

Efecto Cherenkov para diferentes medios materiales

MARVIN BRAYAN NUÑEZ ZUÑIGA



Tutor: Juan Carlos Granada Echeverry, Ph. D

Trabajo de grado presentado en
cumplimiento de los requisitos para el
título de Física

Programa Académico de Física
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad del Valle - Sede Cali

23 de Junio de 2021

Índice general

Índice	III
Resumen	1
Abstract	1
Capítulo 1 Introducción	2
Capítulo 2 Formalismo general	6
2.1 Fórmula de Frank-Tamm	6
2.1.1 Formulación matemática	8
2.2 Radiación de Cherenkov para un medio material LH	13
2.2.1 Formulación matemática	14
2.3 Modelos dispersivos de los medios materiales	22
2.3.1 Modelo resonante	22
2.3.2 Modelo de Drude-Lorentz	24
Capítulo 3 Características de la radiación de Cherenkov en diferentes medios materiales	27
3.1 Análisis del modelo resonante	27
3.2 Análisis del modelo de Drude-Lorentz	30
3.3 Conclusiones	36
Apéndice A Ecuaciones de Maxwell en medios materiales	38
Apéndice B Caso especial (Transformada de Hankel)	40
Apéndice C Forma asintótica de la función de Hankel	41
Apéndice D Solución para un medio RH	42
Apéndice E Índice de Símbolos	45

Resumen

En este trabajo se propone estudiar la energía radiada y la distribución espectral de la radiación de Cherenkov cuando una partícula cargada se mueve en un medio polarizable y magnetizable con una fuerte dependencia con la frecuencia de su permitividad dieléctrica y su permeabilidad magnética, prestando especial atención a la banda de frecuencias donde el sistema se comporta como material zurdo (LH). Para ello, se extenderá el formalismo desarrollado por Frank y Tamm para medios isotrópicos no magnetizables al caso cuando los medios presentan propiedades ópticas más diversas. Los resultados analíticos serán complementados con resultados numéricos, con el fin de dilucidar las condiciones en las que se puede presentar la reversión de la radiación de Cherenkov.

Palabras claves: energía radiada, distribución espectral, radiación de Cherenkov, material zurdo (LH).

Abstract

In this work it is proposed to study the radiated energy and the spectral distribution of Cherenkov's radiation related to the pass of an ultra relativistic particle which moves with uniform velocity in a polarizable and magnetizable medium with a strong dependence on the frequency in its dielectric permittivity and magnetic permeability, with special emphasis to the frequency band where the system behaves like a left handed (LH) medium. For this purpose, the Frank-Tamm's formalism, formulated for isotropic and non magnetic media, will be extended to the case when media have diverse optical properties. The obtained analytical results will be complemented with numerical results, in order to understand the conditions that allow the reversal of Cherenkov's radiation.

Key words: radiated energy, spectral distribution , Cherenkov's radiation, left handed (LH) medium.

Introducción

La radiación se puede definir como la propagación de energía en forma de ondas electromagnéticas o partículas subatómicas a través de un medio material o del vacío. Caracterizar esta categoría de fenómeno es una herramienta valiosa para comprender las propiedades de diversos sistemas físicos. Este trabajo se enfocará en la radiación electromagnética generada cuando una partícula cargada se mueve en un medio de índice de refracción n con una velocidad $v > c/n$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Este tipo de radiación se conoce como radiación Cherenkov o radiación de Vavilov-Cherenkov [1]. Dichas condiciones se cumplen para las partículas de energía del orden de 100 keV, que pueden generarse en procesos nucleares y aceleradores de partículas [2].

La radiación de Vavilov-Cherenkov es uno de los fenómenos más destacados que se descubrieron en el siglo XX. Específicamente, en 1934, P.A. Cherenkov realizó una serie de experimentos sobre la luminiscencia emitida por ciertas soluciones líquidas, al irradiar con rayos gamma derivados de fuentes radiactivas. Durante los experimentos, que continuaron hasta 1938, Cherenkov se dio cuenta de que los rayos gamma producían una radiación electromagnética muy débil, lo que resulta en una tenue luz azul. Esto lo discutió con su supervisor, Vavilov, el cual le sugirió a Cherenkov determinar todas las propiedades de esta luz azul. Cherenkov realizó entonces una serie de experimentos para caracterizar este tipo de radiación. Sin embargo, un profundo análisis de las propiedades físicas de la luz emitida reveló que el efecto no podía ser un fenómeno de luminiscencia. En primer lugar, la radiación de Cherenkov se emite a lo largo de un cono de direcciones formando un ángulo bien definido con la dirección de los rayos gamma incidentes y, en segundo lugar, la radiación era linealmente polarizada y, de hecho, ninguna de estas propiedades es inherente a la luminiscencia [3].

En 1937, I.E. Frank e I.M. Tamm [4] proporcionaron la explicación teórica de el efecto Cherenkov, basándose en la hipótesis de que la radiación observada no era causada directamente por los rayos gamma, sino más bien por electrones ultrarelativistas producidos por los rayos

gamma a través de la dispersión Compton. Se dieron cuenta, de hecho, que la radiación de Cherenkov es generada por electrones que viajan en un medio dieléctrico con una velocidad constante que excede la velocidad de la luz en el medio [3]. Además, Frank y Tamm hallaron una ecuación, que lleva sus nombres y que describía la radiación de Vavilov-Cherenkov. Esta fórmula les permitió calcular la frecuencia a la cual la radiación era más intensa.

Debido al enorme impacto de su trabajo, Cherenkov, Frank y Tamm recibieron el Premio Nobel de Física en 1958 por el descubrimiento y la interpretación del efecto Cherenkov [5].

La fórmula de Frank y Tamm permite explicar las características de la radiación Cherenkov en medios isótropos no magnetizables. Sin embargo, al profundizar en el estudio de las propiedades electromagnéticas de medios materiales, nos encontramos con materiales con la capacidad de formar tanto dipolos eléctricos como dipolos magnéticos, en respuesta dinámica a los campos electromagnéticos que actúan sobre el sistema. A dichos medios se les conoce como medios materiales polarizables y magnetizables, respectivamente. Las relaciones constitutivas para este tipo de materiales, que complementan el sistema de ecuaciones de Maxwell, se ven considerablemente modificadas, lo que altera las características de la radiación Cherenkov que pueda generarse en dichos medios. Entre los materiales polarizables y magnetizables destacan aquellos creados de manera artificial, que exhiben simultáneamente permitividad y permeabilidad negativas sobre determinada banda de frecuencias. Estos materiales se han denominado materiales zurdos (LH), en contraste con los medios convencionales diestros (RH), y forman parte de una categoría de materiales, denominada metamateriales, que presentan propiedades ópticas completamente nuevas, razón por la cual han recibido mucha atención en los últimos años. Probablemente el más fundamental de los descubrimientos es la constatación de que los medios LH pueden caracterizarse por un índice negativo de refracción, lo cual había sido predicho por Veselago varias décadas antes [6]. Entre muchas otras propiedades únicas de los medios LH señaladas por Veselago destaca el hecho que, en ellos, la radiación de Cherenkov se revierte: el cono de la radiación se dirige hacia atrás en relación con el movimiento de la partícula, debido a que la componente radial del vector de onda se dirige hacia la trayectoria de la partícula. Sin embargo, esta predicción está formulada para una categoría de materiales hipotéticos, con propiedades ópticas notablemente diferentes de las que presentan los sistemas

crecidos en los laboratorios actuales [7]. Por esta razón es pertinente examinar de nuevo las propiedades de la radiación de Cherenkov en medios LH con diversas dependencias de la frecuencia en su permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética, para investigar con más detalle las condiciones en las que se puede presentar la reversión de radiación de Cherenkov.

Este estudio permitiría entender algunas características específicas que se observan al estudiar el movimiento de partículas ultra relativistas en otros materiales no convencionales.

En la actualidad, se demostró el análogo plasmático de la mejora del índice de refracción en nanoestructuras metálicas. Este fenómeno se puede usar para lograr la radiación de Cherenkov mejorada sintonizable en nanoestructuras metálicas. Además de permitir la radiación de Cherenkov de partículas de movimiento lento, o aumentando su intensidad, el fenómeno puede usarse también para ajustar el límite de velocidad de las partículas que contribuyen a la radiación de Cherenkov [2]. En la detección de partículas de movimiento más lento requiere medios con índices de refracción mucho más fuertes. Los desarrollos recientes en el control y la fabricación de nanoestructuras (NS) han permitido diseñar detectores de partículas basados en nanoestructuras metálicas (MNS). Las redes de MNS facilitan los metamateriales hiperbólicos. En estos metamateriales, la densidad fotónica mejorada de los estados aumenta la intensidad de la Radiación de Cherenkov. Además, el umbral de la radiación se puede aumentar en estos metamateriales. Tal medio periódico se demuestra experimentalmente para emitir radiación de Cherenkov para energías de electrones tan bajas como 0.25 keV [2].

El comportamiento de la radiación Cherenkov ha sido investigado recientemente en sistemas asimétricos basados en materiales girotrópicos [8], lo que ha permitido la manipulación de la dispersión, transmisión y propagación de la respectiva radiación electromagnética de manera no recíproca y sintonizable.

Por ejemplo, en el estudio de las propiedades metálicas del silicio, se ha demostrado que, en el régimen de energía ultravioleta extrema (EUV), dicho material puede soportar tanto la propagación de plasmones de superficie como oscilaciones de carga colectiva, lo que no es posible con otros materiales plasmónicos como aluminio, plata u oro. Al explorar las propiedades metálicas y plasmónicas del silicio, que han permanecido en gran medida ignoradas, se

usa una fuente de radiación de Cherenkov sin umbral ajustable y de banda ancha en el EUV con metamateriales plasmónicos de silicio. De esta manera, se ha mostrado que los plasmones EUV soportados por silicio pueden ayudar al avance en el estudio de los metamateriales y dispositivos que no son posibles con materiales plasmónicos convencionales [9].

Siendo la radiación de Cherenkov de gran utilidad en los avances de la ciencia y contar con diversas aplicaciones, entre ellas el contribuir al progreso del estudio de los metamateriales radiantes (que tienen aplicaciones en la biología y en la medicina [2]), es pertinente aportar a dilucidar sus propiedades en las condiciones novedosas que plantea la ciencia de nuevos materiales.

Formalismo general

En este capítulo se plantea interpretar cómo influyen las propiedades ópticas de materiales polarizables y magnetizables en las características de la radiación Cherenkov. Es decir, se extenderá el formalismo de la teoría de Frank y Tamm para obtener la energía total radiada U y la distribución del espectro para el caso de partículas ultra relativistas que se propagan en medios materiales magnetizables y polarizables con fuerte dependencia de sus propiedades ópticas con la frecuencia.

Luego, se aplicará el formalismo para analizar la radiación de Cherenkov en meta-materiales con índice de refracción negativo, específicamente para "materiales zurdos" (Left-Handed, LH). De esta manera, se espera que el estudio teórico desarrollado para este tipo de materiales permita observar la modificación del patrón de radiación de Cherenkov que introducen los diferentes modelos particulares para la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética.

2.1. Fórmula de Frank-Tamm

Como ya se había mencionado en la introducción, para el surgimiento de la radiación Cherenkov es necesario que la velocidad v de una partícula al atravesar un medio material dieléctrico sea mayor que la velocidad de fase de la luz c' en dicho medio material,

$$|\vec{v}| = \frac{c}{|n|} = c' < c; \quad (2.1)$$

de esta manera, se cumple la condición para que en un punto lejano ubicado a un ángulo θ_c (ángulo de Cherenkov) se obtenga un campo resultante, siendo necesario que el medio material sea transparente a la luz emitida.

La partícula ioniza de manera temporal el medio material por el que pasa, produciéndose un campo eléctrico $\vec{E}$ que polariza el medio en la dirección de la trayectoria, lo que ocurre al

cumplirse la ec. (2.1), ocasionando que los electrones se muevan de su posición de equilibrio y regresen de nuevo a este a medida que la partícula va desplazándose, generándose un breve pulso electromagnético que interfiere de manera constructiva con los demás, siendo posible observarlo para grandes distancias (ver figura 2.1). Si $|\vec{v}| < c'$, la polarización no ocurre en la dirección de la trayectoria y la interferencia de las ondas electromagnéticas es destructiva, no siendo posible observarla a grandes distancias.

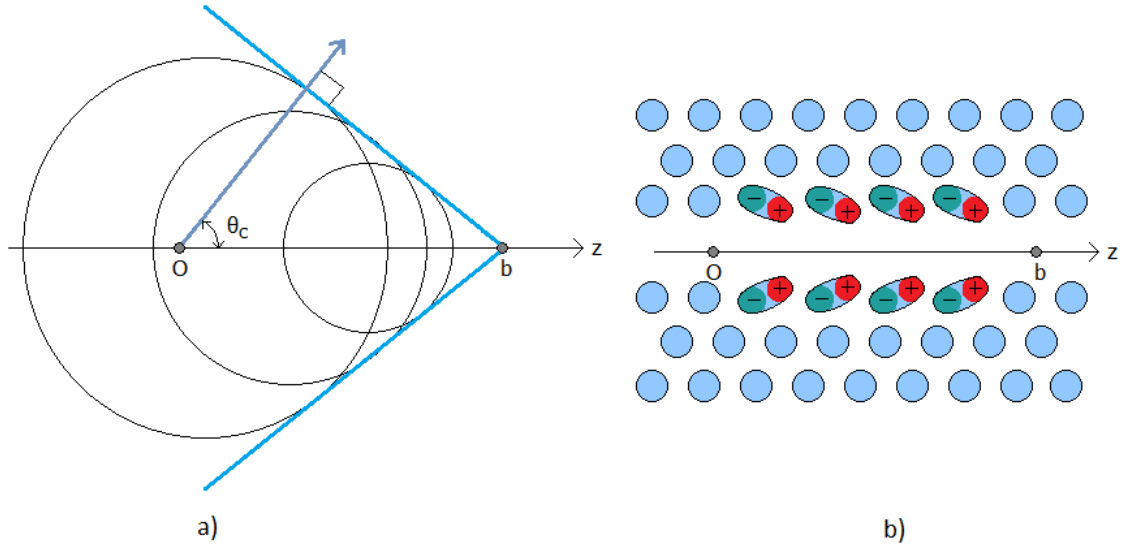


FIGURA 2.1: Partícula cargada viajando a una velocidad $v > c'$ a través de un medio material RH: a) interferencia de las ondas producidas, b) representación de la polarización del medio.

La distancia $O - b$ (ver figura 2.2) recorrida por la partícula en un intervalo de tiempo Δt se puede escribir como $v \cdot \Delta t = (v/c) \cdot c \cdot \Delta t = \beta \cdot c \cdot \Delta t$; además, en ese mismo intervalo de tiempo el frente de ondas del haz de luz emitido, que se propaga con un vector de onda $\vec{k} = k_\rho \hat{e}_\rho + k_z \hat{e}_z$, se habrá desplazado una distancia $O - a$ que puede expresarse como $(c/n) \cdot \Delta t$. Entonces, la relación entre el índice de refracción n y ángulo θ_c formado por $\vec{v}$ y $\vec{k}$ cumple la siguiente expresión

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n},$$

conocida como la relación de Cherenkov.

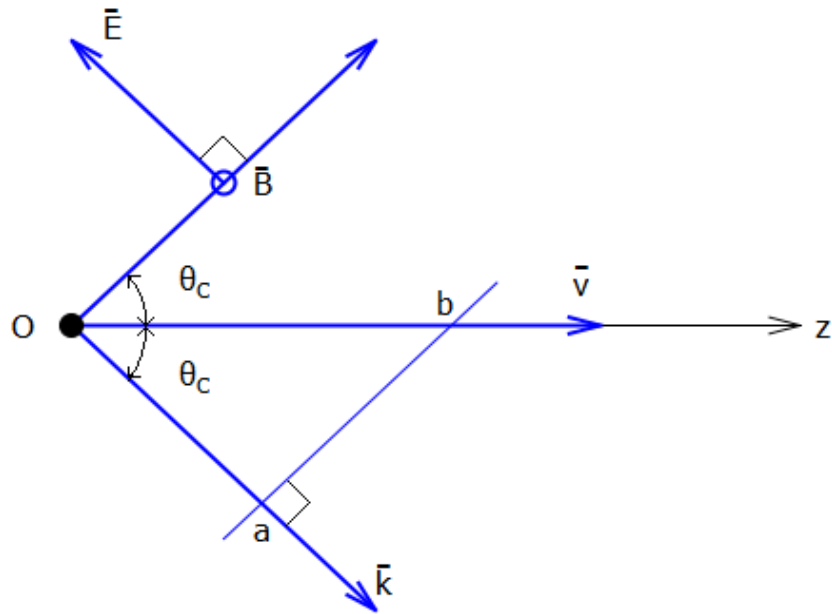


FIGURA 2.2: Radiación de Cherenkov para un medio material RH.

2.1.1. Formulación matemática

Para determinar la energía emitida por una partícula que viaja en un medio con una velocidad que satisface la condición de Cherenkov, se parte de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

1. el medio es considerado como un continuo,
2. los fenómenos de dispersión no se tendrán en cuenta,
3. no tenemos en cuenta la fuerza de Abraham-Lorentz,
4. se asume que el medio es un dieléctrico perfecto e isótropo,
5. el electrón se mueve a velocidad constante,
6. tanto el medio como la longitud del trayecto son infinitos.

Con base en los resultados del apéndice A, en el dominio de frecuencias el potencial vectorial asociado al movimiento uniforme de una partícula cargada satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 \vec{A}_\omega + \epsilon \mu_0 \omega^2 \vec{A}_\omega = -\mu_0 \vec{j}_\omega, \quad (2.2)$$

donde ϵ es la permitividad dieléctrica y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. De la cuarta condición, la densidad de corriente se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{j}_\omega = \frac{q}{2\pi\rho} \delta(\rho) e^{-i\omega z/v} \hat{e}_z, \quad (2.3)$$

siendo q la carga de la partícula. Debido a la simetría axial del problema, la componente z del potencial vectorial se puede representar como:

$$A_z(\rho, z, \omega) = u(\rho) e^{-i\omega z/v}, \quad (2.4)$$

donde $u(\rho)$ es una función que depende de la distancia radial de un punto P del espacio al eje z .

Al reemplazar las ecuaciones (2.3), (2.4) en la ec. (2.2) se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden inhomogénea para la componente z del potencial vector (usando el operador laplaciano en coordenadas cilíndricas):

$$\frac{\partial^2 u(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\rho)}{\partial \rho} - \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 n^2) u(\rho) = -\frac{q\mu_0}{2\pi\rho} \delta(\rho), \quad (2.5)$$

donde $n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega)$ y $\beta = v/c$ es la velocidad relativa a la de la luz. Además, la anterior expresión es la ecuación de Bessel modificada inhomogénea escogiendo $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 n^2)$.

La solución de las ecuaciones se satisface para:

$$u(\rho) = \frac{q\mu_0}{2\pi} K_0(\alpha\rho), \quad (2.6)$$

donde $K_0(\alpha\rho)$ es la función modificada de Bessel. Al resolver la ecuación de Bessel modificada, se obtiene:

$$A_z(\rho, z, \omega) = \frac{q\mu_0}{2\pi} K_0(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v}. \quad (2.7)$$

De la condición de calibre de Lorentz ec. (A.8) se obtiene para la componente temporal del 4-potencial

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z, \omega) &= \frac{i}{\omega\epsilon\mu_0} \nabla \cdot \vec{A} \\ &= \frac{i}{\omega\epsilon\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q\mu_0}{2\pi} K_0(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v} \right) \\ &= \frac{q}{2\pi v\epsilon} K_0(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Usando las ecuaciones (A.5), (A.6), se obtienen las siguientes expresiones para las componentes (en coordenadas cilíndricas) de los campos electromagnéticos:

$$H_\omega^\phi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\omega^z}{\partial \rho} = \frac{q}{2\pi} \alpha K_1(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v}, \quad (2.9)$$

$$E_\omega^\rho = -\frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \rho} = \frac{q}{2\pi\epsilon v} \alpha K_1(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E_\omega^z &= -ik_z \Phi_\omega + i\omega A_\omega^z \\ &= \left(-i \frac{q\omega}{2\pi v^2 \epsilon} + i \frac{q\omega\mu_0}{2\pi} \right) K_0(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v} \\ &= -i \frac{q\omega}{2\pi v^2 \epsilon} (1 - v^2 \epsilon \mu_0) K_0(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v} \\ &= \frac{iq\mu_0\omega}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) K_0(\alpha\rho) e^{-i\omega z/v}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Téngase en cuenta ahora la expresión para la forma asintótica de la función de Bessel modificada [10]:

$$K_\nu(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{-\xi}.$$

De la condición $\beta n > 1$ se concluye que α es imaginario y puede ser expresado como $\alpha = i(\omega/v)\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} = i|\alpha|$, permitiendo reescribir los campos electromagnéticos de la siguiente manera:

$$H_\omega^\phi = \frac{q}{2\pi} \sqrt{\frac{i\pi|\alpha|}{2\rho}} e^{-i(|\alpha|\rho + \omega z/v)}, \quad (2.12)$$

$$E_\omega^\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon v} \sqrt{\frac{i\pi|\alpha|}{2\rho}} e^{-i(|\alpha|\rho + \omega z/v)}, \quad (2.13)$$

$$E_\omega^z = \frac{iq\mu_0\omega}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2i|\alpha|\rho}} e^{-i(|\alpha|\rho + \omega z/v)}. \quad (2.14)$$

La energía total emitida en la dirección radial se puede calcular mediante la respectiva componente del vector de Poynting:

$$U = 2\rho l \int_0^\infty S_\rho d\omega = -2\rho l \int_0^\infty E_\omega^z \bar{H}_\omega^\phi d\omega, \quad (2.15)$$

donde l es la longitud de un cilindro de radio ρ .

La expresión subintegral en la ec. (2.15) es

$$\begin{aligned} E_\omega^z \bar{H}_\omega^\phi &= \left(\frac{iq\mu_0\omega}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2i|\alpha|\rho}} e^{-i(|\alpha|\rho + \omega z/v)} \right) \left(\frac{q}{2\pi} \sqrt{\frac{-i\pi|\alpha|}{2\rho}} e^{i(|\alpha|\rho + \omega z/v)} \right) \\ &= i \left(\frac{q}{2\pi} \right)^2 \mu_0\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2i|\alpha|\rho}} \sqrt{\frac{-i\pi|\alpha|}{2\rho}} \\ &= i \frac{q^2}{8\pi\rho} \mu_0\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \sqrt{-1} = -\frac{q^2}{8\pi\rho} \mu_0\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se sustituye ec. (2.16) en la ec. (2.15) y se llega de esta manera a la siguiente expresión para la energía radiada asociada al movimiento uniforme de una partícula cargada en un medio polarizable:

$$U = \frac{q^2 \mu_0 l}{4\pi} \int_0^\infty \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\omega. \quad (2.17)$$

Esta expresión se puede generalizar al caso de un medio magnetizable. Teniendo en cuenta que U/l es la energía radiada por unidad de longitud, se puede escribir en forma más general:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{q^2}{4\pi} \int_0^\infty \mu \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\omega, \quad (2.18)$$

siendo esta solución la obtenida por B.D. Nag y A.M. Sayied en 1956 [11], mientras que en el trabajo original de Frank y Tamm se asumió $\mu_r = 1$. Para este caso, las soluciones pueden expresarse de la siguiente manera:

$$U_z = \int_{-\infty}^\infty S_z dt = \frac{q^2}{8\pi^2 \rho v} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\epsilon} d\omega, \quad (2.19)$$

$$U_\rho = \int_{-\infty}^\infty S_\rho dt = \frac{q^2}{8\pi^2 \rho} \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\omega \epsilon} d\omega, \quad (2.20)$$

donde α se definió después de la ec. (2.5). Sin embargo, para un medio LH donde $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$, los resultados son invertidos. Así, se obtiene $U_z < 0$ y $U_\rho > 0$, las cuales corresponden a la inversión de la dirección de la energía radiada. Para este propósito, es preciso considerar las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para un medio magnético o polarizable (apéndice A) en donde el vector desplazamiento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y el campo magnético $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, como se mostrará en la siguiente sección.

2.2. Radiación de Cherenkov para un medio material LH

La primera descripción de metamateriales *zurdos* (medios LH) o *doblemente negativos* (DNG) fue realizada por Victor Veselago, en 1968 [6]. Aunque Veselago especuló en su artículo que algunas “sustancias girotrópicas que poseen propiedades tanto plasmáticas como magnéticas” podrían ser ejemplos anisótropos de medios zurdos, hasta la fecha no se ha encontrado un medio natural con tales propiedades. Pero esto no ha sido ningún impedimento para la obtención de manera artificial de este tipo de materiales. En la actualidad, la terminología metamateriales se refiere a materiales compuestos que consisten en unidades estructurales mucho más pequeñas que la longitud de onda de la radiación incidente y que muestran propiedades ópticas que por lo general no se encuentran en materiales naturales [12].

En 1996 Pendry [13] sugirió teóricamente, y luego demostró experimentalmente en 1998 [14] que un medio compuesto de alambres metálicos delgados de forma periódica puede comportarse como un medio de plasma efectivo para la radiación con una longitud de onda mucho mayor que la periodicidad espacial de la estructura. Para frecuencias más bajas que una frecuencia particular (plasma), la estructura de alambre delgado exhibe por lo tanto una permitividad negativa ϵ . Posteriormente en 1999 [15] describió cómo se adaptaría un medio cuya permeabilidad magnética efectiva podría mostrar un comportamiento de Lorentz resonante y, por lo tanto, lograr valores negativos de permeabilidad dentro de una banda de frecuencia por encima de la frecuencia de resonancia.

En el 2001 fue reportado uno de los primeros metamateriales por Shelby et al. [16], estudiando experimentalmente un medio bidimensional LH para frecuencias de microondas y confirmando numéricamente este material. En este estudio, demostraron físicamente una estructura LH isotrópica bidimensional y sus experimentos han permitido verificar las propiedades de la onda electromagnética inversa con índice de refracción negativo.

En esta sección se hallará las ecuaciones que describen la radiación de Cherenkov para meta-materiales (medio LH), que tiene tanto permitividad como permeabilidad negativas; para ello se generalizará la deducción realizada por Frank-Tamm [4] anteriormente descrita para materiales convencionales RH; después, con estos resultados se demostrará, entre otras

cosas, que el movimiento de partículas en el medio LH genera energía que se propaga hacia atrás.

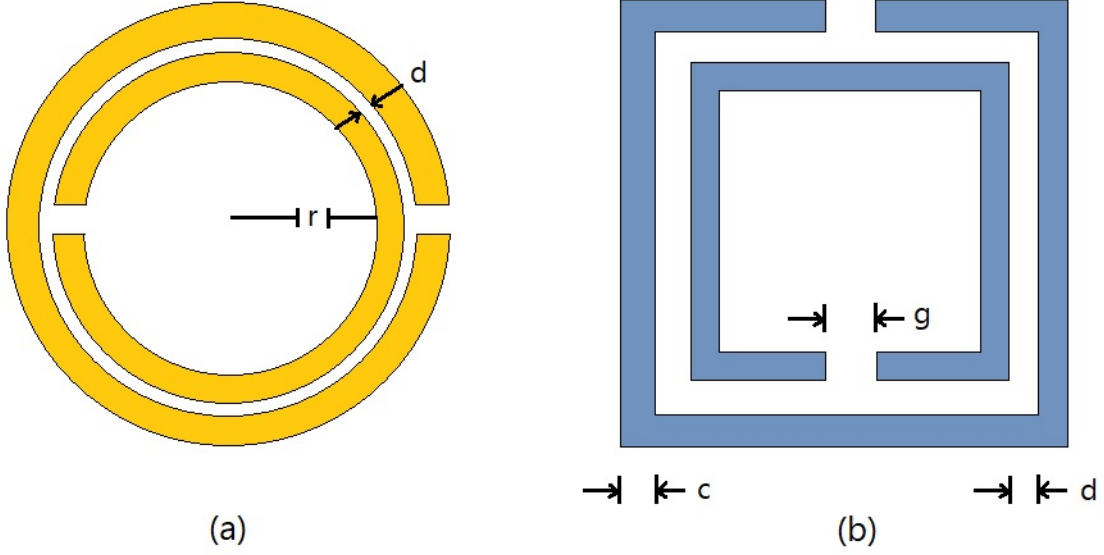


FIGURA 2.3: a) Esquema del primer metamaterial artificial con ϵ y μ negativos simultáneamente. b) Representación esquemática de un tipo de resonador de anillo dividido único SRR (split-ring resonator) que Shelby et al. utilizó para los estudios de medios LH.

2.2.1. Formulación matemática

Al igual que la sección anterior se partirá de la ec. (A.9), en donde se reemplaza $\mu\epsilon = \mu_r\epsilon_r\mu_0\epsilon_0 = n^2/c^2$ y se realiza el cambio $\partial_t \rightarrow -i\omega$, obteniéndose

$$\nabla^2 \vec{A}_\omega + \frac{n^2\omega^2}{c^2} \vec{A}_\omega = -\mu \vec{j}_\omega. \quad (2.21)$$

La densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r}, t) = qv\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z$ que se produce por una carga que se mueve con velocidad v a través de un material en la dirección z en coordenadas cilíndricas sin dependencia azimutal, es

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{qv}{2\pi\rho}\delta(z - vt)\delta(\rho)\hat{e}_z. \quad (2.22)$$

Pasando al dominio de frecuencias, se tiene

$$\vec{j}_\omega = \frac{qv}{2\pi\rho} \delta(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - vt) e^{-i\omega t} dt \hat{e}_z. \quad (2.23)$$

Recordando que $\delta(x) = \delta(-x)$ y al escribir $\delta(z - vt) = \delta(v(z/v - t)) = \delta(vu)$, se usa la propiedad $\delta(vu) = \delta(u)/|v|$, obteniéndose

$$\vec{j}_\omega = \frac{q\delta(\rho)}{2\pi\rho} e^{-i\omega z/v} \hat{e}_z. \quad (2.24)$$

Reemplazando este resultado en la ec. (2.21), se llega a la siguiente ecuación diferencial para el potencial vectorial:

$$\nabla^2 \vec{A}_\omega + \frac{n^2\omega^2}{c^2} \vec{A}_\omega = -\frac{\mu q \delta(\rho)}{2\pi\rho} e^{-i\omega z/v} \hat{e}_z. \quad (2.25)$$

De la anterior ecuación podemos notar que $\vec{A}_\omega = A_\omega \hat{e}_z$ lo que implica que $A_\rho = A_\phi = 0$. Si escogemos $\vec{A}_\omega = g(\rho) e^{-i\omega z/v} \hat{e}_z$ y lo reemplazamos en la ec. (2.25), se llega a

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{n^2\omega^2}{c^2} \right] g(\rho) = -\frac{\mu q \delta(\rho)}{2\pi\rho}. \quad (2.26)$$

Definiendo $k_\rho^2 = \omega^2(n^2\beta^2 - 1)/v^2$ donde $\beta = v/c$, la ec. (2.26) se puede reescribir

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + k_\rho^2 \right] g(\rho) = -\frac{\mu q \delta(\rho)}{2\pi\rho}. \quad (2.27)$$

De las transformadas de Hankel se tiene la relación $K_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} = -u^2 K_\nu\{f(r)\}$, donde

$$\Delta_\nu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \left(\frac{\nu}{\rho} \right)^2. \quad (2.28)$$

Realizando la transformada de Hankel del primer termino de la ec. (2.27), se obtiene

$$\int_0^\infty \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} \right) \right] J_0(u\rho) d\rho = -u^2 G(u). \quad (2.29)$$

Aplicando la transformada de Hankel a toda la ec. (2.27), se llega a la siguiente expresión para la amplitud de la componente z del potencial vectorial:

$$G(u) = -\frac{\mu q}{2\pi} \frac{1}{k_\rho^2 - u^2}.$$

Entonces,

$$g(\rho) = -\frac{\mu q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{u J_0(u\rho)}{k_\rho^2 - u^2} du. \quad (2.30)$$

Usando la ec. (B.4), se pueden obtener dos soluciones independientes

- caso 1: $g(\rho) = \frac{i\mu q}{4} H_0^{(1)}(k_\rho \rho)$, que corresponde a una onda saliente con $\vec{k} = k_\rho \hat{e}_\rho + k_z \hat{e}_z$,
- caso 2: $g(\rho) = -\frac{i\mu q}{4} H_0^{(2)}(k_\rho \rho)$, que corresponde a una onda entrante con $\vec{k} = -k_\rho \hat{e}_\rho + k_z \hat{e}_z$.

En las anteriores expresiones $k_z = \frac{\omega}{v} > 0$.

Como $A_\rho = A_\phi = 0$ y $A_z = A_z(\rho, z)$, entonces

$$\vec{B}_\omega = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{e}_\phi = -\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} \cdot e^{-i\omega z/v} \hat{e}_\phi. \quad (2.31)$$

Para el caso 1 ($\vec{B}_\omega^{(1)}$) y el caso 2 ($\vec{B}_\omega^{(2)}$), se tiene

$$\vec{B}_\omega^{(1)} = -\frac{i\mu q}{4} \frac{\partial H_0^{(1)}(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \cdot e^{-i\omega z/v} \hat{e}_\phi \quad y \quad \vec{B}_\omega^{(2)} = \frac{i\mu q}{4} \frac{\partial H_0^{(2)}(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \cdot e^{-i\omega z/v} \hat{e}_\phi. \quad (2.32)$$

Para hallar el campo eléctrico se recurre a la ley de Ampere-Maxwell, obteniéndose

$$\vec{E}_\omega = -\frac{\vec{k} \times \vec{B}_\omega}{\omega\mu\epsilon} - i \cdot \frac{\vec{J}_\omega}{\omega\epsilon}.$$

El campo eléctrico se obtendrá para valores de $\rho \neq 0$, es decir, cuando el segundo término es nulo.

Téngase en cuenta que para cada caso la componente radial del vector de onda cambia de signo y $k_z = \omega/v$. Entonces, para los casos considerados 1 y 2 tienen lugar las relaciones

$$\begin{aligned}\vec{E}_\omega^{(1)} &= \frac{iq}{4\omega\epsilon} \frac{\partial H_0^{(1)}(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \cdot e^{-i\omega z/v} (k_\rho \hat{e}_z - \frac{\omega}{v} \hat{e}_\rho), \\ \vec{E}_\omega^{(2)} &= \frac{iq}{4\omega\epsilon} \frac{\partial H_0^{(2)}(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \cdot e^{-i\omega z/v} (k_\rho \hat{e}_z + \frac{\omega}{v} \hat{e}_\rho).\end{aligned}\tag{2.33}$$

De las propiedades de las derivadas de la función de Hankel, se obtiene:

$$\frac{dH_0^{(1)}(z)}{dz} = -H_1^{(1)}(z) \quad y \quad \frac{dH_0^{(2)}(z)}{dz} = -H_1^{(2)}(z).\tag{2.34}$$

Entonces, las ecuaciones (2.32) toman la forma

$$\vec{B}_\omega^{(1)} = \frac{i\mu q}{4} k_\rho H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \hat{e}_\phi \quad y \quad \vec{B}_\omega^{(2)} = -\frac{i\mu q}{4} k_\rho H_1^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \hat{e}_\phi,\tag{2.35}$$

mientras que las ecuaciones (2.33) se transforman en

$$\begin{aligned}\vec{E}_\omega^{(1)} &= -\frac{iqk_\rho}{4\omega\epsilon} H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} (k_\rho \hat{e}_z - \frac{\omega}{v} \hat{e}_\rho), \\ \vec{E}_\omega^{(2)} &= -\frac{iqk_\rho}{4\omega\epsilon} H_1^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} (k_\rho \hat{e}_z + \frac{\omega}{v} \hat{e}_\rho).\end{aligned}\tag{2.36}$$

Para escoger el caso físicamente posible se realizará un análisis del vector de poynting en el dominio de frecuencias, escogiendo $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$ y usando las relaciones del Apéndice C.

- Para el caso 1 se tiene

$$S_\rho = -\frac{1}{\mu} E_z^\omega \overline{B}_\phi^\omega < 0,$$

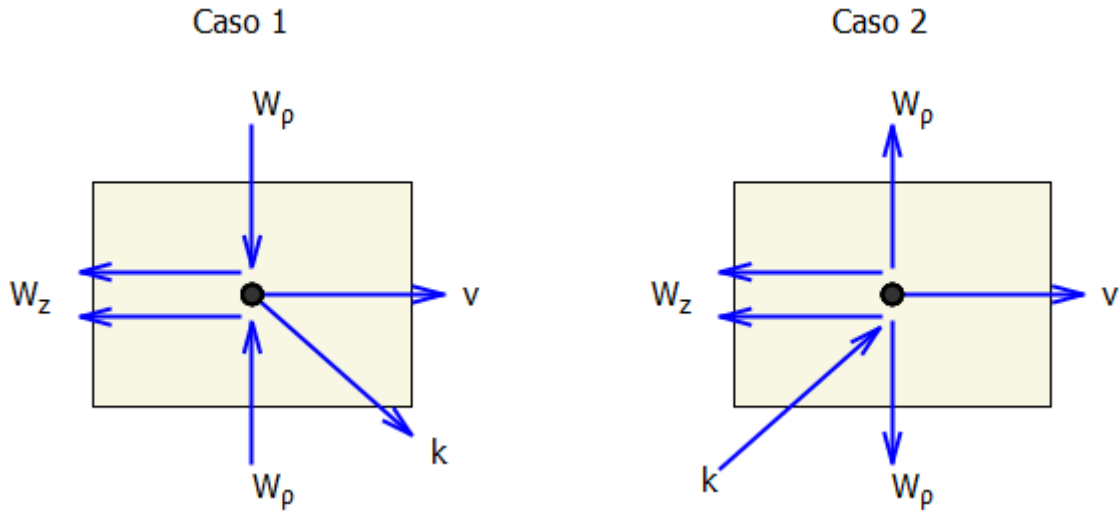
$$S_z = \frac{1}{\mu} E_\rho^\omega \overline{B}_\phi^\omega < 0.$$

- Para el caso 2 se tiene

$$S_\rho = -\frac{1}{\mu} E_z^\omega \overline{B}_\phi^\omega > 0,$$

$$S_z = \frac{1}{\mu} E_\rho^\omega \overline{B}_\phi^\omega < 0.$$

Las respectivas direcciones de flujo de energía en las direcciones radial y a lo largo del movimiento de la partícula se esquematizan de la siguiente manera:



De esta representación esquemática podemos concluir que la radiación para los materiales RH están descritos por la solución del caso 1 y para los materiales LH por la del caso 2.

Para obtener las expresiones analíticas que describan los respectivos flujos de energía, realizamos la transformada inversa de Fourier para las componentes del campo eléctrico y magnético del caso 2 y se usa la relación (C.2). Se obtienen así las siguientes expresiones para las componentes de los campos

$$\begin{aligned}
B_t^\phi &= -\frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mu k_\rho H_1^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mu k_\rho \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{-i\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v)} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mu \sqrt{k_\rho} \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v - k_\rho \rho + 3\pi/4)} d\omega,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
E_t^\rho &= -\frac{iq}{4v} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_\rho}{\epsilon} H_1^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho}{\epsilon} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{-i\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v)} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_\rho}}{\epsilon} \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v - k_\rho \rho + 3\pi/4)} d\omega,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
E_t^z &= -\frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_\rho^2}{\omega \epsilon} H_1^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho^2}{\omega \epsilon} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{-i\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v)} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho \sqrt{k_\rho}}{\omega \epsilon} \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v - k_\rho \rho + 3\pi/4)} d\omega.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

La energía radiada por unidad de área se puede obtener de la siguiente manera:

$$W_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho dt = - \int_{-\infty}^{\infty} E_t^z H_t^\phi dt \quad \text{y} \quad W_z = \int_{-\infty}^{\infty} S_z dt = \int_{-\infty}^{\infty} E_t^\rho H_t^\phi dt. \tag{2.40}$$

Reemplazando las expresiones de los campos en las anteriores ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}
 W_\rho &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho dt \\
 &= \frac{q^2}{8\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\omega} \int_{\omega'} \frac{k_\rho \sqrt{k_\rho k'_\rho}}{\omega \epsilon} \cdot e^{i((\omega+\omega')t - (\omega+\omega')z/v - (k_\rho+k'_\rho)\rho + 3\pi/2)} d\omega d\omega' \right) dt,
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
 W_z &= \int_{-\infty}^{\infty} S_z dt \\
 &= -\frac{q^2}{8\pi\rho v} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\omega} \int_{\omega'} \frac{\sqrt{k_\rho k'_\rho}}{\epsilon} \cdot e^{i((\omega+\omega')t - (\omega+\omega')z/v - (k_\rho+k'_\rho)\rho + 3\pi/2)} d\omega d\omega' \right) dt.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Usando la propiedad

$$\delta(\omega + \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\omega')t} dt,$$

las ecuaciones (2.41), (2.42) se pueden escribir de la siguiente manera

$$W_\rho = \frac{q^2}{4\rho} \int_{\omega} \frac{k_\rho(\omega) \sqrt{k_\rho(\omega) k_\rho(-\omega)}}{\omega \epsilon(\omega)} \cdot e^{-i((k_\rho(\omega) + k_\rho(-\omega))\rho - 3\pi/2)} d\omega, \tag{2.43}$$

$$W_z = -\frac{q^2}{4\rho v} \int_{\omega} \frac{\sqrt{k_\rho(\omega) k_\rho(-\omega)}}{\epsilon(\omega)} \cdot e^{-i((k_\rho(\omega) + k_\rho(-\omega))\rho - 3\pi/2)} d\omega. \tag{2.44}$$

Escribiendo $k_\rho(\omega) = |k_\rho(\omega)| \cdot e^{i\theta} = k_R(\omega) + ik_I(\omega)$ y $\epsilon(\omega) = |\epsilon(\omega)| \cdot e^{i\theta_\epsilon}$, y teniendo en cuenta además que $|k_\rho(-\omega)| = |k_\rho(\omega)|$, $k_R(-\omega) = -k_R(\omega)$ y $k_I(-\omega) = k_I(\omega)$, las anteriores ecuaciones se pueden reescribir así

$$W_\rho = \frac{q^2}{4\rho} \int_\omega \frac{|k_\rho(\omega)|^2}{\omega |\epsilon(\omega)|} \cdot e^{-i(\theta_\epsilon(\omega) - 3\theta(\omega)/2 - \theta(-\omega)/2 - 3\pi/2)} \cdot e^{2k_I(\omega)\rho} d\omega, \quad (2.45)$$

$$W_z = -\frac{q^2}{4\rho v} \int_\omega \frac{|k_\rho(\omega)|}{|\epsilon(\omega)|} \cdot e^{-i(\theta_\epsilon(\omega) - \theta(\omega)/2 - \theta(-\omega)/2 - 3\pi/2)} \cdot e^{2k_I(\omega)\rho} d\omega. \quad (2.46)$$

De estos resultados se obtienen las componentes de la parte real del vector de poynting en el dominio de frecuencia

$$S_\rho(\omega) = \frac{|k_\rho(\omega)|\chi(\omega)}{\omega} \cdot e^{2k_I(\omega)\rho} \cdot \cos(\tau(\omega) - \theta(\omega) - 3\pi/2), \quad (2.47)$$

$$S_z(\omega) = -\frac{\chi(\omega)}{v} \cdot e^{2k_I(\omega)\rho} \cdot \cos(\tau(\omega) - 3\pi/2), \quad (2.48)$$

en donde $\chi(\omega) = \frac{q^2}{4\rho} \frac{|k_\rho(\omega)|}{|\epsilon(\omega)|}$ y $\tau(\omega) = \theta_\epsilon(\omega) - \theta(\omega)/2 - \theta(-\omega)/2$.

Análogamente de las ecuaciones (D.11), (D.12), para un medio RH se obtiene

$$S_\rho(\omega) = -\frac{|k_\rho(\omega)|\chi(\omega)}{\omega} \cdot e^{-2k_I(\omega)\rho} \cdot \cos(\tau(\omega) - \theta(\omega) + 3\pi/2), \quad (2.49)$$

$$S_z(\omega) = -\frac{\chi(\omega)}{v} \cdot e^{-2k_I(\omega)\rho} \cdot \cos(\tau(\omega) + 3\pi/2), \quad (2.50)$$

entonces, el vector unitario que describe el flujo de energía queda expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{\eta(\omega) \cdot \cos(\tau(\omega) - \theta(\omega) - 3\pi/2)\hat{e}_\rho - \cos(\tau(\omega) - 3\pi/2)\hat{e}_z}{\sqrt{\eta^2(\omega) \cdot \cos^2(\tau(\omega) - \theta(\omega) - 3\pi/2) + \cos^2(\tau(\omega) - 3\pi/2)}}, & \text{para un medio LH,} \\ \hat{S}(\omega) &= \frac{-\eta(\omega) \cdot \cos(\tau(\omega) - \theta(\omega) + 3\pi/2)\hat{e}_\rho - \cos(\tau(\omega) + 3\pi/2)\hat{e}_z}{\sqrt{\eta^2(\omega) \cdot \cos^2(\tau(\omega) - \theta(\omega) + 3\pi/2) + \cos^2(\tau(\omega) + 3\pi/2)}}, & \text{para un medio RH,} \end{aligned}$$

con $\eta(\omega) = |k_\rho(\omega)|v/\omega$.

2.3. Modelos dispersivos de los medios materiales

La constante dieléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ son las magnitudes características fundamentales que determinan la propagación de ondas electromagnéticas en la materia. Esto se debe a que son los únicos parámetros de la sustancia que aparecen en la ecuación de dispersión [6]:

$$\left| \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{il} \mu_{lj} - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right| = 0. \quad (2.51)$$

Por esta razón en esta sección se obtendrán las fórmulas correspondientes a algunos modelos de materiales que se utilizarán posteriormente para el análisis de la radiación de Cherenkov.

2.3.1. Modelo resonante

En el modelo resonante la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética están relacionadas con la frecuencia ω de la siguiente manera:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_{oe}^2}{\omega^2 - \omega_{oe}^2 + i\gamma_e \omega} \quad \text{y} \quad \mu_r = 1 - \frac{\omega_{pm}^2 - \omega_{om}^2}{\omega^2 - \omega_{om}^2 + i\gamma_m \omega}, \quad (2.52)$$

donde ω_{pe} , ω_{pm} y ω_{oe} , ω_{om} denotan las frecuencias de plasma y las frecuencias naturales, eléctricas y magnéticas respectivamente; además, γ_e y γ_m son los coeficientes correspondientes de amortiguamiento.

Ilustremos la obtención de la primera ecuación de (2.52). Suponemos que un electrón aislado en el material considerado experimenta la acción de una fuerza eléctrica $q\vec{E}$, de una fuerza de disipación $-m\gamma_e\vec{v}$ y de una fuerza elástica asociada a que el electrón está ligado a un átomo con una constante elástica $k = m\omega_0^2$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de dicho electrón es:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\gamma_e\vec{v} - k(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (2.53)$$

suponiendo que $\vec{x}_0$ se debe al campo eléctrico $\vec{E} = \rho\vec{x}_0/\epsilon_0$, entonces:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q\vec{E} - m\gamma_e \frac{d\vec{x}}{dt} - k(\vec{x} - \frac{\epsilon_0}{\rho}\vec{E}). \quad (2.54)$$

Asumiendo que $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ la anterior ecuación queda de la siguiente manera:

$$-m\omega^2\vec{x} = q\vec{E} + im\omega\gamma_e\vec{x} - m\omega_0^2\vec{x} - m\omega_0^2\frac{\epsilon_0}{\rho}\vec{E},$$

de la cual, al despejar la desviación de un electrón $\vec{x}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\vec{x} = \frac{-\left(\frac{q}{m} - \omega_0^2\frac{\epsilon_0}{\rho}\right)}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma_e}\vec{E}.$$

El momento dipolar inducido ($\vec{p} = q\vec{x}$) es:

$$\vec{p} = \frac{-\left(\frac{q^2}{m} - \omega_0^2\frac{q\epsilon_0}{\rho}\right)}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma_e}\vec{E}.$$

Si en el sistema hay N electrones distribuidos uniformemente, el momento dipolar total es $\vec{p}_{tot} = N\vec{p}$, además, si la distribución de carga en el material es homogénea entonces $\rho = Nq/V$. La polarización $\vec{P} = \vec{p}_{tot}/V$ es entonces:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_{tot}}{V} = \frac{-(q^2N/mV - \omega_0^2\epsilon_0)}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma_e}\vec{E}.$$

En la anterior expresión $N/V \equiv n$ es la densidad volumétrica del número de cargas. Teniendo en cuenta que el desplazamiento eléctrico es $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, se obtiene:

$$\vec{D} = \left(1 - \frac{q^2n/\epsilon_0m - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma_e}\right)\epsilon_0\vec{E},$$

y de la ecuación $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ se encuentra la siguiente expresión de la permitividad dieléctrica para el modelo resonante:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma_e}, \quad (2.55)$$

donde $\omega_{pe}^2 = q^2 n / \epsilon_0 m$ es el cuadrado de la frecuencia de plasma eléctrico.

La segunda fórmula de la ecuación (2.52) se puede obtener examinando la respuesta de un sistema de anillos truncados ante un campo magnético, como ocurre en los diversos diseños de meta-materiales [12].

2.3.2. Modelo de Drude-Lorentz

Los modelos de polarización y magnetización de Drude-Lorentz con pérdida se utilizan para simular el medio DNG; específicamente la permitividad y la permeabilidad se describen en el dominio de la frecuencia como

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 (1 + i/\omega\tau_e) - \omega_{oe}^2}, \quad (2.56)$$

$$\mu_r = 1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2 (1 + i/\omega\tau_m) - \omega_{om}^2}, \quad (2.57)$$

en donde τ_e y τ_m denotan el tiempo de relajación, eléctrico y magnético respectivamente.

Para obtener la fórmula de la ec. (2.56) se procede de manera similar al modelo resonante utilizando la ecuación del movimiento de un electrón no ligado al átomo:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= q\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau_e} - k\vec{x}, \\ \rightarrow m \cdot \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} &= q\vec{E} - \frac{m}{\tau_e} \frac{d\vec{x}}{dt} - k\vec{x}, \end{aligned}$$

siendo el segundo termino del lado derecho de la igualdad la fuerza de disipación y el tercero la fuerza elástica ligado a un átomo donde $k = m\omega_0^2$.

Entonces, en este caso bajo la acción de un campo eléctrico variable la desviación del electrón está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{x} = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_e}\right)} \vec{E}.$$

El momento dipolar inducido ($\vec{p} = q\vec{x}$) es:

$$\vec{p} = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_e}\right)} \vec{E}.$$

Si en el sistema hay N electrones distribuidos uniformemente, el momento dipolar total es $\vec{p}_{tot} = N\vec{p}$. La polarización $\vec{P} = \vec{p}_{tot}/V$ es entonces:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_{tot}}{V} = \frac{q^2 N/mV}{\omega_0^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_e}\right)} \vec{E},$$

donde $N/V \equiv n$ es la densidad volumétrica del número de cargas. El desplazamiento eléctrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es

$$\vec{D} = \left(1 + \frac{q^2 n / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_e}\right)}\right) \epsilon_0 \vec{E},$$

y de la ecuación $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ se encuentra para el modelo de Drude-Lorentz:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_e} \right) - \omega_0^2}, \quad (2.58)$$

donde $\omega_{pe}^2 = q^2 n / \epsilon_0 m$, es el cuadrado de la frecuencia de plasma eléctrico.

En la referencia [12] se discuten modelos específicos de materiales cuya respuesta magnética se puede describir mediante la fórmula de la ec. (2.57). En el artículo original de Veselago [6], esta expresión la obtiene al considerar la respuesta magnética de un hipotético gas de monopolos magnéticos.

Características de la radiación de Cherenkov en diferentes medios materiales

En este capítulo vamos a realizar un análisis numérico comparando los resultados obtenidos teóricamente haciendo uso de los modelos de frecuencia resonante y de Drude-Lorentz [17] para la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética estudiados previamente. Se analizará detalladamente el comportamiento de las propiedades ópticas y de la radiación Cherenkov en las diferentes regiones de frecuencia.

3.1. Análisis del modelo resonante

Como se estableció anteriormente, para el modelo resonante la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética están caracterizadas por las siguientes dependencias funcionales con la frecuencia ω :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_{oe}^2}{\omega^2 - \omega_{oe}^2 + i\gamma_e\omega}, \quad \mu_r = 1 - \frac{\omega_{pm}^2 - \omega_{om}^2}{\omega^2 - \omega_{om}^2 + i\gamma_m\omega}.$$

Las frecuencias características ω_{pe} , ω_{pm} , ω_{oe} y ω_{om} son del orden de 10^{11} s^{-1} [7] lo cual significa que los efectos de dispersión temporal son relevantes para frecuencias ω cercanas a este orden de magnitud 10^{11} s . Por otro lado, el orden de magnitud de γ_e y γ_m es 10^6 s^{-1} , lo cual permite en una primera aproximación considerar de manera perturbativa los efectos relacionados con la absorción.

En la referencia [7] se consideró el caso particular en el cual tiene lugar la siguiente relación de parámetros: $\omega_{om} < \omega_{oe}$ y $\omega_{pm} < \omega_{pe}$. Se demostró que la radiación de Cherenkov ocurre en las regiones de frecuencias $0 < \omega < \omega_{om}$ y $\omega_{oe} < \omega < \omega_c$ (siendo $n^2(\omega_c) = 1$), en las cuales la magnitud del cuadrado del índice de refracción es mayor que 1; en la primera región

el sistema se comporta como un material RH y en la segunda, se comporta como un material LH con un índice de refracción negativo.

Dado que los meta-materiales son artificiales es posible diseñarlos de tal manera que se presenten otras relaciones entre las frecuencias características. Entonces, se propone para futuros trabajos escoger otros valores que permitan estudiar la radiación de Cherenkov en diferentes regiones de frecuencias.

En la figura 3.1 se examina el comportamiento del índice de refracción del modelo resonante para las frecuencias $\omega_{om} = \omega_{om} < \omega_{pm} = \omega_{pe}$, donde se observa que la parte imaginaria es par mientras que la parte real es función impar alrededor de dicha frecuencia. Además, $Re\{n^2\} > 0$ siendo la región $0 < \omega < 4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ donde se comporta como un material RH y $4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} < \omega$ para un material LH.

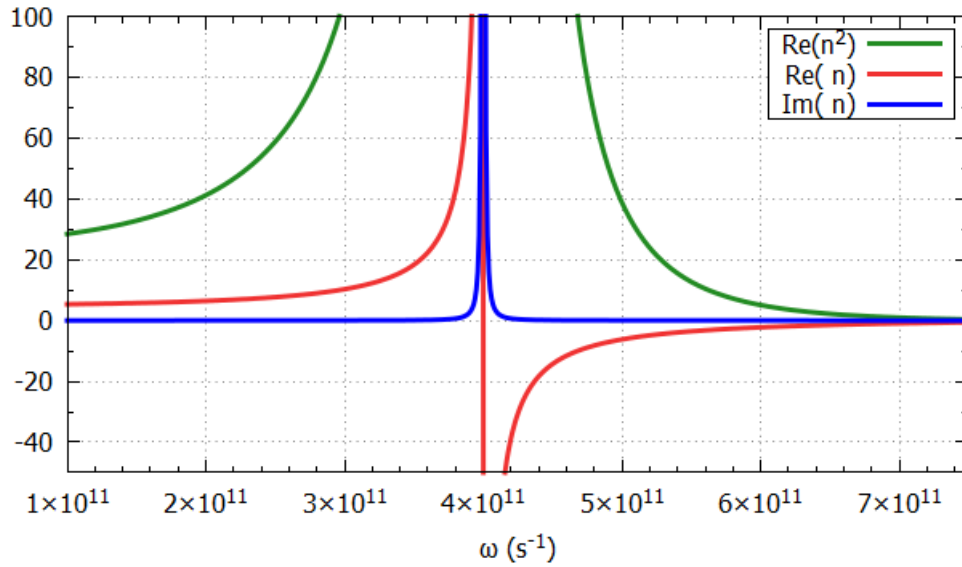
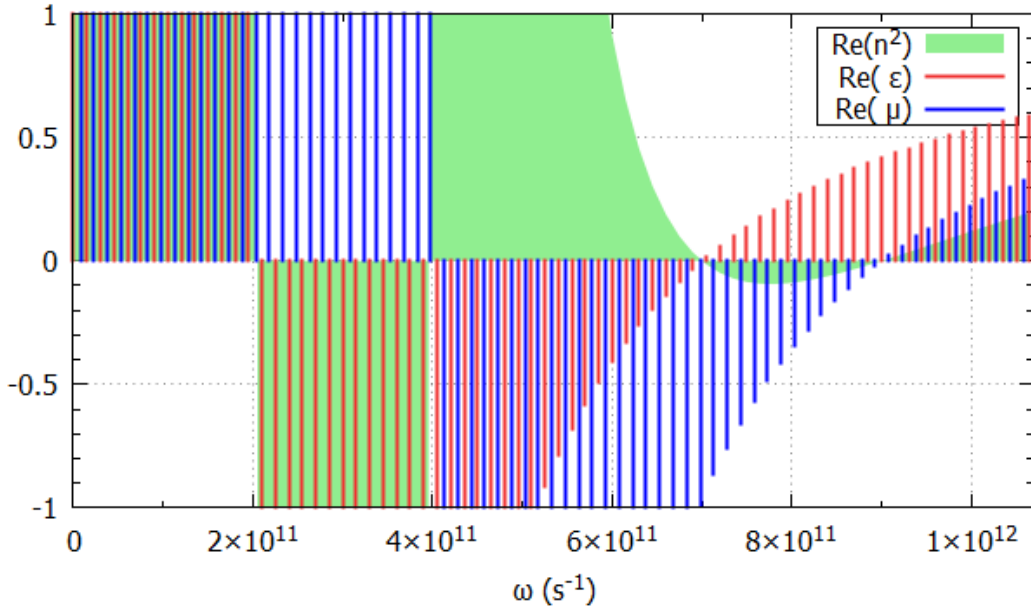


FIGURA 3.1: Gráfica del índice de refracción para el modelo resonante.

Para los resultados que se obtienen de ahora en adelante se tomara un $\gamma_e = \gamma_m = 2\pi \cdot 10^8$ rad/s para una partícula viajando a una velocidad $v = 1,5 \times 10^8$ m/s, donde la energía radiada se calculará para una distancia $\rho = 0,7$ m; además de los valores que se muestran en la tabla 3.1.

TABLA 3.1: Valores constantes de las fórmulas.

frecuencias	valor
ω_{pe}	$7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$
ω_{oe}	$2 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$
ω_{pm}	$9 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$
ω_{om}	$4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$

FIGURA 3.2: Gráfica de la parte real de ϵ_r , μ_r y n^2 del modelo resonante.

En la figura 3.2 se representa la gráfica para la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética en función de la frecuencia para el modelo resonante. En el rango de frecuencias $0 < \omega < 2 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ se espera obtener el patrón de radiación Cherenkov para materiales RH, mientras que para los materiales LH dicho patrón se espera obtener para frecuencias que satisfacen la relación $4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} < \omega < 7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$. En efecto, en el primer rango de frecuencias tanto la permitividad dieléctrica como la permeabilidad magnética son positivas ($\epsilon_r, \mu_r > 0$), razón por la cual el índice de refracción es positivo, mientras que en el segundo rango de frecuencias $\epsilon_r, \mu_r < 0$ lo que garantiza que el índice de refracción sea negativo. En cambio, para las regiones $2 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} < \omega < 4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ y $7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} < \omega < 9 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ el cuadrado del índice de refracción es negativo ($n^2 < 0$), porque en esta región la

parte imaginaria es predominante. Finalmente, para las frecuencias mayores que $9 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$, el sistema se comporta como un material RH, aunque no se generaría radiación ya que $0 < n^2 < 1/\beta^2$.

Para la energía radiada por unidad de área y por unidad de frecuencia se utilizan las componentes del vector de poynting halladas (2.47)-(2.50) para los medios RH y LH. Además, en la figura 3.3 se muestra su dependencia funcional con la frecuencia ω haciendo uso del modelo resonante de ϵ y μ descrito anteriormente y se observa las regiones de frecuencia para las cuales se obtiene radiación como se predijo en el análisis del modelo resonante.

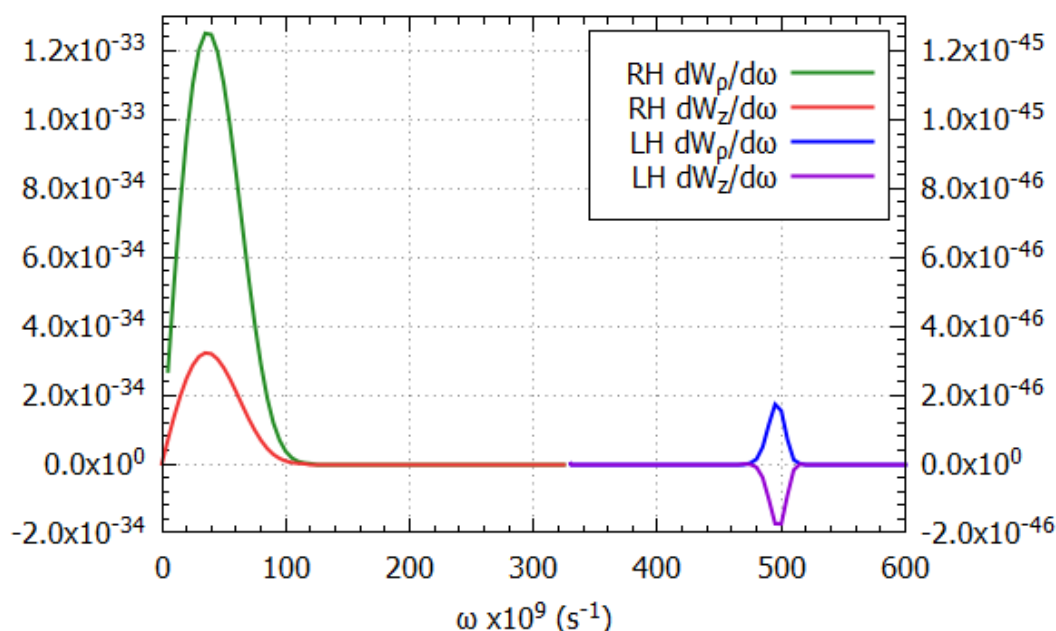


FIGURA 3.3: Gráfica de $dW/d\omega$ ($\text{J} \cdot \text{s}/\text{m}^2$) en función de la frecuencia (ω) para el modelo resonante; la escala izquierda es para un medio material RH y la derecha es para un medio material LH.

3.2. Análisis del modelo de Drude-Lorentz

Para el modelo de Drude-Lorentz las formulas de la permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética son:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 (1 + i/\omega\tau_e) - \omega_{oe}^2}, \quad \mu_r = 1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2 (1 + i/\omega\tau_m) - \omega_{om}^2},$$

en donde $\tau_e = 1/\gamma_e$ y $\tau_m = 1/\gamma_m$.

La figura 3.4 toma los mismos valores mencionados en la anterior sección para las frecuencias características. De forma análoga, como se realizó para el modelo resonante se hace un análisis de las respectivas regiones de frecuencia, encontrando que en el rango de frecuencias $0 < \omega < 4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ la conclusión es similar para ambos modelos, pero para las regiones mayores de $4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ hay un corrimiento debido a las frecuencias naturales ω_{oe} y ω_{om} que se encuentran en el numerador del segundo termino del modelo resonante y que en el modelo de Drude-Lorentz se descartan. Para este caso, la región de frecuencias $4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} < \omega < 7,27 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ y para frecuencias $\omega > 9,82 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ el cuadrado del índice de refracción es positivo siendo descrito por un material LH y uno RH respectivamente; mientras que para la región $7,27 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} < \omega < 9,82 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ el $n^2 < 0$.

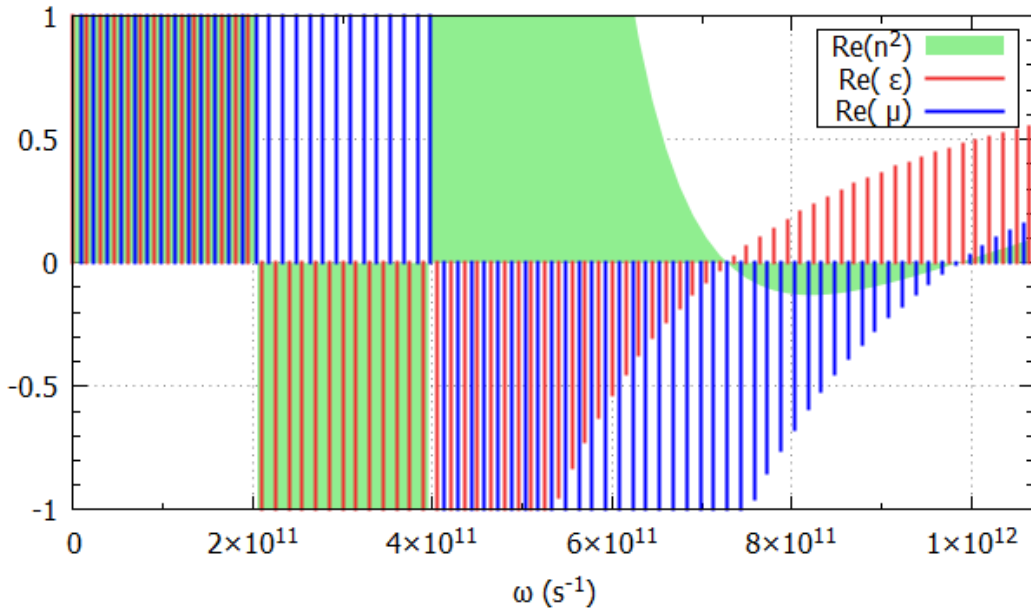


FIGURA 3.4: Gráfica de la parte real de ϵ_r , μ_r y n^2 del modelo de Drude-Lorentz.

Entonces, se puede concluir para este modelo, de la misma manera que para el modelo resonante, que en la región $0 < \omega < 2 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ se espera obtener radiación Cherenkov para un material RH; por otro lado, el rango de frecuencias en el cual se produce radiación Cherenkov y el material se comporta como un medio material LH es menor que el correspondiente al modelo de Drude-Lorentz. Esto se debe a que la presencia de las frecuencias naturales es más notoria en el comportamiento de la radiación Cherenkov en el material LH.

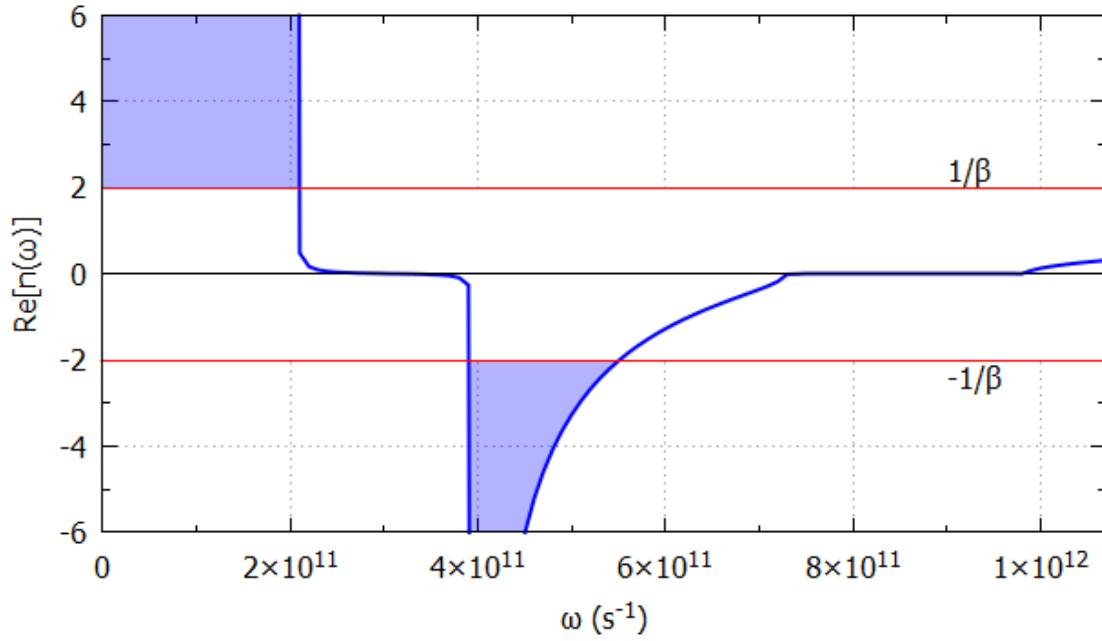


FIGURA 3.5: Gráfica de $\text{Re}\{n(\omega)\}$ en función de ω .

También, es necesario encontrar las regiones para las cuales se cumple la ec. (2.1), lo que es equivalente a representar gráficamente la condición $|n(\omega)| > 1/\beta$, para lo cual se ha graficado la parte real del índice de refracción con dependencia de la frecuencia y se trazaron las líneas de β^{-1} y $-\beta^{-1}$ paralelas al eje x en la figura 3.5, en donde se escogió $\beta = 0,5$, lo cual significa que la radiación Cherenkov existe en las regiones del espectro donde el índice de refracción cumple la condición $|n(\omega)| > 2$. Dichas regiones del espectro corresponden a los sectores sombreados con color violeta en la figura 3.5. La región sombreada de más bajas frecuencias corresponde a la radiación Cherenkov asociada a un material con índice de refracción positivo (RH), mientras que la región de más altas frecuencias delimita la región

del espectro donde la radiación Cherenkov está asociada a un material LH. Estos resultados complementan los obtenidos en la figura 3.4.

De igual forma que en el modelo resonante, se usan los resultados (2.47)-(2.50) para los medios RH y LH para representar gráficamente la energía radiada por unidad de área y por unidad de frecuencia con relación a ω (ver figura 3.6). En cuya representación se utilizó el modelo de Drude-Lorentz de ϵ y μ descrito anteriormente y se presta especial atención a las regiones de frecuencia para las cuales se obtiene radiación.

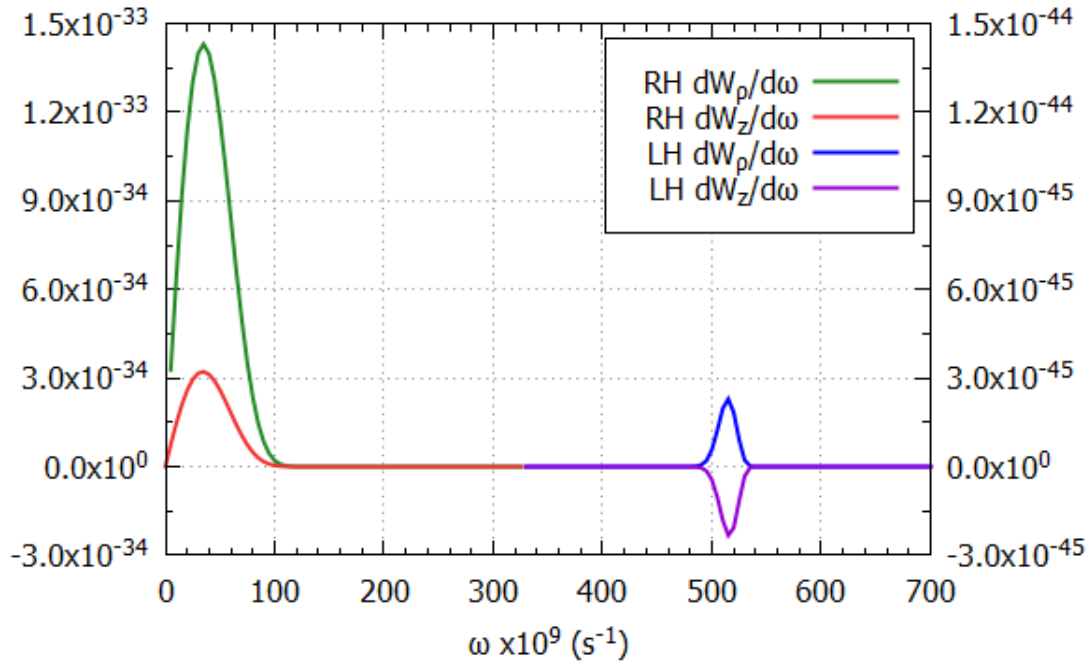


FIGURA 3.6: Gráfica de $dW/d\omega$ ($\text{J} \cdot \text{s}/\text{m}^2$) en función de la frecuencia (ω) para el modelo de Drude-Lorentz; la escala izquierda es para un medio material RH y la derecha es para un medio material LH.

Para los modelos estudiados se observa que la magnitud de la energía por unidad de área y unidad de frecuencia ($dW/d\omega$) decae con una tasa mayor para los materiales LH en comparación a los RH cuando se examina su dependencia con la distancia radial ρ . Esto lo podemos observar de forma más clara en la figura 3.7, donde se representa el comportamiento de los máximos de las respectivas energías radiadas en la dirección del movimiento de la partícula ($dW_z/d\omega$) y en la dirección radial ($dW_\rho/d\omega$).

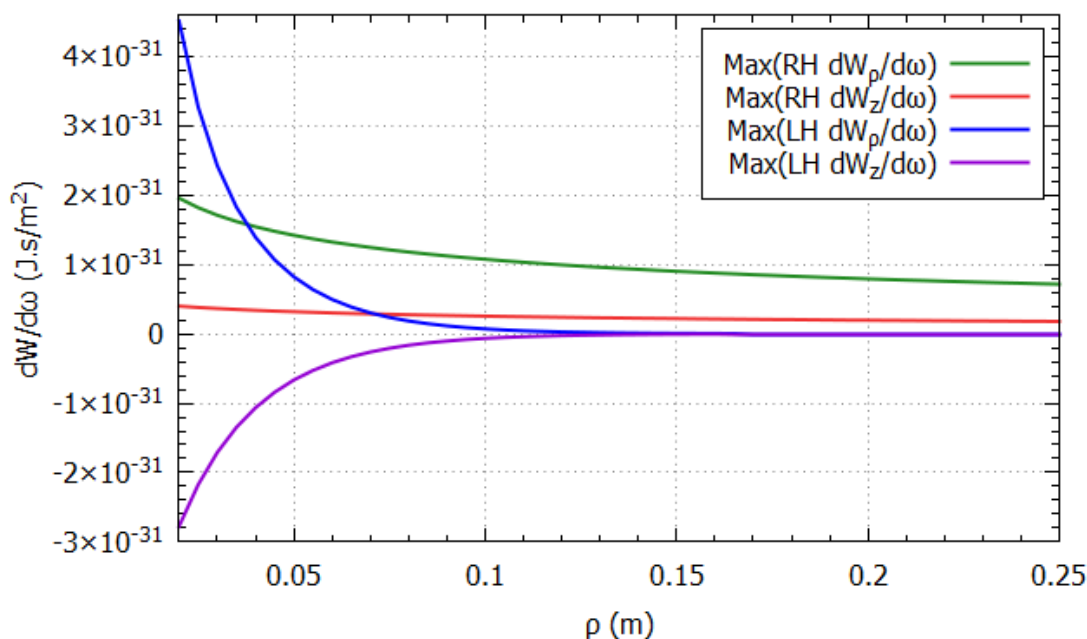


FIGURA 3.7: Gráfica de la relación entre los máximos de $dW/d\omega$ (J·s/m²) respecto a la distancia radial (ρ) para el modelo de Drude-Lorentz.

Por esta razón, en la actualidad se estudian las propiedades ópticas de diferentes medios materiales para la fabricación de detectores Cherenkov, los cuales permiten en la experimentación obtener resultados con mayor precisión.

Los resultados de las figuras 3.3 y 3.6 descritos por las ecuaciones (2.47)-(2.50) también pueden ser mostrados gráficamente usando la representación en coordenadas polares, permitiendo analizar las direcciones en las que se produce radiación para los modelos dispersivos ya descritos previamente. En las figuras 3.8 y 3.9 se ilustran estas representaciones gráficas escogiendo en cada uno de los casos constantes de normalización distintas que permitan la visualización de los resultados. Para ambos modelos se concluye que las direcciones de la radiación son aproximadamente cercanas, tanto para los medios materiales RH como para los LH. Estos resultados se muestran en la tabla 3.2.

TABLA 3.2: Aproximación de la dirección promedio del patrón de radiación.

Medio material	Modelo Resonante	Modelo Drude-Lorentz
RH	$\pm 75, 6^\circ$	$\pm 77, 5^\circ$
LH	$\pm 134, 3^\circ$	$\pm 135, 7^\circ$

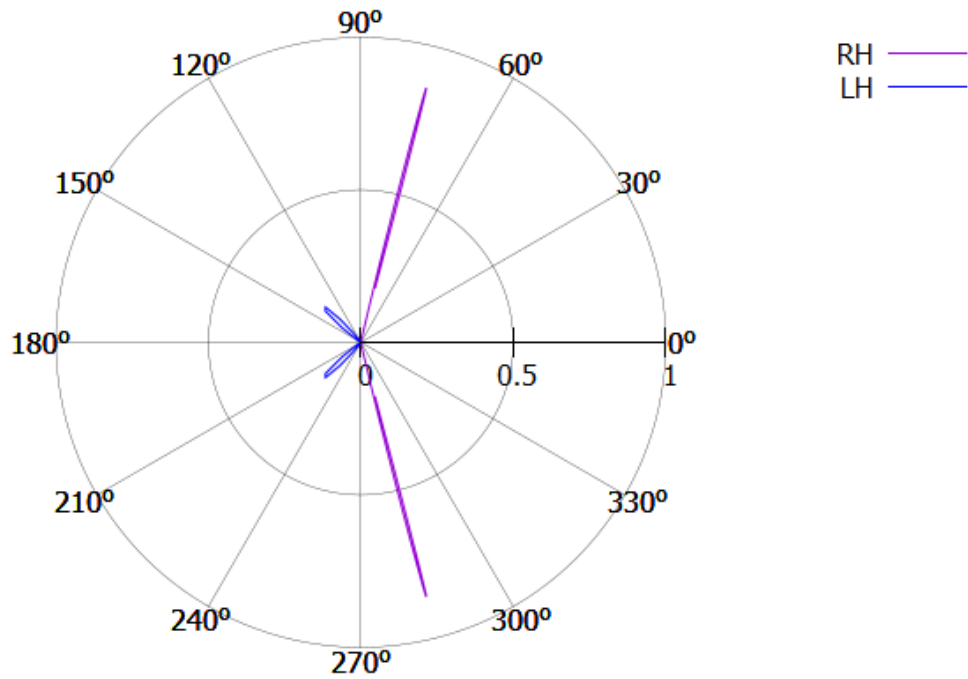


FIGURA 3.8: Patrón de radiación de Cherenkov caracterizado por el modelo resonante. Se uso una constante de normalización $1,5 \times 10^{-33}$ y $1,5 \times 10^{-45}$ para el medio RH y LH respectivamente.

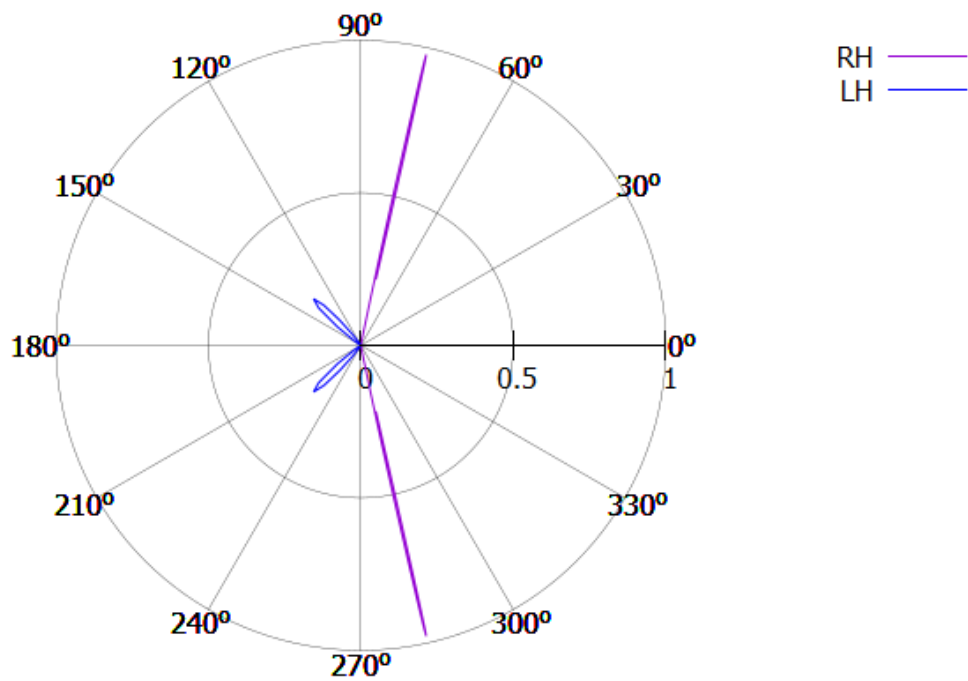


FIGURA 3.9: Patrón de radiación de Cherenkov caracterizado por el modelo de Drude-Lorentz. Se uso una constante de normalización $1,5 \times 10^{-33}$ y $1,5 \times 10^{-44}$ para el medio RH y LH respectivamente.

3.3. Conclusiones

En este documento, se ha estudiado la radiación de Cherenkov para una partícula viajando a través de un medio material diestro (RH), usando el formalismo descrito por Frank y Tamm en su trabajo original, extendiéndolo a medios materiales zurdos (LH), los cuales exhiben simultáneamente permitividad (ϵ) y permeabilidad (μ) negativas; además de esto, se han descrito modelos dispersivos (modelo resonante y modelo de Drude-Lorentz) en situaciones con pérdidas, los cuales permitieron predecir, teniendo en cuenta que $c' > v$, en qué regiones de frecuencia se lograría detectar radiación de Cherenkov.

De esta manera, se obtuvo tanto la solución matemática como las respectivas interpretaciones para cada tipo de medio material, observándose en las diferentes gráficas que para los medios RH la radiación de Cherenkov se presenta en frecuencias más bajas en comparación a los medios LH. Estos resultados se analizaron y se compararon con los ya registrados por otros autores, al hallar tanto la magnitud como la dirección de la energía radiada por unidad de área y unidad de frecuencia ($d\vec{W}/d\omega$), demostrando además, como lo predijo Veselago en su artículo [6], que la radiación de Cherenkov se propaga hacia atrás para un medio material LH. También, uno de los resultados que llamaron la atención, fue la comparación de la tasa de disminución de la radiación de Cherenkov para ambos tipos de materiales, al aumentar la distancia radial (ρ), en los cuales se evidencia una considerable disminución para los materiales zurdos (ver figura 3.7).

En el documento se limitan los resultados para un conjunto de frecuencias características, además de otros parámetros, pero las soluciones obtenidas para ambos medios materiales (RH y LH) están expresadas de forma general, permitiendo para futuros trabajos el análisis de materiales que presenten frecuencias distintas a las propuestas.

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

Para medios materiales como los dieléctricos:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

las cuales están expresadas en el sistema internacional (S.I). Además, las relaciones entre los campos y los potenciales son:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{A.6})$$

Teniendo en cuenta que el vector desplazamiento $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B} = \mu \vec{H}$, se sustituyen las ecuaciones (A.5), (A.6) en la ec. (A.4),

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) &= \vec{J} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \\ \rightarrow \frac{1}{\mu} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} &= \vec{J} - \epsilon \frac{\partial(\nabla\Phi)}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \\ \rightarrow \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} &= \mu \vec{J} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De la condición:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \text{gauge de Lorentz,} \quad (\text{A.8})$$

la ec. (A.7) se reduce a

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad (\text{A.9})$$

conocida como la ecuación del potencial vector.

Caso especial (Transformada de Hankel)

Usando la expresión [18]:

$$\int_0^\infty \frac{u^{\nu+1}}{(u^2 + b^2)^{\mu+1}} J_\nu(au) du = \frac{a^\mu b^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab), \quad (\text{B.1})$$

para $a > 0$, $\Re\{b\} > 0$, $-1 < \Re\{\nu\} < 2\Re\{\mu\} + 3/2$. Reemplazando $b = ik_\rho$ y $a = \rho$, para $\mu = \nu = 0$, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{u J_0(u\rho)}{k_\rho^2 - u^2} du = -K_0(ik_\rho\rho). \quad (\text{B.2})$$

Teniendo en cuenta que

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = -\frac{\pi}{2} i^{\nu+1} e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(-ix). \quad (\text{B.3})$$

Entonces,

$$\int_0^\infty \frac{u J_0(u\rho)}{k_\rho^2 - u^2} du = -\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(-k_\rho\rho) = \frac{\pi}{2} i H_\nu^{(2)}(k_\rho\rho). \quad (\text{B.4})$$

Forma asintótica de la función de Hankel

La forma asintótica de la funciones de Hankel de primer y segundo tipo son [10]:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{para } -\pi < \arg z < 2\pi, \quad (\text{C.1})$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{para } -2\pi < \arg z < \pi. \quad (\text{C.2})$$

Solución para un medio RH

Campo magnético y eléctrico para el caso 1:

$$\vec{B}_\omega^{(1)} = \frac{i\mu q}{4} k_\rho H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \hat{e}_\phi, \quad \vec{E}_\omega^{(1)} = -\frac{iqk_\rho}{4\omega\epsilon} H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \left(k_\rho \hat{e}_z - \frac{\omega}{v} \hat{e}_\rho\right). \quad (\text{D.1})$$

Realizamos la transformada inversa de Fourier para las componentes del campo eléctrico y magnético del caso 1 y se usa la relación (C.1).

$$\begin{aligned} B_t^\phi &= \frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mu k_\rho H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mu k_\rho \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{i\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v)} d\omega \\ &= \frac{iq}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mu \sqrt{k_\rho} \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v + k_\rho \rho - 3\pi/4)} d\omega, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} E_t^\rho &= \frac{iq}{4v} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_\rho}{\epsilon} H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{iq}{4v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho}{\epsilon} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{i\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v)} d\omega \\ &= \frac{iq}{4v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_\rho}}{\epsilon} \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v + k_\rho \rho - 3\pi/4)} d\omega, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned}
E_t^z &= -\frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_\rho^2}{\omega\epsilon} H_1^{(1)}(k_\rho \rho) \cdot e^{-i\omega z/v} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho^2}{\omega\epsilon} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{i\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v)} d\omega \\
&= -\frac{iq}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho \sqrt{k_\rho}}{\omega\epsilon} \cdot e^{i(\omega t - \omega z/v + k_\rho \rho - 3\pi/4)} d\omega.
\end{aligned} \tag{D.4}$$

La energía radiada por unidad de área se puede obtener de la siguiente manera:

$$W_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho dt = - \int_{-\infty}^{\infty} E_t^z H_t^\phi dt, \tag{D.5}$$

$$W_z = \int_{-\infty}^{\infty} S_z dt = \int_{-\infty}^{\infty} E_t^\rho H_t^\phi dt. \tag{D.6}$$

Reemplazando las expresiones de los campos en las anteriores ecuaciones:

$$\begin{aligned}
W_\rho &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho dt \\
&= -\frac{q^2}{8\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\omega} \int_{\omega'} \frac{k_\rho \sqrt{k_\rho k'_\rho}}{\omega\epsilon} \cdot e^{i((\omega+\omega')t - (\omega+\omega')z/v + (k_\rho+k'_\rho)\rho - 3\pi/2)} d\omega d\omega' \right) dt,
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
W_z &= \int_{-\infty}^{\infty} S_z dt \\
&= -\frac{q^2}{8\pi\rho v} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\omega} \int_{\omega'} \frac{\sqrt{k_\rho k'_\rho}}{\epsilon} \cdot e^{i((\omega+\omega')t - (\omega+\omega')z/v + (k_\rho+k'_\rho)\rho - 3\pi/2)} d\omega d\omega' \right) dt.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Usando la propiedad:

$$\delta(\omega + \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + \omega')t} dt,$$

las ecuaciones (D.7), (D.8) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$W_\rho = -\frac{q^2}{4\rho} \int_{\omega} \frac{k_\rho(\omega) \sqrt{k_\rho(\omega) k_\rho(-\omega)}}{\omega \epsilon(\omega)} \cdot e^{i((k_\rho(\omega) + k_\rho(-\omega))\rho - 3\pi/2)} d\omega, \quad (\text{D.9})$$

$$W_z = -\frac{q^2}{4\rho v} \int_{\omega} \frac{\sqrt{k_\rho(\omega) k_\rho(-\omega)}}{\epsilon(\omega)} \cdot e^{i((k_\rho(\omega) + k_\rho(-\omega))\rho - 3\pi/2)} d\omega. \quad (\text{D.10})$$

Escribiendo $k_\rho(\omega) = |k_\rho(\omega)| \cdot e^{i\theta} = k_R(\omega) + ik_I(\omega)$ y $\epsilon(\omega) = |\epsilon(\omega)| \cdot e^{i\theta_\epsilon}$. Además, $|k_\rho(-\omega)| = |k_\rho(\omega)|$, $k_R(-\omega) = -k_R(\omega)$ y $k_I(-\omega) = k_I(\omega)$, las anteriores ecuaciones se pueden reescribir así:

$$W_\rho = -\frac{q^2}{4\rho} \int_{\omega} \frac{|k_\rho(\omega)|^2}{\omega |\epsilon(\omega)|} \cdot e^{-i(\theta_\epsilon(\omega) - 3\theta(\omega)/2 - \theta(-\omega)/2 + 3\pi/2)} \cdot e^{-2k_I(\omega)\rho} d\omega, \quad (\text{D.11})$$

$$W_z = -\frac{q^2}{4\rho v} \int_{\omega} \frac{|k_\rho(\omega)|}{|\epsilon(\omega)|} \cdot e^{-i(\theta_\epsilon(\omega) - \theta(\omega)/2 - \theta(-\omega)/2 + 3\pi/2)} \cdot e^{-2k_I(\omega)\rho} d\omega. \quad (\text{D.12})$$

Índice de Símbolos

Constantes

c	—	velocidad de la luz en el vacío ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).
c'	—	velocidad de la luz en un medio material ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).
β	—	velocidad relativa a la de la luz en el vacío (Adim.).
ϵ_0	—	permitividad dieléctrica en el vacío ($\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$).
μ_0	—	permeabilidad magnética en el vacío ($\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$).
ω_{pe}, ω_{pm}	—	frecuencia de plasma eléctrico y magnético respectivamente (s^{-1}).
ω_{oe}, ω_{om}	—	frecuencia natural eléctrica y magnética respectivamente (s^{-1}).
γ_e, γ_m	—	coeficiente de amortiguamiento eléctrico y magnético respectivamente (s^{-1}).

Variables

ϵ	—	permitividad dieléctrica en un medio material ($\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$).
μ	—	permeabilidad magnética en un medio material ($\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$).
ϵ_r	—	permitividad dieléctrica relativa (Adim.).
μ_r	—	permeabilidad magnética relativa (Adim.).
n	—	índice de refracción (Adim.).
$\vec{k}$	—	vector de onda (m^{-1}).
θ_c	—	ángulo de Cherenkov (rad).
θ_ϵ	—	argumento de la representación compleja de ϵ (rad).
θ	—	argumento de la representación compleja de k_ρ (rad).

Funciones

$\delta(\rho)$	—	delta de Dirac.
$\vec{A}_\omega, \Phi_\omega$	—	potencial vector y potencial escalar en el dominio de frecuencias.
$\vec{E}_\omega$	—	campo eléctrico.
$\vec{B}_\omega$	—	inducción magnética.
$J_\nu(\xi)$	—	función J-Bessel de orden ν .
$K_\nu(\xi)$	—	función de Bessel modificada.
$K_\nu\{f(r)\}$	—	Transformada de Hankel.
$H_\nu^\alpha(z)$	—	función de Hankel de orden ν y de especie α .
$K_\nu\{f(r)\}$	—	Transformada de Hankel.
U_ρ, U_z	—	Energía total irradiada en las direcciones $\hat{\rho}$ y $\hat{z}$ respectivamente.
W_ρ, W_z	—	Energía total por unidad de área irradiada en las direcciones $\hat{\rho}$ y $\hat{z}$ respectivamente.

Referencias

- [1] L. Landau y E. Lifshitz, *Electrodinámica de los medios continuos*. Reverté, S.A., 1981, vol. 8, págs. 419-422.
- [2] M. Günay, Y.-L. Chuang y M. Tasgin, «*Tunable Cherenkov radiation-based detectors via plasmon index enhancement*,» nov. de 2019. dirección: https://www.researchgate.net/publication/337386684_Tunable_Cherenkov_radiation-based_detectors_via_plasmon_index_enhancement.
- [3] K. Lechner, *Classical Electrodynamics: A Modern Perspective*. Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 387-423. DOI: [10.1007/978-3-319-91809-9_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91809-9_13).
- [4] I. Frank e I.E. Tamm, «*Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter*,» *Compt. Rend. Acad. Sci. URSS*, págs. 109-114, 1937. DOI: [10.3367/UFNr.0093.196710o.0388](https://doi.org/10.3367/UFNr.0093.196710o.0388).
- [5] P. Cherenkov, «*Visible Radiation Produced by Electrons Moving in a Medium with Velocities Exceeding that of Light*,» *Physical Review*, págs. 378-379, 1937. DOI: [10.1103/PhysRev.52.378](https://doi.org/10.1103/PhysRev.52.378).
- [6] V. G. Veselago, «*The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* ,» *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, n.º 4, págs. 509-514, 1968. DOI: [10.1070/pu1968v010n04abeh003699](https://doi.org/10.1070/pu1968v010n04abeh003699).
- [7] J. Lu, T. M. Grzegorzczak, Y. Zhang y col., «*Cerenkov radiation in materials with negative permittivity and permeability*,» *OPTICS EXPRESS*, págs. 723-734, 2003. DOI: [10.1364/OE.11.000723](https://doi.org/10.1364/OE.11.000723).
- [8] H. Hu, L. Liu, X. Hu y col., «*Routing emission with a multi-channel nonreciprocal waveguide*,» *Photonics Research*, vol. 7, mayo de 2019. DOI: [10.1364/PRJ.7.000642](https://doi.org/10.1364/PRJ.7.000642).

- [9] P. Shekhar, S. Pendharker, H. Sahasrabudhe y col., «*Extreme ultraviolet plasmonics and Cherenkov radiation in silicon*,» *Optica*, vol. 5, págs. 1590-1596, dic. de 2018. DOI: [10.1364/OPTICA.5.001590](https://doi.org/10.1364/OPTICA.5.001590).
- [10] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, USA: Dover Publications, Inc., 1974, págs. 355-389, ISBN: 0486612724.
- [11] B. D. Nag y A. M. Sayied, «*Electrodynamics of moving media and the theory of the Cerenkov effect*,» 1956. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1956.0104>.
- [12] S. A. Ramakrishna y T. M. Grzegorzczak, *Physics and Applications of Negative Refractive Index Materials*. USA-Boca Raton: CRC Press Taylor Francis Group, 2009.
- [13] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart y col., «*Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures*,» *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, págs. 4773-4776, 1996. DOI: [10.1103/PhysRevLett.76.4773](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.4773).
- [14] J. Pendry, A. Holden, D. Robbins y col., «*Low frequency plasmons in thin-wire structures*,» *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 10, n.º 22, págs. 4785-4809, 1998. DOI: [10.1088/0953-8984/10/22/007](https://doi.org/10.1088/0953-8984/10/22/007).
- [15] J. Pendry, A. Holden, D. Robbins y col., «*Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena*,» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, n.º 11, págs. 2075-2084, 1999. DOI: [10.1109/22.798002](https://doi.org/10.1109/22.798002).
- [16] R. Shelby, D. Smith y S. Schultz, «*Experimental verification of a negative index of refraction*,» *Science*, 2001. DOI: [10.1126/science.1058847](https://doi.org/10.1126/science.1058847).
- [17] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012, págs. 624-665. DOI: [10.1017/CBO9781139034777](https://doi.org/10.1017/CBO9781139034777).
- [18] N. I. of Standards y Technology, *Digital Library of Mathematical Functions*, 10.22 (iv) *Integrals over the Interval*, 10.22.46. dirección: <https://dlmf.nist.gov/10.22#iv>.