



Heurísticas que usan los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle para resolver problemas relacionados con el juego equitativo.

Jeisson Miranda Fajardo.
Jorge Mario González Restrepo.

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía.
Licenciatura en Matemáticas y Física.
2023.



Heurísticas que usan los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle para resolver problemas relacionados con el juego equitativo.

Jeisson Miranda Fajardo.

Jorge Mario González Restrepo.

DIRECTOR:

Mg. Diego Díaz Manrique.

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía.

Licenciatura en Matemáticas y Física.

2023.

Agradecimientos.

En este apartado, deseamos expresar nuestro sincero agradecimiento al profesor Diego Díaz Manrique, profesor del área de educación matemática de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y quien fue nuestro director de trabajo de grado, por su constante disposición para brindarnos su apoyo, aclarar nuestras inquietudes, ofrecer valiosas recomendaciones y aportar ideas que enriquecieron significativamente este trabajo.

También, nos gustaría extender nuestra gratitud a nuestros evaluadores, los profesores Gabriel Conde, profesor de la Escuela de Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Valle, y a Jhonatan Posso, profesor del área de educación matemática de la Facultad de Educación y Pedagogía de la misma Universidad, por sus excelentes comentarios y observaciones que desempeñaron un papel fundamental en la mejora y desarrollo de este trabajo.

Resumen.

En este trabajo de grado se pretende caracterizar las principales heurísticas y sesgos utilizados por los estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle al resolver un cuestionario ya validado usado en la investigación de (Guerrero et al., 2017) en estudiantes de bachillerato, dicho cuestionario contiene dos problemas con dos ítems cada uno sobre el juego equitativo.

Para la recolección de los datos el cuestionario se aplicó en una muestra de veinte estudiantes del curso de didáctica III que se oferta en sexto semestre de la licenciatura en matemáticas para el análisis de los resultados se tomaron de manera no aleatoria a seis de ellos por lo interesante de sus respuestas, a dichos estudiantes se les realizó una entrevista semiestructurada las cuales fueron grabadas para su posterior análisis cualitativo,

Para el análisis de sus respuestas se tuvo en cuenta los trabajos realizados por (Tversky y Kahneman, 1974), (Tversky y Kahneman, 1982), sobre heurísticas y sesgos, (Lecoutre, 1992) sobre el sesgo de equiprobabilidad y el trabajo de (Díaz, D. 2013) sobre el surgimiento de la idea de juego justo.

Como resultado de este estudio, se pudo identificar que el sesgo de equiprobabilidad fue el más recurrente entre los participantes, y la heurística de representatividad también se manifestó de manera significativa en sus respuestas.

Palabras clave; Heurísticas. Sesgos. Juego justo. Docentes en formación.

Abstract.

This degree work aims to characterize the main heuristics and biases used by students of the degree in mathematics of the Universidad del Valle when solving an already validated questionnaire used in the research of (Guerrero et al., 2017) in high school students, said questionnaire contains two problems with two items each on fair play.

To collect the data, the questionnaire was applied to a sample of twenty students of the didactics III course offered in the sixth semester of the degree in mathematics. For the analysis of the results, six of them were taken in a non-random manner. interesting from their responses, a semi-structured interview was conducted with these students, which were recorded for subsequent qualitative analysis.

For the analysis of their responses, the work carried out by (Tversky and Kahneman, 1974), (Tversky and Kahneman, 1982), on heuristics and biases, (Lecoutre, 1992) on equiprobability bias and the work of (Díaz, D. 2013) on the emergence of the idea of fair play were considered.

As a result of this study, it was possible to identify that equiprobability bias was the most recurrent among participants, and representativeness heuristics also manifested significantly in their responses.

Keywords: Heuristics. Biases. Fair play. Teachers in training.

Contenido

Contenido	
Agradecimientos.....	3
Resumen.....	4
Abstract.....	5
Índice de Tablas	7
Índice de Figuras.....	7
Introducción.....	8
Capítulo I: Problemática	12
Descripción del Problema	12
Pregunta problema.....	17
Objetivos	17
Objetivos específicos.....	17
Justificación.....	18
Capítulo II: Marco teórico	22
Marco teórico.....	22
Heurísticas y sesgos.....	22
Heurística de representatividad.....	23
Insensibilidad al tamaño de la muestra.....	23
Concepciones erróneas sobre el azar.....	24
Falacia de la Conjunción	25
Sesgo de Equiprobabilidad.....	26
Juego justo o equitativo.....	26
Capítulo III: Metodología.....	28
Metodología	28
Tipo de investigación.....	28
Caracterización de la población.....	29
Análisis a Priori.....	29
Análisis a priori problema 1	30
Análisis a priori problema 2	32
Aplicación del Instrumento.....	35
Análisis de resultados	36
Entrevista Semiestructurada	36
Capítulo IV: Presentación de resultados.....	38

Análisis.....	38
Anexos.	57
Referencias.....	62

Índice de Tablas

Tabla 1: Análisis a priori del cuestionario.	33
Tabla 2: Rejilla de Análisis.....	48

Índice de Figuras.

Figura 1: Cuestionario. Tomado de: Adaptación realizada de Guerrero.	30
Figura 2: Comparación de estudiantes que han visto estadística.	38
Ilustración 3:Tomado del cuestionario.....	40

Introducción.

Este trabajo de grado tiene como finalidad identificar y caracterizar los principales sesgos y heurísticas que presentan un grupo de estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle, al responder un cuestionario con situaciones que involucran el juego equitativo o juego justo.

Realizar esta investigación es importante porque la formación de docentes de matemáticas debe orientarse también al desarrollo del pensamiento aleatorio como aspecto fundamental en la actual sociedad que vive una era digital sin precedentes en la historia de la humanidad, el surgimiento de la cuarta revolución industrial, la inteligencia artificial y la realidad aumentada solo pudo emerger por el inmenso avance en las ciencias de la computación y el procesamiento de grandes volúmenes de datos.

Wilmer López, decano del programa de ingeniería de sistemas de la Universidad Sergio Arboleda, afirma que esta revolución no tiene vuelta atrás, la sociedad está en un proceso de digitalización cada vez más acelerado, cada día habrá más dispositivos digitales con mayor capacidad de transmisión de datos, el ser humano debe asumir este desafío que le plantea el mundo digital.

El desarrollo del pensamiento aleatorio solo es posible si los profesores tienen una buena fundamentación en sus cursos de probabilidad y estadística que permita desarrollar en ellos este pensamiento que posteriormente habrán de compartir con sus estudiantes en el colegio, estudiantes que el colegio debe preparar para hacer frente a esta realidad de un mundo cada vez más digitalizado y que impone nuevos desafíos, pero en su formación los profesores suelen presentar muchos vacíos y cometer errores al momento de enseñar probabilidad (León, J. 2017).

En este sentido es importante identificar y caracterizar, dentro del cúmulo de situaciones que circundan el pensamiento aleatorio, lo inherente a las intuiciones y sesgos alrededor de los juegos equitativos por este motivo se hace necesario llevar a cabo esta investigación ya que permite identificar razonamientos intuitivos, creencias y sesgos alrededor de los juegos equitativos por parte de los estudiantes y generar una concientización de la presencia de este tipo de razonamientos que suelen llevar a errores sistemáticos (Tversky & Kahneman 1982),

Para el desarrollo de este trabajo se toman como antecedentes diferentes investigaciones realizadas en torno al juego equitativo entre ellas encontramos la realizada por (Azcárate, 1995) quien propuso a 57 profesores tres ítems sobre juegos equitativos en el contexto del lanzamiento de dos dados, mientras que (Ortiz, Batanero y Contreras, 2012) analizaron el conocimiento sobre el juego equitativo en 167 futuros profesores proponiendo la solución a dos problemas abiertos, (Mohamed, 2012) evalúa los conocimientos de 283 futuros profesores de educación primaria en relación a la idea de juego equitativo a través de sus respuestas a una tarea abierta, (Guerrero et al. 2017) estudia las respuestas de una muestra de 63 estudiantes de bachillerato a dos tareas sobre juego equitativo, analizando los errores mostrados por los estudiantes y comparándolos con los resultados obtenidos en otras investigaciones.

Los trabajos anteriores dejan en manifiesto una preocupación por este tema, ya que muchos estudiantes y docentes en formación exhiben ciertos errores sistemáticos y estrategias mentales que los llevan a resolver problemas en torno al juego equitativo mediante razonamientos incorrectos, que luego los llevan a dar respuestas equivocadas.

El capítulo I describe la contextualización del problema, en donde se aborda el relevante papel que tiene la probabilidad en nuestra vida diaria y en la escolaridad, ya que muchas situaciones a las que nos vemos enfrentamos cada día involucran incertidumbre y toma de

decisiones. Adicional a esto, la enseñanza de este tema presenta diferentes problemáticas no solo en los estudiantes sino también en los docentes, una de las razones que se expone es la poca formación que han recibido los profesores a lo largo de su carrera profesional y los vacíos que se llevan al culminar sus estudios de pregrado, lo cual lleva al planteamiento de una pregunta problema. Seguido de esto se plantea la justificación, en la que se plasma la importancia que tiene llevar a cabo esta investigación, teniendo en cuenta esto y los diferentes antecedentes ya mencionados se plantean los objetivos que direccionan esta investigación.

Posterior a ello, en el capítulo II se desarrolla el marco teórico en el que se fundamenta este trabajo de grado, donde se definen los sesgos y heurísticas en base a los trabajos realizados por Amos Tversky y Daniel Kahneman, el sesgo de equiprobabilidad ampliamente estudiado por Lecoultre y sus colaboradores. Al final de este capítulo se desarrolla la idea de juego justo apoyado en el trabajo de investigación de (Díaz, D. 2013).

En el Capítulo III, se aborda la metodología empleada en esta investigación, la cual se identifica claramente como cualitativa. Además, se presenta un análisis preliminar del instrumento de recolección de datos y su proceso de validación. Se describe el tipo de población a la que se aplicó el instrumento de recolección de datos, así como el tratamiento aplicado a los datos obtenidos.

En el Capítulo IV, se lleva a cabo la discusión de las respuestas obtenidas mediante el instrumento de recolección de datos. Estas respuestas son fundamentales para el desarrollo tanto del objetivo general como de la pregunta problematizadora que guían esta investigación.

Por último, en el Capítulo V, se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo. Estas conclusiones están enfocadas en lograr cada objetivo específico, así como el objetivo

general. Además, se plantean algunas consideraciones finales que sugieren posibles investigaciones futuras a nivel local relacionadas con el juego equitativo.

Capítulo I: Problemática

Descripción del Problema

La Educación Matemática se ha reconocido como un campo de investigación y saberes, en los cuales se presentan dificultades alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje (DUVAL, 2016), debido a la naturaleza abstracta de sus objetos, en la cual han surgido diferentes teorías con el propósito de identificar cómo los estudiantes adquieren y construyen nuevos conocimientos.

En Colombia desde 1998 se han establecido los lineamientos curriculares en Matemáticas que son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Además, con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación en su artículo 23 (MEN, 1998 y 2006). Así como también es necesario referirse a la Ley 115 de 1994 que da a conocer las normas generales para controlar el Servicio Público de la Educación, fundamentándose en los principios de la Constitución Política sobre el derecho que tiene toda persona a la educación.

En el proceso de elaboración de los planes de estudio por ciclos, niveles y áreas; los lineamientos curriculares se constituyen en referentes que apoyan y orientan esta labor conjuntamente con los aportes que han adquirido las instituciones y sus docentes a través de su experiencia, formación e investigación (MEN, 1998), apoyados por los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) conforman una estructura en la cual se establecen unos tópicos en los cuales las instituciones educativas desarrollan su currículo, y aun así, los lineamientos, los DBA y los estándares no hacen una profundización que identifique los conceptos que debe aprender un estudiante sobre la probabilidad (León, José. 2017).

Respecto a las medidas de tendencia central, podemos observar que en los estándares (2006), se empieza a sugerir un tratamiento desde grado quinto con la mediana y progresivamente llegan al cálculo de estas medidas desde los datos agrupados y no agrupados hasta las tablas de frecuencias. Sin embargo, en este constructo curricular no se establece un vínculo entre la media aritmética con su generalización que es la Esperanza matemática además, sería también interesante recomendar desde estos ámbitos académicos la incorporación de la historia de las matemáticas como un articulador del proceso de la enseñanza, por ejemplo para el caso de la esperanza, entender que viene ligado a contextos sociales como las apuestas y a su vez desde contextos de juegos justos desde el siglo XVII con el famoso problema de los puntos o reparto de la apuesta que será tratado en este documento.

No introducir el concepto de juego justo durante la educación primaria priva a los estudiantes de la oportunidad de desarrollar un pensamiento crítico y riguroso sobre los juegos de azar que implican recompensas. De esta manera la toma de decisiones queda a merced de las creencias y la intuición del ciudadano, quien no podrá analizar el juego desde los fundamentos matemáticos desarrollados por el razonamiento probabilístico, sino que recurrirá a heurísticas que le permitan validar de manera inmediata que tan factible es entrar a un juego. En Investigaciones realizadas por Batanero, Arteaga, Ortega (2014); Alsina (2016) y Díaz (2007); se ha identificado que la falta de desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes conlleva a que estos utilicen heurísticas que pueden generar sesgos, dificultades y errores en torno a los fenómenos aleatorios; es por esto que la formación del docente en estadística y probabilidad es de vital importancia, para llevar a cabo un buen proceso que permita el desarrollo del pensamiento estadístico y aleatorio lo cual posibilitará al ciudadano tomar buenas decisiones

en el futuro o al menos, tomar decisiones conscientes que provengan de aplicar las leyes de la probabilidad y la estadística.

Los juegos de suerte y azar se encuentran muy arraigados en nuestra cultura, algunos muy inocentes como lanzar dados cuando juegas parques entre amigos o participar en la rifa que realiza algún compañero, otros no tanto que implica apostar dinero en casinos, así gran parte de la población colombiana se ve envuelta en este tipo de juegos, Por ejemplo (Pérez, Odriozola 2017) afirman que los colombianos sufren una tendencia ludópata en su adolescencia, esto debido a que no hay un control sobre los sitios de apuesta, los cuales permiten que muchos jóvenes realicen apuestas indiscriminadamente y sin ninguna supervisión (en este sentido las apuestas pueden resultar perjudiciales para la salud mental de algunas personas). También se ha encontrado que uno de los principales factores que influyen en esta práctica del juego es el nivel socioeconómico, esto debido a una mayor necesidad de recursos económicos, viendo en los juegos de azar una oportunidad para obtenerlos, dados el desempleo o subempleo que incide en ellos (Pérez, Odriozola, 2017).

El 11 de diciembre de 2022, el diario "El Colombiano" de la ciudad de Medellín publicó un artículo titulado "100.000 apuestas diarias se realizan en Colombia por el Mundial de fútbol de Qatar". Este artículo presenta los resultados de una investigación realizada por Coljuegos, el ente regulador de las apuestas en Colombia. Según el informe, se ha evidenciado un significativo crecimiento en las apuestas en línea. En el año 2020, los juegos operados por internet registraron apuestas cercanas a los \$8 billones de pesos. Para el año 2021, esta cifra se duplicó alcanzando los \$16 billones de pesos. Hasta octubre de 2022, se han reportado apuestas por \$21 billones de pesos, y se espera que al final del año esta cifra llegue a los \$26 billones de pesos, todo ello motivado por la emoción que genera la Copa del Mundo.

La investigación también revela un notable aumento en el número de apostadores en los últimos años. Según cifras de Coljuegos, en 2017 había 264.000 usuarios, pero en 2018, esta cifra dio un gran salto llegando a 1,6 millones de jugadores, lo que representa un incremento del 542%. Esto demuestra un sólido crecimiento en el sector. Asimismo, para agosto de 2022, el número de personas utilizando estas plataformas se elevó a 7 millones. Estos datos muestran claramente una tendencia positiva en el aumento de usuarios en el ámbito de las apuestas en línea (Rendón, O. 2022). Lo anterior evidencia la gran aceptación que este tipo de apuestas tiene entre un segmento importante de la población colombiana, específicamente en lo que respecta a las apuestas en línea. Sin embargo, es importante destacar que esta discusión se limita exclusivamente a las apuestas en línea, sin tener en cuenta otros tipos de apuestas como las realizadas en casinos y loterías.

Por otro lado, es necesario cuestionar si un juego paga adecuadamente, es decir, si el premio otorgado en una apuesta es justo, es así que, tomaremos como ejemplo el caso de la lotería del Chontico, que paga 400 pesos por cada peso apostado, esto implica que si apuestas 1000 pesos, recibirás un premio de \$400,000 pesos. ¿Es justo recibir esta cantidad por los 1000 pesos apostados?

En un juego justo o equitativo, entra en juego el concepto de esperanza matemática o valor esperado, lo cual es un concepto matemático que surge al preguntarse cómo se debe repartir el premio de manera justa en una apuesta. La esperanza matemática, vista como utilidad esperada, es un indicador de esa equidad. Al realizar la apuesta mencionada anteriormente esta da como resultado $400000 \cdot (1/1000) - 1000 \cdot (999/1000) = -599$, un valor que es negativo, los resultados indican que, en promedio, se pierden casi 600 pesos por cada 1000 pesos apostados en este juego. Esto implica que el juego es ventajoso para la empresa "El Chontico", sin embargo, la

educación que se recibe sobre la estructura de estos juegos, le hacen creer a los ciudadanos que es una apuesta viable, es por eso que la esperanza matemática juega un papel importante y para que este concepto sea interpretado de la manera correcta, es necesario que el docente conozca y pueda identificar los sesgos que provienen de aplicar una heurística a las situaciones de azar (Batanero, 2001).

Respecto al contexto de las apuestas como aspecto clave en el momento de relacionar la probabilidad y la sociedad, las directivas nacionales en cabeza del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1997), promueven el desarrollo del pensamiento aleatorio y se pretende que se trabajen justamente estos tópicos, ya que, en Colombia desde el MEN se llevó a cabo un plan de apoyo docente llamado Todos a Aprender que sirve de fundamento a los docentes en su labor de enseñanza, basados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en los que se mencionan los cinco tipos de pensamiento matemático que se desean desarrollar en los estudiantes en la educación escolar, uno de ellos es el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y se aborda el concepto del valor esperado o la esperanza matemática.

En otros países como España se ha planteado la enseñanza de la esperanza matemática en la escolaridad (Batanero, 2005), sin embargo, se ha encontrado que los docentes no tienen una buena formación en sus bases de estadística (León, 2017). Además, se ha encontrado que la formación de los profesores en la construcción y significación de contenidos en estadística y probabilidad posee deficiencias y limitantes para atender a las necesidades del estudiantado en los niveles básico, medio y superior (León, 2017), lo cual nos lleva a hacernos la siguiente pregunta problema situándonos en nuestro contexto nacional más precisamente en la Universidad del Valle.

Pregunta problema

¿Cuáles heurísticas usan los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle para resolver problemas relacionados con el juego equitativo?

Objetivos

Caracterizar las heurísticas que emplean los estudiantes en formación de la Licenciatura en Matemáticas para resolver problemas relacionados con el juego equitativo.

Objetivos específicos.

- Identificar sesgos y heurísticas usadas en la resolución de problemas relacionados con juegos de azar y situaciones de incertidumbre.
- Elaborar una rejilla de análisis de las principales heurísticas y sesgos que existen relacionados con la esperanza matemática en ambientes de juego equitativo.
- Evaluar estrategias de intervención para mitigar los sesgos determinados al resolver los problemas relacionados con los juegos justos.

Justificación.

El presente trabajo de grado se enfocará en la identificación de los sesgos y heurísticas usadas por los estudiantes de la Licenciatura en Matemática en la resolución de problemas que involucran el juego equitativo. El propósito de este trabajo es hacer un llamado de atención a la comunidad educativa sobre estos razonamientos intuitivos que utilizan los estudiantes para la solución de problemas en probabilidad y estadística, razonamientos que llevan a errores sistemáticos, que son utilizados aún por personas con una buena formación matemática como lo afirma (Tversky y Kahneman 1982).

Estos errores tienen una base psicológica, y la sola comprensión de las leyes que gobiernan en azar y la incertidumbre no son siempre suficiente para superarlos, si el sujeto no toma conciencia de ellos, por lo que es muy importante que el profesor de matemáticas reconozca estos sesgos cuando sus estudiantes los manifiesten (Batanero, 2001).

Son numerosos los trabajos que se han realizado sobre el uso de heurísticas en estudiantes universitarios, uno de ellos llama mucho la atención, en una evaluación llevada a cabo sobre razonamiento probabilístico en la Universidad de Granada en España a estudiantes del magisterio, se encontró en una prueba realizada a una muestra de 130 estudiantes, el 60% de ellos usó la heurística de representatividad, mientras un 66% presentaron el sesgo de equiprobabilidad y el 73% mostraron el enfoque de resultados, los resultados de esta prueba son preocupantes ya que son profesores en formación que luego pueden transmitir estos razonamientos a sus estudiantes (Díaz, C. 2003)

Por lo anterior es muy importante avanzar en este tipo de estudios que mejoren la comprensión sobre los razonamientos intuitivos y las creencias de los estudiantes ya que esto tiene implicaciones en el aprendizaje y la enseñanza de la estadística, que terminan afectando

áreas de la estadística como el muestreo, la probabilidad condicional y el teorema de Bayes, la inferencia estadística y la regresión lineal (Díaz, C. 2003).

Antecedentes.

A continuación, se presentan algunas investigaciones que se han realizado sobre sesgos y heurísticas relacionados con el concepto de juego justo o juego equitativo, que dejan de manifiesto la presencia de este tipo de razonamientos intuitivos y creencias, en profesores en formación.

Entre ellas encontramos la investigación realizada por Azcárate, P. (1995), quien propuso a 57 profesores tres ítems sobre juegos equitativos en el contexto de lanzamiento de dos dados. Los participantes mostraron dificultad para identificar los juegos equitativos y presentaron errores al calcular la probabilidad de los sucesos involucrados en el juego. Sus argumentos para decidir si el juego es equitativo se basaron en la equiprobabilidad de los resultados (solo en este caso lo consideran equitativo).

Como parte de un estudio más amplio sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, Ortiz, Batanero y Contreras. (2012) analizaron el conocimiento sobre el juego equitativo en 167 futuros profesores. La mayoría de los participantes fue capaz de diferenciar juegos equitativos y no equitativos y utilizaron estrategias correctas para comparar las probabilidades de ganar los diferentes jugadores, aunque hay errores de razonamiento proporcional, respuestas incompletas o no respuestas.

En un estudio más amplio Mohamed, N. (2012) evalúa los conocimientos de 283 futuros profesores de Educación Primaria en relación a la idea de juego equitativo a través de sus respuestas a una tarea abierta. En este estudio, pocos futuros profesores aplican correctamente la idea de juego equitativo para resolver el problema. El autor detecta errores en cálculos de probabilidad, falta de capacidad combinatoria, además de que la cuarta parte de los participantes no contesta al problema.

La siguiente investigación es de vital importancia para el desarrollo de este trabajo, ya que los ítems contruidos y validados en ella se contextualizan específicamente para su aplicación en nuestra muestra. Esto permitirá una comparación posterior de los resultados obtenidos.

En el estudio realizado por (Guerrero et al., 2017), se analizó una muestra de 63 estudiantes de bachillerato a quienes se les presentaron dos tareas, cada una con dos ítems relacionados con el juego equitativo. Estos resultados fueron comparados con los obtenidos por otros autores en investigaciones previas.

Este trabajo proporciona información relevante sobre los tipos de errores que los estudiantes cometen al resolver problemas que involucran el juego equitativo. Entre los resultados destacados de este estudio, se observó que los estudiantes son capaces de identificar si un juego es equitativo cuando se presenta la ganancia de un jugador. Sin embargo, enfrentan dificultades cuando se trata de situaciones en las que el jugador con mayor probabilidad de ganar recibe un premio menor.

Los resultados de las investigaciones realizadas a docentes y a futuros docentes muestra una gran preocupación que es respaldada por los pobres resultados obtenidos cuando se les pidió

resolver problemas que giran alrededor del concepto de juego equitativo, problemas que dejan al descubierto su falta de capacidad combinatoria, errores de razonamiento proporcional y respuestas incompletas o no respuesta a las preguntas presentadas. Estos estudios sirven como antecedentes del presente trabajo para comparar resultados con investigaciones similares.

Capítulo II: Marco teórico

Marco teórico.

En este apartado se presenta el marco teórico el cual tiene como componente principal el caracterizar los sesgos y las heurísticas, como también definir qué es un juego justo.

Heurísticas y sesgos.

Las personas, en su vida cotidiana, no tienen un razonamiento estadístico correcto cuando realizan inferencias basadas en la intuición sobre acontecimientos inciertos, bien porque no han aprendido las leyes de la probabilidad o bien porque los problemas superan sus capacidades para desarrollar dicho cálculo. En lugar de usar un cálculo de probabilidades normativo, confían en reglas que simplifican los problemas, llamadas heurísticas que son las que guían sus juicios. Estas reglas son aparentemente válidas, pero a menudo llevar a las personas a caer en sesgos predecibles (Díaz, C. 2005)

En los estudios realizados por (Kahneman et al, 1982), las heurísticas resultan ser procesos mentales que utilizan las personas para reducir la complejidad de un problema, de tal forma que el problema se simplifique y sea accesible al resolutor. Aunque nos llevan a dar una solución inmediata al problema, no se garantiza que esta solución sea correcta (Batanero, C. 2001). Es decir que las heurísticas son razonamientos que reducen la complejidad de un problema, pero no garantizan la solución correcta de este, dado que en ese proceso de reducir la complejidad se omite información relevante llevando así a cometer errores sistemáticos y predecibles llamados sesgos. El término heurística del que se habla en este trabajo es diferente al que usaba Polya para la resolución de problemas donde la heurística es resultado de una experiencia resultante y de la observación de los métodos de otras personas (Batanero, C. 2001).

Heurística de representatividad.

Algunos problemas de probabilidad presentes en la vida diaria tienen relación con la pertenencia de un elemento a una categoría, pero para resolver estos problemas se confía en la utilización de la heurística de representatividad que consiste en estimar la probabilidad de un evento por el grado de similitud entre una muestra y una población (Tversky y Kahneman, 1974).

La representatividad se usa para predecir resultados y, generalmente, produce buenas respuestas, ya que las muestras y los resultados más representativos tienen una mayor probabilidad de ocurrencia. Sin embargo, el hecho de fijarnos sólo en la similitud de la muestra con la población puede llevarnos a ignorar otros elementos esenciales de la información, como la variabilidad del proceso de muestreo, ocasionando algunos errores (Díaz, C. 2005). El uso de esta heurística lleva a cometer los siguientes errores: la insensibilidad al tamaño de la muestra, concepciones erróneas sobre el azar y la falacia de la conjunción (Díaz, C. 2003), de las cuales se desarrollan a continuación.

Insensibilidad al tamaño de la muestra.

Según Tversky y Kahneman (1974), se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, creyendo en una "Ley de los pequeños números", por la que pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Este error puede implicar la sobreestimación de la potencia de los métodos estadísticos, estimación a la baja la amplitud de intervalos de confianza y expectativas injustificadas en la replicabilidad de experimentos realizados con pequeñas muestras (Díaz, C. 2003).

Un pequeño ejemplo fácil para entender de la insensibilidad al tamaño de la muestra se presenta cuando lanzamos una moneda y medimos la proporción de veces que sale cara, esperamos que se acerque al 50% (si la moneda no está cargada), en una muestra grande, digamos unos 1000 ensayos, pero en muestras pequeñas esto no suele ser así, si tomamos una muestra pequeña de 3 ensayos la proporción de caras es más variable, el resultado podría ser 0% si no aparece ninguna cara, 33% si solo aparece una cara, 66% en caso que se obtenga dos caras y 100% cuando el resultado sean tres caras.

La ley de los grandes números afirma que, a medida que el tamaño de la muestra se hace más grande los resultados deberán converger a una proporción más estable, en el ejemplo anterior al aumentar el tamaño de la muestra se espera que el número de caras tienda al 50%.

Concepciones erróneas sobre el azar.

Se espera que en una secuencia pequeña de resultados represente fielmente las características de un proceso aleatorio. Por ello, al lanzar una moneda al aire, se cree más probable una secuencia del tipo C+C+C+, que las secuencia +++CCC o CCCCCC. Este error lleva a la falacia del jugador donde el azar se ve como un proceso auto corrector, en el que una desviación en una dirección induce otra contraria para restablecer el equilibrio (Díaz, C. 2003).

La falacia del jugador también conocida como falacia de Monte Carlos en los casinos, consiste en un pensamiento erróneo que se presenta en los juegos de azar y consiste en considerar que los sucesos pasados en un experimento aleatorio afectan resultados futuros, por ejemplo, alguien que presenta esta falacia tiene la creencia que si al lanzar una moneda equilibrada 10 veces seguidas dando como resultado la secuencia C+C+CCCCC, en el siguiente lanzamiento existe mayor probabilidad que se dé el resultado contrario, es decir que se

obtenga un +, pero como la moneda es equilibrada y cada lanzamiento es independiente, la probabilidad permanece constante para cada lanzamiento.

Falacia de la Conjunción

Uno de los errores típicos causados por la heurística de la representatividad es la falacia de la conjunción, que consiste en estimar para la probabilidad de la intersección de dos sucesos un valor mayor que la estimada para probabilidad simple de uno de los sucesos Díaz (2003). Es decir que se considera que la $P(A \cap B) > P(A)$ o $P(A \cap B) > P(B)$, lo que es erróneo a la vista del cálculo de probabilidades. Se suele dar en el cálculo de la probabilidad de un suceso en un espacio muestral producto, caso en que puede producirse un gran contraste entre representatividad y probabilidad. Una de las reglas básicas de la probabilidad es que cuanto más especificamos un suceso, menor es su probabilidad (Tversky y Kahneman, 1982), para explicarlo y que quede más claro se usará el siguiente ejemplo.

“Linda tiene 31 años, soltera, franca y muy brillante. Se especializó en filosofía. Como estudiante, estaba profundamente preocupada por temas de discriminación y justicia social, y también participó en manifestaciones antinucleares.” Ante esta información sobre Linda, ¿cuál de las siguientes es más probable? (Tversky y Kahneman, 1982).

a. Linda es una cajera de banco.

b. Linda es cajera de banco y participa activamente en el movimiento feminista

A la mayoría de individuos a los que se les presenta este ejemplo optan por la opción b, sin embargo, es aquí donde se evidencia la falacia de la conjunción, que se produce cuando aceptamos erróneamente que un conjunto de circunstancias aparentemente relacionadas entre sí son más probables o susceptibles de suceder que una sola general. (Tversky y Kahneman, 1982)

Sesgo de Equiprobabilidad.

Lecoutre (1992) describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Lecoutre y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene "el azar", como ejemplo de este sesgo, Lecoutre utiliza el siguiente ejemplo, se le pregunta a diferentes individuos si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un cinco y un seis, que la de obtener dos veces un cinco, esta prueba demuestra que aquellos sujetos que presentan el sesgo de equiprobabilidad aseguran que la probabilidad que salga un cinco y un seis es igual a la que salga un doble cinco. para clarificar un poco el asunto se muestra la solución correcta del problema antes mencionado, el evento A = “en ambos dados sale 5 en la cara superior”, entonces $A = \{(5,5)\}$ y el evento B = “sale 5 y 6 en la cara superior de ambos dados”, entonces $B = \{(5,6), (6,5)\}$. Aquí es fácil observar que el evento B tiene más elementos que el evento A, por lo tanto, $P(B) > P(A)$, he aquí el error.

Juego justo o equitativo.

Un juego es justo cuando ningún jugador tiene ventaja frente a su competidor o adversario, esto se logra cuando ambos competidores tienen la misma probabilidad de ganar el mismo premio o si alguno de los dos tiene menor probabilidad de ganar, el juego se equilibra dando un mayor premio cuando éste gane, de tal forma que el premio que recibe es inversamente proporcional a la probabilidad de ganar, dicho de otro modo, si un jugador tiene $\frac{1}{3}$ de posibilidades de ganar, su premio debe ser el triple del premio que recibe su competidor cada vez que gana (Guerrero, H et al., 2017).

El problema del juego justo o equitativo es muy famoso ya que su solución tardó más de un siglo en llegar, desafiando a grandes matemáticos como Pacioli, Tartaglia y Cardano, que proponían soluciones que luego eran rechazadas por la comunidad matemática de la época, la solución de este problema comenzó a ver la luz con los trabajos realizados por dos matemáticos franceses muy famosos, Blaise Pascal y Pierre de Fermat pero quien pasó a la posteridad por la solución de este problema fue el matemático e inventor neerlandés Christiaan Huygens en su obra *De ratiociniis in ludo aleae* (Razonamientos sobre los juegos de azar) publicada en 1656, en esta obra se da la solución al problema del reparto de una apuesta.

Un trabajo muy completo y detallado de los trabajos de Huygens sobre el problema del reparto de una apuesta se encuentra en Díaz. D. (2013). Análisis Histórico-Epistemológico del surgimiento de la Esperanza Matemática, aquí se hace un recorrido histórico desde cuando surgió este problema hasta la solución dada por Huygens en sus trece proposiciones.

Capítulo III: Metodología.

Metodología

En este apartado se presentan aspectos relevantes que son parte fundamental para el desarrollo metodológico del trabajo de grado, el cual se enmarca en un enfoque cualitativo de investigación para la recolección y análisis de la información, también se dará una descripción de la población a estudiar y el análisis a priori del instrumento que se usará para la recolección de información.

Tipo de investigación.

Para este trabajo de grado se optó por utilizar un método cualitativo para la recolección de datos como las estrategias investigativas clínicas, ya que para ahondar en el fenómeno de interés los investigadores buscan tener cierto control sobre la forma en que recogen la información, con el fin de llevar un control sobre el tema que se está investigando (Bakker y Eerde, 2015), además que permite identificar formas de pensamiento o de interpretación de un fenómeno en particular, como en este caso los sesgos y las heurística usadas para resolver problemas que involucran el juego equitativo, de esta forma se pretende que se revelen descripciones, concepciones, procedimientos y justificaciones útiles para profundizar en los fenómenos investigados y explicarlos (Kelly y Lesh, 2000).

Con el fin de recolectar información, se recurre a la entrevista semiestructurada como estrategia para recopilar ideas espontáneas y auténticas de personas o grupos de personas, opiniones o puntos de vista para analizar a partir de ellas procesos de razonamiento, concepciones e incluso detectar estructuras de pensamiento que subyacen a las ideas expuestas (Camargo, L. 2020).

Caracterización de la población.

La población a la que se le aplicó el instrumento para la recolección de datos, fueron los estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle ubicada al sur de la ciudad de Santiago de Cali en la sede Meléndez, en el curso de Didáctica III: Desarrollo del pensamiento estocástico y aleatorio, la aplicación de este instrumento tuvo una duración de 50 minutos y se realizó a una muestra de 20 estudiantes, posteriormente seis de ellos se seleccionaron de manera no aleatoria como unidades de interés para realizar una entrevista semiestructurada con el fin de profundizar e indagar en detalle sobre las respuestas dadas en la solución del instrumento.

Análisis a Priori.

A continuación se realizará el análisis a priori de cada una de las preguntas del instrumento realizado a un grupo de 20 estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle que se encuentran cursando el curso de didáctica III que aparece ubicado en la malla curricular del programa en sexto semestre, la finalidad de dicho instrumento es recabar información sobre los razonamientos y argumentos utilizados por los estudiantes en la solución de problemas que involucran el juego equitativo y buscar la presencia de heurísticas y sesgos en sus respuestas.

En la figura 1 se muestran dos problemas, cada uno de ellos con dos preguntas, para la solución del cuestionario se dio un tiempo de 50 minutos.

Figura 1: Cuestionario. Tomado de: Adaptación realizada de Guerrero.

Problema 1. Ana considera que es muy buena en los juegos de suerte y azar así que le propone a su amiga Maria en la hora de descanso al medio día el siguiente juego. Se lanzan al aire dos monedas legales, esto quiere decir que en cada moneda se tiene igual probabilidad de salir cara o cruz. Luego observan el resultado. Ana gana 1000 pesos si aparecen una o dos caras y María gana 1000 si no aparece ninguna cara.

a. Si jugaras ¿Prefieres ser Ana o María? ¿Por qué?

b. Un juego es justo cuando no favorece a ningún participante, es decir, ninguno tiene más ventaja que el otro. ¿Qué cantidad debería ganar María para que el juego fuera justo?

Problema 2. Miguel y Luis salen del colegio tras una agotadora jornada, camino a casa Luis le propone a su compañero Miguel el siguiente juego mientras beben una refrescante limonada en una cafetería. Se lanza un dado justo de seis caras, esto quiere decir que al lanzarlo, cualquiera de los seis resultados obtenidos tiene la misma probabilidad de salir. Miguel gana 1000 pesos si el número obtenido es 1, 2, 3, o 4. Si el número es 5 o 6 Luis gana 3000 pesos.

a. ¿Tiene alguno de los chicos ventaja en el juego? ¿Por qué?

b. ¿Cuánto piensas que ganará aproximadamente cada chico si juegan 60 veces al juego?

Análisis a priori problema 1

El primer problema trata una situación que consiste en el lanzamiento de dos monedas, cuyo espacio muestral es $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ siendo C el suceso obtener cara y X el suceso consistente en obtener cruz. Puesto que los experimentos son simples (el lanzamiento de una de las monedas no afecta el resultado de la otra moneda), entonces son independientes, la probabilidad de cada uno de los sucesos en el experimento es $P(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ donde x es cualquiera de los resultados del experimento.

Si definimos los sucesos A = “gana Ana” y M = “gana María”, las probabilidades que cada una de ellas gane son: $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$, la probabilidad que gane Ana mientras que $P(M) = \frac{1}{4} = 0.25$ es la probabilidad que gane Maria.

Respondiendo a la pregunta, ¿Prefieres ser Ana o María? La respuesta que se espera por parte de los estudiantes es que respondan que prefieren ser Ana, dado que Ana tiene ventaja al tener más probabilidad de ganar que María.

Para responder a la segunda pregunta se recurre a la propiedad de que un juego es justo o equitativo si la probabilidad de ganar es inversamente proporcional al premio, es decir que para que el juego sea justo quien tiene menor probabilidad de ganar recibirá un premio mayor que cumpla con la propiedad antes mencionada. A la pregunta, ¿Qué premio debería ganar María para que el juego sea justo? La respuesta es que María gane 3000 pesos cada vez que salgan dos cruces, el triple del premio que gana Ana cada vez que gana.

También se espera, en el juego de Ana y María que algunos de los estudiantes que respondieron la prueba, presenten el sesgo de equiprobabilidad al creer que cuando se lanzan dos monedas al aire cualquiera de los eventos, “no salga XX”, es decir que el resultado favorece a Ana, y el evento “salga XX”, el resultado que favorece a María, son igual de probables, lo que es un resultado erróneo y sumado a que tanto Ana como María ganan 1000 pesos cada vez que resultan ganadoras, se crea que el juego es justo al no favorecer a ninguna de ellas ya que tienen la misma probabilidad de ganar y reciben igual premio cada vez que ganan.

Análisis a priori problema 2

En el problema 2 se lanza un dado Justo, así que cada uno de los resultados es igual de probable que ocurra. Miguel gana si al lanzar el dado ocurre uno de los siguientes resultados $\{1, 2, 3, 4\}$, es decir que gana en cuatro de los resultados obtenidos al lanzar el dado, en caso contrario gana Luis.

Sea el evento $M =$ "gana Miguel" y el evento $L =$ "gana Luis". Luego la probabilidad de ganar Miguel es $P(M) = \frac{4}{6}$ y la Probabilidad de ganar Luis es $P(L) = \frac{2}{6}$, es decir que Miguel tiene el doble de probabilidad de ganar que Luis. Por cada ronda de juego se espera que Miguel gane $1000 \cdot 6 \cdot \frac{4}{6} = 4000$ pesos, mientras que por cada ronda del mismo juego se espera que Luis gane $3000 \cdot 6 \cdot \frac{2}{6} = 6000$ pesos, esto pone en una situación de desventaja en el juego a Miguel frente a Luis, aunque Luis tiene la mitad de probabilidad de ganar que Miguel, su premio es tres veces mayor que el que gana su competidor cada vez que le resulta favorable.

Una de las opciones de respuesta que podemos esperar en la solución del instrumento, está relacionada con indicar que Miguel tiene la ventaja al jugar por presentar más resultados a su favor, es decir que tiene más probabilidad de ganar cada vez que se lanza el dado, de igual manera se espera que algunos estudiantes solo centren su atención en la cantidad de dinero que gana Luis para afirmar que por esta razón tiene la ventaja en el juego frente a Miguel cuando el resultado le favorece (como ocurre cuando las personas juegan chance o Baloto), ambas respuestas no ofrecen razones suficientes que apoyen la afirmación de cuál de los dos jugadores tiene la ventaja en el juego.

Además de lo anterior se esperan respuestas que presenten el sesgo de equiprobabilidad al lanzar el dado, como los resultados son aleatorios, entonces los eventos que favorecen a cada

uno de los participantes del juego tienen la misma probabilidad de ocurrencia, tampoco se descarta la aparición de concepciones erróneas sobre el azar en forma de creencias personales que afirman que resultados como el sacar el 5 o el 6 tienen mayor probabilidad de ocurrencia que sacar el número 1.

En la pregunta dos del problema dos se pregunta por, ¿Cuánto piensas que ganará cada chico si juegan 60 veces al juego? Para dar respuesta a esta pregunta se realizan los siguientes cálculos que son similares a los realizados en la pregunta 1 del problema 2.

La ganancia de Miguel en una serie de 60 juegos dependerá de la cantidad de juegos que logre ganar, se estima que en 60 juegos gane aproximadamente 40 de ellos, dado que su probabilidad de ganar es $\frac{2}{3}$, de los 60 juegos ganará $\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$ juegos, de cada uno de estos juegos recibe 1000 pesos, finalmente su ganancia será de 40000 pesos aproximadamente. En el caso de Luis se espera que este gane en 20 de los 60 juegos, como Luis gana 3000 pesos cada vez que gana, su ganancia total se espera que sea aproximadamente de 60000 pesos. Estos son valores aproximados, pero se puede observar una diferencia importante entre las ganancias de uno y otro jugador. Este último resultado apoya la afirmación que el juego es favorable a Luis.

Tabla 1: Análisis a priori del cuestionario.

Problema # 1	Lo esperado	La clave. (Opción correcta)
¿Prefieres ser Ana o María?	La respuesta que se espera de los estudiantes es que prefieren ser Ana, dado que el juego paga la misma cantidad de dinero a ambas jugadoras para vez que salen favorecidas la ventaja está en quién tiene más probabilidad de	Efectivamente, Ana tiene ventaja en este juego, si el juego se prolonga lo suficiente María con seguridad va a perder dinero dado que cada uno de los resultados de lanzar las dos monedas son equiprobables (las monedas son

	ganar, en este caso Ana tiene una probabilidad de 0.75 de ganar el juego frente al 0.25 de María. Se espera que se calcule mal el espacio muestral $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$, asumiendo que al lanzar las dos monedas los resultados CX y XC son un mismo resultado y de esta manera la probabilidad de ganar Ana será 0.67 y aunque el estudiante responda que prefiere ser Ana llega por un razonamiento equivocado.	legales), pero en tres de ellos gana Ana, por lo tanto, el juego favorece a Ana si este se juega de manera prolongada porque la probabilidad de ganar Ana tiende a 0.75 (Ley de los grandes números).
¿Qué premio debería ganar María para que el juego sea justo?	Se espera una respuesta que diga que María al tener una probabilidad más baja de ganar, esta reciba un premio más grande que Ana para equilibrar el juego, pero esta es una respuesta vaga al no decir el valor numérico exacto del premio que debe recibir María. Para dar respuesta a esta pregunta se espera que los estudiantes respondan usando razonamientos intuitivos y heurísticas para llegar a la respuesta por métodos de ensayo y error dando como resultado que María debe ganar 3000.	La respuesta es que María gane 3000 pesos cada vez que salgan dos cruces, el triple del premio que gana Ana que tiene tres veces la probabilidad de ganar de María, de esta forma se equilibra el juego y se convierte en justo o equitativo.
Problema # 2	Lo esperado	La clave. (Opción correcta)
¿Tiene alguno de los chicos ventaja en el juego? ¿Por qué?	Se espera que se fijen en obviedades como que Miguel tiene la ventaja en el juego por tener mayor probabilidad de ganar olvidándose del premio que recibe	La respuesta correcta es que Luis tiene la ventaja en el juego porque aunque Miguel tiene el doble de probabilidad de ganar que Luis, el premio que recibe Luis no es el

	Luis cada vez que el juego le favorece, pero también respuestas del tipo que Luis tiene la ventaja porque gana más dinero que Miguel cada vez que el juego le favorece.	doble sino el triple del premio que recibe Miguel, dando a este la ventaja en el juego cuando juegue de manera prolongada.
¿Cuánto piensas que ganará aproximadamente cada chico si juegan 60 veces al juego?	Se espera que realizando algunos ensayos o recurriendo a la proporcionalidad lleguen a la cantidad aproximada de veces que gana cada jugador y lleguen a qué Miguel gana aproximadamente 40 de los 60 juegos y como en cada juego favorable gana 1000 pesos, al final termine ganando 40000 pesos mientras que Luis ganará aproximadamente 20 de los 60 juego obteniendo así una ganancia de 60000 pesos.	Para dar respuesta a esta pregunta se recurre a la proporción que cada uno de los jugadores gane el juego en 60 ensayos del mismo, en el caso de Miguel se espera gane de manera aproximada en 40 de los 60 ensayos, esto es apoyado por la ley de los grandes números que afirma que al aumentar de ensayos la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser constante. Como Miguel gana aproximadamente 40 juegos y cada vez que lo hace gana 1000 pesos, su ganancia global será de unos 40000 pesos mientras que Luis ganará más o menos 20 de los 60 juegos disputados y en cada juego se embolsa 3000 pesos, su ganancia aproximada es de 60000 pesos al final del juego.

Aplicación del Instrumento.

En esta fase del trabajo se llevó a cabo la aplicación del instrumento a un grupo de 20 estudiantes de la licenciatura en matemáticas que cursan la asignatura didáctica III: desarrollo del pensamiento estocástico y aleatorio ubicado en sexto semestre, la mayoría de los estudiantes de este curso no habían visto el curso de estadística que se encuentra ubicado en quinto semestre

según la estructura curricular del programa académico de la licenciatura en matemáticas (Resolución 239 del 2020). Durante la aplicación del instrumento se les solicitó a los estudiantes que leyeran con calma cada una de las preguntas y que respondieron según sus conocimientos previos adquiridos en el colegio y en su paso por la universidad, durante la aplicación se trató de no dar mayor información sobre la solución de los problemas ya que nos interesaba respuestas espontáneas en la que se pudiera apreciar sus intuiciones y creencias.

Análisis de resultados

Ya teniendo los resultados de los cuestionarios, se procedió a la revisión de cada una pregunta por pregunta de manera detallada a la luz del análisis a priori realizado con antelación para revisión de las respuestas dadas por los estudiantes al resolver el cuestionario. En la revisión de cada uno de los cuestionarios se obtuvieron variedad de respuestas que van de respuestas correctas, respuestas incorrectas y no respuesta. Al revisar cada uno de los cuestionarios se eligieron de manera no aleatoria a 6 de los estudiantes para realizarles una entrevista para continuar ahondando sobre las preguntas realizadas en el cuestionario, la elección de estos estudiantes se hizo con base a lo interesante y llamativo de sus respuestas a las preguntas realizadas en el instrumento.

Entrevista Semiestructurada

Seleccionados los 6 estudiantes de manera no aleatoria se acordó con cada uno de ellos realizar una entrevista para profundizar en las respuestas dadas al resolver el cuestionario, dichas entrevistas se realizaron de manera virtual con la ayuda de Google Meet y fueron grabadas en OBS Studio y Microsoft Clipchamp para tener registro de las entrevistas realizadas como parte importante de la recolección exhaustiva de datos y toma de notas del entrevistador (Soto 2014).

En estas entrevistas se tuvo en cuenta el protocolo que implica la realización de una entrevista semiestructurada, como explicar de qué va a tratar la entrevista, pedir consentimiento al entrevistado para la grabación de la entrevista y garantizar la confidencialidad de esta, generar un ambiente que haga que el entrevistado se sienta cómodo, esto con la intención de recopilar ideas espontáneas y auténticas, pero también para identificar concepciones y procesos de razonamiento ingenuos (Camargo, L. 2020).

Capítulo IV: Presentación de resultados.

Análisis

Después de la adaptación del instrumento que se aplicó a 20 estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle en el curso didáctica III: desarrollo del pensamiento estocástico y aleatorio, en donde la mayoría de sus estudiantes se encontraban en sexto semestre y semestres superiores. Con el objetivo de determinar su nivel de conocimiento estadístico se les realizó la siguiente pregunta “¿Ya cursó la asignatura de estadística o tiene formación en estadística recibida en otros programas técnicos o universitarios?” los datos obtenidos fueron los siguientes:

Figura 2: Comparación de estudiantes que han visto estadística.



Según el gráfico anterior, podemos inferir que de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que se encuentran en sexto semestre, por lo menos 16 de ellos no han tomado ningún curso de estadística en su carrera. En contraste, los otros 4 sí han tenido experiencia con cursos de estadística de otras carreras o por elección propia.

Tras aplicar el instrumento a los 20 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, se eligieron 6 de ellos para llevar a cabo una entrevista semiestructurada de los cuales solo 3 respondieron la entrevista. La selección de estos 6 estudiantes se basó en la calidad de sus

argumentos y la forma en que presentaron sus respuestas, ya que se pudo observar un razonamiento interesante en las respuestas correctas como en las incorrectas. Estos 6 estudiantes seleccionados respondieron que ninguno ha visto un curso de estadística durante el desarrollo de su carrera Licenciatura en Matemáticas, los cuales serán mencionados en el análisis como Estudiante 1, Estudiante 2, Estudiante 3, Estudiante 4, Estudiante 5 y Estudiante 6.

Después de hacer una revisión exhaustiva del instrumento se observó en cada una de las respuestas de los estudiantes, que la mayoría solo se fijaban en la probabilidad y dejaban de lado el premio, argumentando querer ser Ana porque tenía más probabilidades de ganar y que cuando se les preguntaba si podían arreglar el juego para que fuera justo estos buscaban volver el juego equiprobable, esta creencia equiprobable la defiende Lecoutre y sus colaboradores argumentando que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene "el azar" (Lecoutre, 1992), lo mismo sucedía en el caso de Luis y Miguel, donde argumentaban que les gustaría ser Miguel dado que tenía la mayor probabilidad para ganar, desligando totalmente el premio a ganar de la justicia de los juegos.

Si analizamos el problema 1, pregunta (a) los seis estudiantes seleccionados prefieren ser Ana debido a que esta presenta mayor probabilidad de ganar, de los seis, tres estudiantes desarrollaron correctamente el espacio muestral del juego entre Ana Y María, $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$, de los faltantes, dos de ellos no escriben el espacio muestral y realizan afirmaciones mediante estimaciones, basándose únicamente en el porcentaje y partiendo de que si de las cuatro posibilidades, Ana tiene un 75% de ganar debería ganar 250 pesos, por el contrario María que tiene un porcentaje de ganar de 25% debería ganar 750 pesos, es decir, que están relacionadas inversamente proporcional los porcentajes de ganar con el premio, por otro lado, el

estudiante que falta escribe el espacio muestral pero lo hace mal, afirmando que Ana sólo tiene dos opciones de ganar, dado que $\{C,X\}$ y $\{X,C\}$, son el mismo resultado para él, esta prueba demuestra que aquellos sujetos que presentan el sesgo de equiprobabilidad aseguran que la probabilidad que salga un evento $\{CX\}$ y el evento $\{CC\}$ es igual para ambos casos (Lecoutre, 1992).

Empezaremos por analizar el apartado (a) del primer problema que dice: “Si jugaras ¿Prefieres ser Ana o María? ¿Por qué?”, en el cual el estudiante 1 calcula bien el espacio muestral, construye una tabla de posibles resultados con el ganador, como se ilustra a continuación.

Ilustración 3: Tomado del cuestionario.

Casos	Moneda 1	Moneda 2	Ganador
1	Cara	Cara	Ana
2	Cara	Cruz	Ana
3	Cruz	Cara	Ana
4	Cruz	Cruz	María

Podemos observar un claro dominio en el cálculo del espacio muestral, lo mismo sucede con el Estudiante 2 quien no realiza una tabla pero sí escribe el evento cuyos resultados dan como ganadora a Ana, el evento $A = \{CC, CX, XC\}$ cuya probabilidad es $P(A) = 3/4$; el evento que da a María como ganadora es $M = \{XX\}$ y su probabilidad es $P(M) = 1/4$ lo que muestra claramente las posibilidades de cada jugador. Ambos estudiantes argumentan que desean ser Ana debido a que presenta mayor probabilidad para ganar. Mientras que para el Estudiante 3 y el estudiante 4, se calcula la probabilidad en casos favorables de casos totales, llegando a una probabilidad de 75% y de 25% lo cual es acertado, sin embargo, no hace un boceto o cálculo del

espacio muestral, y manifiestan querer ser Ana debido a que tiene una probabilidad del 75 % de ganar.

Los estudiantes 3 y 4 realizan un análisis basándose en las posibilidades que tiene cada una de las jugadores que se encuentran en el juego, donde claramente argumentan que desean ser Ana dado que, esta tiene un 75% de probabilidades de ganar o bien que se tiene 3 posibles combinaciones para ganar, en el caso contrario, María solo tendría un 25% de probabilidad o en su defecto, solo una oportunidad para ganar.

El estudiante 5 al igual que el Estudiante 6 presentan una dificultad al construir el espacio muestral dado que están considerando que $\{C,X\}$ es igual que $\{X,C\}$ lo cual implica el sesgo de equiprobabilidad, al considerar que un suceso es igual al otro, esto debido a la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio como lo afirma (Lecoutre, 1992) por lo cual llegan a la conclusión de que los casos totales son solo 3, en ambos casos afirman querer ser Ana dado que tiene más posibilidades, sin embargo, lo hacen considerando que únicamente se tienen 3 resultados posibles $\{CX, XX, CC\}$ por lo cual presentan la dificultad de reconocer el espacio muestral tal como lo indica Andrade al afirmar que: *“Los estudiantes tienen problemas para establecer los espacios muestrales correspondientes a experimentos aleatorios, incluso tras identificar éstos adecuadamente”* (Andrade, L. 2013).

Ahora cuando analizamos el apartado (b) del problema 1 podemos identificar que los Estudiantes 1 y 2 han respondido de manera adecuada, en el caso del estudiante 1 afirma que: *“María debería ganar 3000 dado que Ana tiene 1 caso en contra se gana 1000 y María tiene*

tres casos en contra, entonces, por esa razón debería ganar 3000” lo cual es correcto de acuerdo con (Guerrero, 2017) cuando afirma que el juego justo relaciona inversamente la probabilidad con el premio a ganar de cada una, además, lo hace con los valores predeterminados en el enunciado, por otro lado el estudiante 2 afirma lo siguiente: *“Para que el juego sea justo, de acuerdo a lo que gana cada una, podría ser que Ana gane 500 pesos y María gane 1500 pesos...”* En este caso el estudiante ha respondido de manera adecuada, pero con valores diferentes a los entregados en el problema 1. Sin embargo, continúa argumentando lo siguiente *“... O que María gane 3 veces más que Ana en su defecto ya que Ana tiene 3 veces más probabilidades que María”* aquí podemos observar la relación inversa entre la probabilidad y el valor del premio a ganar, determinando de manera adecuada lo que significa que un juego sea justo, ya que, un juego es justo cuando ningún jugador tiene ventaja frente a su competidor o adversario, si un jugador tiene $\frac{1}{3}$ de posibilidades de ganar, su premio debe ser el triple del premio que recibe su competidor cada vez que gana (Guerrero, H et al., 2017)

Los estudiantes 3 y 4 utilizan una regla de 3 simple para determinar la cantidad de premio que debe ganar cada una de las participantes del juego, ambos usan una base de 1000 como el valor total y luego de realizar un cálculo simple con el porcentaje de cada una de las participantes concluyen que Ana sólo debería ganar 250 pesos y que María debería de ganar 750 pesos, lo cual está bien relacionado, considerando que, un juego es justo cuando se equilibra adecuadamente el premio con la probabilidad de ganar, en el caso anterior María debería ganar 3 veces más dado que su contrincante tiene 3 veces más probabilidades de ganar, ya que, su premio debe ser el triple del premio que recibe su competidor cada vez que gana (Guerrero, H et al., 2017).

Cuando analizamos los resultados de los estudiantes 5 y 6 podemos observar que realizan mal el espacio muestral, esto debido a que están considerando que sacar {CX}, {CX} ambos tienen la misma probabilidad que {CC}, lo cual está relacionado directamente al sesgo de la equiprobabilidad, asumiendo que estos sucesos deben tener la misma probabilidad (Lecoutre, 1992) a la hora de ajustar los valores de la apuesta también los ajustan mal, esto debido a que para ellos una jugadora tiene dos posibilidades de ganar mientras que la otra solo tiene una probabilidad, el estudiante 5 habla de igualdad de condiciones al referirse que *“Para la realización de dicho juego, las condiciones deberían ser las mismas...”* asumiendo que ambas participantes deberían de tener las mismas probabilidades para ganar, así también, indica que las participantes tienen la misma suerte *“... Si Ana en la primera ronda tira y salen dos caras y María cuenta con la misma suerte, María estaría en una desventaja de 2000...”* cuando el estudiante 5 se refiere a la misma suerte, se asume que María y Ana ganan una ronda seguida cada una, lo cual conlleva a que ambas estén empatadas en cuestiones de premio, sin embargo, estas ignoran otros elementos esenciales de la información, como la variabilidad del proceso (Díaz, C. 2005). Además que desde un inicio están realizando el análisis con el sesgo de equiprobabilidad, lo cual conlleva a repartir de manera incorrecta el valor del premio.

Al analizar las preguntas del problema 2 apartado (a), se puede observar que tuvieron un mayor grado de dificultad por parte de los estudiantes que realizaban la prueba, ya que, muchos no responden la pregunta de manera operacional, sino que se basan en argumentos, por ejemplo, el estudiante 1 afirma que *“Miguel tiene la ventaja en el juego de los dados ya que tiene 4 casos a favor y dos en contra...”* Aludiendo únicamente a la probabilidad como factor determinante en la justicia del juego de azar, así mismo relaciona el valor de la apuesta afirmando que si se tuviera en cuenta el premio entonces la ventaja la tendría Luis, ya que, *“Miguel tendría que*

jugar 3 veces, para igualar el dinero de una de las victorias de Luis.” Aquí podemos observar cómo presenta insensibilidad al tamaño de la muestra, asumiendo que al jugar 3 veces, en las 3 veces va a ganar Miguel, recordemos que Tversky y Kahneman (1974) indican que se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números en muestras pequeñas, como en el caso anterior donde erróneamente se piensa que al jugar 3 veces, al tener una mayor probabilidad de ocurrencia, Miguel va a ganar en todos los juegos.

El estudiante 2 calcula la probabilidad de cada uno de los participantes y relaciona el premio a ganar con la probabilidad e identifica que el premio es mayor para uno de los participantes, asumiendo que a largo plazo Luis tendría ventaja, aunque gane menos, este procedimiento lo hace la siguiente manera, calcula la probabilidad de victoria de Luis y miguel por separado luego realiza una igualación de razones, donde indica el premio de miguel es al premio de Luis al igual que lo es la probabilidad de Miguel a la probabilidad de Luis, con lo cual se aproxima bastante a el análisis del juego justo dado por las probabilidades y el premio esperado, dado que, el premio que recibe es inversamente proporcional a la probabilidad de ganar (Guerrero, H et al., 2017).

Si analizamos la respuesta del estudiante 3 podemos observar que esta calcula únicamente la probabilidad y con eso basa su argumento de que Miguel tiene la ventaja, ignorando por completo el premio, el estudiante 4 presenta la solución en una regla de 3, partiendo del 100% del valor aportado que en este caso es de 3000 que es el valor a ganar de Miguel, por otra parte relaciona la regla con la probabilidad de ganar de Luis, por lo cual está relacionando inversamente el premio con la probabilidad, lo cual es un análisis correcto, aquí aproxima el valor dado a 2000 pero dejándolo sin ninguna interpretación acertada respecto al cálculo mediante la regla de 3.

Mientras que el estudiante 5 inicia reconociendo que existen diferentes condiciones, relacionando de manera adecuada las posibilidades que tiene cada uno para ganar con el premio que recibe cada uno al ser el ganador sin embargo cuando trata de ejemplificar dicha diferencia cae en una heurística al decir “... *Por lo tanto, aunque Miguel tenga más aciertos que Luis, Luis en dos aciertos igualará y será mayor su ganancia.*” Se puede observar una heurística llamada insensibilidad al tamaño de la muestra al creer que sin importar cuantos aciertos lleve Miguel, en dos aciertos puede o igualar o superar dicho monto, la insensibilidad en el tamaño de la muestra consiste en confiar en las muestras pequeñas pero, en las muestras pequeñas existe una mayor variabilidad y puede que en principio Miguel tenga ventaja en el juego y en una serie corta de resultados del juego gane, pero la ley de los grandes números dará como ganador con seguridad a Luis, esto porque se confía en la utilización de la heurística de representatividad que consiste en estimar la probabilidad de un evento por el grado de similitud entre una muestra y una población” (Tversky y Kahneman, 1974), sin tener en cuenta aspectos como la variabilidad. Lo que finalmente los lleva a entrar en las concepciones erradas sobre el azar, donde se piensa que el azar es un corrector, donde los eventos pasados afectan a los efectos futuros (Díaz, C. 2003).

Ahora el estudiante 6 presenta una concepción directa desde su percepción del problema, ya que considera que el juego es justo basándose únicamente en el enunciado, sin realizar ningún cálculo ni un análisis profundo de la problemática, sin embargo, un juego es justo cuando ningún jugador tiene ventaja frente a su competidor o adversario (Guerrero, H et al., 2017), pero para el estudiante 6, basta con que se tenga una mayor probabilidad para determinar que un juego es justo o no, y se sabe que, esto se logra cuando ambos competidores tienen la misma probabilidad de ganar el mismo premio o si alguno de los dos tiene menor probabilidad de ganar, el juego se

equilibra dando un mayor premio cuando éste gane. (Guerrero, H et al., 2017), es decir que el premio también forma parte de la justicia de un juego.

Durante la entrevista, se le obliga a relacionar las probabilidades en razones, indicando al estudiante 6 que Luis tiene dos tercios la probabilidad de ganar y que Luis por el contrario solo tiene un tercio la probabilidad de ganar, indicando que *“Ahora que me pongo a pensar, Miguel ya no tiene ventaja, cuando respondí me fije únicamente en quien tenía más números para ganar...”* es decir que ignora por completo el premio, posteriormente el entrevistador le modificó la reglas convirtiendo el juego para que este fuese justo sin importar qué competidor se elija ser, sin embargo, el estudiante 6, ahora solo se fijó en el premio *“Creo que preferiría ser Luis, dado que gana más”* esto sin importar que Miguel ganaba mil pero sus probabilidades eran 5 mientras que Luis ganaba cinco mil pero su probabilidad de ganar solo era 1, cumpliendo con las condiciones para que este sea un juego justo, un juego es justo cuando ningún jugador tiene ventaja frente a su competidor o adversario, esto se logra cuando si alguno de los dos tiene menor probabilidad de ganar, el juego se equilibra dando un mayor premio cuando éste gane (Guerrero, H et al., 2017).

Si analizamos el apartado (b) del segundo problema encontramos que 4 de los estudiantes si pueden calcular de manera correcta el valor que ganará cada jugador en una cantidad determinada de lanzamientos del dado, dos de los cuales realizan una regla de 3 para dar una solución al problema planteado, utilizando el número de lanzamientos equivalente al 100% y el porcentaje de ganar en relación con el número totales de juegos que van a jugar, utilizando esta regla, hayan el número de juegos que cada jugador va a ganar y finalmente multiplicando por el valor que gana cada jugador. obteniendo el valor esperado, esta manera de calcularlo es válida

dado que representa la esperanza matemática al finalizar todos los cálculos.

$$(Probabilidad) (Número de juegos) (Valor de victoria) = E(x)$$

El estudiante 1 puede calcular de manera adecuada el valor de las probabilidades, la cual se enseña de manera tradicional en valores posible de valores totales, sin embargo cuando se habla de calcular del valor este indica que *“No se puede calcular cuánto dinero gana cada uno de ellos por la cantidad de juegos y sus porcentajes de victorias”* quedándose únicamente con la definición de probabilidad, sin poder realizar un análisis que le permita predecir sucesos futuros basándose en la probabilidad, recordemos que este suceso puede ser claro únicamente cuando se realizan suficientes ensayos (Tversky y Kahneman, 1974), cuando se le vuelve a realizar la pregunta en la entrevista este indica que *“la probabilidad no va de la mano con el premio, lo que venga relacionado con el premio es un valor agregado”* separando por completo la probabilidad con el premio, dejando únicamente sus concepciones del azar, por el contrario Guerrero (2017) nos indica que un juego es justo cuando ningún jugador tiene ventaja frente a su competidor o adversario.

El estudiante 2, el estudiante 3, el estudiante 4 y el estudiante 6, relacionan directamente la variable con los valores de la probabilidad y el premio. llegando de manera concreta a la respuesta esperada, es así que multiplicando el valor a ganar por cada acierto por la probabilidad de cada jugador y el resultado es multiplicado por los juegos a jugar, llega al valor esperado, siendo este 40.000 para Miguel y 60.000 para Luis, esto coincide con lo que se esperaba que respondiera el estudiante, con la única diferencia que el estudiante 2 realiza la operación concreta, el estudiante 3 y 6 la construyen mediante una regla de 3 simple.

La siguiente tabla representa un resumen de las heurísticas encontradas en los estudiantes seleccionados.

Tabla 2: Rejilla de Análisis.

	Pregunta 1		Pregunta 2	
	Apartado (a)	Apartado (b)	Apartado (a)	Apartado (b)
Estudiante 1	No presenta heurísticas, responde de manera correcta, calculando el espacio muestral y determinando las probabilidades $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$	Analiza correctamente lo que significa que sea un juego justo, por lo cual reparte inversamente proporcional el valor del premio con la probabilidad	Presenta la heurística de insensibilidad al tamaño de la muestra, pues asegura que con solo dos aciertos Luis puede superar una racha de victorias Miguel, en donde no está considerando la variabilidad de los datos, que en muestras pequeñas no toma la forma general de la probabilidad.	No puede realizar un análisis que le permita predecir sucesos futuros basándose en la probabilidad, es decir, que únicamente calcula la probabilidad sin realizar un análisis posterior, y posteriormente desliga el premio del juego argumentando como un valor agregado a la competición.
Estudiante 2	No presenta heurísticas, responde de manera correcta, calculando el espacio muestral y determinando las probabilidades. $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$	Analiza correctamente lo que significa que sea un juego justo, por lo cual reparte inversamente proporcional el valor del premio con la probabilidad	Relaciona adecuadamente la probabilidad y valor a ganar, por lo cual estima que es mejor ser Luis que a la larga obtendrá ventaja dado que tiene mayor premio. es decir tiene una	Calcula de manera adecuada la probabilidad para predecir los posibles juegos que puede ganar cada jugador en un total de 60 lanzamientos y valor a ganar.

			buena noción que el juego es injusto ya que uno de los jugadores tiene mayor premio aunque tenga menos probabilidades de acierto.	
Estudiante 3	No presenta heurísticas, responde de manera correcta, determinando las probabilidades de 75% y de 25%	Analiza correctamente lo que significa que sea un juego justo, por lo cual reparte inversamente proporcional el valor del premio con la probabilidad, usando una base diferente del premio.	No presenta una buena noción de juego justo, pues desliga el premio como parte del juego y basa sus argumentos únicamente en las probabilidades de cada jugador.	Calcula de manera adecuada la probabilidad utilizando una regla de 3 para predecir los posibles juegos que puede ganar cada jugador en un total de 60 lanzamientos y valor a ganar.
Estudiante 4	No presenta heurísticas, responde de manera correcta, determinando las probabilidades de 75% y de 25%	Analiza correctamente lo que significa que sea un juego justo, por lo cual reparte inversamente proporcional el valor del premio con la probabilidad, usando una base diferente del premio.	No presenta una buena noción de juego justo, pues desliga el premio como parte del juego y basa sus argumentos únicamente en las probabilidades de cada jugador.	No responde la pregunta de manera que sea posible identificar si presenta alguna heurística.
Estudiante 5	Presenta el sesgo de equiprobabilidad al considerar que la probabilidad del evento {XC} es igual a {CX},	No presenta la noción de juego justo dado que no tienen en cuenta la variabilidad de los datos en muestras pequeñas.	Presenta heurística de insensibilidad al tamaño de la muestra asume que con solo dos aciertos Luis puede superar una racha de victorias	Calcula de manera adecuada la probabilidad para predecir los posibles juegos que puede ganar cada jugador en un total de 60

			Miguel, en donde no está considerando la variabilidad de los datos, que en muestras pequeñas no toma la forma general de la probabilidad.	lanzamientos y valor a ganar.
Estudiante 6	Presenta el sesgo de equiprobabilidad al considerar que la probabilidad del evento $\{XC\}$ es igual a $\{CX\}$.	No presenta la noción de juego justo, dado que no tienen en cuenta la variabilidad de los datos en muestras pequeñas.	No presenta la noción de juego justo, ya que para él, basta con que el jugador que tiene más probabilidades de ganar, gane menos premio, sin que este se encuentre desproporcionado	Calcula de manera adecuada la probabilidad utilizando una regla de 3 para predecir los posibles juegos que puede ganar cada jugador en un total de 60 lanzamientos y valor a ganar.

Conclusiones.

Del anterior trabajo podemos concluir que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la universidad del valle, que se encuentran cursando sexto semestre o superiores, presentan sesgos y heurísticas cuando se los enfrenta a situaciones que estén permeadas de azar, en el caso particular del trabajo anterior, estas se ven reflejadas cuando deben resolver problemas donde debían volver el juego justo, estos inmediatamente modificaban la probabilidad del juego, volviéndolo equiprobable, desligando el premio del concepto del juego justo, según los resultados esperados, se esperaba una fuerte tendencia a querer escoger el participante que tuviera la mayor probabilidad, dado que, el mismo concepto de juego justo no es claramente definido ni estudiado en ninguno de los niveles de escolaridad de este país.

En los estudiantes seleccionados, el mayor sesgo encontrado fue la equiprobabilidad, y esto se debe al tener la idea errónea de que un suceso es igual a otro dadas sus características, del problema 1, tenemos que para los estudiantes la probabilidad de obtener $\{C,C\}$ es igual a la probabilidad de obtener $\{X,C\}$ esto debido a la creencia errónea que la mayoría de los sucesos están relacionados de manera equiprobable, esto debido a la dificultad de establecer conexiones entre los modelos combinatorios y los sucesos donde interviene el azar (Lecoutre, 1992), ligado al sesgo anterior el estudiante realiza el análisis de manera incorrecta, ya sea cuando se debía balancear el premio para que el juego fuese justo, estos argumentaban que el jugador con menos probabilidad debía ganar el doble de lo que ganará el jugador con mayor probabilidad, por otro lado, con la probabilidad, dado que para los estudiantes que presentan este sesgo, existían solo tres posibles resultados $\{CC, CX, XX\}$

Al realizar preguntas donde se deben establecer unas condiciones, para que el juego sea justo, la mayoría solo se fijaban en la probabilidad y dejaban de lado el premio, argumentando

querer ser el participante con mayor probabilidad de ganar, dejando de lado el premio, el cual también se podía redistribuir para volver el juego justo, ya que, el premio y la probabilidad son inversamente proporcionales, esto quiere decir que a mayor probabilidad menor debe ser el premio recibido, y a menor probabilidad mayor debe ser el premio a ganar, aun así, cuando se les preguntaba si podían arreglar el juego para que fuera equitativo estos buscaban volver el juego equiprobable, resultados que coinciden con los obtenidos por Azcarate, P. (1995)

En la resolución del problema dos, ítem (a), la gran mayoría de los estudiantes enfrentaron dificultades al responder quién tenía ventaja en el juego, si Miguel o Luis. A diferencia del problema anterior, en este caso tanto la probabilidad de ganar de cada jugador como el premio a obtener eran diferentes, lo que hacía la decisión más complicada. Algunos afirmaron que Miguel tenía ventaja basándose únicamente en la probabilidad de ganar, mientras que otros se enfocaron solo en el premio que Luis recibiría. Sin embargo, estas respuestas no eran suficientes para responder apropiadamente a la pregunta del cuestionario, ya que omitían información necesaria.

Otros estudiantes intentaron resolver el problema utilizando una heurística, tratando de observar casos donde uno u otro jugador ganaba en algunos ensayos. Si bien esto puede ser útil para identificar la tendencia a ganar más dinero, tiene el riesgo de caer en la heurística de representatividad, y como consecuencia, en la insensibilidad al tamaño de la muestra. Por ejemplo, en una simulación con un número reducido de ensayos del experimento de lanzar un dado, podría ocurrir que Miguel ganará más dinero que Luis, llevando al estudiante a afirmar que Miguel tiene ventaja en el juego. No obstante, no se estaría considerando que en muestras pequeñas la variabilidad es alta, y que esta variabilidad disminuye a medida que se aumenta el número de ensayos en las simulaciones, como respalda la ley de los grandes números.

Así, se pudo evidenciar la aparición de la insensibilidad al tamaño de la muestra en la solución de este problema sobre juego equitativo.

Una de las heurísticas identificadas en este apartado fue la heurística de representatividad puesto que los estudiantes creían que en pequeñas pruebas iban a surgir patrones regulares de probabilidad, es ahí donde asumen que si un Luis a ganado un número determinadas de veces, el que tiene menor probabilidad con solo dos veces seguidas que gane, lo igualara o lo superará, dando a entender que hay una mala extensión del teorema de los grandes números, al aplicarlo a pequeñas muestras, esta heurística conduce directamente a la insensibilidad al tamaño de la muestra al creer que en muestras pequeñas el azar se va a comportar de tal manera que si Luis gana 4 juegos el quinto lo ganara Miguel, pero recordemos que este es un evento independiente, por lo que el resultado anterior, no afecta a evento futuro cada chance tiene la misma probabilidad de salir en cada turno (Díaz, C. 2003).

Del párrafo anterior también se desprenden la concepciones erradas del azar, donde los estudiantes pueden inferir de manera equivocada que el azar es un corrector de eventos, es así, como en una racha de seis aciertos por parte de Luis, se cree más probable que el séptimo lanzamiento sea Miguel quien gane la ronda, dado que este aún no ha ganado y la probabilidad nos hace creer que de seis lanzamientos mínimo 2 ganara Miguel, lo cual es una mala interpretación de la ley de los grandes números que asegura que en juegos extensos Miguel tendrá la ventaja, pero en muestras pequeñas, la variabilidad de los datos podría llevar a una racha ganadora de Luis (Tversky y Kahneman, 1974).

Durante una de las entrevistas, surgió un resultado inesperado en el que se preguntó al estudiante 1 si consideraba justo el juego entre Ana y María. Su respuesta afirmativa se basó en que, si ambos jugadores están de acuerdo con las condiciones de un juego, entonces este es justo.

A pesar de que se le presentaron diversas situaciones con juegos de azar y loterías, el estudiante mantuvo su respuesta inicial.

Es importante recordar que este estudiante, al igual que los otros cinco entrevistados, aún no ha cursado la materia de estadística. Por lo tanto, sus respuestas reflejan en gran medida sus intuiciones y creencias. Esto resalta la necesidad de desarrollar el pensamiento estadístico y aleatorio para superar este tipo de razonamientos que conducen a concepciones erróneas.

Respecto al objetivo donde se pretende identificar las heurísticas, se pudieron caracterizar la heurística de representatividad, insensibilidad al tamaño de la muestra, concepciones erradas sobre el azar que afectan directamente a la concepción de un juego justo, dado que estos errores, llevaban a unos razonamientos errados que hacían que los datos obtenidos no fueran los que se debían calcular haciendo que se omitieron datos o que por el contrario se utilizarán datos basados en estas heurísticas, por lo cual se mencionan a continuación cuales son estas heurísticas que afectan la interpretación de un juego justo.

Se identificó la heurística de la insensibilidad al tamaño de la muestra, dado que, los estudiantes pretendían que en muestras pequeñas se pudiera evidenciar que los aciertos del jugador que tenía mayor probabilidad en este caso Luis, fueran superados en tan solo dos aciertos del jugador que tiene menor probabilidad pero más premio, esto dado a una mala interpretación del teorema de los grandes números dado que este asegura que Luis si tendrá una ventaja, pero esta ventaja será visible únicamente en muestras grandes, esto quiere decir que, se toma a las pequeñas muestras como representativas en las características de las poblaciones de donde proceden. (Díaz, C. 2003).

Otra de las heurísticas identificadas fue la equiprobabilidad, en el apartado (a) de la pregunta 1, donde se consideraba que la probabilidad de obtener $\{CX\}$ es exactamente la misma que obtener $\{XC\}$, esto indica que están observando el suceso como uno solo, lo cual los lleva a caer en dicha heurística, la cual afecta más adelante la manera en cómo pueden relacionar la probabilidad con el valor del juego, una declaración de la creencia de un individuo, de que todos los eventos asociados con cualquier ensayo aleatorio tienen la misma probabilidad. Lecoutre argumenta que esto no se debe a la falta de razonamiento combinatorio, sino a la dificultad de hacer conexiones entre los modelos combinatorios y las situaciones en las que entra en juego el "azar". (Lecoutre, 1992).

Al identificar cada heurística utilizada por los estudiantes y elaborar la tabla de análisis, es posible identificar con precisión la heurística que utilizaron en cada pregunta del instrumento y entrevista, correlacionando cada apartado directamente con las respuestas de estos 6 estudiantes de acuerdo con la dificultad de la pregunta en cada problema.

Según los resultados de la rejilla, se puede observar que las estrategias donde una buena formación en matemática, no es suficiente para resolver los problemas donde el azar juega un papel importante, dado el contexto, donde los juegos de azar forman parte casi diaria de los colombianos, sería de prudente enseñar estos contenidos en probabilidad que le permitan a los colombianos tener una herramienta en la cual evaluar si es viable participar en los juegos de azar.

Dadas las limitaciones que presentamos, sólo pudimos realizar dicha prueba a un total de 20 estudiantes de sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la universidad del valle en donde al final se analizan 6 estudiantes que permitieron que se realizará una entrevista semiestructurada, la cual permite profundizar en las creencias que presentaban sobre los juegos equitativos, es decir, que pudimos identificar y analizar dichas heurísticas de una muestra

pequeña de la población y que finalmente estas heurísticas no se van a solucionar dado que, la nueva reforma en la educación matemática de la Universidad del Valle ha limitado los cursos de la línea de la estadística aun con los requerimientos que se están exigiendo, además que sólo abordamos dos problemas que fueron adaptados a nuestro contexto del trabajo de Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro, J. J., & Contreras García, J. M. (2017), recordemos que en nuestro contexto los juegos de azar se encuentran presentes en los ámbitos cotidianos, lo cual hace propicio que se pueda profundizar en los juegos de azar locales y se permita concientizar a la población sobre la equidad de estos juegos.

Con el fin de mitigar las heurísticas y sesgos usados por los docentes en formación, se ha diseñado una ficha de laboratorio, la cual plantea la solución del enunciado 2 a través de una serie de pasos y preguntas que encaminan a través de la experimentación en el juego de dos competidores determinar la justicia del juego, en el cual un jugador tiene una ventaja notable en cuestiones de la probabilidad, pero a su vez el otro participante posee un mayor premio cuando éste acierta, es así como cada pregunta encamina a la reflexión por cada paso que se avanza en la ficha técnica.

Anexos.**UNIVERSIDAD DEL VALLE****Facultad de Educación y Pedagogía****Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas.***Cali, abril 17 de 2023***Instrumento Trabajo de Grado.**

Adaptado de: Guerrero, H., Ortiz de Haro, J. & Contreras, J. (2017) Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. Se ha tomado el presente instrumento con el fin de recabar información acerca de cómo se toman decisiones en circunstancias de incertidumbre. El objetivo principal es identificar los razonamientos y heurísticas utilizadas para llegar a la solución de los problemas planteados, a través de las respuestas obtenidas.

Nombre completo: _____

Programa al que pertenece: _____

Semestre que cursa actualmente: _____

¿Ya cursó la asignatura de estadística o tiene formación en estadística recibida en otros programas técnicos o universitarios? _____

Problema 1. Ana considera que es muy buena en los juegos de suerte y azar así que le propone a su amiga María en la hora de descanso al medio día el siguiente juego. Se lanzan al aire dos monedas legales, esto quiere decir que en cada moneda se tiene igual probabilidad de salir cara o cruz. Luego observan el resultado.

Ana gana 1000 pesos si aparecen una o dos caras y María gana 1000 si no aparece ninguna cara.

a. Si jugaras ¿Prefieres ser Ana o María? ¿Por qué?

b. Un juego es justo cuando no favorece a ningún participante, es decir, ninguno tiene más

ventaja que el otro. ¿Qué cantidad debería ganar María para que el juego fuera justo?

Problema 2. Miguel y Luis salen del colegio tras una agotadora jornada, camino a casa Luis le propone a su compañero Miguel el siguiente juego mientras beben una refrescante limonada en una cafetería. Se lanza un dado justo de seis caras, esto quiere decir que al lanzarlo, cualquiera de los seis resultados obtenidos tiene la misma probabilidad de salir. Miguel gana 1000 pesos si el número obtenido es 1, 2, 3, o 4. Si el número es 5 o 6 Luis gana 3000 pesos.

a. ¿Tiene alguno de los chicos ventaja en el juego? ¿Por qué?

b. ¿Cuánto piensas que ganará aproximadamente cada chico si juegan 60 veces al juego?

Nota: Los datos obtenidos mediante la siguiente encuesta serán utilizados únicamente con fines académicos, para lo cual solicitamos firme a continuación la

Autorización para el proceso de los datos: _____

Referencias.

Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro, J. J., & Contreras García, J. M. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 11. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.170>

Juego Equitativo	
Pensamiento Estadístico	
El juego equitativo es un concepto fundamental en la teoría de la probabilidad y tiene una amplia aplicación en diversos contextos, incluyendo el ámbito educativo, como lo veremos en el siguiente juego: <i>“Miguel y Luis salen del colegio tras una agotadora jornada, camino a casa Luis le propone a su compañero Miguel el siguiente juego mientras beben una refrescante limonada en una cafetería. Se lanza un dado justo de seis caras, esto quiere decir que al lanzarlo, cualquiera de los seis resultados obtenidos tiene la misma probabilidad de salir. Miguel gana 1000 pesos si el número obtenido es 1, 2, 3, o 4. Si el número es 5 o 6 Luis gana 3000 pesos.”</i> a. ¿Tiene alguno de los chicos ventaja en el juego? ¿Por qué? b. ¿Cuánto piensas que ganará aproximadamente cada chico si juegan 60 veces al juego? Para dar respuesta a estas preguntas, vamos a repartir entre 2 jugadores un total de 100 mil pesos para cada jugador, jugando de la misma manera que Luis y Miguel, sin embargo, vamos a modificar el monto de la apuesta, ahora cada que salga 1, 2, 3 o 4, Miguel ganará un total de \$ 2 000 y Juan ganara un total de \$ 10 000 si sale 5 o 6. Instrucciones Realizar el juego durante 10 rondas.	- Compara el total de victorias de cada jugador. - Compara la cantidad de dinero de cada jugador al finalizar las 10 rondas. Podemos recordar que la probabilidad se puede expresar como: $\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}} = \text{Probabilidad}$ ¿Cuál es la probabilidad de cada jugador de ganar? Compara los resultados. (<i>organiza la probabilidad en casos favorables de casos totales</i>). - Al analizar los numeradores de las comparaciones de las probabilidades, ¿qué puedes observar? - Con el análisis anterior responde la pregunta a. ¿Cuánto dinero podría esperar ganar Miguel, si participa en 6 juegos? ¿Cuánto dinero podría esperar ganar Luis, si participa en 6 juegos? - Con el análisis anterior responde la pregunta b. - Comparando la probabilidad entre los dos jugadores, ¿Cuánto dinero debería de ganar Juan para que el juego sea justo, para ambos jugadores? ¿Qué condiciones deberían cumplirse para determinar que un juego sea justo? - Con base en la pregunta anterior responde ¿Cómo es la relación de la probabilidad con el valor de la apuesta? Elaborado por: Jeisson Miranda Fajardo Fecha: 06 de junio de 2023

SOPORTE DE FICHA N.º SP-009

Objetivos:

- Mostrar la generalización de la media aritmética en el análisis de la justicia de los juegos de azar.
- Desarrollar el pensamiento estocástico utilizando la esperanza matemática.

Materiales

requeridos:

Los materiales que se necesitan para trabajar la ficha son los siguientes, un dado (4 Dados, rojo, azul, amarillo y verde) y billetes didácticos (13 billetes de 2.000, 16 billetes de 5.000, 16 billetes de 10.000, 16 billetes de 20.000, 17 billetes de 50.000, 19 billetes de 100.000 y 8 paquetes de monedas)

Análisis y estrategia de solución:

“El juego equitativo es un concepto fundamental en la teoría de la probabilidad y tiene una amplia aplicación en diversos contextos, incluyendo el ámbito educativo. Sin embargo, en este constructo curricular no se establece un vínculo entre la media aritmética con su generalización que es la Esperanza matemática además, sería también interesante recomendar desde estos ámbitos académicos la incorporación de la historia de las matemáticas como un articulador del proceso de enseñanza.”

Se lanza un dado Justo, así que cada uno de los resultados es igual de probable que ocurra. Miguel gana si al lanzar el dado ocurre uno de los siguientes resultados (1, 2, 3, 4), es decir que gana en cuatro de los resultados obtenidos, en caso contrario gana Luis.

Sea el evento M = “gana Miguel” y el evento L = “gana Luis”. Luego la probabilidad de ganar Miguel es $P(M) = \frac{4}{6}$ y la Probabilidad de ganar Luis es $P(L) = \frac{2}{6}$. Por cada ronda de juego se espera que Miguel gane $1000 * 6 * \frac{4}{6} = 4000 \text{ pesos}$, mientras que por cada ronda del mismo juego se espera que Luis gane $3000 * 6 * \frac{2}{6} = 6000 \text{ pesos}$, esto pone en una situación de desventaja en el juego a Miguel frente a Luis, aunque Luis tiene la mitad de probabilidad de ganar que la que tiene Miguel, su premio es tres veces mayor que el que gana su competidor cada vez que se le da el resultado favorable.

La ganancia de miguel en una serie de 60 juegos será $G(M) = 1000 * 60 * \frac{4}{6} = 40000 \text{ pesos}$ en 60 ensayos, para la ganancia de Luis se hace un cálculo similar, $G(L) = 3000 * 60 * \frac{2}{6} = 60000 \text{ pesos}$. Estos son valores aproximados pero se puede ver ya una diferencia importante entre las ganancias de ambos al jugar este juego. Este último resultado apoya la afirmación que el juego es favorable a Luis.

Generalidades: Se sugiere comparar las probabilidades de la forma casos favorables sobre el total de casos y simplificar dichas expresiones para poder observar la mínima expresión, y poder comparar los numeradores de las fracciones con el fin de determinar cuánto debe ser el valor que debe ganar cada jugador para que el juego sea justo, se sugiere recordar que el valor a ganar es inversamente proporcional a la probabilidad, esto quiere decir que, a mayor probabilidad, menor debe ser el valor a ganar.



Referencias.

- Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en Educación Primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa*, 251, 12-17.
- Andrade, L. et al. (2013). Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas. *La Búsqueda Del Espacio Muestral 'original': Una Necesidad Para La Enseñanza*, Universidad Central de Venezuela, 2013. Capítulo 4. pp 81-93 ISBN: 978-980-00-2744-8.
- Azcárate, P. (1995). El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. y Porlán, A. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 1998, Vol. 16, n.º 1, pp. 85-97.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2012). El currículo de estadística: reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO*, 59, 9-17.
- Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias Universidad de Granada. ISBN 84-699-4295-6.
- Campos, T., Cazorla, I. y Kataoka, V. (2011). Statistics school curricula in Brazil. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), pp. 5-8.

- Cobb, P. y Mc Clain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students' statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Coljuegos. (2017). Mercado y alternativas de juegos de suerte y azar en Colombia.
- Díaz, D. (2013). Estudio histórico-epistemológico del surgimiento de la esperanza matemática. Universidad del valle. Santiago de Cali.
- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. CD Rom.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.
- Duval, R. Sáenz-Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: *perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 1-264). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro, J. J., & Contreras García, J. M. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 11. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.170>
- Gómez, E. (2016). Estadística y Probabilidad en el Currículo Colombiano para la Educación Básica y Media. Sincelejo, Sucre, Colombia.

- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. (New York: Cambridge University Press).
- KELLY, A.E. y LESH, R.A. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. Educational Studies in Mathematics, 23(6). <https://doi.org/10.1007/BF00540060>.
- León, J. (2017). Caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a juegos equitativos. Universidad del Valle. Santiago de Cali.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (7 de junio de 1998). Serie Lineamientos Curriculares [Matemáticas]. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Mohamed, N. (2012). Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Molina, E., Contreras, J., Salcedo, A. y Contreras, J. (2020). Educación Matemática, Evaluación de la postura crítica de futuros profesores de Educación Primaria como componente de la cultura estadística. Vol 32, Núm 3.

- Morse J. M., & Niehaus, L. (2010). *Mixed method design: Principles and procedures*. Walnut Creek, CA, EE. UU.: Left Coast Press.
- OECD (2019), *PISA 2018 Results (Volume III): What School Life Means for Students' Lives*, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/acd78851-en>.
- Ortiz, J, et al (2012). "Conocimiento De Futuros Profesores Sobre La Idea De Juego Equitativo." *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, Comité Latinoamericano De Matemática Educativa A.C., www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362012000100004&script=sci_arttext.
- Rendón, O. (11 de diciembre de 2022). 100.000 apuestas diarias se hacen en Colombia por el Mundial. *El Colombiano*. [100.000 apuestas diarias se hacen en Colombia por el Mundial \(elcolombiano.com\)](http://elcolombiano.com)
- Ruiz-Pérez, José Ignacio, and Enrique Echeburúa-Odrizola (2017). "Cuestionario Breve De Juego Patológico En Estudiantes Colombianos: Propiedades Psicométricas." *Universitas Psychologica*, Pontificia Universidad Javeriana, www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1657-92672017000300234.
- Sánchez, L. (2018). *Estrategias para gerenciar el currículo de estadística en grado noveno: ¿qué, cómo y cuándo evaluar?* Universidad del Tolima. Ibagué-Tolima.

- Shaughnessy, J. (1977): Misconceptions of probability: An experiment with a small –group, activity – based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 295 – 316.
- Soto, G. V. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes/Teaching experiments: a methodological alternative to research in the context of the initial teacher training. *Actualidades investigativas en educación*, 14(3).
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *New series*, 185(4157), 1124–1131.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. *Cambridge University Press.*, 84–100.