

***SOBRE LAS HIPERSUPERFICIES CON CURVATURA
MEDIA CONSTANTE CONTENIDAS EN $\mathbb{H}^n$***

FRANK DIDIER SUÁREZ MOTATO

**Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Magister en Matemáticas.**

Director

Oscar Mario Perdomo Ortiz. Ph.D

Codirector

Oscar Andrés Montaña Carreño. Mg

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI**

2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MAESTRÍA EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS

FRANK DIDIER SUAREZ MOTATO, 1980

*SOBRE LAS HIPERSUPERFICIES CON CURVATURA
MEDIA CONSTANTE CONTENIDAS EN $\mathbb{H}^n$*

PALABRAS CLAVES

*Superficies Totalmente Umbílicas en $\mathbb{H}^n$

*Hipersuperficies de Clifford en $\mathbb{H}^n$

*Superficies totalmente geodésicas en $\mathbb{H}^n$

Director

Oscar Mario Perdomo Ortiz. Ph.D

Codirector

Oscar Andrés Montaña Carreño. Mg

SANTIAGO DE CALI

SEPTIEMBRE DEL 2011

Dedicatoria

A Dios, a mis padres Luis Carlos y Nubia, a mis hermanos Patricia, Jose, Milena, Janeth, Fernando y Johann y muy especialmente a Mar.

Agradecimientos

Ante todo agradezco a Dios por orientarme hacia el sendero del éxito, por darme la fortaleza y las ganas de terminar este trabajo de grado; a mis padres y hermanos que han sido incondicionales durante toda esta etapa de mi vida, a María de Mar por su apoyo total durante todas las dificultades que tuve en la realización de este trabajo.

Agradezco también a mi profesor Oscar Mario Perdomo, por haberme dado el problema y por su valiosa colaboración que sin sus conocimientos y orientación, me hubiese sido muy difícil haber terminado con este proyecto.

Durante este periodo fueron muchas las personas en el departamento que me colaboraron para salir adelante con este proyecto y que sin su valiosa ayuda muy seguramente no hubiese podido haber culminado con éxito. Por esta razón quiero darle las gracias a todos mis profesores del Departamento de Matemáticas, en especial al profesor Raúl Quintero por sus grandes consejos, por su apoyo e impulsarme a terminar con éxito esta maestría. Por último, quiero darle un agradecimiento muy especial por su colaboración durante toda esta etapa a mi amigo Carlos Andrés Delgado por su ayuda en todo lo referente a la escritura de esta tesis.

Índice general

1. El espacio hiperbólico	6
1.1. Dos ejemplos de hipersuperficies de $\mathbb{H}^n$	8
1.2. Aplicación de Gauss, operador de forma y conexión Levi-civita sobre $\mathbb{H}^n$	10
2. Resultados principales	19
2.1. Demostración del teorema principal	23
Bibliografía	34

Resumen

Sea $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 1\}$ y sobre $\mathbb{H}^n$ la pseudométrica dada por $\langle x, y \rangle_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$. Si $\phi : M \rightarrow \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una inmersión de una variedad orientada n -dimensional, la pseudométrica $\langle, \rangle_1$ define una métrica riemanniana sobre cada espacio tangente a M en p .

Para cada $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, definimos la función $l_v : M \rightarrow \mathbb{R}$, como $l_v(x) = \langle \phi(x), v \rangle_1$ y la función $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_v(x) = \langle \nu(x), v \rangle_1$, donde $\nu : M \rightarrow S^n$ es una aplicación de Gauss definida sobre M . Probaremos que si M tiene curvatura media constante y para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $l_v = \lambda f_v$, entonces $\phi(M)$ es una hipersuperficie totalmente umbílica:

$$\mathbb{H}^{n-1}(v, c) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle x, v \rangle_1 = c\}$$

o una hipersuperficie de Clifford:

$$M_k(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2, y_{k+2}^2 + y_{k+3}^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = -1 - r^2\}$$

Donde $l = n - k - 1$.

Introducción

Sean $\phi : M \longrightarrow S^n$ una inmersión, $l_v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones sobre M dadas por $l_v(x) = \langle x, v \rangle$ y $f_v(x) = \langle \nu(x), v \rangle$ donde $\nu : M \longrightarrow S^n$ es una aplicación de Gauss. En este trabajo de investigación se generalizara para el espacio $\mathbb{H}^n$ el siguiente teorema:

Teorema 0.1. *Sea $\phi : M \rightarrow S^n$ una inmersión con curvatura media constante de una variedad orientada de dimensión $(n - 1)$. Si para algún vector no nulo $v \neq 0$ y para algún número real λ , tenemos que $l_v = \lambda f_v$, entonces $\phi(M)$ es un hiperboloide o una hipersuperficie de Clifford.*

Este teorema fue demostrado en 2006 por Perdomo Oscar, Alias Luis y Brasil Aldir en [1] y se usó como una aplicación para demostrar que el índice débil de estabilidad de las hipersuperficies compactas en S^n con curvatura media y curvatura escalar constante debe ser mayor o igual a $2n + 2$ cuando M no es una esfera totalmente umbílica ni un toro de Clifford.

En este trabajo de investigación empezaremos considerando una inmersión $\phi : M \longrightarrow \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de una variedad orientada completa de dimensión n . Para cada $x \in M$ denotaremos el espacio tangente a M en x por $T_x M$ y cuando trabajamos localmente identificamos M con el conjunto $\phi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y el espacio $T_x M$ con el subespacio $d\phi_x(T_x M)$ y sobre estos espacios consideramos la métrica

$$\langle x, x \rangle_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Denotamos por $\nu : M \longrightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial normal a lo largo de M , es decir, para cada x de M , $\nu(x)$ es perpendicular a el vector x y al espacio vectorial $T_x M$. El operador de forma $A_x : T_x M \longrightarrow T_x M$ está dado por $A_x(v) = -d\nu_x(v) = -\beta'(0)$, donde $\beta(t) = \nu(\alpha(t))$ y $\alpha(t)$ es una curva suave en M tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. Aquí se demuestra que este operador es bilineal y simétrico, por lo tanto, el tiene $n - 1$ valores propios $\kappa_1(x), \kappa_1(x), \kappa_2(x), \dots, \kappa_n(x)$ los cuales son llamados curvaturas principales de M en x y definimos la curvatura media H como el promedio de las

curvaturas principales, es decir

$$H(x) = \frac{\kappa_1(x) + \kappa_2(x) + \dots \kappa_{n-1}(x)}{n-1}.$$

Empezamos nuestro trabajo de investigación dando dos ejemplos de hipersuperficies sobre $\mathbb{H}^n$ que son homologas a las esferas euclidianas y a los toros de Clifford de S^n definidas en [1] que son más precisamente la hipersuperficie:

$$\mathbb{H}^{n-1}(v, c) = \{x \in \mathbb{H}^n : \langle x, v \rangle_1 = c, \ c \in \mathbb{R}\}$$

Para este caso obtenemos que $\nu(x) = \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}(v+cx)$ es un campo vectorial normal unitario a lo largo de $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$, por lo tanto el operador $A_x = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}I$ donde I es la aplicación identidad y encontramos que las curvaturas principales $\kappa_i(x)$ son todas iguales a $k_i(x) = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ para todo $x \in \mathbb{H}^{n-1}(v, c)$. Estas hipersuperficies las llamamos hiperboloides totalmente umbilicos.

Para la segunda hipersuperficie, consideramos $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y definimos $l = n - k - 1$ con $r > 0$, bajo esas condiciones la definimos de la siguiente forma:

$$M_k(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2, \quad y_{k+2}^2 + \dots + y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 = -1 - r^2\}$$

y obtenemos que

$$\nu(x, y) = \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right)$$

define un campo vectorial normal a lo largo de $M_k(r)$. Observe que los vectores en $T_{(x,y)}M$ de la forma $(v, 0)$ definen un espacio de dimensión k y los de la forma $(0, v)$ definen otro de dimensión l . Para este ejemplo obtenemos que el operador de forma A_x tiene dos curvaturas principales

$$\kappa_1(x) = -\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}$$

con multiplicidad algebraica k y

$$\kappa_2 = -\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$$

con multiplicidad algebraica l . Estas hipersuperficies al igual que en S^n las llamaremos hipersuperficies de Clifford.

Cuando definimos las funciones $l_v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $l_v(x) = \langle x, v \rangle_1$ y $f_v(x) = \langle \nu(x), v \rangle_1$ donde $\nu : M \longrightarrow S^n$ es una aplicación de Gauss y consideramos que $c \neq 0$, junto con el ejemplo $\mathbb{H}^n(v, c)$, vemos que si $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un vector perpendicular a v , entonces:

$$f_w = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} l_w.$$

Ocurre exactamente lo mismo con el segundo ejemplo, vemos que si

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_{k+1}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

entonces tenemos que

$$f_w = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} l_w$$

y si

$$w = (0, 0, \dots, 0, w_{k+2}, w_{k+3}, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

tenemos que

$$f_w = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} l_w.$$

En este trabajo de investigación vamos a demostrar que estos dos ejemplos son las únicas hipersuperficies con curvatura media constante en $\mathbb{H}^n$ donde la relación $f_w = \lambda l_w$, para algun vector w en $\mathbb{R}^{n+1}$ es posible, es decir demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 0.2. *Sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{H}^n$ una inmersión con curvatura media constante de una variedad orientada de dimensión $(n-1)$. Si para algún vector no nulo $v \neq 0$ y para algún número real λ , tenemos que $l_v = \lambda f_v$, entonces $\phi(M)$ es un hiperboloide o una hipersuperficie de Clifford.*

Capítulo 1

El espacio hiperbólico

En este capítulo emezaremos definiendo una pseudométrica sobre $\mathbb{H}^n$ y demostraremos que para $x_{n+1} > 1$ esta pseudométrica es una métrica riemanniana sobre $T_p\mathbb{H}^n$. Posteriormente daremos dos ejemplos de hipersuperficies de $\mathbb{H}^n$ que son fundamentales en la demostración del teorema principal. Luego definiremos sobre hipersuperficies $M \subset \mathbb{H}^n$ los conceptos básicos curvaturas principales, curvatura media y conexión Levi-civita.

Una métrica riemanniana g , definida sobre una variedad diferenciable M , es una función definida sobre M que asigna a cada punto $m \in M$ un producto punto; es decir, una forma bilineal, simétrica y definida positiva, sobre el espacio tangente T_pM

$$g_m : T_mM \times T_mM \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada vecindad coordenada U , g y las funciones $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, definidas por g y los marcos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$, son de clase C^∞ . Una pseudométrica riemanniana o una semimétrica riemanniana g^* sobre una variedad M , es una función bilineal, simétrica, que es no degenerada en cada punto $m \in M$, es decir, $g^*(x, y) = 0$ para cada $y \in T_mM$, si y solo si, $x = 0$. Lo anterior es equivalente a decir que el único vector que es perpendicular a todos es el vector nulo, o en otras palabras si se considera una base local $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ de espacios vectoriales tangentes a M en m y la matriz de la primera forma fundamental (g_{ij}) , no degenerada significa que es invertible

pero no necesariamente definida positiva.

Consideraremos el conjunto $\mathbb{R}^{n+1}$ y sobre ella la métrica riemanniana

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1} \end{aligned}$$

y el conjunto

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, \ x_{n+1} \geq 1\}.$$

No es difícil verificar que la función dada a continuación definida sobre $\mathbb{H}^n$,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_1 : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} \end{aligned}$$

define una pseudométrica sobre $\mathbb{H}^n$ e induce una métrica riemanniana sobre cada espacio tangente a

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, \text{ donde } x_{n+1} \geq 1\}.$$

Para demostrar que define una pseudométrica, tomemos $m \in \mathbb{H}^n$ y consideremos la parametrización

$$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$$

dada por $\psi(x, y) = \left(\varphi(x) \sinh y, \cosh y \right)$ donde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$ y $\varphi(x)$ es una parametrización de S^{n-1} .

Así que derivando con respecto a cada x_i y con respecto a y obtenemos en su orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, y) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \sinh y, 0 \right) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) &= \left(\varphi(x) \cosh y, \sinh y \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle_1 &= \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sinh y, 0 \right), \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sinh y, 0 \right) \right\rangle_1 \\ &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_1^2 \sinh^2 y \geq 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle_1 = \|\varphi(x)\|_1^2 \cosh^2 y - \sinh^2 y = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1.$$

Lo que demuestra la afirmación. y $\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle_1 = 0$ ya que $\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y}, \psi(x) \right\rangle_1 = 0$, denotaremos $\mathbb{H}_+^n$ de la misma forma que $\mathbb{H}^n$.

1.1. Dos ejemplos de hipersuperficies de $\mathbb{H}^n$

Uno de los ejemplos típicos de hipersuperficies del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ son las análogas a las esferas euclidianas en S^n , es decir:

$$\mathbb{H}^{n-1}(v, c) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n - x_{n+1} v_{n+1} = c\}.$$

y suponemos $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $\|v\|_1 = 1$ y en este trabajo las llamaremos hiperboloides no euclidianos.

Para demostrar que es una variedad, consideramos las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, dadas a continuación, donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$:

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

$$f_2(x) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n - x_{n+1} v_{n+1}$$

Luego sus respectivos gradientes son:

$$\text{grad}(f_1(x)) = 2(x_1, x_2, \dots, x_n, -x_{n+1})$$

$$\text{grad}(f_2(x)) = (v_1, v_2, v_3 \dots, v_{n+1}, -v_{n+2})$$

Argumentemos por contradicción suponiendo que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo tal que:

$$\text{grad}(f_1(x)) = \lambda \text{grad}(f_2(x))$$

$$\langle \text{grad}(f_1(x)), \text{grad}(f_1(x)) \rangle_1 = \lambda \langle \text{grad}(f_2(x)), \text{grad}(f_1(x)) \rangle_1$$

$$-4 = 2\lambda c.$$

Así tenemos dos posibilidades para c , que $c = 0$ ó que $c \neq 0$. Si $c = 0$ es claro que serian linealmente independientes, pues se tendría una contradicción ($-4=0$).

Si $c \neq 0$ entonces $\lambda = -\frac{2}{c}$ y:

$$\begin{aligned}\left\|\lambda \operatorname{grad}(f_2(x))\right\|_1^2 &= \left\|-\frac{2}{c}(v_1, v_2, v_3 \dots, v_n, -v_{n+1})\right\|_1^2 = \frac{4}{c^2} \left\|(v_1, v_2, v_3 \dots, v_n, -v_{n+1})\right\|_1^2 \\ \left\|\lambda \operatorname{grad}(f_2(x))\right\|_1^2 &= \frac{4}{c^2}\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $\|\operatorname{grad}(f_1(x))\|_1^2 = -4$, por tanto

$$\frac{4}{c^2} = -4$$

lo que contradice el hecho de que exista tal $\lambda \in \mathbb{R}$ y es imposible que sean linealmente dependientes. Ahora considerando la función $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ se tiene que

$$\mathbb{H}^{n-1}(v, c) = F^{-1}(-1, c)$$

y por tanto se concluye que $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ es una hipersuperficie de $\mathbb{H}^n$.

Para nuestro segundo ejemplo, sea $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, definamos $l = n - k - 1$ y sea $r \neq 0$. El conjunto $M_k(r)$ definido como se sigue es una hipersuperficie de $\mathbb{H}^{n+1}$

$$M_k(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2, \quad y_{k+2}^2 + y_{k+3}^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = -1 - r^2\}$$

De igual forma como el ejemplo anterior, consideremos las funciones:

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 + x_{k+1}^2 \\ f_2(x, y) &= y_{k+2}^2 + y_{k+3}^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2\end{aligned}$$

Observe que sus respectivos gradientes son:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f_1(x, y)) &= 2(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0) \\ \operatorname{grad}(f_2(x, y)) &= 2(0, 0, \dots, 0, y_{k+2}, y_{k+3}, \dots, y_n, -y_{n+1})\end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \text{grad}(f_1(x, y)), \text{grad}(f_1(x, y)) \rangle_1 &= 4r^2 \\ \langle \text{grad}(f_2(x, y)), \text{grad}(f_2(x, y)) \rangle_1 &= -4(1 + r^2) \\ \langle \text{grad}(f_1(x, y)), \text{grad}(f_2(x, y)) \rangle_1 &= 0\end{aligned}$$

Así, los gradientes son linealmente independientes. Ahora, formando la función

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

tenemos que

$$M_k(r) = F^{-1}(r^2, -1 - r^2),$$

por tanto $M_k(r)$ es una hipersuperficie de $\mathbb{H}^n$. Las hipersuperfices $M_k(r)$ y todas aquellas que salvo un movimiento rígido son iguales para algún k y algún r , estas hipersuperficies las llamaremos *hipersuperficies de Clifford* de $\mathbb{H}^n$.

1.2. Aplicación de Gauss, operador de forma y conexión Levi-civita sobre $\mathbb{H}^n$

En esta sección empezaremos definiendo la aplicación de Gauss sobre una hipersuperficie M , y a partir de ella el operador de forma A_x , con $x \in M$. Demostraremos al igual que como en S^n , que el Operador de Forma A_x es un operador lineal, autoadjunto de $T_x M$ en $T_x M$.

Definición 1.1. Sea M una hipersuperficie de $\mathbb{H}^n$, diremos que la función $\nu : M \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ define una **aplicación de Gauss** sobre M si y solo si:

1. $\langle \nu(x), \nu(x) \rangle_1 = 1$ para todo $x \in M$
2. $\langle \nu(x), x \rangle_1 = 0$
3. $\langle \nu(x), w \rangle_1 = 0$ para todo $w \in T_x M$

La función $\nu(x) = \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}(v+cx)$ donde $c > 1$ y $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ es fijo con $\|v\|_1 = 1$ tal que $\langle x, v \rangle_1 = c$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$. Define una aplicación de Gauss sobre $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$.

En su orden observe que:

1. Para todo $x \in \mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle \nu(x), \nu(x) \rangle_1 &= \left\langle \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}(v+cx), \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}(v+cx) \right\rangle_1 \\ &= \frac{1}{1+c^2} \langle v+cx, v+cx \rangle_1 \\ &= \frac{1}{1+c^2} \left(\langle v, v \rangle_1 + 2c \langle v, x \rangle_1 + c^2 \langle x, x \rangle_1 \right) \\ &= \frac{1}{1+c^2} (1 + 2c^2 - c^2) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Para todo $x \in \mathbb{H}^n(v, c)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle \nu(x), x \rangle_1 &= \left\langle \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}(v+cx), x \right\rangle_1 \\ &= \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} \langle (v+cx), x \rangle_1 \\ &= \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\langle v, x \rangle_1 + c \langle x, x \rangle_1 \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

3. Si $w \in T_x M$ entonces

$$\langle \text{grad } f_1(x), w \rangle_1 = 0$$

$$\langle \text{grad } f_2(x), w \rangle_1 = 0$$

Es decir;

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n - x_{n+1} w_{n+1} = 0 = \langle x, w \rangle_1 \quad (1.1)$$

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1} = 0 = \langle v, w \rangle_1 \quad (1.2)$$

luego:

$$\begin{aligned}
\langle \nu(x), w \rangle_1 &= \left\langle \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} (v+cx), w \right\rangle_1 \\
&= \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\langle v, w \rangle_1 + c \langle x, w \rangle_1 \right) \\
&= \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} (0 + c0) \quad \text{por (1.1) y (1.2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para la hipersuperficie $M_k(r)$ de $\mathbb{H}^n$ tenemos que una aplicación de Gauss es

$$\nu(x, y) = \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right)$$

De la misma forma que con la hipersuperficie anterior, observe que:

1. Para todo $x \in M_k(r)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \nu(x, y), \nu(x, y) \rangle_1 &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right), \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right) \right\rangle_1 \\
&= \frac{1+r^2}{r^2} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2) + \frac{r^2}{1+r^2} (y_{k+2}^2 + y_{k+3}^2 + \cdots + y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2) \\
&= \frac{1+r^2}{r^2} r^2 + \frac{r^2}{1+r^2} (-1 - r^2) \\
&= 1 + r^2 - r^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Para todo $x \in M_k(r)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \nu(x, y), (x, y) \rangle_1 &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right), (x, y) \right\rangle_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2) + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} (y_{k+2}^2 + y_{k+3}^2 + \cdots + y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2) \\
&= \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} r^2 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} (-1 - r^2) \\
&= \sqrt{1+r^2} r - r \sqrt{1+r^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Si tenemos que $(w, t) \in T_{(x,y)}M$, observe que

$$0 = \langle \text{grad } f_1(x, y), (w, t) \rangle_1$$

$$0 = \langle \text{grad } f_2(x, y), (w, t) \rangle_1$$

Es decir;

$$0 = 2(x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_{k+1}w_{k+1}) = \langle (x, 0), (w, t) \rangle_1$$

$$0 = 2(y_{k+2}t_{k+2} + y_{k+3}t_{k+3} + \cdots + y_nt_n - y_{n+1}t_{n+1}) = \langle (0, y), (w, t) \rangle_1$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle \nu(x, y), (w, t) \rangle_1 &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right), (w, t) \right\rangle_1 \\ &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, 0 \right) + \left(0, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right), (w, t) \right\rangle_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \langle (x, 0), (w, t) \rangle_1 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \langle (0, y), (w, t) \rangle_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} 0 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Proposición 1.1. *La diferencial de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal de T_xM en T_xM .*

Demostración. La linealidad es obvia, para demostrar esta proposición demostraremos que $d\nu_x(v) \in T_xM$ y $\langle d\nu_x(v), \nu(x) \rangle_1 = 0$. Sea $M \subset \mathbb{H}^n$ una hipervariiedad de $\mathbb{H}^n$, $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación de Gauss y $\alpha(t)$ una curva sobre M tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$, donde $v \in T_xM$. Por definición de la aplicación de Gauss tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \nu(x), \nu(x) \rangle_1 &= 1 \\ \frac{d}{dt} \left(\langle \nu(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)) \rangle_1 \right) \Big|_{t=0} &= 0 \\ 2 \left\langle \frac{d}{dt} \left(\langle \nu(\alpha(t)) \rangle_1 \right) \Big|_{t=0}, \nu(\alpha(t)) \right\rangle_1 &= 0 \\ \langle d\nu_x(v), \nu(x) \rangle_1 &= 0 \quad \text{entonces} \quad \nu(x) \perp d\nu_x(v). \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos por definición que:

$$\langle \nu(\alpha(t)), \alpha(t) \rangle_1 = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left(\langle \nu(\alpha(t)), \alpha(t) \rangle_1 \right) \right|_{t=0} &= 0 \\ \langle d\nu_x(v), x \rangle_1 + \langle \nu(x), v \rangle_1 &= 0 \quad \text{como } v \in T_x M, \text{ entonces } v \perp \nu(x) \text{ y así} \\ \langle d\nu_x(v), x \rangle_1 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que $d\nu_x(v) \in T_x M$. ■

Definición 1.2. Llamamos **Operador de Forma** de una hipersuperficie $M \subset \mathbb{H}^n$ a la aplicación lineal $A_x : T_x M \rightarrow T_x M$ definida por:

$$A_x(v) = -d\nu_x(v).$$

El operador A_x así definido es un operador simétrico, es decir $\langle A_x(v), w \rangle_1 = \langle v, A_x(w) \rangle_1$ donde v, w son vectores cualesquiera de $T_x M$.

Supongamos una parametrización $\psi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$ de una vecindad alrededor de un punto $x \in M$.

Sea $\psi(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^{n-1}) = m$ y consideremos las curvas sobre la superficie M dadas por $\alpha_i(t) = \psi(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^i + t, \dots, u_0^{n-1})$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$ sean $v = \alpha'_i(0) = \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u_0)$ y $w = \alpha'_j(0) = \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u_0)$.

Ahora, consideremos la curva sobre el espacio tangente $\beta(t)$ definida de la siguiente forma:

$$\beta(t) = \alpha'_j(t) = \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^i + t, \dots, u_0^{n-1}),$$

observe que $\beta(0) = \alpha'_j(0) = w$. Entonces tenemos que

$$\langle \nu(\alpha_i(t)), \beta(t) \rangle_1 = 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\langle \nu(\alpha_i(t)), \beta(t) \rangle_1) \right|_{t=0} &= 0 \\ \left\langle \left. \frac{d}{dt} (\nu(\alpha_i(t))) \right|_{t=0}, \beta(0) \right\rangle_1 + \left\langle \nu(m), \left. \beta'(t) \right|_{t=0} \right\rangle_1 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle d\nu_m(v), w \rangle_1 = -\langle \nu(m), \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_i}(0) \rangle_1 \quad (1.3)$$

Haciendo exactamente lo mismo intercambiando i con j tenemos que

$$\langle d\nu_m(w), v \rangle_1 = -\langle \nu(m), \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}(0) \rangle_1 \quad (1.4)$$

Entonces por (1.3) dado que $\psi(t)$ es de clase C^∞ se tiene que

$$\langle A_m(v), w \rangle_1 = \langle v, A_m(w) \rangle_1$$

así hemos demostrado que A_x es simétrico, luego por álgebra lineal A_x es diagonalizable lo cual implica que A_x tiene exactamente $n-1$ valores propios reales $\kappa_1(x), \kappa_2(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)$ que llamaremos **curvaturas principales** de M en el punto x , la **curvatura media** H en el mismo punto se define como el promedio de las curvaturas principales, es decir

$$H(x) = \frac{\kappa_1(x) + \kappa_2(x) + \kappa_3(x) + \dots + \kappa_{n-1}(x)}{n-1}$$

y la **norma del operador** A_x se define por

$$\|A_x\|^2 = \kappa_1(x)^2 + \kappa_2(x)^2 + \kappa_3(x)^2 + \dots + \kappa_{n-1}^2(x).$$

Para $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ tenemos que

$$A_x = -\frac{c}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} I$$

Donde I es una matriz cuadrada de orden $n-1$, así los valores propios de A_x para cualquier x son $\kappa_i(x) = -\frac{c}{\sqrt{(1+c^2)}}$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$ y por tanto:

$$H(x) = -\frac{c}{\sqrt{(1+c^2)}} \quad (1.5)$$

$$\|A_x\|^2 = \frac{c^2}{(1+c^2)}(n-1) \quad (1.6)$$

Son constantes para cada punto x de $\mathbb{H}^n(v, c)$.

Considerando la hipersuperficie $M_k(r)$ tenemos que la matriz asociada a la diferencial del operador de forma está dada por:

$$A(x, y) = - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} I_k & \\ & \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} I_l \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Por tanto, las curvaturas principales de M en (x, y) son $\kappa_i(x, y) = -\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}$ con $i=1, 2, \dots, k$ y $\kappa_j(x, y) = -\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ con $j=1, 2, \dots, l$ de donde:

$$H(x, y) = -\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \left(\frac{k}{n-1} \right) - \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \left(\frac{l}{n-1} \right) \quad (1.7)$$

$$\|A_{(x,y)}\|^2 = \frac{r^2}{1+r^2} k + \frac{1+r^2}{r^2} l \quad (1.8)$$

Son constantes para cada (x, y) en $M_k(r)$.

Definición 1.3. Una **conexión afín** $\bar{\nabla} : \chi(\mathbb{H}^n) \times \chi(\mathbb{H}^n) \rightarrow \chi(\mathbb{H}^n)$ definida sobre $\mathbb{H}^n$ en un punto $p \in \mathbb{H}^n$ está dada por:

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = dY_p(X_p) + \langle dY_p(X_p), P \rangle_1 P$$

$\chi(\mathbb{H}^n)$ denota el conjunto de campos vectoriales definidos sobre $\mathbb{H}^n$, X_p es el campo vectorial X evaluado en p y dY_p es la diferencial del campo vectorial Y en p .

Observe que esta conexión está bien definida ya que está dada en términos de la diferencial de un campo y la diferencial de un campo está bien definida. Para probar las propiedades de conexión, sean X, Y, Z campos vectoriales tangentes a $\mathbb{H}^n$ y f, g funciones diferenciables definidas sobre $\mathbb{H}^n$. Supongamos que la curva $\alpha(t)$ es diferenciable sobre $\mathbb{H}^n$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = f(p)X(p) + g(p)Y(p)$, entonces tenemos que:

1.

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{fX+gY}Z)_p &= dZ_p(fX_p + gY_p) + \langle dZ_p(fX_p + gY_p), P \rangle_1 P \\
&= f dZ_p(X_p) + g dZ_p(Y_p) + \langle f dZ_p(X_p) + g dZ_p(Y_p), P \rangle_1 P \\
&= f \left(dZ_p(X_p) + \langle dZ_p(X_p), P \rangle_1 P \right) + g \left(dZ_p(Y_p) + \langle dZ_p(Y_p), P \rangle_1 P \right) \\
&= (f \overline{\nabla}_X Z)_p + (g \overline{\nabla}_Y Z)_p
\end{aligned}$$

2. Aquí supongamos que $\alpha'(0) = X(p)$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_X(Y + Z) \right)_p &= (dY_p + dZ_p)(X_p) + \langle (dY_p + dZ_p)(X_p), P \rangle_1 P \\
&= dY_p(X_p) + dZ_p(X_p) + \langle (dY_p(X_p) + dZ_p(X_p)), P \rangle_1 P \\
&= \left(dY_p(X_p) + \langle dY_p(X_p), P \rangle_1 P \right) + \left(dZ_p(X_p) + \langle dZ_p(X_p), P \rangle_1 P \right) \\
&= (\overline{\nabla}_X Y)_p + (\overline{\nabla}_X Z)_p
\end{aligned}$$

3. Al igual que el paso anterior suponemos que $\alpha'(0) = X(p)$

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X fY)_p &= \frac{d}{dt} \left(f(\alpha(t))Y(\alpha(t)) + \langle f(\alpha(t))Y(\alpha(t)), P \rangle_1 P \right) \Big|_{t=0} \\
(\overline{\nabla}_X fY)_p &= \frac{d}{dt} \left(f(\alpha(t))Y(\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0} + \left\langle \frac{d}{dt} \left(f(\alpha(t))Y(\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0}, P \right\rangle_1 P \\
&= \frac{d}{dt} \left(f(\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0} Y(p) + f(p) \frac{d}{dt} \left(Y(\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0} \\
&\quad + \left\langle \frac{d}{dt} \left(f(\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0} Y(p) + f(p) \frac{d}{dt} \left(Y(\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0}, P \right\rangle_1 P
\end{aligned}$$

$$= (Xf)(p)Y_p + f(p)dY_p(X_p) + \langle (Xf)(p)Y_p + f(p)dY_p(X_p), P \rangle_1 P$$

$$= (Xf)(p) \left(Y_p + \langle Y_p, P \rangle_1 P \right) + f(p) \left(dY_p(X_p) + \langle dY_p(X_p), P \rangle_1 P \right)$$

$$(\bar{\nabla}_X fY)_p = (X(f)Y + f\bar{\nabla}_X Y)_p$$

Proposición 1.2. *La conexión $\bar{\nabla}$ es la conexión Levi Civita.*

Demostración. Demostremos que la conexión es simétrica:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X Y)_p - (\bar{\nabla}_Y X)_p &= dY_p(X_p) + \langle dY_p(X_p), P \rangle_1 P - dX_p(Y_p) - \langle dX_p(Y_p), P \rangle_1 P \\ &= dY_p(X_p) - dX_p(Y_p) + \langle (dY_p(X_p) - dX_p(Y_p)), P \rangle_1 P \\ &= (XY)_p - (YX)_p + \langle (XY)_p - (YX)_p, P \rangle_1 P \\ &= [X, Y]_p + \langle [X, Y]_p, P \rangle_1 P \\ &= [X, Y]_p + 0 \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

Ahora demostremos que $\bar{\nabla}$ es compatible con la métrica, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle_1(p) &= \langle dY_p(X_p) + \langle dY_p(X_p), P \rangle_1 P, Z_p \rangle_1 \\ \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle_1(p) &= \langle Y, dZ_p(X_p) + \langle dZ_p(X_p), P \rangle_1 P \rangle_1 \\ \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle_1(p) + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle_1(p) &= \langle dY_p(X_p) + \langle dY_p(X_p), P \rangle_1 P, Z_p \rangle_1 \\ &\quad + \langle Y, dZ_p(X_p) + \langle dZ_p(X_p), P \rangle_1 P \rangle_1 \\ \left(\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle_1 + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle_1 \right)(p) &= X \langle Y, Z \rangle_1(p) \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Resultados principales

En este capítulo consideramos una hipersuperficie $M \subset \mathbb{H}^n$ y empezaremos definiendo las funciones $l_w, f_w : M \rightarrow \mathbb{R}$, calcularemos el gradiente de ambas, luego mostraremos que cuando las definimos sobre $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ presentan la relación $f_w = \lambda l_w$ siempre que $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ sea perpendicular a $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Los toros de Clifford, es decir las hipersuperficies $M_k(r)$ tambien presentan la misma relación $f_w = \lambda l_w$. Posteriormente, demostraremos nuestro teorema principal que establece que estas hipersuperficies de $\mathbb{H}^n$ son las únicas con curvatura media constante donde la relación encontrada antes es posible.

Sea $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vector fijo, $M \subset \mathbb{H}^n$, $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación de Gauss y definamos las funciones $l_w, f_w : M \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$l_w(m) = \langle w, m \rangle_1 \quad y \quad f_w(m) = \langle w, \nu(m) \rangle_1.$$

Para nuestro caso, considerando nuestra hipersuperficie $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ tenemos que

$$f_w(m) = \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} \langle v + cm, w \rangle_1.$$

Si $c \neq 0$ y $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ es perpendicular a v , entonces como $l_w(m) = \langle m, w \rangle_1$ y $f_w(m) = \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} \langle v + cm, w \rangle_1$, se concluye que

$$f_w(m) = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} l_w(m)$$

Ahora considerando $M_k(r)$ y tomando $(w, 0) = (w_1, w_2, \dots, w_{k+1}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_{(w,0)}(x, y) &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} y \right), (w_1, w_2, \dots, w_{k+1}, 0, 0, \dots, 0) \right\rangle_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \langle (x, y), (w, 0) \rangle_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} l_{(w,0)}(x, y). \end{aligned}$$

De igual manera podemos obtener

$$f_{(0,t)}(x, y) = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} l_{(0,t)}(x, y).$$

ahora de manera general definiremos el concepto de vector gradiente sobre una hipersuperficie M contenida en $\mathbb{H}^n$ de la siguiente forma:

Definición 2.1. Sea $M \subset \mathbb{H}^n$ una hipersuperficie Riemanniana, X un campo vectorial tangente definido sobre M (es decir $X(p) \in T_p M$ para todo $m \in M$) y f una función diferenciable definida sobre M . Definimos la divergencia del campo X como la función $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\text{div}(X) = \text{traza de la aplicación lineal } Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)$ y el gradiente de f como el único campo vectorial ∇f sobre M dado por

$$\langle \nabla f(m), v \rangle_1 = df_m(v), \quad m \in M, v \in T_m M,$$

El operador lapaciano $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ lo definimos por $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$

Proposición 2.1. Sea $M \subset \mathbb{H}^n$ una hipersuperficie orientable, entonces:

1. $\nabla l_w(m) = w^\top$
2. $\nabla f_w(m) = -A_m(w^\top)$

Donde $w^\top$ y $w^\perp$ son la parte tangencial y normal de w con respecto a $T_m M$

Demostración.

1) Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una curva sobre M tal que $\alpha(0) = m$ y $\alpha'(0) = v$, con $v \in T_m M$.

Entonces:

$$\nabla_v(l_w)(m) = \frac{d}{dt} \left(\langle \alpha(t), w \rangle_1 \right) \Big|_{t=0} = \langle v, w \rangle_1 = \langle v, w^\perp + w^\top \rangle_1 = \langle v, w^\perp \rangle_1 + \langle v, w^\top \rangle_1 = \langle v, w^\top \rangle_1.$$

Así tenemos que $(\nabla l_w)(m) = w^\top$,

2) Tomando la curva $\alpha(t)$ que tenemos en 1) se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla_v f_w(m) &= \frac{d}{dt} \left(\langle w, \nu(\alpha(t)) \rangle_1 \right) \Big|_{t=0} \\ &= -\langle w, A_m(v) \rangle_1 \\ &= -\langle w^\perp + w^\top, A_m(v) \rangle_1, \\ &= -\langle w^\top, A_m(v) \rangle_1 \end{aligned}$$

y como A es simétrico tenemos que $\nabla_v f_w(m) = -\langle A_m(w^\top), v \rangle_1$ y en consecuencia

$$\nabla f_w(m) = -A_m(w^\top)$$

■

Prosigamos demostrando los siguientes lemas que serán necesarios en la demostración del teorema principal

Lema 2.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie suave y sea $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ una curva tal que:*

$$\alpha''(t) = f(t)\alpha'(t) + N(t),$$

donde $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave y $N : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un campo vectorial normal a lo largo de α , es decir $N(t)$ es perpendicular a $T_{\alpha(t)}M$. Asumimos que $|\alpha'(t)| \neq 0$ para cada $t \in (a, b)$. Si $s = s(t)$ es el parámetro de longitud de arco para α , entonces $\beta(s) = \alpha(t(s))$ satisface que $\beta''(s)$ es un campo vectorial normal a lo largo de β , es decir β es una geodésica en M .

Demostración Se tiene que

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|_1}$$

por lo tanto,

$$\beta''(s) = \alpha''(t(s))[t'(s)]^2 + \alpha'(t(s))t''(s) \quad (2.1)$$

Como

$$\alpha''(t(s)) = f(t(s))\alpha'(t(s)) + N(t(s))$$

Reemplazando en (2.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \beta''(s) &= [f(t(s))\alpha'(t(s)) + N(t(s))][t'(s)]^2 + \alpha'(t(s))t''(s) \\ &= f(t(s))\alpha'(t(s))[t'(s)]^2 + N(t(s))[t'(s)]^2 + \alpha'(t(s))t''(s) \\ &= f(t(s))\beta'(s)t'(s) + \alpha'(t(s))t''(s) + N(t(s))[t'(s)]^2 \\ &= f(t(s))\beta'(s)t'(s) + \frac{\beta'(s)}{t'(s)}t''(s) + N(t(s))[t'(s)]^2 \\ &= [f(t(s))t'(s) + \frac{t''(s)}{t'(s)}]\beta'(s) + N(t(s))[t'(s)]^2 \end{aligned}$$

Llamemos $g(s) = f(t(s))t'(s) + \frac{t''(s)}{t'(s)}$ y $G(s) = N(t(s))[t'(s)]^2$, por tanto tenemos $\beta''(s) = g(s)\beta'(s) + G(s)$. Como $G(s) = [t'(s)]^2 N(t(s))$ es perpendicular a $T_{\beta(s)}M$ se concluye que

$$2g(s) = 2\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle_1 = \langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle_1 + \langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle_1 = \frac{d}{ds} \left(\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 \right) = 0$$

Por tanto $\beta(s)$ es una geodésica. ■

Lema 2.2. Si $p_1(x) = b_1x + c_1$, $p_2(x) = b_2x + c_2$, $p_3(x) = b_3x + c_3, \dots, p_k(x) = b_kx + c_k$, son k polinomios de grado 1 con la propiedad de que $\frac{c_i}{b_i} \neq \frac{c_j}{b_j}$ siempre que $i \neq j$. Entonces los polinomios

$$q_i(x) = \prod_{j=1}^k p_j(x), \text{ tal que } j \neq i$$

Son linealmente independientes, más aún una ecuación de la forma

$$\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} = c$$

con c constante, no es verdadera a no ser que cada a_i y c sea cero.

Demostración Por la condición sobre los números $\frac{c_i}{b_i}$ se tiene que si $x = -\frac{c_i}{b_i}$ entonces cada polinomio q_j se anula excepto el polinomio q_i . Por lo tanto, si

$$\alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x) + \cdots + \alpha_k q_k(x) = 0$$

Tomando $x = -\frac{c_i}{b_i}$ se tiene que $\alpha_i = 0$. Por lo tanto, los polinomios q_i son linealmente independientes.

Por otro lado, note que la segunda ecuación en el lema puede ser escrita como

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 + \cdots + a_k q_k = cR$$

donde R es un polinomio de grado k . Como la expresión de la izquierda de la última ecuación es un polinomio de grado $k - 1$. Entonces se debe dar que la constante c del lado derecho debe ser cero. Por tanto, la segunda parte del lema se sigue por la independencia de los polinomios. ■

2.1. Demostración del teorema principal

Teorema 2.1. *Sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{H}^n$ una inmersión con curvatura media constante de una variedad orientada n -dimensional. Si para algún vector no nulo $v \neq 0$ y para algún número real λ , tenemos que $l_v = \lambda f_v$, entonces $\phi(M)$ es una hipersuperficie $\mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ o una hipersuperficie $M_k(r)$.*

Demostración Como los argumentos son locales y la tesis del teorema es sobre $\phi(M)$ y no sobre M , identificamos M con $\phi(M)$ y $T_x M$ con $T_{\phi(x)} M$.

Si multiplicamos la ecuación $l_v = \lambda f_v$ por una constante apropiada podemos asumir que $\|v\|_1 = 1$.

Supongamos que l_v no es constante, pues de ser así $\phi(M) \subset \mathbb{H}^{n-1}(v, c)$ para algún c , ya que:

$$M = \{x \in \mathbb{H}^n : \langle x, v \rangle_1 = c\}$$

lo que implica por la completez de M que $\phi(M) = \mathbb{H}^n(v, c)$.

Retomando nuestro supuesto inicial de que l_v no es constante, entonces $\lambda \neq 0$ y sea $x \in M$ tal que $\nabla l_v(x) = v^\top(x)$ no es nulo. Luego como

$$l_v(x) = \lambda f_v(x),$$

entonces tomando el gradiente a ambos lados de esta ecuación y reemplazando la condición $\nabla l_v(x) = v^\top(x)$ obtenemos que

$$\lambda^{-1}v^\top(x) = \nabla f_v(x)$$

así por proposición (2.1) tenemos que $\nabla f_v(x) = -A(v^\top)$ entonces:

$$A(v^\top(x)) = -\lambda^{-1}v^\top(x). \quad (2.2)$$

Sea $\alpha(t)$ una curva integral del campo vectorial $v^\top(x)$ tal que $\alpha(0) = x$. Puesto que $\alpha'(t) = v^\top(\alpha(t))$, entonces:

$$\alpha'(t) = v + l_v(\alpha(t))\alpha(t) - f_v(\alpha(t))\nu(\alpha(t))l_v(\alpha(t)) \quad (2.3)$$

y como $f_v(\alpha(t)) = \lambda^{-1}l_v(\alpha(t))$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= v + l_v(\alpha(t))\alpha(t) - \lambda^{-1}l_v(\alpha(t))\nu(\alpha(t)) \\ &= v + l_v(\alpha(t))\left(\alpha(t) - \lambda^{-1}\nu(\alpha(t))\right) \end{aligned}$$

luego derivando

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \frac{d}{dt}\left(l_v(\alpha(t))\left(\alpha(t) - \lambda^{-1}\nu(\alpha(t))\right) + l_v(\alpha(t))\alpha'(t) - \lambda^{-1}\frac{d}{dt}\left(\nu(\alpha(t))\right)\right) \\ &= \langle \nabla l_v(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle_1 \left(\alpha(t) - \lambda^{-1}\nu(\alpha(t))\right) + l_v(\alpha(t))\left(\alpha'(t) + \lambda^{-1}A(\alpha'(t))\right) \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_1 \alpha(t) - \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_1 \lambda^{-1}\nu(\alpha(t)) + l_v(\alpha(t))\alpha'(t) + l_v(\alpha(t))\lambda^{-1}A(\alpha'(t)) \\ \alpha''(t) &= \|\alpha'(t)\|^2 \alpha(t) - \|\alpha'(t)\|^2 \lambda^{-1}\nu(\alpha(t)) + l_v(\alpha(t))\alpha'(t) + l_v(\alpha(t))\lambda^{-1}A(v^\top(\alpha(t))) \end{aligned}$$

Y reemplazando (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned}
\alpha''(t) &= \|\alpha'(t)\|^2 \alpha(t) - \|\alpha'(t)\|^2 \lambda^{-1} \nu(\alpha(t)) + l_v(\alpha(t)) \alpha'(t) - \lambda^{-2} l_v(\alpha(t)) v^\top(\alpha(t)) \\
&= \|\alpha'(t)\|^2 \left(\alpha(t) - \lambda^{-1} \nu(\alpha(t)) \right) + l_v(\alpha(t)) (1 - \lambda^{-2}) \alpha'(t) \\
&= l_v(\alpha(t)) (1 - \lambda^{-2}) \alpha'(t) + \|\alpha'(t)\|^2 \left(\alpha(t) - \lambda^{-1} \nu(\alpha(t)) \right) \\
&= f(t) \alpha'(t) + N(t)
\end{aligned}$$

donde $f(t) = l_v(\alpha(t))(1 - \lambda^{-2})$ y $N(t) = \|\alpha'(t)\|_1^2 \left(\alpha(t) - \lambda^{-1} \nu(\alpha(t)) \right)$. Luego si $s = s(t)$ es el parámetro de longitud de arco para la curva α con $s(0) = 0$ y $t = t(s)$ es la función inversa de $s = s(t)$, por lema (2.1) tenemos que $\beta(s) = \alpha(t(s))$ es una geodésica. Como $\beta''(s)$ es perpendicular a $T_{\beta(s)}M$ tenemos que:

$$\beta''(s) = -\langle \beta''(s), \beta(s) \rangle_1 \beta(s) + \langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle_1 \nu(\beta(s)) \quad (2.4)$$

Observe que como $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \beta''(s), \beta(s) \rangle_1 + \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 &= 0 \\
\langle \beta''(s), \beta(s) \rangle_1 + 1 &= 0 \\
\langle \beta''(s), \beta(s) \rangle_1 &= -1
\end{aligned}$$

y también partiendo de que $\langle \beta'(s), \nu(\beta(s)) \rangle_1 = 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle_1 - \langle \beta'(s), A(\beta'(s)) \rangle_1 &= 0 \\
\langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle_1 - \langle \beta'(s), -\lambda^{-1} \beta'(s) \rangle_1 &= 0 \\
\langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle_1 + \lambda^{-1} \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 &= 0 \\
\langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle_1 &= -\lambda^{-1}
\end{aligned}$$

y así, reemplazando estos valores en (2.4) tenemos que:

$$\beta''(s) = \beta(s) - \lambda^{-1} \nu(\beta(s)) \quad (2.5)$$

Ahora derivando de nuevo la ecuación (2.8) tenemos que:

$$\left(\beta'(s)\right)'' = \beta'(s) + \lambda^{-1}A(\beta'(s)) \quad (2.6)$$

$$\left(\beta'(s)\right)'' = \beta'(s) - \lambda^{-2}\beta'(s) \quad (2.7)$$

$$\left(\beta'(s)\right)'' = (1 - \lambda^{-2})\beta'(s). \quad (2.8)$$

Observe que se dan tres casos para $1 - \lambda^{-2}$ que son:

$$1 - \lambda^{-2} < 0, \quad 1 - \lambda^{-2} = 0, \quad 1 - \lambda^{-2} > 0.$$

Caso 1: $(1 - \lambda^{-2} < 0)$

Sea $-\rho^2 = 1 - \lambda^{-2} < 0$, así vemos que la ecuación (2.8) se convierte en

$$(\beta'(s))'' = -\rho^2\beta'(s)$$

Esto implica que $\beta'(s)$ se mueve a lo largo de un círculo y entonces una solución de esta ecuación diferencial es:

$$\beta(s) = \rho^{-1} \sin(\rho s) \beta'(0) + \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) \beta''(0) + \beta(0) \quad (2.9)$$

y por lo tanto

$$\beta'(s) = \cos(\rho s) \beta'(0) + \rho^{-1} \sin(\rho s) \beta''(0)$$

De la definición tenemos que:

$$\beta(0) = x, \quad \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|_1} = \frac{v^\top(x)}{\|v^\top(x)\|_1} \quad \text{y} \quad \langle \beta'(0), \beta'(0) \rangle_1 = 1,$$

y usando (2.5) concluimos que:

$$\langle \beta''(0), \beta'(0) \rangle_1 = \langle \beta''(0), v^\top(x) \rangle_1 = 0, \quad \langle \beta''(0), \beta''(0) \rangle_1 = \rho^2 \quad \text{y} \quad \langle \beta''(0), \beta(0) \rangle_1 = -1.$$

con estos valores obtenemos que $\|\beta'(s)\|_1 = 1$ y que $\|\beta(s)\|_1 = -1$, Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
l_v(\beta(s)) &= \langle \beta(s), v \rangle_1 \\
&= \langle \rho^{-1} \sin(\rho s) \beta'(0) + \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) \beta''(0) + \beta(0), v \rangle_1 \\
&= \rho^{-1} \sin(\rho s) \langle \beta'(0), v \rangle_1 + \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) \langle \beta''(0), v \rangle_1 + \langle \beta(0), v \rangle_1 \\
&= \rho^{-1} \sin(\rho s) \|v^\top(x)\|_1 + \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) \langle \beta(0) - \lambda^{-1} \nu(\beta(0), v \rangle_1 + l_v(x) \\
&= \rho^{-1} \sin(\rho s) \|v^\top(x)\|_1 + \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) (l_v(x) - \lambda^{-1} f_v(x)) + l_v(x) \\
&= \rho^{-1} \sin(\rho s) \|v^\top(x)\|_1 + \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) (1 - \lambda^{-2}) l_v(x) + l_v(x) \\
&= \rho^{-1} \sin(\rho s) \|v^\top(x)\|_1 - \rho^{-2} (1 - \cos(\rho s)) \rho^2 l_v(x) + l_v(x) \\
l_v(\beta(s)) &= \rho^{-1} \sin(\rho s) \|v^\top(x)\|_1 + \cos(\rho s) l_v(x).
\end{aligned}$$

Pero, como tenemos que $v^\top(x) = v + l_v(x) - f_v(x)\nu(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|v^\top(x)\|_1^2 &= \langle v + l_v(x)x - f_v(x)\nu(x), v + l_v(x)x - f_v(x)\nu(x) \rangle_1 \\
&= 1 + (1 - \lambda^{-2})[l_v(x)]^2 \\
&= 1 - \rho^2[l_v(x)]^2.
\end{aligned}$$

Y como $-\rho^2 < 0$, tiene sentido la circunferencia

$$\|v^\top(x)\|_1^2 + \rho^2[l_v(x)]^2 = 1$$

Luego es posible encontrar un $s_1 \in (-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho})$ tal que:

$$-\rho l_v(x) = \cos(\rho s_1) \quad \text{y} \quad \|v^\top(x)\|_1 = \sin(\rho s_1). \quad (2.10)$$

por lo tanto volviendo a $l_v(\beta(s))$ y reemplazando (2.10) tenemos que

$$l_v(\beta(s)) = \rho^{-1} \sin(\rho s) \sin(\rho s_1) + \rho^{-1} \cos(\rho s) \cos(\rho s_1) \quad (2.11)$$

$$= \rho^{-1} \cos(\rho s - \rho s_1) \quad (2.12)$$

Si $s \in (0, s_1)$, observe que $l_v(\beta(s)) \neq \pm \rho^{-1}$ y por lo tanto $\|v^\top(x)\|_1 \neq 0$ y entonces $\beta(s)$ está en la curva integral del campo $v^\top(x)$ y por lo tanto $\beta(s)$ también está en M . En

particular $\beta(s_1) \in M$, $l(\beta(s_1)) = 0$ y $N = l_v^{-1}(0)$ es diferente de vacío.

De ahora en adelante, consideramos que x es un punto de N , es decir $l_v(x) = 0$.

Observe que N es una variedad de dimensión $n - 2$ de $\mathbb{H}^n$ ya que 0 es un valor regular de la función $l_v(x)$. Más aún, para todo $x \in N$ tenemos que

$$\nabla l_v(x) = v + l_v(x)x - f_v(x)\nu(x) = v$$

es un vector constante pues $l_v(x) = 0$ y por lo tanto N es una hipersuperficie totalmente geodésica de M . En particular, todas las curvaturas principales de N son también curvaturas principales de M , y también tenemos que para todo $x \in N$, $v \in T_x M$ y $A_x(v) = \lambda^{-1}v$, por lo tanto, podemos tomar todos los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-2}$ en $T_x M$ ortogonales a v , tal que $A_x(v_i) = -\lambda_i v_i$.

Como los v_i son perpendiculares a $v = \nabla l_v(x)$, entonces ellos forman una base para $T_x N$ y como N es totalmente geodésica, se tiene que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$ son curvaturas principales de M en el punto x .

Bajo el supuesto de que $x \in N$, tenemos que $\beta'(0) = v$, $\beta''(0) = x - \lambda^{-1}\nu(x)$ y reemplazando estos valores en la ecuación (2.21) tenemos que

$$\beta(s) = \rho^{-1}v \sin(\rho s) - \rho^{-2}(x - \lambda^{-1}\nu(x)) \cos(\rho s) + x + \rho^{-2}(x - \lambda^{-1}\nu(x)) \quad (2.13)$$

Derivando dos veces la ecuación (2.13)

$$\beta''(s) = -\rho v \sin(\rho s) + (x - \lambda^{-1}\nu(x)) \cos(\rho s). \quad (2.14)$$

e igualando con (2.5) obtenemos:

$$\nu(\beta(s)) = \lambda \beta(s) + \lambda \rho v \sin(\rho s) - (\lambda x - \nu(x)) \cos(\rho s) \quad (2.15)$$

Recordemos que si $s \in (-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho})$ $\gamma(t)$ es una curva suave en N tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = v_i$, entonces por (2.13) obtenemos la curva:

$$\gamma_s(t) = \rho^{-1}v \sin(\rho s) - \rho^{-2}(\gamma(t) - \lambda^{-1}\nu(\gamma(t))) \cos(\rho s) + \gamma(t) + \rho^{-2}(\gamma(t) - \lambda^{-1}\nu(\gamma(t))).$$

Pero observe que $\gamma(t)$ es una curva en M tal que $\gamma_s(0) = \beta(s)$ y derivando esta curva

$$\gamma'_s(t) = -\rho^{-2}(\gamma'(t) + \lambda^{-1}A(\gamma'(t))) \cos(\rho s) + \gamma'(t) + \rho^{-2}(\gamma'(t) + \lambda^{-1}A(\gamma'(t))).$$

y evaluando en $t = 0$ obtenemos:

$$\gamma'_s(0) = -\rho^{-2} \left(v_i + \lambda^{-1} A(v_i) \right) \cos(\rho s) + v_i + \rho^{-2} \left(v_i + \lambda^{-1} A(v_i) \right).$$

Puesto que $A(v_i) = \lambda_i v_i$, reemplazando y factorizando v_i obtenemos:

$$\gamma'_s(0) = \left(-\rho^{-2}(1 + \lambda^{-1}\lambda_i) \cos(\rho s) + 1 + \rho^{-2}(1 + \lambda^{-1}\lambda_i) \right) v_i. \quad (2.16)$$

Reemplazando en la ecuación anterior $\rho^2 = \lambda^{-2} - 1$ y simplificando en (2.16) se sigue que

$$\gamma'_s(0) = \left(\frac{-\lambda(\lambda + \lambda_i) \cos(\rho s) + (1 + \lambda\lambda_i)}{1 - \lambda^2} \right) v_i \quad (2.17)$$

por lo tanto, esto implica que estos vectores están $T_{\beta(s)}M$, ya que por continuidad, como la ecuación

$$-\lambda(\lambda + \lambda_i) \cos(ws) + (1 + \lambda\lambda_i) = 0$$

tiene un número finito de soluciones, sobre $(-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho})$ se concluye que los vectores v_i están en $T_{\beta(s)}M$ para todo $s \in (-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho})$.

Recordemos que $-\lambda^{-1}$ es una curvatura principal de M en $\beta(s)$. Para calcular las otras $n - 2$ curvaturas principales, usaremos la ecuación (2.15), evaluada en $\gamma_s(t)$ es decir:

$$\nu(\gamma_s(t)) = \lambda\gamma_s(t) + \lambda\rho v \sin(\rho s) - (\lambda\gamma(t) - \nu(\gamma(t)) \cos(\rho s)) \quad (2.18)$$

Calculando el diferencial evaluado en $\gamma'_s(0)$, teniendo en cuenta que $\gamma'(0) = v_i$, usando (2.18) y simplificando obtenemos:

$$d\nu(\gamma'_s(0)) = -\lambda\gamma'_s(0) + \lambda \left(\gamma'(0) - \lambda^{-1} d\nu(\gamma'(0)) \right) \cos(\rho s)$$

$$A_{\beta(s)}(v_i) = \left[-\lambda + \frac{(1 - \lambda^2)\lambda(1 + \lambda^{-1}\lambda_i) \cos(\rho s)}{-\lambda(\lambda + \lambda_i) \cos(\rho s) + (1 + \lambda\lambda_i)} \right] v_i$$

Es decir que las otras $n - 2$ curvaturas principales de M en $\beta(s)$ son:

$$\lambda_i(\beta(s)) = -\lambda + \frac{(1 - \lambda^2)\lambda(1 + \lambda^{-1}\lambda_i) \cos(\rho s)}{-\lambda(\lambda + \lambda_i) \cos(\rho s) + (1 + \lambda\lambda_i)} \quad (2.19)$$

Observe que cuando $s = 0$, es decir en x , tenemos que $\lambda_i(x) = \lambda_i$ para todo $x \in M$, y si $\lambda_i = -\lambda^{-1}$, entonces $\lambda_i(\beta(s)) = -\lambda^{-1}$, es decir sería constante para todo s .

y ahora como por hipótesis M tiene curvatura media constante y N es una hipersuperficie de $\mathbb{H}^{n-1}(v, 0)$, entonces si todas las curvaturas principales de N son constantes y son iguales a λ o a λ^{-1} entonces M es una hipersuperficie de Clifford en el caso en que N toma ambos valores ó es un hiperboloide totalmente umbilico si las curvaturas principales de N son iguales a $-\lambda^{-1}$.

Usando que los puntos $\beta(s)$ son puntos de $\phi(M)$, entonces $\phi(M)$ debe estar contenido en $\mathbb{H}^{n-1}(v, 0)$ o en $M_k(r)$ y como M es completa, entonces $\phi(M)$ debe ser $\mathbb{H}^{n-1}(v, 0)$ o en $M_k(r)$. Aquí se teminaría la prueba si las curvaturas principales de N son $-\lambda^{-1}$ o λ . Si las curvaturas principales de N no son $-\lambda^{-1}$ o λ , entonces como la curvatura media es constante, tendríamos por (2.19) que:

$$\frac{a_1}{\lambda(\lambda + \lambda_1) \cos(ws) - (1 + \lambda\lambda_1)} + \cdots + \frac{a_j}{\lambda(\lambda + \lambda_j) \cos(ws) - (1 + \lambda\lambda_j)} = \text{constante}$$

Donde $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ son las curvaturas principales de N que no son iguales a $-\lambda^{-1}$ o a λ_i , pero esto no puede ser, pues esta ecuación contradice el **lema 2.2**, ya que puede verificarse que si $\lambda_i \neq \lambda_l$, entonces $\frac{1 + \lambda\lambda_i}{\lambda(\lambda - \lambda_i)} \neq \frac{1 + \lambda\lambda_l}{\lambda(\lambda - \lambda_l)}$, por lo tanto, se demostraria el teorema.

Caso 2 ($\lambda = \pm 1$)

La ecuación (2.8) se transforma en:

$$\left(\beta'(s)\right)'' = 0$$

y entonces $\beta''(s) = \vec{a}$ y por lo tanto $\beta'(s) = \vec{a}s + \vec{b}$. Pero como $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 = 1$ debe darse para todo s , entonces $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_1 s^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_1 s + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_1 = 1$ lo que implica que $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_1 = 0$, $\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_1 = 1$ y $\beta'(s) = \vec{b}$ y por lo tanto $\beta(s) = \vec{a}s^2 + \vec{b}s + c$ y cómo $\beta(0) = x$, entonces $\vec{c} = x$ y por lo tanto, $\beta(s) = \vec{a}s^2 + \vec{b}s + x$. Como $\beta(s)$ debe satisfacer que

$\langle \beta(s), \beta(s) \rangle_1 = -1$ para todo s , pero

$$\begin{aligned}\langle \beta(s), \beta(s) \rangle_1 &= \langle a, a \rangle_1 s^4 + 2\langle a, b \rangle_1 s^3 + \langle b, b \rangle_1 s^2 + 2(\langle a, x \rangle_1 + \langle b, x \rangle_1)s - 1 \\ &= s^2(\langle a, a \rangle_1 s^2 + 2\langle a, b \rangle_1 s + \langle b, b \rangle_1) + 2(\langle a, x \rangle_1 + \langle b, x \rangle_1)s - 1 \\ &= s^2 + 2\langle a + b, x \rangle_1 s - 1\end{aligned}$$

y es imposible que sea igual a -1 para todo s , ya que solo alcanza esos valores en $s = 0$ y en $s = -2\langle a + b, x \rangle_1$. Por lo tanto, $\lambda \neq \pm 1$

Caso 3

Volviendo a la ecuación (2.8) y sabiendo que $1 - \lambda^{-2} > 0$, tenemos que el vector $\beta'(s)$ se mueve a lo largo de una hipérbola.

Definamos $\rho = \sqrt{1 - \lambda^{-2}}$, entonces una solución de la ecuación diferencial (2.8) es:

$$\beta'(s) = \beta'(0) \cosh(\rho s) + \rho^{-1} \beta''(0) \sinh(\rho s). \quad (2.20)$$

Integrando de nuevo tenemos que

$$\beta(s) = \rho^{-1} \beta'(0) \sinh(\rho s) + \rho^{-2} \beta''(0) \cosh(\rho s) + \beta(0) - \rho^{-2} \beta''(0), \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\langle \beta''(0), \beta'(0) \rangle_1 &= \langle \beta''(0), v^\top(x) \rangle_1 = 0, \quad \langle \beta''(0), \beta''(0) \rangle_1 = -\rho^2 \\ \langle \beta''(0), \beta(0) \rangle_1 &= -1, \quad \langle \beta'(0), \beta(0) \rangle_1 = 0.\end{aligned}$$

ambas satisfacen que $\|\beta'(s)\|_1 = 1$ y que $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle_1 = -1$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Así:

$$\begin{aligned}l_v(\beta(s)) &= \langle \rho^{-1} \beta'(0) \sinh(\rho s) + \rho^{-2} \beta''(0) \cosh(\rho s) + \beta(0) - \rho^{-2} \beta''(0), v \rangle_1 \\ &= \rho^{-1} \sinh(\rho s) \langle \beta'(0), v \rangle_1 + \rho^{-2} \cosh(\rho s) \langle \beta''(0), v \rangle_1 + \langle \beta(0), v \rangle_1 - \rho^{-2} \langle \beta''(0), v \rangle_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_v(\beta(s)) &= \rho^{-1} \sinh(\rho s) \|v^\top(x)\| + \rho^{-2} \cosh(\rho s) \langle \beta(0) - \lambda^{-1} \nu(\beta(0)), v \rangle_1 + l_v(x) \\
&\quad - \rho^{-2} \langle \beta(0) - \lambda^{-1} \nu(\beta(0)), v \rangle_1 \\
&= \rho^{-1} \sinh(\rho s) \|v^\top(x)\| + \rho^{-2} \cosh(\rho s) l_v(x) - \rho^{-2} \cosh(\rho s) \lambda^{-2} l_v(x) + l_v(x) \\
&\quad - \rho^{-2} l_v(x) + \rho^{-2} \lambda^{-2} l_v(x) \\
l_v(\beta(s)) &= \rho^{-1} \sinh(\rho s) \|v^\top(x)\| + \rho^{-2} \cosh(\rho s) (1 - \lambda^{-2}) l_v(x) + l_v(x) - \rho^{-2} (1 - \lambda^{-2}) l_v(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$l_v(\beta(s)) = \rho^{-1} \sinh(\rho s) \|v^\top(x)\| + \cosh(\rho s) l_v(x). \quad (2.22)$$

Por otro lado, sabemos que

$$v^\top(x) = v + l_v(x)x - f_v(x)\nu(x) \quad \text{para todo } x \in M$$

Y teniendo en cuenta que $\|v\|_1 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|v^\top(x)\|_1^2 &= \langle v + l_v(x)x - f_v(x)\nu(x), v + l_v(x)x - f_v(x)\nu(x) \rangle_1 \\
&= 1 + [l_v(x)]^2 - [f_v(x)]^2 \\
&= 1 + ([l_v(x)]^2 - [\lambda^{-1} l_v(x)]^2) \\
&= 1 + (1 - \lambda^{-2}) [l_v(x)]^2 \\
\|v^\top(x)\|_1^2 &= 1 + \rho^2 [l_v(x)]^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho^2 [l_v(x)]^2 - \|v^\top(x)\|_1^2 = -1$$

Pero existe un $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$-\rho l_v(x) = \sinh(\rho s_1), \quad \|v^\top(x)\| = \cosh(\rho s_1)$$

Entonces reemplazando estos valores en (2.22) tenemos que:

$$l_v(\beta(s)) = \rho^{-1} \sinh(\rho s) \cosh(\rho s_1) - \rho^{-1} \cosh(\rho s) \sinh(\rho s_1) \quad (2.23)$$

$$l_v(\beta(s)) = \rho^{-1} \sinh(\rho(s - s_1)) \quad (2.24)$$

Vemos que si $s \in (-s_1, s_1)$ entonces $l_v(\beta(s)) \neq \pm \rho^{-1}$. Si $s \in (0, s_1)$, observe que $l_v(\beta(s)) \neq \pm \rho^{-1}$ y por lo tanto $\|v^\top(x)\|_1 \neq 0$ y entonces $\beta(s)$ está en la curva integral del campo $v^\top(x)$ y por lo tanto $\beta(s)$ también está en M . En particular $\beta(s_1) \in M$, $l(\beta(s_1)) = 0$ y $N = l_v^{-1}(0)$ es diferente de vacío. El argumento de la prueba es igual al del caso 1 y los cálculos son casi idénticos.

Bibliografía

- [1] Alias, L., Brasil, A. & Perdomo, O. *Characterization of quadric constant mean curvature hypersurfaces of spheres*. 2000 Mathematics Subject Classification, 2008.
- [2] Alias, L., Brasil, A. & Perdomo, O. *On the stability index of hypersurface with constant mean curvature in spheres*. Proc. Am. Math. Soc. 135, 3685–3693 (2007)
- [3] Alias, L. *On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurface in spheres*, 2000 Mathematics Subject Classification, 2005.
- [4] F.Urbano, *Minimal surface with low in the three-dimensional sphere*. Proc. Amer. Math. Soc. **108** 1990, pp 989-992.
- [5] I. Guadalupe, A. Brasil, Jr., and J.A. Delgado. *A characterization of the Clifford torus*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 48 (1999), 537-540.
- [6] John M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to curvature*, Graduate Texts In Mathematics. Springer Verlag, 1997.
- [7] J. Simons, *Minimal Varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), pp 62-105.
- [8] Manfredo Perdigão DoCarmo. *Geometría Riemanniana*. Tercera edición, Proyecto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA 2005.
- [9] Perdomo, O. *Low index minimal hypersurfaces of spheres*. Asian J. Math **5** 2001, pp 741-749.