



HEURÍSTICAS Y MODELOS MATEMÁTICOS: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL CONTEXTO DE LA FÍSICA

ANDRÉS FELIPE LARA FERNÁNDEZ

CÓDIGO: 0931519

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
2015

HEURÍSTICAS Y MODELOS MATEMÁTICOS: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE PROBLEMAS
MATEMÁTICOS EN EL CONTEXTO DE LA FÍSICA

ANDRÉS FELIPE LARA FERNÁNDEZ

CÓDIGO: 0931519

DIEGO GARZON CASTRO

DIRECTOR TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

2015



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: 1. Marque con una X la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

TÍTULO DEL TRABAJO:	Heurísticas y Modelos Matemáticos: Una Aproximación a través de problemas matemáticos en el Contexto De La Física		
Se trata de:	Proyecto ☐	Informe Final ☒	
Director:	Diego Garzón Castro		
1er Evaluador:	Maritza Pedreros Puente		
2do Evaluador:			
Fecha y Hora	Año: 2015	Mes: 01	Día: 23 Hora: 04:00 PM
Estudiantes			
Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico	
Andrés Felipe Lara Fernández	0931519	3487 - Licenciatura en matemáticas y Física	

EVALUACIÓN

Aprobado	☒	Meritorio	☐	Laureado	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto	☐

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo	☐	1er Evaluador	☐	2do Evaluador	☐
----------------------	--------------------------	---------------	--------------------------	---------------	--------------------------

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:	Mes:	Día:	Hora:
------	------	------	-------

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/col> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra:

Heurísticas y Modelos Matemáticos: Una aproximación a través de problemas matemáticos en el contexto de la física.

Autores:

Nombre:

Andrés Felipe Lara Fernández

Firma:

C.C. 1113036551

Nombre:

Firma:

C.C.

Nombre:

Firma:

C.C.

Fecha: 26/02/2015

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

DEDICATORIA

Dedico esta investigación con toda el alma, esfuerzo, dedicación y corazón a Dios por mantener las bendiciones sobre mi vida en cada instante vivido y ser siempre mi fuente de inspiración.

A mis padres, para que siempre lleve la bandera de que sin ellos esto NUNCA hubiera sido una realidad. Gracias por su apoyo incondicional en las caídas y en los aciertos de mi vida universitaria y por siempre tener una voz de aliento para seguir mi proyecto.

A mi esposa, que siempre estuvo paciente en la construcción, estructuración y culminación de este trabajo de grado que Dios me bendice en entregar.

A mis hermanos (Diego, Gustavo, Camilo, César, Mario), mi hermana (Lina), gracias por estar siempre ayudando desde sus silencios, presencias y consejos.

A mi amigo, compañero, docente, consejero y director de tesis... a la memoria del Maestro Octavio Augusto Pabón Ramírez que entregó su vida a la verdadera orientación docente y se comparte conmigo desde el cielo gran parte de mi historia y formación académica... siempre oraré por vos, te ruego que lo hagas por mí también. Posdata: nunca olvidaré tu gran sentido del humor.

Andrés Felipe Lara Fernández

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por darme la licencia de escribir estas líneas y delatarme con el fruto de la gratitud hacia su presencia infinita en mi vida. Todo lo que soy, lo que tengo y lo que hago es para darte gracias por tu misericordia.

A mis evaluadores (Diego Garzón y Maritza Pedreros) para que Dios en su infinito amor llene sus caminos de la luz incandescente y eterna de su misericordia... gracias por la gran ayuda en los momentos más difíciles del camino... son unos ángeles de Dios

A mis padres, GRACIAS POR LA PACIENCIA, lleven la bandera en alto de que: “sin ellos esto NUNCA hubiera sido una realidad”, gracias a su apoyo incondicional en las caídas y en los aciertos de mi vida Universitaria y siempre tener una voz de aliento para seguir mi proyecto.

A mi esposa, que siempre estuvo paciente en la construcción, estructuración y culminación de este trabajo de grado que Dios me bendice en entregar.

Agradezco a todos aquellos que tuvieron algo de culpa en esta meta lograda propuesta en mi vida y gestada con un gran equipo de docentes que me permitieron nacer y crecer en este mundo de la enseñanza de las matemáticas y a formarme cada día más como persona.

Andrés Felipe Lara Fernández

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN	9
INTRODUCCIÓN	10
1. GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN	12
1.1. CONTEXTUALIZACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	12
1.2. OBJETIVOS.....	19
2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	20
2.1. <i>MODELACIÓN MATEMÁTICA</i>	20
2.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	23
2.3. CONEXIÓN ENTRE LA <i>MODELACIÓN MATEMÁTICA</i> Y LA <i>RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS</i>	26
2.4. IMPORTANCIA DEL CONTEXTO	30
2.5. EL TRABAJO EXPERIMENTAL EN MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO DEL <i>LABORATORIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA</i>	31
2.6. ESTRUCTURA DEL LABORATORIO DE EDUCACION MATEMÁTICA	34
3. METODOLOGÍA.....	38
3.1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	41
3.2. DISEÑO DE LAS FICHAS DE TRABAJO DEL <i>LABORATORIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA</i>	44
3.2.1. ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS PISA Y PRUEBA SABER 11°	45
3.2.2. ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES	47
3.2.3. CONSTRUCCIÓN DE LAS FICHAS DE TRABAJO	52
3.3. ANALISIS PRELIMINAR	56
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL TRABAJO DE GRADO	60
CONSIDERACIONES FINALES.....	67
5. BIBLIOGRAFÍA.....	72
6. ANEXOS	76
6.1. ANEXO 1: CONTEXTO DE LA FÍSICA PRESENTE EN LAS PRUEBAS PISA.....	77
6.2. ANEXO 2: CONTEXTO DE LA FÍSICA PRESENTE EN LOS TEXTOS ESCOLARES ANALIZADOS.....	79
6.3. ANEXO 3: FICHAS DE TRABAJO DISEÑADAS Y ADAPTADAS	83
6.4. ANEXO 4: FICHAS DE TRABAJO RESUELTAS POR LOS PARTICIPANTES.....	90

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Marco de referencia curricular de Matemáticas. TIMMS (1998).	16
Figura 2. Comparación entre la perspectiva tradicional de la <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i> y la perspectiva de los modelos y la modelación en la <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i> .	27
Figura 3. <i>Modelación Matemática</i> bajo la perspectiva de la EMR.	29
Figura 4. Estructura del <i>Laboratorio de Educación Matemática</i> .	36
Figura 5. Preguntas “velocidad de un auto de carreras” prueba diagnóstica. Parte 1.	77
Figura 6. Preguntas “velocidad de un auto de carreras” prueba diagnóstica. Parte 2.	78
Figura 7. Explicación de las expresiones algebraicas usando la cinemática en el texto Gran Enciclopedia Educativa.	79
Figura 8. Problemas de matemáticas en el contexto de la cinemática y la dinámica. Fuente: pensamiento matemático 8°.	80
Figura 9. Problemas de matemáticas (geometría) en el contexto de las ondas mecánicas. Fuente: álgebra intermedia. P. 615.	81
Figura 10. Problemas matemáticos en el contexto de la Física usando péndulo, choques inelásticos y elásticos. Fuente: Álgebra intermedia.	82
Figura 11. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Anverso.	90
Figura 12. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Reverso.	91
Figura 13. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Anverso.	92
Figura 14. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Reverso.	92
Figura 15. Ficha de trabajo MI VELOCIDAD MEDIA. Y resuelta por un participante. Anverso.	93
Figura 16. Ficha de trabajo MI VELOCIDAD FINAL resuelta por un participante.	94
Figura 17. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILAS por algunos participantes.	95
Figura 18. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILLAS resuelta por un participante.	96
Figura 19. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILAS resuelta por un participante. Anverso.	97
Figura 20. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILAS resuelta por un participante. Reverso.	98
Figura 21. Ficha de trabajo ¿DÓNDE CAERÁ LA PELOTA? Solucionada por un grupo de participantes.	99
Figura 22. Ficha de trabajo ¿DÓNDE CAERÁ LA PELOTA? Solucionada por un grupo de participantes.	100
Figura 23. Ficha de trabajo ONDAS EN EXPANSIÓN resuelta por un grupo de participante. Anverso.	101
Figura 24. Ficha de trabajo ONDAS EN EXPANSIÓN resuelta por un grupo de participante. Reverso.	101
Figura 25. Ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA resuelta por un grupo de participantes.	102
Figura 26. Ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA resuelta por un grupo de participantes.	103
Figura 27. Ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA resuelta por un grupo de participantes.	104

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Elementos de forma de los textos escolares analizados	47
Tabla 2. Análisis de algunos contextos de la Física presentes en los diferentes textos escolares..	50
Tabla 3. Solución de las fichas de trabajo solucionadas por el investigador.	57
Tabla 4. Rejilla de análisis de las producciones de los participantes del <i>Laboratorio de Educación Matemática</i>	61

RESUMEN

La presente investigación se plantea como una propuesta didáctica dirigida a aportar algunas estrategias para la vinculación explícita de la Física como un contexto en algunas actividades experimentales de las matemáticas. La experiencia propone considerar los procesos matemáticos de *Modelación Matemática* y de *Resolución de Problemas Matemáticos*, con el fin de identificar algunos modelos matemáticos y algunas heurísticas que emergen al resolver problemas matemáticos en el contexto de la Física.

Inicialmente, se analizan diferentes fuentes bibliográficas que den razón de los vínculos entre la *Modelación Matemática*, la *Resolución de Problemas Matemáticos* y la relación entre sí; con el fin de determinar la conexión entre esta relación y el uso de la Física como un contexto en diversos problemas matemáticos. Para así, diseñar, adaptar y aplicar fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* con el fin de encontrar elementos que respondan a estas relaciones explícitas.

Finalmente, se busca mostrar la importancia de las actividades matemáticas experimentales que toman a la Física como un contexto para favorecer la construcción de modelos matemáticos y de las heurísticas que surjan por parte de los participantes que interactúan con los problemas expuestos en las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Palabras claves: *Modelación Matemática*, *Resolución de Problemas Matemáticos*, Contexto, *Laboratorio de Educación Matemática*, Física.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se inscribe en la Línea de Investigación Didáctica de las Matemáticas del Programa Licenciatura en Matemáticas y Física, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle.

Este trabajo surge como resultado del análisis de diferentes problemáticas de la didáctica de las matemáticas y de la búsqueda de nuevas propuestas de intervención formuladas para abordar la *Modelación Matemática* y la *Resolución de Problemas Matemáticos* al usar la Física como un contexto propicio para que los participantes realicen la comparación entre situaciones de su vida cotidiana y los saberes matemáticos en cuestión.

Se busca con esta investigación encontrar los diferentes modelos matemáticos y heurísticas asociadas al diseño de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* a partir del análisis de pruebas nacionales e internacionales y textos escolares enfocados en identificar y seleccionar problemas matemáticos en el contexto de la Física, para favorecer la presencia de los mismos, con el fin de indagar los modelos matemáticos y heurísticas que emergen al aplicar las fichas de trabajo con un grupo de participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Para desarrollar lo anteriormente descrito en el presente trabajo de grado, se plantea como estructura de la investigación cuatro capítulos que responden, respectivamente, a los 5 elementos citados para un estudio de casos en una investigación cualitativa: *La pregunta de la investigación*, *Las proposiciones teóricas*, *Las unidades de análisis*, *La vinculación lógica de los datos a las proposiciones* y *Los criterios para la interpretación de los datos*.

El primer capítulo da razón de la importancia que hay en la relación entre los procesos matemáticos de *Modelación Matemática* y de *Resolución de Problemas Matemáticos* cuando se abordan problemas matemáticos en el contexto de la Física. Adicionalmente, incluye la pregunta problematizadora y los objetivos propuestos para delimitar y orientar la presente investigación.

El segundo capítulo se plasma las diferentes acepciones de estos dos procesos, sus relaciones y vínculos a través del contexto y como estas acepciones se vinculan con el trabajo experimental en matemáticas, dando importancia a la estructura del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle.

En el tercer capítulo, se describen las características para el desarrollo de una investigación cualitativa, desde la estrategia de un estudio de casos, se muestran los contextos sobre los cuales se desarrolló la investigación, los análisis de pruebas nacionales, internacionales y textos escolares que desembocaron en el diseño, adaptación y aplicación de las fichas de trabajo bajo la estructura del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle.

En el cuarto capítulo, se realizan los análisis, conclusiones y consideraciones finales de los resultados de la aplicación de las fichas de trabajo, diseñadas a partir de manejo de problemas y situaciones matemáticas en el contexto de la Física, a participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Para finalizar encuentran los referentes bibliográficos y los anexos que sustentan y evidencian el trabajo realizados en los cuatro capítulos anteriores.

1. GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. CONTEXTUALIZACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En la actualidad, se evidencia un creciente interés por desarrollar propuestas curriculares, estrategias pedagógicas y metodológicas, en las diferentes investigaciones de la didáctica de las matemáticas, que aporten a una mejor comprensión de las matemáticas. Por un lado, se tiene la importancia de los procesos matemáticos, por otra parte, la importancia de explicitar un contexto ya sea cotidiano, científico, socio cultural, entre otros, que pueda vincularse con los saberes matemáticos en cuestión.

Para sustentar lo anterior, diversos investigadores afirman que la atención de los educadores debe centrarse en los procesos de enseñanza de las matemáticas puesto que, como lo afirma Font (2007), “Una de las tendencias actuales es la importancia que se da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática. Ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos”. Estos procesos matemáticos, como lo son *La Modelación Matemática* y *la Resolución de Problemas Matemáticos*, implicarían, entre otras observaciones, una enseñanza de matemáticas más humanas, menos formales donde el conocimiento matemático cobre un sentido más significativo para el estudiante.

Adicionalmente, el MEN (1998), expone la necesidad de vincular dichos procesos con las experiencias y realidades de los estudiantes, en general, de las personas que tiene una interacción con los contenidos matemáticos, de forma que sean puestos en escena desde situaciones matemáticas específicas para facilitar su manejo y apropiación, con el fin de generar el desarrollo de determinadas competencias en el pensamiento matemático.

En primera instancia se tiene que la *Modelación Matemática* permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, experimentar, evaluar, aplicar, organizar y construir los conocimientos matemáticos de forma significativa MEN(1998), enfocada a favorecer la *resolución de problemas matemáticos* y el aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, la *Modelación Matemática* presenta diversas dificultades, principalmente por las diferentes acepciones que tiene y caracterizan al proceso, algunas definiciones se relacionan entre sí, otras son notablemente diferentes y cambian hasta su nominación, en la

literatura se encuentran los siguiente nombres: Matematización, Modelaje, Modelización y *Modelación Matemática*; lo cual genera un fuerte interés en el análisis y elección de una postura de la misma.

En este trabajo se adoptará la *Modelación Matemática* como lo expone Blum (2007), quien argumenta que la *Modelación Matemática* ha de ser usada para hacer explícita la relación entre el mundo real y las matemáticas. Dicha relación es interpretada desde lo planteado por Freudenthal (1991), (citado por Font, 2007)

Ante este creciente interés por la relación entre la *Modelación Matemática* y el mundo real, se hace pertinente el uso de la conexión entre el saber matemático y las formas de aplicarlo en un problema determinado. De esta forma el MEN (1998) sostiene que el contexto se entiende como todo lo concerniente al entorno del estudiante y que le da sentido a la matemática que aprende. Sin embargo, el tratamiento matemático de los contenidos de la disciplina en el currículo nacional y la presentación de las situaciones problema pocas veces refleja la naturaleza y los aspectos fenomenológicos del concepto implicado (Villa & Ruiz, 2009).

Israelí (1996), (citado por Tigreros, 2009), presenta un breve recorrido histórico de la conexión entre los contextos y la *Modelación Matemática*, a partir de cuatro etapas de la historia del uso de modelos matemáticos para explicar el mundo:

1. Se encuentra la etapa pitagórica que consideraba que el mundo se podía describir aplicando relaciones numéricas, mejor dicho, el número como la manera perfecta para describir al universo. Etapa ligada a los mitos.
2. La revolución de Galileo que impuso una visión distinta de la relación entre las matemáticas con la descripción de los fenómenos naturales. Las leyes que rigen la naturaleza están escritas en lenguaje matemático.
3. La visión mecanicista, influenciada por la mecánica de Newton, que domina el pensamiento científico por muchos años, se considera incluso vigente hoy día, donde se sostiene que todos los fenómenos del universo resultan del movimiento de los cuerpos, regido por las leyes de la mecánica, de lo que se preservó que la ciencia debe ofrecer una imagen unitaria y objetiva del universo.

4. Desde principios del siglo XX, cuando la Física clásica entró en crisis y hasta la actualidad, el punto de vista dominante contradice la idea mecanicista. Se habla de modelos matemáticos o de matemáticas aplicadas, en plural, lo que niega la visión unitaria de la ciencia. Se dejó, paulatinamente, de mencionar modelos de tipo mecánico para dar lugar a formas de describir los fenómenos a partir de la analogía de las estructuras matemáticas subyacentes a éstos.

Lo anterior evidencia la importancia que ha tenido la Física en la construcción histórica de Modelos Matemáticos como un contexto que permita la relación entre los saberes matemáticos y el mundo real. Paralelamente surge el interrogante: ¿Cuáles conceptos o nociones matemáticas son apropiados para ilustrar los procesos de modelación en su construcción?

Un recorrido histórico y epistemológico en busca de la construcción y evolución de conceptos matemáticos abordados alrededor del siglo XVII dejan entrever la presencia de un vínculo estrecho entre las matemáticas y los aspectos fenomenológicos que dan origen a esos objetos, de tal manera que las matemáticas traducen las leyes de la naturaleza y éstas a su vez obedecen las leyes de las matemáticas.

A modo de ejemplo, Mesa & Villa (2011), (citado por Henao & Vanegas, 2012) expone que: “el concepto de función que emerge precisamente a partir de las indagaciones alrededor de la variación y las dependencias entre magnitudes como el tiempo y el espacio recorrido. Específicamente, los trabajos de Galileo con situaciones de variación cuadrática ponen de manifiesto un proceso de modelación continua en la construcción de modelos cuadráticos, que emergen de un vínculo entre las matemáticas y el entorno físico”.

Por otra parte, la *Resolución de Problemas Matemáticos*, sirve como objeto de estudio bajo el cual se realizan diferentes tipos de investigación. Lo que implica que cada estudio o discusión de la misma, debe ir acompañada de una definición operacional del término (*Resolución de Problemas Matemáticos*) y ejemplos de lo que significa para el autor. (Schoenfeld, 1992).

Así mismo, un tema relevante en los programas de investigación y en las prácticas de instrucción ha sido el documentar el empleo de estrategias heurísticas tal y como lo muestran Polya (1945); Krulik & Reys (1980), (citado por Santos Trigo, 2008) en el desarrollo de

competencias de *Resolución de Problemas Matemáticos* en los estudiantes.

Si bien la literatura muestra que la enseñanza de las estrategias heurísticas a los estudiantes no había sido exitosa, más que categorizar los procesos que los estudiantes exhiben en la *Resolución de Problemas Matemáticos*, Schoenfeld propone ofrecer a los estudiantes oportunidades para desarrollar el poder prescriptivo relacionado con el uso de estrategias heurísticas. Lo que sugiere, entre otras cosas, ayudar a robustecer el repertorio de las heurísticas de los estudiantes al momento de enfrentarse a un problema matemático de cierto contenido relevante. (Santos Trigo, 2007; 2008).

Por lo anterior, se expone la importancia de integrar estos procesos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas. Así, para Lesh & Zawojewski (2007) la resolución de problemas es: “el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas”.

En la escolaridad, el trabajo con estrategias heurísticas y modelos matemáticos es un asunto de creciente interés en el estudio de la didáctica de las matemáticas. Al usar contextos se resalta la relación entre los eventos de la vida cotidiana y los procesos matemáticos en una situación problema determinada, se puede en muchas ocasiones, reconocerse la interrelación del contexto previamente dicho y el saber matemático en cuestión, lo que abre el panorama hacía actividades matemáticas extracurriculares que buscan el acercamiento al saber matemático desde lo cotidiano.

Autores como Godino, Font y Batanero (2003) sostienen que: “el dar un papel primordial a la resolución de problemas y a las actividades de modelación tienen importantes repercusiones desde el punto de vista educativo”. En este orden de ideas, la integración de la modelación y *Resolución de Problemas Matemáticos* en las prácticas habituales de enseñanza de las matemáticas en el ámbito escolar toma uno de los papeles centrales del trabajo y la investigación docente.

Desde la investigación docente, los intereses de una coherencia entre las asignaturas o campos de estudio, permiten un acercamiento al uso de contextos de la Física, Química y otras

ciencias con las matemáticas. Para este trabajo se toma la importancia de la Física como contexto para la enseñanza y el acercamiento de los estudiantes o participantes en actividades matemáticas con el saber propio de las matemáticas.

Para sustentar esta elección de la Física como contexto y obtener un acercamiento a determinadas actividades del quehacer docente dentro y/o fuera del aula se tiene, en primer lugar, la relación de la Física con la *Modelación Matemática* realizada Israelí (1996) (citada por Tigreros, 2009) y presentada anteriormente, por otra parte la presencia de la Física en las pruebas locales y externas, y por último la presencia de la Física en algunos textos escolares de matemáticas enfocados a diferentes niveles de escolaridad.

De esta forma, en las pruebas internacionales (TIMSS, 1998) se exhibe la cinemática, entre otros, como un contexto de aplicación especial de las matemáticas. En los análisis de las pruebas externas TIMSS realizada por el MEN (1998), se sustenta la elección de contenidos y conexiones en diferentes estrategias de intervención en didáctica de las matemáticas.

En la figura 1 se evidencia como los aspectos de perspectivas tiene como constante las relaciones con las ciencias y las tecnologías fortaleciendo el trabajo en grupos enfocando las situaciones a las carreras que tiene ciencias, lo cual busca responder a los aspectos de contenidos y habilidades como se muestra a continuación.

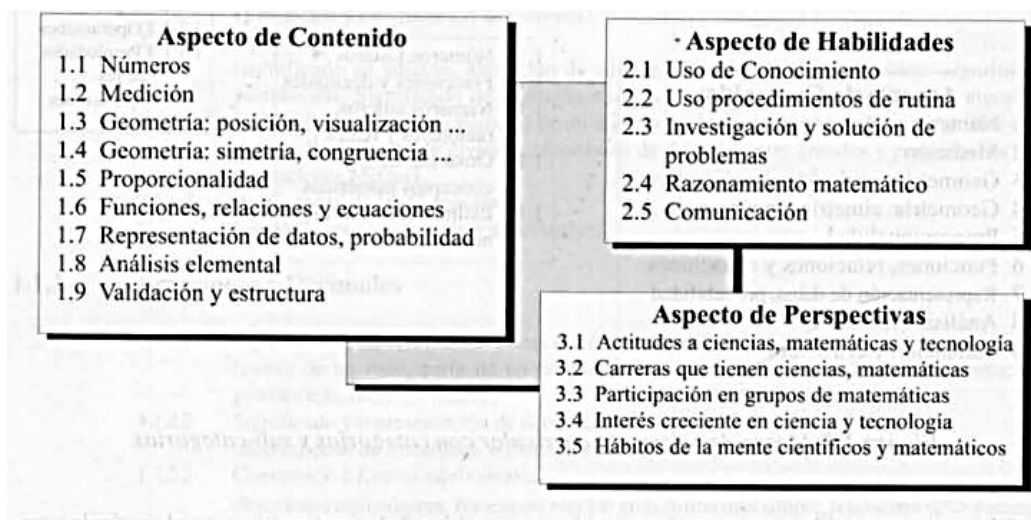


Figura 1. Marco de referencia curricular de Matemáticas. TIMMS (1998).

Por otro lado Arce & Pabón (2012) fundamentan la elección de los contenidos para la elaboración de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* de acuerdo a lo propuesto en las pruebas TIMSS; una parte esencial en la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática* donde, “bajo la dirección del profesor de matemáticas, asesorados por el maestro, los alumnos trabajarían en pequeños grupos en la elaboración de modelos o aparatos simples”.

Así se introduce el concepto de *Laboratorio de Educación Matemática* donde, de acuerdo con Trouche (2010), (citado por Arce & Pabón, 2012), es un lugar específico, un campo de experimentación al margen del currículo, o es un conjunto estructurado de actividades, para la construcción de significados matemáticos profundos en el corazón de las clases normales. De este modo, el *Laboratorio de Educación Matemática* propone, entre otras actividades provocar el desarrollo de razonamientos propios y creativos, y a su vez propiciar oportunidades de distintas formas de solución y explicación, usando distintos lenguajes y representaciones.

Según lo anterior, en el *Laboratorio de Educación Matemática* se identifican algunas de las posibles conexiones entre la *Resolución de Problemas Matemáticos* y la *Modelación Matemática* particularmente, las referentes a contextos de otras ciencias.

Teniendo como tres aspectos fundamentales, los contenidos, las habilidades y las perspectivas del alumno hacia la ciencia y la tecnología, se complementa la investigación, con lo antes citado, dándole fuerza a la presencia de los elementos asociados a estos procesos de enseñanza de las matemáticas: Heurísticas y Modelos Matemáticos. Estos elementos se evidencian en el diseño, aplicación, manipulación y análisis de las Fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Así mismo, se analizan las pruebas PISA y las Pruebas Saber con el fin fortalecer la presencia de la Física como un contexto en la relación entre docente, estudiante y saber matemático. Con el mismo fin, se realiza el análisis de textos escolares que evidencia la presencia de los problemas matemáticos en el contexto de la Física.

Con base a los elementos previamente descritos, esta investigación se centra en identificar:

¿Qué modelos Matemáticos y Heurísticas emergen en el diseño y aplicación de fichas de trabajo del Laboratorio de Educación Matemática, cuando se aborda, problemas matemáticos en el contexto de la Física?

De esta forma, se plantean las siguientes hipótesis de investigación

1. El trabajo con heurísticas y modelos matemáticos se integran en el diseño de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.
2. El uso de problemas matemáticos en el contexto de la Física favorece la conexión entre la *Modelación Matemática* y la *Resolución de Problemas Matemáticos*.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo General

Analizar desde una perspectiva en didáctica de las matemáticas, las heurísticas y los modelos matemáticos que emergen al interactuar con problemas matemáticos, en el contexto de la Física, desde el *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad Del Valle.

1.2.2. Objetivos Específicos

- 1.2.2.1. Reconocer algunas estrategias metodológicas y teóricas que vinculen los procesos matemáticos de *Modelación Matemática* y de *resolución de problemas matemáticos* en la interacción y solución de Problemas Matemáticos en el contexto de la Física.
- 1.2.2.2. Identificar el tipo de problemas que involucren el contexto de la Física presentes en los libros de textos, pruebas locales y externas y que puedan ser adaptados para fundamentar el diseño y producción de fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.
- 1.2.2.3. Exhibir los modelos matemáticos y las heurísticas asociadas a la producción, diseño y ejecución de fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* en las mesas de álgebra y geometría.

2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este capítulo se busca determinar desde la didáctica de las matemáticas, los vínculos y las interacciones entre los procesos de *Modelación Matemática* y *la resolución de problemas matemáticos*, al tomar como eje principal la presencia de la Física como un contexto en una determinada actividad matemática. Esta tarea demanda el estudio inicial de cada uno de estos procesos, sus diferentes acepciones, sus elementos más significativos, las posibles conexiones entre ellos, la importancia del contexto y su presencia e implementación de algunos de estos elementos en el diseño de fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

2.1. MODELACIÓN MATEMÁTICA

En primer lugar se realiza un acercamiento a las diferentes acepciones de la *Modelación Matemática*, enfocada a la escuela y a las actividades de interacción con algunos saberes matemáticos. Posteriormente, se toma una de las acepciones de la *Modelación Matemática* presentada.

Para iniciar Bassanezi (2002) sostiene que “la *Modelación Matemática* consiste esencialmente en el arte de transformar situaciones reales en problemas matemáticos cuyas soluciones tienen que ser interpretadas en el lenguaje usual”.

Adicionalmente, Vasco, C. (2003) define la *Modelación Matemática* como: “El arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Un proceso de detección, formulación y proyección de regularidades por medio de la creación de un artefacto mental, un sistema con sus componentes, transformaciones y relaciones, cuyas únicas covarían en forma que simulen las regularidades de la covariación de los fenómenos o procesos que se intentan modelar” llevando la idea de *Modelación Matemáticas* fuera de los campos de una ciencia y adentrándola a los campos del arte.

En la intervención de los modelos matemáticos, se genera un punto neurálgico en el desarrollo de la *Modelación Matemática*, Karl Popper, (citado por Vasco, 2003) argumenta que no se sabe cómo es la lógica de la invención de modelos, pero si hay una lógica de la puesta a prueba, la justificación y el refinamiento o el abandono de modelos.

Del mismo modo Vasco (1999) sostiene que las tendencias vanguardistas y modernas, la inclusión de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) propone conectar los procesos de *Modelación Matemática* en el aula donde: La necesidad de impulsar el cambio de las matemáticas estáticas a las dinámicas, del pensamiento de las verdaderas matemáticas eternas e inmutables al pensamiento variacional, de una idea tradicional de aplicar las matemáticas a la modelación de la realidad para construir nuevas formas de matemáticas o reconstruir las antiguas. Y potenciar espacios de formación del estudiante donde se apropie de la producción de sus modelos y de las conclusiones que acompañan la comparación de los modelos propiamente estructurados para determinados ejercicios y los modelos producidos por sus propios elementos.

De esta forma, el MEN (2006) propone que: *“la Modelación Matemática es un proceso que simplifica una situación y seleccionan una manera de representarla mental o gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos geométricos, aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella, a través de uno o varios modelos matemáticos.*

Así, la adopción de modelos matemáticos adecuados para la actividad matemática, teniendo en cuenta las nuevas tecnologías y las identidades culturales de los estudiantes, es un medio por el cual el estudiante alcanza un mejor desempeño y continúa su tarea de convertirse en uno de los principales agentes de cambios en su entorno.

Dándole continuidad a lo anterior, el maestro estaría llamado a realizar una propuesta que potencialice estrategias, descubrimientos significativos, indagaciones en los estudiantes, comparaciones, entre otras reflexiones, que lo lleven a representaciones mentales propias y/o confirmar, por sus propios medios, las ya estructuradas, estas representaciones mentales llamadas Modelos Matemáticos.

Por otra parte, el MEN (2006) entiende la *Modelación Matemática* como “la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente” donde sustenta que la modelación juega un papel fundamental en el quehacer del estudiante, porque les posibilita la construcción de modelos matemáticos propios en distintos niveles de complejidad, a través de los cuales los estudiantes pueden hacer predicciones,

utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar que tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

El MEN (2006) sugiere que, un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido. De esta forma el estudiante se arriesga a un aprendizaje más propositivo donde se evidencien aptitudes, debilidades y tendencias de pensamiento al contrastar sus reflexiones y estrategias con un contexto significativo dado.

Por otra parte, Tigreros (2009) menciona una perspectiva de modelación cognitiva con un interés de tipo psicológico como es, por ejemplo, el análisis de los procesos mentales que tienen lugar durante la modelación. Su finalidad es comprender la forma en que se piensa cuando se usa la modelación en la solución de problemas, o bien promover los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos.

Finalmente, Blum (2003) afirma que el término *Modelación Matemática* ha sido usado para “denotar todo tipo de relación entre el mundo real y la matemática”, donde ‘mundo real’ es “todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana así como las materias de la escuela o la universidad o disciplinas científicas diferentes de la matemática”.

Además, Blum, Galbraith, Henn, y Niss (2007) sostienen que la *Modelación Matemática* puede considerarse como un proceso que tiene génesis en la conceptualización de una situación o problema de la realidad. Por tal razón, consideramos que la noción de modelación está matizada por la noción de realidad asumida.

De esta manera la *Modelación Matemática*, vista como proceso matemático, potencializa en el estudiante la apropiación, interiorización, comparación y conclusión de una realidad concisa y puntual donde el mismo encuentre la conexión entre el contenido matemático en cuestión y el contexto expuesto, a través de los modelos matemáticos previamente estructurados por el mismo.

Por la misma línea de la importancia del contexto en la *Modelación Matemática* como proceso matemático. En el capítulo 1, se realizó un recorrido histórico donde se evidenció

relación entre la *Modelación Matemática* y el contexto de la Física, según lo presentado por Tigreros (2009).

En este trabajo, se abordará la *Modelación Matemática* desde la acepción planteada por Blum (2003) la cual se afianzará en la conexión de este proceso con la *Resolución de Problemas Matemáticos*, otro proceso matemático al cual se realizará un acercamiento a sus definiciones en el siguiente apartado.

2.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La *Resolución de Problemas Matemáticos* al igual que la modelación también tiene muchas acepciones a partir de la década de los ochentas. Schoenfeld (1985), en el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), recomienda la *Resolución de Problemas Matemáticos* como objetivo prioritario para el currículo escolar de las matemáticas, desde entonces las investigaciones y los esfuerzos se dirigieron a los estudios de la *Resolución de Problemas Matemáticos* en diferentes sistemas educativos..

Bajo el nombre de “*problem solving*” se desarrollan diversas investigaciones, en las investigaciones realizadas por Santos Trigo (2007) se evidencia que: “A más de tres décadas de presencia intensa de la *Resolución de Problemas Matemáticos* en la agenda de investigación y reformas curriculares resulta paradójico que su definición e identidad siga siendo un tema de discusión en la Educación Matemática”.

De esta manera, se toma la posición de que la *Resolución de Problemas Matemáticos* como un proceso mediante el cual se identifica diferentes estrategias de solución frente a una situación problema de las matemáticas, denominadas heurísticas.

Las heurísticas, con Polya, se referían a una lista de procesos desconocidos por el estudiante, sin embargo Schoenfeld, propone ir más allá de la descripción y posibilitar el desarrollo en el uso de las estrategias heurísticas. Así Schoenfeld (1985), (citado por Santos Trigo 2007) sugiere entre otros elementos: “(a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de *Resolución de Problemas Matemáticos* más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas, (b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático

relevante en la *Resolución de Problemas Matemáticos*, y (c) desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la *Resolución de Problemas Matemáticos*, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas”.

Adicionalmente, Schoenfeld (1985, p. XII) establece que en la *Resolución de Problemas Matemáticos*: “Aprender a pensar matemáticamente –involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las ‘reglas de juego’”.

Uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta en la *Resolución de Problemas Matemáticos* es la selección de los mismos, de esta manera Santos Trigo (2008) afirma que “*Un aspecto crucial en los programas de investigación en educación matemática, en las propuestas curriculares y en las prácticas de instrucción es el diseño o selección de problemas o actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes*”.

En la discusión de preguntas que implican la identificación de algunas cualidades matemáticas (recursos, estrategias, conceptos, caminos de solución) Camacho & Santos Trigo (2004) sostienen que la selección o consideración de una actividad o problema donde esta identificación demanda de los investigadores examinar rutas potenciales que puedan ayudar o guiar el proceso de construcción del pensamiento matemático de los estudiantes.

Otros de los elementos importantes a tener en cuenta según Lesh & Zawojewski (2007) son los principios y caracterización de la *Resolución de Problemas Matemáticos*, pero ¿Cuáles son los principios que revelan la identidad de la *Resolución de Problemas Matemáticos*? ¿Qué es lo que genera la diversidad o múltiples interpretaciones de la *Resolución de Problemas Matemáticos* en los programas de investigación o prácticas de instrucción? Lesh & Zawojewski (2007, p. 776) indican que “los patrones que forman una identidad en la *Resolución de Problemas Matemáticos* son complejos, involucran patrones de motivación variados, de reacciones afectivas, de desarrollo cognitivo y social en diferentes circunstancias dentro de una tarea dada”.

Otro elemento relevante asociado con los principios de la *Resolución de Problemas Matemáticos* se relaciona con la forma en que se conceptualiza la disciplina. NRC ((National Research Council) (1989), (citado por Schoenfeld 1992, p. 31), reconoce que: “un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarla como la ciencia de los patrones. Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea. El proceso de “hacer” matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados”.

Igualmente Lesh & Zawojewski (2007) sugieren que no existe una forma eficiente de acumular y discutir los avances y resultados de investigación en el ámbito internacional y, como consecuencia, varios temas se reciclan o solamente aparecen con un lenguaje diferente. En el reconocimiento de esa complejidad, no se intenta revisar en detalle la génesis y desarrollo de la *Resolución de Problemas Matemáticos* en varios países; se pretende, identificar aspectos comunes y algunas diferencias en términos del enfoque y actividades que distinguen los acercamientos a la *Resolución de Problemas Matemáticos* en la promoción del aprendizaje de los estudiantes.

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados anteriormente Lesh & Zawojewski (2007, 782) definen la *Resolución de Problemas Matemáticos* como “el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas”. Un aspecto importante en esta caracterización es que la comprensión o el desarrollo de las ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante constantemente refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje.

Lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias, y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la *Resolución de Problemas Matemáticos*.

Por otra parte, la *Resolución de Problemas Matemáticos*, ayudará a identificar y potencializar heurísticas en la actividad matemática generada en contextos de otras disciplinas y en particular en el contexto de la Física.

En esta perspectiva se reconoce que un aspecto central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es que adquieran los caminos, estrategias, recursos y una disposición para involucrarse en actividades que reflejen el quehacer matemático y su vínculo con la *Modelación Matemática*. Relación que se hará explícita en este trabajo en el siguiente apartado.

2.3. CONEXIÓN ENTRE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Un aspecto esencial durante la interacción con los problemas o contenidos matemáticos, es que los estudiantes busquen, representen y describan cambios o formas de variación (incluyendo invariantes) entre los objetos o atributos asociados con la actividad o problema que los lleven a la identificación de patrones, conjeturas o relaciones.

De esta manera, Lesh & Zawojewski (2007) plantean que es de creciente importancia, en el ámbito escolar, la integración de los procesos de *Modelación Matemática* y *Resolución de Problemas Matemáticos* como una posibilidad de promover el desarrollo de aptitudes positivas hacia el aprendizaje de las matemáticas. Una aproximación a esta relación es la que se muestra en la figura 2 enfocada a la conexión de estos dos procesos matemáticos evidenciada en la *Perspectiva de los modelos y la modelación sobre la Resolución de Problemas Matemáticos*.

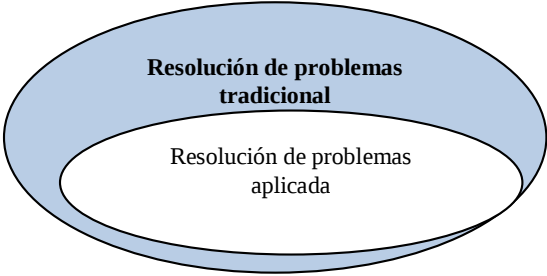
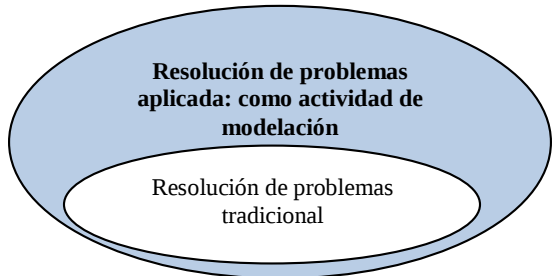
Perspectiva tradicional sobre la <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i> <i>La Resolución de Problemas Matemáticos aplicada es tratada como un subconjunto de la Resolución de Problemas Matemáticos tradicional</i>  Aprendiendo a resolver problemas de la “vida real” involucra cuatro pasos: 1. Primero, dominar las ideas y destrezas en situaciones descontextualizadas. 2. Practicar las ideas y las destrezas dominadas nuevamente en problemas verbales diseñados para usar el procedimiento aprendido. 3. Aprender contenidos generales independientes de los procesos de <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i> y las heurísticas. 4. Finalmente (si el tiempo lo permite), aprender a usar las ideas anteriores, destrezas y heurísticas en situaciones complejas de la “vida real” (i. e., problemas aplicados) donde la información adicional también puede ser necesaria.	Perspectiva de los modelos y la modelación sobre la <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i> <i>La Resolución de Problemas Matemáticos tradicional es tratada como un subconjunto de la Resolución de Problemas Matemáticos aplicada</i>  La <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i> aplicados implica construir el sentido matemático del problema (parafraseando, dibujando y así sucesivamente) de acuerdo con el desarrollo de una solución sensata. La comprensión no es una situación que inicia de todo o nada e ideas matemáticas capaces de desarrollarse en el proceso de <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i>. La construcción, los procesos y las habilidades que se necesitan para resolver un problema de “la vida real” (por ejemplo, problemas aplicados) son asumidos por intermedio de un estado de desarrollo, en lugar de ser “dominado” antes de participar en la <i>Resolución de Problemas Matemáticos</i>.
--	--

Figura 2. Comparación entre la perspectiva tradicional de la *Resolución de Problemas Matemáticos* y la perspectiva de los modelos y la modelación en la *Resolución de Problemas Matemáticos*.

En la figura 2 se evidencia la relación entre la perspectiva tradicional de la *Resolución de Problemas Matemáticos* y la perspectiva de los modelos, particularmente matemáticos, y la modelación en la *Resolución de Problemas Matemáticos*, donde esta relación plantea una comprensión de las matemáticas a partir de procesos matemáticos donde se enfatiza en la resolución de un problema de la vida real a través de la *Resolución de Problemas Matemáticos*. De esta forma, la relación entre la *Modelación Matemática* y la *Resolución de Problemas Matemáticos* se hace evidente en la resolución de problemas de la vida real donde a través de la comprensión se llega a la creación, adaptación y justificación del uso de modelos matemáticos para la resolución del problema dado.

Por otro lado Freudenthal (1991), (citado por Font, 2007), expone a la Educación Matemática Realista (EMR), como un enfoque de la escuela holandesa, vincula el proceso de *Modelación Matemática* y la *Resolución de Problemas Matemáticos* bajo las denominadas *matematización vertical* y *matematización horizontal*, respectivamente. De esta manera señala que la matematización vertical, lleva del mundo real al mundo de los símbolos al objeto matemático y hace posible tratar matemáticamente un conjunto de problemas.

En la matematización vertical que se asocia fundamentalmente al tratamiento específicamente matemático de las situaciones, son característicos los siguientes procesos:

- Representar una relación mediante una fórmula.
- Utilizar diferentes modelos.
- Refinar y ajustar modelos.
- Combinar e integrar modelos
- Probar regularidades.
- Formular un concepto matemático nuevo.
- Generalización.

Así mismo, en la matematización horizontal, son característicos los siguientes procesos:

- Identificar las matemáticas en situaciones problemas.
- Esquematizar.
- Formular y visualizar un problema de varias maneras.
- Descubrir relaciones y regularidades.
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas.
- Transferir un problema real a uno matemático.
- Transferir un problema real a un modelo matemático conocido.

Según lo presentado por la EMR, Font (2007) propone una organización y orientación a la relación entre la *matematización horizontal* y la *matematización vertical*, como se muestra en la Figura 3.

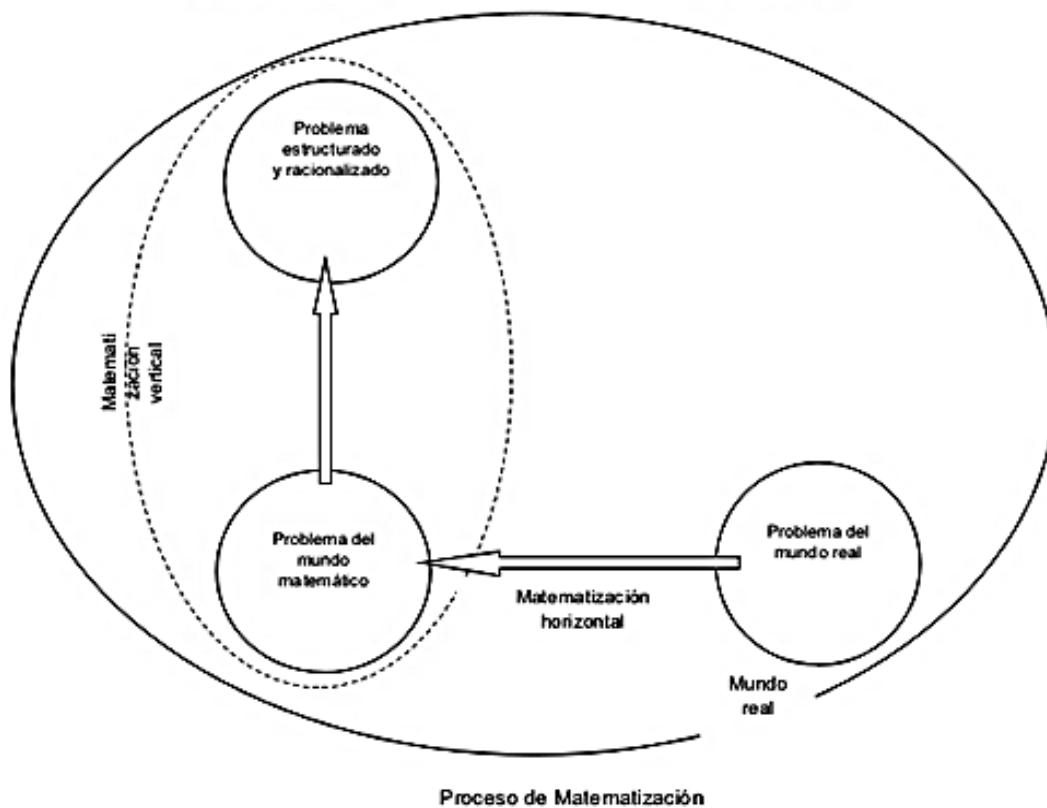


Figura 3. *Modelación Matemática* bajo la perspectiva de la EMR.

En referencia a la *Modelación Matemática*, Font (2007) lo que expone en la Figura 3, muestra una conexión entre problemas del mundo real y problemas del mundo matemático, a su vez existe una relación entre los problemas del mundo matemático y los problemas estructurados y racionalizados, a través de la Matematización horizontal y vertical respectivamente, este modelo responde a lo planteado por Blum (2003), a quien le interesa la relación entre el mundo real y los modelos matemáticos, que desde la EMR serían los problemas estructurados y racionalizados.

Lo anterior muestra la importancia de buscar, diseñar y aplicar un modelo matemático adecuado, en un contexto significativo determinado, lo que responde a la necesidad de solucionar problemas de la vida cotidiana, relacionarlo con el concepto matemático en cuestión y ajustar el modelo mediante la articulación, integración y generalizaciones de diferentes representaciones para optimizar la solución de los problemas matemáticos dados en el contexto de la Física. A continuación se resalta la importancia de la actividad matemática en diferentes contextos, particularmente en el contexto de la Física.

2.4. IMPORTANCIA DEL CONTEXTO

En la relación entre *la Modelación Matemática y la Resolución de Problemas Matemáticos*, se evidencia la necesidad de generar espacios, situaciones, entornos cotidianos que ubiquen los saberes matemáticos en un plano significativo para el estudiante y que a través de él se logre encontrar aplicación, razón y fundamento de la pertinencia del saber matemático.

El MEN (1998) propone usar los *contextos*, como parte de los tres aspectos centrales de organización del currículo, como espacio significativo del quehacer matemático escolar en situaciones problemas de las matemáticas, de la vida cotidiana y de otras ciencias. De este modo se afirma que un contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar, no solo físico sino ante todo sociocultural, desde donde se construye el sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos. A su vez, el MEN (2006) sostiene que el contexto puede no ser una situación real y cotidiana, pueden ser situaciones hipotéticas y aún fantásticas, a partir de las cuales el estudiante pueda pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva.

Desde la perspectiva histórica, no es un misterio que algunos de los contenidos matemáticos se trabajaron para dar razón a situaciones reales y cotidianas en la antigüedad, casos como el de Galileo que tomo las matemáticas como elementos para explicar el mundo fenomenológico, Newton quien buscó una unificación objetiva de la Física y, así mismo, en la actualidad, que se habla de matemáticas donde la unificación objetiva de las ciencias está siendo complementada y modificada por una visión más humanista de las situaciones contextualizadas de las mismas.

En trabajos como los de Muro (2004) y Camarena (2000), se evidencia que la relación entre los procesos de *Modelación Matemática y de Resolución de Problemas Matemáticos*, aportan al cambio de paradigma de la actividad matemática generada por los participantes, de tal manera que puedan aportar, motivar, desarrollar habilidades del pensamiento y dar autonomía a su aprendizaje, de esta manera se potencializa el trabajo en equipo y el profesor deja de ser el eje central y pasa a ser un orientador de la actividad misma.

De esta manera, *la Modelación Matemática y la Resolución de Problemas Matemáticos*, bajo problemas matemáticos en el contexto de la Física es una herramienta que potencializa y optimiza el diseño de modelos matemáticos y el enriquecimiento de heurísticas en la solución de situaciones problemas de la matemática en el contexto de la Física.

Por otra parte en las pruebas TIMMS, PISA y Pruebas Saber, aparecen de manera explícita la conexión entre las matemáticas y las otras ciencias, por esta razón se realizará una indagación del tipo de problemas planteados en el contexto de la Física en dichas pruebas, con el fin de adaptarlas a la estructura de la ficha de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*. Es de anotar que el tipo de situaciones que se planteen en la ficha de trabajo debe tener un carácter experimental. A continuación se presenta el trabajo experimental en matemáticas.

2.5. EL TRABAJO EXPERIMENTAL EN MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO DEL LABORATORIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la notoria evolución de la didáctica de las matemáticas en las últimas décadas, se evidencia la resistencia de incluir la experimentación en procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En contraposición, se tienen las estrategias donde se permiten la conjeturación, la creatividad y la experimentación matemática por parte de los estudiantes.

El *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle, según Arce & Pabón (2012) surge bajo la investigación del grupo de Educación Matemáticas como estrategia didáctica de acompañamiento al diseño y uso de materiales, medios, recursos manipulativos y “recursos pedagógicos”. Según Guin & Trouche (2007) un *recurso pedagógico* es un artefacto que está a disposición del profesor, y es susceptible de evolución.

De acuerdo con diferentes investigaciones de didáctica de las matemáticas, la definición de “los recursos” tiene diferentes acepciones. Según Schoenfeld (1992), (citado por Barrantes 2006), se toma un recurso como los conocimientos previos de cada individuo. En este caso y desde una perspectiva didáctica, podríamos decir que recurso es una forma de actuar, o más bien la capacidad de decidir sobre el tipo de estrategias que se van a utilizar en los procesos de enseñanza; es, por tanto, una característica inherente a la capacidad de acción de las personas.

Particularmente, un recurso pedagógico como la ficha de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* se enmarca y responde a la definición dada de recurso para lograr la recolección sistémica de todo lo referente a las heurísticas y los modelos matemáticos en cuestión.

El interés de esta investigación se centra en la pertinencia de los problemas de otras disciplinas, en particular de la Física, en el diseño de fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*, para aportar al análisis de heurísticas y modelos matemáticos asociado a situaciones de experimentación, palabra que, según Arce y Pabón. (2012), regularmente no está asociada con las matemáticas y familiarizada por las ciencias experimentales, desligando la relación transformadora y revolucionaria de los experimentos con el aprendizaje de las matemáticas.

Teniendo una aproximación a la realidad de las otras ciencias, del contexto escolar y del entorno, se exhibe la relación entre algunos objetos matemáticos con los fenómenos presentes en cada uno de los contextos anteriores, por ejemplo, cantidades Físicas como: peso, masa, aceleración, velocidad rapidez, temperatura, corriente, etc.

Desde esta postura, la experimentación en matemáticas no sólo logra una conexión entre las otras ciencias y las matemáticas, adicionalmente como lo expone Battle, (1996) representa la

opción de crear, inventar, entre otras acciones, a partir de sus propios medios diferentes caminos de solucionar un problema planteado generando la opción de realizar descubrimientos.

En este punto es posible afirmar que, en cierto sentido, las matemáticas tienen mucho de común con las ciencias experimentales. La generación de nuevos conocimientos matemáticos involucra conjeturas, rectificaciones, ensayos, revisiones, demostraciones y errores que se entremezclan de manera poco lineal. Intuiciones, analogías, imágenes, preguntas son tan importantes durante la producción matemática como lo son la deducción y el rigor lógico. Es sólo al final cuando ha de exponerse el resultado en formas de supuestos iniciales, definiciones y teoremas, cuando la lógica de la deducción debe limpiar de errores y cuando las otras formas de razonamiento deben ceder la prioridad a la deducción. El hecho de que los objetos de las matemáticas no sean objetos físicos materiales no es exclusivo de ellas mismas.

Como lo plantean Arce & Pabón (2012) “es necesario establecer diferencias entre el construir matemáticas en el ámbito de la investigación y el hacer matemáticas en los procesos de aprendizaje en los niveles escolares; porque los conceptos no se adquieren en un instante, se forman en procesos en los que el conflicto cognitivo y las experiencias (tanto convergentes como contrapuestas) son agentes mentales imprescindibles. Y ocurre con frecuencia que la evidencia sensible es antagónica con las construcciones matemáticas”.

En el *Laboratorio de Educación Matemática* su estructura comportará una instancia que efectúe investigaciones a partir de la documentación, estudio y análisis de las producciones de sus participantes. Además, la metodología que se proponga buscará apoyarse tanto en el análisis de los elementos involucrados en el diseño de *fichas de trabajo* como en el desarrollo de la actividad que se genere por parte de los asistentes.

El trabajo de analizar la actividad de los participantes se hará a partir del estudio de los registros de sus producciones y si las situaciones lo permiten, ingresar al estudio de registros fotográficos, visuales, físicos o de audio que se puedan generar en la actividad del laboratorio.

Igualmente, Artigue & Bardini (2010) en investigaciones desarrolladas en relación con los procesos de orígenes instrumentales, destacan la importancia de que los participantes tengan antecedentes formativos comunes y que compartan cierta sensibilidad a consideraciones didácticas. Este es un elemento que es considerado por los investigadores como un factor positivo

para obtener niveles crecientes de compromiso, en condiciones de armonía y ha sido percibido como un valor adicional, en el caso de profesores participantes.

De todo ello, se hace evidente la necesidad de que los participantes discurran en paralelo por un proceso de caracterización de los diferentes ambientes del laboratorio y del proceso de discusión didáctica de las producciones correspondientes a los mismos participantes.

Ahora bien, esta decisión plantea dos niveles interrelacionados pero con rasgos característicos distintivos, los cuales demandan análisis diferenciados en relación con la génesis instrumental, entendida como el proceso a través del cual un artefacto se convierte en instrumento.

Por una parte, el recurso al ser considerado un artefacto constituido por los diferentes ambientes del laboratorio plantea un nivel de instrumentalización inicial que deberá ser documentado, se entenderá por instrumentalización al proceso de descubrimiento y adaptación del recurso.

De otra parte, la experimentación de las actividades propuestas en las *fichas de trabajo* y/ o en otros recursos diseñados que contemplan el uso de herramientas informáticas y computacionales plantean otro nivel de instrumentalización que demanda básicamente el análisis de la interacción existente entre el contenido matemático y la instrumentación. De esta manera se reconoce que los participantes deben asumir y familiarizarse con el laboratorio como un recurso y con los recursos pedagógicos presentes en el mismo.

2.6. ESTRUCTURA DEL LABORATORIO DE EDUCACION MATEMÁTICA

El *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle como fue concebido por Arce & Pabón (2012), parte de una estructura simple y funcional y toma como base de su configuración, una unidad, que se llamará mesa. En ella se disponen “recursos” tales como *fichas de trabajo*, materiales manipulativos, documentos, software, equipos, elementos para estructurar una secuencia, prototipos, etc. Para que sus participantes enfrenten los retos y problemas, enmarcados en el currículo TIMSS (1998), que se dispongan en la temática de actuación de cada mesa. Por otra parte, hay problemas cuyas soluciones demandan la

participación simultánea de dos o más mesas de trabajo. Dicha relación entre mesas constituye lo que se denomina una sección del *Laboratorio de Educación Matemática*.

En el *Laboratorio de Educación Matemática* se incluyen las mesas siguientes: Aritmética, Álgebra, Estadística y Probabilidades, Juegos Matemáticos, Matemáticas y Prensa, Matemáticas del Consumidor, Matemáticas y Nuevas Tecnologías y, finalmente, la mesa de Geometría. Todas ellas se coordinadas por un Director y un Comité Académico.

La mesa de aritmética se encarga de ingresar problemas que involucren números, relaciones y operaciones entre ellos.

La mesa de álgebra planteará problemas que permitan crear perspectivas de generalización y modelación de marcos de referencia cambiantes tanto en ambientes numéricos como en el marco de estructuras matemáticas abstractas.

La mesa de estadística y probabilidades incorporará problemas tendientes a la organización y procesamiento de diferentes tipos de datos con la intención de inferir de ellos, mediante el cálculo de probabilidades, nueva información para la toma de decisiones.

La mesa de juegos matemáticos incorpora, desde diferentes perspectivas, juegos que se rigen con reglas acordadas previamente pero que tienen un trasfondo matemático claro y preciso. Hay una gran variedad de ellos. En diferentes proyectos se le ha dado un peso muy especial a esta mesa, en particular, en lo que concierne a aquellos juegos que involucran elementos geométricos que circulan en los tres primeros grados de la educación básica.

La mesa de matemáticas y prensa extrae o crea a partir de diferentes medios periodísticos de circulación nacional o internacional diferentes situaciones problema que se relacionen con alguno de los tópicos matemáticos que abarca el TIMSS.

La mesa de matemáticas del consumidor incorporará el análisis de las situaciones matemáticas cotidianas en que se ve involucrado un consumidor local.

Los problemas de las matemáticas financieras y las matemáticas del artesano tienen aquí un lugar preferencial.

La mesa de matemáticas y nuevas tecnologías incorporando el análisis de situaciones matemáticas que se proponen en ambientes de geometría dinámica y sistemas de álgebra computacional, con la intención de reconocer aspectos asociados a procesos de formación de pensamiento geométrico y de instrumentación e instrumentalización de las TIC.

La mesa de geometría que planteará problemas cuyas soluciones se pueden enmarcar en los diferentes tipos de geometría existentes y que fundamentalmente tienen que ver con las propiedades de diferentes espacios y diferentes objetos y sus relaciones en dichos espacios.

Habrà un Director, en este caso el investigador, en el marco de un funcionamiento que facilite el quehacer del *Laboratorio de Educación Matemática*, será el encargado de la investigación, la innovación, la divulgación, el diseño de prototipos, el apoyo a la formación inicial de profesores y a la cualificación de profesores en ejercicio, y al diseño, configuración y uso de materiales, medios y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la Figura 4, se muestra la relación entre el director y las diferentes mesas de trabajo.

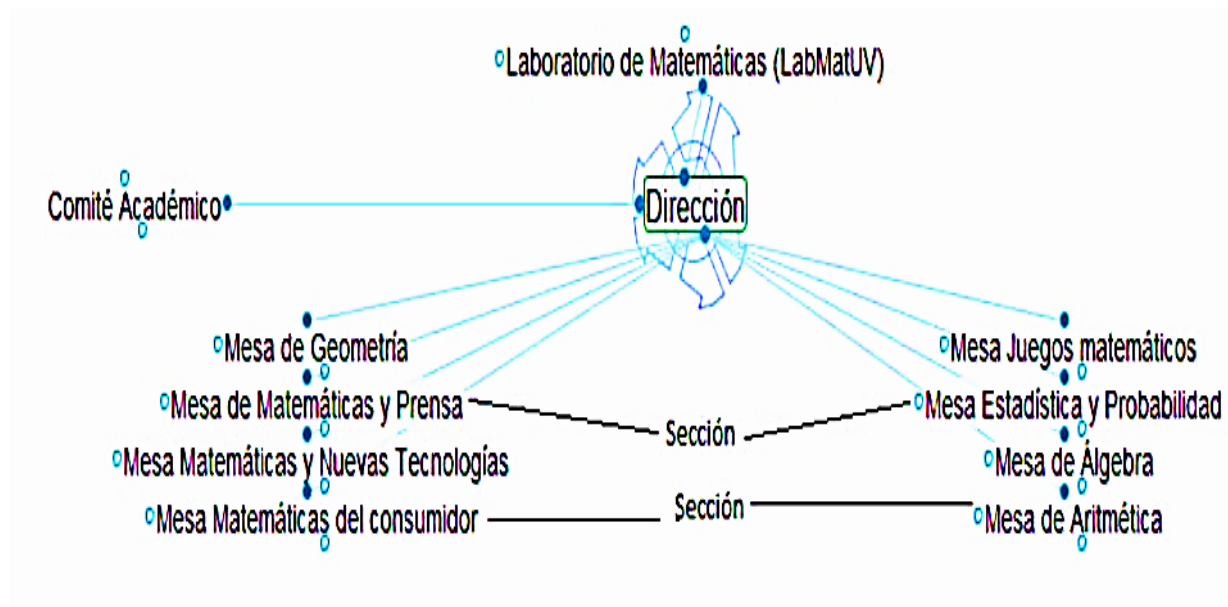


Figura 4. Estructura del Laboratorio de Educación Matemática.

Se muestra en la figura 4 como las mesas de Trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle se pueden vincular bajo estrategias para vincularlas entre sí partiendo del Director o Consejo, que en este caso será el Investigador.

En el siguiente capítulo se presentará la metodología utilizada para el diseño y/o adaptación de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* usando problemas matemáticos en el contexto de la Física.

3. METODOLOGÍA

El presente trabajo de grado centra su atención en identificar algunos de los modelos matemáticos y heurísticas que emergen cuando, en el diseño y la aplicación de fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad Del Valle, se usan problemas matemáticos en el contexto de la Física. Para delimitar el problema se eligieron los problemas matemáticos donde se tomó la cinemática y los fenómenos ondulatorios (ondas) como contexto.

En la revisión de investigaciones relacionadas con este trabajo se cita a Camarena (2000, 2006) quien a través de diferentes investigaciones llega a la construcción de la teoría educativa denominada: *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, que nace desde 1982, la cual reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre las matemáticas y las ciencias que la requieren, entre las matemáticas y las competencias laborales y profesionales, así como la vinculación con actividades de la vida cotidiana.

La teoría contempla al proceso educativo como un sistema en el cual se desarrollan elementos que dan origen a cinco sublíneas de investigación: La Curricular, desarrollada desde 1984. La Didáctica, iniciada desde 1987. La epistemológica, abordada en 1988. La docente, definida en 1990. La cognitiva, estudiada desde 1992. En este trabajo es de interés el uso de la Física en actividades de matemáticas, donde se reconoce la importancia de recolectar y sistematizar la información obtenidas de las interacciones de los participantes con el recurso en cuestión por lo cual se sostiene la línea de investigación de la didáctica, propuesta por Camarena (2007).

En este orden de ideas la presente investigación muestra características cualitativas a través de las cuales se desea estudiar las diferentes producciones de los participantes en las diversas situaciones donde se deben abordar problemas matemáticos en el contexto de la Física desde distintas estrategias de resolución. Lo que lleva al trabajo de grado a enfocarse en el reconocimiento de algunos de los aspectos propios de la *investigación cualitativa*, que permita relacionar las situaciones planteadas, el contexto físico, el conocimiento matemático y el método de sistematización de los resultados de los participantes en las actividades propuestas.

La investigación cualitativa, como lo expone Martínez (2006), ha sido implementada constantemente en la búsqueda de solución de problemáticas de los investigadores ya que permite

estudiar la naturaleza de los fenómenos, la estructura dinámica de los mismos y posibilita la explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de los fenómenos. De esta manera se suscitan espacios de interacción permanente entre participantes y docentes que favorezcan el estudio de las heurísticas y los modelos matemáticos que brotan dentro de la práctica sustentada por el marco teórico adoptado.

En concordancia con los intereses del presente trabajo de grado, plasmados en los objetivos, se asume el enfoque de la investigación cualitativa adoptando el enfoque metodológico de *estudio de casos*.

El estudio de casos, permite tomar elementos de él mismo sin perder pertinencia y generalidad en la aplicación del estudio. Tiene una estructura que incluye interpretaciones cualitativas de las interacciones de los contenidos y saberes en juego, con la puesta en escena de los mismos con los participantes de la actividad matemática.

Como lo expone Martínez (2006), *“esta estrategia de investigación está dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, combinando distintos métodos para la recolección de evidencias cualitativas y/o cuantitativas con el fin de descubrir, verificar o generar teorías”*. (p. 174).

Para tal efecto se entiende como estudio de caso al “método empleado para estudiar a un individuo o una institución en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible” Salkind (1999, p. 211).

Yin (1989), (citado por Martínez, 2006), propone cinco componentes especialmente importantes de un estudio de casos:

- La pregunta de la investigación
- Las proposiciones teóricas
- Las unidades de análisis
- La vinculación lógica de los datos a las proposiciones

- Los criterios para la interpretación de los datos. (p. 29-36)

Específicamente, en este trabajo la pregunta de investigación fue presentada en el capítulo 1, las proposiciones teóricas que sustentan la investigación aparecen en el capítulo 2, las unidades de análisis se formularan en el capítulo 3 y en el capítulo 4 se muestra la vinculación lógica de los datos con las proposiciones teóricas y los criterios de interpretación de los datos.

Es de notar que el estudio de casos enfocado a una variable de tipo cualitativa permite analizar un espacio donde el investigador se relaciona y se encuentra con sujetos y cuyas acciones e interacciones van a ser analizadas para lo cual se realizará, en el siguiente apartado, una caracterización del contexto de la presente investigación.

3.1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo de la investigación se tomaron dos contextos generales: El contexto científico que toma de la Física elementos de la cinemática y de los fenómenos ondulatorios para plantear, interpretar y solucionar problemas matemáticos y el contexto investigativo a través del cual se propone, documenta y analiza la relación entre participante y la ficha de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática* diseñada para generar una actividad matemática.

Para desarrollar lo anterior se toma como estructura fundamental la propuesta del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle, con sus estrategias, recursos e instalaciones logrando facilitar el espacio de investigación y no limitarlos a un aula definida sino llevarlos como una actividad que propone exhibir elementos en la interacción de los participantes con estos recursos.

El MEN (2014) expone que los parámetros para clasificar los contextos en las clases de matemáticas, donde particularmente, resalta el *contexto científico* como un elemento presente en las clases de matemáticas. Así, tomar estas apreciaciones y llevarlas a la construcción y aplicación de diferentes recursos.

Se selecciona la Física como contexto científico para la enseñanza de las matemáticas, pues ha permitido la unión entre los modelos matemáticos utilizados, las estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos y los elementos cognitivos de esta ciencia, históricamente visibles y evolucionados constantemente, de tal forma que algunas teorías matemáticas se pensaron para resolver diferentes situaciones de la Física para después enseñarse como contenido matemático.

De esta forma, resultan los modelos matemáticos y heurísticas presentes en la *Resolución de Problemas Matemáticos* y en la *Modelación Matemática* al usar contenidos de la Física en la enseñanza de las matemáticas.

Una de las fortalezas de llevar la Física como contexto a la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática*, es que los estudiantes pueden tener acceso a situaciones reales de aplicación de ciertos contenidos matemáticos, que en muchas ocasiones, parecieran no tener aplicaciones en la vida cotidiana. Se busca, de esta forma, que las *fichas de trabajo*, recursos

manipulativos y recursos cognitivos, recopilen la información producida en estas situaciones para lograr un análisis de la interacción de los participantes con los mismos. Se espera que esta interacción entre participantes y recursos se realice desde sus saberes, preconceitos y contextos particulares sin intervenciones de terceros y limitaciones de recursos para ello.

Puesto que el *Laboratorio de Educación Matemática* es un espacio de estudio y divulgación de la actividad matemática de sus participantes, en la actualidad y como resultado de una nueva conceptualización de recurso pedagógico, ha ampliado sus estrategias de acción en cuanto concierne a la formación inicial y cualificación de los profesores de matemáticas en formación y en ejercicio.

Por ende, la intervención de los participantes con los recursos se realizará en dos espacios formativos: el *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle y la Institución Educativa santa Isabel de Hungría, sede Aguacatal.

En primer lugar la Universidad del Valle, propone un espacio y estrategia llamada *Laboratorio de Educación Matemática* enfocado en la interacción entre los recursos pedagógicos y los participantes del mismo. Estos participantes son estudiantes de básica secundaria, estudiantes del área de educación matemática, de diferentes semestres del ciclo básico y profesional, bajo la mirada de la electiva profesional *Resolución de Problemas Matemáticos* y *Laboratorio de Educación Matemática*, que tiene como objetivo proponer a docentes en formación y/o en práctica, y profesores invitados de diferentes instituciones educativas actividades matemáticas contextualizadas para diferentes tipos de análisis.

Esta intervención con los estudiantes del curso de *Resolución de Problemas Matemáticos* y *Laboratorio de Educación Matemática* se realizó en aras de mejorar las estrategias de selección de problemas, adaptación de los problemas a las fichas de trabajo, elementos de forma y dificultad de las fichas de trabajo al tomar las sugerencias realizadas por los participantes e incluirlas en la evolución de las mismas y creación de nuevas fichas de trabajo. Cabe notar que las fichas de trabajo no se ven como recursos estables y no modificables, lo que se busca en las fichas de trabajo desde su estructura es la capacidad de adaptarlas a un problema matemático que se quiera, sin dejar a un lado la importancia del contexto de la Física.

Posteriormente, se realizó la intervención con los estudiantes del grado undécimo promoción 2014 de la Institución Educativa Santa Isabel de Hungría, sede Aguacatal, de tal forma que se hace extensiva la experiencia que se propone en la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática* en instituciones educativas.

La Institución Educativa Santa Isabel de Hungría, Sede Aguacatal, está situada en la comuna 1 y se caracteriza por brindar educación de cobertura en la posición demográfica de ladera, colegio que forma parte de la Fundación Santa Isabel de Hungría, colegio adscrito a la Arquidiócesis de Cali, con la misión de formar en valores a los estudiantes brindándoles idoneidad para desenvolverse en diferentes contextos tanto educativos como sociales y laborales. Se organiza desde un rector el cual asigna dos coordinaciones (bienestar y académica) para implementar las directrices estipuladas de sus quehaceres administrativos.

Los directivos asignan a sus jefes de áreas la libertad de innovar y proponer diferentes situaciones que generen en los estudiantes mayor desarrollo de habilidades y competencias tanto generales como específicas. El jefe de departamento de matemáticas de la institución educativa, propone constantemente la inclusión de los contextos, las competencias y las TICS en el desarrollo de las clases de matemáticas con el fin de problematizar la enseñanza tradicionalista y buscar que los docentes del área fortalezcan cada día más la enseñanza enfocada a las competencias y habilidades a través de los procesos matemáticos en las actividades matemáticas propuestas. De esta manera se acuerda realizar la intervención en estudiantes de grado 11º.

En estas estrategias el docente se arriesga a tomar un papel menos protagónico y pasa a ser un guía, recopilador de información y orientador, para obtener las apreciaciones de los participantes, las cuales resultan de la interacción con el recurso en juego.

Los contextos de la Física aplicados para la intervención con los problemas matemáticos, fueron la cinemática y fenómenos ondulatorios. Puesto que estos contenidos de la Física fueron evidenciados en diferentes textos guías para aclarar, problematizar, comparar y tomarlos como contexto en diferentes problemas matemáticos.

Si bien el *Laboratorio de Educación Matemática* funciona como un contexto y estrategia para mostrar algunos elementos didácticos de la enseñanza de las matemáticas, en esta experiencia se proponen problemas matemáticos traídos de otras ciencias, en este caso de la

Física, para aportar sus riquezas didácticas y fenomenológicas y así fortalecer la enseñanza de las matemáticas siguiendo algunas de las propuestas por los lineamientos y los estándares básicos de competencias, MEN (2006) en lo referente al contexto y los procesos matemáticos.

Tanto la Universidad del Valle y la Institución Educativa Santa Isabel Hungría aportan herramientas como recursos, espacio-temporales y humanas para realizar óptimamente el estudio de las situaciones inmersas en este trabajo, los participantes ponen en juego sus saberes previos y los saberes transpuestos en el aula para realizar el problema planteado.

Se busca que las interacciones con estas *fichas de trabajo*, diseñadas desde una reformulación de situaciones y problemas matemáticos que surge de la relación entre el investigador y el texto escolar, respondan a la necesidad de evidenciar la relación entre la *Modelación Matemática*, la *Resolución de Problemas Matemáticos* y el contexto de la Física, en la *ficha de trabajo* se espera mostrar claramente que los contextos físicos unidos con el contenido matemático desarrollado por el texto escolar representan un recurso didáctico que busca responder asertivamente la pregunta y objetivos que dirigen esta investigación.

En este orden de ideas, para realizar el diseño de las *fichas de trabajo*, inicialmente se analizarán algunas preguntas propuestas y ejemplos de preguntas que utilicen la Física como contexto de las pruebas PISA y las PRUEBAS SABER 11. Finalmente, se analizarán algunos elementos de forma de los textos escolares, así como algunos de los apartados donde los mismos que hacen énfasis en la implementación de situaciones de la Física. En el siguiente apartado se presenta de forma detallada lo expuesto anteriormente.

3.2. DISEÑO DE LAS FICHAS DE TRABAJO DEL LABORATORIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Para el diseño de las fichas de trabajo implementadas en la actividad matemática, se tuvo en cuenta un análisis de las diferentes situaciones donde se presenta la Física como un contexto para la enseñanza y/o investigación en las matemáticas. De esta forma, se realiza el diseño de la siguiente forma:

Inicialmente, se realiza una prueba diagnóstica tomada de las Pruebas PISA, luego se analiza la presencia y pertinencia de la Física como contexto en las pruebas nacionales PRUEBAS SABER 11 y finalmente se realiza un análisis de textos escolares de matemáticas que

muestren, apliquen y desarrollen la Física como un contexto para el desarrollo del contenido matemático dado. En la siguiente sección se exhibe los análisis de las pruebas y su inclusión en las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

3.2.1. Análisis de las pruebas PISA y Prueba Saber 11°

En este apartado se registra el análisis a las pruebas internacionales PISA y las pruebas nacionales SABER 11. El MEN (2009) expone que las pruebas internacionales PISA proponen problemas matemáticos en contextos científicos, así mismo, el MEN (2014) documenta la pertinencia de incluir el uso de un contexto científico para la construcción de preguntas para las pruebas nacionales SABER 11.

En las pruebas PISA (2001) se evidencia la presencia de situaciones en el contexto de la Física, en especial, una de las situaciones planteada por el INEE (Instituto Nacional de Educación Española) es la llamada *la velocidad de un auto de carrera*, la cual fue tomada como prueba diagnóstica para el presente trabajo, de tal forma que ayude a dar fuerza a la pertinencia del contexto de la Física en la enseñanza de las matemáticas y en la evaluación de las mismas. (Ver anexo 1).

El resultado de la aplicación de la prueba diagnóstica fue tomado como exploratorio, con el fin de que los participantes se enfrentaran a situaciones matemáticas en un contexto de la Física y determinar el tipo de respuestas que arrojaban. Al notar el creciente interés de los participantes, la facilidad de desenvolverse en el gráfico y la familiarización de los mismos con los problemas propuestos, se procede a analizar las pruebas SABER 11 en aras de encontrar preguntas, situaciones y/o problemas que exhiban la importancia de la Física como un contexto en nuestro entorno escolar según lo planteado por el MEN (2014).

Adicionalmente, el MEN (2006), sostiene que los contextos de las matemáticas, son la vida misma de los estudiantes con sus interacciones y problemáticas, con sus situaciones por resolver que esperan a través de diferentes estrategias volverse competentes para sortear y solucionar de forma más eficaz los problemas planteados. En esta búsqueda, el MEN (2006) propone los estándares básicos de competencias que pretenden responder a las necesidades educativas de los estudiantes, se cita por lo menos un estándar de cada pensamiento sugerido para los grados 10° y 11° donde se hace explícito el uso del contexto científico, en especial de la Física.

- *Pensamiento numérico: Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.*
- *Pensamiento geométrico: Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.*
- *Pensamiento métrico: Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.*
- *Pensamiento aleatorio: Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias Físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.*
- *Pensamiento variacional: Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.*

En conexión con estos estándares básicos de competencias, se indaga el tipo de preguntas que aparecen en la PRUEBA SABER 11° liberadas por el ICFES (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior) que evalúan la integración de diferentes contextos, en especial de la Física.

Del cuadernillo de PRUEBAS SABER 11° propuesto por el MEN (2012) se selecciona el problema matemático que incluye el contexto de la Física para el análisis de las cónicas, en especial el de la parábola, en este caso toma los choques físicos como contexto. Este problema se reformuló para que diera cuenta de diferentes modelos matemáticos y heurísticas asociadas al manejo de las diferentes representaciones de la parábola.

La construcción de las fichas de trabajo se fundamenta, por el uso de los contenidos propuestos por las pruebas externas TIMSS (1998) usando la estrategia propuesta por el *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle, para el diseño de las fichas de trabajo, por un lado se realizó desde la reformulación y modificación del problema matemático mostrado en el análisis anterior de la PRUEBA SABER 11°. Por otra parte, se realiza un análisis de textos escolares de matemáticas que presente a la Física como contexto para la propuesta de

situaciones y actividades matemáticas. A continuación se presenta este análisis de textos escolares.

3.2.2. ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES

En primera instancia, se realiza el análisis de algunos textos escolares de matemáticas como los de: Apóstol (1988) Calculus, Edward & Penny (2002) Cálculo con geometría analítica, Figueroa (2002) Matemáticas Aplicadas y sus Enseñanzas Volumen I y el de Anzola (2008) Código matemáticas 9°, en los cuales se evidencia la relevancia que estos libros le brindan al contexto de la Física. Sin embargo se seleccionaron para los diseños los siguientes tres textos, debido a la prioridad que se le otorga a la Física como contexto en el desarrollo matemático del texto escolar.

Para ello, en la tabla 1 se inicia la recopilación de elementos de forma de los textos escolares seleccionados con el fin de reconocer los autores, la editorial y demás.

TÍTULO	AUTOR(ES)	EDITORIAL	AÑO	País(es)
Gran Enciclopedia Educativa (Álgebra y Física)	Bonet S., A	Programa Educativo Visual	1991	Panamá. Colombia, México
Pensamiento Matemático 8	Díaz, F. Quijano, M. et al.	Libros y libros	2002	Colombia
Algebra Intermedia 8°	Ángel, Allen R.	Pearson	2004	México, Colombia (Iberoamérica)

Tabla 1. Elementos de forma de los textos escolares analizados

En relación con el año de publicación de los textos escolares mostrado en la tabla 1, se resalta el uso de la Física como un contexto en el desarrollo de las matemáticas antes y después de la reforma curricular propuesta por el MEN (1998) en los *lineamientos curriculares*, lo cual

evidencia la importancia que se le ha dado al contexto de la Física en los textos escolares a través del tiempo.

Cada texto escolar tiene una organización y una estructura distinta y responde a diferentes elementos del currículo, para esto se realizó una explicación detallada de la forma de los textos escolares analizados.

- El texto *Gran Enciclopedia Educativa*, está estructurada por tomos, en uno de sus tomos se presenta: el álgebra y la Física. Muestra de manera resumida los elementos del álgebra e incluye contextos de la vida cotidiana, científicos y tecnológicos en el contenido matemático presentado. Particularmente en el contexto científico se utiliza de forma explícita la Física. Por ejemplo: para abordar la temática Expresiones Algebraicas y sus aplicaciones se realiza la explicación a partir de la cinemática al usar problemas de móviles en los que involucran la relatividad Galileana.
- El texto *Pensamiento Matemático 8* se divide en capítulos y cada capítulo aborda diferentes pensamientos: el numérico, el espacial y el variacional. A su vez cada pensamiento, se desarrolla de manera tradicional a partir de la teoría, ejemplo y por último se tiene la lista de ejercicios para resolver. La integración del contexto de la Física se evidencia en el tipo de ejercicio propuesto.
- En el texto *álgebra intermedia 8º*, se estructura en los capítulos y se enumeran los temas a tratar en el mismo, como por ejemplo: Capítulo 3. Estudio de gráficas y funciones: gráficas, funciones, funciones lineales: gráficas y aplicaciones, la forma pendiente intersección de una ecuación lineal, entre otros ítems.

Luego se hace una breve reseña, contextualización o aplicación a modo de información acerca de la utilidad del contenido en un contexto cotidiano, cada una de las divisiones del capítulo se divide a su vez en un índice o tabla de contenidos, para orientar el trabajo a realizarse en el sub tema del capítulo en general.

Al final el texto, *Álgebra Intermedia 8º*, se propone un resumen del capítulo, ejercicios de repaso, exámenes de práctica del capítulo y examen de repaso

acumulativo. En los capítulos se exhiben secciones llamadas: *problemas de aplicación*, *Resolución de Problemas Matemáticos*, *actividades de equipo*, que en ellas, generalmente es que se hace manifiesta la Física como contexto en la enseñanza de los contenidos matemáticos en cuestión. (Ver anexo 2).

Por otra parte, en la tabla 2 se muestra como los textos escolares utilizan la Física como contexto en diferentes apartados de los textos escolares seleccionados.

Nombre del texto escolar	Contexto(s) de la Física	Capítulo, sección y página	Contenidos matemáticos
Gran Enciclopedia Educativa (Álgebra y Física)	Cinemática	Cap. 16, Explicación, P. 257	Expresiones algebraicas
Pensamiento Matemático 8	Ondas	Cap. 3, explicación, P. 93.	Representación gráfica de curvas.
Álgebra Intermedia	Ondas	Cap. 9; Resolución de problemas; P. 615.	Expresiones algebraicas
Álgebra Intermedia	Electricidad	Cap. 6, Ejemplo, P. 420.	Funciones racionales
Álgebra Intermedia	Cinemática	Cap. 4, Resolución de problemas, P. 265	Medidas de tendencia central
Álgebra Intermedia	Óptica	Cap. 7, Ejemplo, P. 522.	Operaciones cartesianas
Álgebra Intermedia	Péndulo	Cap. 11, ejemplo 7, P. 724	Sucesiones
Álgebra Intermedia	Péndulo	Cap. 11, resolución de problemas, P. 727	Sucesiones

Tabla 2. Análisis de algunos contextos de la Física presentes en los diferentes textos escolares.

En la tabla 2 se muestra la utilización de la Física como contexto desde los diferentes contenidos temáticos de la misma. En el texto escolar Gran Enciclopedia Educativa se utiliza la cinemática para el estudio de las expresiones algebraicas, a diferencia del texto escolar Álgebra Intermedia 8 que en el mismo contenido matemático referencia el concepto de ondas. Por otra parte, el texto escolar Pensamiento Matemático 8 se estudia la representación gráfica de curvas utilizando el concepto de ondas, es de anotar que la mayor variedad de contenidos de la Física son abordados en el texto escolar Álgebra Intermedia 8.

Con la tabla 2, se busca resaltar y utilizar aquellos libros que brindan un espacio privilegiado a la Física como contexto de enseñanza en la interacción del texto escolar con profesores, profesores en formación, estudiantes y público en general. Es de notar que no se registraron todos los apartados de los textos escolares donde usan la Física como un contexto para no desbordar el análisis de textos y desviar la atención del trabajo a realizarse, puesto que esta no es la finalidad de esta investigación.

En contraposición a lo expuesto en algunos de los capítulos de los textos escolares analizados, donde la Física fue utilizada como medio para el acercamiento al conocimiento matemático en cuestión, se muestra que esto puede ser contraproducente, pues en las definiciones de algunos contenidos matemáticos genera cierta ambigüedad en su relación con el contexto físico. Particularmente, en el texto pensamiento matemático 8°, el término *reflexión* utilizado en el contexto físico tiene una connotación diferente a la definición de reflexión desde la geometría.

Lo anterior hace necesario el uso de ciertas aproximaciones y suposiciones desde la intuición, entendiéndose por intuición como la idea que se tiene de alguna situación. Lo que podrían quitarle generalidad a estas definiciones. En las ambigüedades encontradas se identifica que el conocimiento matemático transpuesto permite, en cierta medida, particularizar estas situaciones.

De la interacción anterior con los textos escolares que exhiben problemas matemáticos en el contexto de la Física, se realizó un análisis para seleccionar los problemas que permiten diferentes resultados y/o diferentes formas de solución, a partir del uso de modelos matemáticos y de heurísticas teniendo en cuenta que el MEN (2006) plantea que: “una posible estructura de las matemáticas escolares se plantea a partir de tres elementos fundamentales: los procesos, el

contexto y los contenidos básicos, con el fin de desarrollar las competencias desde el desarrollo de la actividad matemática propiamente dicha”.

Para responder a esta estructura matemática propuesta por el MEN (2006) se llevan a cabo la solución, adaptación e inmersión de los problemas seleccionados en la estructura de la ficha de trabajo planteada por el *Laboratorio de Educación Matemática*. Lo cual se evidencia en la siguiente sección.

3.2.3. CONSTRUCCIÓN DE LAS FICHAS DE TRABAJO

Una vez seleccionados los problemas de las PRUEBAS SABER 11 y de los textos escolares se realizó una adaptación de los mismos para garantizar que los problemas no sean rutinarios, abran caminos a diferentes soluciones, se puedan adoptar modelos estandarizados o modelos informales y heurísticas o estrategias matemáticas para diseñarlos como una ficha de trabajo, para ponerlos en escena con participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*, en las instalaciones de la Universidad del Valle y en los salones de undécimo (11°) del Colegio Santa Isabel de Hungría Sede Aguacatal.

Igualmente para el diseño se tuvo en cuenta la estructura de las fichas de trabajo con problemas enfocados a las mesas de geometría y álgebra del *Laboratorio de Educación Matemática*. Para optimizar lo anterior, se plantea una reformulación de los problemas matemáticos en el contexto de la Física bajo la estrategia de las fichas de trabajo propuesta por el *Laboratorio de Educación Matemáticas* de la Universidad del Valle.

Además de la estructura de la ficha de trabajo se tuvo en cuenta el tipo de lenguaje utilizado para mejorar la interpretación de los enunciados y facilitar la recolección de datos a partir de la interacción de los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática* y las *fichas de trabajo*.

Por otro lado, la adopción del diseño de *recurso pedagógico* adaptado de la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática* brinda al participante la capacidad de proponer, solucionar y abordar soluciones al problema planteado, de tal forma que se muestren elementos claves de su interpretación y para lograr (consciente o inconscientemente) asumir algunas *heurísticas y modelos matemáticos*, propios de los procesos de *Resolución de Problemas Matemáticos y Modelación Matemática*.

Se busca que las *fichas de trabajo* que ingresan a cualquiera de las mesas del *Laboratorio de Educación Matemática* tengan un diseño sencillo y práctico que permite su organización y manipulación tanto Física como digital.

El diseño de la ficha de trabajo que se empleó en este trabajo es el mostrado en la siguiente estructura propuesta por Arce & Pabón (2012):



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



(1) → Título Ficha	
(2) → Códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS	
(3) → Descripción del problema	(4) → Dibujos, gráficos e información no escrita complementaria a la descripción del problema. (5) → Se recogen las observaciones, la fuente bibliográfica, el autor o autores, año de publicación y otros datos que se consideren importantes.

Reverso de la Ficha

Bitácora

- Número de estudiantes
- Soluciones dadas
- Preguntas de los usuarios
- Fallas de diverso orden presentadas
- Bibliografía asociada
- Posibles mejoras
- Niveles de dificultad
- Redes en la que ha circulado
- Otros

A continuación se muestra la estructura del diseño de una *ficha de trabajo* prototipo, propuesto por Arce & Pabón (2012):

Se escribe el título de la *ficha de trabajo*; en (1)

Se señala claramente el aspecto de contenido de la ficha utilizando, para ello, los códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS; en (2)

Se ubica la descripción del problema; en (3)

Se ubican los dibujos, gráficos e información no escrita que sea complementaria a la descripción del problema; en (4)

Se abre un espacio para registrar observaciones, comentarios, autorías, fuentes bibliográficas, sugerencias, etc.; en (5)

Por otra parte, en la cara B (reverso) de la ficha, que se denominará bitácora, es el espacio donde los participantes registrarán la experiencia de poner en juego los participantes y la *ficha de trabajo* respectiva.

Se recogerán datos generales como: número de personas que han intentado resolverla, preguntas del usuario, dificultades detectadas, problemas de redacción, edades de los solucionadores, fechas de uso, soluciones encontradas, etcétera.

En los problemas matemáticos referenciados en las figuras ya revisadas, se llevan a las respectivas mesas del *Laboratorio de Educación Matemática*, donde una ficha de trabajo cumple la función de recurso que tiene como propósito principal, entre otros, sistematizar la interacción entre ellas y los participantes permitiéndole a este último un acercamiento real, matemático y dinámico al contenido asociado y referenciado en las *fichas de trabajo* expuestas en los anexos.

La información que se consigna en cada bitácora será estudiada por el autor en aras de mejorar estos “recursos” ya existentes o producir nuevos, derivar documentos de divulgación para la formación inicial y profesional de los docentes de matemáticas, clasificar las soluciones dadas por los usuarios de cada ficha, hacer los soportes teóricos de las fichas, hacer esbozos de secuencias de clases basadas en algún subconjunto de fichas de una mesa del *Laboratorio de Educación Matemática*, sugerir diseños de materiales para acompañar el desarrollo de la *ficha de trabajo* y, finalmente, interpretar si las fichas dan razón de algunas heurísticas y algunos modelos matemáticos usando contextos de la Física.

Se implementa estas *fichas de trabajo* como un recurso que permite la recolección y sistematización de las producciones de los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Por último, se realizan registros fotográficos y las sugerencias propuestas en las mismas *fichas de trabajo*, para que a partir de estas fuentes de recolección de información las fichas puedan ser rediseñarlas, adaptarlas y compararlas a los resultados anteriores. En el análisis preliminar se realiza una recopilación de la comprensión del proceso de análisis, diseño y sistematización de las experiencias tenidas por el investigador de cara a responder por la pertinencia del uso de la ficha de trabajo en el cumplimiento de los objetivos. En el siguiente apartado se realizará este estudio preliminar.

3.3. ANALISIS PRELIMINAR

Los análisis realizados en la presente investigación se enrutaban hacia los cuatro elementos básicos que direccionan la presente investigación y fueron propuestos en la metodología.

En el análisis de bibliografía especializada encontraron situaciones de la Física en las matemáticas escolares de cada uno de los recursos analizados, tanto de las pruebas SABER 11, las pruebas PISA como de los textos escolares de matemáticas seleccionados. Una vez seleccionadas las situaciones se resuelven con el fin de proponer modificaciones en su lenguaje, estructura, finalidad y contenido matemático con el fin de adaptar estos problemas matemáticos al contexto de la Física y a la estructura de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Luego de esta adaptación, se resuelven las fichas de trabajo diseñadas para interpretar que posibles modelos matemáticos y posibles heurísticas surgen al interactuar con este recurso diseñado. En la solución de las fichas de trabajo realizada por el investigador se presentan diferentes modelos matemáticos y heurísticas las cuales se muestran en la tabla 3.

Mesa de laboratorio	Nombre de la Ficha aplicada	Solución(es) mostrada	Modelo(s) utilizado(s)	Heurística(s) exhibida(s)
Álgebra	El circuito cerrado	Valor numérico	Ecuación de la forma $Ax + Bx = C$ donde A, B, C son números racionales	Soluciones a ecuaciones de primer grado
Álgebra	Aguas tranquilas	Valor numérico	sistemas de ecuaciones 2x2	Solución de ecuaciones 2x2, igualación.
Álgebra	Mi velocidad final	Valor numérico	Ecuación de Velocidad media: $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$	Solución de ecuaciones de 1º grado Suma de desplazamientos
Geometría	¿Dónde rebota de nuevo?	Coordenadas	Concepto de par ordenado (a, b)	Plano cartesiano Conteos y sucesiones
Geometría	¿Dónde caerá la pelota?	Coordenadas	Concepto de par ordenado (a, b)	Plano cartesiano Conteos y sucesiones
Álgebra	Ondas en expansión	Valor numérico	Área del círculo $A = \pi r^2$	Reemplazo en ecuaciones
Álgebra	propagación en el agua	Valor numérico	Área del círculo $A = \pi r^2$	Reemplazo en ecuaciones

Tabla 3. Solución de las fichas de trabajo solucionadas por el investigador.

Las fichas mostradas en la tabla 3 se clasifican en dos grupos según las mesas: unas para la mesa de álgebra y otras para la mesa de geometría, para el análisis de las fichas se podría esperar que una ficha de trabajo funcione tanto para la mesa de geometría como para la mesa de álgebra.

La organización de las fichas se presenta en la tabla 3 por orden de aplicación. Las fichas: *circuito cerrado*, *aguas tranquilas* y *mi velocidad final* son fichas que se aplicaron en la Universidad del Valle en el espacio físico llamado *Laboratorio de Educación Matemática*. Las demás fichas de trabajo fueron aplicadas a los estudiantes del colegio Santa Isabel de Hungría, Sede Aguacatal, en el salón de clase y Laboratorio de Física como espacio físico.

Las soluciones dadas por el investigador, registradas en el anexo 3, responden a algunos de los modelos matemáticos y algunas de las heurísticas asociados a la interacción de los participantes con las fichas de trabajo puestas en escena.

Por otra parte y en conexión con lo planteado en los objetivos, en este trabajo se tuvo en cuenta todos los modelos matemáticos y las heurísticas presentados en la solución de las fichas de trabajo registrada por los participantes.

Estas respuestas, encontradas por el investigador, mostradas en el anexo 3 se presentan con el fin de ayudar a la comparación de los modelos matemáticos y heurísticas esperadas con los encontrados (iguales o similares) y utilizados por los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

El diseño de las fichas se propuso desde la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática* para las mesas de geometría y álgebra. Estas propuestas para ambas mesas de trabajo se describen a continuación:

- En los problemas para la mesa de geometría, se introdujeron problemas de *cinemática* (específicamente choques, energía, móviles), también problemas con *eventos ondulatorios*.
- En los problemas para la mesa de álgebra, los problemas más mencionados son los problemas de móviles donde su solución aparentemente es cerrada y lineal y solo permite exhibir un cambio en la representación de la solución.

Se espera que los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática* exhiban algunos de los modelos matemáticos para mostrar así la existencia, pertinencia y coherencia de las heurísticas asociadas a dichos problemas matemáticos, como el uso de gráficas, dibujos, representaciones cartesianas, entre otras.

Adicionalmente, se espera encontrar diferentes heurísticas donde los participantes muestren que las situaciones no fueron resueltas bajo estrategias repetitivas o rutinarias, sino que encuentren herramientas y estrategias alternas y/o propias para encontrar la mejor solución y adecuada que de razón de los pre-saberes matemáticos de los participantes de cara a los problemas planteados, estos conocimientos previos son importantes y necesarios para probar la pertinencia de las fichas de trabajo.

Por último, el análisis de las producciones de los participantes, las estrategias heurísticas y modelos matemáticos que se esperan (y los que no) se tuvieron en cuenta las fichas del anexo 3, que son las fichas resueltas por el investigador, donde éste toma cada *ficha de trabajo* solucionada y la comparará con las resueltas por los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Cabe notar que el investigador con esta comparación busca tomar las posibles soluciones, para exponer con claridad que modelos matemáticos y heurísticas fueron utilizados en la *Resolución de Problemas Matemáticos*, en el contexto de la Física en cuestión, adaptados en la estructura de las fichas de trabajo de *Laboratorio de Educación Matemática*.

De acuerdo a estas caracterizaciones dadas en el análisis preliminar y a los análisis de las producciones del investigador y de los participantes, se introduce el capítulo cuatro para, a través del análisis de los resultados del trabajo propuesto, responder al estudio cualitativo de la interacción de los estudiantes del curso *Resolución de Problemas Matemáticos* y laboratorio de matemáticas, profesores en formación, en práctica y en especialización y los estudiantes del colegio Santa Isabel de Hungría, sede Aguacatal del grado 11° con las fichas de trabajo elaboradas con los problemas matemáticos, seleccionados, en el contexto de la Física.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL TRABAJO DE GRADO

El presente capítulo se enfoca en responder la pregunta que direccionó la presente investigación y así, después de aplicada la prueba diagnóstica (ver anexo 2), recopilar lo trabajado en la construcción y aplicación de las fichas de trabajo. Dicha aplicación exhibe las producciones de los participantes al solucionar las fichas de trabajo diseñadas y presentadas en la sección anterior y se han utilizado como principal fuente de recolección de datos para evidenciar la presencia de modelos matemáticos y de heurísticas asociados a la solución de situaciones matemáticas en el contexto de la Física.

En la prueba diagnóstica, se evidencia como los participantes del curso *Resolución de Problemas Matemáticos* y Laboratorio de Matemáticas, abordan un problema matemático en el contexto de la Física y llegan a respuestas (selección múltiple) en su mayoría acertadas a lo que se busca. Lo cual da fuerza a la pertinencia del uso de la Física como un contexto para el planteamiento de situaciones matemáticas escolares o investigativas.

De esta forma, se realizará la presentación de los registros obtenidos en la fase de implementación de las fichas de trabajo previamente diseñadas, modificadas y puestas en escena en aras de presentar la comparación de los resultados tanto por las producciones realizadas por parte del investigador como por los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Para la recolección de la información dada por los participantes a través de las *fichas de trabajo*, se utilizó la tabla 4 para clasificar los resultados arrojados por los participantes, clasificando los tiempos de intervención donde que permitieron evidenciar diferentes modelos y heurísticas:

Mesa de laboratorio	Nombre de la Ficha aplicada	Modelo(s) utilizado(s)	Heurística(s) exhibida(s)	Solución(es) mostrada
Álgebra	El circuito cerrado	Ecuación de la forma $Ax + Bx = C$ donde A, B, C son números racionales	Soluciones a ecuaciones de primer grado	Valor numérico
Álgebra	Mi velocidad final	Ecuación de Velocidad media: $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$	Solución de ecuaciones 2x2	Valor numérico
Álgebra	Aguas tranquilas	sistemas de ecuaciones 2x2	Solución de ecuaciones 2x2 por sustitución, igualación, etc.	Valor numérico
Geometría	¿Dónde rebota de nuevo?	Concepto de par ordenado (a, b)	Plano cartesiano Conteos y sucesiones	Coordenadas
Geometría	¿Dónde caerá la pelota?	Concepto de par ordenado (a, b)	Plano cartesiano Conteos y sucesiones	Coordenadas
Álgebra	Ondas en expansión	Área del círculo $A = \pi r^2$	Reemplazo en ecuaciones	Valor numérico
Álgebra	propagación en el agua	Área del círculo $A = \pi r^2$	Reemplazo en ecuaciones	Valor numérico

Tabla 4. Rejilla de análisis de las producciones de los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.

En la tabla 4 se evidencian (cinco) 5 aspectos importantes en el análisis de las producciones de los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*:

- El diseño de las *fichas de trabajo* se enfocó a diferentes *mesas de trabajo* del *Laboratorio de Educación Matemática* donde se enmarca la importancia del contenido matemático de la misma y sus soluciones bajo las diferentes representaciones que dan

cuenta de los modelos matemáticos y las heurísticas asociadas a las producciones por parte de los participantes.

- *Nombre de la ficha de trabajo* fue seleccionado de tal forma que motive y enfoque al participante en el objetivo que se espera alcanza al enfrentarse a la *ficha de trabajo* y lograr un mejor acercamiento a las posibles soluciones del problema.
- *Modelos utilizados* plasman los diferentes modelos matemáticos ya estipulados y modelos diseñados o modificados por los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática*.
- *Heurísticas exhibidas* ellas muestran las estrategias de resolución utilizadas en la interacción con las *fichas de trabajo*.
- *Solución de la ficha de trabajo*, donde se coloca la solución que se espera que exhiban los participantes.

En el anexo 4 aparece la producción de los participantes al implementar las fichas de trabajo presentadas en la tabla 4.

Las tres primeras fichas de trabajo: *circuito cerrado*, *mi velocidad final* y *las aguas tranquilas*, fueron aplicadas en la Universidad del Valle con estudiantes del curso *Resolución de Problemas Matemáticos y Laboratorio de Educación Matemática*, profesores en formación y estudiantes de la práctica de trabajo de grado del año 2012, para un total de 22 participantes, en una sesión realizada en las instalaciones del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle.

Estas instalaciones fueron seleccionadas para poner en escena las fichas de trabajo enfocadas en la mesa de álgebra. A continuación se realiza un análisis detallado de los resultados de dichas interacciones:

En la ficha de trabajo “*el circuito cerrado*” (anexo 3) el investigador llega a una solución numérica (la solución es 30 corredores) al plantear una ecuación lineal de una sola incógnita. Por otra parte, los participantes plantearon soluciones aritméticas que no permitieron encontrar la respuesta correcta al problema planteado, una de las razones fue el lenguaje utilizado en la *ficha*

de trabajo, el cual no fue bien interpretado por algunos participantes, lo que generó ambigüedades.

Aunque dichas ambigüedades fueron consideradas a priori con el fin de buscar diferentes interpretaciones y soluciones al problema, solo un participante logró resolver el problema aunque su respuesta no fue la acertada, su respuesta fue 31. En cuanto a los modelos utilizados se muestran los modelos matemáticos de asignación de incógnitas y la interpretación de ecuaciones de primer grado con coeficientes racionales. Adicionalmente, el problema solo se prestaba para un camino de solución el cual era el despeje de una incógnita de una ecuación de primer grado. Este problema fue tomado como rutinario. Por lo anterior se espera poder realizar ajustes a la *ficha de trabajo* de tal forma que permita diferentes soluciones y se convierta en un problema no rutinario.

En la ficha de trabajo *mi velocidad final*, se realiza una interpretación del modelo matemático de rapidez o velocidad media, por ser conceptos físicos responden a contenidos matemáticos distintos como lo son *el vector* y *la magnitud de un vector*. Donde un vector es una cantidad matemática que tiene tres elementos: magnitud, dirección y sentido, y además responde a la ley del paralelogramo en su operación suma. Debido a las dos posibles interpretaciones se obtienen dos resultados distintos desde un contexto físico mostrando diferentes heurísticas como el despeje, la suma de vectores, la suma de números reales, la suma de distancias recorridas, la sumas de desplazamientos. Esta ficha enriquece el uso de modelos matemáticos y de heurísticas. Los participantes sugieren mejorar la imagen de esta ficha de trabajo.

En la ficha de trabajo *las aguas tranquilas*, se observa la importancia de seleccionar un punto de referencia, se muestra que al usar el modelo matemático del sistema de ecuaciones lineales 2x2 con única respuesta, los participantes tomaron diferentes soluciones a la presentada por el investigador, las heurísticas empleadas por los participantes fueron diversas, algunos usaron el método de igualación, otros el de reemplazo, otros el de sumas y restas, otros lo intentaron plantear intuitivamente, lo cual enriquece también la aparición de dibujos y modelos matemáticos no convencionales para la solución de problemas matemáticos de este tipo.

Adicionalmente, el investigador pide a los participantes que le ayuden a adaptar y mejorar el diseño, estructura y forma de las fichas de trabajo aplicadas en esta sesión. Estas sugerencias

fueron recopiladas para la construcción de nuevas Fichas del *Laboratorio de Educación Matemática* y la mejora de las ya diseñadas.

El tiempo empleado para resolver las tres fichas de trabajo mencionadas anteriormente fue de tres (3) horas reloj, en el espacio del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle. Las evidencias fotográficas de la implementación se encuentran en el anexo 4.

Las demás fichas de trabajo presentadas en la tabla 4, fueron aplicadas con los estudiantes del grado undécimo (11) del Colegio Santa Isabel de Hungría, Sede Aguacatal, de la promoción 2014 en las instalaciones del Colegio, para un total de 54 participantes, en dos sesiones realizadas en dos grupos de 27 personas bajo la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática* de la Universidad del Valle.

En esta intervención se organizaron grupos de trabajo en el salón de clase llamados por el investigador mesas de trabajo, lo cual favoreció el trabajo colaborativo entre los estudiantes, cada sesión de trabajo tuvo una duración de 2 horas reloj.

En las fichas de trabajo ¿Dónde caerá la pelota? Al igual que ¿Dónde rebotará de nuevo? Se evidencia la presencia de los modelos matemáticos que responden al concepto de pareja ordenada, plano cartesiano, ecuación de una parábola e interpretaciones de situaciones en gráficos. Adicionalmente, se evidencian heurísticas como la traslación en el plano cartesiano, de tal manera que aumente o disminuya la coordenada según los datos del problema, la adición de cantidades numéricas, la presencia de gráficas que ayudaron a hacer explícita la variación de las coordenadas en cada caso, tablas que acercan a la respuesta correcta. Se detectaron algunos problemas de redacción los cuales serán ajustados en aplicaciones futuras de las fichas de trabajo diseñadas.

En la *ficha de trabajo ondas de expansión* se evidenció el modelo matemático de la ecuación de primer grado con una incógnita, soluciones intuitivas, concepto de medidas y de distancias entre dos puntos. Con heurísticas asociadas al reemplazo de valores en las ecuaciones propuestas por los participantes según sus interpretaciones, relación de proporciones y de dependencia directa o inversa.

Y por último, en la ficha de trabajo *propagación en el agua* se propuso un modelo matemático de entrada el cual es la ecuación del área de un círculo, para ésta se notó que los participantes usaron el modelo matemático planteado y la anexaron gráficas como parte del modelo matemático inicial. En cuanto a las heurísticas, se mostraron situaciones de despeje, reemplazo, cambio de unidades de medida, interpretación y aproximación de número irracionales, especialmente π .

Al comparar los resultados de los participantes con la solución dada por el investigador se evidencia la fuerza que tuvo la experiencia en el reconocimiento de los diferentes modelos matemáticos y heurísticas asociadas a las situaciones matemáticas en el contexto de la Física.

Las evidencias algunas de estas aplicaciones se pueden encontrar en el anexo 4, Donde el investigador recopila, con la ayuda visual (fotografías), todas las intervenciones realizadas y enfocadas por él mismo en aras de responder a la pregunta del trabajo y dar cumplimiento y continuidad a los objetivos.

Estos análisis de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*, arrojaron algunas correcciones respectivas al diseño, pertinencia de problemas, grados de dificultad e intervenciones de los participantes. Esta retroalimentación se evidencia directamente en el diseño de las fichas de trabajo presentadas en el anexo 3 las cuales se podrán colocar nuevamente a prueba en intervenciones posteriores.

Los resultados de las *fichas de trabajo*, arrojan diferentes elementos para plantear situaciones matemáticas bajo la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemáticas*: en primer lugar propone un camino para analizar actividades matemáticas propuestas en pruebas internacionales, nacionales y en textos escolares de matemáticas desde la pertinencia del contexto utilizado, esta vez se centró el análisis desde la pertinencia del contexto de la Física en la actividad matemática.

Por otra parte, la creación y el diseño de las *fichas de trabajo* del *Laboratorio de Educación Matemática*, se puede considerar un recurso pedagógico puesto a disposición para los profesores que participan del *Laboratorio de Educación Matemática* dichos recursos pedagógicos pueden evolucionar y buscan responder inquietudes didácticas de los participantes, docentes e investigadores.

Adicionalmente, las interacciones que realizaron los participantes con las fichas de trabajo, las cuales mostraron diferentes modelos matemáticos y diferentes heurísticas que evidencian la importancia del uso del contexto físico propuesto para solucionar los problemas matemáticos son de vital importancia en el análisis puesto que evidenció respuestas indirectas y directas que dan solución a las estructuras, formas y explicaciones intuitivas de los fenómenos del entorno, reflexiones en el contexto físico, que los llevan, finalmente a exhibir el contenido matemático en cuestión en la ficha de trabajo diseñada.

En el siguiente apartado se presentan algunas ideas y conclusiones acerca de los resultados obtenidos por parte del investigador al realizar el análisis de la actividad matemática de los participantes del *Laboratorio de Educación Matemáticas*.

CONSIDERACIONES FINALES

En el trabajo del investigador se evidencia la presencia de diferentes modelos matemáticos y heurísticas asociadas en dos fases del trabajo: en la fase del diseño y en la fase de aplicación de las fichas de trabajo realizadas desde la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática*.

En el primer momento, el investigador selecciona y soluciona los problemas matemáticos propuestos por las pruebas PISA, PRUEBAS SABER 11° y textos escolares de matemáticas escogidos. En esta interacción, se registró la presencia de modelos matemáticos como ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas de ecuaciones 2×2 , ecuación de área del círculo, entre otros. Adicionalmente, se exhiben las heurísticas de resolución de problemas matemáticos en el contexto de la Física, como el uso de dibujos, despejes, relaciones, aproximaciones de números irracionales, conteo de coordenadas, entre otras.

Esta intervención brinda el resultado y respaldo esperado pues se hace explícita la presencia de diferentes modelos matemáticos y diferentes heurísticas asociadas al diseño de las fichas de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

En el segundo momento, los participantes exhiben diferentes modelos matemáticos y diferentes heurísticas asociadas a la interpretación y análisis de problemas matemáticos en el contexto de la Física. Además, se evidencia la presencia de la Física, como un contexto en los problemas matemáticos que favorece la interpretación, innovación e interacción con los saberes matemáticos en juego. Lo anterior muestra la fuerza que brinda el contexto físico a la selección, adaptación y aplicación de problemas matemáticos bajo la estructura de la ficha de trabajo del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Se evidencia, que hay modelos matemáticos que los participantes utilizaron como heurísticas y hubo heurísticas que tomaron como modelo matemáticos, como por ejemplo el plano cartesiano, que es una heurística para representar las funciones pero a su vez es un modelo matemático que ordena los pares ordenados.

Por otro lado, en el capítulo 2 se evidenciaron algunas de las estrategias metodológicas y teóricas que vincularon los procesos matemáticos de *Resolución de Problemas Matemáticos* y *Modelación Matemática*, como por ejemplo el vínculo histórico entre la *Modelación Matemática* y la Física, Israelí (1998), (citado por Tigreros, 2007). Adicionalmente, se toma la importancia del contexto en las matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) donde se conectan ambos procesos: la *Modelación Matemática* desde la mirada de la matematización horizontal y la *Resolución de Problemas Matemáticos* desde la matematización vertical, al mostrar un vínculo entre la elección, creación o adaptación de un modelo matemático adecuado y el desarrollo de las heurísticas para aplicar o poner en juego este modelo matemático trabajado.

Lo anterior da razón de alguna de las estrategias reconocidas en la interacción con problemas matemáticos en el contexto de la Física vinculando los procesos matemáticos de *Modelación Matemática* y *Resolución de Problemas Matemáticos*.

Este vínculo fue tomado en cuenta para los análisis de las fichas de trabajo diseñadas para evidenciar que cuando se realiza una buena y adecuada selección, diseño o adaptación del modelo la solución es más efectiva y certera. El diseño y la producción de las *fichas de trabajo* del *Laboratorio de Educación Matemática* se enfocaron en cuatro niveles:

En primer lugar, seleccionar de pruebas externas y nacionales y libros de texto de matemáticas problemas matemáticos en el contexto de la Física.

En segundo lugar, se seleccionó una prueba diagnóstica que mostró unido con las justificaciones teóricas previas, la importancia de interactuar con problemas matemáticos en el contexto de la Física, esta prueba se realizó con los estudiantes del curso *Resolución de Problemas Matemáticos* y *Laboratorio de Matemáticas*.

En tercer lugar, se adaptaron los problemas matemáticos en el contexto de la Física encontrados en textos escolares y PRUEBAS SABER 11 con el fin de brindar más claridad, nuevas y posibles opciones de interactuar, hasta ciertas ambigüedades adrede, en la interpretación de la actividad matemática, para lograr diferentes situaciones que buscaban caracterizar los problemas matemáticos sobre los cuales genera un efecto más impactante al ser llevados a la estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática*, en el diseño de las fichas de trabajo.

Este diseño de las *fichas de trabajo* usa estos problemas matemáticos en el contexto de la Física, para adaptarlos a la estructura del *Laboratorio de Educación Matemática*, posteriormente se recopilan algunas correcciones o sugerencias propuestas por algunos de los participantes y se corrigen para evidenciar la evolución constante de las *Fichas de Trabajo*. (Ver anexo 4).

Para la aplicación de las fichas de trabajo el investigador tomó el rol de orientador donde se permite que los preconceptos matemáticos de los participantes entren en escena y realiza las observaciones de sus producciones y algunos registros fotográficos. Las dificultades más marcadas en las intervenciones realizadas con los problemas matemáticos planteados fueron:

- En la selección de problemas matemáticos de las pruebas PISA y las pruebas SABER 11 aunque se evidencia la presencia de la Física como un contexto en la evaluación nacional externa e interna, los participantes del *Laboratorio de Educación Matemática* no estaba familiarizados en el uso de la Física como contexto para la enseñanza de las matemáticas, lo cual lleva a complicaciones al momento de identificar que contexto Físico se ha de trabajar.
- En el análisis de los textos escolares de matemática exhibe la presencia de la Física como contexto en las explicaciones, problemas contextualizados, ejemplos, ejercicios y otros apartados del texto, en la parte que se utiliza la Física para la explicación de algunos saberes matemáticos se pueden presentar ambigüedades en las definiciones del objetivo físico con el contenido matemático.
- La recolección de evidencia no fue efectiva pues los problemas técnicos no permitieron tener fuentes audiovisuales, aunque se tuvo presencia de fotografías.
- Los participantes no registraron todas sus apreciaciones, resultados y debates en las fichas de trabajo, lo cual es una fuente significativa de carencia de modelos matemáticos y heurísticas en los resultados de las fichas de trabajo.
- En el anexo 4, se referenciaron algunas de las fichas de trabajo implementadas, puesto que hubo fichas de trabajo donde los participantes no plasmaron sus ideas, no registraron respuestas o registraron respuestas en lenguaje natural intuyendo algún modelo matemático o alguna heurística sin hacerla explícita en la bitácora.

Por ende se seleccionaron las fichas de trabajo que recopilaban las posibles soluciones, los modelos matemáticos y las heurísticas de cada una de las intervenciones.

Por otra parte, Los recursos brindados por esta investigación se diseñaron con el fin de responder a la necesidades de la investigación en educación por competencias, por procesos matemáticos y por contextos significativos, donde predomina la forma sobre el contenido al tomar como eje principal los procesos de *Modelación Matemática* y *Resolución de Problemas Matemáticos*. El uso de las fichas de trabajo diseñadas puede realizarse desde el marco conceptual y estrategia del *Laboratorio de Educación Matemática*.

Se espera que las fichas de trabajo diseñadas y aplicadas ayuden a la construcción de futuros diseños, adaptaciones y aplicaciones de las mismas al utilizar la Física como un contexto que facilite la implementación de actividades de las matemáticas. Se sugiere que en la próxima intervención se adopten contextos diferentes a la Física, como la Química, Ciencias Naturales, entre otros, para obtener un panorama experimental a cerca de la importancia del contexto en la enseñanza de las matemáticas.

Para complementar lo anterior, los aportes de esta investigación responden a las crecientes preocupaciones expresadas en los documentos nacionales, que enfocan las actividades matemáticas a la innovación, estructuración, desarrollo y mejoramiento que promuevan en los participantes un desarrollo íntegro, significativo y contundente a través de las competencias desarrolladas a lo largo de las actividades analizadas por el mismo.

Para finalizar, se proponen algunas estrategias, preguntas y posibles aplicaciones de este trabajo con el fin de enriquecer los aportes didácticos de esta línea de investigación de las matemáticas:

- Para la construcción de las fichas de trabajo se propone una de las formas de analizar pruebas nacionales e internacionales, textos escolares de matemáticas y contexto tanto real como científico en las actividades de matemáticas. Estos análisis fueron muy valiosos para sustentar la importancia de trascender la enseñanza de contenidos linealmente (enseñanza tradicional) y llevar la educación matemática a los campos de la

educación matemática pensada desde los procesos matemáticos, estándares básicos de competencias y contexto de implementación de la actividad matemática.

- El diseño de la ficha de trabajo permite encontrar, recopilar y analizar eficazmente las producciones de los participantes y así lograr la sistematización de las experiencias producto de la interacción entre participantes y *ficha de trabajo*.

Como en esta ocasión se analizó la Física como un contexto para la enseñanza de las matemáticas, surgen preguntas como:

- ¿Qué importancia tiene la Química en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Qué importancia tiene las Ciencias Naturales en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cómo considerar la retroalimentación de los participantes del *laboratorio de Educación matemática* en la gestión de un recurso pedagógico para favorecer su evolución?

5. BIBLIOGRAFÍA

- Ángel, A., Semmler, R., Runde, D. (2004). Algebra intermedia. Sexta edición.
- Anzola M. (2008). *Serie código matemáticas 9*. (6ª ed.) Bogotá. Colombia: Ediciones SM.
- Apóstol, T. (Eds.) (1988). *Calculus, one-variable calculus, with an introduction to linear algebra*.
- Código Matemáticas 9*. (6ª ed.). Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, México. Colombia: Editorial Reverté colombiana S.A.
- Arce & Pabón. (2012) Laboratorio de matemáticas (*Laboratorio de Educación Matemática*) como estrategia de acompañamiento al diseño y uso de recursos pedagógicos en la formación de profesores en matemáticas. 2012. Universidad del Valle. Cali.
- Arce, J. (2004) El Laboratorio de Matemáticas en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Baker, Alan (2008) Experimental Mathematics. *Erkenn* (2008), 68:331–344, Springer.
- Bassanezi, R., (2002). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto.
- Battle, A. (1996). Experimentos en clase de matemáticas de primaria. En: UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Laboratorio de Matemáticas. N° 7. Graó. Barcelona.
- Blum, W (2003). ICMI-Study 14. Applications and modelling in mathematics education. Discussion Document. Special issue of ICMI – Bulletin (2003).
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- Camarena, P. (2000). La matemática en el contexto de las ciencias, la resolución de problemas. reporte del proyecto de investigación. México. ESIME-IPN
- Camarena, P. (2001). Modelos matemáticos como etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería. Reporte técnico del proyecto de investigación núm. de registro CGPI 200731, México. IPN.
- Camarena. 2011. La matemática en el contexto de las Ciencias y la modelación. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM. Recife, Brasil.
- Díaz, F., Quijano, M., et al. (2002), pensamiento matemático 8. Bogotá Colombia: libros y

libros.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et Dialectiqueoutil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, No. 2, pp. 5-31.

Drijvers, P.; Trouche, L. (2008), Fromartifacts to instruments: a theoretical frame work behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 363-392), Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives.

Edwards, C., Penney, D. (1996). *Calculo con geometría analítica*. (4^a ed.). Naucalpan de Juárez. México: Pearson, Prentice Hall Hispanoamericana.

Figueroa (2002).*Matemáticas aplicadas y sus enseñanzas*, sección I 4, una carrera singular. México

Font V. (2007) Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. Universidad de Barcelona www.webpersonal.net/vfont. Ciclo de Conferencias “Matemática y Física Educativa 2007”. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima, Perú.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2003) "Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros". Citado el 19 de septiembre de 2014. <http://187.216.127.158:8383/greenstone3/sites/localsite/collect/ciencia1/index/assoc/HASH018d/7f32eac4.dir/12990001.pdf>.

Guin, D. ; Trouche L. (1999), The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, The International Journal, of Computers for Mathematical Learning, 3 (3), 195-227.

Guin, D. ; Trouche, L. (eds.) (2002), *Calculatrices symboliques : transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Guin, D., & Trouche, L. (2007).Une Approche Multidimenssionnelle Pour La Conception Collaborative de Ressources Pedagogiques. En: Environnements Informatiques Et Ressources Numeriques Pour L'apprentissage (pp. 197-226). A38Paris, Francia: Hermes Science.

Guin, D.; Joab, M. & Trouche, L. (2008), Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006), INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Guin, D; Ruthven, K; Trouche, L. (eds.) (2004) The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument (contributions of

M. Artigue, P. Drijvers, P. Elbaz-Vincent, J.B. Lagrange, M. Kendal, R. Pierce & K. Stacey), Springer.

Henao & Vanegas (2012). *LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: UN EJEMPLO A TRAVÉS DE LA PRODUCCIÓN DE MODELOS CUADRÁTICOS*. (tesis pregrado en Educacion Matematica), Universidad del Valle, Cali.

http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/

Krulik, S. (Ed.) (1980). Problem solving in school mathematics. (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: NCTM.

Lesh, R.; Zawojewski, J. (2007) Problem Solving and Modeling. EN: National Council of Teachers Mathematics. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. United States of America. Frank K., Lester, Jr. P. 763-804.

Levy-Leblond, J-M. (1998). “*Física y matemáticas*”. EN: Apéry, R y otros. *Pensar la matemática*. Barcelona: turquets pp. 77-109.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. pensamiento & gestión, 20. Universidad del Norte, 165-193, 2006

Mesa, Y. & Villa, J. (2007). Elementos históricos epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. Disponible en :<http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/169>.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas TIMMS, Colombia. 1998. Bogotá. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2012). SABER 11o. 2012 Cuadernillo de pruebas Saber 11°. P. 22. Bogotá. Colombia. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/examen/component/docman/doc_download/194-cuadernillo-de-pruebas-saber-11?Itemid=

Ministerio de Educación Nacional. (2014). Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación Alineación del examen SABER 11° Lineamientos generales 2014 - 2. Bogotá.

Colombia.

Muro, C. (2004). Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa, tesis de doctorado, México, 2004, IPN.

O'Daffer, S. et. al. (1998). *Introducción al álgebra*. (1ª ed.) Naucalpan de Juárez. México: Pearson, Prentice Hall Hispanoamericana.

Sánchez (1991). *Gran enciclopedia educativa*, vol. 2. Colombia. Colombia: Programa Educativo Visual.

Santos Trigo, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Centro de investigación y de Estudios Avanzados. México.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). NY: Macmillan.

Tigeros. M (2009). *El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas*. *Innovación Educativa*, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, 2009, pp. 75-87 Instituto Politécnico Nacional México.

Vasco, C. (2003). El Pensamiento Variacional y la Modelación Matemática. XI CIAEM. Brasil.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional

Yin, R. K. (1989). *Case Study Research: Design and Methods*, Applied social research Methods Series, Newbury Park CA, Sage.

Zapata, V., Giraldo, J., Botero, J., Colom, A., Vasco, C. (2003). (Enero-Abril). La formalización de los conceptos físicos. *Revista Educación y Pedagogía*, 35, 15, 57-67.

6. ANEXOS

- 6.1. ANEXO 1: CONTEXTO DE LA FÍSICA PRESENTE EN LOS TEXTOS ESCOLARES ANALIZADOS..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2. ANEXO 2: FICHAS DE TRABAJO DISEÑADAS Y ADAPTADAS¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.1. EL CIRCUITO CERRADO ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.2. LAS AGUAS TRANQUILAS..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.3. MI VELOCIDAD FINAL..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.4. ¿DÓNDE REBOTARÁ DE NUEVO?..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.5. MI VELOCIDAD REAL ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.6. ¿DONDE CAERÁ LA PELOTA?..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2.7. ONDAS EN EXPANSIÓN ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.1.8. PROPAGACION EN EL AGUA..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.2. ANEXO 2: PRUEBA DIAGNÓSTICA ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 6.3. ANEXO 3: FICHAS DE TRABAJO SOLUCIONADAS POR LOS PARTICIPANTES¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

6.1. ANEXO 1: CONTEXTO DE LA FÍSICA PRESENTE EN LAS PRUEBAS PISA

En este anexo se presentó algunas de las actividades previas a la aplicación de las fichas de trabajo tomada de la prueba PISA donde se resalta un problema de la Física, especialmente de la cinemática.

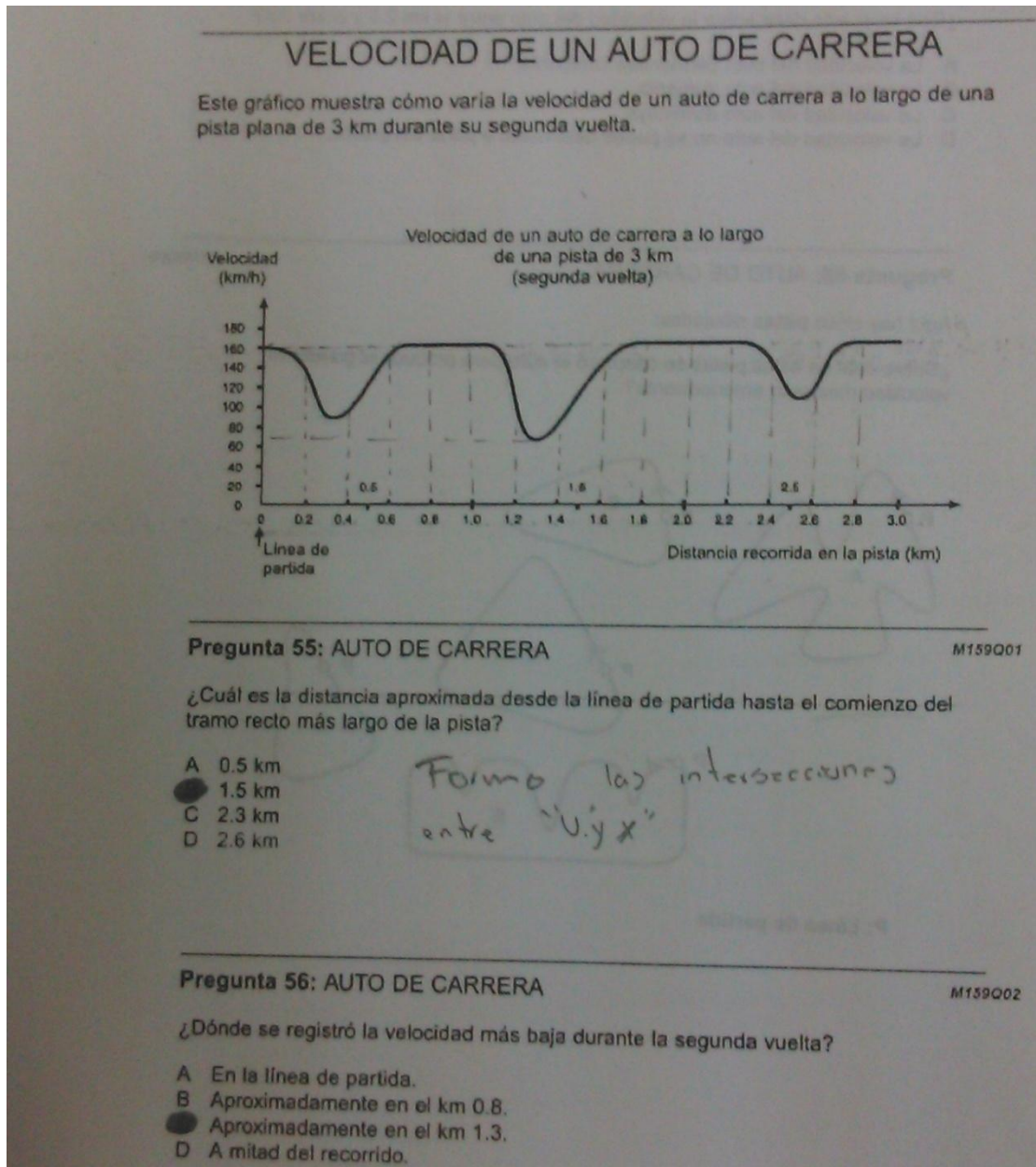


Figura 5. Preguntas “velocidad de un auto de carreras” prueba diagnóstica. Parte 1.

Pregunta 57: AUTO DE CARRERA

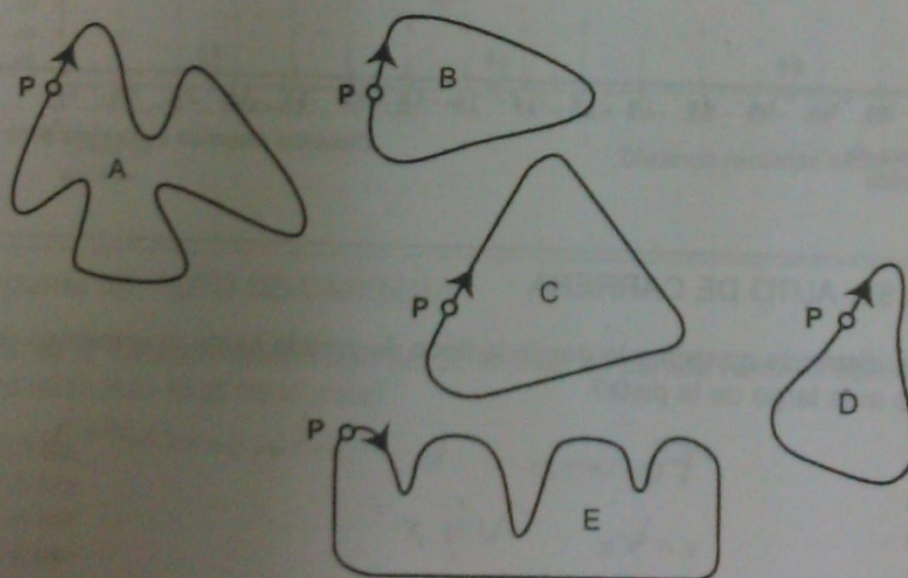
¿Qué se puede decir sobre la velocidad del auto entre el km 2.6 y el km 2.8?

- A La velocidad del auto permanece constante.
- B La velocidad del auto aumenta.
- C La velocidad del auto disminuye.
- D La velocidad del auto no se puede determinar a partir del gráfico.

Pregunta 58: AUTO DE CARRERA

Aquí hay cinco pistas dibujadas:

¿Sobre cuál de estas pistas se desplazó el auto para producir el gráfico de velocidad mostrado anteriormente?



P: Línea de partida

Figura 6. Preguntas “velocidad de un auto de carreras” prueba diagnóstica. Parte 2.

6.2. ANEXO 2: CONTEXTO DE LA FÍSICA PRESENTE EN LOS TEXTOS ESCOLARES ANALIZADOS

Contexto de la Física utilizado en la explicación de las expresiones algebraicas usando la cinemática presentes en la sección de álgebra de la gran enciclopedia educativa, el cual se presenta en la figura 7.

Antes de seguir, y como sospecho que puedes preguntarte ¿qué son las expresiones algebraicas en la vida real? A continuación te planteo unos ejemplos que reflejan unas vivencias que todos hemos experimentado.

Cuando viajamos en un vehículo con cierta velocidad o «marcha» x , y nos cruzamos con otro vehículo que viene en sentido contrario, con velocidad y ; nos parece como si marchásemos a mucha más velocidad, tomando como referencia el otro coche. En realidad lo que observamos al mirar al coche de referencia es la suma de las velocidades de ambos:

$x + y$

De igual modo, cuando adelantamos a otro vehículo, de marcha más lenta, solemos «acelerar» con el fin de pasarle rápidamente, pues en este caso como hemos dicho anteriormente, las respectivas velocidades son x e y , y la referencia entre vehículos viene dada por la diferencia de velocidades:

$x - y$

¿Has oído hablar de los icebergs? Pues son grandes masas de hielo que flotan en los mares polares.

Una de las peculiaridades de estas masas flotantes, es que la parte sumergida suele ser de 6 a 9 veces más alta por la parte que vemos sobre el océano. Si llamamos y a la parte que se ve, y x a la sumergida en el mar podemos expresar que:

$x = 6 y$ o $y = \frac{x}{6}$ o $y = \frac{1}{6} x$

que se leería y es un sexto de x .





Figura 7. Explicación de las expresiones algebraicas usando la cinemática en el texto Gran Enciclopedia Educativa.

En el texto pensamiento matemático 8º, se aprecia el contexto de la Física en los ejercicios propuestos así:

4. En física, en el estudio del movimiento uniformemente variado, el espacio recorrido por un cuerpo está dado por la expresión:
 $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, donde x es el espacio recorrido, v_0 es la velocidad inicial que tiene el cuerpo, t es el tiempo empleado en recorrer el mencionado espacio y a es la aceleración del cuerpo. Si $v_0 = 0$, $t = 5$ segundos y $a = 4 \text{ m/s}^2$, ¿cuál es el espacio x que recorre el cuerpo?
5. En física se define la fuerza como el producto de la masa por la aceleración, o sea, $F = ma$. Si la fuerza $F = 50 \text{ kg-m/seg}^2$ y la aceleración $a = 30 \text{ m/seg}^2$, ¿cuál es el valor de la masa m ?
6. En física, a la energía asociada a un cuerpo sometido a la fuerza ejercida por el peso, es decir, a un cuerpo que se encuentra bajo la acción de la fuerza gravitacional, se le llama energía potencial gravitacional. Esta energía potencial se representa mediante la expresión $E_p = mgh$, donde m es la masa del cuerpo, g es la fuerza de gravedad y h es la altura. Calcula la energía potencial E_p de un ascensor que al llevar 4 personas tiene una masa de 800 kg y asciende a una altura h de 30 metros. Además, el valor de la gravedad es de $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Figura 8. Problemas de matemáticas en el contexto de la cinemática y la dinámica. Fuente: pensamiento matemático 8º.

Las situaciones presentadas a continuación son algunos de los problemas y ejercicios propuestos en los diferentes textos escolares, cuyo análisis se realizó anteriormente para dar bases que sustentan el uso de la Física como contexto.

En la figura 9 evidenciamos el uso de las ondas mecánicas como un contexto para la formulación de diferentes problemas de área y de variación.

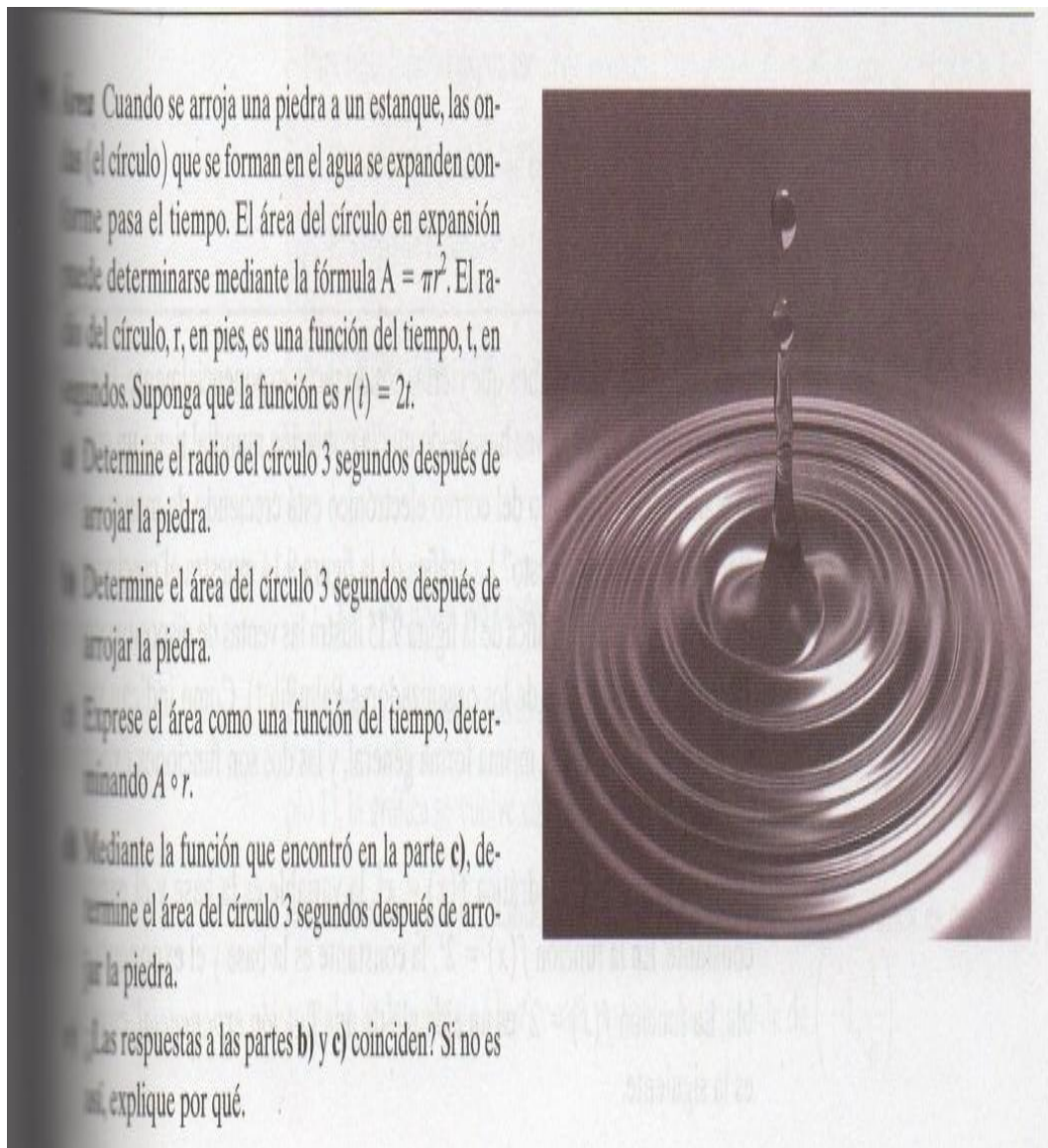
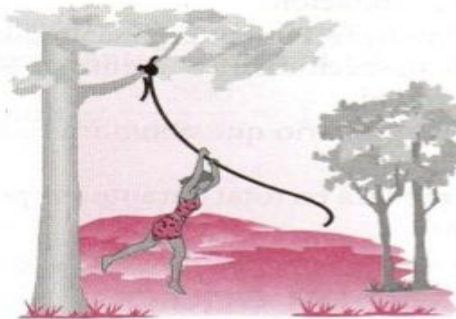


Figura 9. Problemas de matemáticas (geometría) en el contexto de las ondas mecánicas.
Fuente: álgebra intermedia. P. 615.

Adicionalmente, se encuentran otros ejercicios que toman a la Física como un contexto en el cual, se trabajan diferentes problemas matemáticos, como lo muestra la figura 10 tomando problemas de péndulo, choques y rebotes, lo cual ha aportado fuertemente en la inclusión del contexto en las fichas de trabajo a construir. Es de notar que los textos toman los contenidos de la

Física como un contexto de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, a través del cual se va a realizar una ejemplificación, explicación o una claridad cognitiva de un contenido matemático.

- 75. Balanceándose en una liana** Una larga liana se ata a la rama de un árbol. Sally se columpia en ella, y cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda) es $\frac{1}{2}$ pie menor que la oscilación anterior. Si su primera oscilación fue de 22 pies, determine



- a) la longitud de la séptima oscilación.
 - b) la distancia total recorrida durante las siete oscilaciones.
- 76. Péndulo** Cada oscilación de un péndulo es 2 pulgadas más corta que la oscilación anterior (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda). La primera oscilación es de 6 pies. Determine
- a) la longitud de la octava oscilación, y
 - b) la distancia total recorrida por el péndulo durante las ocho oscilaciones.
- 77. Rebote de una pelota** Francisco deja caer una pelota desde la ventana de un segundo piso. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura 6 pulgadas menor que en el rebote previo. Si en el primer rebote la pelota alcanza una altura de 6 pies, determine la altura que alcanza en el décimo primer rebote.
- 78. Pelota de ping-pong** Una pelota de ping-pong cae de la mesa y rebota a una altura de 3 pies. Si cada rebote sucesivo es 3 pulgadas menor que el anterior, determine la altura que alcanza la pelota en el rebote número 12.

Figura 10. Problemas matemáticos en el contexto de la Física usando péndulo, choques inelásticos y elásticos. Fuente: Álgebra intermedia.

6.3. ANEXO 3: FICHAS DE TRABAJO DISEÑADAS Y ADAPTADAS

El anexo 3 muestra las *fichas de trabajo* diseñadas a partir de la selección y análisis de textos escolares, de los cuales se eligieron algunos problemas de las matemáticas en el contexto de la Física.

Estas *fichas de trabajo*, son la versión final, revisada y corregida por el autor según algunas de las propuestas de los participantes. Las fichas de trabajo fueron nombradas de acuerdo a la intención, contexto y problema, las fichas se llaman, respectivamente: El circuito cerrado, las aguas tranquilas, mi velocidad final, ¿Dónde rebotará de nuevo?, mi velocidad real, los vientos de agosto, ¿Dónde caerá la pelota?, ondas en expansión y propagación en el agua, y se describen a continuación.

6.3.1. EL CIRCUITO CERRADO: Esta ficha está diseñada con el fin de mostrar diferentes soluciones de ecuaciones con coeficientes racionales, se utiliza el concepto de desplazamiento y punto de referencia de la Física para la solución de la misma.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



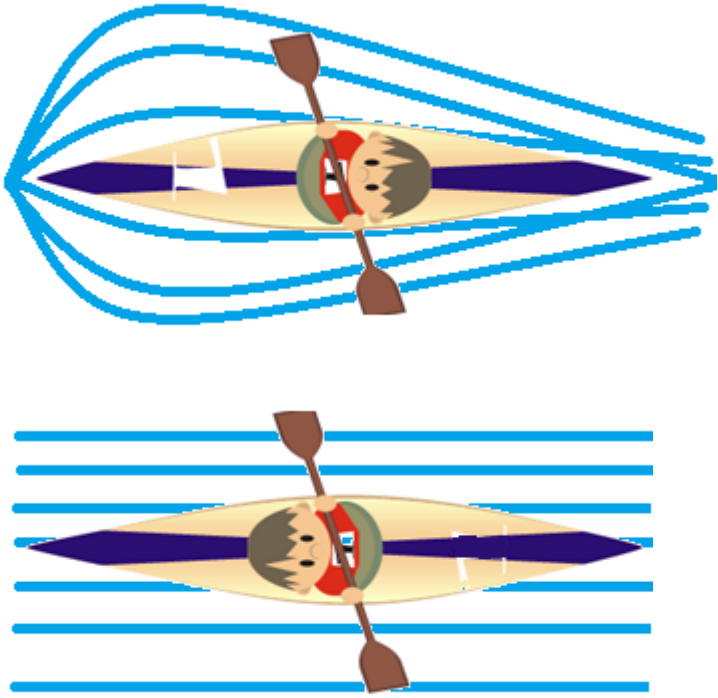
EL CIRCUITO CERRADO	
SOLUCIÓN DE ECUACIONES	
Juan compite en un circuito cerrado. Después de cierto tiempo de carrera se da cuenta que la suma de $\frac{1}{5}$ de los corredores que van delante de él más $\frac{5}{6}$ de los corredores que van detrás de él es igual al número de corredores. ¡Ayuda a Juan a encontrar contra cuántos compite!	 Elaborada por: Andrés Felipe Lara Fernández

6.3.2. LAS AGUAS TRANQUILAS: Esta ficha de trabajo propone que a través de la relatividad galileana se llegue a soluciones de ecuaciones lineales por reducción, sustitución, suma o resta, entre otras usando las velocidades iniciales y finales de la embarcación.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



LAS AGUAS TRANQUILAS	
ECUACIONES LINEALES	
Juan navega usando su bote en un río, para ello, demora el mismo tiempo en remar 2 Km contra la corriente que 6 km a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de 3 Km por hora... Ayuda a Juan a calcular su velocidad en aguas tranquilas.	 Sugerencia: Se toman como aguas tranquilas, aguas con velocidad de corriente 0 Km por hora.

6.3.3. MI VELOCIDAD FINAL: Usando la Física y los conceptos de velocidad media, desplazamiento total y desplazamiento medio, se busca la solución de una ecuación de primer grado desde la interpretación del concepto de velocidad.



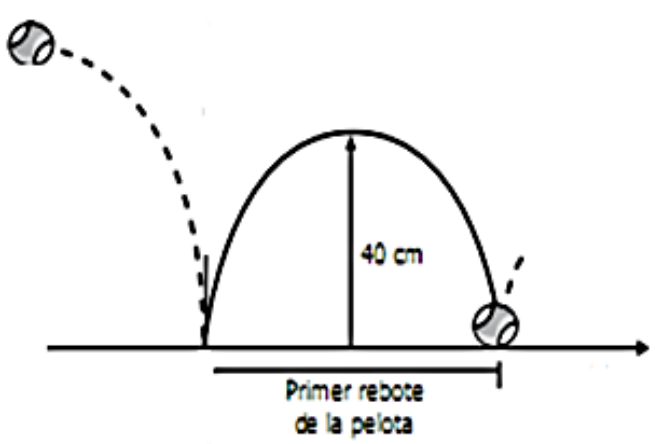
Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



Mi velocidad final	
Solución informal de ecuaciones simples	
Pablo conduce un móvil que va de A hacia B, regresa a C pasando por A y finalmente vuelve hacia A, a velocidad constante, en una hora. Ayuda a Pablo a hallar a la velocidad media de su móvil.	1 Km 1 Km NOTA: NO SE TIENE EN CUENTA EL CAMBIO DE VELOCIDAD AL CAMBIAR DE DIRECCIÓN. Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

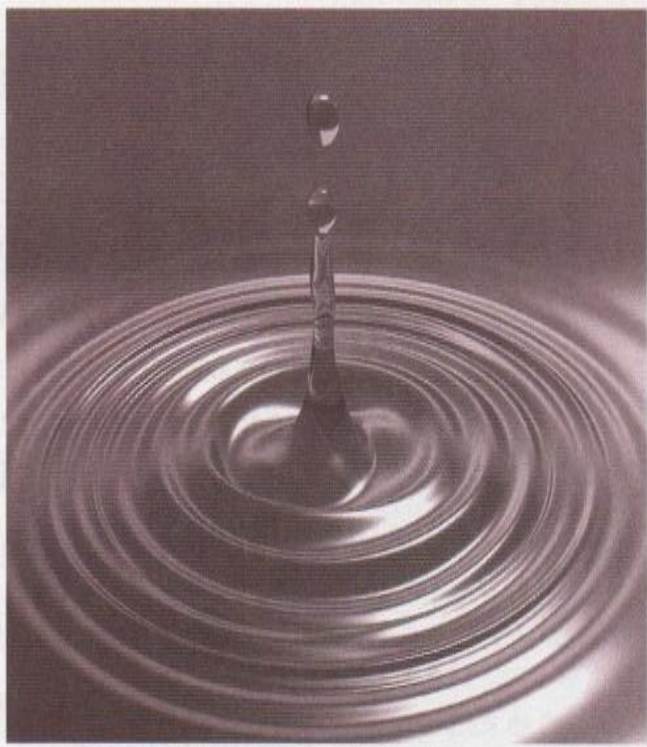
6.3.4. ¿DÓNDE CAERÁ LA PELOTA?: es una ficha de trabajo que utiliza los conceptos de choques elásticos e inelásticos de la Física con el fin de llevar a los participantes a la interacción con el plano cartesiano y las diferentes representaciones de las funciones y sus pares ordenados. Se busca que se realicen conexiones entre las representaciones gráficas y tabulares.

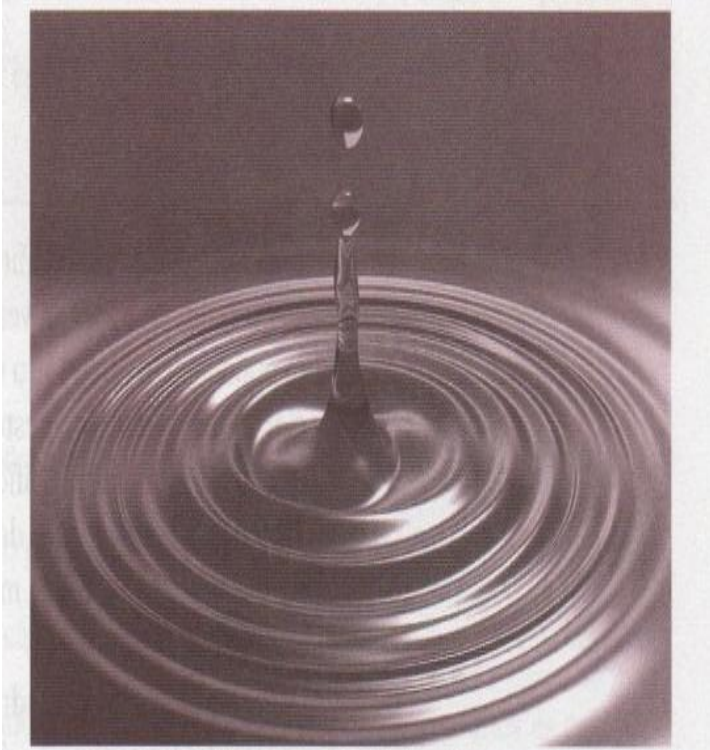


¿Dónde caerá la pelota?	
Geometría de coordenadas	
Juan deja caer una pelota de caucho desde determinada altura y rebota describiendo consecutivamente curvas. Después del primer rebote, la pelota alcanza una altura máxima de 40 cm cuando se ha desplazado horizontalmente 30 cm respecto al punto de rebote. En el sistema de coordenadas cartesianas se representa el movimiento de la pelota en el primer rebote Si la pelota pierde 10 milímetros por rebote y su alcance es menor 2cm por rebote. Ayuda a Juan a encontrar las coordenadas de los rebotes 5°, 7° y 9°	 Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández



6.3.5. ONDAS EN EXPANSIÓN Y PROPAGACIÓN EN EL AGUA: desde el contexto de las ondas mecánicas de propagación en el agua, busca realizar análisis geométrico de las circunferencias formadas y relacionarlas con los elementos algebraicos inmersos en el cálculo de las áreas.

Ondas en expansión	
Solución de ecuaciones lineales	
María, al dejar caer una piedra a un estanque de agua se genera una perturbación en el agua. La separación de cada una de las ondas que se expande siempre es la misma y es igual a 1cm. Si por una parte del estanque llegan 3 ondas por cada segundo, ayúdale a identificar la velocidad con que se mueve la perturbación que realizó la piedra en el estanque. ¿Qué pasaría si la separación entre las perturbaciones se aumenta al doble?	 Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

Propagación en el agua	
Geometría plana	
Cuando se deja caer una piedra en el agua se forman ondas (circulares) que se expanden conforme pasa el tiempo. El radio de la circunferencia aumenta en relación con el tiempo (en segundos) de tal forma que cada segundo el radio aumenta el doble. Encuentra el área de agua que cubrirá la circunferencia al cabo de 5 segundos después de caer la piedra. Ayuda: $A(r) = \pi r^2$	 Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

El diseño de las *fichas de trabajo* no se considera como terminado, puesto que es un recurso que está en la capacidad de ser adaptado y modificado de acuerdo a las necesidades planteadas por el autor o por la persona que las quiera modificar y estructurar para su propia intención.

6.4. ANEXO 4: FICHAS DE TRABAJO RESUELTAS POR LOS PARTICIPANTES

En este anexo se presentan algunas de las producciones de los participantes al interactuar con las fichas de trabajo diseñadas por el investigador.

La ficha de trabajo EL CIRCUITO CERRADO, primera ficha de trabajo referenciada (antes llamada LOS COMPETIDORES DE HOY). En la figura 11 se muestra el modelo matemático: ecuación de primer grado con una incógnita y se toman por heurísticas gráfico, las operaciones entre reales usando sus axiomas de cuerpo para llegar a un resultado numérico.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



LOS COMPETIDORES DE HOY
SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Juan compite en un circuito cerrado. Después de cierto tiempo de carrera se da cuenta que la suma de $\frac{1}{5}$ de los corredores que van delante de él más $\frac{5}{6}$ de los corredores que van detrás de él es igual al número de corredores.

¡Ayuda a Juan a encontrar contra cuántos compite!



Elaborada por: Andrés Felipe Lara Fernández

$x = \text{Juan}$

$$\frac{1}{5}C + 4 + \frac{5}{6}C = C$$
$$\frac{6C + 25C + 12}{30} = C$$
$$\frac{31C}{30} - C = -1$$
$$\frac{31C - 30C}{30} = -1$$
$$\frac{1C}{30} = -1$$
$$C = -30$$
$$\frac{31C}{30} + 4 = C$$
$$4 = \frac{30C}{31}$$

Figura 11. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Anverso.

En la figura 12 se muestra otra solución del mismo participante en el reverso de la ficha de trabajo con la cual interactuó.

$$\frac{1}{5}C + 1$$

$$\frac{1C}{5} + 1 + \frac{5C}{6} = C$$

$$\frac{1C}{5} + \frac{5C}{6} - 1C = +1$$

$$\frac{6C + 25C - 30C}{30} = +1$$

$$\frac{(31 - 30)C}{30} = +1$$

$$\frac{1C}{30} = +1$$

$$C = 30$$

Figura 12. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Reverso.

En la figura 13 se muestra el resultado de otro participante al interactuar con la ficha de trabajo el Circuito CERRADO, en la que exhibe el modelo matemático ecuación lineal con una incógnita y muestra además de las heurísticas presentadas anteriormente, una división de fracciones. Adicionalmente, en el reverso de la ficha de trabajo, figura 14, el participante realiza un aporte a cerca de la selección de los participantes óptimos para una próxima intercesión.

Universidades del Valle
Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

LOS COMPETIDORES DE HOY
SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Juan compete en un circuito cerrado. Después de cierto tiempo de carrera se da cuenta que la suma de $\frac{1}{5}$ de los corredores que van delante de él más $\frac{5}{6}$ de los corredores que van detrás de él es igual al número de corredores.

¡Ayuda a Juan a encontrar contra cuántos compete!

Elaborada por: Andrés Felipe Lara Fernández

$\frac{1}{5}x + \frac{5}{6}x - x = 1$
 $x(\frac{1}{5} + \frac{5}{6} - 1) = 1$
 $x(\frac{31}{30} - 1) = 1$
 $x(\frac{1}{30}) = 1$
 $x = \frac{1}{\frac{1}{30}} = \frac{30}{1} = 30$

$x = \#$ de corredores con los que compete.

Juan compete contra 30 corredores.

Figura 13. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Anverso.

Observación:

* tener muy en cuenta a la población a la cual está dirigido el problema, esto que acomodar los datos en una ecuación de 1º grado. Si se desea trabajar con grado 1º de la ecuación de 1º grado.

Figura 14. Ficha de trabajo CIRCUITO CERRADO resuelta por un participante. Reverso.

En las figuras 15 y 16 se encuentran los resultados de las interacciones de dos participantes con la ficha de trabajo MI VELOCIDAD FINAL, donde se puede apreciar que ambos llegaron a respuestas distintas.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



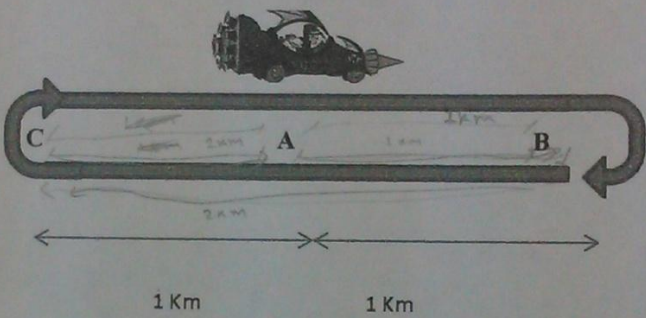
Mi velocidad final	
Solución informal de ecuaciones simples	
Pablo conduce un móvil que va de A hacia B, regresa a C pasando por A y finalmente vuelve hacia A, a velocidad constante, en una hora. Ayuda a Pablo a hallar a la velocidad media de su móvil. <i>desplazamiento = 0</i> $\bar{v} = \frac{0}{1h} = 0 \text{ km/h}$ <i>desplazamiento = 0</i>	 1 Km 1 Km NOTA: NO SE TIENE EN CUENTA EL CAMBIO DE VELOCIDAD AL CAMBIAR DE DIRECCIÓN. Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

Figura 15. Ficha de trabajo MI VELOCIDAD MEDIA. Y resuelta por un participante. Anverso.



Universidad
del Valle

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática

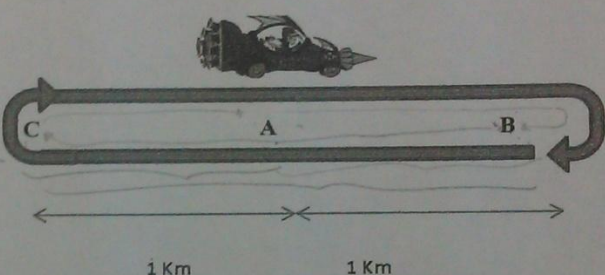


Instituto
de Educación
y Pedagogía

Mi velocidad final
Solución informal de ecuaciones simples

Pablo conduce un móvil que va de A hacia B, regresa a C pasando por A y finalmente vuelve hacia A, a velocidad constante, en una hora.

Ayuda a Pablo a hallar a la velocidad media de su móvil.



NOTA: NO SE TIENE EN CUENTA EL CAMBIO DE VELOCIDAD AL CAMBIAR DE DIRECCIÓN.

Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

* B = 3 km
* C = 2 km
* A = 1 km

}

4 km/h.

Figura 16. Ficha de trabajo MI VELOCIDAD FINAL resuelta por un participante.

De la figura 17 a la figura 20 se presentan resultados de los participantes al interactuar con la ficha de trabajo EN AGUAS TRANQUILAS. Se evidencia el uso del modelo de velocidad y suma de velocidades (suma vectorial) y el modelo de velocidad media. Las heurísticas mostradas fueron operaciones con números reales usando los axiomas de cuerpo, asignación de variables e incógnitas.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



BOTE EN AGUAS TRANQUILAS
ECUACIONES LINEALES

Juan navega en su bote en un río, demora el mismo tiempo en remar 2 Km contra la corriente que 6 km a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de 3 Km por hora...

Podrías ayudar a Juan a identificar su velocidad en aguas tranquilas.





Sugerencia: Se toman como aguas tranquilas, aguas con velocidad de corriente 0 Km por hora.

$$V_{T1} = V_b - V_r$$

$$V_{T1} \cdot t = 2 \text{ km}$$

$$t = \frac{2 \text{ km}}{V_{T1}}$$

$$3 \cdot t = 2$$

$$t = \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$V_{T2} = V_b + V_r$$

$$V_{T2} \cdot t = 6 \text{ km}$$

$$V_{T2} = \frac{6 \text{ km}}{V_{T1}} = 6 \text{ km}$$

$$(V_b + V_r) \cdot 2 \text{ km} = 6 \text{ km} (V_b - V_r)$$

$$2V_b + 2V_r = 6V_b - 6V_r$$

$$8V_r = 4V_b$$

$$\frac{8(3)}{4} = V_b \rightarrow 6 = V_b$$

$$V_{T2} =$$

$$V_r = 3 \text{ km}$$

Figura 17. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILAS por algunos participantes.

BOTE EN AGUAS TRANQUILAS
ECUACIONES LINEALES

Juan navega en su bote en un río, demora el mismo tiempo en remar 2 Km contra la corriente que 6 km a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de 3 Km por hora...

Podrías ayudar a Juan a identificar su velocidad en aguas tranquilas.

R T. Corriente
2km → h → 3km
6km → h → 0km



Sugerencia: Se toman como aguas tranquilas, aguas con velocidad de corriente 0 Km por hora.

2km

+

$$\frac{x \text{ km}}{h} - \frac{3 \text{ km}}{h} = \frac{2 \text{ km}}{h}$$

$$\frac{x \text{ km}}{h} = \frac{5 \text{ km}}{h}$$

$$\frac{x \text{ km}}{h} - \frac{0 \text{ km}}{h} = \frac{6 \text{ km}}{h} \Rightarrow \frac{x \text{ km}}{h} = \frac{6 \text{ km}}{h}$$

Figura 18. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILLAS resuelta por un participante.

BOTE EN AGUAS TRANQUILAS
ECUACIONES LINEALES

Juan navega en su bote en un río, demora el mismo tiempo en remar 2 Km contra la corriente que 6 km a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de 3 Km por hora...

Podrías ayudar a Juan a identificar su velocidad en aguas tranquilas.

R T. Corri.
2km → h → 3km
6km → h → 0km



Sugerencia: Se toman como aguas tranquilas, aguas con velocidad de corriente 0 Km por hora.

2 km

$$\frac{x \text{ km}}{h} - \frac{3 \text{ km}}{h} = \frac{2 \text{ km}}{h}$$

$$\frac{x \text{ km}}{h} = \frac{8 \text{ km}}{h}$$

$$\frac{x \text{ km}}{h} - \frac{0 \text{ km}}{h} = \frac{6 \text{ km}}{h} \Rightarrow \frac{x \text{ km}}{h} = \frac{6 \text{ km}}{h}$$

Figura 19. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILAS resuelta por un participante. Anverso

Por otra parte, En la figura 20 un participante muestra una sugerencia de heurísticas asociadas a la intervención con esta ficha de trabajo.

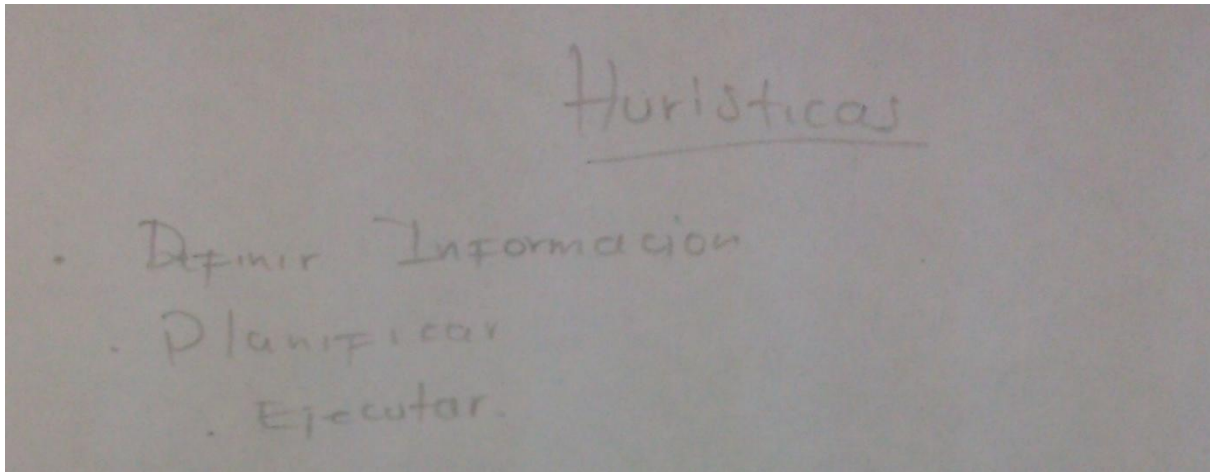


Figura 20. Ficha de trabajo LAS AGUAS TRANQUILAS resuelta por un participante. Reverso.

En las figuras 21 y 22 se evidencia la ficha de trabajo ¿DÓNDE CAERÁ LA PELOTA? Al tomar dos grupos de trabajo de los participantes, la cual arroja en el análisis el modelo matemático del par ordenado, el concepto de parábola, aplicado en las parábolas que tienen vértice en el primer cuadrante y abren hacia abajo. Se observaron heurísticas de conteo de diferente estrategia como el conteo desde el par ordenado, el conteo desde el rebote después de operar como sugiere el problema matemático. En la figura 22 se resalta el énfasis que se le da al par ordenado.



Universidad del Valle

Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



Instituto de Educación y Pedagogía

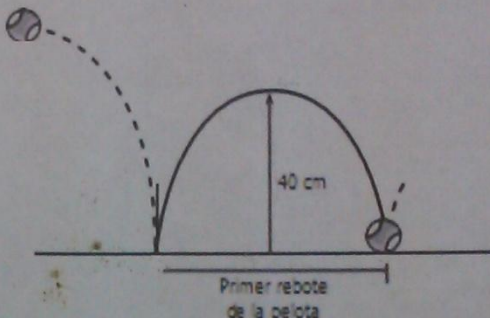
¿Dónde caerá la pelota?

Geometría de coordenadas

Juan deja caer una pelota de caucho desde determinada altura y rebota describiendo consecutivamente curvas. Después del primer rebote, la pelota alcanza una altura máxima de 40 cm cuando se ha desplazado horizontalmente 30 cm respecto al punto de rebote. En el sistema de coordenadas cartesianas se representa el movimiento de la pelota en el primer rebote

Si la pelota pierde 10 milímetros por rebote y su alcance es menor 2cm por rebote.

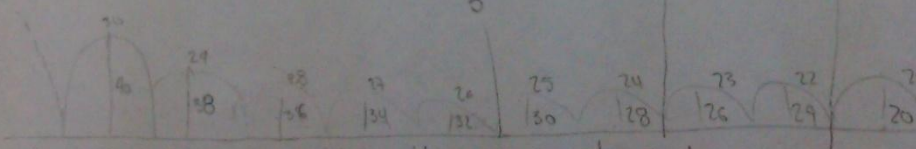
Ayuda a Juan a encontrar las coordenadas de los rebotes 5°, 7° y 9°



Primer rebote de la pelota

Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

Solución



5 7 9

en el 5 rebote sería 32 cm altura x 26 cm de ancho.
 en el 7 rebote sería 28 cm altura x 24 cm de ancho.
 en el 9 rebote sería 24 cm altura x 22 cm de ancho.

Figura 21. Ficha de trabajo ¿DÓNDE CAERÁ LA PELOTA? Solucionada por un grupo de participantes.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



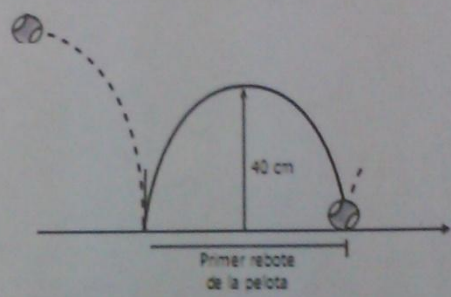
¿Dónde caerá la pelota?

Geometría de coordenadas

Juan deja caer una pelota de caucho desde determinada altura y rebota describiendo consecutivamente curvas. Después del primer rebote, la pelota alcanza una altura máxima de 40 cm cuando se ha desplazado horizontalmente 30 cm respecto al punto de rebote. En el sistema de coordenadas cartesianas se representa el movimiento de la pelota en el primer rebote

Si la pelota pierde 10 milímetros por rebote y su alcance es menor 2cm por rebote.

Ayuda a Juan a encontrar las coordenadas de los rebotes 5°, 7° y 9°



Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

$R = x(n) - 1$
 $A = x + 1$

2 = 39 Rebote 58 Alcance 3 = 37 Rebote 56 Alcance 4 = 35 Rebote 54 Alcance	5 = 36 Rebote 52 Alcance 6 = 35 Rebote 50 Alcance 7 = 34 Rebote 48 Alcance	8 = 33 Rebote 46 Alcance 9 = 32 Rebote 44 Alcance 38
---	---	---

5° = (52, 36)

7° = (48, 34)

9° = (44, 32)

Figura 22. Ficha de trabajo ¿DÓNDE CAERÁ LA PELOTA? Solucionada por un grupo de participantes.

En la ficha de trabajo referenciada en la figura 23 se muestra como el grupo de participantes



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía



Ondas en expansión	
Solución de ecuaciones lineales	
María, al dejar caer una piedra a un estanque de agua se genera una perturbación en el agua. La separación de cada una de las ondas que se expande siempre es la misma y es igual a 1cm. Si por una parte del estanque llegan 3 ondas por cada segundo, ayúdale a identificar la velocidad con que se mueve la perturbación que realizó la piedra en el estanque. ¿Qué pasaría si la separación entre las perturbaciones se aumenta al doble?	
Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández	

Figura 23. Ficha de trabajo ONDAS EN EXPANSIÓN resuelta por un grupo de participante. Anverso.

$\lambda = 1 \text{ cm}$

$v = \lambda \cdot f$

$v = 1 \text{ cm} \cdot 3 \text{ Hz}$

$v = 3 \text{ m/s}$

y si fuese de doble

$\lambda = 2 \text{ cm}$

$f = 3 \text{ Hz}$

$v = \lambda \cdot f$

$v = 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ Hz}$

$v = 6 \text{ m/s}$

Cuanto vale la longitud (λ) y
cuanto vale la frecuencia (f)
así halla la velocidad en
que transcurre la onda.

Aquí la longitud sería
el doble y
su velocidad aumentaría.
y siempre sería igual.

Figura 24. Ficha de trabajo ONDAS EN EXPANSIÓN resuelta por un grupo de participante. Reverso.

En la ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA, las figuras 25 y 26, muestra como el grupo de participantes toma el modelo matemático del área de la circunferencia, luego por las heurísticas se observa que realizan un conteo, luego un reemplazo de los valores en la ecuación, realiza una aproximación de número irracionales para finalmente encontrar un resultado numérico.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



Propagación en el agua	
Geometría plana	
Cuando se deja caer una piedra en el agua se forman ondas (circulares) que se expanden conforme pasa el tiempo. El radio de la circunferencia aumenta en relación con el tiempo (en segundos) de tal forma que cada segundo el radio aumenta el doble. Encuentra el área de agua que cubrirá la circunferencia al cabo de 5 segundos después de caer la piedra. Ayuda: $A(r) = \pi r^2$	
Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández	

$A(r) = \pi r^2$

1 = 1

2 = 4

3 = 6

4 = 6

5 = 10

$r = 10$

$A(10) = \pi r^2$

$A = \frac{\pi \cdot 10^2}{10}$

$A = \frac{3.14 \times 10^2}{10} = 31.4$

$A = \frac{3.14}{10} = 98.596$

Cada Segundo aumenta el doble

1 = 2

2 = 4

3 = 6

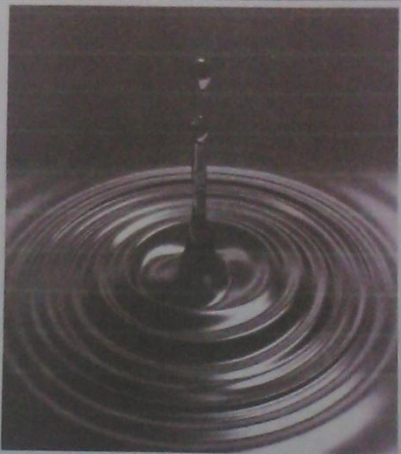
así sucesivamente son 5 el doble sería 10 así que el radio es 10 reemplazamos el número

Figura 25. Ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA resuelta por un grupo de participantes.



Laboratorio de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática



Propagación en el agua	
Geometría plana	
Cuando se deja caer una piedra en el agua se forman ondas (circulares) que se expanden conforme pasa el tiempo. El radio de la circunferencia aumenta en relación con el tiempo (en segundos) de tal forma que cada segundo el radio aumenta el doble. Encuentra el área de agua que cubrirá la circunferencia al cabo de 5 segundos después de caer la piedra. Ayuda: $A(r) = \pi r^2$	
Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández	

$A(r) = \pi r^2$

1 = 2
2 = 4
3 = 6
4 = 8
5 = 10

$r = 10$

$A(10) = \pi r^2$

$A = \frac{\pi \cdot 10^2}{10}$

$A = \frac{3.14 \times 10^2}{10} = 31.4$

$A = \frac{3.14}{10} = 98.596$

Cada Segundo aumenta, el doble

1 = 2
2 = 4
3 = 6

Así sucesivamente son 5 el doble sería 10 o sea que el radio es 10 resolver el problema

Figura 26. Ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA resuelta por un grupo de participantes.

En la figura 27, además de evidenciar lo explicado en las figuras 25 y 26 se muestra una ficha de trabajo en la que el grupo de participantes toma el problema matemático y lo aborda desde el modelo matemático planteado y utiliza un dibujo que representa al modelo matemático anterior y así se incluye las variaciones de áreas y dimensiones explícitas.

Propagación en el agua

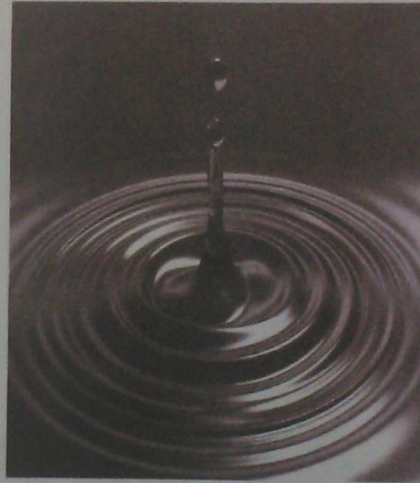
Geometría plana

Cuando se deja caer una piedra en el agua se forman ondas (circulares) que se expanden conforme pasa el tiempo.

El radio de la circunferencia aumenta en relación con el tiempo (en segundos) de tal forma que cada segundo el radio aumenta el doble $r(t) = 2 \cdot t$.

Encuentra el área de agua que cubrirá la circunferencia al cabo de 5 segundos después de caer la piedra.

Ayuda: $A(r) = \pi r^2$



Producida por: Andrés Felipe Lara Fernández

$$r(t) = 2 \cdot 5 = 10$$

$$3.1416 \cdot 2$$

$$3.1416 (10) =$$

$$A(10) = 3.1416 \cdot 10^2$$

$$A = 314.16$$

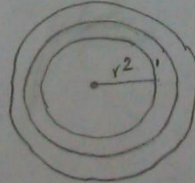


Figura 27. Ficha de trabajo PROPAGACIÓN EN EL AGUA resuelta por un grupo de participantes.