la resolución de las tareas del M3 en el PNP- PN se pueden evidenciar en la Tabla 44 en el tercer lugar (GD3), con dos dificultades específicamente (DAV-DAO) y con menor frecuencia al final de los datos más representativos de esta categoría en el M3, en los (GD7) y (GD8) en donde se encuentran tres dificultades en conjunto dentro del procedimiento. Es decir, que estos procedimientos combinados PNP-PN se muestran de acuerdo a los datos analizados a través de las U.A. como mayor representatividad en los procedimientos no esperados con el porcentaje más alto 21%, lo que permite establecer que la suma de las dificultades intervino para que se diera el despliegue de procedimientos no deseados en el M3.

Cabe mencionar entonces, que los procederes con mayor presencia después de PE contemplados por los estudiantes en la resolución de las tareas del M3 fueron PNE y PNP-PN lo que indica que los elementos de control especialmente en las T3.3. y T3.4 presentaron una creciente dificultad en su resolución, al no desconocer que se hallaban las relaciones de mayor complejidad mencionadas por Fandiño y D'Amore (2009) “cuando el perímetro disminuye y el área aumenta y viceversa”

6.1.3 Discusión de resultados M3

6.1.4 Trabajo previo

A continuación, se establece qué efectos tiene lo anterior en la enseñanza de la relación perímetro-área y en el desarrollo de la visualización. Finalmente, se sugiere cuestiones a considerar en futuras réplicas de la propuesta de enseñanza diseñada en el presente estudio.

6.1.5 Establecimiento de relaciones entre el área y el perímetro: Articulación entre la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas

Para el último momento, la idea uno se promueve en el diseño, al utilizar los procedimientos aprehendidos en las tareas anteriores, para construir figuras con relaciones determinadas, al hallar las relaciones entre la cantidad de superficie y longitud de contorno, con el objetivo de establecer que no siempre igual área determina igual perímetro y viceversa.

Del mismo modo, al generar distintas relaciones de orden y equivalencia a partir de la longitud de contorno y cantidad de superficie de las figuras propuestas, con el fin de suscitar tres casos de relaciones entre la magnitud área y perímetro propuesto por Fandiño

y D'Amore (2007). Es decir, la articulación de la aprehensión operatoria y discursiva se resalta en este paquete de tareas para promover en el diseño la idea.

En la Tabla 37 de la pág.157 es posible verificar que el procedimiento esperado con éxito fue el de mayor adopción para la resolución de este paquete de tareas con un porcentaje correspondiente al 30% del total de las tareas analizadas.

En conclusión, el total de porcentaje correspondiente al PE del total de la propuesta de enseñanza, para el caso del procedimiento esperado con éxito muestra 44% de efectividad con relación a las 629 U.A.

De tal manera, es posible determinar que el desarrollo de la Aprehensión operatoria no se dio, puesto que el porcentaje de éxito es inferior al 60%, en este caso 44%, este resultado puede ser generado por las limitaciones encontradas en la resolución de las tareas al transformar las figuras.

Con el propósito de conocer si la propuesta de enseñanza aplicada en la investigación provocó el desarrollo de la Aprehensión operatoria y considerar si se logró o no su desarrollo, se presentan los porcentajes de éxito alcanzados por los estudiantes en cada tarea del M3 en la siguiente Tabla, al diferenciar el valor que corresponde al PE y a PNE.

Tabla 44 Porcentaje de procedimientos PE y PNE que conforman el procedimiento con éxito PX del M3

	PE	PNE	PÉxito
T3.1	35	0	35%
T3.2	78	16	95%
T3.3	5	8	14%
T3.4	3	78	81%

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados presentados en la tabla 45, reflejan que ninguna de las tareas provocó un desarrollo óptimo de la articulación de la Aprehensión operatoria y de la deconstrucción dimensional de las formas. Las dos últimas relaciones planteadas en M3 según el estudio de Fandiño y D'Amore (2007) son de alta complejidad, es decir, para que los estudiantes logren este tipo de R(p/a) es necesario tareas con alto nivel de complejidad visual.

Con relación al resto de tareas en la T3.2 se evidencia un aumento en el porcentaje de éxito en relación a la tarea siguiente, las T3.2 y T3.4 revelan un aumento en el porcentaje con relación al anterior, lo que demuestra un desarrollo parcial de la Aprehensión operatoria.

Algunos de los aspectos de naturaleza visual que explican la distinción entre el porcentaje de éxito alcanzado en el desarrollo de T3.3 y el alcanzado en el resto de tareas (T3.1, T3.2, T3.4): el tipo de operación aplicado, las partes donde se aplican dicha operación (característica de las figuras, cóncava y convexa) y los elementos de control introducidos. En la T3.3 es necesaria la reconfiguración lineal y la linealización, los elementos de control propuestos se presentan de manera parcial. Con relación al otro grupo de tareas están conformadas por la operación de reconfiguración y procedimiento por réplica.

En cuanto al primer aspecto, en T3.3 se precisa la aplicación compuesta de cuatro operaciones (reconfiguración lineal y reconfiguración simple, linealización, deslinealización), mientras que el resto de tareas tiene como característica común la aplicación de la reconfiguración simple. En relación al segundo aspecto, en la T3.3 las partes donde se aplica la operación de linealización para garantizar el cumplimiento de la relación, es incluida específicamente al lograr centrar la mirada en dos líneas de segmento

en donde una de ellas debe ser trasladada y posteriormente reconfigurada linealmente la figura de inicio en otra figura de llegada (deslinealización); la otra línea de segmento será removida de la figura.

El tercero de los aspectos es pertinente reseñar en la T3.3 la ausencia del desarrollo del procedimiento esperado con éxito PE y por el contrario la adopción en su mayoría del procedimiento no esperado parcial PNP. Si bien, se alude a transformar la figura de partida en otra figura de llegada de acuerdo a la relación determinada (“La longitud de contorno de la figura C' es mayor que la longitud de contorno de la Figura D' y la cantidad de superficie de la Figura C' es menor que la cantidad de superficie de la Figura D' ”) la acción indicada no refiere explícitamente a las partes de la figura que deben ser trasladadas, en consecuencia, transformadas.

Es posible entonces afirmar que la acción reseñada puede constituir un elemento que perjudique la visibilidad de las operaciones a aplicar y de los lugares donde hacerlo. Esto debido a que a lo largo de las tareas previas se viene operando sobre la figura dada de tal forma que se genera una figura distinta con contorno global diferente e igual área, en particular para el paquete de tareas del M1, además, en el M2 como en el anterior se muestra la Figura inicial y la de llegada, lo que en las tareas del M3 no ocurre.

Entonces, en T3.3 se rompe con la forma de presentación de la figura para ser resuelta, aludiendo al cumplimiento de una condición (relación), que bien podría pasar que los estudiantes centrarán la atención en la cantidad de superficie, cambiando el orden de la instrucción del enunciado lo que acarrearía el cumplimiento del aumento de superficie pero no propiamente la disminución de la longitud de contorno como se exige; incluso los estudiantes que decidieron proceder con el orden de la acción solicitada como lo indica el enunciado presentaron en el desarrollo de la tarea un procedimiento no esperado, pues en

tareas previas no se explicita la acción de adicionar figuras (subfiguras) o de sustraer líneas de segmento.

Lo anterior implica afirmar, no dejar recaer en el enunciado, que en general participa como un elemento de control, los aciertos de éxito de la tarea. Al contrario, se debe propender por reforzar la escogencia de un procedimiento esperado con éxito PE al favorecer la aplicación de acciones visuales en juego, para este caso en particular al señalar contundentemente la característica de la Figura de partida y proponer la construcción de figuras definidas como las cóncavas y convexas, solo así, quizás la introducción de esta actividad de trabajo en el paquete de tareas, resultaría de mayor provecho.

Con relación a tipo de procedimientos incluidos en las tareas se puede determinar que en la T3.1, T 3,3 y T 3.4 el procedimiento directo está presente; y en la T3.2 está el procedimiento por réplica. De otro lado, en el M3 la composición de al menos dos tipos de operaciones como la reconfiguración simple y la reconfiguración lineal son las operaciones de mayor constancia en el paquete de tareas. Solo en la T3.3 se adhieren dos operaciones más para el desarrollo de la tarea, linealización y deslinealización; operaciones determinantes en el paquete de tareas del M2 para alcanzar el objetivo de descomponer la figura de dos dimensiones en unidades de una dimensión.

La T3.3 es cognitivamente más compleja que las tareas anteriores, porque propone realizar cuatro operaciones conjuntas, en donde cada uno de los lados de la Figura C' debe trasladarse y/o rotarse para proponer una Figura D' con menor longitud de contorno que C' y articular los procedimientos visuales considerados en los dos paquetes previos de tareas (M1 y M2)

Se propuso la T3.3 con el fin que los estudiantes superaran la complejidad visual a partir de haber resuelto las anteriores tareas. Se consideró que las tareas T3.2, T3.3 y

T3.4 hicieran referencia a tres casos de relaciones entre la magnitud área y perímetro propuesto por D'Amore y Fandiño (2007).

En breve, los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indican que:

- a. Utilizar los procedimientos aprendidos en los paquetes de tareas anteriores, para construir figuras con relaciones determinadas y en el proceso aplicar alrededor de no menos de dos y tres operaciones de distinta naturaleza (reconfiguración simple, linealización y deslinealización) sobre unas y otras es una exigencia cognitiva alta que solicitar transformar una figura en otra mediante la reconfiguración simple.
- b. Al tener en cuenta que las tareas están ordenadas de menor a mayor complejidad, es importante para una próxima aplicación con el fin de disminuir el bajo porcentaje de éxito T3.3 en relación al resto de tareas, precisarse en el lenguaje propio de las matemáticas al presentar cada tarea, es decir, que el docente investigador enfatice especialmente en la características y propiedades de las figuras y recuerde a los estudiantes su nombre particular, en el caso de figuras cóncavas y convexas.
- c. Los resultados del estudio indican la necesidad de incluir en las tareas del momento tres más casos en donde la operación de deslinealización y reconfiguración lineal sean mayormente visibles. Las tareas intermedias deben de consistir en comparar entre si figuras de complejidad media a la siguiente tarea, es decir que sean figuras en donde se establezca que no siempre la relación igual área determina igual perímetro y viceversa.

6.1.6 La intervención de las acciones sobre los soportes consideradas por los estudiantes en las Tareas 3.4. y el resto de tareas (T3.1, T3.2 y T3.3) del M3

Son varios los aspectos de naturaleza visual que explican la diferencia entre el porcentaje de éxito alcanzado en el desarrollo de T3.3 y el alcanzado en el resto de tareas (T3.1, T3.2, T3.4): en cuanto a las acciones sobre el soporte en que se fueron representadas las figuras, son cuestiones que explican la diferencia entre T3.3 y el resto de tareas, las siguientes: el tipo de acciones aplicado, las partes donde se aplican dichas acciones y las acciones sobre el soporte introducidas.

En cuanto al primer aspecto, en la T3.3 se precisa la inclusión de acciones como la disyunción sobre los soportes de papel, al tener en cuenta dos tipos de soportes, la ficha de trabajo donde se encuentra la consigna (soporte 1) y los recortes de las representaciones de las figuras (soporte 2) para favorecer la aplicación de las operaciones esperadas (linealización y deslinealización) y solucionar la actividad problemática. En el resto de tareas los factores de visibilidad como la complementariedad de formas y las características del contorno generan formas de ver que influyen en el proceder, para llegar al éxito de las tareas. Es decir, en las tareas del M3 se presenta una única figura, y se espera que transformen figuras con relaciones de mayor complejidad mencionadas D'Amore y Fandiño (2009).

En relación al segundo aspecto, la T3.3 al caracterizarse por incluir las operaciones de linealización y deslinealización, se consideraron acciones visuales orientadas al desarrollo de dichas operaciones como los dibujos, los trazos auxiliares de 1D, la disyunción al contemplar la longitud de contorno de las figuras en cuestión. En el resto de tareas (T3.1, T3.2 y T3.4) el uso de elementos de contraste como la complementariedad de formas, de figuras con orificios, figuras cóncavas y convexas.

La inclusión de figuras cuyas líneas de los segmentos presentan un engrosamiento, son algunos de los elementos de contraste que se encuentran en la T3.3, una de las acciones que con mayor demanda se realizó en esta tarea por los estudiantes fue el trazo de líneas

auxiliares 1D y 2D como la figura que representa el objeto o la acción ejecutada sobre la figura.

Finalmente, en lo relacionado con el tercero de los aspectos mencionados anteriormente, en la T3.3 para alcanzar el objetivo de la actividad de articular los procedimientos visuales para construir la figura con la relación determinada “mayor área y menor perímetro” se esperaba que los estudiantes realizarán los trazos de 1D y 2D sobre la figura, como una acción clave para acceder a la operación de linealización y deslinealización, lo que no fue tan recurrente dentro de los procedimientos de los estudiantes, probablemente es un factor que incide en el bajo rendimiento al desarrollar la tarea.

Por el contrario, especialmente en la T3.3 la acción frecuente no esperada ni propuesta en el diseño de la tarea, y tampoco promovida en el resto de tareas implementadas, fue añadir una figura a la figura dada con la intención de cumplir con la relación solicitada para cumplir con la tarea.

En breve los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indica que:

- a. La responsabilidad de las acciones sobre el soporte de las figuras se pueden ver reflejados en la resolución de las tareas, al implementar el trazo de líneas auxiliares sobre los soportes de las figuras y promocionar la aplicación de operaciones de reconfiguración simple, linealización y deslinealización, como las operaciones de mayor incidencia en este paquete de tareas de la propuesta, y considerar el elemento de control visual de complementariedad de formas para la T3.1; movilizando la identificación de unidades figurales 1D y 2D, para dar solución a la problemática y transformación en la figura, lo que aumenta el grado de complejidad de una tarea a otra. Del mismo modo, acciones como los elementos

de contraste e índice (color, flechas, letras) fueron incluidos en los procedimientos de los estudiantes con alta frecuencia permitiendo explicar y argumentar los procedimientos ejecutados favoreciendo el rendimiento positivo para la resolución de las tareas.

- b. En otras acciones sobre el soporte como la disyunción, se observó una alta demanda en las tareas T3.1 a T3.4 debido a las figuras de partida y llegada que se proponen en estas actividades, al identificar el reconocimiento de las unidades figurales de 1D y 2D, logrando aplicar las operaciones esperadas.

Las acciones sobre el soporte influyeron de manera negativa cuando se observa que los elementos de control visual obstaculizan la forma de ver, al aplicar las operaciones no consideradas para la resolución, y no lograr promover las transformaciones esperadas, lo que a su vez genera que la T3.3 se caracterice con un desarrollo de la AO limitado.

En cuanto a las acciones que aparecen en la tarea T3.3 (trazos 1D, líneas de segmento con grosor, contraste) son entonces la diferencia entre el resto de las tareas T3.1, T3.2, T3.4 (trazos auxiliares 1D y 2D y disyunción) planteadas en la propuesta de enseñanza, donde los resultados de la investigación ponen en evidencia que este tipo de acciones pueden llegar a explicar por qué esa diferencia entre los porcentajes arrojados en el estudio, específicamente con relación a la influencia de las acciones y el bajo rendimiento en la T3.3.

Se consideraron también en tareas como la T3.3 acciones sobre el soporte como elementos de control de contraste al engrosar algunas líneas de la figura inicial para contribuir en la aplicación de una reconfiguración lineal, linealización y deslinealización y posterior configuración de la figura, para determinar la articulación de los procedimientos de los paquetes de tareas previos M1 y M2. Pero, lo que sucedió

específicamente es que los estudiantes no lograron realizar el salto que se esperaba al resolver las últimas tareas del M2 orientadas al desarrollo de deslinealización e incursionar con la propuesta de esta tercera actividad (T3.3), lo que generó recurrir a otros procedimientos como considerar añadir figuras a la figura inicial desconociendo la instrucción dada en el enunciado de la actividad.

- c. Es así como, acciones sobre el soporte como la disyunción al linealizar y deslinealizar las figuras, fueron acciones de mayor uso por los estudiantes, para comparar y determinar el orden o equivalencia de la longitud de contorno de las figuras, con el fin de dar cumplimiento al objetivo del M3, especialmente en las tareas T3.1, T3.2, de igual forma, importante a destacar en el proceso de resolución de los estudiantes tiene que ver con el uso de contraste/ índice donde las distintas representaciones que los estudiantes utilizan son acompañadas de letras, flechas y en algunos casos colores marcados sobre las líneas de contorno de las figuras para comunicar su procedimiento.

6.1.7 La intervención de las dificultades consideradas por los estudiantes en las Tareas 3.4. y el resto de tareas (T3.1, T3.2 y T3.3) del M3

Entre las dificultades de mayor recurrencia se encuentran DAV y DAO, presentes en las tareas T3.3 y T3.4 También se destaca especialmente que no se consideraron los elementos de control y operaciones esperadas, por tanto no se reflejó el procedimiento PE, pero coinciden en la dificultad DAV reflejada en su mayoría en las T3.3 y T3.4, como las tareas que con frecuencia revelaron dificultades asociadas a las exigencias visuales solicitadas, lo que además muestra que se presentaron problemas al realizar marcaciones inconsistentes a las figuras dadas o construidas, lo que sugiere que algunos estudiantes no lograron identificar unidades figúrales 1D o 2D.

De otra parte, la dificultad asociada al objeto matemático DAO, evidencia el no cumplimiento de las ideas matemáticas puestas en juego, con respecto a la magnitud área y perímetro, para este momento, en particular, al no considerar las relaciones entre cantidad de superficie y longitud de contorno.

Las tareas T3.3 y T3.4 específicamente, establecen relaciones de mayor exigencia mencionadas por Fandiño y D'Amore (2009), “cuando el perímetro disminuye y el área aumenta y viceversa” lo que lleva a determinar que el nivel de complejidad obstaculizo el papel de los elementos de control visual incluidos, especialmente al implementar otras operaciones no esperadas como la cuadratura o aplicar una reconfiguración simple, cuando se esperaba una lineal o la operación de linealización o tan sencillo como seguir el orden establecido en los enunciados para desarrollar las tareas; al privilegiar la relación de orden con respecto a la longitud de contorno y luego con relación a la cantidad de superficie lo cual en particular en las tareas señaladas generó complicaciones en su resolución, lo anterior entonces, influyó en el fracaso, de lo contrario probablemente se alcanzaría el éxito, a pesar de la dificultad asociada a lo visual en las tareas de este paquete tres. En las tareas T3.1 y T3.2 por el contrario, se reflejó un desarrollo de procedimientos positivo frente al cumplimiento del objetivo en cada actividad.

En las tareas T3.2, T3.3 y T3.4 no considerar en su totalidad los elementos de control visual incluidos, presentaron problemas al no lograr realizar con precisión las demarcaciones en el contorno de las figuras, pues no se aplica la operación de linealización de manera adecuada con relación a la condición solicitada en particular en la T3.4 que presenta mayormente esta dificultad; además de sobre pegar las subfiguras entre sí, omitiendo la conservación de la magnitud área, lo cual genera inconsistencias para llegar al éxito.

En breve los resultados del estudio junto a las reflexiones reseñadas en los párrafos anteriores indica que:

a. En actividades de complejidad alta como sucede en las tareas T3.3 y T3.4 es preciso guiar la resolución de las mismas desplegando las operaciones de reconfiguración lineal y simple respectivamente, familias visuales y acciones incluidos para llegar al éxito; y así, promover el desarrollo de la aprehensión operatoria y discursiva. Al no aplicar correctamente las operaciones se cae en errores como realizar marcaciones incorrectas, que a su vez consiguen no lograr identificar unidades figúrales 1D a 2D. En otras palabras, la convexidad en el contorno de las figuras, participa como factor de visibilidad introducido a la resolución de las tareas; al generar llevar al éxito la tarea. Además, de proponerse figuras de llegada con menor longitud de contorno y mayor cantidad de superficie.

b. Enfatizar en el uso de la operación de linealización en el reconocimiento de la longitud de contorno de las figuras, es una posibilidad de acceder al concepto de magnitud de medida, al priorizar la reconfiguración lineal se ampliará el manejo y familiarización de la relación con la reconfiguración simple y la cantidad de superficie en una figura, de esta forma es probable que se realice un acercamiento a las diferentes relaciones no solo propuestas en este estudio sino las ya existentes.

¿Cómo intervinieron las dificultades encontradas por los estudiantes en las tareas del M1, M2 y M3?

Son varios los aspectos que explican el porcentaje del éxito alcanzado en el desarrollo de las tareas a lo largo de la aplicación de la propuesta de aprendizaje. Del

mismo modo, se presentan aspectos que por el contrario no permiten acceder a los procedimientos con éxito en el desarrollo de las actividades y que impiden su resolución asertiva. A continuación, se presentan las dificultades que marcaron de manera general este proceso, especialmente en tareas como T1.4, T2.5 y T3.4; actividades que por su nivel de complejidad marcaron la diferencia entre el resto de las tareas planteadas.

La dificultad de mayor recurrencia es DAV al evidenciarse que los enunciados de las tareas en algunas oportunidades encaminaron la visualización de manera errónea, también la característica de los trazos que se introducen en las figuras como sucede en la T1.4, este aspecto hace que las distintas posibilidades de transformación de las figuras se centren en la subfigura, interrumpiendo el desarrollo adecuado de las actividades.

En cuanto a las dificultades de la tarea T2.5, al enfocarse en las operaciones de linealización y deslinealización produciendo un cambio dimensional en la figura propuesta, al presentar la figura inicial y tener que proponer la figura final; hubo mayor complejidad, aun cuando las tareas anteriores (T2.1 a T2.4) procuraron centrar la atención en este objetivo.

Otra dificultad reseñada es DAO, al desplegar procedimientos en la resolución de las tareas no esperados como consecuencia al poco manejo del concepto matemático movilizado en las actividades a comparación de tareas que sí promovieron el establecimiento de la relación de orden en la cantidad de superficie en el caso del paquete de tareas del M1, de igual forma para el M2, al centrar la atención en la relación de orden y equivalencia en la longitud de contorno de las figuras dadas y requeridas como condición para la resolución de las actividades.

VII. CAPÍTULO CONCLUSIONES

Este estudio responde a la preocupación de las investigadoras por indagar cómo caracterizar el rol de la visualización en el estudio de las diferentes relaciones que suscitan el área y el perímetro.

Este trabajo aporta propuestas nuevas de investigación por cuanto que:

- Se consideró un diseño de tareas que propone la articulación de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de las formas, con el fin de explorar la $R(p/a)$.
- Este estudio analiza cómo el tratamiento del concepto de área de superficies planas y de longitud de contorno de las figuras, se suma aquellas reflexiones que promueven el desarrollo de la visualización.
- Los conceptos de cantidad de superficie y longitud de contorno permiten un estudio cualitativo del área y del perímetro.
- La propuesta de enseñanza está enmarcada bajo los documentos de dominio público como los lineamientos curriculares, estándares de calidad, DBA entre otros.

Las anteriores afirmaciones han generado el interés necesario para ahondar en el estudio de la $R(p/a)$, como un objeto matemático para promover el desarrollo de la visualización. Algunas de las cuestiones de nuestro interés son: ¿Qué rol desempeñaron las acciones visuales (transformaciones visuales y elementos de control visual) considerados por los estudiantes en formación para establecer ideas matemáticas que susciten el estudio de la $R(p/a)$? ¿Cuáles son las ideas matemáticas que se consideran para suscitar el estudio de la $R(p/a)$ desde una perspectiva visual? ¿Qué aspectos visuales

(operaciones, estructuras y funciones de control) fueron considerados por las estudiantes en formación? ¿Cuáles aspectos visuales (operaciones, estructuras y funciones de control) propiciaron la inclusión de las ideas matemáticas asociadas al estudio de la R(p/a)? ¿Cuáles estrategias usaron los estudiantes para el desarrollo de las tareas? ¿Qué tipos de desarrollo se identifican en los estudiantes al articular las dos clases de visualización, teniendo en cuenta los elementos de control?

Para responder a los interrogantes antes mencionados, se ha partido de lo propuesto por Duval (1995, 1999, 2003, 2004a, 2004b) al promover la visualización a partir de la articulación de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de las formas, siendo la R(p/a) planteadas por Fandiño y D'Amore (2007) el objeto matemático propicio para el desarrollo de la visualización. Del mismo modo, la estructura de elementos de control visual mencionado por Marmolejo & González (2013a, 2013b, 2014, 2015b), incluidos en el diseño de las tareas propuestas; al generar varias posibilidades de solución de las mismas.

Igualmente se tuvo en cuenta lo expuesto en el estudio por Marmolejo, Vega y Galeano (2019) en donde se presenta algunos tipos de procedimientos con mayor recurrencia con respecto a la reconfiguración de las figuras y las acciones sobre el soporte de papel, por parte de los estudiantes.

Consecución de los objetivos de la investigación.

Seguidamente se describe, en qué medida han sido alcanzados los objetivos específicos planteados en la presente investigación.

Objetivo 1: Establecer ideas matemáticas que permitan el diseño de tareas que susciten el estudio de la R (p/a) desde una perspectiva visual.

En el capítulo 3, apartado 3.3 se menciona como hipótesis de diseño sobre el desarrollo de la visualización, la necesidad de solo promover el concepto de área y solo el concepto de perímetro, en paquetes de tareas diferentes, para luego establecer la relación entre las dos. Además, han sido definidos, caracterizados y ejemplificados los elementos constitutivos de la visualización considerados por las docentes investigadoras y los estudiantes. Se identificaron nueve operaciones, cuatro elementos generadores de Control visual, los cuales son reagrupados entre sí, también se encuentran cinco acciones sobre el soporte y tres dificultades. Según la forma como se articulan los elementos constitutivos de la visualización se detectaron 15 tipos de visualización, que fueron agrupadas en tres grupos definidos en el apartado 3.8, y que a partir del nivel de complejidad fueron reagrupados en tres categorías: DVB, DVU y DVT también definidas en el apartado 3.8. Las tareas que incluyen un nivel de complejidad MÁX son quienes promueven el desarrollo visual, es decir, la adquisición de habilidades visuales básicas como la aprehensión operatoria, la deconstrucción dimensional de formas, mientras que las que contemplan las complejidades INC e INT promueven su ejercitación e integración. En cuanto a las tareas que inducen una complejidad MÍN en ellas la visualización es de naturaleza estática y no desempeña rol alguno.

Algunos de los estudiantes promovieron estrategias al resolver las tareas planteadas, al tener en cuenta las operaciones incluidas en las tareas como la operación de reconfiguración simple, la linealización, la deslinealización con el objetivo de desarrollar la visualización como la articulación entre la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de las formas.

Una vez revisadas las tareas desarrolladas por los estudiantes (U.A.) se pudo analizar, a la luz de las categorías, las estrategias implementadas por los estudiantes en la resolución de las diferentes problemáticas planteadas en la propuesta de enseñanza; como los

procedimientos con éxito (PE) y los procedimientos no esperados con éxito (PNE). En relación a esto, el estudio de los datos refleja los resultados obtenidos en la aplicación de las tareas, lo que permite explicar y comentar algunas de las conclusiones entre las que se resaltan las siguientes:

- Es necesario el estudio cualitativo de las magnitudes, puesto que exige la visualización de figuras en la resolución de la tarea, pues cuando los estudiantes no podían resolver la tarea T1.4 recurrieron al uso de fórmulas, tal como pasó en T 1.4.
- En M2, la operación de la linealización fue bien aceptada, sin embargo, la operación de deslinealización fue un poco más compleja debido a que a través de esta operación se debía proponer la figura final, pues los estudiantes generalmente utilizan figuras tradicionales que se usan en clase, tal como los polígonos regulares.
- La operación de la reconfiguración simple fue una operación significativa para los estudiantes, puesto que mostraron dominio y manejo al transformar las figuras en la resolución de las tareas.
- Los elementos de control visual introducidos en el diseño de las tareas suscitaron distintas acciones visuales sobre las figuras, tal como se refleja en la T1.4 del M1 del paquete de tareas propuesto.

Estos resultados son una importante herramienta para comprender cómo el desarrollo de la visualización es promovido en la enseñanza de las matemáticas. Las magnitudes de área y perímetro se posicionan como tópicos para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas. La primera, en donde se considera la aprehensión operatoria transformación de una figura en otra mediante la aplicación de operaciones figurales (Duval, 2004a), además, al ser un objeto matemático donde el acto de ver desempeña un papel fundamental para su comprensión y donde la visualización

puede ser un objeto de desarrollo (Marmolejo y Vega, 2012). El segundo, hace referencia a la deconstrucción dimensional de las formas al descomponer una figura en unidades figurales de dimensión inferior al de la figura (Duval, 2004). Lo anterior, permite la articulación de las operaciones cognitivas, y a su vez el desarrollo de la visualización, al privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y de construcción geométrica (Duval, 1998).

En lo relativo a la relación perímetro-área, el paquete de tareas de M3 favorece la articulación entre ellas, al privilegiar la transformación de figuras, considerando elementos de control visual, operaciones y acciones sobre el soporte que promueven el desarrollo de la visualización.

En resumen, para comprender si la visualización tiende, o no, a ser enseñada en la educación básica los resultados de la investigación demuestran que es determinante considerar, que cada momento de tareas privilegie un objeto matemático, para el caso de este estudio en el primer momento, construcción del concepto área, aludiendo a la cantidad de superficie como término que permite un acercamiento más genuino del concepto matemático.

Los niveles de complejidad que se adoptan como hipótesis para el diseño del paquete de tareas permiten controlar el grado de dificultad para efectuar cada tarea propuesta con éxito, la relación que existe entre los niveles de complejidad entre unas tareas y otras, permite acceder a la resolución posterior de nuevas problemáticas y llegar con éxito a los resultados. De otra parte, las operaciones cognitivas (operatoria y discursiva) influyen en el tratamiento del área y el perímetro, aportando en el desarrollo visual de las figuras.

Objetivo 2: Determinar los aspectos visuales que propician la inclusión de ideas matemáticas asociadas al estudio de la R (p/a).

En el Capítulo 3, apartados 3.5 y 3.6 se determinan los aspectos visuales que se propiciaron en el estudio como las nueve operaciones y cuatro elementos de control visual. Cabe tener en cuenta que en cada capítulo 4, 5, 6 los apartados de resultados, 4.1, 5.1 y 6.1 (4.1.2 - 5.1.1 - 6.1.1 como momentos de la propuesta diseñada) se establecen las ideas de diseño, las operaciones y los elementos de control implementados en la propuesta de enseñanza.

En consecuencia, la aplicación de elementos de control visual y acciones privilegian la resolución de las tareas. En su mayoría fueron 31 las familias visuales que determinan un rendimiento óptimo al desplegar los procedimientos establecidos en la propuesta de enseñanza, a su vez el conjunto de familias visuales que promovió el desarrollo de la aprehensión operatoria y discursiva, pero en menor efectividad fue 15, y por último la familia visual que no evidenció un manejo esperado en la aplicación de los procedimientos fue 16 familias con un deficiente uso y combinación de operaciones efectuadas en las tareas, acciones y elementos de control visual.

Objetivo 3: Determinar las estrategias que los estudiantes consideran para suscitar la articulación entre los aspectos visuales e ideas matemáticas que subyacen al estudio de la R(p/a).

En varias de las tareas sobre el área, el perímetro y la articulación de estas dos magnitudes, una misma figura puede desencadenar diferentes maneras de ver, algunas pertinentes a la tarea propuesta mientras otras no. Por tanto, para tipificar las distintas estrategias que usaron los estudiantes para el desarrollo de estas tareas, en primera instancia, diferenciar las formas de visualización privilegiados en las tareas propuestas, de

todas aquellas que pueden, esperarse o no esperarse, en la resolución de las tareas. Es decir, dar respuesta a la cuestión ¿Cuáles estrategias usaron los estudiantes para el desarrollo de las tareas? Es esta la base para discriminar las formas de visualización privilegiadas en los desarrollos de las tareas de los distintos momentos de aplicación de la propuesta de investigación.

Esta investigación evidencia una serie de estrategias y elementos presentes en la manera en que se desarrollan las tareas de la propuesta, a través de los cuales se privilegia unas formas de ver sobre otras, tal como se muestra en el apartado 4.1.3, 5.1.2, 6.1.2 al analizar las distintas respuestas de los estudiantes en las tareas diseñadas.

Los elementos de control visual considerados en las tareas ocasionaron distintas visualizaciones sobre las figuras. Por ejemplo, en las tareas de M1 los elementos de control fueron efectivos debido al porcentaje PE y PNE sin dificultad, descritos en los apartados 4.1.3. En cuanto a M2 y M3, algunos elementos de control tal como los procedimientos directos suscitaron maneras distintas de ver, las cuales en algunos casos evidenciaron obstáculo apartado 5.1.2 y 6.1.2 De otra manera, el grosor promovió en las tareas de M2 y M3 operaciones visuales unidimensionales, particularmente cuando se exige la relación de orden entre la longitud del contorno. En cuanto a la complementariedad de las formas promovieron en M1 y M3 la operación de la reconfiguración simple, operación a la cual se recurrió significativamente, cuando la consigna de la tarea solicitaba el establecimiento de orden de la cantidad de superficie.

Los resultados en el apartado 4.1.4, 5.1.3, 6.1.3 demuestran que los elementos de control aparte de permitir caracterizar los tipos de visualización incluidos en el desarrollo de las tareas, hacen posible identificar formas distintas en que el control visual es incluido. En cuanto a las figuras al igual que en Marmolejo y Vega (2012), estas desempeñan

distintos roles heurísticos, de acuerdo a como fueron utilizadas en el desarrollo de las tareas. Aspectos que se ve influenciado por los elementos de control considerados en el diseño de la propuesta de enseñanza.

Con respecto al rol de los elementos de control, generaron diversas formas de proceder teniendo en cuenta que los elementos de control generan niveles visuales de complejidad, de manera que el desarrollo de esta tarea debe promover operaciones visuales y cambios dimensionales, es así cómo se articula cuestiones determinantes para establecer procesos visuales

Finalmente, la elaboración, puesta en marcha y resultados de esta investigación permiten impactar nuestro desempeño como docente, es importante resaltar que la formación del maestro debe ser continua, no se agota en un pregrado o posgrado. Este trabajo de investigación favoreció la práctica pedagógica, pues conjugo la experiencia de actualización en literatura de educación matemática y la práctica pedagógica. En este sentido, se propuso un diseño de tareas que favoreció el estudio de las características cualitativas de la magnitud área y perímetro, a partir de la aprehensión operatoria a deconstrucción dimensional de las formas y la relación entre ellas.

Incluso la manera de aplicación y desarrollo para los estudiantes fue distinta a la manera tradicional de desarrollar las clases con los estudiantes. Además, el desarrollo de las actividades favoreció el desarrollo discursivo, estas actividades son usualmente minimizadas en el área de matemáticas.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

- Balacheff, N. y Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Issues in Mathematics Education*, 16, 183-211.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa: Guía práctica*. Barcelona: CEAC.
- Calderón, D. y León, O. (2012). *La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Chamorro, M. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis Doctoral microfilmada. UNED. Madrid.
- Chamorro, M. y Belmonte, J. (2000). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales*. México: Síntesis.
- Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive. *Petit X*, N°31, 37-61.
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*. Num. 17, 121-138.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (pp. 37-51). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1ª ed.). Cali. Colombia: Artes Gráficas Univalle

- Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, vol. 20 N°2, 135-170.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.
- Duval, R. (2004a). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y ... una quinta. *Números, fórmulas y volúmenes en el entorno del niño*, 159-188.
- Duval, R. (2004b). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. (segunda Edición) Traducción Vega. M. B.
- Duval, R. (2005). Les conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, vol 10, 5-55.
- Duval, R. (2010). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. *TEA Tecné, Episteme y Didaxis*, 108-129.
- Duval, R. y Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N. Núm. 76.*, 7-27.

Garofalo, J. y Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for research in Mathematics Education*, 163-176.

Fandiño, M. y D'Amore, B. (2007). Relaciones entre Área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime* Vol. 10 Núm. 1, marzo, 2007, pp. 39-68.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2010). *Metodología de la Investigación*. México D.F: McGraw Hill.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. (2017). Disponible en: www.icfesinteractivo.gov.co

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, N° 2, 10-26.

Marmolejo, G. (2014). Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto (Tesis doctoral). Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Marmolejo, G. (2017). Función de control visual en el tratamiento del concepto de área de superficies planas. *Uso restringido*.

Marmolejo, G. y González, M. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, vol. 31, N° 1, 87-106.

- Marmolejo, G. y González, M. (2013b). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, vol. 25, N° 3, 61-102.
- Marmolejo, G. y González, M. (2015b). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, vol 18, N° 3, 301-328.
- Marmolejo, G. y González, M. (2015a). El área de superficies planas en el campo de la Educación Matemática. Estado de la cuestión. *REIEC*, vol. 10, N° 1, 45-57.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). la visualización en las figuras geométricas. importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, vol. 24, N° 3, 7-32.
- Marmolejo, G. Sánchez, N. y Londoño, S. (2016). Conocimiento de contenido visual en la enseñanza de la relación perímetro-área. San Juan de Pasto, Colombia: Universidad de Nariño.
- Marmolejo, G. Sánchez, N. y Londoño, S. (2017). Tipos de visualización privilegiados en la enseñanza de la relación perímetro-área. *Uso restringido*.
- Marmolejo, G, Blanco, H. y Fernández, E. (2016). Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria. San Juan de Pasto: Fundación Save the Children Colombia.

Moreno, I. (2004). Obtenido de <http://webs.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf>

Ministerio de Educación Nacional. MEN. (1998). Lineamientos curriculares matemáticas.
Bogotá: Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. MEN. (2006). Estándares básicos de competencia.
Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Padilla, V. (1992). L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour
l'apprentissage des Mathématiques. Strasbourg, Francia: U.L.P.

Pecharroman, C. (2014) El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde
una perspectiva ontológica. Educación Matemática, vol. 26, núm. 2, agosto, 2014,
pp. 111-133.

Puebla, S., Alarcón, B., Valdés, M. V., Pastellides, P. y Gómez, L. (2010). Métodos de
investigación en educación especial.

Perrin Glorian, M. J. (2003). Studying geometric figures at primary school from surfaces
to points. European research in mathematics education III, xx.

Skate, R. (1998). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.). La Educación Matemática en la enseñanza Secundaria (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.) (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics 19. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

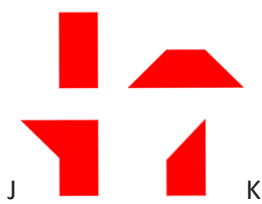
Zúñiga, R. y García, Y. (2015). El papel de los materiales manipulativos en la resolución de problemas: el caso del área. Revista Colombiana de matemática educativa, pp.414-418.

ANEXOS

Anexo 1. La propuesta de enseñanza

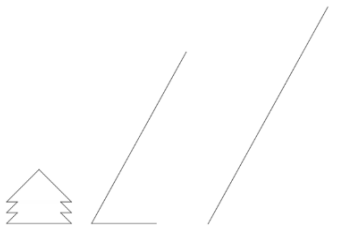
Tabla 1. Propuesta de enseñanza M1

Tarea 1.1: Una estudiante de grado quinto le propuso a su madre realizarle una cobija a su mascota con un retazo de tela que sobró de una camisa (ver Figura A). Explica, paso por paso y de manera muy precisa (si es el caso utiliza dibujos). ¿De qué manera puede la mamá reacomodar la tela usando la Figura A para que pueda verse como la Figura B y cubrir a su mascota al dormir? Solo puedes utilizar los materiales que te entregará tu profesora.
  A B
Tarea 1.2: Juan afirma que la figura C tiene mayor cantidad de superficie que la Figura D. Al contrario, Valentina dice que la Figura C es quien tiene la menor cantidad de superficie. ¿Quién de los dos tiene la razón? Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que seguiste para responder la pregunta realizada.
  C D
Tarea 1.3: ¿Cómo puedes demostrar que las figuras E y F tienen Igual cantidad de superficie? Explica en la hoja paso a paso, el procedimiento que seguiste para responder la pregunta realizada.
  E F
Tarea 1.4: La siguiente figura G muestra una parte sombreada. ¿Cuál es la cantidad de área representada por la parte sombreada? Explica qué transformaciones sufrió la figura y cómo obtuviste la respuesta. Extraído de Padilla 92


G
Tarea 1.5: Considera la cantidad de superficie de cada una de las figuras representadas abajo, para ordenarlas de mayor a menor. Explica detalladamente cuál fue el procedimiento que utilizaste para realizar esta tarea. Teniendo en cuenta las cantidades de superficie de las figuras, responde cuáles de las afirmaciones descritas abajo son falsas y cuáles son verdaderas. Explica detalladamente tu procedimiento. - Las figuras H e I tienen igual cantidad de superficie. - La cantidad de superficie de la figura J es mayor que la cantidad de superficie de la figura I. - La cantidad de superficie de la figura K es menor que la cantidad de superficie de la figura H.
H I  J K

Fuente: este estudio. Elaboración propia.

Tabla 2. Propuesta de enseñanza M2

Tarea 2.1: En clase de artística se construyó, con alambre, un árbol de navidad (ver Figura L). La profesora llevó el árbol para su casa para hacer otro igual, pero, antes de hacerlo, su pequeño hijo (sin querer) desplegó el alambre utilizado para construir el árbol; al ver el daño hecho, el niño colocó el alambre desplegado encima de una mesa donde estaba otro alambre (ver alambres 1 y 2). Ahora, la profesora tiene que construir de nuevo el árbol. Explica, paso por paso y de manera muy precisa (si es el caso utiliza dibujos) cómo la profesora podría descubrir cuál de los dos alambres fue el utilizado en el colegio para construir el árbol de navidad. Solo puedes utilizar los materiales que te entregará tu profesora.
 L Alambre1 Alambre 2

Tarea 2.2: ¿La longitud del contorno de la Figura M es igual o mayor que la longitud del Segmento de línea A? Explica en la hoja el procedimiento que realizaste para responder la pregunta planteada.



M

Segmento
de línea A

Tarea 2.3: Utiliza lo aprendido en las tareas 2.1 y 2.2 para decir cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

- A. La Figura L tiene mayor longitud de contorno que la Figura M.
- B. La Figura M tiene mayor longitud de contorno que la Figura L.
- C. La Figura L tiene igual longitud de contorno que la Figura M.

Tarea 2.4: Felipe utilizó la longitud del segmento de línea B para construir la Figura N. Explica cómo lo hizo.

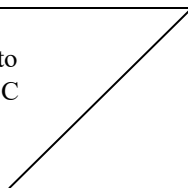
Segmento
de línea B



N

Tarea 2.5: Construye una figura de cuatro lados cuya longitud de contorno sea igual que la longitud del segmento de línea C. Nombra la figura construida como la Figura Ñ. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que seguiste para desarrollar esta tarea.

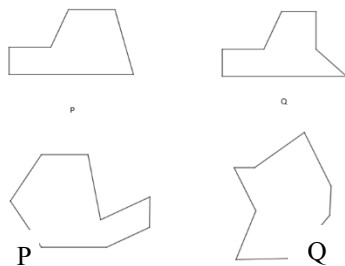
Segmento
de línea C



Tarea 2.6: Utiliza lo aprendido en las Tareas 2.4 y 2.5 para desarrollar la siguiente tarea:

- Construye una figura (nómbrela Figura O) que tenga mayor longitud de contorno que la Figura N y, al mismo tiempo, menor longitud de contorno que la Figura Ñ. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que realizaste para resolver la tarea propuesta.

Tarea 2.7: Considera las longitudes de contorno de las figuras abajo representadas y ordenarlas de mayor a menor. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que realizaste para resolver la tarea propuesta.



Tarea 2.8: Construye una figura (Nómbrela Figura T) con una longitud de contorno mayor que el de la Figura Q y menor que el de la Figura P. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que realizaste para resolver la tarea propuesta.

Fuente: este estudio. Elaboración propia.

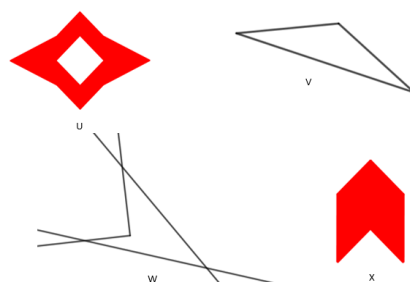
Tabla 3. Propuesta de enseñanza M3

Tarea 3.1 Ordena de mayor a menor las cuatro figuras representadas abajo (Figuras U, V, W y X), primero, teniendo en cuenta sus cantidades de superficies; luego, sus longitudes de contorno.

Debes describir y justificar, paso a paso, los procedimientos que realizaste para resolver esta tarea.

Teniendo en cuenta lo anterior, responde la siguiente pregunta:

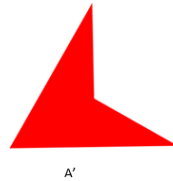
¿Cuál es la principal conclusión que puedes sacar al comparar las cuatro figuras reseñadas?



Tarea 3.2 Construye una Figura B' de forma distinta a la Figura A' dada, de tal forma que cumpla con la siguiente condición:

- La cantidad de superficie de la Figura A' es igual a la cantidad de superficie de la Figura B', y la longitud de contorno de la Figura A' es mayor que la longitud de contorno de la Figura B'.

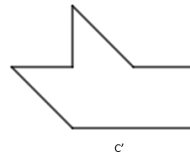
Realiza paso a paso el procedimiento y justifica tu respuesta.



Tarea 3.3 Dada la Figura C' construye una Figura D' que cumpla la siguiente condición:

- La longitud de contorno de la Figura C' es mayor que la longitud de contorno de la Figura D' y la cantidad de superficie de la Figura C' es menor que la cantidad de superficie de la Figura D'.

Realiza paso a paso el procedimiento y justifica tu respuesta.



Tarea 3.4 Dada la Figura E' construir una Figura F' de tal forma que se cumpla la siguiente condición:

- La cantidad de superficie de la Figura E' es mayor que la cantidad de superficie de la Figura F' y la longitud de contorno de la Figura E' es menor que la longitud de contorno de la Figura F'.

Realiza paso a paso el procedimiento y justifica tu respuesta.



Fuente: este estudio. Elaboración propia.

Anexo 2. Ideas que guiaron el diseño de la propuesta de enseñanza

A continuación, se establecen las ideas que guiaron el diseño de la propuesta de enseñanza (en adelante ideas guías de diseño):

IDEA DE DISEÑO 1: las magnitudes es un campo idóneo para suscitar el desarrollo de la visualización y, en sentido inverso, la visualización promueve condiciones para el estudio de las magnitudes (Marmolejo y Vega, 2012). En este sentido, y para el caso de las magnitudes área y perímetro, y sus posibles relaciones, la reconfiguración, linealización y deslinealización de figuras constituyen operaciones cognitivas determinantes pues, entre variados aspectos, suscitan la aplicación de propiedades y procedimientos matemáticos determinantes en el estudio del área al transformar una figura en otra con diferente contorno visual e igual área o al realizar comparaciones entre regiones poligonales, todo lo anterior acompañado de propiedades como la relación de orden y equivalencia entre figuras, es decir, que la aplicación de operaciones como la traslación, rotación, superposición y fraccionamiento, entre otras, transforman bidimensionalmente las figuras, y las segundas, ya que, en el estudio del perímetro y de su relación con el área constituyen la base de propiedades y procedimientos tales como promover la comparación por disyunción entre la figura de inicio y de llegada para favorecer la discriminación de partes comunes y distintas entre los contornos de las figuras y operar sobre sus unidades constituyentes.

IDEA DE DISEÑO 2: La visualización no es obvia ni inmediata (Duval, 1997, Marmolejo y Vega, 2012), al contrario, su desarrollo debe ser objeto de reflexión (Duval, 1997, Marmolejo y Vega, 2012). Existen criterios para promover el desarrollo de esta actividad cognitiva (Duval, 1998, 1999 y 2004a): elementos de control visual (Marmolejo y González, 2015b; Marmolejo, Vega y Galeano, 2017).

IDEA DE DISEÑO 3: las figuras cortadas en papel favorecen la delimitación entre longitud y superficie (Chamorro, 1997): destacan la línea que constituye la frontera y se reconoce la superficie como el interior delimitado por dicha frontera. Asimismo, promueven la aparición de procedimientos que favorecen la comparación de superficies (Marmolejo, Vega y Galeano, 2017).

A continuación, se presenta una tabla donde se relacionan las exigencias curriculares correspondientes a lo planteado por el MEN (1998)

Tabla 1. Cuatro procesos/aspectos generales de la actividad matemáticas

Tarea	Relaciones y procedimientos Matemáticas	Estándares	Competencias	Derechos básicos de aprendizaje
1.1	Construcción del concepto área, a través de la relación de: Equivalencia de áreas.	Espacial: “Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura” (MEN, 2006 p.82).	Representación: “Establece relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes” (ICFES, 2014, p. 69)	“Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos bidimensional y tridimensional y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas” (www.colombiaaprende.edu.co)
1.2	Conservación de área.	“Identifico y justifico relaciones de congruencia entre figuras”	Planteamiento y resolución de problemas: “Utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición”	
1.3			Planteamiento y resolución de problemas: “Usa y construye modelos geométricos para solucionar problemas”	

1.4		“Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños”	Comunicación: “Establecer entre las características de las figuras y sus atributos mensurables”	
1.5	Relaciones de orden y equivalencia entre área.	“Planteo problemas cuya resolución exige la comparación entre figuras a partir de sus cantidades de superficies”	Comunicación: “Reconocer que algunos atributos mensurables de una figura permiten determinar la medida de otro atributo”	
2.1	“construcción de los conceptos de cada magnitud” específicamente la magnitud perímetro (MEN, 1998 p. 42)	“conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños” (MEN, 2006 p. 82)	El razonamiento (MEN, 2006)	
2.2	“comprensión de los procesos de conservación de magnitudes” particularmente en la magnitud perímetro (MEN, 1998 p. 42)	“Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes)” (MEN, 2006 p. 83)	La Comunicación (MEN, 2006)	Resuelve problemas que involucran conceptos de perímetro, (MEN, 2015)
2.3	“Establecer relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento” particularmente el perímetro (ICFES, 2016 p. 5)	Ídem de tarea 2.2	La Comunicación (MEN, 2006)	Ídem de tarea 2.2
2.4	“conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano” (ICFES, 2016 p. 5)	“conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños” (MEN, 2006 p. 82)	El razonamiento (MEN, 2006)	Ídem de tarea 2.2
2.5	“Reconoce la congruencia entre una figura inicial y la figura resultante después de aplicar una	“identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre	El razonamiento (MEN, 2006)	Ídem de tarea 2.2

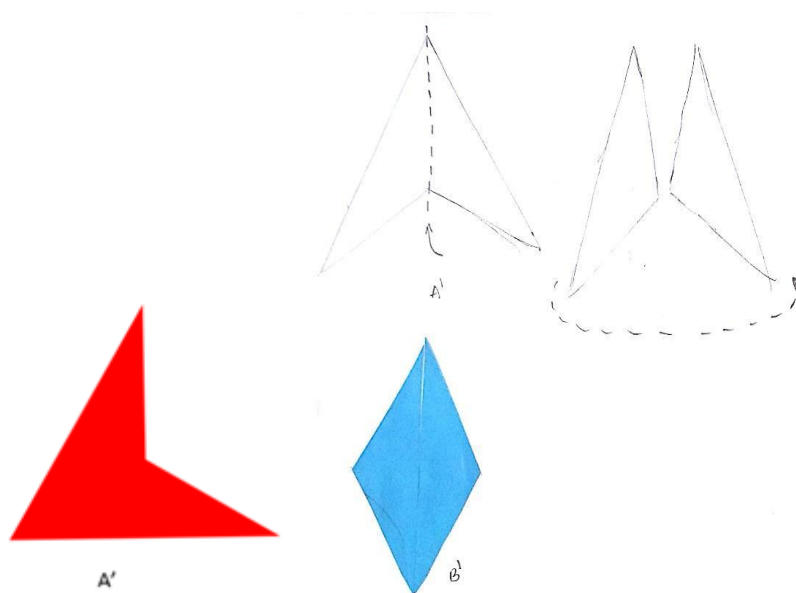
	transformación” (ICFES, 2016 p. 5)	figuras” (MEN, 2006 p. 82)		
2.6	Ídem de tarea 2.3	“diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir” (MEN, 2006 p. 83)	La Comunicación (MEN, 2006)	Ídem de tarea 2.2
2.7	Ídem de tarea 2.3	Ídem de tarea 2.6	Ídem tarea 2.6	Ídem de tarea 2.2
2.8	Ídem de tarea 2.3	Ídem de tarea 2.4 y 2.6	La comunicación y razonamiento (MEN, 2006)	Ídem de tarea 2.2
3.1	Establecimiento de R(p/a).		Comunicación: “Reconocer que no existe un único procedimiento para resolver problemas de medición”	“Explica las relaciones entre el perímetro y el área de diferentes figuras a partir de mediciones, superposición de figuras, cálculo, entre otras”
3.2	Conservación de R(p/a).	“Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales”	“Usar diferentes estrategias para determinar medidas de superficie y volúmenes”	
3.3			“Reconocer que el procedimiento para determinar el volumen y la superficie no siempre es único”	
3.4	Relaciones de orden y equivalencia entre R(p/a).	“Planteo problemas cuya resolución exige la comparación entre figuras a partir de sus cantidades de superficies”	“Utilizar relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición”	

Fuente: este estudio. Elaboración propia.

Anexo 3. Categoría de operaciones

Reconfiguración simple

El tratamiento figural reseñado abajo muestra cómo a través de la aplicación de una reconfiguración simple se transforma un cuadrilátero (A') en un paralelogramo (B'): mediante la introducción de un trazo, el cuadrilátero A' se divide en dos triángulos isométricos entre sí, y al realizar la aplicación de traslaciones y rotaciones sobre uno de los triángulos, se conforma una nueva figura: paralelogramo B'

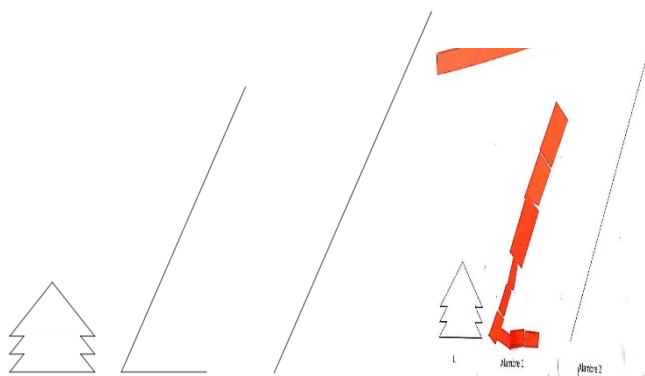


Cambio Dimensional

En el momento dos tarea uno (T2.1), con el objetivo de descomponer la figura propuesta de dos dimensiones en unidades figurales de una dimensión se propone la siguiente actividad:

“En clase de artística se construyó, con alambre, un árbol de navidad (ver Figura L). La profesora llevó el árbol para su casa para hacer otro igual, pero, antes de hacerlo, su pequeño hijo (sin querer) desplegó el alambre utilizado para construir el árbol; al ver el daño hecho, el niño colocó el alambre desplegado encima de una mesa donde estaba otro alambre (ver alambres 1 y 2). Ahora, la profesora tiene que construir de nuevo el árbol. Explica, paso por paso y de manera muy precisa (si es el caso utiliza dibujos) cómo la profesora podría descubrir cuál de los dos alambres fue el utilizado en el colegio para

construir el árbol de navidad. Solo puedes utilizar los materiales que te entregará tu profesora.”



L Alambre 1 Alambre 2

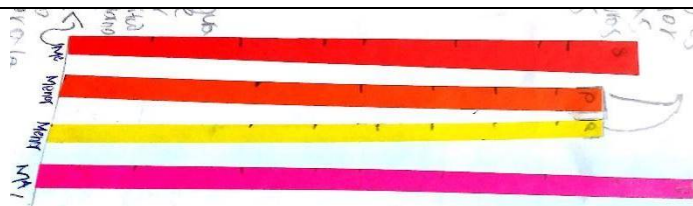
En el despliegue del procedimiento de esta tarea se pasa de centrar la atención de la figura L de dos dimensiones, en las unidades constitutivas de una dimensión, al trasladar cada uno de los segmentos sobre la línea de segmento que representa el alambre 1, de manera que se evidencia el cambio dimensional de dos dimensiones a una dimensión.

Linealización

En el momento dos tarea siete (T2.7), con el objetivo de descomponer la figura propuesta de dos dimensiones en unidades figurales de una dimensión se propone la siguiente actividad:

“Considerar las longitudes de contorno de las figuras abajo representadas y ordenarlas de mayor a menor.”





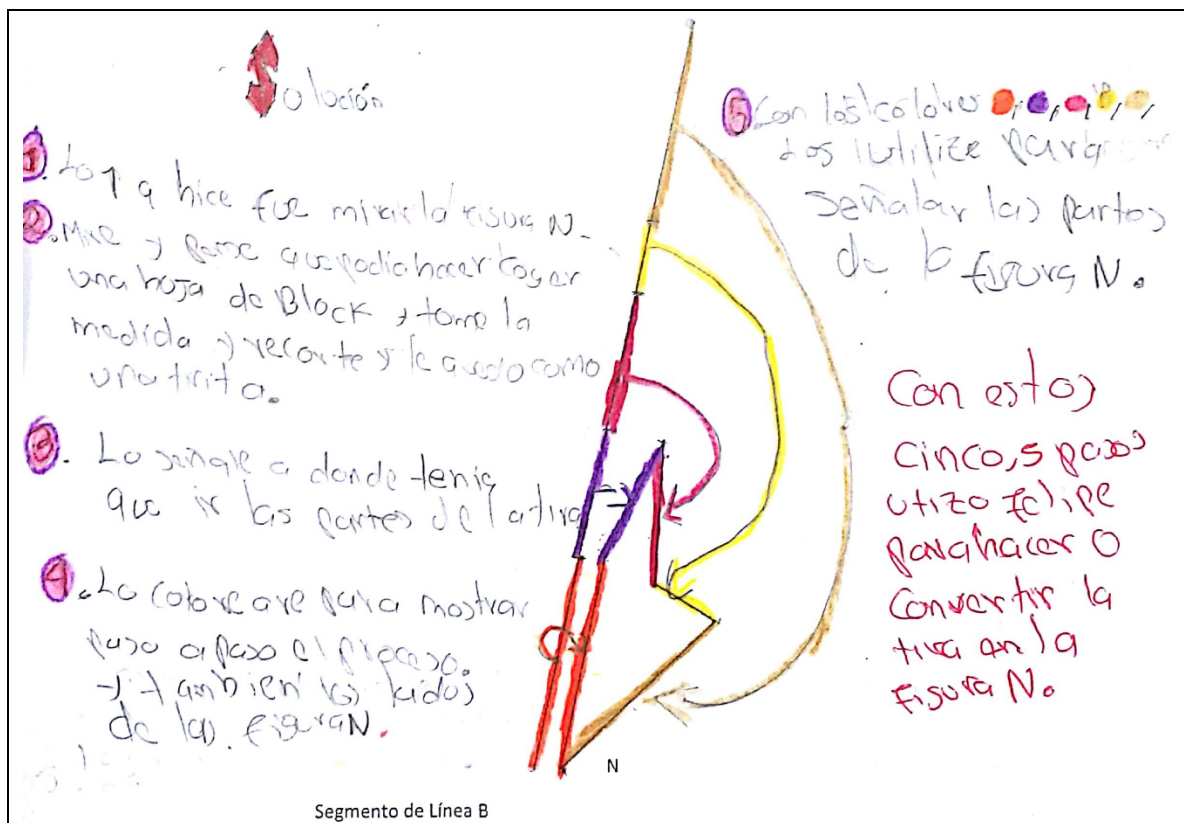
Al realizar marcaciones de las líneas de segmento de cada figura sobre la tira de papel (soporte 2) y construir una línea recta para establecer el orden con relación a la longitud de contorno entre las figuras dadas. Es así como al aplicar la operación de linealización y un cambio dimensional, se centra la atención en las unidades constitutivas de una dimensión de las figuras.

Deslinealización

En el momento dos tarea cuatro (2.4), con el objetivo de descomponer la figura propuesta de dos dimensiones en unidades figuralas de una dimensión se propone la siguiente actividad:

“Felipe utilizó la longitud del segmento de línea B para construir la Figura N. Explica cómo lo hizo.”



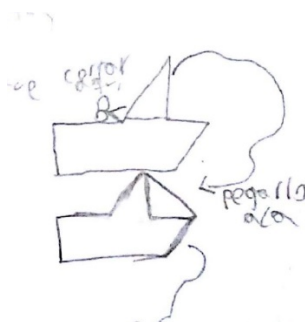
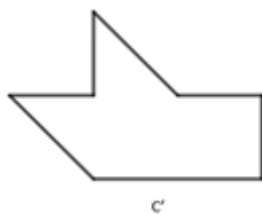


En el despliegue del procedimiento se centra la atención en los segmentos de línea que conforman la figura, al realizar traslaciones y rotaciones se logra construir una figura. Es decir, se evidencia cuando a partir de una línea se construye una figura de dos dimensiones, es el caso de la deslinealización.

Reconfiguración lineal

En el momento tres tarea tres (T3.3), con el objetivo de encontrar la relación entre la cantidad de superficie y la longitud de contorno se propone la siguiente actividad:

“Dada la Figura C’ construye una Figura D’ que cumpla la siguiente condición: La longitud de contorno de la Figura C’ es mayor que la longitud de contorno de la Figura D’ y la cantidad de superficie de la Figura C’ es menor que la cantidad de superficie de la Figura D’.”



En el despliegue del procedimiento se centra la atención en el contorno de la figura inicial al comparar por disyunción la figura dada y la de llegada, aplica operaciones unidimensionales sobre los lados de la figura de partida de esta manera determina cómo disminuir la longitud de contorno de la figura final, logrando el objetivo propuesto.

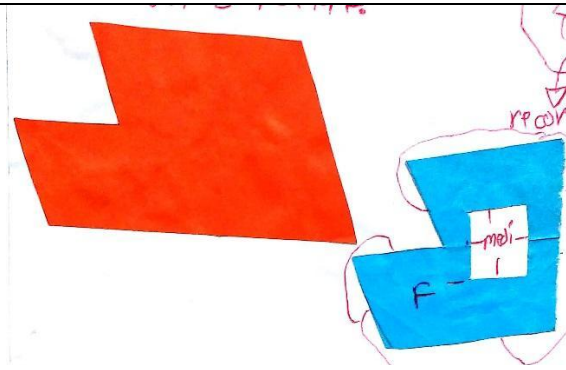
Anamorfosis

En el momento tres tarea cuatro, (T3.4), con el objetivo de encontrar la relación entre la cantidad de superficie y la longitud de contorno se propone la siguiente actividad:

“Dada la Figura E’ construir una Figura F’ de tal forma que se cumpla la siguiente condición: La cantidad de superficie de la Figura E’ es mayor que la cantidad de superficie de la Figura F’ y la longitud de contorno de la Figura E’ es menor que la longitud de contorno de la Figura F’.”



E’

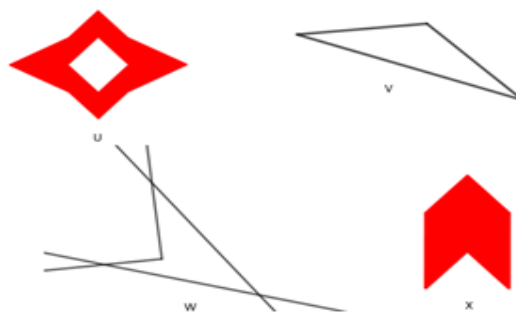


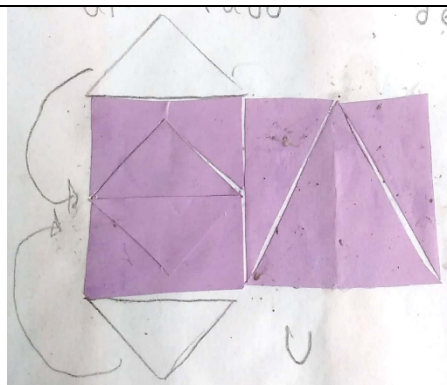
En el despliegue del desarrollo de la tarea se presenta un achicamiento donde el proceso de deformación mantiene invariante la forma, las relaciones entre sus unidades constituyentes y promueve una disminución en su cantidad de superficie de la figura inicial.

Cuadratura

En el momento tres tarea uno (T3.1), con el objetivo de encontrar la relación entre la cantidad de superficie y la longitud de contorno se propone la siguiente actividad:

“Ordena de mayor a menor las cuatro figuras representadas abajo (Figuras U, V, W y X), primero, teniendo en cuenta sus cantidades de superficies; luego, sus longitudes de contorno”





En el despliegue del procedimiento se muestra el contorno de la figura U rectilíneo, para calcular su cantidad de superficie y ordenarla entre las demás figuras dadas, se dibuja una nueva figura de contorno rectilíneo, sobre la cual es factible estimar mayor o menor cantidad de superficie al transformar la figura en forma cuadrada.

Reconfiguración Parcial lineal

En el momento tres tarea cuatro, (T3.4), con el objetivo de encontrar la relación entre la cantidad de superficie y la longitud de contorno se propone la siguiente actividad:

“Dada la Figura E’ construir una Figura F’ de tal forma que se cumpla la siguiente condición: La cantidad de superficie de la Figura E’ es mayor que la cantidad de superficie de la Figura F’ y la longitud de contorno de la Figura E’ es menor que la longitud de contorno de la Figura F’.”



E’

Primero cogi la figura el luego le code un rectángulo p
que hiciera Mayor longitud de contorno así:

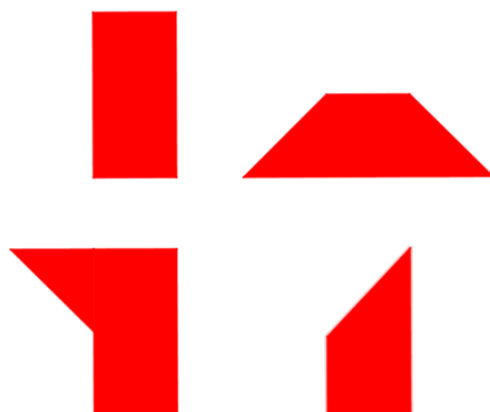


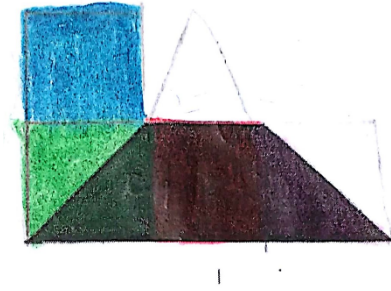
En el despliegue del procedimiento se comparan los contornos de las figuras y se centra la atención en operar sobre sus unidades constituyentes, aplica sustracción y adición de líneas de segmento sobre el contorno al realizar un corte de tal manera que la figura final tenga más longitud de contorno.

Reconfiguración parcial superficial

En el momento uno tarea cinco (T1.5), con el objetivo de encontrar la relación entre la cantidad de superficie y la longitud de contorno se propone la siguiente actividad:

“Considera la cantidad de superficie de cada una de las figuras representadas abajo, para ordenarlas de mayor a menor.”





En el despliegue del procedimiento la figura inicial se fracciona en cuadrados y luego fracciona en triángulo, por tanto, se evidencia una reconfiguración parcial superficial. En otras palabras, pasa de centrar la atención en las figuras de inicio y llegada, a hacerlo en una de las partes en que fueron divididas para introducir sobre ellas un nuevo tipo de fraccionamiento.

Anexo: elemento de control

Iconismo compuesto (IC)

En el momento uno tarea uno (T1.1), y con el objetivo de hallar las relaciones de orden y equivalencia de figuras según la cantidad de superficie se propone la siguiente actividad:

“Una estudiante de grado quinto le propuso a su madre realizarle una cobija a su mascota con un retazo de tela que sobró de una camisa (ver Figura A). Explica, paso por paso y de manera muy precisa (si es el caso utiliza dibujos). ¿De qué manera puede la mamá reacomodar la tela usando la Figura A para que pueda verse como la Figura B y cubrir a su mascota al dormir? Solo puedes utilizar los materiales que te entregará tu profesora.”



A B

La resolución de la tarea exige transformar la figura a en la figura b. para propiciar la aplicación de la operación que lo permita (reconfiguración simple) se incluyeron como elementos de control los siguientes: complementariedad de las formas, las características físicas del objeto mencionado en el enunciado, el color y el procedimiento directo.

obligando a identificar específicamente la subfigura convexa mostrada en exceso al centrar la atención perceptiblemente en el fondo de la figura y no en su contorno y la posterior aplicación de operaciones de traslación y rotación; lo que demuestra que las figuras son susceptibles de transformación, reconfigurando una figura de forma distinta y conservando su cantidad de superficie de área.

Elemento de control visual por procedimiento directo (PD)

En el momento uno tarea dos (T1.2), con el objetivo de hallar las relaciones de orden y equivalencia de figuras según la cantidad de superficie se propone la siguiente actividad:

“Juan afirma que la Figura C tiene mayor cantidad de superficie que la Figura D. Al contrario, Valentina dice que la Figura C es quien tiene la menor cantidad de superficie. ¿Quién de los dos tiene la razón?”



C D

En el despliegue del procedimiento el contenido se establece a partir de la relación de orden de la magnitud área, la visualización es promovida por la visibilidad y el procedimiento directo al seguir acciones que determinan la operación (reconfiguración simple) a considerar. La presencia de regiones poligonales (subfiguras) mostradas en exceso en las figuras, destaca atributos de forma en la configuración y suscita la aplicación de traslaciones y rotaciones.

Elemento de control visual por procedimiento de réplica (PR)

En el momento uno tarea tres (T1.3), con el objetivo de hallar las relaciones de orden y equivalencia de figuras según la cantidad de superficie se propone la siguiente actividad:

“¿Cómo puedes demostrar que las figuras E y F tienen Igual cantidad de superficie?”



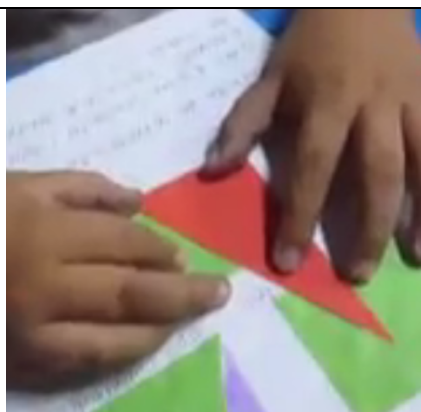
E F

En el desarrollo de la tarea la visualización está guiada por la visibilidad que es promovida por los factores de visibilidad y elementos de contraste, especialmente al presentar la convexidad en el contorno de las figuras, el contenido porque establece relaciones de orden entre las magnitudes y el procedimiento por réplica dado que hace uso de procedimientos realizados en otras tareas.

Elemento de control visual discursivo (Disc)
En el momento dos tareas seis (2.6), con el objetivo de descomponer la figura propuesta de dos dimensiones en unidades figurales de una dimensión se propone la siguiente actividad: “Utiliza lo aprendido en las Tareas 2.4 y 2.5 para desarrollar la siguiente tarea: Construye una figura (nómbrela Figura O) que tenga mayor longitud de contorno que la Figura N y, al mismo tiempo, menor longitud de contorno que la Figura Ñ.” En esta tarea la visualización es inducida por la designación en lengua natural de las acciones a aplicar, el control está guiado por el enunciado y se debe tener en cuenta segmentos de línea propuestos en tareas anteriores, en donde el despliegue del procedimiento se muestra por escrito al explicar las acciones realizadas para el desarrollo de la tarea.

ANEXO: CATEGORÍA DE ACCIONES SOBRE EL SOPORTE DE PAPEL

Superponer/Disyunción
En el momento uno tarea tres (T1.3), con el objetivo de garantizar la misma cantidad de superficie, realizando comparación entre las figuras se propone la siguiente tarea: “¿Cómo puedes demostrar que las Figuras E y F tienen Igual cantidad de superficie?”.  E F En la siguiente Figura 1 se muestra el despliegue de la acción sobre el soporte de papel:



En el despliegue del proceso en las hojas en que se representan las figuras E y F se ubican una encima de otra, de esta manera que se correspondan las partes de sus contornos que se comparar entre sí.

Calcar/ Recortar

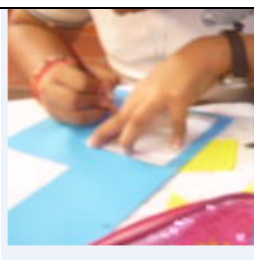
En el momento uno tarea cuatro (T1.4), con el objetivo de garantizar la misma cantidad de superficie, realizando comparación entre las figuras, se propone la siguiente tarea:

“La siguiente Figura G muestra una parte sombreada. ¿Cuál es la cantidad de área representada por la parte sombreada?”



G

En la siguiente Figura 2 se muestra el despliegue de la acción sobre el soporte de papel:



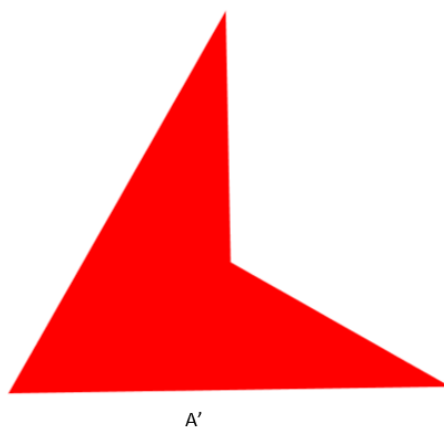
En el despliegue del proceso con la hoja en que se representan las Figura G se coloca sobre otra hoja y se procede con el lápiz a trazar los bordes de la figura G realizando un duplicado de la figura.

Trazos auxiliares

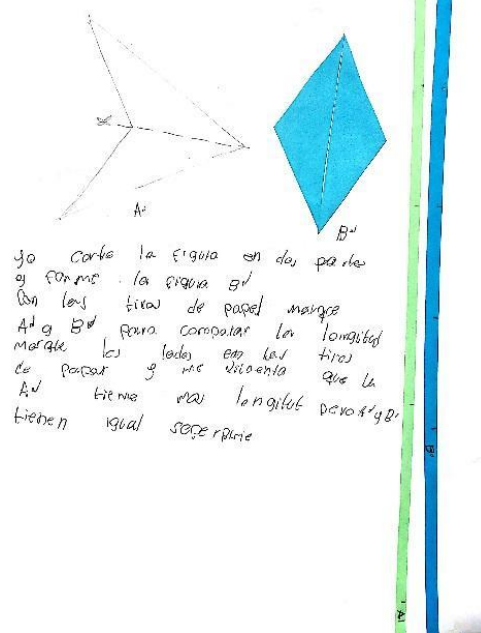
En el momento tres tareas dos (T3.2), con el objetivo de promover el uso de la reconfiguración, al fraccionar la figura inicial en subfiguras y reorganizarlas para garantizar la relación propuesta. Se propone la siguiente tarea:

“Construye una Figura B’ de forma distinta a la Figura A’ dada, de tal forma que cumpla con la siguiente condición:

- La cantidad de superficie de la Figura A’ es igual a la cantidad de superficie de la Figura B’, y la longitud de contorno de la Figura A’ es mayor que la longitud de contorno de la Figura B’.”



En la siguiente Ilustración 3 se muestra el despliegue de la acción sobre el soporte de papel:



En el proceso de resolución de la tarea, mediante la introducción de un trazo, el cuadrilátero A' se dividió en dos triángulos isométricos entre sí, mediante la aplicación de traslaciones y rotaciones sobre uno de los triángulos, se conforma una nueva figura: paralelogramo B' . Adicional a lo anterior se incluyen trazos sobre las tiras de papel que representan las unidades figurales de 1D que componen el contorno de la figura.

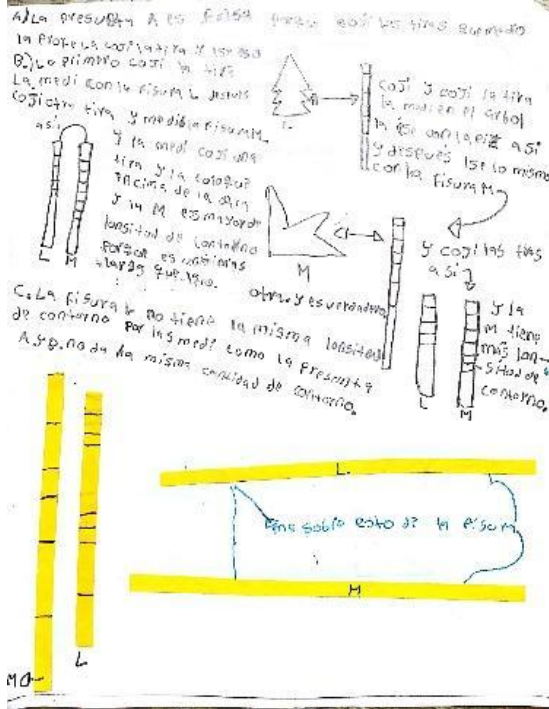
Dibujos

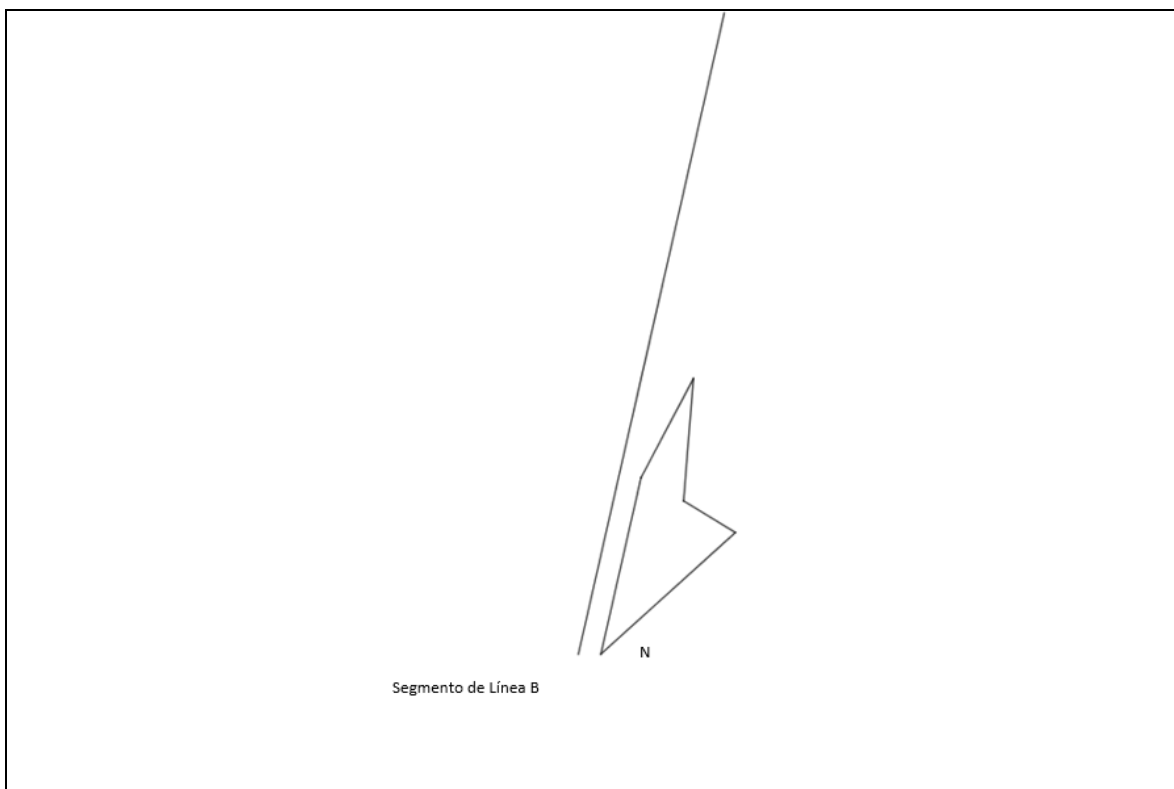
En el momento dos tareas tres (T2.3), con el objetivo de que se aplique una linealización de la figura y comparación de líneas de longitud de contorno, se propuso la siguiente tarea:

Utiliza lo aprendido en las tareas 2.1 y 2.2 para decir cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

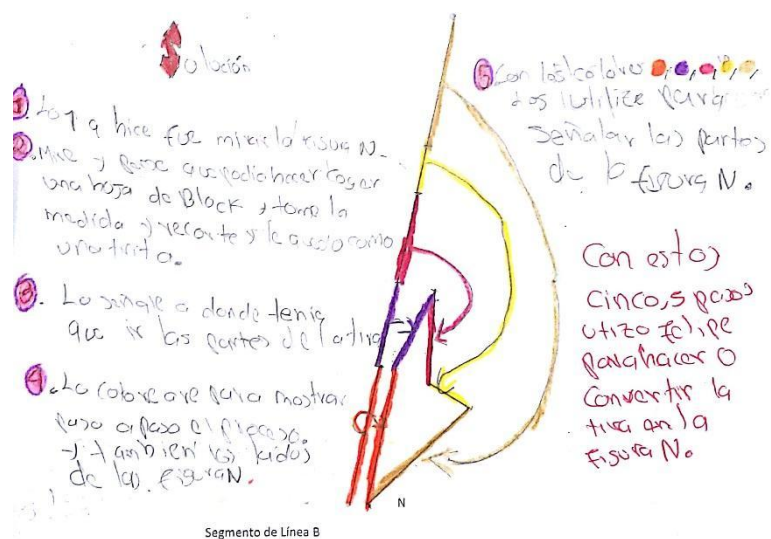
1. La Figura L tiene mayor longitud de contorno que la Figura M.
2. La Figura M tiene mayor longitud de contorno que la Figura L.
3. La Figura L tiene igual longitud de contorno que la Figura M.

En la siguiente Ilustración 4 se muestra el despliegue de la acción sobre el soporte de papel:

 A) La presunta A es falsa porque los fines sumados la figura A es falsa y la figura B es verdadera B) La figura B es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura B C) La figura C es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura C D) La figura D es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura D E) La figura E es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura E F) La figura F es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura F G) La figura G es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura G H) La figura H es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura H I) La figura I es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura I J) La figura J es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura J K) La figura K es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura K L) La figura L es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura L M) La figura M es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura M N) La figura N es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura N O) La figura O es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura O P) La figura P es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura P Q) La figura Q es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura Q R) La figura R es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura R S) La figura S es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura S T) La figura T es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura T U) La figura U es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura U V) La figura V es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura V W) La figura W es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura W X) La figura X es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura X Y) La figura Y es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura Y Z) La figura Z es verdadera porque la medida de la figura A es la misma que la de la figura Z	En el proceso de resolución de la tarea, se introducen dibujos a mano alzada que representan la manera de proceder acompañados de la descripción en lengua natural. Contraste/Índice En el momento dos tareas cuatro (T2.4), con el objetivo de centrar la visualización en el contorno de la figura de llegada y aplicar una deslinealización, se propone la siguiente tarea: “Felipe utilizó la longitud del segmento de línea B para construir la Figura N”.
---	--



En la siguiente Ilustración 5 se muestra el despliegue de la acción sobre el soporte de papel:

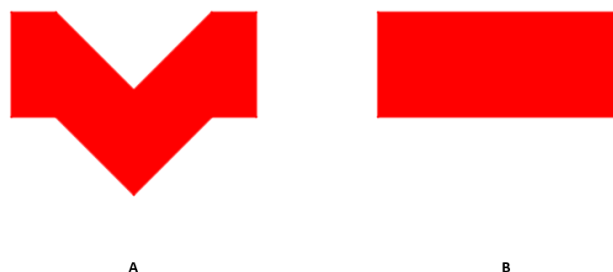


En el desarrollo de la tarea para explicar el procedimiento se utiliza colores y flechas para identificar sobre un segmento de línea los lados que se utilizan para la construcción de la Figura final o Figura N.

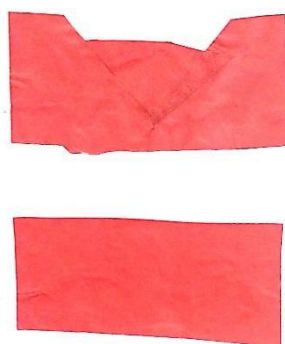
ANEXO: CATEGORÍA DE ANÁLISIS DIFICULTADES Y POSIBILIDADES

Dificultades en la consigna (estructura o lenguaje) de la tarea propuesta
En el momento uno tarea cuatro (T1.4), con el objetivo de garantizar la misma cantidad de superficie, realizando comparación entre las figuras, se propone la siguiente tarea: “La siguiente Figura G muestra una parte sombreada. ¿Cuál es la cantidad de área representada por la parte sombreada?” G
En la siguiente Ilustración 1 se muestra el despliegue del procedimiento: En el proceso de resolución de la tarea hay incoherencia entre el enunciado de la tarea y lo desarrollado en la unidad de análisis: Esta U.A. presenta inconsistencia en su desarrollo frente a lo solicitado en la consigna, solo se conforma con recortar las subfiguras que presentan factores de visibilidad fuertes como el grosor de las líneas, el color, el sombreado de la subfigura, pero aún, así no determina la cantidad de superficie de la región sombreada. Es decir, que la solución de la tarea no da respuesta a lo solicitado por la tarea.
Dificultades asociadas a las exigencias visuales solicitadas

En el momento uno tarea uno (T1.1), con el objetivo de establecer una relación de equivalencia entre la figura inicial y final, se propone la siguiente actividad.



En la siguiente Ilustración 2 se muestra el despliegue del procedimiento de resolución de una tarea, que solicita:

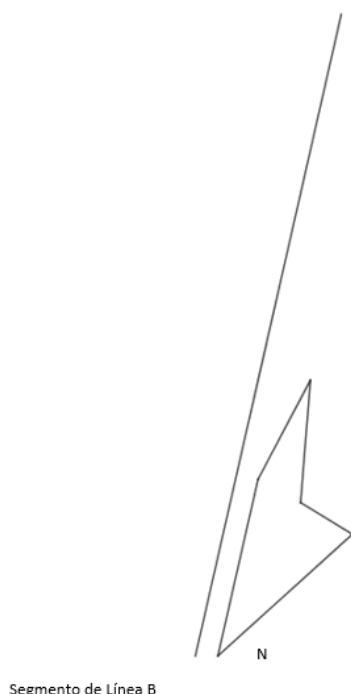


En el procedimiento que se muestra, no se reconoce la superficie como el interior delimitado por los bordes de la figura, es decir, la subfigura identificada en la Figura A se reorganiza en la misma figura, pero no logra establecer la Figura B.

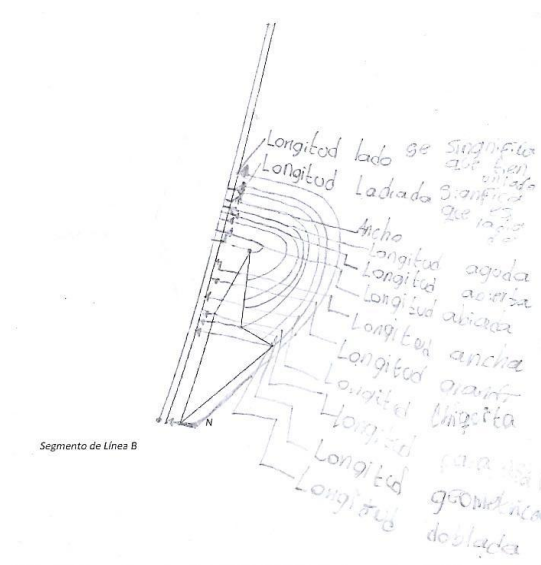
Dificultades asociadas a la R (p/a), al área y al perímetro

En el momento dos tareas cuatro (T2.4), con el objetivo de centrar la visualización en el contorno de la figura de llegada y aplicar una deslinealización, se propone la siguiente tarea:

“Felipe utilizó la longitud del segmento de línea B para construir la Figura N”.



En la siguiente Ilustración 3 se muestra el despliegue del procedimiento de la tarea



En el despliegue del procedimiento se relaciona un vocabulario emergente para designar indistintamente conceptos de naturaleza distinta, es decir al punto sobre la línea de

segmento lo nombra longitud, es así como se identifica la dificultad asociada al objeto matemático relacionado en esta tarea.

Anexo 4. Rejilla de Análisis

ESTUDIANTES/UNIDADES DE ANÁLISIS	ÉXITO+PROCEDIMIENTO	DIFICULTADES - POSIBILIDADES		OPERACIÓN			ELEMENTO/CONTROL	ACCIONES/SOPORTE			
T1.1E1	(PE)			(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR)	(CON)
T1.1E2	(PE)			(RS)			(IC)		(TA2D)	(CR)	(CON)
T1.1E3	(PNE)	(DAV)		(RS)	(RE)		(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR)	(CON)
T1.1E4	(PNE)			(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR)	(CON)
T1.1E5	(PE)			(DAO)	(RS)		(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR)	(CON) (D)
T1.1E6	(PE)			(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR)	(CON)
T1.1E7	(PNE)	(DAV)	(DEC)	(DAO)	(RS)	(RE)	(CUAD)	(IC)	(SD)	(TA1D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E8	(PE)			(DAO)	(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E9	(PE)		(DEC)	(RS)		(CUAD)		(IC)	(SD)	(TA2D)	(CON)
T1.1E10	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E11	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E12	(PE)		(DEC)	(RS)		(CUAD)		(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E13	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E14	(PE)			(DAO)	(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E15	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA1D)	(CR) (CON)
T1.1E16	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E17	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E18	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CON) (D)
T1.1E19	(PE)		(DEC)	(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E20	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E21	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E22	(PP)		(DEC)	(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E23	(PNE)	(DAV)		(RS)	(RE)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E24	(PE)			(DAO)	(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E25	(PNE)	(DAV)	(DEC)		(RS)	(RE)	(CUAD)	(IC)	(SD)	(TA1D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E26	(PE)			(DAO)	(RS)	(ANA)		(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E27	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E28	(PE)		(DEC)	(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E29	(PE)			(DAO)	(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E30	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E31	(PE)			(DAO)	(RS)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON) (D)
T1.1E32	(PNE)	(DAV)		(RS)	(RE)			(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E33	(PE)	(DAV)		(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E34	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E35	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA1D)	(CR) (CON)
T1.1E36	(PE)			(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)
T1.1E37	(PNE)		(DEC)	(RS)				(IC)	(SD)	(TA2D)	(CR) (CON)

Anexo 5. Entrevista semiestructurada

Tarea 1.1

1. ¿Cuáles fueron las partes de la figura que guiaron tu manera de ver, es decir en qué parte de la figura centraste tu manera de ver para ver solución al problema? (Señalar de ser posible)
2. Cuando queremos nombrar una parte de la figura, recibe el nombre de subfigura. ¿Qué movimiento en el plano (traslación o rotación) se asocia a la subfigura del triángulo de la Figura A?
3. Lee y muestra el procedimiento usado. Si está incompleto pedirle que lo complete según lo dialogado anteriormente y si está completo pedirle que lo exponga paso a paso.
4. Estar atenta a las palabras y expresiones que usa para corregir o hacer énfasis.
5. Concluir con: para saber si la figura A y la figura B quedaron con igual cantidad de superficie se debe hacer una superposición o comparación, ¿qué entiendes por superposición o comparación? Para aclarar mostrar con las figuras.

Tarea 1.2

1. ¿Que debes realizar para comprobar si las figuras tienen igual, mayor o menor cantidad de superficie?
2. ¿Es posible transformar la Figura C en la figura D? enuncia que acciones es posible de hacer.
3. Cuando realizas los dobleces sobre la figura se llama trazos suplementarios, muéstrame los trazos suplementarios que has realizado. ¿Para qué te sirven esos trazos en la Figura?
4. En qué partes de la figura centraste la atención, ¿qué nombre reciben estas subfiguras?
5. ¿Porque esas subfiguras? ¿Llama tu atención algo en especial de estas subfiguras? ¿Porque no elegiste otras subfiguras?
6. La acción de cortar y organizar esas partes, se llama reconfigurar. (esperar a que el estudiante reconfiguré)
7. ¿Esas figuras (se supone una de las figuras convertida en la otra) tienen igual cantidad de superficie? ¿O existe otra relación de orden entre ellas?
8. ¿Cuándo una figura puede convertirse en otra figura y se pueden comparar para saber si coinciden o no sus partes y lados, podemos establecer una relación de orden, si organizas las figuras una encima que puedes ver? Si todas las partes y lados de las figuras coinciden se puede establecer que las figuras tienen igual cantidad de superficie. Y si no coinciden las partes y lados de las figuras se puede establecer que una figura tiene mayor o menor cantidad de superficie.

Tarea 1.3

1. ¿Cuál trazo suplementario utilizaste para transformar la Figura E en la Figura F?
2. ¿Porque ese trazo? ¿Qué llamo la atención en la figura E para transformarla en la figura F? o viceversa.

Tarea 1.4

1. ¿En que subfigura en particular de la figura G centraste tu visualización? Y ¿Por qué?
2. ¿Cuáles trazos suplementarios realizaste? ¿Por qué esos?
3. ¿De qué manera puedes reconfigurar las subfiguras realizadas a partir de los trazos suplementarios, para averiguar sobre la subfigura sombreada a que parte corresponde de la figura G?
4. Leer el procedimiento realizado y completar el procedimiento con lo dialogado anteriormente.

Tarea 2.1

1. ¿Explica el proceso que uso para la solución de esta tarea?
2. ¿De qué manera dio uso a la tira de papel para llegar a la solución de esta tarea?
3. ¿Por cuál alambre hiciste primero la comprobación con la tira de papel, por el alambre 1 o 2? ¿qué influyó en la elección de iniciar por el alambre 1 o 2? (depende de lo que responda)
4. ¿Crees es que bien la elección del alambre 1? ¿Qué te hace asegurarte de ello?

Tarea 2.2

1. ¿Qué entiendes por contorno de la figura M?
2. Lee el procedimiento desarrollado para solucionar la tarea
3. Hay movimientos en el plano como la traslación y la rotación, cuando se realiza la marcación de cada uno de los lados de la figura sobre la tira de papel y luego se marca sobre el segmento de línea A. ¿puedes señalar y decir el movimiento (traslación o rotación) aplicado a cada uno de los lados? (se debe tener presente que solo hay un lado que se traslada, el cual es el paralelo al segmento, es un elemento de control para la comprensión de la operación linealización)
4. ¿Lo que acabas de decir, con respecto a los movimientos de cada lado está escrito en el procedimiento? (Se debe enfatizar en escribir todo aquello que dijo el estudiante)

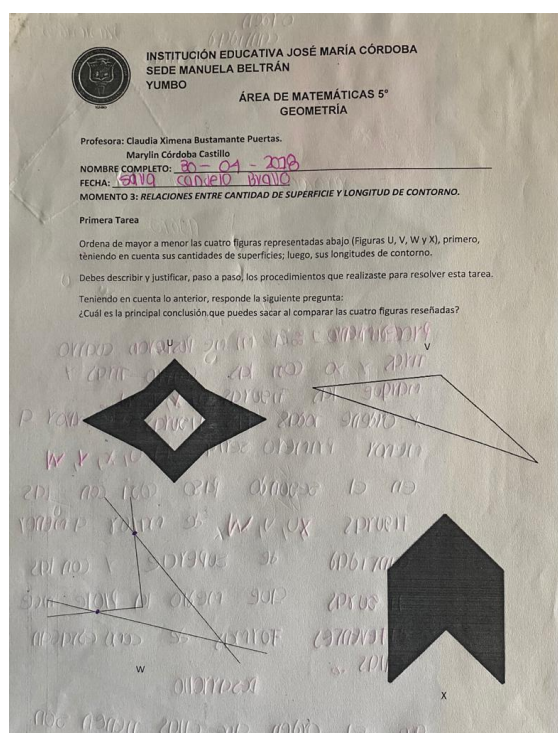
Tarea 2.3

1. Lee la afirmación que elegiste verdadera y lee la justificación de elegir esa afirmación como verdadera.
2. ¿Cómo estableces qué figura tiene mayor o menor longitud de contorno?
3. ¿Cuáles movimientos en el plano realizas cuando con el lápiz se marcan los extremos de cada uno de los lados de la figura? ¿Al final obtienes en la tira varias marcaciones si lo haces sobre la hoja que obtienes? (el estudiante debe poner las marcaciones en forma vertical) ¿qué obtienes? ¿Y si por las marcaciones haces un trazo? (Se espera que responda: una línea) es decir que aplicar operaciones tal como traslación y rotación sobre cada lado de una figura y representarlos en una línea recta se llama linealización.

Anexo 6. Procedimientos

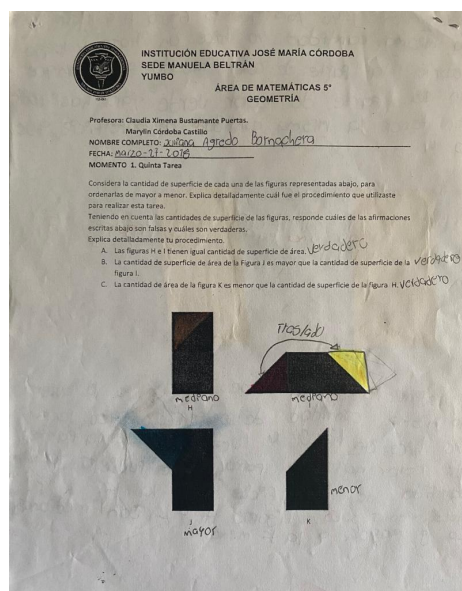
Procedimiento Esperado con éxito (PE)

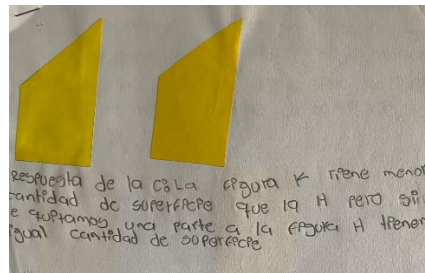
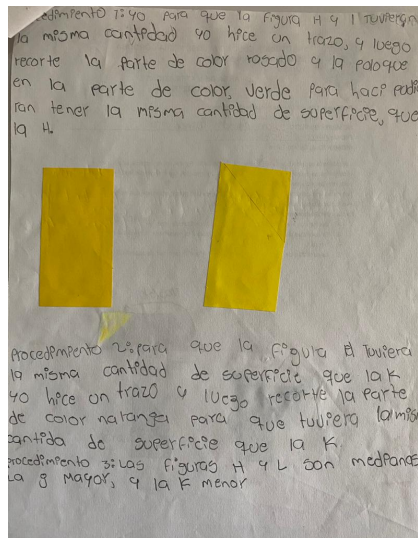
El procedimiento PE, es el procedimiento que se presenta en el análisis predictivo, es decir donde el estudiante es guiado por la visualización de acuerdo con los elementos de control propuestos, además de establecer la relación de orden establecida.



Procedimiento esperado con error (PEE-PP)

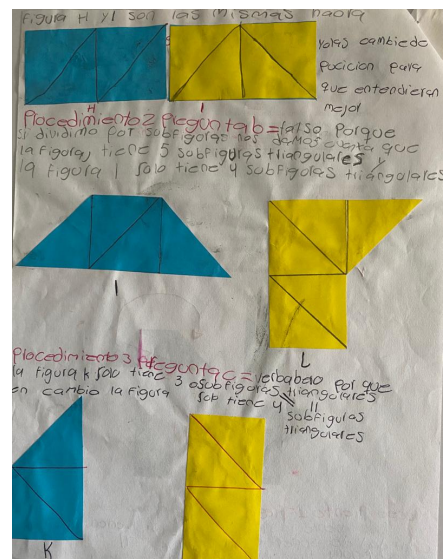
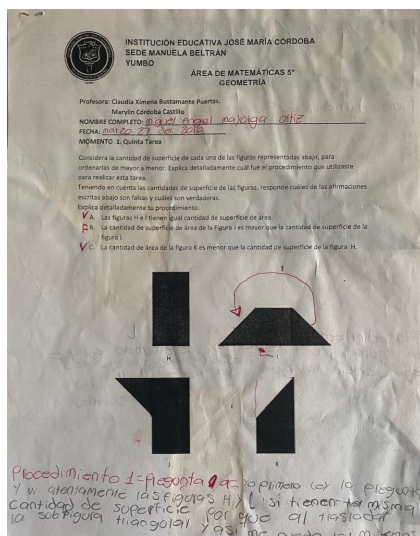
Este ejercicio identifica PEE debido a que en la manera de proceder se logra identificar las operaciones esperadas, sin embargo no se logra la respuesta esperada.

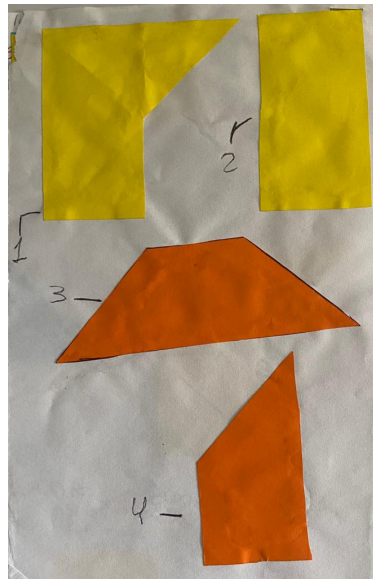




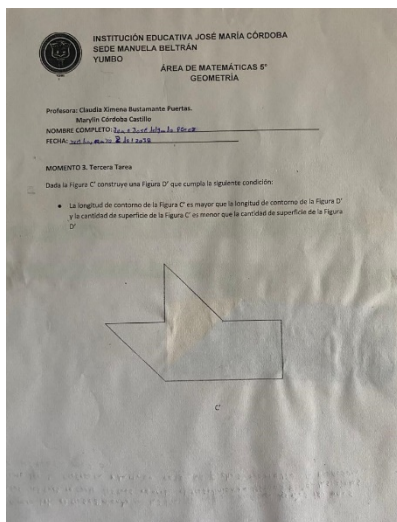
Procedimiento no esperado con éxito PNE

La siguiente manera de proceder no era el esperado debido a que no se aplicaron las operaciones visuales esperadas, de modo que la visualización muestra que se identificaron unidades figurales de dos dimensiones, se realizaron reconfiguraciones y se estableció la relación de orden como se lo esperaba.





Procedimiento no esperado con error PN-PNP



Es siguiente procedimiento no era el esperado porque se debía añadir cantidad de superficie de manera que se pudiera establecer la relación de orden solicitada, atendiendo a los elementos de control presentados.

