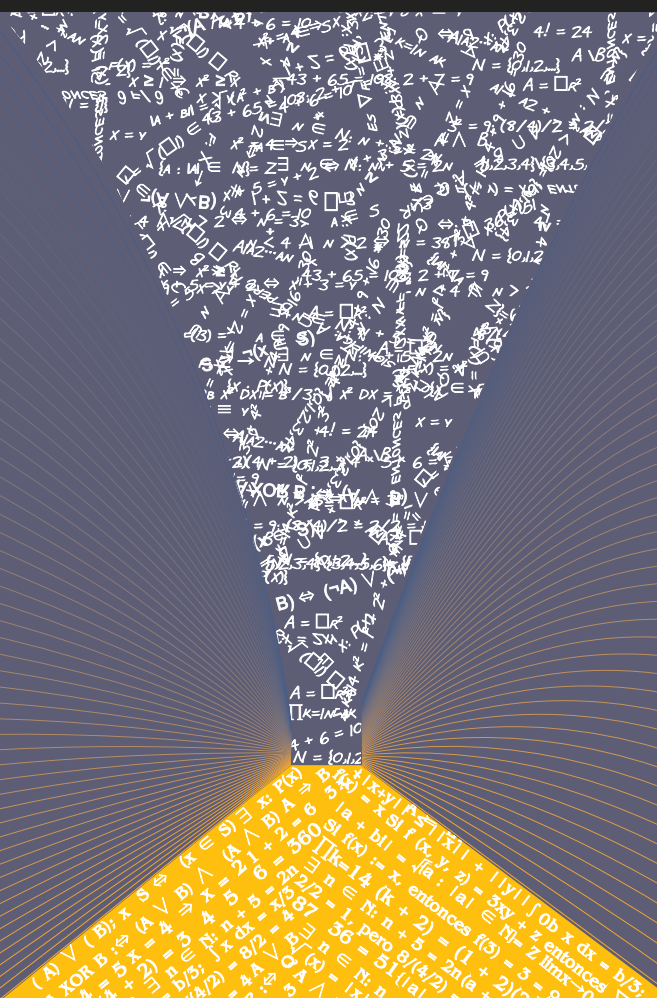


APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

DESDE UN ENFOQUE COMUNICACIONAL

• ANNA SFARD •



**Aprendizaje de las
matemáticas escolares
desde un enfoque comunicacional**

E&P

Colección Educación y Pedagogía

ANNA SFARD

De sólida formación en matemáticas y física, y con intereses académicos, de vieja data, en historia, filosofía y lenguaje, Anna Sfard se especializa en educación matemática. En la actualidad es Professor de la Universidad del Estado de Michigan y de la Universidad de Londres, así como también de la Facultad de Educación de la Universidad de Haifa, donde trabaja desde el año 1995.

Se destaca además su labor como editora y como invitada especial en conferencias y eventos de educación matemática del mundo entero.

A través de sus permanentes investigaciones en educación matemática, el foco principal de su indagación ha sido el desarrollo del discurso matemático, tanto desde el punto de vista histórico como ontogenético. En esta labor el asunto de la objetificación ha ocupado un lugar especial, dirigido por preguntas sobre el origen de los objetos matemáticos y acerca de la transición del pensamiento operacional al pensamiento estructural (reificación).

En particular, en una serie de estudios realizados con estudiantes de doctorado en Israel, Canadá y los Estados Unidos, Sfard ha estado investigando el desarrollo del discurso algebraico, el discurso sobre los números negativos, el discurso numérico inicial, el discurso matemático de estudiantes que alcanzan grandes logros o que han sido diagnosticados con problemas de aprendizaje, y el discurso profesional de profesores de matemáticas de secundaria.

Numerosas publicaciones de artículos en revistas y capítulos en diversos libros, dan cuenta de los resultados teóricos y empíricos de estos estudios, y próximamente aparecerá otro compendio de su trabajo en un nuevo libro. La divulgación de estas ideas novedosas puede contribuir enormemente a la comprensión y evolución de las transformaciones que sufre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la mayor parte de los países

**Aprendizaje de las
matemáticas escolares
desde un enfoque comunicacional**
Anna Sfard

E&P

Colección Educación y Pedagogía

Sfard, Anna

Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional / Anna Sfard. — Santiago de Cali : Programa Editorial Universidad del Valle, 2008.

272 p. : il. ; 24 cm. — (Colección libro de investigación)

1. Educación Matemática - Investigación

2. Matemáticas - Aprendizaje I. Tít. II. Serie.

510.7 cd 21 ed.

A1157521

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle

Programa Editorial

Título: *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*

Autora: Anna Sfard

ISBN: 978-958-670-633-9

ISBN PDF: 978-958-765-607-7

DOI: 10.25100/peu.183

Colección: Educación y pedagogía

Primera Edición Impresa **marzo 2008**

Edición Digital **febrero 2018**

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios

Vicerrector de Investigaciones: Jaime R. Cantera Kintz

Director del Programa Editorial: Francisco Ramírez Potes

© Universidad del Valle

© Anna Sfard

Diseño de carátula: Programa Editorial

Este libro, o parte de él, no puede ser reproducido por ningún medio sin autorización escrita de la Universidad del Valle.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad del Valle, ni genera responsabilidad frente a terceros. El autor es el responsable del respeto a los derechos de autor y del material contenido en la publicación (fotografías, ilustraciones, tablas, etc.), razón por la cual la Universidad no puede asumir ninguna responsabilidad en caso de omisiones o errores.

Cali, Colombia, febrero de 2018

AGRADECIMIENTOS

El Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, se complace en presentar este libro a la comunidad académica del campo de investigación en Educación Matemática. En él se recopilan algunos de los artículos más importantes de la investigadora Anna Sfard, resultado de sus investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares. El enfoque comunicacional propuesto por Sfard en la reconceptualización del aprendizaje, constituye un valioso aporte para estudiantes, docentes e investigadores, interesados en profundizar sobre los problemas de comprensión y de formación de pensamiento matemático.

Con esta publicación, el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, da continuidad a la divulgación de obras de relevancia internacional, por su interés académico, para la formación de docentes e investigadores en Educación Matemática.

Esta obra se suma a dos trabajos ya publicados por la Universidad del Valle en esta línea, que han tenido incidencia importante en la formación de pregrado y de postgrado en Educación Matemática en el país: *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* del investigador francés Raymond Duval, y *Aproximación sociocultural a la educación matemática* del investigador inglés Alan Bishop.

Por su contribución a este gran propósito de divulgación, le expresamos a Anna Sfard nuestra profunda gratitud, por aceptar que la Universidad del Valle realice la publicación en español de algunos de sus trabajos. Así mismo, extendemos nuestro agradecimiento a los editores de las publicaciones originales en inglés por autorizar la publicación de las respectivas traducciones.

Luisa Andrade y Patricia Inés Perry, quienes como traductoras y editoras de la traducción han dedicado enormes esfuerzos para hacer realidad esta publicación.

Manifestamos nuestro reconocimiento a la profesora Mercedes Guhl quien, desde el Programa de Especialización en Traducción Inglés-Español de la Universidad Nacional de Colombia, por segunda vez apoya una publicación del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, siendo coordinadora del proceso de traducción de los capítulos cuarto a séptimo de este libro. Hacemos extensivo este reconocimiento a quienes participaron en la traducción: Yezid Arévalo, Sergio E. Cortés, Cilia C. Gómez, María Emilia Aponte, Daniel Orozco, Francisco Pérez, Luz D. Acosta, Giovanni Camacho, Ángela M. Forero, Catalina Ruiz, Diego H. Gómez, Pascual Orduz y Jaime Soler.

TABLA DE CONTENIDO

Prólogo	11
Presentación de la obra	15
Capítulo 1. Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas	23
Introducción	23
Aprender matemáticas: la metáfora de la adquisición versus la metáfora de la participación	25
¿Qué cambia la metáfora de la participación?	31
Pregunta para concluir: ¿hay que elegir una de las dos metáforas?	35
Capítulo 2. Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso	39
Planteamiento de la pregunta: ¿qué es lo que cambia cuando uno aprende matemáticas?	39
Enfoque comunicacional del aprendizaje	44
¿Cómo creamos nuevos usos de palabras y mediadores?	47
¿Cómo creamos nuevas reglas metadiscursivas y las convertimos en propias?	53
Consideraciones finales: ¿cómo afecta todo esto a la práctica?	62
Capítulo 3. Enfoque comunicacional para investigar el aprendizaje de las matemáticas	65

Capítulo 4. Conducción del discurso por entre la metáfora y el rigor: el análisis focal para investigar el surgimiento de los objetos matemáticos71

¿Qué es la comunicación?75

Una condición necesaria de la eficacia: mantener enfocado el discurso80

Cuando no hay focos discursivos preexistentes: creación de objetos matemáticos87

Resumen, discusión y conclusiones: los objetos matemáticos como producto de la necesidad de comunicarse104

Capítulo 5. La cognición como comunicación: reconsiderar el aprendizaje mediado por la conversación, a través del análisis multifacético de las interacciones matemáticas de los estudiantes 111

Introducción: preguntas sobre el aprendizaje mediado por la conversación 112

Anotaciones preliminares sobre el pensar como acto comunicativo 119

¿Se comunican Ari y Gur? Análisis focal del encuentro inicial entre ellos124

¿Por qué no se comunican? Análisis preocupacional del encuentro inicial de Gur y Ari133

¿Aprenderán a comunicarse? Análisis del encuentro posterior entre Ari y Gur147

Conclusiones: reconsiderar el aprendizaje mediado por la conversación155

Metaconclusiones: reconsideración de nuestras ideas acerca del pensar158

Capítulo 6. En el discurso hay más de lo que se oye: mirar el pensamiento como acto comunicativo para aprender más acerca del aprendizaje matemático163

Preguntas que hemos planteado desde siempre sobre el pensamiento matemático, aún vigentes164

Enfoque comunicacional de la cognición175

¿Cómo cambia el panorama el enfoque comunicacional?

Retomar las preguntas iniciales	188
Epílogo: cambiar mundos con palabras	208
Capítulo 7. Sobre el movimiento de reforma y los límites del discurso matemático	211
Algunas preguntas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que todo reformista debe formular	211
Preparación del escenario para responder las preguntas del reformista: hablar de aprendizaje en términos del discurso	215
El uso del lente discursivo para responder las preguntas originales	233
La reforma, ¿qué tan bien suple las necesidades del participante inexperto en el discurso matemático?	238
¿Qué se puede hacer para salvar tanto el discurso matemático del salón de clase como la reforma (y enseñar los números negativos de una forma significativa)?	244
Un glosario para el enfoque comunicacional del pensamiento	249
Términos explícitamente redefinidos	250
Términos y dicotomías que se han removido del discurso	254

**PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

PRÓLOGO¹

Los textos que conforman este libro surgen de dos preocupaciones profesionales muy persistentes: una de índole general y otra personal. Como muchos de mis colegas no he estado satisfecha con la investigación existente sobre aprendizaje, y como muchos otros decidí remediar el problema tratando de revisar los anteojos conceptuales existentes.

El primer problema al que se enfrenta el investigador que está interesado en cómo las personas aprenden en general, y en cómo aprenden matemáticas en particular, es la oscilación entre dos deseos conflictivos: el de ser científico, lo que sea que esta palabra pueda significarle, y el deseo de captar la esencia de los fenómenos inherentes al ser humano. La no tan larga pero muy turbulenta historia de la investigación sobre el aprendizaje humano muestra que las dos metas de esta investigación —la de reproductibilidad científica, rigor y acumulatividad, por una parte, y la de hacer justicia a la complejidad de lo “exclusivamente humano”, por otra— son algo contradictorias y no son fáciles de reconciliar. Además de este dilema de vieja data, hay uno nuevo, generado por avances tecnológicos recientes. En la actualidad, la investigación sobre el aprendizaje se encuentra en estado de perturbación. Desde cuando las grabadoras de audio y de video se convirtieron en herramientas usuales de la actividad investigativa, nuestra capacidad para analizar y explicar las actividades humanas va a la zaga de nuestra capacidad de observar y de ver. A este respecto, nuestra situación actual es comparable a la de los científicos del siglo XVII cuando acababan de

¹ Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E.]

enfrentarse con el microscopio recientemente inventado: lentes poderosos de alta resolución que revelan lo nunca antes observado deben estar correspondidos por un aparato teórico igualmente poderoso. Los enfoques disponibles para el estudio del aprendizaje, sean tradicionales o nuevos, se quedan cortos en proporcionar técnicas interpretativas que hagan justicia completa al nuevo tipo de información. Bajo un escrutinio recurrente, las réplicas permanentes de eventos de la vida real se muestran demasiado complejas y muy llenas de detalles finos para las herramientas más bien burdas de los enfoques cognitivistas tradicionales. Nuestra indefensión como investigadores se agrava más por el hecho de que las pedagogías actuales de “aulas conversacionales” y de “comunidades de indagación” hacen los procesos de aprendizaje no sólo más visibles sino también mucho más intrincados y confusos.

La razón más personal para mis intentos de reconceptualizar el aprendizaje fue la necesidad hondamente sentida de una mejora en mis propias prácticas de investigación. La insatisfacción con lo que yo había estado haciendo comenzó cuando después de completar mi disertación doctoral descubrí que sus ideas teóricas centrales no eran suficientemente operacionales para guiar la investigación empírica. Mi escrutinio posterior del campo hizo que me diera cuenta de que no estaba sola en este predicamento: la falta de operacionalidad parecía ser una aflicción universal de los discursos sobre el aprendizaje. La imprecisión inherente al vocabulario de los investigadores no carecía de consecuencias: vistos más de cerca, muchos de los desacuerdos actuales que dividen a la comunidad de investigación me parecieron un simple resultado de la falta de reconocimiento de la diversidad en los usos de palabras clave básicas por parte de los investigadores.

En estos días muchos investigadores trabajan en pos de marcos conceptuales que posiblemente ayuden a resolver viejos dilemas y a enfrentar el reto de las nuevas complejidades descubiertas. Se han hecho ya algunas propuestas promisorias y otras están en camino. El enfoque comunicacional presentado en este libro es producto de veinte años de búsqueda de la operacionalidad, combinada con intentos de hallar una ruta segura entre dos necesidades conflictivas, la necesidad de una comprensión útil, por una parte, y la necesidad de comunicabilidad y acumulabilidad, por la otra. Este marco especial, hecho a la medida de las necesidades de investigación sobre el pensamiento matemático y el aprendizaje, se ofrece en este libro como una evidencia de que comprometerse con la segunda necesidad no es el precio necesario para satisfacer la primera. Dicho esto, la tarea de construir el marco no está cerca de completarse. Por tanto, recomiendo ver este volumen como un resumen provisional de los esfuerzos continuados míos y de mis colegas.

Reconocimiento: Estoy en deuda con Luisa Andrade y Patricia Inés Perry por la iniciativa de publicar este libro, por su persistencia y determinación para superar las dificultades que una empresa como esta conlleva. Asimismo extiendo mi agradecimiento a la Universidad del Valle por el invaluable apoyo a esta iniciativa, y por llevarla a feliz término.

Anna Sfard
Haifa, marzo de 2007

**PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

PRESENTACIÓN DE LA OBRA

En las últimas décadas, la comunidad de educación matemática ha estado viviendo un cambio en la forma de concebir e investigar el aprendizaje; de ser visto como una acción esencialmente individual ha pasado a ser visto como una acción inherentemente social y cultural (Yackel, 2000)¹. Señala Leitão (2001)² que probablemente uno de los factores asociados con el creciente interés de los investigadores en la relación entre las prácticas discursivas y los procesos de construcción de conocimiento y, por tanto, en las formas de discurso que emergen en ambientes de aprendizaje, es la gran influencia que las aproximaciones socioculturales al desarrollo mental, lingüístico y psicológico han tenido en la investigación educativa occidental desde los años sesenta. Para estos investigadores, la percepción del lenguaje como una acción significativa y mediada por signos es la clave para comprender cómo los individuos negocian y construyen significado en contextos diseñados para la enseñanza y el aprendizaje.

En particular, en la década de los años noventa se proponen definiciones de aprendizaje que tienen que ver con el hecho de hacer parte de una comunidad de práctica al participar de manera adecuada y competente en ella, originadas

1 Yackel, E. (2000). Introduction: Perspectives on semiotics and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 1-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

2 Leitão, S. (2001). Analyzing changes in view during argumentation: A quest for method. *Forum: Qualitative Social Research*, 2 (3). (<http://www.qualitative-research.net/fqs/fqseng.htm>, consulta hecha en enero de 2006).

principalmente en los planteamientos de Lave y Wenger (1991)³. Según la interpretación de Gómez (2000)⁴ de tales planteamientos, el aprendizaje surge de un proceso de negociación de significado a través de la relación simbiótica entre participación y materialización: por medio de la participación se establecen relaciones con otras personas, se define la forma de hacer parte de una comunidad que tiene entre manos la realización de una determinada empresa y, por tanto, la forma de comprometerse en su logro, y se desarrolla la propia identidad; mediante la materialización se proyectan los significados personales y se perciben como existentes en el mundo de tal manera que se logra reflejar la experiencia en cosas concretas. La incorporación de aprendices a las comunidades de práctica se da por un proceso de participación periférica legítima, guiado por un experto.

Aunque este nuevo paradigma del aprendizaje todavía está lejos de estar maduro y de tener unos fundamentos teóricos sólidos y aceptados en general (Cole, 1995)⁵, existen ya aproximaciones bastante precisas, como las ideas y postulados trabajados por la investigadora Anna Sfard para el campo de la educación matemática. Ella es, sin lugar a dudas, una de las más destacadas e importantes académicas de la comunidad internacional en el área.

De la revisión de su trabajo, aun cuando sea superficial y ligera como la que podemos alegar haber hecho las editoras de la traducción que se presenta en esta obra, sobresalen varios aspectos que confirman el reconocimiento y relevancia de su propuesta.

La formulación de manera tan completa y coherente de una teoría, como pocas veces se da, que además de enunciar y explicar los principios teóricos los contraste con otros y los aterrice en la práctica para su utilización. La postura crítica pero a la vez moderada de la investigadora que la convierte en un adalid de la comunidad de educadores matemáticos; su creencia en el beneficio del pluralismo teórico, con respecto a lo cual afirma que “la exclusividad es enemi-

³ Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

⁴ Gómez, P. (2000). Teorías de aprendizaje y formación inicial de profesores. (<http://cumbia.ath.cx/pna.htm>, consulta hecha en enero de 2006).

⁵ Cole, M. (1995). Socio-cultural-historical psychology: some general remarks and a proposal for a new kind of cultural-genetic methodology. En J.V. Wertsch, P. del Rio y A. Álvarez (Eds.), *Sociocultural studies of mind* (pp. 187-214). Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.

ga del éxito” (Sfard, 2001, p. 99)⁶, junto con su marcada inclinación a entrar en profundidad en los temas de los que se ocupa en sus escritos, hacen de su voz una que nos invita a ser cada vez más conscientes de la complejidad inherente al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y nos alerta en contra de las soluciones definitivas, las soluciones rotundas. Como una derivación coherente de lo anterior, cabe destacar su interés genuino y sus inescatimables esfuerzos por encontrar formas más justas y objetivas de interpretar y determinar las evidencias acerca de los desempeños, el aprendizaje y el potencial matemático de los estudiantes.

Los aportes de Sfard contenidos en esta publicación no sólo apuntan a proponer una nueva conceptualización para el pensamiento —mediante el establecimiento de un enfoque comunicacional que equipara el proceso de pensar con la actividad comunicativa—, a mirar y abordar el discurso del salón de clase desde dos de sus componentes —las reglas metadiscursivas y las reglas del nivel de los objetos—, sino que también se ocupan de delinear y construir herramientas de análisis —el análisis focal con un foco tripartito y el análisis preocupacional— para indagar, investigar y analizar las actividades comunicativas. Sfard concibe el aprender matemáticas como un proceso de “convertirse en miembro de una comunidad matemática”. Así, la construcción de conocimiento equivale a ser capaz de participar en un discurso específico, y el conocimiento y los conceptos se ven como aspectos de la práctica, del discurso o de la actividad. El vocablo “discurso” supone tanto las ideas como la forma en que se presentan las ideas —reglas del nivel de los objetos y reglas metadiscursivas— y abarca cualquier forma de comunicación, bien sea escrita, oral, gestual e incluso mental, en el caso de la comunicación de una persona consigo misma.

Este libro presenta como capítulos, una selección de artículos de Sfard que constituyen una muestra de los aportes mencionados. Los tres primeros capítulos han sido incluidos por las editoras al considerar, con la anuencia de la autora, que por ser más cortos y concisos presentan una aproximación inicial más sencilla a los planteamientos de la investigadora, hecho que facilita en algún modo la primera lectura y prepara y proporciona una base para la lectura de los demás capítulos, donde ya hay una exposición más amplia y detallada de la propuesta.

El primer capítulo, titulado “Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas”, es traducción del original “*On acquisition metaphor and participation metaphor for mathematics learning*”

⁶ Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los Estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas (primera parte). *Revista EMA*, 6 (2), 95-140.

publicado en 1996 en C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. Aquí, Sfard contrasta dos metáforas del aprendizaje bajo las cuales se pueden agrupar las diversas teorías al respecto. Por un lado, argumenta que es la metáfora de la adquisición, la que subyace a la mayoría de las teorías del aprendizaje, pues en ellas, éste se ve como un “acto de ganar conocimiento”, es decir, los conceptos se ven como unidades básicas de conocimiento que se pueden acumular, refinar gradualmente, y combinar para formar estructuras cognitivas cada vez más ricas y más complejas. Esta visión del aprendizaje, que parece natural, presenta la idea de una actividad de enriquecerse con mercancías, hace pensar en la mente como un contenedor que debe ser llenado con estas mercancías, y en el estudiante como el dueño de estos bienes. Por otro lado, Sfard designa metáfora de la participación a una nueva visión del aprendizaje como integración a una comunidad en acción más que como un intento de enriquecer una posesión individual. En esta perspectiva participacionista, no hay un punto final claro para el aprendizaje, las actividades matemáticas y la cognición nunca se consideran separadas del contexto dentro del cual están ocurriendo y el alumno se ve como una persona interesada en la participación en una cierta clase de actividades, más que en la acumulación de posesiones privadas.

El segundo capítulo, bajo el título “Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso”, es traducción del original “*Learning mathematics as developing a discourse*” publicado en el año 2001 en R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education. Se resalta aquí cómo desde la perspectiva del enfoque comunicacional, la tarea principal del profesor de matemáticas para promover el aprendizaje, es modificar e intercambiar el discurso existente más que crear uno de la nada. Específicamente, una persona que aprende altera y extiende sus habilidades discursivas de forma que llega a ser capaz de comunicarse sobre tópicos matemáticos con miembros de la comunidad matemática. Entonces, convertirse en un participante del discurso matemático es equivalente a aprender a pensar en una forma matemática. Sfard identifica tres dimensiones en las que difiere el posible discurso de un aprendiz con el discurso escolar típico: el vocabulario, los medios visuales que median la comunicación y las reglas metadiscursivas que conducen el flujo de la comunicación, y analiza las maneras en que puede ocurrir el cambio requerido, es decir las maneras de crear nuevos usos de palabras, mediadores y reglas metadiscursivas.

El tercer capítulo, denominado “Enfoque comunicacional para investigar el

aprendizaje de las matemáticas”, es traducción de la ponencia “*Learning discourse: Communicational framework for investigating mathematics learning*” que fue presentada por la autora en el simposio de la AERA en New Orleans, en abril de 2002. Esta breve exposición aborda también la cuestión de lo que significa aprender matemáticas. Desde la perspectiva del aprendizaje ya expuesta en el capítulo anterior, Sfard sugiere considerar las palabras mismas del estudiante y no lo que usualmente se acostumbra ver a través de ellas, y así el aprendizaje que ocurre puede ser visto como el proceso de cambiar las formas discursivas del estudiante, de una cierta manera bien definida, para llegar a usar las palabras relativas a los temas matemáticos como si se refirieran a entidades autónomas cuya existencia es independiente del discurso, es decir para darles un uso que se puede describir como objetificado. Más adelante, la autora centra el valor del cambio a la perspectiva comunicacional en tres puntos: notar que los factores sociales y culturales son los que en primera medida posibilitan el aprendizaje de las matemáticas; ayudar a explicar una complejidad inherente del aprendizaje de las matemáticas: que la consciencia de los estudiantes del uso apropiado de palabras y símbolos debe preceder a su habilidad para explicar ese uso; generar segundos pensamientos y cuestionamientos sobre muchas otras creencias pedagógicas.

El cuarto capítulo, llamado “Conducción del discurso por entre la metáfora y el rigor: el análisis focal para investigar el surgimiento de los objetos matemáticos” es traducción del original “*Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects*” publicado en el año 2000 en *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 296-327. El hecho de considerar que la comunicación es la fuerza conductora más importante que hay detrás de cualquier esfuerzo cognitivo humano lleva a Sfard a señalar que los objetos matemáticos se construyen de manera discursiva y surgen de la necesidad de comunicación más que ser elementos preexistentes para la comunicación. Por consiguiente, se resalta la necesidad de que la comunicación sea eficaz, lo cual, alega Sfard, depende en primer lugar, de la calidad del foco de la conversación, es decir, la necesidad de que el foco esté bien definido y sea compartido por las personas que intervienen; en segundo lugar, está supeditada al uso de mediadores visuales, que para el caso de las matemáticas consisten en artefactos simbólicos que reemplazan los objetos visibles y materiales inexistentes. La autora presenta entonces el análisis de un par de episodios de clase, realizado mediante una de las herramientas diseñadas especialmente para esto: el análisis focal.

El quinto capítulo, bajo el título “La cognición como comunicación: recon-

siderar el aprendizaje mediado por la conversación, a través del análisis multifacético de las interacciones matemáticas de los estudiantes” es traducción del original “*Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students’ mathematical interactions*” publicado en el año 2001 en *Mind, Culture, and Activity*, 8 (1), 42-76. La idea que integra el contenido de este texto hace alusión al giro radical en el asunto que era objeto de investigación en el proyecto descrito, como consecuencia de que la información inicial recogida sugería que algo fallaba en el aprendizaje matemático esperado a través de la interacción entre estudiantes. La forma en que los estudiantes se comunican en torno a las matemáticas pasó a ser así el centro del estudio. Sfard da cuenta entonces del proceso en el que surgieron las herramientas de análisis del pensamiento (la comunicación) y de cómo, mediante su empleo para analizar distintos episodios de interacción entre estudiantes, fue posible evidenciar que no se puede dar por sentado que la interacción entre estudiantes garantiza el aprendizaje, y que para que la comunicación conduzca al éxito se debe enseñar el arte de comunicarse.

El sexto capítulo, titulado “En el discurso hay más de lo que se oye: mirar el pensamiento como acto comunicativo para aprender más acerca del aprendizaje matemático”, es traducción del original “*There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning*” publicado en el año 2001 en *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57. Sfard expone en este capítulo de manera bastante completa las ideas sobre el enfoque comunicacional y sus diferencias con otras perspectivas; además, revisa de nuevo con más detenimiento las metáforas del aprendizaje, introducidas en el primer capítulo. También, a través de dos episodios de clase conceptualiza e ilustra las herramientas diseñadas para el análisis del pensamiento (la comunicación). En las conversaciones correspondientes a tales episodios, Sfard identifica para cada estudiante los tres focos que ha definido y muestra que la divergencia de focos lleva al fracaso de la comunicación y lo explica, a diferencia de una primera mirada a la conversación que no provee razones específicas distintas de los lugares comunes que hemos usado desde siempre: ‘ese estudiante no entiende’. Insatisfecha con este análisis, Sfard propone complementarlo, con lo que llama el análisis preocupacional, es decir, con la determinación de las expectativas, intenciones y deseos de los participantes con respecto a la interacción, elementos que se reflejan en sus participaciones y que parecen interferir bastante en la eficacia de la comunicación.

El último capítulo, denominado “Sobre el movimiento de reforma y los límites del discurso matemático”, es traducción del original “*On reform movement and*

the limits of mathematical discourse” publicado en el año 2000 en *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3), 157-189. Sfard aquí cuestiona críticamente ciertas concepciones populares sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que han sido ampliamente promovidas por las reformas educativas de distintas partes del mundo. Con base en el trabajo sobre matemáticas realizado por estudiantes de dos cursos distintos, dice la autora que mientras se siga creyendo que el conocimiento matemático, el profesor y la tarea a la que se enfrentan los estudiantes son los principales factores responsables de la manera en que los estudiantes se comportan en clase, no hay explicación para las incompatibilidades observadas en el desempeño de los grupos. En el enfoque comunicacional saber matemáticas se conceptualiza como la habilidad de participar en un discurso, y por lo tanto se debe prestar gran atención al asunto de las reglas metadiscursivas que regulan la participación, las cuales deben ser objeto de aprendizaje, aunque sean implícitas. Según esto es posible decir que los dos grupos participaron en diferentes discursos, y que esta diferencia es cuestión de aspectos invisibles del metanivel. Sfard da cuenta entonces de las características de las metarreglas e indica tres principios que podrían guiar la enseñanza de aquellas partes de las matemáticas escolares que exceden los límites del discurso cotidiano.

Para finalizar hemos incluido un glosario en el que Sfard resume los principios básicos del enfoque comunicacional para el aprendizaje y presenta una aproximación a la conceptualización de algunos de los términos involucrados en dichos principios.

En una sociedad como la de nuestro país donde la disciplina de la Educación Matemática hace su aparición recientemente y sus estudiosos son unos pocos grupos de profesores de algunas instituciones educativas y universidades del territorio colombiano, es evidente la urgencia de una reflexión más extendida, detenida y crítica sobre el aprendizaje de las matemáticas. A raíz de que, en general, la formación matemática de los ciudadanos se reconoce como indispensable y de que en diferentes niveles estatales e institucionales se ha hecho patente la preocupación por el escaso aprendizaje matemático de los estudiantes, revelado en los pobres resultados de distintas pruebas estandarizadas que se han realizado, diversos pronunciamientos y propuestas del Ministerio de Educación han intentado darle un viraje a la manera en que se detecta el aprendizaje y hasta cierto punto en lo que significa aprender. Sin embargo, no ha sido fácil para los profesores poner en práctica estos lineamientos y su implementación se ha quedado básicamente en un cambio en la forma de reportar el desempeño de los estudiantes.

La perspectiva del aprendizaje como participación en una comunidad específica abre la puerta a otra posibilidad para enriquecer la reflexión, pero así

mismo, para contar con nuevas herramientas que ayuden a los profesores en el desarrollo y evaluación del aprendizaje de las matemáticas, y a los investigadores en sus indagaciones al respecto. Vale la pena aclarar que ni la autora ni las editoras de este libro, están promoviendo un cambio total de paradigma con referencia al aprendizaje, ni un menosprecio o abandono de posiciones previas al respecto, más bien se destaca aquí la perspectiva participacionista como una posibilidad prometedora del aprendizaje y se aboga por una complementación de los enfoques, pues en concordancia con la misma Sfard y con Mislevy (2003)⁷, se considera que para promover y evidenciar el aprendizaje ocurrido y para la evaluación de éste, generalmente se requiere ver el aprendizaje de los estudiantes desde múltiples perspectivas conjuntas.

Esperamos que esta obra despierte en los lectores gran entusiasmo y les represente una rica fuente de descubrimiento como sucedió con nosotras, que sea una invitación a cuestionarse y profundizar en sus visiones y conocimiento acerca del aprendizaje matemático de los estudiantes, y se traduzca, por tanto, en una práctica con propósitos de aprendizaje más claros y con juicios basados en evidencias más tangibles.

Luisa Andrade

⁷ Mislevy, R. (2003). *Argument substance and argument structure in educational assessment*. Los Angeles, CA: The Regents of the University of California.

CAPÍTULO 1

SOBRE LAS METÁFORAS DE LA ADQUISICIÓN
Y DE LA PARTICIPACIÓN PARA EL APRENDIZAJE
DE LAS MATEMÁTICAS¹

INTRODUCCIÓN

TEORÍAS COMO METÁFORAS

En la novela *Ardiente Paciencia* —que se llevó a la pantalla en la inolvidable película *Il Postino* (*The Postman*)— el autor, Antonio Skarmata, cuenta la historia del poeta chileno Pablo Neruda quien explica el concepto de metáfora a su joven admirador, Mario, el cartero. A la pregunta de Mario en relación con la metáfora, “¿Qué clase de cosa es esa?”, el poeta responde: “Para que te hagas una idea, digamos que es presentar algo con la ayuda de otra cosa”. Un tratamiento bien clásico. Es el cartero no educado, y no el poeta sofisticado, quien después de mirar un poco a su alrededor y de explicaciones adicionales, obtiene una conclusión similar a la que en este capítulo se va a fundamentar: “El mundo entero es como una metáfora de algo más”. Lo inmediato de la idea de Mario indica que no es

1 Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E.]

necesario más que mirar alrededor para advertir la ubicuidad de las metáforas y su poder para crear para nosotros el mundo en el que vivimos.

Aunque la indispensabilidad de las metáforas puede hacerlas prácticamente transparentes, los filósofos de la ciencia estuvieron de acuerdo hace ya mucho tiempo en que ninguna clase de investigación sería posible sin ellas (véase, e.g., Ortony, 1993). Como lo anota Scheffler (1991), “Si se pudiera trazar una línea entre la teoría seria y la metáfora, incluso en ciencia, tendría que ser muy delgada... no hay un punto obvio en el que se pueda decir ‘Aquí paran las metáforas y comienzan las teorías’” (p. 45). En efecto, no hay fronteras claras que separen lo metafórico de lo literal; no hay un contexto de expresiones genuinamente no figurativas en el que la naturaleza metafórica de términos tales como “tensión cognitiva”, “conjunto cerrado” o “construcción de significado” se pueda suprimir del todo. El hecho de que en el juego científico sea obligatorio ocultar los orígenes metafóricos de las ideas, hace difícil reconstruir las raíces figurativas de las teorías científicas. Al margen, permítaseme señalar cómo la distinción básica entre “literal” y “metafórico” pierde su razón de ser cuando se trata de conceptos que surgen a partir de las metáforas.

METÁFORAS CONCEPTUALES

Muy a menudo, cuando escogemos un concepto, por ejemplo, *enseñanza*, y luego miramos cuidadosamente el lenguaje que solemos usar para hablar sobre dicho concepto, podemos advertir un fenómeno impactante: no obstante haber una gran variedad de expresiones comunes que tienen que ver con el concepto, cualquier subconjunto, de tamaño razonable, de tales expresiones nos conduce de manera sistemática a un cierto dominio bien definido que no parece ser un “ambiente natural” del concepto en cuestión. Así, por ejemplo, bien sea que hablemos de ‘transmitir ideas’, ‘dar o recibir un mensaje’ o ‘poner los pensamientos en palabras’, dejamos en claro que nuestra imagen de *comunicar* se toma en préstamo del dominio relativo al *transporte de mercancías*. Esta observación fue hecha inicialmente en los años setenta por Michael Reddy (1979/1993) en su artículo seminal *Conduit metaphor*. Desde entonces, las correspondencias conceptuales sistemáticas se conocen como *metáforas conceptuales* y se convirtieron en objeto de indagación vigorosa (Sacks, 1978; Lakoff y Johnson, 1980; Lakoff, 1987, 1993; Johnson, 1987). Lo que tradicionalmente se había considerado como una mera herramienta para comprender mejor y memorizar de manera más eficaz, fue entonces reconocido como una fuente primaria de nuestros sistemas conceptuales.

El carácter sistemáticamente impactante de las correspondencias concep-

tuales como las que se presentaron antes, y el hecho de que tales correspondencias sólo pueden surgir y ser disipadas a través del lenguaje, señalan al carácter social, supraindividual, de las metáforas conceptuales. Al ser subproductos de la comunicación interpersonal más que del esfuerzo solitario de un pensador, las metáforas tienen el estatus de posesiones públicas. No es de extrañar entonces que metáforas profundamente arraigadas, como la que vincula la comunicación humana con el transporte de mercancías, se consideren determinadas de manera externa, naturales, e independientes de la mente. Como tales, ellas también tienden a ser metáforas “muertas”, su naturaleza metafórica es difícilmente reconocible detrás de su aparente autoevidencia. Otro aspecto digno de mención es que las metáforas están incrustadas en lo cultural, es decir, son producto de asociaciones que son específicas a la cultura dentro de la cual surgen. Por tanto, se puede decir que la proyección metafórica es un mecanismo a través del cual la cultura dada se perpetúa y se reproduce en un sistema de conceptos que crece continuamente.

El propósito de este capítulo es la elicitación² de las metáforas que nos guían en nuestro trabajo como profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática. Antes de proseguir, sin embargo, permítaseme señalar que las cosas que voy a decir (tanto como las que ya dije) son, en sí mismas, metafóricas. Para quienes aceptan la afirmación sobre el papel constitutivo de la metáfora, este hecho debe ser fácilmente comprensible: si creamos nuestros sistemas conceptuales con la ayuda de metáforas, entonces el mecanismo de la metáfora es esencialmente recursivo —autorreferido. O, tal como Ricoeur (1977, p. 66) lo ha señalado, “La paradoja es que no podemos hablar sobre la metáfora a menos que usemos un marco conceptual surgido a partir de una metáfora”.

APRENDER MATEMÁTICAS: *LA METÁFORA DE LA ADQUISICIÓN VERSUS LA METÁFORA DE LA PARTICIPACIÓN*

Al ir tras las metáforas que guían nuestro trabajo como profesores de matemáticas y como investigadores decidí recurrir a la literatura profesional para buscar allí expresiones características y palabras clave. No tuve que esforzarme mucho para notar que parece haber dos ideas prominentes que guían cuanto hacemos y decimos. En efecto, parece que la investigación en educación matemática se mueve atrapada

2 Pese a la no aceptación oficial del término “elicitación”, lo hemos adoptado como traducción del vocablo inglés *elicitation*, con el sentido de “hacer aflorar las creencias y patrones culturales propios de una comunidad de práctica”. [N.E.]

entre dos metáforas que decidí llamar *metáfora de la adquisición* y *metáfora de la participación*. Estas dos metáforas están presentes de manera simultánea en la mayoría de los textos recientes, aunque es usual que una de ellas predomine sobre la otra. En mi pesquisa, rápidamente advertí que la metáfora de la adquisición parece predominar en textos de hace ya varios años mientras que la metáfora de la participación tiene liderazgo principalmente en los estudios más recientes. También es bastante obvio que en la actualidad, algunos investigadores están haciendo un gran esfuerzo para liberarse de la primera metáfora a favor de la segunda.

METÁFORA DE LA ADQUISICIÓN

Desde los albores de la civilización, se ha concebido el aprendizaje humano como una *adquisición* de algo. En el *Collins Dictionary of the English Language*, aprender se define como “el acto de ganar conocimiento”. A partir de los trabajos de Piaget y de Vygotsky, el crecimiento del conocimiento en el proceso de aprender se ha analizado en términos de *desarrollo de conceptos*. Los conceptos se han de ver como unidades básicas de conocimiento que se pueden acumular, refinar gradualmente, y combinar para formar estructuras cognitivas cada vez más ricas y más complejas. El cuadro no es muy diferente cuando hablamos sobre el aprendiz como una persona que *construye significado*. El enfoque del aprendizaje como adquisición, que en la actualidad parece evidente y natural, trae a la mente la actividad de enriquecerse cada quien con mercancías o bienes. El lenguaje de ‘adquisición de conocimiento’ y ‘desarrollo de conceptos’ nos hace pensar en la mente como si se tratara de un contenedor que debe ser llenado con ciertos materiales, y en el aprendiz, como en alguien que se convierte en el propietario de estos materiales.

Una vez que nos damos cuenta de que la metáfora de la adquisición es la que subyace a nuestro pensamiento sobre el aprendizaje de las matemáticas, inmediatamente nos hacemos conscientes de su presencia en casi toda verbalización común sobre el aprendizaje. Demos una mirada a una serie de títulos³ tomados de publicaciones aparecidas en las dos últimas décadas: *Acquisition of mathematical*

3 A continuación damos una posible traducción de tales títulos: *Adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos, Construir matemáticas, Los esquemas de Raquel para construir conocimiento sobre fracciones, El desarrollo de ... el concepto de razón, La construcción de número en los niños, Ampliar el significado de multiplicar y dividir, Tener y usar conocimiento geométrico, El desarrollo del concepto de espacio en el niño, Dificultades conceptuales ... en*

concepts and processes, Building up mathematics, Rachel's schemes for constructing fraction knowledge, The development of ... ratio concept, Children's construction of number, Extending the meaning of multiplication and division, On having and using geometric knowledge, The development of the concept of space in the child, Conceptual difficulties... in the acquisition of the concept of function. La idea de que aprendizaje significa adquisición y acumulación de algunos bienes es evidente en todos estos títulos. Ellos pueden apuntar a una recepción gradual o a una adquisición por desarrollo o por construcción, pero al parecer todos ellos implican ganar propiedad sobre alguna clase de entidad independiente.

Hay muchos tipos diferentes de entidades que se pueden adquirir en el proceso de aprendizaje. Se encuentra una gran variedad de términos importantes entre las palabras clave de los marcos de trabajo generados por la metáfora de la adquisición: *conocimiento, concepto, concepción, idea, noción, concepción errónea, significado, sentido, referente, esquema, hecho, representación, material, contenidos, proceso matemático, objeto matemático.* De igual forma hay muchos términos que denotan la acción de apropiarse de tales entidades: *recepción, adquisición, construcción, internalización, transmisión, logro, desarrollo, acumulación, captación.* El profesor puede ayudar al estudiante a alcanzar su meta entregándole, transmitiéndole, facilitándole, mediando, etc.

Este surtido terminológico impresionantemente rico fue necesario para hacer diferencias, algunas veces sustanciales y otras un poco sutiles, entre distintas escuelas de pensamiento. En las últimas décadas, se han hecho muchas sugerencias diferentes sobre la naturaleza del mecanismo a través del cual los conceptos matemáticos se pueden convertir en propiedad privada del aprendiz; sin embargo, a pesar de las muchas diferencias con respecto al asunto del “cómo”, no ha habido controversia sobre la esencia: la idea de aprender como ganar posesión sobre algún bien persistió en el espectro amplio de marcos de trabajo, desde el constructivismo moderado hasta el radical, y luego desde las teorías interaccionistas hasta las socioculturales. Los investigadores han ofrecido una gama de mecanismos de desarrollo de conceptos, que difieren en gran medida. Primero hablaron simplemente sobre la ‘recepción’ pasiva de conocimiento (es decir, de conceptos); luego, sobre la construcción activa por parte del aprendiz; más tarde analizaron las formas en que los conceptos son transferidos desde un plano social a uno individual e interiorizados por el aprendiz; por último vislumbraron el aprendizaje como un proceso de emergencia en una interacción continua con pares, profesores y textos, que nunca termina y que se autorregula. Sin embargo, en la medida en que han investigado el aprendizaje enfocándose en el ‘desarrollo de conceptos’ y en la ‘adquisición de conocimiento’, de manera implícita han estado de acuerdo en que este proceso se

puede conceptualizar en términos de la metáfora de la adquisición.

METÁFORA DE LA PARTICIPACIÓN

La metáfora del aprendizaje como adquisición está tan profundamente arraigada en nuestras mentes que quizá nunca nos haríamos conscientes de su existencia si no se comenzara a desarrollar una metáfora alternativa.

De hecho, cuando buscamos a través de artículos recientes de revistas profesionales (e.g., *For the Learning of Mathematics*, *Learning and Instruction*) y de libros publicados recientemente, la emergencia de una nueva metáfora se hace evidente de manera inmediata. Entre los que presagian el cambio, se encuentran títulos⁴ como: *Reflection, communication, and learning mathematics*; *Democratic competence and reflective knowing in mathematics*; *Developing written communication in mathematics*; *Reflective discourse and collective reflection*; *Discourse, mathematical thinking and classroom practice*; *Mathematics as being in the world*. El nuevo investigador habla del aprendizaje como participación periférica legítima (Lave y Wenger, 1991) o como *aprendizaje en el pensar* (Rogoff, 1990).

Un cambio de largo alcance está indicado por el hecho de que aunque todos estos títulos y expresiones se refieren al aprendizaje, ninguno de ellos menciona ni “concepto” ni “conocimiento”. Los términos que implican la existencia de algunas entidades permanentes se han reemplazado por sustantivos que indican acción como “el conocer” (*knowing*). Esta modificación lingüística, que puede parecer un asunto menor, señala un cambio epistemológico y ontológico considerable en la investigación sobre el aprendizaje (compárese Smith, 1995; Cobb, 1995). Las referencias acerca de los *estados* se han reemplazado con menciones a *actividades*. En la imagen de aprendizaje que emerge a partir de este cambio lingüístico, la permanencia inherente a la acción de *tener*, abre paso a un flujo constante del *hacer*. Mientras que el concepto de adquisición implica que existe un punto final claro del proceso de aprendizaje, la nueva terminología no deja espacio para estados inmutables y señales de interrupción. Más aun, las actividades matemáticas que se desarrollan nunca se consideran separadas del contexto dentro del cual están ocurriendo. El

la adquisición del concepto de función. [N.E.]

⁴ Una posible traducción de tales títulos es: *Reflexión, comunicación y aprendizaje de las matemáticas*; *Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas*; *Desarrollo de la comunicación escrita en matemáticas*; *Discurso reflexivo y reflexión colectiva*; *Discurso, pensamiento matemático y práctica de clase*; *Las matemáticas en*

contexto, a su vez, es rico y múltiple, y se habla de su importancia al referirse a lo *situado*, a lo *contextual*, al *estar incrustado en lo cultural*, y a la *mediación social*. El conjunto de nuevas palabras clave que, junto con el sustantivo *práctica*, caracteriza de manera prominente los términos *discurso* y *comunicación*, indica que el aprendiz se debe ver como una persona interesada en la *participación* en una cierta clase de actividades más que en la acumulación de posesiones privadas. Para decirlo de otra manera, aprender matemáticas ahora se concibe como un proceso de *convertirse en miembro de una comunidad matemática*. Esto implica, sobre todo, la habilidad de *comunicarse* en el lenguaje de esta comunidad y de actuar según sus *normas* particulares. Las normas mismas deben ser negociadas en el proceso de consolidar la comunidad. Mientras que los aprendices son los recién llegados y los reformadores potenciales de la práctica, los profesores son quienes preservan su continuidad. El aprendiz pasa de ser un empresario solitario a ser parte integral de un equipo.

Por razones obvias, esta nueva visión del aprendizaje se puede llamar *metáfora de la participación*. La decisión de ver el aprendizaje como integración a una comunidad en acción más que como un intento de enriquecer una posesión individual, originó una serie de enfoques diferentes, entre los cuales los más conocidos son la *teoría del aprendizaje situado* (Brown, Collins y Duguid, 1989; Lave y Wenger, 1991), el *paradigma discursivo* (Foucault, 1972), y la *teoría de la cognición distribuida* (Salomon, 1993). Tal como lo explicaré más adelante de manera más detallada, todas estas teorías, que conforman una nueva clase, difieren de las viejas doctrinas no sólo en su visión del aprendizaje sino también, y quizá de manera más importante, en sus creencias epistemológicas básicas y en el supuesto subyacente acerca de la misión de la investigación sobre el aprendizaje. Hay muchas personas que perciben la profundidad de este cambio y su calidad revolucionaria, pero aún falta comprender y explicitar su naturaleza exacta. De ninguna manera esto se restringe a la investigación en educación matemática. Por ejemplo, Harre y Gillett (1995), en su libro titulado *The discursive mind*, hicieron recientemente un intento importante por capturar el carácter revolucionario del “cambio discursivo”, que se deriva de manera directa del cambio de metáfora. A la vez que presentan los últimos desarrollos en el estudio del pensamiento humano como una emergencia de la *psicología discursiva*, los autores se refieren a este evento como “una segunda revolución cognitiva, la apoteosis final del Nuevo Paradigma”. Según su recuento, esta “segunda revolución cognitiva” tiene el propósito de alcanzar lo que la primera no alcanzó; a saber, “impulsar la transformación de la psicología” liberándola de las deficiencias del enfoque conductista y de las inherentes a la metáfora que compara a la mente con un computador.

Ahora vale la pena hacer una pausa por un momento para reflexionar sobre lo que nos está sucediendo a nosotros, profesores de matemáticas e investigadores en educación, en la zona de penumbra situada entre las dos metáforas.

Quizá la indicación más sobresaliente de los cambios de postura es el cambio del lenguaje profesional. Puesto que tal cambio sólo puede ser gradual, en un principio difícilmente se pueden evitar los híbridos lingüísticos. Este período también está marcado por la aparición de un lenguaje provisional, en el que viejas palabras se ponen entre comillas para señalar su estatus degradado. Es obvio que estas palabras sólo se mantendrán en el discurso hasta cuando se demuestre que es necesario encontrarles un reemplazo elegible. Es así como usamos en la actualidad las palabras “hecho”, “conocimiento”, mundo “real”, etc.

Otra forma de preservar la terminología existente es proporcionar nuevas definiciones a palabras viejas. Así, Lave y Wenger (1991) proponen redefinir los viejos términos *aprender* y *saber algo* (*learning* y *knowing*) como “relaciones entre personas activas en y con el mundo, estructurado cultural y socialmente, del que también surgen” (p. 51). Siguiendo a Foucault (1972) podemos redescribir el vocablo *concepto* en términos discursivos y decir que es una entidad virtual “constituida por todo lo que fue dicho en todos los enunciados que lo nombran, lo dividen, lo describen, lo explican, esbozan sus desarrollos, indican sus varias correlaciones, lo juzgan...”.

Sin embargo, tal trabajo de “cambiarle la cara” a la vieja terminología puede no ser aceptable a los ojos de los más fervientes adeptos a la nueva metáfora. Ellos podrían afirmar que el cambio completo a una nueva metáfora no se puede dar hasta que el discurso profesional esté depurado totalmente de palabras que traen a la mente la vieja metáfora. Así, por ejemplo, podrían objetar que se preserven las palabras “conocimiento” y “concepto” como los elementos centrales del lenguaje de la metáfora de la adquisición (véanse Bauersfeld, 1995; Smith, 1995). Los precursores de las revoluciones tienden a creer que lo nuevo y lo viejo se excluyen mutuamente. ¿Es esto real? Por ahora, dejaré sin respuesta este asunto. Sólo diré que es natural que el cambio profundo, del cual estamos siendo testigos por estos días, esté marcado por algo de obstinación y de celo. Se debe declarar total lealtad a la nueva metáfora si la otra metáfora —por la que vivimos cientos de años— va a ser elicitada y cuestionada.

En la Tabla 1 se presenta una comparación esquemática entre las metáforas de la adquisición y de la participación.

enriquecimiento individual	meta del aprendizaje	desarrollo de la comunidad
adquisición de algo	aprendizaje	llegar a ser participante
recipiente (consumidor), (re)-constructor	estudiante	participante periférico aprendiz
proveedor, facilitador, mediador	profesor	participante experto que preserva la práctica/discurso
propiedad, posesión, bien (individual, público)	conocimiento concepto	aspecto de la práctica/discurso/actividad
tener, poseer	saber algo (<i>knowing</i>)	pertenecer, participar, comunicar

Tabla 1: Las correspondencias metafóricas

¿QUÉ CAMBIA LA METÁFORA DE LA PARTICIPACIÓN?

La metáfora de la adquisición es la que subyace probablemente a todas las teorías del desarrollo cognitivo. Hasta ahora, esta metáfora ha promovido la investigación moldeada en la imagen de las ciencias naturales (después de todo, la ciencia natural es el lugar del cual vienen las metáforas de la adquisición y el desarrollo). Tal investigación considera la cognición humana en su forma “pura” y no deja espacio para ningún “ruido”. Esto significa, entre otras cosas, que en las teorías basadas en la adquisición casi no se deja espacio para el papel de los intereses genuinos de quienes aprenden, quienes enseñan, y quienes deciden qué se debe enseñar. Por tanto, es bastante obvio que si se quieren considerar también estos otros aspectos se debe emprender un tipo muy diferente de esfuerzo teórico. Puesto que difícilmente se puede esperar que la metáfora de la adquisición sea suficiente cuando se persigue esta otra clase de propósito, se hace evidente la necesidad de reconsiderarla y de buscar otra metáfora para el aprendizaje.

El cambio de la metáfora de la adquisición a la metáfora de la participación marca una diferencia esencial casi en cualquier aspecto posible tanto de la teoría como de la práctica: significa una nueva epistemología, un tipo diferente de teoría, unas visiones reformadas de las matemáticas, de su aprendizaje y su enseñanza, y un nuevo paradigma de investigación. Permítaseme decir unas palabras sobre algunos de estos cambios.

Para comenzar, nuestro pensamiento sobre el aprendizaje siempre se ha visto obstaculizado por dilemas epistemológicos y ontológicos que incluso las mentes filosóficas más finas no han podido resolver. Además, la enseñanza de las matemáticas guiada por la metáfora de la adquisición, ha estado invariablemente produciendo resultados no satisfactorios a la vez que ahonda de manera continua nuestra

sensación de desamparo. Más aun, desde hace algún tiempo, cada vez se hace más claro que en el mundo postmoderno de mente pragmática, la idea de una actividad solitaria movida por el propósito de acumular algunos bienes esotéricos que difícilmente se pueden compartir con otros, está perdiendo atractivo rápidamente. Permítaseme ahora dar una mirada más de cerca a cada uno de estos problemas.

CAMBIO EN LOS FUNDAMENTOS

Por estos días es bastante obvio que no se puede posponer más la reconsideración crítica de la metáfora de la adquisición. Primero, hay un dilema en los fundamentos que fue señalado por Platón en su diálogo *Menón* y que posteriormente fue conocido como la *paradoja del aprendizaje* (Berietter, 1985; Cobb, Yackel y Wood, 1992). Aunque a través de la historia ha asumido muchas apariencias diferentes, el dilema siempre es el mismo y su esencia es desconcertantemente simple: ¿cómo podemos querer adquirir un conocimiento de algo que aún no nos es conocido? En efecto, si este algo no pertenece aún a nuestro repertorio de cosas que conocemos, entonces al ser completamente no conscientes de su existencia no nos es posible quererlo o investigarlo. O, dicho de otra manera, si sólo podemos llegar a ser conscientes de algo reconociéndolo sobre la base del conocimiento que ya tenemos, entonces algo que no pertenezca aún al surtido de cosas que ya conocemos nunca podrá llegar a ser una de ellas. Conclusión: aprender nuevas cosas es inherentemente imposible.

El pensar acerca de los fundamentos epistemológicos y ontológicos de nuestra concepción de aprendizaje se intensificó hace unas pocas décadas cuando la doctrina del constructivismo radical enredó a los psicólogos en un nuevo dilema. Sin cuestionar lo esencial de la metáfora de la adquisición, los constructivistas ofrecieron una concepción nueva del mecanismo que convierte el conocimiento en una posesión privada de una persona. En sus manos, recipientes pasivos de conocimiento se convierten en constructores de sus propios esquemas conceptuales. Esta imagen del aprendiz fue promovida con fuerza por muchos pensadores contemporáneos, entre los cuales cabe citar a Piaget y a Vygotsky, quienes, aunque distantes con respecto al asunto del papel de la interacción social y de las fuentes primeras de la inspiración de los aprendices, estuvieron sin embargo en total acuerdo sobre la naturaleza constructiva del aprendizaje. Es esta idea central —la de los individuos como constructores o reconstructores de sus concepciones privadas a partir de materiales externos— la que se torna problemática al hacer una mirada más cercana. Cualquiera que sea la versión de constructivismo que se esté considerando —la moderada, la radical o la social— en últimas, surgirá el mismo dilema: ¿cómo explicamos el hecho de que los aprendices sean capaces de construir por ellos

mismos conceptos que son totalmente congruentes con los de otras personas? O, dicho de otra manera, ¿cómo puede la gente establecer un puente entre la posesión individual y la pública?

La metáfora de la participación nos libera de estas paradojas mediante la *desobjetivación del conocimiento*, al proporcionarnos una forma alternativa a la de considerar el aprendizaje como adquisición. Al hacerlo, esta nueva metáfora no *resuelve* los viejos dilemas sino que más bien deja sin piso y sin significado las preguntas molestas. Dentro de sus fronteras, simplemente no hay espacio para la dicotomía entre lo interno y lo externo (conceptos, conocimiento) que es la base de la *objetificación*. La nueva metáfora reemplaza la vieja mirada selectiva por la atención al todo, y por la visión del aprendiz como un ser que hace parte de una comunidad en una forma más esencial. En consecuencia, la ciencia o las matemáticas no se pueden considerar nunca más como entidades independientes; en cambio, se tienen que considerar como aspectos de actividades sociales en curso. Los investigadores no deben insistir más en aislar el conocimiento del conjunto de las interacciones sociales.

CAMBIO EN LA VISIÓN DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En aras de una comparación posterior, comenzaré esbozando el *cuadro del aprendizaje dibujado por la metáfora de la adquisición*.

Difícilmente existe una expresión más poderosa de la visión de las matemáticas como un bien acumulable y no hay fuente mejor para las ideas sobre las implicaciones de la metáfora que el clásico documento *A Mathematician's Apology* del matemático inglés G.H. Hardy. Para Hardy, el conocimiento matemático es un medio para el avance y el éxito personal. En su breve ensayo, muchas veces él habla sobre la *superioridad y seriedad* de las matemáticas, con lo que enfatiza la superioridad y seriedad de gente que tiene acceso a este bien especial. Lo mismo que las mercancías materiales, las matemáticas tienen la cualidad permanente que hace también permanentes los méritos especiales y la posición privilegiada de su dueño; por tanto, aprender matemáticas significa asegurar el futuro de uno con la ayuda de su propio pasado. En efecto, según el matemático, significa nada menos que la inmortalidad: “La inmortalidad puede ser una palabra necia, pero probablemente un matemático tiene la mejor opción con respecto a cualquier cosa que ella signifique” (Hardy, 1940/1967, p. 81).

Dentro del paradigma de la adquisición, no sólo el conocimiento matemático sino también los *medios* para ganarlo cuentan como una posesión privada del aprendiz. “La elección que una persona hace de su profesión, casi siempre será dictada por las limitaciones de sus habilidades naturales” (p. 69) dice Hardy, implicando

que uno tiene que tener un *talento* matemático especial para llegar a ser un aprendiz exitoso o un creador de matemáticas. Se cree que esta característica es dada, no adquirida. Es una ‘marca de calidad’ permanente de la persona. Los logros del estudiante pueden depender de factores del ambiente, pero los profesores sienten que pueden predicar sobre el potencial *real* (permanente) de los estudiantes a partir de su desempeño actual.

Permítaseme ahora tratar de mostrar cómo la metáfora de la participación cambia el cuadro general. De acuerdo con Rorty (1991, p. 21), hay dos maneras principales en las que las personas pueden dar sentido a sus vidas: pueden hacerlo al describirse a sí mismas “como si estuvieran en una relación inmediata con una realidad no humana” o “al contar la historia de su contribución a la comunidad”. Claramente, Hardy ha elegido la primera de estas maneras. Los adeptos a la metáfora de la participación optan por la otra. Ellos parecen estar diciendo, junto con Rorty (1991), que “cualquiera sea el bien que las ideas de ‘objetividad’ y ‘trascendencia’ hayan hecho a nuestra cultura, también se puede lograr con la idea de una comunidad que se esfuerza por el acuerdo intersubjetivo y la novedad” (p. 13).

Mientras que la metáfora de la adquisición pone por delante las ambiciones humanas personales como una guía principal del aprendizaje, dentro del marco participacionista, el prerrequisito más importante para el aprendizaje es el deseo del estudiante de ser parte de una cierta comunidad. Además, mientras que la metáfora de la adquisición presenta las *habilidades cognitivas* como una característica muy valiosa del aprendiz, la metáfora de la participación enfatiza cualidades que hasta ahora se han considerado como sociales más que como intelectuales, y como tal no han sido parte integral de la investigación sobre el aprendizaje: ser capaz de negociar normas de comportamiento y luego seguirlas, ser capaz de desarrollar una buena comunicación con otros miembros del grupo, tener una buena influencia sobre otros y, preferiblemente, cualidades de liderazgo.

Otro cambio importante inducido por la metáfora de la participación es el hecho de que no se habla más de la permanencia —permanencia de las posesiones humanas o de los rasgos humanos. La nueva metáfora promueve un interés centrado en la gente en acción más que en la gente “como tal”, y ve la realidad como algo en constante flujo. La consciencia del cambio constante lleva a abstenerse de poner etiquetas permanentes. Son las acciones las que se pueden calificar como atinadas o insatisfactorias y no los actores. Para el aprendiz, todas las opciones permanecen abiertas a pesar de los fracasos del pasado. Para resumir, la metáfora de la participación lleva un mensaje para el aprendiz mucho más optimista. Puesto

que ahora nada se ve como permanente ni se habla sobre factores que determinan por siempre el destino del aprendiz, el mensaje principal de la nueva metáfora parece ser de una esperanza inagotable: hoy usted actúa de una manera, mañana puede actuar de una manera bien diferente.

A la luz de todo esto, es apenas obvio que la metáfora de la participación tiene un potencial para dirigir una nueva práctica de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que sea más democrática. Es significativo, sin embargo, que yo haya dicho “tiene un potencial para dirigir” y no simplemente “dirige”. Es muy importante entender que los resultados de los usos de una metáfora no están inscritos en la metáfora misma sino que son una función de las intenciones y de las habilidades de quienes las ponen en juego. Obviamente, todo esto también es cierto sobre los *Nuevos Estándares del National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que parecen favorecer la metáfora de la participación pero que no pueden producir el cambio deseado por su mera existencia. Al fin de cuentas, el hecho de que la introducción de la nueva metáfora conduzca o no a una democratización del aprendizaje y al mejoramiento o no de la condición del aprendiz, está en las manos de quienes llevan las ideas a la práctica y no en las de los legisladores.

PREGUNTA PARA CONCLUIR:

¿HAY QUE ELEGIR UNA DE LAS DOS METÁFORAS?

En este capítulo he profundizado sobre los inconvenientes de la metáfora de la adquisición y sobre las ventajas de la metáfora de la participación. Sin embargo, sería un error permitir que el lector se quede con la impresión de que he predicado una clara preferencia por la última metáfora mientras sugiero el abandono de la otra. Nada estaría más lejano de lo que en realidad pretendo decir. Si no hice esfuerzo alguno para mostrar las ventajas de la metáfora de la adquisición es sólo porque, al ser la opción disponible para la mayoría de los investigadores, no me pareció que requiriera de una defensa; y si traté de mostrar los aspectos brillantes de la metáfora de la participación es debido a que se trata de una idea relativamente nueva y como tal necesita de explicación y justificación. Pero ahora es tiempo de recordar que la metáfora de la adquisición tiene mucho que ofrecer mientras que la metáfora de la participación tiene limitaciones que, de no ser controladas, pueden conducir a consecuencias indeseables (véanse, e.g., Sierpiska, 1995; Thomas, 1996). Además, incluso aun cuando no nos guste la cualidad objetificante de la metáfora de la adquisición, difícilmente podemos escapar de ella. Lo perceptual, origen en el plano físico de todo nuestro pensamiento, nos induce a hablar en términos de

objetos y procesos que se pueden aplicar a estos objetos incluso cuando alcanzamos las regiones de abstracción pura. Yo cometí el “crimen de la objetificación” en este mismo capítulo cuando presenté su noción central —la metáfora— como un “trasplante conceptual”.

Creo profundamente que las teorías más poderosas son las que se apoyan en más de una base metafórica (véase Sfard, 1997). El pluralismo metafórico me parece una necesidad absoluta. Una combinación adecuada de metáforas puede permitir traer a primer plano las ventajas de cada una de ellas mientras que se mantienen bajo control sus respectivas desventajas. Conuerdo totalmente con Freudenthal (1978) en que “la educación es un campo vasto e incluso aquella parte que despliega una actitud científica es muy vasta para ser vista con un par de ojos” (p. 78). Cuando la metáfora de la adquisición y la metáfora de la participación se combinan tienen alta probabilidad de satisfacer todas nuestras necesidades sin perpetuar las desventajas de cada una de ellas.

Considerando el hecho de que las dos metáforas, al ofrecer miradas que compiten y afirmaciones ontológicas conflictivas sobre los mismos fenómenos, parecen ser mutuamente excluyentes, uno se puede preguntar cómo sería posible, al fin de cuentas, hacer el sugerido híbrido metafórico. El problema, sin embargo, definitivamente no es nuevo y no está restringido a la investigación sobre el aprendizaje. Podemos recurrir a la ciencia contemporánea en busca de varios ejemplos de dilemas similares y de formas en las que se puede superar la dificultad (piénsese, por ejemplo, en el principio de complementariedad de Niels Bohr que estableció el debate ontológico en física, sin resolver la controversia relativa a onda y partícula; o de la química y la física, que trata con los mismos fenómenos naturales pero lo hacen de maneras completamente diferentes).

Cualquiera sea la solución que se adopte, una cosa emerge del dilema mismo y del surtido de formas en que se puede abordar: se puede alcanzar cierta paz mental si se acepta la concepción de realidad construida a partir de una variedad de metáforas. Las metáforas que usamos mientras teorizamos son suficientemente buenas para llenar pequeñas áreas, pero ninguna de ellas es suficiente para cubrir todo el campo. Tenemos que conformarnos con dar sentido sólo localmente. El pensador realista sabe que a lo único que puede aspirar es a que finalmente pequeñas porciones de coherencia se combinen en una teoría global consistente. Parece que cuanto más pronto aceptemos la idea de que nuestro trabajo está confinado a producir una colcha de metáforas en vez de una teoría del aprendizaje homogénea y unificada, será mejor para nosotros y para todos aquellos cuyas vidas están expuestas a la influencia de nuestro trabajo.

**PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

**PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

CAPÍTULO 2

Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso¹

PLANTEAMIENTO DE LA PREGUNTA: ¿QUÉ ES LO QUE CAMBIA CUANDO UNO APRENDE MATEMÁTICAS?

En el campo de la educación matemática, por estos días, los términos *discurso* y *comunicación* parecen estar en boca de todos. Figuran de manera prominente en artículos de investigación, se puede escuchar su mención en cursos para profesores, y aparecen una y otra vez en una variedad de documentos programáticos que pretenden establecer políticas para la enseñanza (véase, e.g., *Principles and standards for school mathematics*, NCTM, 2000). Todo esto se podría interpretar como una mera muestra de que nos hacemos más conscientes que nunca de la importancia de la conversación matemática para el éxito del aprendizaje de las matemáticas. En este capítulo intentaré mostrar que en el discurso hay mucho más de lo que se oye, y que al ubicar la comunicación en el corazón de la educación matemática es probable que cambie no sólo la manera como enseñamos sino también la manera en que pensamos sobre el aprendizaje y sobre lo que se ha aprendido. Más que nada sostendré que la comunicación se debe ver no

1 Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E.]

como una mera ayuda al pensamiento, sino como equivalente al pensamiento mismo. El *enfoque comunicacional a la cognición*, que está bajo escrutinio en este texto, se construye alrededor de ese principio teórico básico.

Comencemos por hacer una breve visita a dos aulas en las que el aprendizaje de un nuevo tema matemático apenas ha comenzado. En el primer curso se acaba de introducir el concepto de número negativo. La profesora se para frente al grupo de estudiantes de doce años que cursan séptimo grado e inicia la conversación².

Episodio 1: *La primera clase sobre números negativos*

- N1 Profesora: ¿Han oído hablar alguna vez de números negativos?
¿Como en temperaturas, por ejemplo?
- N2 Omri: ¡Menos!
- N3 Profesora: ¿Qué es menos?
- N4 Roy: Debajo de cero.
- N5 Profesora: ¿*Temperatura* bajo cero?
- N6 Sophie: Bajo cero... puede ser menos cinco, menos siete...
Cualquier número.
- N7 Profesora: ¿Dónde más han visto números positivos y negativos?
- N8 Omri: En el banco.
- N9 Profesora: ¿Y recuerdan el término “altitud”? ¿Qué es el *nivel del mar*?
- N10 Yaron: Cero.
- N11 Profesora: ¿Y por encima del nivel del mar? ¿Más que cero?
- N12 Yaron: Un metro hacia arriba.

² Estos datos están tomados del estudio que realicé con Sharon Avgil. Este y todos los demás segmentos de transcripciones han sido traducidos del hebreo por la autora.

³ Datos tomados de un estudio realizado con Orit Shalit-Admoni y Pnina Shavit.

Puesto que estamos interesados en el aprendizaje, y aprendizaje significa cambio, podemos analizar este episodio tratando de describir las modificaciones que aún tienen que ocurrir en las maneras en que los niños trabajan con los números negativos. A primera vista, este aprendizaje futuro no es sólo un asunto de cambio; más bien, requiere crear algo completamente nuevo. Los niños, aunque no son ignorantes del todo acerca de los números negativos, en el momento pueden hacer poco más que asociar el tema con ciertos términos característicos, tales como *menos* o *bajo cero*. Parece, por tanto, que ellos tendrán que trabajar sobre el asunto casi desde cero. En lenguaje tradicional, podemos decir que los niños aún deben *adquirir el concepto de número negativo* o *construir este concepto* para ellos mismos.

En vez de tratar de entender el significado operativo de estas últimas palabras, permítaseme pasar ahora a otro episodio en el que dos alumnas de primer grado, Shira y Eynat, comienzan a aprender alguna geometría básica. Primero se les muestra a las niñas algunas figuras geométricas y la profesora les pide que marquen las que pueden ser llamadas triángulos. Una vez completada la tarea, tiene lugar la siguiente conversación entre las niñas y la profesora:³

Episodio 2: *La primera clase sobre triángulos*

- T1 Eynat: [Señalando la forma *A*] Este es un triángulo pero también tiene otras líneas.
- T2 Profesora: Bien, Eynat, ¿cómo sabes que ese triángulo es un triángulo?
- T3 Eynat: Porque tiene tres... aah... tres... bueno... líneas.
- ...
- T22 Profesora: [Señalando la forma *B*] Esta otra también: uno, dos, tres...
- T23 Las niñas: Sí
- T24 Profesora: Entonces, ¿*es* un triángulo? ¿Por qué no la marcaron desde el comienzo?
- T25 Eynat: Porque entonces... No lo vi bien. No estaba segura
[Mientras dice esto, Eynat comienza a encerrar también la forma *C* en un redonde]

4 De manera alternativa, en este último caso podemos decir, inspirados en

- T28 Shira: [Mirando la forma *C* que Eynat está marcando] Oye, eso no es un triángulo. Un triángulo es ancho y éste es delgado.
- T29 Eynat: Y, ¿qué? [pero mientras dice esto, ella interrumpe el trazo del redondel]
- T30 Profesora: ¿Por qué? ¿Por qué esto no es un triángulo [señala la forma *B*]? Shira dijo que es muy delgado. Pero no se ha dicho...
- T31 Eynat: No hay tal que sea muy delgado [Pero mientras dice esto, ella borra el redondel alrededor de la forma *C*]
- T32 Profesora: Un triángulo, ¿debe tener un cierto tamaño?
- T33 Shira: Hmmmmm Sí, un poco sí... Debe ser ancho. ¿Qué es eso? Esto no es como un triángulo. ¡Esto es una vara!
- (Continúa)

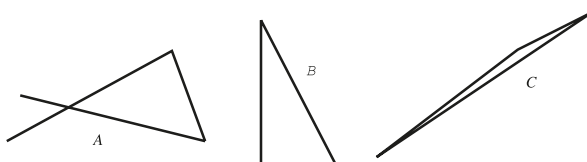


Figura 1: ¿Es triángulo o no?

Aquí, a diferencia de lo que ocurre en el caso de los números negativos, las estudiantes ya están bien familiarizadas con los objetos matemáticos en cuestión, los triángulos. Y, sin embargo, ni la manera en que hablan acerca de estas formas ni la manera en que actúan con ellas es del todo satisfactoria desde el punto de vista de la profesora. Al buscar triángulos, Shira descalifica cualquier forma que le parezca muy delgada. Eynat, aunque es consciente de la definición formal de triángulo [T3] y aparentemente está convencida de que “no hay tal que sea muy delgado” [T31], no puede aún decidir si la forma de vara que aparece en el cuadro es o no un triángulo: inicialmente, ella no ha marcado la forma *C* como

triángulo; ahora, al seguir la conversación sobre la forma *B*, ella marca esa forma *C* [T25], sólo para volver a cambiar de idea [T29] y al final, borrar el redondel [T31]. La profesora estará ávida de inducir algunos cambios en las maneras en que las niñas piensan, hablan y actúan con relación a los triángulos. El desarrollo que está ansiosa de ver es de diferente tipo al que se requiere en el caso de los números negativos. Aun así, podemos describir este nuevo cambio en términos de adquisición de concepto o cambio conceptual, de la misma manera en que lo hicimos antes: podemos decir que las niñas encaran la tarea formidable de superar sus *concepciones erróneas sobre triángulos*⁴.

En este capítulo, reformularé esta última enunciación después de introducir una manera algo diferente de hablar sobre aprendizaje. Mi preferencia por el marco de trabajo que será denominado *comunicacional*, tiene su origen principalmente en la convicción de que las teorías que conceptualizan el aprendizaje como adquisiciones personales nos pueden decir poco sobre el complejo fenómeno del aprendizaje. El enfoque adquisicionista descansa, en gran medida, en la idea de los invariantes cognitivos que sobrepasan las fronteras culturales y situacionales. En consecuencia, las teorías que provienen de esta tradición están enfocadas hacia encontrar e investigar lo que permanece constante cuando la situación cambia. Y, sin embargo, como ha sido sustentado de manera convincente por varios académicos (e.g., Lave, 1988; Cole, 1996), el aprendizaje humano es muy dinámico y muy sensible a interacciones sociales en curso como para ser capturado totalmente en los términos de esquemas mentales descontextualizados, contruidos de acuerdo a reglas universales. De hecho, mi punto de partida en este capítulo es que la mayor parte de nuestro *aprendizaje no es otra cosa que una clase especial de interacción social que apunta a la modificación de otras interacciones sociales*. Por tanto, en lugar de buscar aquellas propiedades del individuo que pueden ser consideradas como responsables de la constancia del comportamiento de esta persona, estoy optando por un marco de trabajo que me permita estar en sintonía con las interacciones de las que surge el cambio. Sin embargo, permítaseme agregar que mi elección de tal marco no se debe interpretar como un rechazo a la metáfora de adquisición vigente desde hace mucho tiempo. El enfoque comunicacional debe ser considerado como un marco de trabajo que tiene potencial para absorber esta perspectiva más tradicional mientras modifica su infraestructura epistemológica oculta.

Vygotsky (1987), que la profesora trata de ayudar a las niñas a hacer la transición de un concepto de triángulo *espontáneo* a uno *científico*.

5 Enfatizo una vez más: una afirmación como esta no se debe leer como una negación

ENFOQUE COMUNICACIONAL DEL APRENDIZAJE

Permítaseme regresar a los dos episodios que acabamos de ver, y tratar de describir el cambio requerido sin recurrir a estructuras mentales invisibles almacenadas en las cabezas de los estudiantes⁵. Escuchar las dos conversaciones breves entre los niños y sus profesoras nos dan qué pensar sobre la calidad de la comunicación que estaba teniendo lugar. En la primera escena, aunque era obvio que el término clave *número negativo* les era familiar a las niñas, también era claro que ellas no podían decir mucho sobre el tema del intercambio. Es significativo que hayan respondido las preguntas de la profesora con exclamaciones de una o dos palabras tales como “¡Menos!” o “Bajo cero”, y no con oraciones completas. Podemos decir que en este punto, las estudiantes podían identificar el discurso sobre números negativos cuando lo oían, pero que aún no eran capaces de tomar parte activa en él. En el segundo episodio, la situación, aunque diferente, también pedía un cambio. En verdad, las niñas participaron ávidamente en el discurso sobre triángulos; y, sin embargo, la forma en que lo hicieron no se parecía a la de la profesora.

Es importante notar que aunque la principal meta de las profesoras parece ser introducir a las niñas en nuevas maneras de comunicar, el trabajo nunca comienza desde cero. Sea que el discurso que se enseña verse sobre números negativos o triángulos, éste será desarrollado a partir de los discursos en los que las niñas tienen fluidez. Es decir, cualquiera sea el tema de aprendizaje, la tarea del profesor es modificar e intercambiar el discurso existente más que crear uno de la nada. En consecuencia, podemos definir el aprendizaje como el *proceso de cambiar de cierta manera, bien definida, las formas discursivas propias*. Más específicamente, una persona que aprende sobre triángulos o números negativos, altera y extiende sus habilidades discursivas de manera que llega a ser capaz de comunicarse sobre esos temas con miembros de la comunidad matemática. Se espera también que el nuevo discurso posibilite resolver problemas que no se podían resolver en el pasado.

En este punto alguien puede objetar y decir que el aprendizaje es más que modificar la comunicación. Aprender, diría el crítico, tiene que ver primero y sobre todo con cambiar las formas en que *pensamos*, y el asunto de cómo co-

de la existencia de estructuras mentales. Más bien, es una declaración metodológica; es una declaración de que, como investigadora, me siento en un terreno más sólido cuando puedo basar mis argumentos sobre aspectos observables de los fenómenos bajo indagación.

6 El enfoque comunicacional presentado en este capítulo es similar, aunque

municamos este pensamiento, aunque es importante, tiene una importancia secundaria. Permítaseme entonces sustentar que mi versión comunicacional del aprendizaje no excluye el pensar. Este punto se aclara inmediatamente cuando advertimos que la separación tradicional entre pensar y comunicar es insostenible, y que *pensar es un caso especial de la actividad de comunicar*⁶. En efecto, la acción de pensar se puede considerar como comunicarse consigo mismo. Esto es cierto tanto si el pensamiento es en palabras, como en imágenes o en otros símbolos cualesquiera. Nuestro pensamiento es claramente un esfuerzo dialógico, en el que nos informamos a nosotros mismos, argumentamos, nos hacemos preguntas, y esperamos nuestra propia respuesta. Por tanto, llegar a ser un participante en el discurso matemático es equivalente a aprender a *pensar* en una forma matemática.

Regresemos ahora a nuestros dos episodios de clase para reformular la pregunta inicial en términos comunicacionales. Preguntar qué les falta por aprender aún a las niñas es ahora equivalente a preguntar cómo debe cambiar la forma de comunicar de las niñas si ellas han de llegar a ser participantes diestras en el discurso matemático sobre triángulos y números negativos. Comenzaré con las niñas más jóvenes. Claramente, Eynat y Shira tienen que modificar su uso de la palabra clave *triángulo*. Este cambio aparentemente superficial y más bien marginal es, de hecho, bien profundo y de ninguna manera es fácil de implementar. En efecto, este cambio no ocurrirá a menos que las estudiantes adopten nuevos criterios para juzgar la conveniencia del uso de la palabra. Hasta ahora, las decisiones de las niñas de llamar diferentes formas con el mismo nombre *triángulo* estaban fundamentadas de manera total (como en el caso de Shira) o parcial (como en el caso de Eynat), en su percepción de la semejanza visual general de estas formas. Esto es verdad sea que las formas se estuvieran viendo o solamente recordando. Si Shira tuvo dificultad para identificar en la Figura 1 la forma delgada como un triángulo, fue porque le llamó la atención su semejanza con una vara. Según las reglas que gobiernan el discurso de las niñas en el momento, diferentes nombres significan diferentes formas, y por tanto lo que llaman vara no se puede llamar también triángulo. La correspondencia entre cosas y nombres debe ser una función univalente; esta situación es inevitable en un mundo en el que los nombres son parte integrante de las formas y, al igual que las formas mismas, son dados externamente y no son productos de decisiones humanas. Todo esto

no idéntico, a la *psicología discursiva* promovida, entre otros, por Harre y Gillett (1995) y por Edwards (1997).

7 Nótese que la descripción que presento del cambio requerido es muy similar —se

tendrá que cambiar en el proceso de aprendizaje. Desde ahora, las estudiantes tendrán que buscar apoyo en definiciones verbales y tratarlas como la base exclusiva para sus decisiones sobre lo que puede contar como “el mismo” o como diferente. Estas decisiones estarán mediadas por el lenguaje e involucrarán ciertos procedimientos bien definidos. Entre otros, antes de que las niñas decidan sobre el nombre que debe ser dado a una forma, ellas tendrán que escudriñar esta forma de una manera lineal, separándola en partes y contando los elementos así obtenidos (nótese que contar es una acción verbal sin la cual la nueva clase de procedimiento para decidir, y por tanto el nuevo tipo de mismidad, no sería posible). Este es un cambio de largo alcance que afecta las *reglas metadiscursivas* que regulan las formas en que se toman las decisiones discursivas⁷.

En el caso de los números negativos, se requieren cambios aun más extensos. Cuando se trata de palabras, no es sólo cuestión de modificar su uso. Los estudiantes tendrán que ampliar su vocabulario y aprender a operar con nuevos términos tales como “dos negativo” o “tres y medio negativo”. A diferencia del caso de los triángulos, en donde se puede identificar el objeto de la conversación con la ayuda de dibujos (e.g., triángulos dibujados en papel), los estudiantes ahora necesitarán nuevos recursos visuales diseñados especialmente para mediar la comunicación. Se introducirán pronto algunos símbolos especiales tales como -2 o -3.5, y modelos geométricos tales como la recta numérica ampliada. Como en el caso de los triángulos, también se requerirá un cambio en el nivel meta-discursivo. Trataré este último tema más adelante.

Por ahora, permítaseme generalizar estas últimas observaciones. El análisis de los dos episodios ha mostrado que el presente discurso de las niñas difiere del discurso escolar típico en por lo menos tres dimensiones:

- su *vocabulario*,
- los *recursos visuales* que median la comunicación,

podría decir que isomorfa— a la que se podría dar basada en la teoría de van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico (van Hiele, 1985). Sin embargo, las dos descripciones se distancian por sus diferentes fundamentos epistemológicos/ontológicos: mientras que el análisis de van Hiele, firmemente arraigado en el marco piagetiano, produciría una historia de esquemas mentales, la presente descripción es la descripción de maneras en que se comunican los estudiantes. Lo que hace a la última versión cualitativamente diferente de la primera es que presenta el desarrollo del pensamiento geométrico de los niños como parte integrante del desarrollo de sus habilidades de comunicación, y por tanto destaca el papel principal del lenguaje, de los factores contextuales y de la interacción social.

8 También es de resaltar que muchas de las preguntas “cotidianas” de las cuales se suponía que su respuesta era -2, presentaban el síndrome de desenfoque; es decir, aunque la

- las *reglas metadiscursivas* que conducen el flujo de la comunicación y de manera tácita dicen a los participantes qué clase de movimientos discursivos pueden contar como apropiados para este discurso particular, y qué será considerado como inapropiado.

Es decir, si el aprendizaje de las matemáticas se conceptualiza como el desarrollo de un discurso matemático, investigar el aprendizaje significa llegar a conocer las maneras en que los niños modifican sus acciones discursivas en esos tres aspectos. En lo que resta del capítulo analizaré las maneras en que puede ocurrir el cambio requerido. Mientras hago esto, espero mostrar que la adopción del enfoque comunicacional de la cognición no es un juego intelectual frívolo y que tal adopción influye tanto nuestra comprensión de qué sucede cuando los niños aprenden matemáticas como nuestras ideas sobre qué se debe hacer para ayudar a los estudiantes en este esfuerzo.

¿CÓMO CREAMOS NUEVOS USOS DE PALABRAS Y MEDIADORES?

De acuerdo con una visión generalizada sobre la secuencia de eventos que tienen lugar en el curso del aprendizaje, el estudiante primero debe tener una idea de un objeto matemático nuevo, luego debe darle nombre a esa idea y, al final, debe también practicar su uso. Este cuadro del aprendizaje bien puede ser el que subyace al principio de “aprendizaje con comprensión” que enfatiza la importancia y la primacía de la comprensión conceptual sobre la formalización y la habilidad (véase, e.g., Hiebert y Carpenter, 1992). Se supone que el niño ha de comprender una idea matemática, por lo menos en alguna medida, antes de comenzar a usar nombres matemáticos especiales y símbolos que la “representan”, y antes de hacerse proficiente en estos usos.

Conceptualizar el aprendizaje como una introducción a un discurso me lleva a dudar de este modelo generalizado y a buscar una secuencia diferente de eventos en el curso del aprendizaje. Tomemos el aprendizaje de números negativos como ejemplo. Sustentaré ahora que la introducción de nuevos nombres y nuevos significantes es el comienzo en vez del final de la historia. Primero, permítaseme mostrar la imposibilidad virtual de enseñar un nuevo discurso sin hablar realmente sobre sus objetos desde el puro principio. Veamos la manera en que los números negativos son introducidos en un libro de texto escolar (véase Figura 2).

El punto central de esta definición está en un interesante giro conceptual:

puntos del eje numérico se marcan con símbolos numéricos precedidos por una raya y a continuación se llaman *números negativos*. Uno se puede preguntar cómo estas acrobacias verbales —dar *nuevos nombres* a puntos y decir que son *números*— pueden posibilitar el acceso del niño a un discurso sobre los negativos.

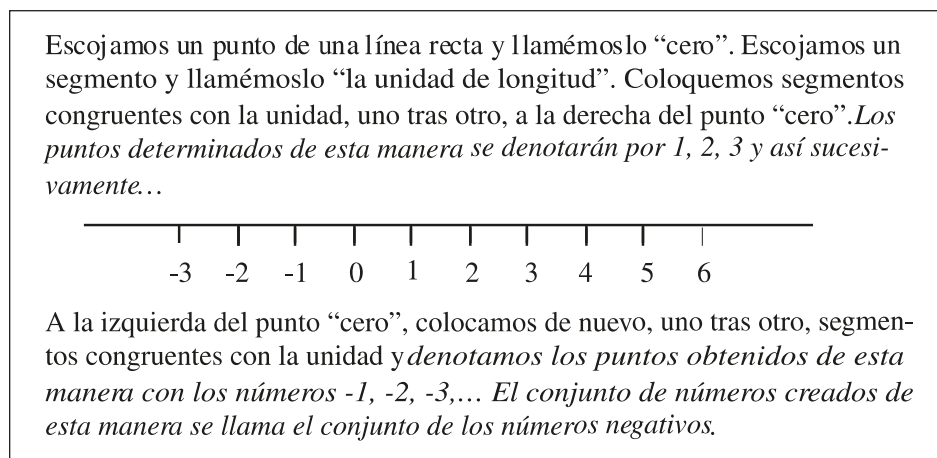


Figura 2: Tomada de un libro de texto escolar
(Mashler, M., 1976, *Algebra for 7th grade*). Traducido del hebreo

A primera vista, la secuencia de aprendizaje que inicia dándole un nuevo nombre a una cosa vieja parece de alguna manera no plausible. Y, sin embargo, tal orden de cosas puede ser inevitable, y también puede ser más eficaz de lo que tendemos a pensar.

Es *inevitable* porque para iniciar a los niños en un discurso sobre nuevos objetos, uno tiene que usar ya ese discurso. Los objetos del discurso deben entonces ser identificados, de una manera u otra, en palabras o símbolos. Probablemente es la razón por la que la profesora del Episodio 1 no puede evitar el uso de palabras como “números negativos”, “menos dos”, etc., mientras introduce el tema por primera vez. Claramente, se siente obligada a hacerlo a pesar del hecho de que los niños tienen poca idea sobre los usos que se pueden dar a estas palabras. El orden de cosas propuesto en el proceso de aprendizaje es también más *eficaz* de lo que tendemos a pensar por razón del simple hecho de que los nuevos objetos —los negativos— se han asociado e introducido con la palabra *número*. La noción familiar evoca en el estudiante expectativas con respecto a los usos posibles de los nuevos significantes, tales como -1, o -2.5. Los niños saben que están involucradas algunas operaciones numéricas. Saben que muchas reglas que se cumplen para números ahora se cumplirán para los

negativos. En cualquier circunstancia, al parecer los niños saben un montón sobre esto, algo a lo que pudieron estar expuestos a través de una sola oración. En los episodios que vamos a examinar próximamente tendremos oportunidad de ver cómo ellos hacen uso de su primera experiencia discursiva con números. Regresemos a nuestros estudiantes de séptimo grado para establecer qué tan bien lo están haciendo como recién llegados al discurso sobre números negativos. En la nueva escena de clase que se presenta a continuación podemos ver cómo las expectativas evocadas por la palabra *número* ayuda a los estudiantes a encontrar sus formas dentro del nuevo discurso. Algunas de estas formas son como las de los participantes expertos, y algunas son consideradas erróneas. En esta etapa, después de tres semanas y dieciséis reuniones de una hora, los niños ya saben cómo sumar números con signo y tratan de imaginar por sí mismos cómo multiplicar un positivo por un negativo. Primero lo hacen en pequeños grupos. En uno de estos grupos, el siguiente intercambio ocurre después de que la profesora preguntó a qué es igual $2 \cdot (-5)$:

Episodio 3: *La profesora preguntó a qué es igual $2 \cdot (-5)$*

N13 Sophie: Dos positivo por cinco negativo...

N14 Ada: Dos por cinco negativo.

N15 Sophie: Ajá, sigue... sigue... Es como si dijeras cinco negativo multiplicado por dos... Entonces, cinco negativo multiplicado por dos es diez negativo...

Hasta ahora todo ha salido bien. Proyectando de manera metafórica a partir de su primera experiencia discursiva, las niñas descubrieron para ellas la regla que es, en efecto, generalmente aceptada. Ahora mostraré que no siempre es este el caso. Durante la discusión de clase ocurrida después de completar el trabajo en parejas, tuvo lugar el siguiente intercambio en respuesta a la misma pregunta anterior:

Episodio 4: *Respuesta a la pregunta “¿A qué puede ser igual $2 \cdot (-5)$?”*

N16 Roy Diez negativo

N17 Profesora: ¿Por qué?

N18 Roy: Simplemente lo hicimos... dos por cinco negativo es igual a diez negativo porque cinco es el número más grande, y entonces... uhmmm... Es parecido a dos por cinco es diez, pero [es] diez negativo porque es cinco negativo.

...

N42 Noah: Y, ¿si el positivo fuera siete en vez de dos?

N43 Yoash: Entonces sería treinta y cinco positivo.

N44 Sophie: ¿Por qué?

N45 Yoash: Porque el más [el positivo] es mayor.

A primera vista, la idea de Roy puede parecer algo sorprendente. Con una mirada más de cerca, es tan justificada como la propuesta por Sophie: como la niña que habló antes de él, Roy aprovecha hábitos discursivos desarrollados previamente, excepto que en esta ocasión la elección no se ajusta con la hecha por la comunidad matemática a lo largo de la historia. En efecto, en el primer caso, las niñas sustituyen números viejos por nuevos: los negativos aparecieron en el puesto del segundo multiplicador, ocupado hasta ahora exclusivamente por números sin signo. En el segundo caso, los estudiantes sustituyeron operación por operación: la *multiplicación* de números con signo se obtuvo a partir de la multiplicación de números sin signo más o menos de la misma manera en que la *adición* de números con signo se había obtenido previamente a partir de la adición de los números sin signo (véase una presentación simbólica de las plantillas en el Cuadro 1). Como ya se señaló, mientras la elección del primer grupo se puede considerar exitosa porque adhiere a lo que cuenta como apropiado en el discurso matemático, la elección del otro grupo no satisfizo los estándares. Sin embargo, desde el punto de vista del investigador, lo más importante es la semejanza entre los dos casos y no las diferencias: en ambos episodios hemos visto estudiantes que tratan de incorporar, al discurso sobre números, los negativos encontrados por ellos recientemente, y en ambos episodios lo hicieron usando viejas plantillas discursivas para los nuevos significantes.

Intento exitoso: sustitución en la plantilla discursiva

$$a \cdot b = b + b$$

Intento no exitoso: sustitución en la plantilla discursiva

$$(+a) + (-b) = \begin{cases} |a - b| & \text{si } a > b \\ -|a - b| & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

en donde a y b son “números sin signo” y tanto $+$ como $-$, son sustituidos por $.$

Cuadro 1: Reciclar viejas plantillas discursivas en el nuevo contexto

Permítaseme ir ahora más allá de estos ejemplos y especular sobre dos etapas distintas del aprendizaje que podrían seguir a la introducción de un nuevo significante. Al comienzo, tal como lo acabamos de ver, el uso de un nuevo significante está *guiado por una plantilla*, es decir, los nuevos significantes se disponen en plantillas discursivas viejas. El mecanismo de reciclar viejos hábitos discursivos, que tiene un parentesco con la metáfora conceptual de Lakoff (Lakoff, 1993), está en acción aquí. Esta etapa se caracteriza por un uso más bien inflexible del nuevo significante y por tratar símbolos, tales como -5 , como cosas en sí mismas, y no como representantes de algo más. Si todo va bien, y si no hay razón visible para renunciar a las plantillas que se han escogido, ambas características desaparecerán después de un tiempo gracias a lo que aquí se llamará *objetificación* del discurso. Finalmente, se comenzará a hacer referencia a los significantes como *representaciones* de otras entidades que se cree tienen existencia independiente. Esto sucede cuando, para el estudiante, -5 llega a ser sólo una representación de un *número negativo*, con este último concebido como un objeto intangible que también se puede representar de muchas otras maneras (e.g., como $15 - 20$ o como un punto en el eje de números) y que existe de manera independiente de la mente humana. En esta etapa, el uso de los nuevos significantes se hace mucho más flexible. Las nuevas palabras y símbolos para números cobran vida por sí mismos y ahora se pueden incorporar en estructuras lingüísticas no escuchadas dentro del viejo discurso más restringido. El nuevo discurso también hace posible decir mucho más con menos palabras.

Este proceso de desarrollo del discurso en dos fases, resumido en el Cuadro 2 se mantiene en movimiento por lo que describí alguna vez de manera metafórica como un mecanismo de bomba (Sfard, 2000a): la introducción de un símbolo es como levantar el pistón en el sentido de que crea un nuevo espacio semántico —una necesidad de un nuevo significado, un nuevo hábito discursivo. La objetificación gradual del discurso es análoga al procedimiento de llenar el espacio así creado. Es a través de la creación intermitente de un espacio “hambriento” de objetos nuevos y a través de sus reabastecimientos subsiguientes con formas y relaciones discursivas nuevas, como los participantes del discurso matemático expanden constantemente sus límites.

la fase guiada por plantillas. No se ha resuelto aún el dilema sobre las dos posibles plantillas para multiplicar números positivos por negativos. La profesora provisionalmente se abstiene de dar cualquier consejo y los niños tienen que recorrer todavía un largo camino por su cuenta. La situación con las niñas que están aprendiendo sobre triángulos es muy diferente en dos aspectos cruciales. Primero, el discurso de las niñas sobre formas geométricas, aunque muy diferente del de la profesora, ya está objetificado. En efecto, para las niñas, los triángulos son objetos dados externamente y no un constructo arbitrario cuya identidad puede ser decidida discursivamente. En segundo lugar, de manera diferente a lo del ejemplo anterior, ahora es la profesora quien tratará de establecer usos nuevos de la palabra triángulo e intentará cambiar las reglas que gobiernan tales usos. Es decir, en este caso, la profesora es una iniciadora activa de hábitos discursivos nuevos.

¿CÓMO CREAMOS NUEVAS REGLAS METADISCURSIVAS Y LAS CONVERTIMOS EN PROPIAS?

Hasta ahora hemos estado enfocados en los cambios discursivos que tienen lugar después de una extensión del vocabulario (e.g., introducción de nombres de números tales como “uno negativo” o “diez negativo”), de la agregación de nuevos recursos de mediación (tales como símbolos numéricos nuevos o la recta numérica extendida), o de la alteración del uso de una palabra (la profesora de Shira propone aplicar la palabra ‘triángulo’ a una forma que las niñas se rehúsan a llamar por tal nombre). Hemos estado hablando sobre dos fases de desarrollo en el uso de recursos discursivos nuevos: la fase de uso guiado por una plantilla y la fase de uso objetificado. Ahora es importante recordar que junto con las alteraciones en el uso, debe tener lugar otro cambio, esta vez, en el nivel metadiscursivo: con frecuencia, las reglas que gobiernan las decisiones discursivas de los interlocutores también evolucionarán. Tal cambio ciertamente debe ocurrir en el discurso de las niñas si ellas han de ser capaces de decidir cuál de las dos maneras de multiplicar positivos por negativos —la ofrecida por Sophie o la diseñada por Roy— deberá ser aceptada como la apropiada.

En efecto, hagamos una pausa por un momento y formulemos para nosotros mismos la pregunta sobre qué necesitan las niñas para decidir entre las dos posibilidades. Que la tarea es exigente se evidencia, entre otras cosas, en el siguiente testimonio del escritor francés Stendhal, quien recuerda las dificultades que experimentó como estudiante cuando trataba de encontrar las razones para la

consabida regla “menos por menos da más”:

Pensaba que las matemáticas no daban cabida a la hipocresía... Imagínense cómo me sentí cuando me di cuenta de que nadie podía explicarme por qué *menos por menos da más*. ... Que esta dificultad no me haya sido explicada fue bastante malo ... Lo peor es que *me fue explicada mediante razones que evidentemente no eran claras para quienes las daban*. (Citado en Hefendehl-Hebeker, 1991, p. 27)

Cabe notar que la queja de Stendhal se refiere a la naturaleza de la justificación que escuchó y no a la ausencia de justificación. Tratemos de imaginar cuál puede ser esta justificación. Aquí hay una posibilidad. Tomando como punto de partida la condición de que las leyes básicas de los números, como se conocen desde hace mucho, no se deben violar, y suponiendo que la ley “*más por menos es menos*” y la regla $-(-x) = x$ han sido ya deducidas de estas leyes (parece que Stendhal no ha tenido problemas con estas), quien explica ahora puede sostener que para dos números positivos cualesquiera a y b , se debe cumplir lo siguiente.

Por un lado,

$$(1) \quad 0 = 0(-b) = [a + (-a)](-b)$$

y, por otro lado, por la ley distributiva, que se supone se debe cumplir,

$$(2) \quad [a + (-a)](-b) = a(-b) + (-a)(-b)$$

Puesto que ya se acordó que $a(-b) = -ab$, obtenemos de (1) y (2):

$$-ab + (-a)(-b) = 0$$

De ahí, y de la ley $-(-x) = x$, ahora se obtiene:

$$(-a)(-b) = -(-ab) = ab$$

Uno puede decir que el grado de formalidad de este argumento es lo que lo hace no convincente a los ojos del estudiante. Por tanto, tratemos de imaginar una alternativa. Un tipo de explicación diferente, más eficaz, sólo podría provenir del discurso cotidiano. En efecto, las conversaciones en clase entre estudiantes de secundaria, que no son realmente el caso de un discurso matemático consolidado, son típicamente un resultado de la hibridación entre el discurso cotidiano y el discurso matemático moderno. En el discurso cotidiano, las afirmaciones acerca de objetos se consideran aceptables (*verdaderas*) si parecen necesarias e inevitables, y si se conciben como declaratorias de una propiedad de un ‘mundo externo’ independiente de la mente. Esto se aplica no sólo para objetos materiales,

sino también para los números, las formas geométricas y todas las otras entidades matemáticas que están implicadas en usos coloquiales. Es esta “realidad externa” lo que para nosotros es un criterio de inevitabilidad y certidumbre. En las matemáticas, como en el discurso cotidiano, el estudiante espera ser guiado por algo que él pueda considerar que está más allá del discurso mismo y existe de manera independiente de las decisiones humanas. Esto es lo que se trasluce de las palabras de un estudiante, Dan, quien trata de explicarme su dificultad con los negativos:

Episodio 5: *Dan explica su dificultad con numeros negativos*

- 1 Dan: *El menos es algo que la gente se inventó.* Es decir... no hay nada a nuestro alrededor para mostrarlo. No puedo imaginarme nada así.
- 2 Anna: ¿Todo lo relacionado con los números es inventado por la gente?
- 3 Dan: No, no todo...
- 4 Anna: ¿Por ejemplo?
- 5 Dan: Por ejemplo, la operación básica de adición, uno más uno [es dos] y *según la lógica del mundo* no puede ser de otra manera.
- 6 Anna: Y un medio más un tercio es igual a cinco sextos. ¿Depende eso de nosotros, los seres humanos, o...
- 7 Dan: No depende de nosotros. Se puede mostrar en el mundo.
- 8 Anna: Ajá... Y, cinco menos ocho igual a menos tres, ¿depende de nosotros o no?
- 9 Dan: De nosotros.
- 10 Anna: ¿Por qué?
- 11 Dan: Porque en nuestro mundo no hay ejemplo para una cosa así.

Es decir, para el estudiante, el camino más seguro para comprender y aceptar los números negativos y las operaciones sobre estos números, podría ser hacerlos parte de su discurso cotidiano. Infortunadamente, en este caso, esto no parece posible. Aunque es usual que la gente pueda incorporar números negativos en oraciones que tienen que ver con asuntos cotidianos, estas apariciones discursivas son incompletas en la medida en que rara vez incluyen operaciones con

números y por tanto, de hecho, se refieren a entidades tales como -2, o -10.5 en calidad de etiquetas más que como verdaderos números. De esto hay evidencia en los resultados de mi experimento en el que a dieciocho estudiantes que ya aprendieron sobre números negativos se les pide construir oraciones con el número -3, y también, preguntas para las que la respuesta pueda ser -2. En ambos casos, se les pidió buscar afirmaciones de “contenido del mundo real”. Como se puede ver en los resultados que se presentan en la Tabla 1, no todos los estudiantes pudieron con la tarea. Los escasos “usos cotidianos” de números negativos se presentaron únicamente en los contextos de temperatura, latitud y sobregiro bancario. En todos estos casos, los números negativos fueron empleados como etiqueta más que como medida de cantidad⁸.

Ejemplo	%
Oración con -3:	
“La temperatura descendió a -3”	42
Preguntas cuya respuesta debe ser -2:	
“La temperatura descendió 12 grados a partir de 10 grados. ¿Cuál es la temperatura ahora?”	42
“¿Cuánto dinero debe a John?”	25

Tabla 1: Ejemplo de verbalizaciones “cotidianas” encontradas por los estudiantes, que incluyen números negativos

Nos hemos quedado con la justificación fundamentada en una regla metadiscursiva que subyace al argumento formal presentado antes. Según esta regla, el único criterio para la extensión del discurso matemático existente es la coherencia interna del discurso extendido resultante. Más específicamente, todo lo que se necesita para aceptar un uso propuesto de un nuevo tipo de número es su consistencia con ciertas propiedades de los conjuntos de números que esta definición va a ampliar. Hay poca probabilidad de que los estudiante jóvenes, para quienes el discurso matemático es una descripción de la realidad existente y no un medio para crear una nueva realidad, acepten esta nueva metarregla, y trabajando por su cuenta, la reinventen. (Esta, de paso, bien puede ser la razón por la que la enseñanza de los números negativos se ha condicionado a la edad ~~de los alumnos según el~~ principio didáctico que se resume en la inolvidable cantidad negativa estaba de alguna forma involucrada en la situación que planteaba la pregunta, la verdadera respuesta era 2 y no -2 (véase el último ejemplo en la Tabla 1).

⁹ Esto significa que las nuevas metarreglas sólo pueden ser dictadas por el profesor. Permítaseme agregar de manera inmediata que la clase de dictado del que estamos hablando no necesariamente es una imposición. En la medida en que todas las partes involucradas tienen

rima “menos por menos da más, no me pregunte más”; W.H. Auden, citado en Kline, 1980).

Para ver qué tan cierto es que los estudiantes no tienen asidero para preferir una plantilla vieja sobre otra, volvamos a los estudiantes de grado séptimo a quienes dejamos tratando de resolver la pregunta sobre cuál debería ser el resultado de multiplicar un positivo por un negativo. El debate duró dos sesiones completas y finalmente Roy convenció a la clase con su afirmación de que el signo debería ser el mismo que el del factor que tuviera mayor valor absoluto. La profesora se veía muy desesperada.

Episodio 6: *¿Por qué elegir una plantilla y no la otra?*

N46 Profesora: Sigues repitiendo lo que Roy dijo el lunes pasado, y yo quiero saber por qué piensas que así debe ser.

N47 Yoaz: Porque eso es lo que dijo Roy.

N48 Profesora: Pero Roy no explicó por qué lo que hay que tener en cuenta es la magnitud.

N49 Roy: Porque debe haber una ley, una regla u otra

N50 Profesora: Debe haber alguna regla, por tanto, ¿es mejor que lo hagamos de acuerdo con la magnitud?

N51 Leegal: El mayor es el que cuenta.

...

N83 Profesora: ¿Por qué [estás de acuerdo en que dos por seis es doce]? Seis por dos negativo es doce negativo, ¿es esto muy complicado?

N84 Roy: Pero yo soy más carismático... Eso sirve para influir en todos.

El cuadro que obtenemos de aquí es como sigue: los niños saben que si trabajan con números, debe haber reglas; y sin embargo, no tienen idea de dónde deben provenir estas reglas. Su impotencia se expresa en la declaración humorística de Roy de que la personalidad de quien inventa una definición es tan buena razón para aceptarla como cualquier otra (¡después de todo, ¿no repetimos una y otra vez que las matemáticas son una creación humana?!). Si se piensa sobre ello,

cualquier cambio que haya de ocurrir en las metarreglas sólo puede ser iniciado por el profesor. En efecto, a diferencia de las reglas del discurso matemático que están en el nivel de los objetos, no se puede mostrar que las reglas del metanivel sean necesarias o inevitables. Tal como lo argumentó de manera elocuente Wittgenstein (1953; véase también Sfard, 2000c), en un cierto sentido profundo

Episodio 7: *Tratar de convencer a Shira de que la forma C es un triángulo*

- T35 Profesora: Pero me dijiste... Espera, me dijiste que triángulo... bueno... Eynat, me dijiste, y Shira estuvo de acuerdo, que en un triángulo debe haber tres líneas, ¿verdad?
- T36 Eynat: Así es.
- T37 Profesora: Entonces, dime ¿cuántas líneas tenemos aquí? [En la forma presentada en la Figura 1]
- T38 Shira: Uno, dos, tres...
- T39 Profesora: Entonces, ¿quizá, esto *es* un triángulo? ¿Así que E ynat borró [el redondel] sin razón alguna? No estás segura. Acerca de este, dijiste que era un triángulo [muestra otro triángulo “más canónico”].
- T40 Shira: Porque ese es ancho y parece un triángulo. No es delgado como una vara [ilustra con movimientos de la mano y se ríe].
- T41 Profesora: ¿Cómo sabemos que un triángulo... si una forma es un triángulo? ¿Qué dijimos? ¿Qué dijimos? Para decir que una forma es un triángulo, ¿qué se necesita?
- T42 Shira: Tres puntos... tres vértices... y...
- T43 Profesora: Tres vértices, ¿y...?
- T44 Shira: Tres lados.
- T45 Profesora: Y tres lados. Bien. Entonces, ¿este triángulo cumple con eso! Mira, un lado... y aquí tengo un lado largo, y aquí tengo otro lado largo. Por tanto, aquí tenemos un triángulo.

T46 Shira: Y un vértice, y un segundo vértice, y un... ¡¿punto?!

T47 Profesora: Mira aquí: un vértice, segundo vértice, tercer vértice

T48 Shira: Entonces, ¿es un triángulo?

no son más que convenciones. Estas convenciones tienen sus razones históricas pero éstas no son las razones de los estudiantes de hoy día. La posibilidad de que los estudiantes reconstruyan estas reglas para ellos es entonces muy poco plausible. Los niños sólo pueden llegar a estas reglas interactuando, al menos parte del tiempo, con un participante experto.

Esta última propuesta didáctica parece muy directa. Y, sin embargo, si ahora regresamos a las niñas de primer grado que están aprendiendo sobre triángulos, veremos que ellas no aceptan fácilmente cambios en las reglas metadiscursivas, incluso si la iniciativa proviene de un determinado profesor.

En este episodio, el debate largo sobre el estatus de la forma con apariencia de vara alcanza su climax. Para mostrar la dificultad del cambio discursivo que se requiere, permítaseme analizar la conversación breve mientras trato de responder una serie de preguntas que especifico a continuación.

¿Cómo tienen que cambiar aún las metarreglas del discurso de las niñas? Hace poco, cuando estaba analizando el Episodio 2, di una respuesta parcial a esta pregunta. Permítaseme repetir y elaborar la respuesta. La metarregla que tiene que cambiar es la que regula la actividad de los niños de dar nombres a formas geométricas. En este momento, Eynat y Shira realizan la tarea de nombrar, de manera irreflexiva, sobre la base de sus experiencias visuales previas. Ellas reconocen triángulos y cuadrados de la misma manera como reconocen las caras de las personas, es decir de manera intuitiva y sin dar las razones para sus decisiones. De ahora en adelante, se les pedirá que comuniquen a los otros no sólo sus decisiones sino también la forma en que las hacen. Esto sólo se puede hacer en palabras. La introducción del lenguaje impone una linealidad: en vez de quedar satisfechas con la impresión visual holística que no puede ser comunicada a otra persona, las niñas tendrán que decir a sus interlocutores cómo se puede examinar una forma antes de tomar la decisión sobre su nombre. Los procedimientos de examinación (que he llamado *foco perlocutivo*; véase Sfard, 2000b) están mediados por el lenguaje y documentados en él. De hecho, sólo son posibles como una parte de la comunicación verbal. Cuando revisamos si una forma es

un triángulo, tenemos que contar sus lados. El conteo es un acto lingüístico y el resultado de contar es una palabra (*tres*, en el caso de los triángulos). La nueva forma de tomar decisiones sobre los nombres de figuras geométricas será entonces *analizar palabras asociadas con las formas* y sin hacer referencia alguna a las impresiones visuales generales que antes eran la base de los procedimientos que se tenían para nombrar.

Esta nueva regla metadiscursiva implica incluso un cambio de otro principio metadiscursivo. Hasta ahora, nombrar ha sido un acto de separar el mundo en conjuntos *disyuntos* de objetos. Destaqué la palabra *disyuntos* en esta última oración para enfatizar que dentro del discurso geométrico inicial, nombres diferentes significan objetos diferentes. Este hecho es de importancia crucial, en la medida en que implica la metarregla según la cual uno no puede denominar a una forma como *triángulo* y *vara*, o *cuadrado* y *rectángulo*. Esto tendrá que cambiar una vez que las decisiones para denominar estén basadas en los resultados de procedimientos detallados para examinar cómo varía la complejidad más que en la apreciación visual holística. En efecto, los procedimientos de examinación se pueden ordenar de acuerdo con la relación de inclusión (por ejemplo, el procedimiento para identificar rectángulos es, casi literalmente, una parte del procedimiento para identificar cuadrados), y por tanto se puede organizar jerárquicamente. La organización jerárquica de los procedimientos de examinación se convierte, a su vez, en base para la categorización jerárquica de formas geométricas.

¿Cómo trata el profesor de inducir este cambio? La transición desde las viejas reglas metadiscursivas hacia las nuevas, claramente debe tener lugar antes de que Eynat y Shira se convenzan totalmente de que la forma de vara es un triángulo. Impaciente por ver que la transición ocurra efectivamente, la profesora recuerda de manera reiterada el criterio que se debe usar para tomar la decisión: primero ella dice que “en un triángulo debe haber tres líneas” [T35], luego ella dice “Para decir que una forma es un triángulo, ¿qué se necesita?” [T41], y al final, con entusiasmo, confirma la respuesta de Shira “tres vértices y tres lados” [T42]. Aunque ninguna de las formulaciones de la profesora indica de manera explícita el hecho de que tener tres lados sea una condición suficiente para que una forma sea un triángulo, la suficiencia está ahí, señalada por la profesora sin medios directos. Una y otra vez, la profesora inicia la examinación de las formas y el conteo de sus elementos. Invariablemente, las palabras “uno, dos, tres” son seguidas por “Entonces...” (véanse [T24], [T39], [T45]), y, finalmente, con la enunciación que establece que la forma es un triángulo. La palabra “entonces” es muy eficaz para sugerir que cualquier cosa que venga después es una implicación inevitable de

la secuencia “uno, dos, tres”.

¿Qué tan exitoso es el esfuerzo de las profesoras? Con respecto a esto, el método discursivo escogido por la profesora funciona: Shira aprende rápidamente a completar el procedimiento de contar hasta tres, con las palabras “Entonces, esto es un triángulo” (¡los niños son increíblemente hábiles para detectar y recoger patrones discursivos!). En [T48], Shira se apura para establecer esta conclusión por iniciativa propia, siendo claramente consciente de las reglas del juego propuesto por la profesora. Y, sin embargo, el hecho de que ella pronuncie esta conclusión como una pregunta y no como una aserción firme indica que ella puede estar declarando una rendición en vez de una verdadera convicción. La niña sabe *qué* se espera que ella diga pero no sabe *por qué*. La afirmación de que la forma *C* es un triángulo contradice la regla metadiscursiva mediante la cual ella ha hecho por mucho tiempo sus decisiones para nombrar. Lo que la profesora considera como condición necesaria y suficiente para caracterizar la “triangularidad”, para la niña es, en el mejor de los casos, una condición necesaria. La falta de certidumbre también se puede sentir en las contribuciones de Eynat, a pesar de su evidente consciencia de las reglas metadiscursivas que su compañera elude (véanse [T3] y [T31]). La evidencia última del hecho de que los viejos hábitos metadiscursivos difícilmente mueren, se tiene algún tiempo después cuando se pidió a las niñas distinguir entre rectángulos y otros polígonos. Ambas niñas rechazarán obstinadamente la sugerencia de la profesora de llamar también rectángulo a un cuadrado y se apegarán a su versión por un largo tiempo a pesar

la voluntad de jugar el juego, la introducción de sus reglas por un jugador experimentado no se puede considerar que viola la libertad de nadie. Por lo general, este es el caso en la situación de clase: el profesor tiene la voluntad de enseñar, mientras que los niños, aun si no se ven muy entusiasmados, desean aprender. En efecto, ambas partes tienen el deseo de tener una comunicación eficaz. También de manera tácita, las partes están de acuerdo en que son los niños los que deben ajustar sus formas discursivas a las del profesor y no lo contrario. Después de todo, si los niños no se preparan para seguir la guía discursiva de los mayores, ellos nunca serán capaces de comunicarse con otras personas. Así, sólo se puede comprender que los niños cambian sus formas discursivas interpretando pistas metadiscursivas, conjeturando qué es apropiado e imitando patrones que aparecen en las acciones discursivas de otros interlocutores. La única razón de todo esto es el deseo de mejorar la comunicación al alinear a los estudiantes con sus compañeros más experimentados.

de la insistencia de la profesora.

Se puede conjeturar que en el caso que hemos analizado, la lentitud del aprendizaje es resultado no tanto de la persistencia de los viejos hábitos discursivos como de la ineficacia del método de enseñanza. Más aun, puesto que este método estaba basado en demostrar la aplicación de las nuevas metarreglas más que en argumentarlas de manera explícita, algunas personas pueden criticar a la profesora por violar el principio del aprendizaje con comprensión. Este es entonces el lugar apropiado para recordarnos que a diferencia de las reglas matemáticas del nivel de los objetos, cada una de las cuales está conectada lógicamente con todas las demás, las metarreglas no son dictadas por la necesidad lógica. En consecuencia, no se pueden justificar en una forma racional verdaderamente convincente. Los niños, si quieren comunicarse con otros, tendrán que aceptar estas reglas simplemente porque ellas regulan el juego que juegan jugadores más experimentados⁹. Tendrán que convertirse en participantes del nuevo discurso antes de que puedan apreciar completamente sus ventajas.

CONSIDERACIONES FINALES:

¿CÓMO AFECTA TODO ESTO A LA PRÁCTICA?

En este capítulo propuse pensar sobre el aprendizaje de las matemáticas como la actividad de desarrollar un tipo especial de discurso. Ahora es tiempo de demostrar que la sugerencia de este cambio conceptual no era un mero ejercicio intelectual. En esta última sección quiero sostener que el cambio de perspectiva está obligado a afectar algunas de nuestras creencias sobre la enseñanza de las matemáticas.

Permítaseme comenzar con el principio —actualmente aceptado— según el cual todo aprendizaje que estemos tratando de inducir debe ser *significativo* durante todo el proceso. El lema *aprendizaje con comprensión* enfatiza la importancia y primacía de la comprensión conceptual sobre la formalización y la habilidad. Como lo mencioné varias veces, la conceptualización del aprendizaje como introducción a un discurso me conduce a cuestionar esta insistencia en la comprensión sostenida. A partir de lo que se ha dicho desde hace tiempo, más bien podría concluir que uno puede darle sentido al discurso matemático sólo a través de una participación persistente y no antes de ello. De hecho, un énfasis muy grande en la comprensión puede terminar por ser contraproducente en la medida en que puede debilitar la voluntad de los estudiantes para involucrarse en un discurso matemático en momentos de comprensión insuficiente. Permíta-

seme entonces reiterar el consejo dado por Cardan hace más de medio milenio a quienes lo criticaron por usar los “números imaginarios”: quien quiera volverse totalmente fluido en la comunicación matemática tiene que persistir en practicar el discurso matemático, y debe hacerlo “dejando de lado las torturas mentales involucradas”, si fuera necesario.

Puesto que, sin duda, el discurso matemático objetificado sólo puede surgir en la delicada dialéctica entre involucrarse en la comunicación matemática y tratar de comprender, debo cuestionar otra visión pedagógica generalizada. Debido a la existencia de las calculadoras y los computadores, algunos escritores han estado insistiendo en que se puede eximir al estudiante de tratar de alcanzar una eficiencia procedimental (véase, e.g., Devlin, 1997). Algunos educadores pueden ir más allá para decir que el formalismo y las habilidades se pueden remover completamente de los currículos escolares. Y, sin embargo, tal como lo he sostenido a través de estas páginas, es un error pensar que la simbolización es un asunto de retoques finales —de dar nueva “expresión” al “viejo pensamiento”. Por el contrario, los mediadores simbólicos especiales son necesarios para generar la comunicación matemática desde el inicio.

De acuerdo con otra afirmación conocida, la mejor manera de asegurar un aprendizaje eficaz es mantener las matemáticas inmersas en el contexto de la vida real. En términos discursivos, esto significa que el discurso matemático escolar siempre debe permanecer como una parte del discurso cotidiano. Mientras discutía el aprendizaje de números negativos he mostrado cuán irrealista es esta meta. Además, si aprender matemáticas significa una iniciación a un tipo especial de discurso, ¡permanecer dentro de los confines del discurso cotidiano contradice nuestro propósito!

Quizá el supuesto aceptado de manera más amplia sobre el aprendizaje es que el estudiante es el constructor de su propio conocimiento. Esta afirmación piagetiana con frecuencia se malinterpreta diciendo que los niños deben construir su propio conocimiento más o menos por su cuenta, en el curso de la resolución de problemas en forma colaborativa. En términos discursivos, esto podría significar que se espera que los estudiantes desarrollen el discurso matemático mientras interactúan entre ellos. Nuestra información, seguida de la discusión sobre la noción de regla metadiscursiva y sobre las maneras en que estas reglas evolucionan, ha mostrado la insostenibilidad de esta creencia.

Para resumir, la visión comunicacional del aprendizaje implica que mientras enseñamos matemáticas, debemos tener en mente la dificultad inherente de este esfuerzo, originada en la circularidad endémica del proceso de aprendizaje y en el hecho de que al menos algunas de las metarreglas del discurso matemático

no son inevitables desde el punto de vista lógico. Ninguno de los dilemas resultantes se puede superar con un esfuerzo puramente racional. Aceptar números negativos o reglas metadiscursivas que cambian lo que parece ser una ley de la naturaleza requiere tiempo y paciencia. Esto puede ser la razón por la que se oyó al matemático von Neumann decirle a un periodista “Uno no comprende las matemáticas, muchacho, uno sólo se acostumbra a ellas”. Naturalmente, esta

CAPÍTULO 3

ENFOQUE COMUNICACIONAL PARA INVESTIGAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS¹

Este breve texto aborda la pregunta sobre qué significa *aprender* matemáticas y ofrece una respuesta que considero particularmente útil. Antes de exponer esta respuesta, permítaseme echar un vistazo a la conversación entre Noa, una alumna de siete años de edad, y una estudiante para profesora.

Episodio: *El número más grande*

- 1 Profesora: ¿Cuál es el número más grande en el que puedes pensar?
- 2 Noa: Un millón.
- 3 Profesora: ¿Qué pasa cuando le sumamos uno a un millón?
- 4 Noa: Un millón uno.
- 5 Profesora: ¿Ese número es más grande que un millón?
- 6 Noa: Sí.
- 7 Profesora: Por tanto, ¿cuál es el número más grande?
- 8 Noa: Dos millones.
- 9 Profesora: Y, ¿si sumamos uno a dos millones?

¹ Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E.]

² La autora usa esta forma abreviada para referirse a las reglas metadiscursivas. [N.E.]

- 10 Noa: Es más que dos millones.
- 11 Profesora: Entonces, ¿se puede llegar al número más grande?
- 12 Noa: Sí.
- 13 Profesora: Supongamos que *googol* es el número más grande.
 ¿Podemos sumar uno a googol?
- 14 Noa: Sí. Hay números más grandes que googol.
- 15 Profesora: Entonces, ¿cuál es el número más grande?
- 16 Noa: ¡No hay ese número!
- 17 Profesora: ¿Por qué no hay un número que sea el más grande?
- 18 Noa: ¿Porque siempre hay un número más grande que ese?

Claramente, este breve intercambio se convirtió para Noa en una oportunidad para aprender. La niña comienza el diálogo convencida de que hay un número que se puede llamar el más grande y termina estableciendo enfáticamente lo contrario: ¡No hay ese número! Ahora quiero detenerme en lo que significa la palabra ‘aprendizaje’.

Mi afirmación sobre el aprendizaje de Noa fue provocada porque tuve la sensación de que estaba ocurriendo un cambio en la conversación. Para describir el aprendizaje, se debe tener claro qué es lo que cambió.

Una forma de salirle al paso a tal interrogante consiste en decir que el cambio ocurrió en la *concepción de número* que tiene Noa o en el *esquema mental* que subyace a su pensamiento acerca de los números. La concepción inicial de la niña impedía la posibilidad de una secuencia inagotable de números, y su concepción al terminar la conversación la hizo decir que hay números tan grandes como se quiera. El cambio en la concepción fue inducido por la profesora quien condujo a la niña a darse cuenta de la contradicción en su *esquema de número*: Noa veía el conjunto de números como finito, pero también pareció estar consciente del hecho de que sumar uno a cualquier número conduce a un número mayor. Estos dos hechos, considerados conjuntamente, conducen a lo que se conoce en la literatura como *un conflicto cognitivo* (véase, e.g., Tall y Schwartzenger, 1978). El conflicto fue responsable de la desestabilización del esquema de número y fue resuelto mediante la reorganización de esta construcción mental.

Esta conceptualización es ciertamente útil pero evoca entidades mentales invisibles sin haber aprovechado antes todo lo que se puede advertir en la superficie. Si dejamos que nuestra visión considere las palabras mismas y no lo

que usualmente acostumbramos ver *a través* de ellas, podemos advertir que en el discurso está ocurriendo mucho más de lo que puede parecerle a una persona que esté atendiendo directamente a los contenidos. Lo que vamos a ver, mientras dejamos entre paréntesis nuestras interpretaciones espontáneas hechas sobre la marcha, se puede describir como un cambio en las *formas de comunicación* de Noa.

En efecto, la cosa más simple que se puede notar es que en la breve conversación, la niña modifica su uso de la palabra *número*. El aprendizaje que ocurre aquí puede entonces ser definido como el *proceso de cambiar las formas discursivas de Noa de una cierta manera bien definida*. Más específicamente, Noa altera su conversación sobre números para llegar a ser capaz de comunicarse sobre estos tópicos con el interlocutor experto, que en este caso es la profesora. El nuevo discurso ya no se está desarrollando por capricho de la profesora ni tampoco porque es “así como hablan quienes son alguien en la escuela”, sino porque se espera que la nueva forma de comunicarse ayude en la resolución de problemas que no pudieron resolverse en el pasado.

En este punto alguien puede objetar diciendo que hay mucho que aprender aparte de modificar la comunicación. El crítico diría que aprender tiene que ver, en primer lugar y principalmente, con cambiar las formas de *pensar* y, aunque el asunto relativo a cómo comunicamos ese pensamiento es importante, sólo tiene una trascendencia secundaria. Entonces, permítaseme sostener que el pensar no ha sido excluido de mi versión comunicacional del aprendizaje. Este punto se aclara de inmediato cuando nos damos cuenta de que *pensar es un caso especial de la actividad comunicativa*. La actividad de una persona cuando piensa se puede ver como una actividad de comunicación con ella misma. Esto es cierto ya sea que el pensamiento sea en palabras o en imágenes. Nuestro pensamiento es claramente una tarea dialógica, en la que nos informamos a nosotros mismos, argumentamos, nos hacemos preguntas y esperamos nuestras propias respuestas. Si esto es así, llegar a ser un participante en un discurso matemático equivale a aprender a *pensar* de maneras matemáticas.

Preguntar qué tiene que aprender Noa, ahora es equivalente a indagar de qué manera su forma de comunicar (y, por ende, de pensar) debe cambiar si ella ha de convertirse en una participante diestra del discurso matemático sobre números. Claramente, Noa tiene que modificar su uso de la palabra clave *número* y de todas las otras palabras relacionadas con ésta. Este cambio aparentemente superficial es, de hecho, muy profundo, y de ninguna manera es fácil de implementar. La alteración discursiva nunca se puede restringir a una sola palabra, y a menudo depende de la modificación de un cierto hábito discursivo arraigado

profundamente. Estos hábitos están regulados por lo que se denominará *reglas metadiscursivas*, es decir, por principios implícitos que conducen el flujo de la comunicación y, de manera tácita, les dicen a los participantes cómo usar palabras y mediadores, qué clase de movimientos discursivos serán aceptados en este discurso particular, y en qué situaciones este discurso será aplicable y útil. Las metarreglas² no son algo que los hablantes puedan seguir de manera consciente. Más bien, son proposiciones que ayudan al analista a encapsular el flujo discursivo de la misma manera que la fórmula de caída libre ayuda a los físicos a encapsular el movimiento de los cuerpos cuando caen.

Permítaseme ahora comprobar si la idea del aprendizaje de las matemáticas como modificación de un discurso ayuda a darle sentido a lo que está ocurriendo en el episodio *El número más grande*, y si cambia nuestra comprensión de los procesos de aprendizaje que tienen lugar aquí. En el análisis siguiente pregunto por las causas y el mecanismo del cambio en el uso que Noa hace de la palabra *número*.

La causa del aprendizaje. La causa del cambio que estamos presenciando en el episodio reside en que la profesora utiliza los nombres de los números de manera bien distinta a como lo hace la niña. El uso que hace la profesora se puede describir como *objetificado*: ella incluye nombres de números en oraciones de maneras similares a como lo hacemos con los nombres de objetos materiales, esto es, como si estas palabras se refirieran a entidades autónomas cuya existencia es independiente del discurso. Eso no ocurre con Noa. El término *número* funciona en el discurso de la niña como equivalente al término *nombre de número*, y palabras tales como *cien* o *millón* son cosas en sí mismas y no meros indicadores de algunas entidades intangibles. En consecuencia, la afirmación inicial de Noa, según la cual existe el número más grande, es perfectamente racional: después de todo, sólo hay unos cuantos nombres de números, y uno de ellos debe por tanto ser el último en la secuencia bien ordenada de tales nombres. Más aun, puesto que dentro de esta conceptualización, la expresión *millón uno* no puede contar como un número (es una concatenación de números), la posibilidad de sumar uno a cualquier número es independiente de la no existencia del número más grande.

Esta situación se puede describir como de *conflicto comunicacional*, que no es lo mismo que conflicto cognitivo: el conflicto comunicacional se refiere a la

diferencia en el uso de palabras de dos interlocutores, y no a visiones conflictivas de la realidad que se dan en una misma persona. Su resolución se localiza entre personas y no entre una persona y el mundo externo. Los hablantes resuelven el conflicto ajustando mutuamente sus formas discursivas mientras mantienen su mirada en el mundo, y no encontrando la verdad última sobre el mundo.

El mecanismo del aprendizaje. La profesora, bien consciente del conflicto comunicacional, tiene sus medios para asegurarse de que a la niña también le importe: la profesora sigue repitiendo la pregunta sobre la existencia de “el número más grande” con lo cual le indica a la niña que sus respuestas no cumplen las expectativas. Para seguir adelante, Noa trata de ajustar sus respuestas, y lo hace a pesar de que lo que se supone que debe decir, evidentemente no es acorde con su uso de la expresión *el número más grande*. El deseo de comunicar eficazmente, combinado con el hecho de que Noa reconoce la experticia de la profesora en el discurso, es una fuerza poderosa que guía a Noa rápidamente tras los patrones discursivos impuestos por la profesora. Así, por ejemplo, la secuencia

se propone el número más grande $A \Rightarrow$

sume uno a $A \Rightarrow$

se concluye que A no es el más grande

que se concretó primero en [1]-[6], se repite en [7]-[10] y luego en [13]-[14]. La niña aprende el patrón a tal punto que puede anticipar los movimientos subsiguientes de la profesora y llega a ser capaz de acortar la secuencia adelantándose sucesivamente a la intervención de la profesora. En [15]-[16] no hay posibilidad de acortar más la secuencia, pero la profesora, al repetir de nuevo la pregunta, indica su persistente insatisfacción con las respuestas de Noa. Esta vez, la niña no tiene más remedio que cambiar la secuencia. En este punto, la profesora deja de preguntar, lo que le permite a la niña saber que dio en la respuesta correcta. De esta manera, Noa se hace consciente de nuevas reglas para el uso de los nombres de números —reglas que son bien diferentes a las que venía usando hasta ahora. En consecuencia, sin duda ella ha aprendido algo. Qué tan sólido es ese aprendizaje, es decir, qué tan capaz será la niña de incorporar este nuevo uso en su discurso a largo plazo, es otro asunto que amerita ser considerado teóricamente y comprobado empíricamente.

Quizá la diferencia más dramática entre las interpretaciones cognitivista y co-

municacional dadas al episodio *El número más grande* reside en las premisas que les subyacen con respecto a los orígenes del aprendizaje: el concepto de conflicto cognitivo supone que el aprendizaje resulta de los intentos del aprendiz para ajustar su comprensión a la verdad sobre el mundo —verdad que es dada externamente y es independiente de la mente; y eso implica que, al menos en teoría, el aprendizaje puede ocurrir sin la mediación de otras personas. En contraste, la idea del conflicto discursivo enfatiza que el aprendizaje individual se origina en la comunicación con otros y es guiado por la necesidad de ajustar las formas discursivas propias a las de otras personas.

¿Cuál es el valor agregado de este cambio conceptual, además de la ventaja obvia de hacer referencia sólo a lo que es accesible a través de inspección directa? En primer lugar, si estamos de acuerdo en que los orígenes del aprendizaje de las matemáticas residen *entre* las personas y no más allá de ellas, también nos damos cuenta de que los factores culturales pueden tener un papel principal en posibilitar y moldear el *proceso* mismo de aprendizaje. El cambio en el discurso de Noa ocurre a través del intento de la niña por alinearse con la profesora, quien le ayuda al darle señales sobre el uso de palabras que resultan apropiadas a los ojos de interlocutores expertos. Para que tal señalamiento sea eficaz, Noa y la profesora deben haber tenido unos antecedentes culturales comunes muy amplios. En segundo lugar, la conceptualización comunicacional nos ayuda a explicar una circularidad inherente del aprendizaje que, en el caso de Noa, da como resultado la duda persistente de la niña: la consciencia de la estudiante del uso apropiado de los nombres de los números precede, por necesidad, a su habilidad para explicar este uso. La niña todavía tiene que recorrer un camino largo antes de darse cuenta completamente de las ramificaciones del cambio local en el discurso para sus otros hábitos discursivos. Todo esto con seguridad debe conducir a una revisión de algunas ideas pedagógicas que están de moda, entre las cuales, la candidata más inmediata es la idea del aprendizaje con comprensión.

Aunque con la argumentación anterior apenas he comenzado a esbozar el enfoque comunicacional del aprendizaje, quiero en este momento formular una frase de esperanza: espero que los pocos enunciados hechos sobre la base de un único y muy breve ejemplo de aprendizaje, hayan sido suficientes para convencerlos de que la transición a la conceptualización discursiva no es un juego intelectual ocioso y que el lente comunicacional influye tanto nuestra comprensión de lo que ocurre cuando los niños aprenden, como nuestras ideas sobre qué se puede hacer para ayudar a los estudiantes en ese esfuerzo.

CAPÍTULO 4

CONDUCCIÓN DEL DISCURSO POR ENTRE
LA METÁFORA Y EL RIGOR:
ELANÁLISISFOCALPARAINVESTIGARELSURGIMIENTODELOS
OBJETOS MATEMÁTICOS¹

Este estudio² se refiere a la construcción de objetos matemáticos por parte de los estudiantes. La afirmación básica es que la necesidad de comunicación, entendida como cualquier intento de suscitar determinadas acciones por parte de otros, es la primera fuerza conductora que hay tras todos los procesos cognitivos humanos. La eficacia de la comunicación verbal se ve como una función de la calidad de su *foco*. Los objetos materiales pueden servir de base para la creación de este foco, pero en algunos discursos se deben crear objetos generadores de foco. Tal construcción discursiva se observa en el análisis de un episodio de clase. Se presta especial atención a la metáfora, que es el punto de partida del

¹ Traducción realizada por Yezid Arévalo, Sergio Esteban Cortés y Cilia Constanza Gómez. [N.E.]

² Los datos empíricos de este artículo fueron proporcionados generosamente por Paul Cobb, Kay McClain y Koeno Gravemeijer, quienes diseñaron y llevaron a cabo el experimento de enseñanza de donde se tomó el episodio que se presenta aquí. El experimento recibió el apoyo financiero de *Office of Educational Research and Improvement* bajo contrato de financiación # R305A60007 y de *National Science Foundation* bajo contrato de financiación # REC9814898. Véase también Cobb (1999). Agradezco a los revisores anónimos de este texto sus útiles comentarios.

proceso de construcción, y al proceso dialéctico siguiente de cerrar la brecha entre las expectativas inducidas por la metáfora y la necesidad de un procedimiento de construcción bien definido para asegurar una comunicación eficaz.

Hoy en día, muchos investigadores interesados en el pensamiento humano en general y más específicamente en el pensamiento matemático están prestando atención al asunto de la comunicación. Quienquiera que crea, como lo hizo Vygotsky, en la prioridad evolutiva del discurso público comunicativo sobre el discurso privado interno, deberá admitir también que mientras mejor entendamos el discurso público, más profunda será nuestra comprensión del diálogo que cada quien lleva consigo mismo. Si además, uno está de acuerdo en que el pensamiento no es más que una forma de comunicación con uno mismo (no necesariamente interna, y no necesariamente verbal), entonces debe darse cuenta de que investigar la comunicación con otros puede ser la mejor ruta para descubrir los mecanismos del pensamiento humano³. De esta conclusión se deduce que el pensamiento está subordinado a las exigencias de la comunicación e informado por ellas. Quiero subrayar que la mayoría de estas exigencias son básicamente las mismas, sin importar si la comunicación es con uno mismo o con otros. Lo que quiero demostrar en este capítulo es que la conceptualización del pensamiento como una instancia de la comunicación aporta ideas útiles sobre los procesos cognitivos humanos.

La idea de que el mecanismo del pensamiento está de algún modo subordinado al de la comunicación, por supuesto, no es trivial; quizá incluso a primera vista contradice la intuición. Sin embargo, una vez aceptada, nos impele a revisar muchas de las creencias comunes sobre la cognición humana y a reconsiderar, por lo menos, algunas de las preguntas que se han formulado en investigaciones del pensamiento matemático. Uno de los asuntos que con seguridad sufrirá una modificación considerable es el tradicional problema de los orígenes y el papel cognitivo de los *objetos matemáticos* tales como número, función, conjunto, o grupo. Hasta hace poco, filósofos y psicólogos de orientación platonista conceptualizaron estos entes “virtuales” como unidades matemáticas autónomas que se vuelven accesibles a la mente humana a través de varias actividades cognitivas,

³ Para captar a cabalidad la afirmación acerca del pensamiento entendido como comunicación, examínese detenidamente el argumento presentado por Vygotsky en su polémica con Piaget sobre la función evolutiva del discurso privado (véanse Vygotsky, 1978 y Vygotsky, 1962, pp. 9-23, 33-51 o Vygotsky, 1987, pp. 53-91, 93-120). En realidad, Vygotsky nunca llega a plantear el pensamiento como un caso de actividad comunicativa, pero si tomamos en serio sus argumentos, llegamos a esa conclusión.

entre las que se incluye la de la comunicación. Sustentaré que la afirmación de la primacía de la comunicación impone una inversión literal de esta relación: en lugar de ser meramente útil para construir y compartir el conocimiento de los objetos matemáticos preexistentes, la comunicación y sus exigencias se deben considerar ahora como la causa primera de su existencia⁴.

Este cambio conceptual trae consigo la reformulación de preguntas permanentes en la investigación y requiere métodos nuevos de indagación. En las últimas décadas se ha discutido mucho y se ha investigado con intensidad lo relativo a la filogénesis y la ontogénesis de los objetos matemáticos. Gran parte del trabajo en esta área ha sido generado por la idea de la dualidad objeto-proceso del pensamiento matemático (véanse, e.g., Douady, 1985; Dubinsky, 1991; Gray y Tall, 1994; Greeno, 1983; Harel y Kaput, 1991; Kieran, 1992; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1992; Sfard, 1991, 1994a; Thompson, 1985). Sin embargo, la mayoría de estas investigaciones se llevaron a cabo dentro de la tradición neopiagetiana, cuyos principios básicos están lejos de los que fundamentan la concepción del pensamiento como una forma de actividad social. Debido a que la noción de comunicación es primordial en este último enfoque, el neovygotksiano⁵, la reformulación de la pregunta sobre la naturaleza y génesis de los objetos matemáticos, en el relativamente bien desarrollado lenguaje del análisis del discurso, parece ser el procedimiento natural que se ha de seguir. Sin embar-

4 Esta afirmación está en concordancia con la formulación sobre la función constitutiva del lenguaje hecha en las últimas décadas por un gran número de autores (véanse, e.g., Bruner, 1986; Foucault, 1972; Lacan, 1966). Según tal formulación, los discursos son *sistemas autopoieticos*, es decir, sistemas que continuamente se generan a sí mismos y a sus objetos discursivos (véase Maturana y Varela, 1987). Esta autoproducción, propiedad bastante contraria a la intuición del intercambio simbólico humano, ha sido tipificada por el semiólogo francés Lacan en su famosa declaración “Este es el mundo de las palabras, que crea el mundo de las cosas” (p. 155) y fue elaborada en mayor detalle por Bruner en el contexto de su estudio del desarrollo cognitivo humano: “Esta es la capacidad del lenguaje para crear y estipular realidades propias, su *capacidad de constituir* ... que da una externalidad y una evidente condición ontológica a los conceptos que las palabras encarnan” (pp. 64, 65; véase también Sfard, 2000a).

5 Algunos autores afirman que estos dos enfoques, que en aras de la brevedad he llamado (sin mayor precisión) neopiagetiano y neovygotksiano, son inconmensurables; incluso, otros pueden sostener que son completamente incompatibles. Opto por la primera afirmación, creyendo que no hay “medida común” para decidir cuál de los dos enfoques está “bien”, y que ambos ofrecen algunas ideas importantes que se perderían si se le da la exclusividad a uno de los enfoques (para ver un argumento más detallado, consúltese Sfard,

go, falta hacer tal formulación. Aunque el análisis del discurso se ha usado de forma extensa en estudios relacionados con las matemáticas, la mayor parte de este trabajo se ocupa de las reglas y normas que constituyen las prácticas matemáticas de la clase, en tanto que se le ha prestado relativamente poca atención a los asuntos relacionados de manera directa con los contenidos matemáticos del aprendizaje, y casi ninguna al asunto de los objetos matemáticos (véanse, e.g., Bauersfeld, 1995; Cobb, Wood y Yackel, 1993; Forman, Minick y Stone, 1993; Hicks, 1996; Krummheuer, 1995; Lampert, 1990; Lampert y Cobb, 2003; Lampert y Blunk, 1998; Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998; Voigt, 1985, 1994). El perfil general de esta nueva literatura revela una mayor preocupación por los aspectos sociales del aprendizaje que por los aspectos cognitivos (para conocer planteamientos cuidadosamente organizados que combinan las perspectivas cognitiva y social, véanse también Cobb, Boufi, McClain y Whitenack, 1997; Cobb, Wood y Yackel, 1993; Yackel y Cobb, 1996). Son excepciones notables los estudios realizados por Rotman (1988), Steinbring (1989, 1998) y van Oers (2000). Sin embargo, aunque cada uno de estos tres autores ha hablado sobre la construcción discursiva de objetos matemáticos, sus enfoques respectivos tienen poco en común y, casi ninguna conexión, con los primeros estudios hechos en la dualidad proceso-objeto de las concepciones matemáticas.

El trabajo presentado aquí se organiza en torno a la idea del proceso de pensamiento como comunicación, pero también es una continuación directa de la investigación sobre la dualidad proceso-objeto de los conceptos matemáticos. El objetivo es lograr el avance en “espiral” discutido por Vygotsky en referencia a estas coyunturas especiales en el desarrollo conceptual humano, en las que viejas ideas consideradas desde un nuevo y estratégico punto de vista epistemológico, adquieren nuevos significados y abren rutas adicionales para una investigación fructífera. En este capítulo, parto de tal reorganización conceptual para alcanzar una nueva comprensión de los mecanismos de construcción de objetos, específica de las matemáticas. Con la mira puesta en este objetivo muy general, analizo un breve episodio de clase en el que alumnos de séptimo grado intentan resolver un problema cuyo propósito era iniciarlos en el pensamiento estadístico. El intercambio entre los estudiantes se analiza en términos de los procesos discursivos que subyacen a la solución de problemas matemáticos y que, de vez en cuando, ocasionan el surgimiento de un nuevo objeto matemático. Por el hecho de incursionar en un área de la investigación relativamente inexplorada, el análisis requiere de algún trabajo fundacional. De esta forma, la presentación del episodio de aprendizaje está precedida por una discusión de asuntos epistemológicos y metodológicos de naturaleza general. En el análisis del discurso siguiente, usaré herramientas especialmente diseñadas para abordar el tema de los objetos matemáticos.

¿QUÉ ES LA COMUNICACIÓN?

Mi primer supuesto es que lo que ocurre en una conversación a lo largo del canal interpersonal, es un indicador de lo que podría estar sucediendo en “la cabeza de cada quien”. No quiero decir con esto que si una persona trabajó sola, se repita siempre el mismo escenario a lo largo de su “canal individual” sino más bien que *los mecanismos discursivos en acción* son básicamente los mismos ya sea que uno solucione los problemas por sí solo o con otros. En ambos casos, estos procesos tienen un carácter *dialógico*: el pensamiento, lo mismo que la conversación entre dos personas, involucra tomar turnos, hacer preguntas y dar respuestas, y construir nuevas verbalizaciones (ya sean audibles o silenciosos, en palabras o en otros símbolos) con base en lo expresado con anterioridad de tal manera que todos estén interconectados de forma esencial (compárese esta interpretación con la idea de *dialogismo* expuesta en Bakhtin, 1981, 1986). Por esta razón, un análisis minucioso del discurso público puede ser muy revelador en cuanto al aprendizaje y la resolución de problemas, sin importar si estos procesos se desarrollan de forma individual o colectiva. Esta unidad básica de los procesos de comunicación pública y privada es la que Vygotsky pudo haber tenido en mente cuando estableció que las funciones humanas superiores son esencialmente sociales aun si se desarrollan en condiciones de aislamiento.

Debido a que en este enfoque del pensamiento humano la *comunicación* es una noción central, antes del análisis haré una breve discusión sobre este último asunto. De acuerdo con el *Collins Dictionary of the English Language* (Hanks, 1986), comunicación es “la transmisión o intercambio de información, ideas o sentimientos”, en tanto que según la *Encyclopædia Britannica* (1998), es “intercambio de significados entre individuos a través de un sistema común de símbolos”. A la luz de éstas y otras definiciones similares, la comunicación puede parecer un concepto claro, sobre cuya naturaleza existe un acuerdo general.

No obstante este aparente consenso, sostengo que la idea de comunicación entendida como un “intercambio de significados” (o de sentimientos, ideas, etc.) no es una base adecuada para la clase de investigación que voy a emprender. Las definiciones citadas de comunicación implican que términos tales como *información*, *ideas*, *sentimientos* y *significado* se refieren a entes que parecen objetos bien definidos, que se pueden mover (intercambiar) sin pérdida de identidad y transmitir de una persona a otra, así como las cosas materiales pueden pasar de una mano a otra. Al tomar este enfoque, tácitamente se supone que todos

estos elementos reificados de la experiencia humana pueden ser tratados como esencialmente independientes de la gente que los experimenta. De acuerdo con Reddy (1993), esta conceptualización, a la que llamó “la metáfora del conducto”, resulta de la proyección figurativa del dominio del transporte de bienes materiales en el dominio de la comunicación. Como esta metáfora está profundamente arraigada en el lenguaje que usamos, es casi imposible abstenerse de una referencia a “transmisión de algo” cuando uno piensa en la comunicación. La perspectiva del conducto puede parecer particularmente tentadora para quienes deseen investigar la comunicación y su eficacia porque, de acuerdo con la metáfora, en tal estudio solamente se deben averiguar los significados transmitidos en el proceso y luego, revisar si los significados “descargados” por el receptor a partir de los símbolos son los mismos dejados ahí por el “emisor”.

Así, si uno se atiene a la reificación y a la consiguiente liberación de referentes que sufre el significado, se tiende a creer que las experiencias individuales son comparables y medibles como lo son los objetos materiales y que, por consiguiente, se pueden usar como dispositivos de explicación en el estudio de la comunicación humana. Con esta creencia, sin embargo, se es presa de la ilusión característica de cualquier enfoque de la cognición basado en objetos: lo que parece ser el proceso de *explicación* es, de hecho, el acto de *interpretación* y *construcción de sentido*, logrado con la ayuda de los conceptos que se toman prestados de otro dominio. Por ejemplo, considérese el enunciado “Estos niños se comunican bien sobre xyz porque para ambos xyz tiene el mismo significado” (o “ellos comprenden xyz de la misma manera”, o “tienen concepciones similares sobre xyz”). El uso de la palabra *porque* hace que esta oración suene como explicación, pero lo que se presenta aquí como una *razón* para la comunicación exitosa (la identidad de las comprensiones de los niños) se *deduce* de lo que está por explicarse (a partir del hecho de que los niños parecen comunicarse con eficacia). Después de todo, aunque la *comunicación* esté definida, las formas en que uno organiza la experiencia siempre serán algo privado y personal, y, como tal, son difícilmente comparables. Con esta consideración, uno debe darse cuenta de que el único camino para definir la relación de *igualdad de significados* consiste en decir que ésta es la relación que permite una comunicación exitosa. En otras palabras, la comunicación eficaz no se *explica por* el hecho de que los interlocutores tengan los mismos significados (o “concepciones compartidas”); más bien, *define* la situación en la que dos personas “poseen el mismo significado”.

El argumento anterior nos deja a los investigadores sin una definición de *comunicación* con la que podamos trabajar. Si estamos de acuerdo en que nuestra tarea es interpretativa más que explicativa, podemos continuar usando e

investigando el concepto de significado⁶; sin embargo, claramente no podemos emplear esta noción para definir la *comunicación*. La forma más razonable para iniciar el discurso sobre la comunicación parece ser describirla en términos de procesos públicos más que en términos de experiencias privadas. El siguiente paso sería hacer referencia a sentimientos, significados y similares. Este orden de cosas está ciertamente de acuerdo con la sugerencia de Wittgenstein: “Considere el juego del lenguaje como lo primario. Y considere los sentimientos, etc., como una forma de leer el juego del lenguaje, como interpretación” (1953/1967, #656, p. 167).

Permítaseme tratar de responder al reto de Wittgenstein. Para decir qué es la comunicación, de forma tan clara y directa como es posible, me remontaré a lo esencial y tendré en cuenta el papel de la comunicación en los seres humanos. En verdad, nuestro esfuerzo por comunicarnos tiene mucho que ver con el hecho de que somos criaturas esencialmente sociales, lo que significa individuos cuya supervivencia y forma de vida dependen del ser parte de una comunidad. En efecto, una comunidad se conforma y se sostiene a través de la actividad comunicativa: la comunicación es el pegamento que la mantiene unida. Nos comunicamos con el propósito de garantizar la clase de mutualidad y de quehacer colectivo que nos proporciona lo que necesitamos y que no podemos alcanzar de manera individual. Los actos de comunicación entonces pueden ser vistos, ante todo, como intentos para comprometer a los miembros de una comunidad en actividades indispensables para satisfacer las necesidades humanas, desde las más primitivas y fundamentales para sobrevivir hasta las necesidades culturales más avanzadas y complejas.

De esta forma, la *comunicación* se puede definir como *una actividad en la que alguien trata de hacer sentir o actuar a su interlocutor de una manera determinada*. Aquí es apropiada una cita de Levinson en la que sigue a Grice (1975): “La comunicación ocurre cuando un ‘emisor’ logra que un ‘receptor’ reconozca que el ‘emisor’ está tratando de causar un determinado pensamiento o acción” (Levinson, 1983, p. 16). Por ejemplo, pedirle a alguien que “haga algo con respecto al ruido de la habitación” es una muestra de la acción comunicativa en la que el hablante espera que el interlocutor realice alguna acción física como la

1998a).

de cerrar la puerta. Así mismo, cuando se saluda a una persona con las palabras “Buenos días”, el hablante espera que la otra persona responda con un saludo similar. Finalmente, con el enunciado “La derivada de una función f se denota por df/dx ”, un profesor pretende lograr que los estudiantes, en sus futuras verbalizaciones, estén en capacidad de referirse a la derivada de una función usando símbolos apropiados.

Para aclarar la definición, debo hacer ciertas precisiones. En primer lugar, la acción que pretende lograr el hablante no tiene que ser evidente o pública. Así, poner atención, pensar y tratar de recordar se consideran también formas de acción. En segundo lugar, quiero subrayar que usualmente la intención del hablante es más bien general, razón por la cual hay más de una (re)acción que podría corresponder, desde la perspectiva de los emisores, a sus intenciones. Las expectativas de los hablantes apuntan más a un cierto *tipo* de acción que a una acción específica. Una respuesta se podría considerar como un ejemplo de comunicación eficaz aun si sus contenidos fueran diferentes a lo que el emisor quisiera escuchar. Usualmente, toda una gama de respuestas convencería al hablante de que el receptor comprendió su intención. Por ejemplo, la solicitud “haga algo con respecto al ruido de la habitación” podría ser respondida cerrando la ventana y no la puerta, pidiendo a los niños que están en el patio que hagan menos ruido, o incluso, rehusándose explícitamente a hacer algo. La persona a quien se saluda con “Buenos días” puede responder con “Buenos días, también para usted”, “Hola”, o un silencioso movimiento de mano, respuestas todas igualmente aceptables en este contexto. Finalmente, el estudiante al que se le solicita resolver un problema matemático puede proponer muchas soluciones diferentes, todas ellas discursivamente apropiadas incluso si son incorrectas desde el punto de vista matemático. El intercambio verbal será la forma principal de comunicación considerada en este capítulo, y la actividad esperada del interlocutor será, en la mayoría de los casos, dar respuestas verbales a enunciaciones precedentes. Tales enunciaciones restringen de manera clara las respuestas permisibles; lo que quiere decir que implícitamente especifican los tipos de respuestas que “vendrían al caso” (cf. Voigt, 1985). Puesto que las expectativas del hablante que resultan pertinentes para esta discusión se refieren a las características discursivas generales de la respuesta más que a su contenido específico, las llamaré expectativas *metadiscursivas*.

En este punto, el lector podría oponerse al uso de la noción de *expectativas* o *intenciones* como base para definir la comunicación debido a que estos conceptos parecen tener la misma cualidad por la que las ideas de *significado* y *sentimiento* fueron descalificadas: si adoptamos estas nociones como primarias

para la noción de comunicación, podría resultar una circularidad conceptual. Se caería en un argumento circular sólo si evaluar la eficacia de la comunicación implicara comparar las intenciones de los interlocutores, algo que a su vez sólo se podría hacer evaluando la eficacia de la comunicación. Afortunadamente, la definición propuesta no requiere tales comparaciones y evaluaciones circulares. En este caso, el emisor medirá el éxito de la comunicación comparando sus expectativas con las *acciones* del receptor y no con sus intenciones. El hablante simplemente se hará una pregunta de fácil respuesta: ¿Estoy o no satisfecho con esta respuesta como una muestra de que se han comprendido mis intenciones, aunque no revele necesariamente un acuerdo para acogerlas? Por supuesto, si está satisfecho, el hablante podrá ahora presentar este hallazgo como evidencia de “significados compartidos” o de “la comprensión similar” de los asuntos involucrados. Esta formulación, sin embargo, ya sería un problema de descripción interpretativa.

Ahora la pregunta obvia es si este tipo de evaluación puede ser hecha de forma razonable por un observador, una persona que no sea el hablante. En aras de esta discusión es útil pensar en el observador como un participante del discurso, aunque no sea muy activo. En realidad, no existe razón alguna para suponer que las acciones evaluadoras del observador deban ser esencialmente diferentes de las que realiza un interlocutor del común. Después de todo, en tanto participantes de una conversación, las personas están acostumbradas a permanecer atentas y a monitorear la eficacia de la comunicación aun cuando sólo escuchen una interacción entre sus compañeros. Las verbalizaciones del hablante evocan interpretaciones y, por lo tanto, ciertos estados intencionales en cualquier oyente. El oyente tendrá expectativas con respecto a posibles respuestas del interlocutor, y evaluará las verbalizaciones de éste como si fuera el hablante mismo. Por lo tanto, la evaluación del observador, como la de cualquier otro, tiene el estatus de una interpretación personal. Lo que hace de la evaluación del observador algo especial es el hecho de que, al estar construida de acuerdo con ciertas reglas explícitas, se puede esperar que sea reproducible en cierta medida y, por tanto, altamente consensual. Aun así, el asunto de la eficacia de la comunicación no se puede abstraer y presentar como cuestión de una característica objetiva de los discursos. Por tanto, al evaluar los esfuerzos comunicativos, se debería explicitar de quién es la perspectiva que se está considerando y recordar el estatus esencialmente provisional de cualquier veredicto.

De acuerdo con la definición propuesta, la comunicación es eficaz si cumple con su propósito, es decir, si evoca reacciones que están en sintonía con las expectativas metadiscursivas de los interlocutores. “La comunicación es un tipo

complejo de intención que se logra o satisface sólo al ser reconocida”, afirmó Levinson (1983, p. 16). Mientras participamos activamente en una conversación, casi siempre somos capaces de evaluar su eficacia comunicativa sin mayor dificultad. Como criaturas esencialmente discursivas, podemos decir de manera instintiva y “en el acto” si la interacción que tiene lugar sigue un camino aceptable. Esta evaluación permanente está acompañada, en condiciones ideales, por un esfuerzo constante por mejorar la eficacia del intercambio. Aun así, explicar los criterios que subyacen a estos procesos constantes de evaluación y mejora puede no ser una tarea muy fácil. De hecho, es difícil especificar las condiciones bajo las cuales la comunicación tiene la mayor probabilidad de ser exitosa. Tal como lo señaló Reddy (1993), el fracaso en la comunicación es la opción por defecto y, por tanto, ninguna comunicación puede ser eficaz sin un cierto esfuerzo por parte de los interlocutores. En la siguiente sección, examino características que pueden ser consideradas básicas en una comunicación eficaz.

UNA CONDICIÓN NECESARIA DE LA EFICACIA: MANTENER ENFOCADO EL DISCURSO

Una de las propiedades básicas de nuestras verbalizaciones y pensamientos es que ellos *versan sobre algo*, tratan *acerca de algo*. Si se pregunta a los participantes de un discurso cuáles son sus exigencias metadiscursivas más fundamentales, probablemente dirían que esperan que todos los interlocutores hablen acerca de “la misma cosa”. Así, la eficacia puede presentarse como dependiente del grado de claridad del *foco discursivo*: la comunicación no se considerará eficaz a menos que en un momento dado parezca que todos los participantes saben acerca de qué están hablando y crean que todas las partes involucradas se refieren a las mismas cosas cuando usan las mismas palabras.

Aunque la afirmación anterior puede parecer muy clara, la discusión precedente debe hacernos pensar acerca del significado de algunos de los términos que la componen. Usé la expresión “la misma cosa” y aludí a un foco común, pero en realidad ¿qué significan esas palabras? ¿Pueden definirse sin que caigamos de nuevo en el modelo tradicional de comunicación e incurramos en la falacia de comparar experiencias privadas? Después de todo, aunque no ocurriera así con los términos *cosa* y *objeto*, por lo menos, la palabra *foco* parece referirse más a

⁶ Quiero enfatizar que lo dicho antes no implica negar la realidad de las experiencias sino la sostenibilidad de cualquier intento de medirlas o compararlas de manera directa. Es decir, no estoy en contra de los estudios sobre sentimientos y otras experiencias en

lo que es percibido o pensado por individuos que se comunican, que a cualquier entidad “objetiva” y autónoma⁷. Permítaseme enfrentar este nuevo reto tomando un ejemplo concreto de conversación y tratando de hacer precisión sobre lo que significa que alguien diga que una conversación está *enfocada* en algo.

Puesto que las matemáticas son el objeto de este estudio, es natural buscar una respuesta dentro del discurso matemático. Se puede decir que la comunicación matemática, cualquiera sea su forma, usualmente trata acerca de *objetos matemáticos*, tales como números, funciones y conjuntos; sobre sus propiedades; y sobre procesos a los que pueden estar sujetos. Sin embargo, debido a la naturaleza problemática de la noción de objeto matemático, este enunciado no aborda realmente el asunto en cuestión. En consecuencia, antes de analizar un episodio de clase, recurro a un ejemplo menos controvertido, que proviene del discurso cotidiano y se desarrolla en torno a objetos materiales conocidos. Imagine que en lugar de discutir ideas matemáticas sofisticadas, los niños de una clase están en una tienda comprando provisiones para una excursión planeada para el día siguiente. Deciden comprar manzanas; y les atraen particularmente dos tipos de manzana que están en exhibición.

Episodio: *Las manzanas* (los niños escogen manzanas para una excursión del colegio)

- 1 Casey: Creo que deberíamos llevar esas, las verdes. Ellas son bien dulces.
- 2 Brad: Prefiero las rosaditas. ¿Ves los puntos negros de esta? Las verdes tienen gusanos.
- 3 James: ¿Cuál?
- 4 Brad: Arriba en la primera fila, a tu derecha.
- 5 Janice: Sí, las rosaditas están mejor. Con la verde nunca se sabe. No es consistente ^a; a veces te sale una grande y a veces una muy pequeña.

- a. En español, el adjetivo “consistente” denota algo que tiene duración, estabilidad, solidez. En esta traducción hemos introducido para tal adjetivo una acepción no reconocida en el DRAE, que se origina en el vocablo inglés *consistent*, adjetivo usado principalmente para calificar a una persona, su comportamiento o sus puntos de vista, y que se refiere a mantener siempre el mismo patrón o estilo, a ser siempre el mismo. No obstante ser conscientes de que en el contexto de las manzanas, habría sido más apropiado traducir *consistent* por *pareja* (en el sentido de tener tamaño similar), hemos tomado tal decisión en aras de no oscurecer el quid del asunto al que posteriormente se refiere la autora. [N.E.]

Aunque los niños no estén necesariamente de acuerdo entre ellos, no parecen tener razón para dudar de la eficacia comunicativa de su conversación. Si se les preguntara, probablemente estarían de acuerdo en que todos ellos “están hablando acerca de la misma cosa” cuando usan las mismas palabras. Quizá dirían que las *manzanas verdes* son el foco de la primera verbalización, y aunque éstas no se mencionan de manera explícita en la segunda verbalización, de nuevo se habla acerca de ellas (en esta enunciación, las manzanas verdes son un componente implícito de una comparación). Luego, el foco se mueve a las *manzanas rosadas*. Este cambio es continuo en el sentido de que Brad implícitamente se refiere al foco inicial de Casey y de manera explícita anuncia su decisión de hacer la transición cuando afirma que las rosaditas son las de su preferencia. Cuando, por un momento, James siente que ha perdido el rastro de lo que los otros estaban hablando, está en capacidad de indagar al respecto [3], y Brad no tiene dificultad en guiarlo de regreso al foco común [4]. Finalmente, Janice comprende fácilmente la intención de Brad con respecto al foco, y de este modo ella está en capacidad de expresar su opinión y hacer parte del proceso de decisión [5].

Se podría objetar el análisis anterior diciendo que el *foco* no puede llegar a ser un término bien definido porque nunca será único. Por ejemplo, cuando se dice “A mí me gustan las manzanas verdes”, la oración principal, ¿se refiere al hablante o a las manzanas verdes? Por lo tanto, subrayo que este nuevo término, *foco*, es un concepto interpretativo y es del arbitrio del intérprete decidir qué cuenta como foco de una verbalización dada. Al tomar la decisión, uno debe considerar los objetivos de su análisis y ayudarse con el contexto general de la conversación. En esta actividad interpretativa, probablemente se debería estar atento, de forma específica, a lo que parece constituir “el hilo común” de verbalizaciones sucesivas.

Aunque la idea de *foco discursivo* parece intuitivamente clara, resulta menos clara si el término denota las palabras usadas por un interlocutor para identificar el objeto de su atención (véase, e.g., “las verdes” en [1]) o se refiere a qué y cómo ponemos atención (miramos, escuchamos, y demás) cuando hablamos. Debido a que estos dos componentes discursivos parecen indispensables para la comunicación eficaz, quizá se deberían considerar de manera conjunta. De ahora en adelante, los denominaré *foco locutivo* y *foco perlocutivo*, respectivamente.

Sin embargo, los aspectos locutivo y perlocutivo no son los únicos que hacen parte del foco discursivo. Por ejemplo, cuando Casey anuncia que las manzanas verdes son dulces —algo que simplemente no puede deducir de lo que ve— es

claro que ella relaciona lo que ve con lo que sabe. El término *manzana verde*, tal como se usa en [1], no representa una manzana específica a la que la niña esté mirando; pero, aun así, para ella denota un objeto bien definido y bien comprendido: Casey no sólo está en capacidad de identificar una manzana verde cuando la ve sino que también puede evocar su imagen prototípica, puede enumerar sus propiedades aun si ellas no son accesibles a la inspección directa, sabe cómo relacionar esto con las otras cosas que hacen parte de su mundo, y puede usar el término “manzanas verdes” en muchas situaciones discursivas que no son una simple deducción lógica de lo que ve en ese momento. Se debe considerar entonces un tercer componente, el *foco ilocutivo*, junto con los focos locutivo y perlocutivo. El foco ilocutivo es la interpretación que hace el interlocutor de los focos locutivo y perlocutivo: es todo el conglomerado de experiencias evocadas por los otros dos componentes focales así como todos los enunciados que el interlocutor podría hacer del ente en cuestión, aun si no aparecen en el intercambio actual. En el episodio antes presentado, se pueden encontrar muchos ejemplos de este tipo de enunciado. Sólo menciono tres de ellos: la afirmación sobre lo dulce de las manzanas verdes ([1]), la enunciación acerca de los gusanos (hecha debido a las manchas de una manzana, [2]), y el enunciado sobre los tamaños disímiles de las manzanas verdes [5].

El tercer componente focal, el foco ilocutivo, es menos tangible que los otros dos pero su presencia se señala con pistas discursivas distintivas. Tales pistas, sumadas a las que ya se mencionaron, incluyen la tendencia del hablante a usar diferentes nombres (por tanto, diferentes focos locutivos) de forma intercambiable, un fenómeno que indica la existencia de una intención común detrás de todos los nombres (véase, e.g., “las verdes”, “ellas” en [1] y [2]). Una tendencia similar puede observarse con respecto al foco perlocutivo. Uno puede mirar diferentes fotografías y darse cuenta de que se trata de la misma persona, o puede usar diferentes expresiones algebraicas como por ejemplo $3(x+2)$ y $3x + 6$, y estar convencido de que está considerando el mismo objeto matemático. Así, el foco ilocutivo es el que permite a los interlocutores tener la sensación de que preservan un foco discursivo dado, incluso cuando lo que oyen (foco locutivo) o ven (foco perlocutivo) cambia de una verbalización a otra.

En este momento es natural preguntarse: ¿por qué se necesitan tres componentes focales?, ¿podría bastar, en efecto, una definición más simple? La justificación del foco tripartito proviene de la complejidad del fenómeno. La comunicación se puede pensar como un esfuerzo continuo de hacer público lo que es esencialmente privado y viceversa. Con *privado* quiero significar cualquier cosa que se experimenta y con *público*, cualquier cosa perceptualmente accesible. Por lo tanto, investigar la comunicación requiere herramientas que permitan tratar

con diferentes grados lo que es privado y lo que es público en la comunicación. Los tres tipos de focos mencionados antes son esas herramientas. Cada uno ocupa una posición diferente en el eje privado/público. El foco locutivo marca el extremo de lo público en el espectro; el foco perlocutivo, aunque no explícito usualmente, puede hacerse público; y el foco ilocutivo es predominantemente privado, debido a que sólo puede ser señalado a otros, de manera indirecta, con la ayuda de los otros dos tipos de foco.

Regreso ahora a lo que me trajo a esta detallada discusión de la noción de foco, al tema de la eficacia de la comunicación. Revisaré la noción de foco común, la condición supuesta para una interacción verbal exitosa. Uno podría estar tentado a decir que para evaluar la eficacia de la comunicación se deberían comparar los focos discursivos de los interlocutores. Dicha comparación se puede hacer en el caso de los focos locutivos, y también es posible en el caso de los focos perlocutivos si estos últimos se hacen públicos mediante una demostración apropiada. Sin embargo, el hecho de que los ejes locutivo y perlocutivo se ajusten bien mutuamente no es un criterio apropiado para juzgar la eficacia de la comunicación porque las personas pueden usar diferentes focos locutivos e incluso diferentes focos perlocutivos, y aun así, tener la sensación de que hablan de la misma cosa. Esta situación podría ocurrir si, por ejemplo, un interlocutor al ver la expresión $y = -5x + 3$, dijera “la *pendiente* de esta función es cinco negativo”, y el otro, al ver la representación gráfica de la expresión, dijera “sí, *ella* es negativa”. Se debe considerar también la situación inversa: se puede a veces tener una sensación clara de una brecha en la comunicación aun cuando los interlocutores usen el mismo foco locutivo y estén aparentemente poniendo atención con sus ojos a la misma cosa. Imagine, por ejemplo, dos estudiantes que miran a un mismo punto de una gráfica, y usan el mismo foco locutivo (e.g., “la derivada”), y sin embargo, hacen afirmaciones contradictorias sobre sus características (e.g., “Aquí, la derivada es positiva” versus “No, esa derivada es negativa”). En una situación como esta, se puede concluir que estos dos estudiantes “no pueden estar hablando de la misma cosa”.

Los dos ejemplos anteriores muestran que la eficacia de la comunicación depende principalmente del foco ilocutivo. Sin embargo, este foco, al ser predominantemente privado, es poco susceptible de comparación. La solución de este dilema se podría encontrar, una vez más, en la idea de interpretación. Interpretar es una actividad natural realizada por todos los humanos de manera instintiva al escuchar las palabras emitidas. Las palabras del hablante y sus movimientos de señalamiento traen a la mente del oyente *sus propios* focos ilocutivos, ajustando a ellos esas palabras y gestos particulares. La evaluación de la eficacia de la comunicación sigue casi automáticamente. El oyente puede ahora apreciar

las semejanzas y diferencias entre los focos ilocutivos evocados *en él* por los diferentes hablantes (uno de los cuales puede ser el oyente mismo).

El punto principal de este análisis es que la evaluación instintiva de la eficacia comunicativa que uno lleva a cabo mientras participa en una conversación o simplemente la escucha, no conlleva la comparación de los focos ilocutivos de *diferentes interlocutores*. Bien sea que el evaluador participe en la interacción verbal o la observe, éste sólo compara *sus propios* focos ilocutivos, evocados por los focos locutivos y perlocutivos de los interlocutores. Por supuesto, en el caso de un resultado positivo, probablemente el evaluador concluirá que “los interlocutores tienen los mismos focos ilocutivos”. Tales enunciados comparativos son una implicación inevitable en los modelos populares de comunicación. Sin embargo, de hecho, son las *interpretaciones que los evaluadores hacen* de los focos locutivos y perlocutivos de otras personas, las que están siendo comparadas. De esta manera, en una conversación académica disciplinada parece obligatorio un cambio de lenguaje. En este capítulo, tendré cuidado de no usar expresiones tales como “el mismo” o “semejante” (o “diferente”, según el caso) con respecto a los focos ilocutivos; en cambio, usaré la expresión *compatible a los ojos del intérprete* o simplemente *compatible*. La compatibilidad de los focos ilocutivos es la condición necesaria para la comunicación eficaz.

Dicho lo anterior, permítaseme señalar que la determinación de las interpretaciones focales requerida para evaluar la comunicación y su eficacia puede parecer ahora una tarea casi imposible. Después de todo, casi cualquier verbalización y cualquier foco locutivo tienen múltiples, y quizá infinitas, interpretaciones posibles. La pregunta que se debe abordar es ¿con qué criterio uno decide, a menudo de manera irreflexiva, cuál de los ‘candidatos elegibles’ se debe escoger? El contexto general de la conversación, la historia de la verbalización dada, el conocimiento que uno tiene del hablante, y muchos otros factores circunstanciales son ciertamente de ayuda, pero no son suficientes. Alguien podría no estar en capacidad de escoger un foco ilocutivo (en especial si tiene que hacerlo interactivamente “sobre la marcha”) sin tener una opción preferida y disponible de manera inmediata. Quizá el candidato más natural para tal opción por defecto es el foco ilocutivo que se estableció con anterioridad. En efecto, uno tiende a interpretar las verbalizaciones nuevas aplicando la interpretación que funcionó para las anteriores, a menos que tal interpretación sea claramente incompatible con el nuevo caso. Esta afirmación está en sintonía con la “máxima de pertinencia” de Grice (1975), según la cual con frecuencia no estamos en capacidad de intervenir en una conversación sin haber supuesto tácitamente que el foco ilocutivo de nuestras verbalizaciones es también una interpretación adecuada de la respuesta de nuestro compañero. De acuerdo con Levinson (1983) usaré

un ejemplo común, aunque en cierta forma extremo, para ilustrar este punto. Una persona que recibe como respuesta “Estoy enfermo” cuando ha preguntado “¿Podemos vernos hoy?”, no estaría en capacidad de entender tal respuesta sin suponer que quien responde también se refiere al tema de un posible encuentro aun cuando nada en su respuesta indica explícitamente este hecho. El principio de que los focos ilocutivos deberían ser vistos como compatibles “a menos que se pruebe lo contrario” hace que nuestros esfuerzos interpretativos sean eficaces. Al suponer este principio, el interlocutor se libera de la preocupación constante acerca de la comunicación como tal y queda libre para concentrarse en los contenidos del intercambio. Como el famoso martillo de Heidegger, los esfuerzos de comunicación no se tienen en cuenta de manera consciente, hasta que se asiste a su derrumbe.

A través de la discusión precedente he destacado el papel que juegan en la comunicación, los objetos perceptualmente accesibles. Es evidente que el foco perlocutivo se puede usar como un exponente público del foco ilocutivo y puede de esta manera facilitar en buena medida la toma de decisión por parte de los interlocutores y de otros intérpretes, tal como se ilustra en la conversación de las manzanas. Una razón del éxito de dicha conversación es que el discurso estaba enfocado en objetos visibles (las manzanas) y los niños podían prestarles atención mientras hablaban. Aunque el foco perlocutivo, se usa más a menudo de manera instintiva y sin mención explícita, tiene aspectos que pueden mostrarse y explicarse, compararse y regularse externamente. Se prepara el terreno para tales comparaciones, explicando el componente principal del foco perlocutivo —el procedimiento de “barrido” que realizan los interlocutores sobre un objeto (e.g., el montón de manzanas) para poner en correspondencia el foco locutivo (e.g., “las manzanas con gusanos”) con su foco ilocutivo. De tal forma, si como comunicadores sentimos una incompatibilidad entre los focos ilocutivos, entonces podemos mirar al foco perlocutivo y guiar explícitamente a nuestros compañeros en sus interpretaciones. En el episodio *Las manzanas*, Brad proporcionó tal orientación cuando James se sintió perdido. De forma clara, el efecto del foco perlocutivo sobre la eficacia de la comunicación es el mayor posible cuando el procedimiento perlocutivo está bien definido, es inequívoco

general, sino en contra del tipo de investigación que conlleva la necesidad de reificarlos, despersonalizarlos y objetificarlos.

7 Si pensamos que la situación es radicalmente diferente para los casos de *cosa* y *objeto* nos estamos engañando; más adelante intentaré explicar por qué.

y puede ser articulado con precisión⁸. Al considerar la importancia crucial del foco perlocutivo en el éxito de la comunicación, uno debe preguntarse por las posibilidades de éxito en un discurso de una “realidad virtual” (Sfard, 2000a) como lo son las matemáticas, en las que el término *objeto* no necesariamente se refiere a algo tangible. Este asunto se discutirá en la siguiente sección.

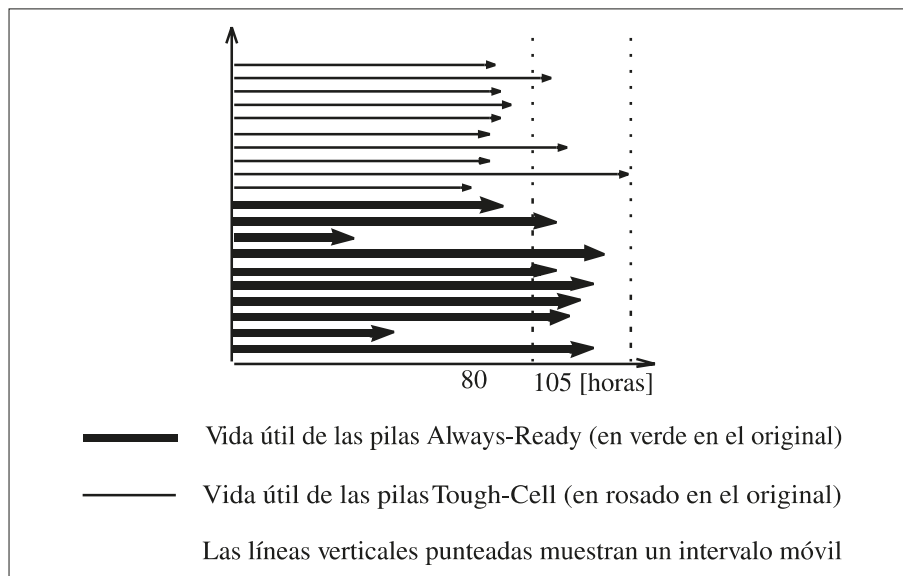
CUANDO NO HAY FOCOS DISCURSIVOS PREEXISTENTES: CREACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

La escasa mediación perceptual en el discurso matemático puede ser una de las razones principales por las que mucha gente considera que las matemáticas son muy difíciles, casi inaccesibles. Para los estudiantes, la labor se complica aun más porque la mayoría de los objetos matemáticos que se discuten en la escuela, en vez de ser conocidos de antemano por ellos y estar estrechamente relacionados con sus experiencias anteriores, se construyen a través de la actividad discursiva misma (Sfard, 1991, 2000a). El episodio que voy a presentar a continuación es un buen ejemplo de esto. Al analizar el intercambio entre los estudiantes, muestro cómo las personas superan la ausencia de objetos familiares, fácilmente identificables, creando tales objetos a través de sus mismos intentos por comunicarse.

El episodio se toma de un experimento⁹ en la enseñanza de conceptos básicos de estadística, realizado por un equipo dirigido por Paul Cobb, Kay McClain y Koeno Gravemeijer en un curso de séptimo grado en los Estados Unidos, con treinta estudiantes de doce años. El experimento se llevó a cabo a través de treinta y cuatro sesiones de clase desarrolladas en un período de diez semanas. El episodio que presento proviene de la clase durante la cual se pidió a los estudiantes que resolvieran el siguiente problema: “Dada alguna información sobre dos tipos de pila de linterna, ¿de cuál de las dos marcas compraría?”. La

⁸ Para que esta última observación no suscite la impresión de que un foco perlocutivo explícito y bien definido es todo lo que se necesita para comunicarse, debo señalar inmediatamente que existe una dependencia mutua y una interacción constante entre los diferentes ingredientes focales. Así como el foco perlocutivo nos conduce hacia un foco ilocutivo, así mismo el foco ilocutivo nos dicta nuestra elección del perlocutivo. El poder del foco ilocutivo es que, si se desarrolla bien, encajaría en una gama amplia de focos perlocutivos (y locutivos). Por ejemplo, piénsese en la posibilidad de habérselas con la pendiente de una función dada, con la ayuda de su gráfica, su expresión o su tabla. Para resumir, ninguno de los tres elementos focales es independiente, y ninguno podría usarse como base exclusiva para la comunicación eficaz. De hecho, en vez de llamarlos elementos, probablemente deberíamos referirnos a ellos como *tres aspectos* diferentes de una entidad, el foco.

Figura 1: Representación de los datos acerca de las pilas *Always-Ready* y *Tough-Cell* en la miniherramienta



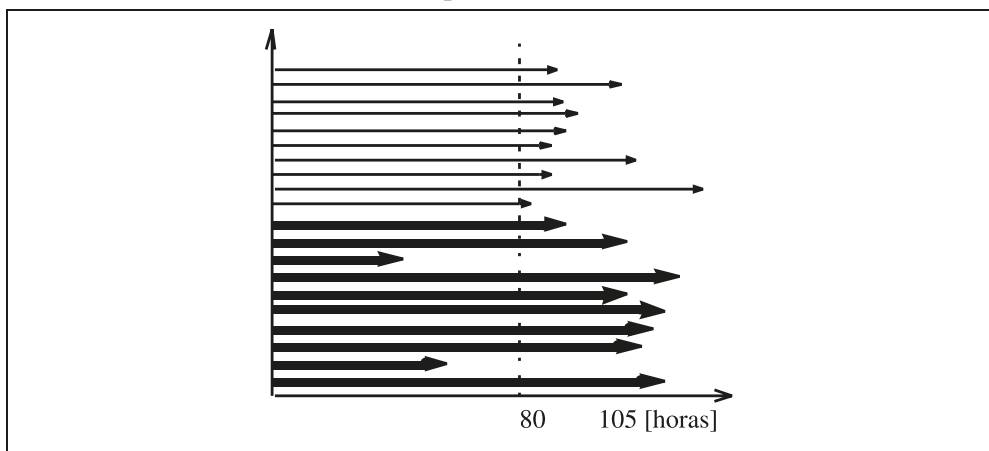
Episodio: *Las pilas* (los alumnos eligen el mejor tipo de pila)

- 1 Profesor: Casey, con base en esta información, se te ocurrió un argumento acerca de qué tipo de pila recomendarías comprar. ¿Podrías explicarlo?
- 2 Casey: Bueno, las *Always-Ready* son más consistentes con las 7 que están ahí; y, entonces, 7 de las *Tough* están como más atrás; o sea... porque hay como 7 de las 10 verdes que fueron las más largas, y como...
- 3 Alumno: Buen punto.
- 4 Janice: Entiendo.
- 5 Profesor: ¿Entiendes? Bueno, Janice, yo creo que no entiendo. ¿Podrías explicarme?
- 6 Janice: Lo que ella está diciendo es que de las 10 pilas que más duraron, 7 son verdes, y son más que las otras, así que las *Always-Ready* son mejores, porque la mayoría de esas pilas duraron más tiempo.
- 7 Profesor: Ah. ... James.

- 8 James: Ah, pero vea, de todos modos, la rosada, la *Tough-Cell*, tiene más de las largas. Por ejemplo, aunque tiene más al final, hay un montón de rosadas que están muy cerca, casi en esa área. Por eso, si se ponen dentro, se tendrán 7.
- 9 Profesor: Así que hablas de agrandar sólo un poquito más esto [el intervalo]. ... Casey, quizá, podrías explicarnos por qué escogiste 10; sería muy útil saberlo.
- 10 Casey: Bueno. Porque hay 10 de las *Always-Ready*, y hay 10 de las *Tough-Cell*; eso nos da 20, y la mitad de 20 es 10.
- 11 Profesor: ¿Y por qué sería útil para nosotros saber cuáles son las 10 mejores? ¿Por qué escogiste ese número? ¿Por qué 10 y no 12?
- 12 Casey: Porque estaba intentando coger la mitad.
- 13 Profesor: Ah, bueno. Brad.
- 14 Brad: ¿Puede poner el valor representativo por ahí, por favor? [Brad se refiere, de hecho, al límite inferior del intervalo en la herramienta, es decir, la línea vertical a la izquierda en la Figura 1.]
- 15 Profesor: ¡Claro!
- 16 Brad: ¿Lo puede poner en 80?
- 17 Profesor: No sé si pueda. ...
- 18 Brad: Está más o menos cerca. [La línea del valor representativo está ahora en $x = 80$; véase la línea vertical en la Figura 2.]
- 19 Profesor: ¿Está suficientemente cerca?
- 20 Brad: ¿Sí ve? Todavía hay verdes por debajo de 80, pero todas las *Tough-Cell* están sobre 80. Yo me quedaría más bien con una pila consistente que sé que me va a durar más de 80 horas, que con una que... quién sabe.
- 21 Profesor: ¿Por qué escogiste 80?
- 22 Brad: Porque la mayoría de las *Tough-Cell* están sobre 80.
- 23 Profesor: Ah, así que ese es como un límite inferior para tí.
- 24 Profesor: Bueno. ¿Preguntas para Brad? ¿Sí, Janice?

- 25 Janice: Umm. ¿Por qué las pilas *Always-Ready* no serían consistentes?
- 26 Brad: Bueno, porque todas las *Tough-Cell* están sobre 80, pero en las *Always-Ready* hay 2 que siguen estando por debajo de 80.
- 27 Janice: Sí, yo sé, pero son sólo tres de... o dos...
- 28 Brad: No, ¿pero qué?... No hicieron sólo 10 pilas, ¿no? O sea que esas 2 o 3 se añadirían, se añadirían a las pilas malas y todo eso.
- 29 Profesor: Ah, ya veo, si tienes cada vez más pilas, entonces, cada vez habrá más y más malas, es decir, que es representativo. Janice.
- 30 Janice: Y, ¿eso qué tiene (inaudible) con las pilas *Tough-Cell*?
- 31 Brad: Porque así como se ve en el cuadro que esas 10 pilas están sobre 80, significa, creo, que son de mejor calidad.
- 32 Profesor: ¿Hay preguntas o comentarios?
- 33 Jennifer: Aunque 7 de las 10 pilas que más duran son *Always-Ready*, también lo son 2 de las que duran menos, y si uno estuviera usando esas pilas para algo importante, podría terminar con una de esas pilas malas.
- 34 Profesor: ¿Sí entendieron todos lo que dijo Jennifer? ¿No? ¿Casey?
- 35 Casey: No la oí.
- 36 Profesor: Sally, ¿entendiste? ¿Podrías explicar lo que ella dijo?
- 37 Sally: Dijo que, aunque es cierto que las siete más largas son pilas *Always-Ready*, también es cierto que las más bajas son de la misma marca, y que si uno tuviera algo importante que hacer, le podría salir una de las más bajas (inaudible).
- 38 Profesor: Gracias. Bueno. ¿Preguntas? ¿Algún otro comentario?

Figura 2: Despliegue en pantalla despues de haber movido la linea del valor representativo a $x = 80$



información sobre las pilas se daba en forma numérica y representaba la vida útil de diez pilas de cada tipo.

Lo mismo que en el episodio *Las manzanas*, los niños tienen que decidir entre dos opciones con base en las propiedades de conjuntos de objetos que representan estas dos opciones. En este caso, sin embargo, y a diferencia del anterior, no hay una base natural, fácilmente identificable para un foco: los niños tienen que hablar de las pilas, pero no pueden verlas. Es más, el hecho de tener efectivamente las pilas no resolvería el problema; los niños deben tener en cuenta la vida útil de las pilas y no las pilas como tales. La vida útil de las pilas se extiende en el tiempo y no puede estar presente y ser inspeccionada simultáneamente. Aunque todavía no es del todo claro qué es lo que ha de servir como foco del discurso, es bastante evidente que todos los candidatos elegibles son transitorios y no tienen aspectos visuales obvios.

Los niños hablan en términos visuales concretos, a pesar de la ausencia de una base perceptual clara para, por lo menos, identificar el componente perlocutivo de un foco; usan expresiones tales como “las 10 verdes que fueron las más largas”, “un montón de rosadas que están muy cerca” (véanse las verbalizaciones [2] y [8] en el episodio *Las pilas*). Parece que los conceptos temporales relacionados con la vida útil de las pilas se han traducido a nociones espaciales, tales como ubicaciones relativas (estar cerca), colores (verde y rosado), direcciones (ahí), etc. Este uso de metáforas espaciales es fácilmente comprensible ya que los niños usaron una miniherramienta informática especial para manejar datos numéricos. La Figura 1 muestra el despliegue en la pantalla del computador después de

haber ingresado los datos numéricos para las dos marcas de pilas. Cada barra horizontal representa un dato numérico individual. Los datos que representan las dos marcas se distinguen por sus colores, rosado y verde. Obviamente, lo que los niños ven impone la metáfora espacial. Usan movimientos indicativos para explicar lo que están mirando cuando hablan. Así, el dispositivo simbólico en el discurso presente desempeña el mismo papel que el montón de manzanas en la conversación anterior: ambos median en aquello que los estudiantes dicen o intentan hacer y, a su vez, hacen más eficaz la comunicación.

El papel principal de los dispositivos simbólicos, como el despliegue en la pantalla del computador en este episodio, es superar la extensión en el tiempo, haciendo constantemente presente lo transitorio y proporcionando la posibilidad de un foco perlocutivo para el discurso. La herramienta específica usada en este experimento invita a los niños a ver momentos diferentes de la vida útil de una pila como coexistentes en una sola barra. Entonces, en el conjunto de barras que se puede ver en el cuadro, la vida útil de una serie de pilas, una vez reificada, se capta simultáneamente en un todo sin tiempo y sus diversos componentes pueden ocupar lugares diferentes en el espacio mientras que coinciden en el tiempo.

Los diseñadores de la miniherramienta debieron de haber tenido un foco discursivo específico en mente en el momento de traducir lo temporal a lo espacial de la manera particular en que lo hicieron. Sus intenciones están involucradas aun más en las opciones de manipulación: los niños pueden ocultar cualquiera de los conjuntos de datos, arrastrar a lo largo del eje *x* una línea vertical roja denominada *value tool*, y hallar el número de datos en cualquier intervalo, usando *range tool* (dos líneas verticales de color azul que se pueden usar para marcar tal intervalo). No obstante, cuando los niños ven las barras horizontales y las líneas verticales en la pantalla del computador, no es probable que reconozcan de inmediato las intenciones de los diseñadores. No hay una correspondencia uno a uno entre los dispositivos simbólicos y las formas en que se puede prestar atención a los símbolos. La elección de una forma particular de prestar atención, entre infinitas posibilidades, sólo se puede hacer bajo la guía de un foco ilocutivo. Sin embargo, cuando el grupo se enfrenta por primera vez al despliegue en la pantalla del computador, el foco ilocutivo no se ha construido todavía.

En efecto, la presencia de este sugestivo dispositivo simbólico no es equivalente a la existencia de un foco ilocutivo y ni siquiera de un foco perlocutivo bien definido; tampoco ayudan mucho, frases que entran en el discurso de la clase de una manera natural como por ejemplo “la mejor pila [el mejor tipo]” o “pila de alta calidad”. La intención que está detrás de tales frases no es lo suficientemente clara como para indicarles a los alumnos cómo examinar los dos conjuntos de barras con el fin de decidir a cuál de ellos deben asignarle las palabras “la mejor

pila”. Con respecto a esto, la situación de las pilas es bastante diferente de la situación en el episodio *Las manzanas*. En este último, los niños se acercaron al problema armados de antemano con una intención bien cristalizada detrás de las palabras focales (“la mejor manzana”), mientras que aquí la intención correspondiente (detrás de “la mejor pila”) está en su fase más preliminar, no operativa. Así, la primera tarea, para quienes han de resolver el problema, es construir un foco ilocutivo, expresado en algún procedimiento perlocutivo bien definido que pueda consolidarse como una base firme para las decisiones de los consumidores.

Este punto requiere aclaración. Aunque acabo de afirmar que la construcción del foco ilocutivo es la primera tarea de los estudiantes, cualquier proceso de construcción del foco es, de suyo, circular: los componentes del foco discursivo tripartito son mutuamente constitutivos, y ninguno de ellos se puede ver, de manera definitiva, como primero con respecto a los otros dos. Estos tres ingredientes focales son construcciones discursivas, y coemergen de manera gradual en un proceso dialéctico, inherentemente difícil, que quizá da rodeos. Parece entonces que la misión de los niños es casi imposible: deben usar el foco perlocutivo para construir un foco ilocutivo claro, pero ¿cómo pueden hacer uso del primero sin la ayuda de este último? ¿Por dónde deben empezar para salir de la trampa? ¿Cómo han de proceder para no ser presa de los argumentos circulares inherentes? Intentaré contestar estas preguntas a través de mi análisis del episodio.

Hago dos comentarios técnicos antes del análisis. Primero, en cualquier verbalización se pueden identificar muchos focos, y la decisión de cuál de ellos se debe ver como dominante y cuáles como secundarios, es cuestión de interpretación. Teniendo en cuenta las preguntas formuladas antes, concentraré mi análisis en el foco particular que está en construcción, el cual permitirá en últimas que los niños realicen su elección. Segundo, debido a este interés particular, dejaré intencionalmente sin cubrir algunos aspectos interesantes de la interacción. Como en cualquier análisis riguroso, las preguntas que se hacen imponen un tratamiento selectivo de los datos.

La búsqueda del foco faltante se presentará ahora como una obra teatral en tres actos con un final razonablemente feliz. En lo que sigue, analizaré las verbalizaciones que parecen ser los avances más críticos en el intrincado proceso de la construcción del foco. Mientras se consideran estos pasos primordiales en detalle, el lector podrá observar que la circularidad del proceso de construcción, aunque fuente de una dificultad considerable, también es la fuerza conductora que está detrás del crecimiento discursivo: la falta de equilibrio entre los ingredientes focales es lo que impele a este crecimiento.

PRIMER ACTO: LA PRIMERA PROPUESTA PARA UN FOCO TRIPARTITO

Empiezo el análisis con la verbalización [2] expuesta por Casey:

- 2 Casey: Bueno, las *Always-Ready* son más consistentes con las 7 que están ahí; y, entonces, 7 de las *Tough* están como más atrás; o sea... porque hay como 7 de las 10 verdes que fueron las más largas, y como...

En esta verbalización, el foco locutivo más pertinente para el presente análisis es “[las pilas] más consistentes”. El asunto del foco perlocutivo correspondiente a esta enunciación es un poco complicado porque no hay registros directos acerca de lo que Casey está mirando. Sólo puedo especular sobre su foco perlocutivo con base en las cosas que ella dice (podría haber considerado también sus gestos indicativos y movimientos oculares, si éstos hubieran sido documentados). A juzgar por la manera en que Casey se expresa, puedo conjeturar que su procedimiento perlocutivo se pudo haber realizado conforme al siguiente plan: (a) inspección de un conjunto de datos para determinar el número de barras que sobrepasan la línea vertical $x = 105$ que aparece en la pantalla; (b) repetición de este procedimiento para el segundo conjunto de datos; (c) elección del conjunto que tiene el mayor número de barras que sobrepasan la línea vertical $x = 105$, y declaración de tal conjunto como el “más consistente”. Aunque la vacilación de Casey indica que, de hecho, ella pudo haberse dado cuenta de cierta diferencia entre sus focos locutivo y perlocutivo, no hay nada en la verbalización que fundamente una interpretación alternativa. Con base en este análisis, se puede deducir que la intención de Casey era identificar el conjunto de pilas que tuviera más “pilas de vida útil más larga”. Los componentes focales de Casey se presentan en la Tabla 1.

Al especular acerca de las posibles motivaciones para este foco particular, encuentro que el foco locutivo de Casey, *pila consistente*, puede servir como punto de partida para el proceso de construcción focal. No hay información disponible de cómo surgió la idea de consistencia¹⁰, pero se puede suponer razonablemente que su presencia aquí, se debe en alguna medida a la naturaleza del problema, por una parte, y al mecanismo de proyección metafórica que evidentemente

9 El experimento es presentado en detalle por Cobb (1999), de cuyo trabajo se tomó el episodio y su descripción. El episodio forma parte de una clase que tuvo lugar al principio de la segunda semana del experimento. Para los estudiantes, esta fue la segunda ocasión en que usaron la miniherramienta con la que habrían de resolver el presente problema.

este problema puso en movimiento, por otra parte. Explicaré esta afirmación.

Tabla 1: Foco de Casey en la verbalización [2]

Foco locutivo	Pilas “más consistentes”.
Foco perlocutivo	1. Inspección de un conjunto de datos para determinar el número de barras que sobrepasan la línea vertical $x = 105$ que aparece en la pantalla. 2. Repetición de este procedimiento para el segundo conjunto de datos. 3. Elección (enfocamiento) del conjunto que tiene el mayor número de barras que sobrepasan la línea vertical $x = 105$, y declaración de tal conjunto como el “más consistente”.
Foco ilocutivo*	Pila que consistentemente tiene larga vida útil = El conjunto de pilas que tiene el mayor subconjunto de “pilas de vida útil más larga”.

* Más exactamente, es el foco locutivo de la intérprete, que corresponde al foco ilocutivo evocado en ella por la enunciación del hablante.

Quizá la idea más obvia que viene a la mente de una persona cuando intenta escoger “una mejor” pila es que entre más larga la vida útil, mejor es la pila. De hecho, el interés de los niños en la pila de “vida útil más larga” se hace evidente por la colocación de las dos líneas verticales de la herramienta *range tool*: cuando comienza el episodio, la línea que puede llamarse el *límite superior* del intervalo es ubicada justo más allá del punto donde termina la barra más larga, y la otra, el *límite inferior*, cae en $x = 105$ (véanse las líneas verticales en la Figura 1 que pudieron haber sido trazadas durante el trabajo en parejas previo a la discusión). Parece que quien puso las líneas en esta posición quería establecer el intervalo de las pilas “de vida útil larga” (en este caso, las que duran más de 105 horas). Las palabras de Casey indican un interés similar. Sin embargo, la niña se enfrenta a un problema: como en la pantalla se presentan *conjuntos* en vez de pilas individuales, ella no puede decidir con facilidad a cuál objeto en particular se debería aplicar el término “de vida útil larga”. ¿Al conjunto en su totalidad? Sin duda alguna, no (las barras son de longitudes diversas y variadas). ¿A una pila en particular? Aun cuando es posible hacerlo, esta forma de usar la expresión *de vida útil larga* no ayudaría a responder la pregunta inicial.

La palabra *consistente* puede ofrecer una solución a este problema. Primero, aunque las intenciones de Casey probablemente se podrían expresar de

manera más precisa con la frase “pila que consistentemente tiene larga vida útil”, es evidente que su atención se centra en un conjunto más que en un simple elemento del conjunto: la palabra *consistente* sólo puede referirse a una característica que surge de inspeccionar un *número* de objetos, y no un objeto en particular. Segundo, la metáfora de la consistencia proporciona una sugerencia sobre la manera en que se pueden examinar las longitudes de las barras: no es suficiente buscar sólo las barras *largas*; se debe buscar el conjunto en el cual ser largo sea un rasgo que prevalece, que se repite. De hecho, este es el mensaje que la palabra *consistente* trae a este nuevo contexto desde otros discursos más conocidos. Por ejemplo, por el uso cotidiano de la palabra, los niños saben que una persona consistente es aquella cuyas acciones concuerdan entre sí y, por consiguiente, su comportamiento en el futuro es más predecible que el de una persona a la cual le falta consistencia.

Por esta razón, la metáfora de la consistencia ayuda a los niños, de manera evidente, a dar el primer paso para romper la circularidad en la construcción focal. Lo que se expresa da lugar a un foco ilocutivo primario lo suficientemente claro para dar un foco perlocutivo más o menos bien definido (véase la Tabla 1). Aunque la inquietud de Casey por el asunto de la vida útil *larga* interfiere con el interés en la consistencia y la lleva a seguir un procedimiento no aceptable para un matemático estadístico, su propuesta es viable en ciertos contextos. Aun así, como veremos, los niños encontrarán por sí mismos razones para buscar modificaciones y mejoras en el procedimiento perlocutivo. Su insatisfacción con la versión actual es entendible en la medida en que las múltiples expectativas de los interlocutores con respecto al foco discursivo puedan ser difíciles de reconciliar. Por un lado, los estudiantes buscaron un foco ilocutivo que les permitiera hacer una elección intuitivamente aceptable entre los dos tipos de pilas. La idea metafórica de la consistencia parece ser bastante apropiada para este propósito. Por otro lado, necesitan un procedimiento perlocutivo lo suficientemente claro y preciso para asegurar una comunicación verdaderamente eficaz y una respuesta inequívoca a la pregunta que enfrentan. El proceso de construcción del foco es resultado de una negociación intrincada entre estas necesidades complementarias, la *aceptabilidad intuitiva* y el *rigor operativo*. Como ha sido evidente una y otra vez a lo largo de la historia de las matemáticas (véanse ejemplos en la siguiente sección), a menudo se debe sacrificar parte de las expectativas intuitivas

(es decir, de las suposiciones metafóricas) para satisfacer ambas necesidades de manera razonable.

SEGUNDO ACTO: CUESTIONAMIENTO DEL FOCO PROPUESTO

El siguiente hito en el proceso de construcción colectiva lo marca la verbalización [6], de Janice:

6 Janice: Lo que ella está diciendo es que de las 10 pilas que más duraron, 7 son verdes, y son más que las otras, así que las *Always-Ready* son mejores, porque la mayoría de esas pilas duraron más tiempo.

Janice se ofrece para repetir lo que Casey dijo, pero, de hecho, le da un giro interesante y muy diciente: a juzgar por el foco locutivo de Janice, ella ve las siete barras verdes, más como parte de las *10 barras más largas del diagrama* que como subconjunto de las verdes simplemente. En efecto, ella usa la palabra *diez* de forma diferente a como lo hizo su predecesora: mientras que Casey hablaba de “7 de las 10 [pilas] verdes”, Janice se refería a las “10 pilas que más duraron”. Así, las dos niñas estaban refiriéndose claramente a dos conjuntos distintos con la misma palabra (*diez*): Casey hablaba del conjunto de las pilas verdes mientras que Janice estaba mirando las pilas de vida útil mayor a 105 horas. De su afirmación se puede concluir que Janice podría haber estado aplicando un procedimiento perlocutivo diferente al de Casey (véase la fila central de la Tabla 2). Sin embargo, este cambio en el foco perlocutivo no tuvo efecto en el foco ilocutivo.

Janice parece no ser consciente de la discrepancia entre su interpretación y las palabras exactas de Casey. De hecho, nadie ni siquiera la misma Casey se da cuenta del giro en el procedimiento perlocutivo (véase [10]). El hecho, quizá accidental, de que los dos conjuntos considerados por las niñas fueran de la misma cardinalidad fue claramente responsable de la confusión que, por la misma razón, se pasó por alto fácilmente.

Tabla 2: Foco de Janice en la verbalización [6]

Foco locutivo	“Mejores pilas”.
Foco perlocutivo	1. Consideración de todas las barras que van más allá de la línea del valor representativo. 2. Búsqueda del color que predomina en este conjunto. 3. Elección de las pilas del color predominante.
Foco ilocutivo	Pila que consistentemente tiene larga vida útil = El conjunto de pilas que tiene el mayor subconjunto de pilas “de vida útil más larga”.

A pesar de su invisibilidad, la interpretación errónea que hizo Janice del procedimiento perlocutivo de Casey no iba a quedarse sin consecuencias. Considérese la verbalización [8], de James:

- 8
- James:
- Ah, pero vea, de todos modos, la rosada, la *Tough Cell* , tiene más de las largas. Por ejemplo, aunque tiene más al final, hay un montón de rosadas que están muy cerca, casi en esa área. Por eso, si se ponen dentro, se tendrán 7.

James evidentemente adopta el procedimiento perlocutivo de Janice pero al mismo tiempo se pregunta sobre la evidente arbitrariedad de la decisión de mirar las 10 barras más largas. ¿Por qué 10, entre todos los números posibles? La arbitrariedad del número 10 lo alerta sobre la arbitrariedad de la ubicación de la línea del valor representativo. Es capaz de mostrar que si se amplía el intervalo de las barras “largas” desplazando su límite inferior a la izquierda “sólo un poquito más”, el mismo procedimiento perlocutivo traerá el resultado contrario con respecto a la elección de “las mejores pilas” (véase la Tabla 3). La percepción de arbitrariedad que tuvo James es reafirmada de inmediato por la profesora quien, evidentemente no consciente de la razón original por la que Casey eligió el número 10, cuestiona esta elección en las verbalizaciones [9] y [10]. Permítaseme hacer énfasis en que la idea de cambiar el intervalo podría no habersele ocurrido nunca a James si Janice no hubiera malinterpretado el procedimiento perlocutivo de Casey; de hecho, en la medida en que la palabra diez se refiriera al número de pilas verdes, ésta no parecería arbitraria.

Tabla 3: Foco de James en la verbalización [8]

Foco locutivo	
Foco perlocutivo	1. Colocación del límite inferior del intervalo en el punto $x = x_0$ en “el montón de rosadas que están muy cerca”. 2. Consideración de todas las barras que van más allá de la línea $x = x_0$. 3. Búsqueda del color que predomina en este conjunto. 4. Elección de las pilas del color predominante.
Foco ilocutivo	Pila que consistentemente tiene larga vida útil = El conjunto de pilas que tiene el mayor subconjunto de pilas “de vida útil más larga”.

James hace su contribución al proyecto de construcción del foco explicando la necesidad de tener un procedimiento perlocutivo mejor definido. El niño trae este mensaje mostrando que la ubicación del límite inferior del intervalo de las “barras largas” (elemento de suma importancia en el procedimiento perlocutivo) parece arbitraria y es por eso que el foco perlocutivo de Casey no resulta confiable para tomar decisiones con respecto a las pilas. Por supuesto, esta imperfección del foco perlocutivo va de la mano con cierta falta de claridad de las intenciones: el significado de las palabras *larga vida útil* no es claro y nadie puede decir cuán largo es lo suficientemente largo. Aunque el nuevo foco propuesto por James puede estar más cerca de la idea, promovida intuitivamente, de “la pila de larga vida útil más consistente”, una deficiencia obvia es que la prescripción de James no especifica el primer paso del procedimiento perlocutivo de una manera inequívoca. A causa de la falta de claridad de la expresión “el montón de rosadas que están muy cerca”, no es claro cómo debería ser escogido el punto $x = x_0$.

TERCER ACTO: UNA PROPUESTA DE UN FOCO MODIFICADO

Es Brad quien llega a hacer una propuesta para dar un primer paso más preciso en el procedimiento perlocutivo de James. La idea de Brad es mover, a la posición dada por , “la línea del valor representativo” que para él, en este contexto, evidentemente equivale al límite inferior del intervalo de valores (véanse las verbalizaciones [14–18] y la Figura 2). Luego, explica sus intenciones:

- 20 Brad: ¿Sí ve? Todavía hay verdes por debajo de 80, pero todas las *Tough Cell* están sobre 80. Yo me quedaría más bien con una pila consistente que sé que me va a durar más de 80 horas, que con una que... quién sabe.

El foco locutivo de Brad es “pila consistente”, y su trayectoria perlocutiva es básicamente como la de su predecesor, excepto que el primer paso se da de manera más precisa por su prescripción específica para la elección de x_0 : observación de la barra verde y la barra rosada más cortas y elección de x_0 como el extremo de la más larga de esas dos barras. El procedimiento perlocutivo de Brad puede ser abreviado y presentado tal como se hace en la Tabla 4. A diferencia de la propuesta anterior, su procedimiento asegura que los diferentes usuarios llegarán a los mismos resultados.

Por esta razón, el foco de Brad cumple en su totalidad el requisito de rigor operativo, pero ¿satisface también la necesidad complementaria de una aceptabilidad intuitiva? En el contexto que estamos estudiando, es probable que sí. Lo que

los niños llaman una “pila consistente” y lo que probablemente se refleja mejor en la expresión “pilas que consistentemente tienen vida útil más larga” está en sintonía con la decisión tomada en el siguiente procedimiento perlocutivo de Brad: el conjunto escogido incluye pilas de vida útil razonablemente larga mientras que la variabilidad más o menos restringida de estos valores de vida útil está en sintonía con la metáfora de la consistencia (a causa de su fijación con el asunto de la longitud, Brad verifica la variabilidad sólo con respecto al límite inferior, como si hiciera el supuesto de que el límite superior debe permanecer donde está, en la más larga de las barras). Tal es el mensaje que Brad parece expresar en la justificación subsiguiente acerca de su preferencia por las *Tough Cell* (véanse [20], [26] y [28]). Su argumento debe sonar convincente a oídos de la clase: Jennifer y Sally, por ejemplo, parecen estar dispuestas a reformularlo en sus propias palabras (véanse [33] y [37]).

Tabla 4: Foco de Brad en la verbalización [20]

Foco locutivo	“Pila consistente”.
Foco perlocutivo	1. Observación de la barra rosada más corta y la barra verde más corta. 2. Elección de la más larga de las dos. 3. Elección de la pila correspondiente a la que encontró en 2 como más consistente.
Foco ilocutivo	Pila que consistentemente tiene larga vida útil = la pila <i>en que se puede confiar</i> que tendrá una vida útil razonablemente larga.

A pesar del consenso de la clase, el foco perlocutivo de Brad no concuerda con la concepción de consistencia de un matemático estadístico porque Brad trabaja con el límite inferior de los valores de vida útil de las pilas y no con el intervalo de su variabilidad. Por eso, la aparente viabilidad del foco de Brad proviene de las particularidades del presente ejemplo. En este contexto, el resultado de su procedimiento perlocutivo parece compatible con la metáfora de la consistencia y está en sintonía con el resultado que pudo haber obtenido un matemático estadístico profesional. Por esta razón, parece satisfacer ambos requerimientos focales, el de precisión y claridad y el de aceptabilidad intuitiva.

Así, desde el punto de vista de los niños, quizá el problema parece resuelto. Sin embargo, el profesor puede no estar del todo satisfecho. En situaciones como esta, encontrar una forma de motivar a los estudiantes para que realicen esfuerzos

posteriores de construcción focal es una tarea particularmente desafiante. Antes de hacer especulaciones sobre cómo enfrentar este reto, pondré en consideración una característica especial del foco de Brad que lo hace diferente de los otros que se han visto hasta ahora. Por su definición rigurosa, el procedimiento perlocutivo de Brad es el primero en este episodio que puede ser generalizado más allá de este ejemplo y aplicado a cualquier conjunto análogo de datos. De hecho, a diferencia de los procedimientos perlocutivos de Casey y James, que se basan en los rasgos específicos de la imagen y dejan muchas cosas a juicio de quien las implementa, el procedimiento de Brad es independiente del diagrama particular y llevaría a decisiones unívocas si se aplicara a cualquier gráfica similar.

Esta generalidad se expresa aun más en las explicaciones de Brad, de acuerdo con las cuales su elección no está entre dos conjuntos específicos de 10 pilas sino más bien entre dos *categorías* de pilas. De hecho, en la verbalización [28], resulta claro que el niño habla de algo más general que el conjunto de 10 barras que aparecen en el diagrama de la miniherramienta (en términos estadísticos, Brad aclara que él ve los conjuntos concretos de datos como *muestras* de los dos tipos de pilas). La generalidad se refleja en el lenguaje de Brad que claramente señala un ente virtual y no un objeto tangible. A esta entidad virtual la denomino *objeto* porque en el lenguaje funciona como tal: Brad usa la forma singular “pila consistente” en lugar de “pilas consistentes”, aun cuando el carácter de consistente sólo puede ser afirmado a través de la inspección de un conjunto de pilas. Catalogo de *virtual* a este objeto porque no hay objeto material alguno, ni recurso simbólico disponible que se pueda considerar como un único proveedor de su versión perlocutiva. El diagrama con el que los niños trabajan ya no tiene este estatus especial: pueden hacerse muchos diagramas que se ajusten igual de bien al foco ilocutivo de Brad. Por primera vez en este episodio, se ha propuesto un foco que no puede ser identificado de manera única con una cosa en particular que sea accesible a través de la percepción. La capacidad de Brad para proponer un foco perlocutivo generalizable lo liberó de las limitaciones de su campo visual inmediato.

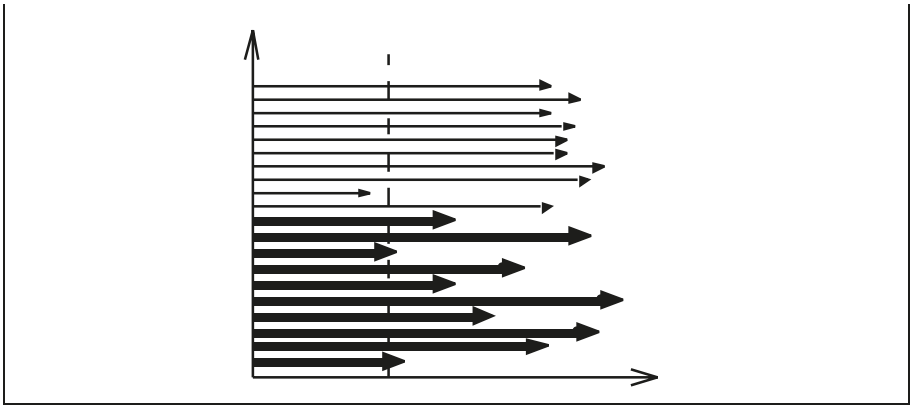
Es importante observar que este aspecto de la “generalidad virtual” es específico de las intervenciones de Brad, Jennifer y Sally, quienes repitieron el procedimiento y el razonamiento de Brad con precisión, no adoptan este lenguaje de generalidad. Por la sencilla razón de que ellas nunca usan la palabra *consistente*. Más adelante, en sus explicaciones, las niñas se mantienen cerca de las interpretaciones concretas e inmediatas de los elementos específicos del diagrama, como si su tarea fuera elegir uno de los dos conjuntos específicos en vez de tomar decisiones con respecto a una posible compra. Incluso, si la narración

de las niñas evoluciona alrededor de unos focos claros, éstos están estrechamente relacionados con la imagen particular con la que los niños trabajan en el momento. En palabras de Koehler, citadas por Vygotsky (1978), las dos niñas aún permanecen “cautivas de sus campos visuales” (p. 28).

EPÍLOGO:ALGUNASCONTINUACIONESHIPOTÉTICASDELOSTRESPASOSANTERIORESPARALA CONSTRUCCIÓN FOCAL

Esta crónica sobre la consistencia de las pilas termina aquí, aun si algunos lectores pudieran pensar que ha quedado interrumpida, sin llegar a una conclusión apropiada. Aunque este episodio conduce a un foco con respecto al cual hay acuerdo, probablemente para el profesor este acuerdo no es el fin de la historia. Interesado en el concepto de distribución, el profesor quizá preferiría que los niños considerasen la idea de consistencia independientemente del asunto de la longitud absoluta de las barras. Como persona responsable del progreso de sus estudiantes, tiene que hacerse la pregunta: ¿qué posibles continuaciones del proceso de construcción realizado hasta ahora, harían conscientes a los estudiantes de la necesidad de modificaciones posteriores?

Figura 3: El conjunto de abajo es visiblemente menos consistente pero se consideraría “mas consiente” de acuerdo con el procedimiento perlocutivo de Brad

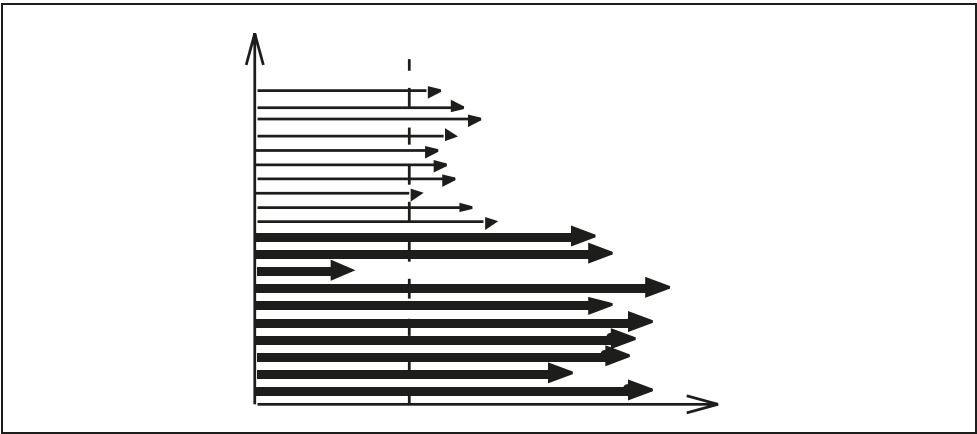


Una lección que podemos aprender de la historia de las matemáticas es que para realizar el cambio que se requiere, es indispensable un ejemplo para el cual la solución dada no funciona. En la continuación del episodio *Las pilas*, se podría

tratar de retar a los estudiantes con datos que muestren que el procedimiento perlocutivo de Brad, que ahora es lo suficientemente general para ser aplicado en cualquier situación, a veces conduce a una elección intuitiva inaceptable. En tal caso, el procedimiento conduciría a una elección incompatible con las intenciones principales y, en particular, con la metáfora de la consistencia. Se muestran dos de esos ejemplos en las Figuras 3 y 4.

Por supuesto, cuando los niños se dan cuenta de que el procedimiento de Brad puede conducir a una contradicción con la metáfora de la consistencia, se ven enfrentados al dilema de decidir cuál de los dos requisitos es más importante, el de la precisión del procedimiento perlocutivo o el de la compatibilidad con la metáfora de la consistencia. En el episodio *Las pilas*, es indudable que el procedimiento perlocutivo salga perdiendo, porque la discrepancia entre los resultados del procedimiento perlocutivo de Brad y lo que parece intuitivamente aceptable es demasiado grande para pensar que pueda haber acuerdo entre ellos. Después de todo, la compatibilidad con las intenciones principales es la garantía de la utilidad del foco. Sin embargo, en la historia de las matemáticas, en muchos casos se dejaron de lado las metáforas iniciales y no los procedimientos perlocutivos, en aras de la eficacia y la economía de la comunicación.

Figura 4: El conjunto de arriba es una elección improbable, pero sería el escogido de acuerdo con el procedimiento perlocutivo de Brad



RESUMEN, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES: LOS OBJETOS MATEMÁTICOS COMO PRODUCTO DE LA NECESIDAD DE COMUNICARSE

RESUMEN: EL MECANISMO DE LA CONSTRUCCIÓN FOCAL

Mi propósito principal en este capítulo fue ganar comprensión sobre el mecanismo de construcción focal en el discurso matemático. El punto de partida fue la afirmación de que la necesidad de comunicarse es el motor principal de los procesos cognitivos humanos y que, en consecuencia, comprender el pensamiento requiere comprender las formas de comunicación entre las personas. La *comunicación*, en sí misma, ha sido definida como un proceso en el que las personas intentan evocar ciertas acciones, pensamientos o sentimientos en sus interlocutores.

La eficacia de la comunicación verbal se ha presentado como una función de la calidad de su foco, entre otros factores. El foco discursivo se describió como tripartito. El elemento *locutivo* es público, el componente *ilocutivo* es principalmente privado y el foco *perlocutivo* es el mediador entre los otros dos. La actividad esencial a la comunicación se hace posible gracias al foco perlocutivo que traduce lo privado a lo público y viceversa. En algunos discursos, los objetos materiales pueden servir como base para la creación del foco discursivo; en otros, los objetos que generan el foco se deben crear “sobre la marcha”, en el transcurso de la conversación. La aparición frecuente de este último tipo de situación es una de las características centrales de las matemáticas.

La construcción de un nuevo foco discursivo, que se debe realizar dentro del discurso mismo, es un proceso complejo, difícil. A causa de su circularidad inherente, tal construcción puede parecer casi imposible de implementar: el foco perlocutivo no puede ser creado sin la orientación de una intención suficientemente bien cristalizada, pero la intención en sí misma pronto se vuelve una función de aquello a lo que se le está prestando atención, al menos en parte. De manera más general, los tres ingredientes focales son construcciones discursivas, que sólo coemergen de manera gradual en un proceso dialéctico, no lineal, que quizá da rodeos, en el cual hay una tensión constante y muchas discrepancias entre los aspectos ilocutivo y perlocutivo. Este proceso está orientado por dos necesidades que son complementarias pero a veces, contradictorias, en alguna medida: la necesidad de la aceptabilidad intuitiva, es decir, de un acuerdo con la intención inicial; y la necesidad de una precisión operativa, de tener un foco perlocutivo claro y bien definido. Ambas necesidades se derivan claramente de la necesidad de comunicarse eficazmente.

En el episodio *Las pilas*, la construcción focal comenzó con la noción de consistencia y sus implicaciones metafóricas. En el análisis posterior, examiné de cerca la dialéctica intrincada entre los focos ilocutivo y perlocutivo. El análisis reveló el proceso en el cual los procedimientos perlocutivos fueron repetidamente propuestos, examinados y rechazados o aceptados en forma tentativa como tema para mejoras futuras. La negociación sutil entre las intenciones y las opciones disponibles para su implementación satisfactoria hizo posible esta construcción. En este proceso de formación mutua, los componentes focales son como piernas que nos mueven hacia adelante simplemente porque las dos nunca están exactamente en el mismo lugar.

Discusión: ¿qué se puede aprender de este análisis sobre los objetos matemáticos?

A través del análisis del episodio *Las pilas*, tuvimos (los lectores y yo) la oportunidad de comprender mejor el papel moldeador del recurso simbólico disponible para los interlocutores. Pudimos ver que, como anclas perceptuales de la atención de los interlocutores, los dispositivos simbólicos juegan un papel central en la construcción focal y la afectan de una manera profunda. La fuerza especial del recurso simbólico proviene de su capacidad de ayudar a los hablantes a transgredir las limitaciones de tiempo y reemplazar lo diacrónico por lo sincrónico. Los símbolos tienen el poder de convertir lo extendido en el tiempo, lo transitorio y lo invisible en algo contenido en el espacio, permanente y perceptualmente accesible. Al traducir lo temporal a lo espacial, los símbolos permiten a los participantes en el discurso, tratar cosas que no necesariamente están presentes aquí y ahora, de tal manera que los “invisibles” se vuelven la base de un foco perlocutivo bien definido a pesar de su ausencia. Para abreviar, los artefactos simbólicos del discurso matemático son las principales herramientas, si no las únicas, para satisfacer nuestra necesidad, siempre presente, de mediación perceptual. Además, los dispositivos simbólicos, como los que se usan en el episodio *Las pilas*, nos dan el lenguaje metafórico con el cual hablar sobre los fenómenos. El recurso simbólico se convertiría finalmente en una base para nuevos objetos matemáticos.

Al leer este último párrafo, un lector cuidadoso podría haberse sentido incómodo con el aparente descuido con el que he venido usando el término *objeto matemático*. Esta expresión, a veces podría haber sonado casi equivalente a foco y otras veces podría haber parecido referirse simplemente a la cosa material que se estaba observando. Haré claridad sobre el tema respondiendo unas cuantas preguntas básicas: ¿Qué es un objeto matemático? ¿Cómo se relaciona con el

foco discursivo? ¿Cómo se forman los objetos matemáticos? ¿Cuándo se dice que un estudiante ha construido un nuevo objeto matemático?

Para comenzar, permítaseme aclarar que el enunciado de la existencia de algunos entes especiales (que llamamos *objetos matemáticos*), implícita en todas estas preguntas, es esencialmente metafórica y que, además, la frase “construcción de objetos” no significa la creación de entes tangibles, autónomos e independientes de la mente. Estas expresiones simplemente señalan que las personas que hablan de “cosas virtuales” tales como números, funciones o conjuntos pasan por experiencias similares a las generadas por el discurso de la “realidad como tal” y usan formas lingüísticas reminiscentes de aquellas que comúnmente se aplican a los objetos materiales. Se dice que *un objeto ha sido construido de manera discursiva* si los interlocutores hablan como si sus intenciones se relacionaran con algo estable, permanente, autónomo y que está fuera del discurso mismo. De hecho, la percepción de los objetos matemáticos, con frecuencia, es lo suficientemente definida y sólida como para hacer creer a una persona que la “existencia” de estos objetos trasciende las fronteras del discurso (véase evidencia, e.g., en Sfard, 1994a). Este sentido de objetividad e independencia de la mente está implicado por la misma palabra *objeto*. En matemáticas, la posibilidad de una comunicación eficaz en extremo, que con frecuencia conduce a un consenso en apariencia incuestionable sobre las propiedades de las entidades construidas discursivamente, alimenta esta creencia platonista.

Aun cuando ambos, *objeto* y *foco*, nos remiten a un cierto tipo de experiencia humana, hay una diferencia sustancial en sus significados. Mientras que el término *foco* apunta a un suceso discursivo real pero transitorio, *objeto* es un conglomerado de potenciales para diferentes focos tripartitos, concebidos como relativos a diferentes aspectos del *mismo todo*. Por lo tanto, *objeto* es un agregado de varios focos perlocutivos e ilocutivos opcionales, convertidos en entes gracias a una colección de dispositivos simbólicos y de operaciones discursivas, organizados empíricamente en un ente complejo. Los semiólogos se podrían ver tentados a relacionar esta entidad con la idea de “cadena de significación” (Walkerdine, 1988). Sin embargo, déjenme anotar que la metáfora de la cadena puede ser engañosa puesto que impone la linealidad y de esa forma simplifica excesivamente el panorama.

El enunciado según el cual un estudiante “ha construido un objeto (matemático)” se debería entender entonces como la expresión de que en una amplia gama de situaciones y siempre que se use el correspondiente nombre o símbolo, este estudiante tiene una elección disponible de manera inmediata de focos discursivos tripartitos y además los usos de los correspondientes significantes se parecen mucho a los nombres de los objetos en el discurso de la realidad

como tal. Mientras se participa en un discurso de cualquier tipo mediado por objetos, virtuales o reales, hay un movimiento imperceptible de un foco a otro, y se hace sin perder la sensación de estar hablando de una misma cosa durante el proceso. Al parecer, lo que se hace, de manera literal, es acercarse y alejarse con respecto a diferentes partes de un objeto. Podemos hacerlo para diferentes aspectos de un despliegue simbólico, usando así diferentes procedimientos perlocutivos relacionados con el mismo objeto, o podemos realizar un “primer plano” a diferentes interpretaciones del símbolo, creando así diferentes focos ilocutivos que corresponden a este objeto. Esta actividad de acercamiento/alejamiento puede involucrar también movimientos hacia adelante y hacia atrás entre diferentes despliegues simbólicos (piénsese, por ejemplo, en las transiciones, a menudo imperceptibles, de gráficas a expresiones y, de éstas a tablas, que hacemos cuando trabajamos con las funciones). Sobre todo, el uso de un símbolo mediado por un objeto involucra la suspensión y la activación intermitentes de las diferentes funciones de significación de los símbolos. Por ejemplo, al mirar el despliegue gráfico en el episodio *Las pilas* y comparar los dos conjuntos de barras en un momento dado, la intención podría centrarse en cualquiera de las siguientes cosas: las barras mismas (es decir, los segmentos de recta horizontales), los números representados por esas barras, los períodos de tiempo representados por los números, o las pilas cuya vida útil está reificada en los números y en las barras. Deslizarse hacia adelante y hacia atrás en esta cadena de significación simple y relativamente lineal constituye sólo una fracción de las experiencias y operaciones susceptibles de estar involucradas en un discurso maduro y mediado por objetos sobre el concepto “pila que consistentemente tiene larga vida útil”. Otro indicio importante de la mediación de objetos es el uso de formas lingüísticas que suponen que el ente focal tiene el estatus ontológico de un objeto (y no el de un proceso, por ejemplo).

En el episodio *Las pilas*, cuando los niños tuvieron que lidiar con la idea de pila que consistentemente tiene larga vida útil, la etapa de la mediación de objetos, en pleno, no se había logrado todavía, aun cuando se hubieran dado pasos importantes en esa dirección. Una forma de motivar un mayor desarrollo sería enriquecer el discurso con la inclusión de algunos dispositivos simbólicos adicionales. Por ejemplo, se podrían introducir nuevos medios gráficos y medidas numéricas de distribución, como la curva de distribución, por un lado, y la media, la mediana y la desviación estándar, por otro lado. Todos estos dispositivos se podrían usar ahora junto con la gráfica de barras, siempre que se considerara el concepto de *pila que consistentemente tiene larga vida útil*.

Conclusiones: la comprensión que se gana al conceptualizar el pensamiento como un acto comunicativo

Considerar el pensamiento como una instancia de la comunicación nos permitió comprender ciertos mecanismos cognitivos específicos de las matemáticas, al escuchar una conversación entre niños que estaban en la tarea de resolver un problema matemático. A través del análisis de un intercambio entre estudiantes, comprendimos mejor el mecanismo de construcción de objetos y llegamos a conclusiones que parecen vigentes sin importar si el proceso es interpersonal o intrapersonal y sin importar si éste sucede durante una clase o en un lapso de varios siglos. Permítaseme concluir este capítulo con un breve resumen de mis observaciones.

Los objetos matemáticos surgen de las necesidades de comunicación en vez de ser elementos primarios para la comunicación. La decisión de ver el pensamiento como una instancia de comunicación condujo a invertir los términos de la creencia platonista sobre la relación entre la “realidad matemática” y el discurso sobre esa realidad: a causa de la necesidad de comunicación (que incluye la comunicación con uno mismo, es decir, el pensamiento), las personas se dan a la tarea de construir objetos virtuales tales como números, funciones y conjuntos, y no sucede en forma contraria. Puede que la necesidad de crear objetos nuevos para comunicarse no sea específica de las matemáticas; pero en el discurso matemático, debido a su especial interés por la generalidad de la expresión y el consecuente desprendimiento de la realidad material inmediata, la creación de tales objetos es una actividad central.

La mediación visual es crucial para el éxito de la comunicación y, pese a la convicción popular, el caso del discurso matemático no es la excepción. En el discurso de la realidad virtual, como en el discurso matemático en el que no hay objetos conocidos visibles que puedan servir de foco de la conversación, las personas se valen de artefactos simbólicos para reemplazarlos. Sin embargo, como mediadores de la comunicación, los sustitutos simbólicos no son tan eficaces como los objetos familiares contruidos y usados ampliamente en el discurso cotidiano. Los símbolos pueden proporcionar a los interlocutores un foco perlocutivo accesible pero, la mayoría de las veces, el foco ilocutivo correspondiente es producto del uso del símbolo, y no una base preexistente para éste. El conglomerado de experiencias asociadas con un símbolo simplemente no puede existir de forma independiente de (o antes de) la introducción de este símbolo. Tales experiencias, así como el foco tripartito bien definido, pueden entrar a existir sólo a través del uso discursivo de este símbolo. En este sentido,

el discurso tiene una función constitutiva: para habilitar la comunicación eficaz, el discurso debe producir el universo de cosas de las que se habla. En el ejemplo de las pilas, la necesidad de comunicarse era claramente la fuerza conductora que había detrás de los intentos de los estudiantes para construir el concepto de “pila consistente”. Es necesario comunicarse en forma clara con uno mismo al igual que con los demás para llegar a una solución convincente, reproducible y de fácil aceptación con respecto a la solución del problema que se esté tratando.

Los objetos matemáticos surgen a través de las negociaciones entre la metáfora y el rigor. La afirmación sobre el papel constructivo del discurso matemático se relaciona con la circularidad inherente a este discurso. El problema, que se formuló esta vez en términos de objetos matemáticos en lugar de focos discursivos, es una versión de lo que alguna vez llamé “el círculo de reificación” (Sfard, 1991, 2000a): puesto que los objetos son construcciones discursivas, para construir un objeto, éste se debe haber usado con anterioridad; pero ¿cómo se puede usar un objeto antes de ser creado? En el estudio presentado en este capítulo, el lector pudo observar los primeros pasos de este proceso “imposible”. Desde su naturaleza preliminar y tentativa, estos movimientos iniciales proporcionaron una ojeada sobre algunos de los mecanismos más básicos de los procedimientos de construcción. Incluso en este episodio fragmentario, y muy restringido, se puede ver el mecanismo de proyección metafórica que da vía a esta paradoja evidente.

El uso de la metáfora no se limita a las matemáticas. Al servir de puente entre nuevos contextos y viejos hábitos discursivos, las metáforas nos ayudan a salir de circularidades similares, prácticamente en cualquier discurso en el que podamos participar. La presencia de metáforas es obvia en el discurso cotidiano, por ejemplo, cuando empleamos términos que se refieren a nuestras experiencias físicas para describir nuestras emociones. El papel de la metáfora en las ciencias, ampliamente documentado (véase, e.g., Ortony, 1993), no se puede sobreestimar. En las matemáticas, con frecuencia descritas como la más exacta de las ciencias, el papel de las metáforas puede ser menos explícito que en la poesía, pero no menos importante, aunque en ellas este uso esté de algún modo “encubierto”. La falta de claridad y la ambigüedad de las metáforas, consideradas como cualidades deseables en la poesía, son vistas como serias debilidades en las matemáticas. En la poesía, la metáfora se valora como una invitación a la construcción de significados idiosincráticos; en las matemáticas se usa cuando no hay un mejor recurso a juicio de un matemático. Las metáforas le sirven a los matemáticos sólo como punto de partida de una disciplinada jornada colectiva hacia un nuevo objeto claramente definido, cuyos orígenes metafóricos se enterrarán con el

tiempo bajo una gruesa capa de definiciones precisas y aceptadas por todos.

Gran parte de la historia de las matemáticas se puede contar como un relato de la conducción del discurso matemático por entre la metáfora y el rigor. Las reglas estrictas del discurso matemático moderno son el resultado de esfuerzos sin precedentes de matemáticos en los siglos XIX y XX para alcanzar la comunicación más eficaz. Evidentemente, su esperanza tácita era crear un discurso que no dejara espacio a las idiosincrasias personales y que, por consiguiente, llevara a un consenso incuestionable. Tal consenso implicaría certeza del conocimiento matemático. Con el fin de lograr esta elusiva meta, los matemáticos normalmente se preparan para comprometer, en gran manera, los supuestos de la metáfora inicial, y a menudo van tan lejos como para crear conceptos que deben parecer escandalosamente contrarios a la intuición, incluso para quienes los crearon. La tensión constante entre la metáfora y el rigor es por consiguiente una espada de doble filo: es una fuerza conductora detrás de la creación matemática que tiene mucha importancia, pero también es lo que ahuyenta a muchas personas de las matemáticas.

CAPÍTULO 5

LA COGNICIÓN COMO COMUNICACIÓN: RECONSIDERAR EL APRENDIZAJE MEDIADO POR LA CONVERSACIÓN, ATRAVÉS DEL ANÁLISIS MULTIFACÉTICO DE LAS INTERACCIONES MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES¹

“... nadie quiere abandonar el tren de su propio discurso para responder preguntas que, al venir de otro discurso, pudieran requerir repensar lo mismo en otros términos, lo que quizá lo llevaría a una tierra desconocida, alejada del camino seguro”. (Italo Calvino, 1983, p. 105)

En este capítulo revisamos² en detalle la afirmación generalizada en la actualidad de que muchas materias escolares, las matemáticas entre ellas, se aprenden mejor de manera interactiva, mediante la conversación con otros. Se usan dos tipos de herramientas analíticas especialmente concebidas para analizar la información de las interacciones entre dos jóvenes de trece años que estaban aprendiendo álgebra; la información fue recopilada durante un período de dos meses. El *análisis focal* nos proporciona un cuadro detallado de la conver-

¹ Traducción realizada por María Emilia Aponte, Daniel Orozco y Francisco Pérez. [N.E.]

² De este texto es coautora Carolyn Kieran, investigadora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Quebec en Montreal, Canadá. [N.E.]

sación de los estudiantes en lo que concierne a los contenidos matemáticos que ahí se abordan, y hace posible evaluar la eficacia de la comunicación. Esto se complementa con el *análisis preocupacional*, que se dirige a los metamen-sajes y examina el compromiso de los participantes en la conversación, lo que posiblemente resalta, por lo menos, algunos de los motivos del fracaso en la comunicación.

Lo que logramos ver con la ayuda de nuestras herramientas especiales de análisis nos llevó a plantear conclusiones en dos niveles: cambió nuestra opinión sobre el aprendizaje mediado por la conversación y a la vez nos obligó a revisar algunos de los supuestos básicos con los que comenzamos nuestro estudio³. En primer lugar nos dimos cuenta, al observar a la pareja de estudiantes mientras trabajaban juntos, de que los méritos del aprendizaje mediado por la conversación no se pueden dar por sentados. La colaboración que tuvimos la oportunidad de observar nos pareció poco útil y carente de la cualidad sinérgica esperada, debido a la ineficacia de la comunicación entre los estudiantes. En segundo lugar, en el metanivel, concluimos que lo que se puede ver en las clases no tiene mucho sentido en cuanto se considere el pensamiento como un factor autónomo que regula la comunicación. Para nosotras, pensar llegó a ser un acto comunicativo en sí mismo. Esta reconceptualización condujo a la desaparición de unas cuantas dicotomías tradicionales que en un principio entorpecieron nuestras reflexiones: la dicotomía entre “el contenido de la mente” y lo que las personas dicen o hacen; la separación entre cognición y afectividad y la distinción entre las perspectivas de investigación individual y social.

INTRODUCCIÓN: PREGUNTAS SOBRE EL APRENDIZAJE MEDIADO POR LA CONVERSACIÓN

Comenzamos este capítulo con reflexiones sobre la idea, ahora generalizada, de que la mejor manera de aprender una materia es conversando de ella con otros y lo finalizamos con la revisión de algunas creencias comunes sobre las relaciones entre cognición y comunicación. La nuestra es una historia de descubrimientos fortuitos. El proyecto de investigación que estaba en un principio orientado a evaluar hipótesis con fundamentos teóricos acerca del aprendizaje del álgebra,

3 La investigación sobre la que se reporta en este capítulo fue posible gracias al apoyo financiero de *Social Sciences and Humanities Research Council of Canada*, bajo contrato de financiación # 410-93-0605. Agradecemos a dos revisores anónimos por sus profundos comentarios.

inesperadamente centró su interés en el asunto del aprendizaje mediado por la conversación. En medio del proceso de la investigación, nos vimos totalmente absortas en la tarea de analizar las interacciones de los estudiantes y todas las preguntas iniciales quedaron relegadas a un segundo plano.

Conocer los motivos de esta importante metamorfosis del proyecto es importante para entender afirmaciones y discusiones posteriores. Nuestra historia comienza en 1993, cuando diseñamos una secuencia de enseñanza de treinta horas, con la cual buscábamos estimular y apoyar el pensamiento algebraico de los estudiantes⁴. La secuencia se construyó como una serie de actividades, cada una de las cuales debía ser primero realizada en parejas y luego discutida por toda la clase bajo la moderación del profesor. Durante los siguientes cinco años el material fue utilizado experimentalmente en un colegio privado de secundaria de Montreal, en los tres grupos de séptimo grado. La mayoría de los estudiantes de trece años, aunque no todos, provenían de familias de clase media, cuyos padres estaban en los niveles profesional y de negocios. La formación matemática de los estudiantes era muy variada. En el primer año, dos asistentes de investigación y un profesor del colegio llevaron a cabo la enseñanza. Las dos autoras del presente capítulo también estuvieron allí, circulando por el aula, ayudando a los estudiantes y observando. Todas las clases y las sesiones de laboratorio de computadores fueron grabadas en video. Mientras los estudiantes trabajaban en parejas, dos cámaras se enfocaban en dos parejas que conformaron estudios de caso y que también fueron entrevistadas por una de nosotras de vez en cuando.

De acuerdo con las entrevistas y otras mediciones tradicionales de evaluación, la clase marchaba razonablemente bien y esto se reflejó a lo largo del curso y en el examen final. Sin embargo, un sentimiento vago de que algo no andaba bien nos impedía ver el éxito total del experimento. El primer incentivo para cambiar nuestro foco de atención hacia el tema de la comunicación fue la sensación de incomodidad que experimentamos al escuchar de cerca las interacciones de los estudiantes. Intuitivamente, sabíamos que la mayoría de los equipos, y en par-

4 Nuestra principal conjetura teórica era que aunque tanto la historia del álgebra como nuestros estudios sobre el aprendizaje de ésta muestran la prevalencia de la comprensión operacional sobre la estructural (Sfard, 1991; Kieran, 1992), “es muy posible que el uso masivo de gráficas por computador invierta [el orden en el desarrollo], de manera que el enfoque estructural al álgebra llegue a ser accesible incluso para niños pequeños” (Sfard y Linchevski, 1994, p. 224; esta es una versión más bien específica de la afirmación más general que sostiene que los recursos visuales pueden tener efectos benéficos sobre el pensamiento matemático; véanse Dreyfus, 1991; Schwartz y Yerushalmy, 1992). El *Montreal Algebra Project* (MAP) fue diseñado para probar esta hipótesis. Para más detalles sobre el MAP, véanse Kieran (1994) y Kieran y Sfard (1999).

ricular las dos parejas de los estudios de caso, tenían dificultades considerables al comunicarse sobre matemáticas.

Para aclarar un poco de qué estamos hablando, consideremos detenidamente a una de esas dos parejas. De acuerdo con lo que pudimos determinar a partir de las entrevistas y los exámenes, a los dos muchachos, a quienes llamaremos Ari y Gur, les fue razonablemente bien durante el curso. Sus notas en los exámenes previos al experimento, muy similares y correspondientes a respuestas acertadas para casi las mismas preguntas, estuvieron muy cercanas al promedio de la clase: el promedio fue 47.5%, en tanto que la nota de Ari fue 48%, y la de Gur, 43%. En el examen escrito que se administró en la etapa media del estudio, Ari obtuvo 100% y Gur 78%; y en el examen escrito al final de la secuencia de enseñanza, donde el promedio de la clase fue 71.1%, Ari obtuvo 94% y Gur 73%. Para resumir, al final del experimento, los dos muchachos habían tenido un desempeño superior al del promedio de la clase, aun cuando Ari, claramente, había tenido más éxito que su compañero. Como se puede ver tanto en las evaluaciones numéricas como en las respuestas verbales obtenidas de un cuestionario actitudinal incluido en el examen final, los dos muchachos estaban razonablemente satisfechos con la manera en que habían aprendido y evaluaron el curso como rico en contenido e innovador en su aproximación. En vista de ello, podríamos concluir que nuestro experimento tuvo éxito en el logro de sus metas, por lo menos en el nivel personal de estos participantes. Sin embargo, antes de dar por terminado el asunto con esta alentadora evaluación, miremos detenidamente las interacciones de los muchachos en clase.

La Figura 2 ilustra lo que consideramos una muestra representativa de estas actividades grupales. El episodio *Luz diurna*, que fue tomado del segundo encuentro de los estudiantes, duró tan sólo dos minutos y medio. Ese fue precisamente el tiempo que les tomó a Ari y a Gur responder la pregunta “¿En cuál período, el número de horas de luz diurna tuvo el crecimiento más rápido?” con la ayuda del gráfico presentado en la hoja de trabajo titulada *Luz diurna* (Figura 1). Se recomienda al lector detenerse por un momento, darle una mirada imparcial a la transcripción y tratar de darle sentido al intercambio entre Ari y Gur antes de proseguir la lectura.

No se necesitan herramientas especiales de análisis para advertir que ese breve episodio a duras penas puede ser visto como un caso de colaboración exitosa. Los muchachos no logran siquiera un consenso en la respuesta, lo que es bastante revelador. Sin embargo, esta única evidencia no ameritaría mucha atención si no fuera porque es bastante representativa de lo que estaba sucediendo entre los dos muchachos en general. En realidad, nuestra convicción de que algo estaba básicamente mal en las interacciones entre Ari y Gur, vistas desde la

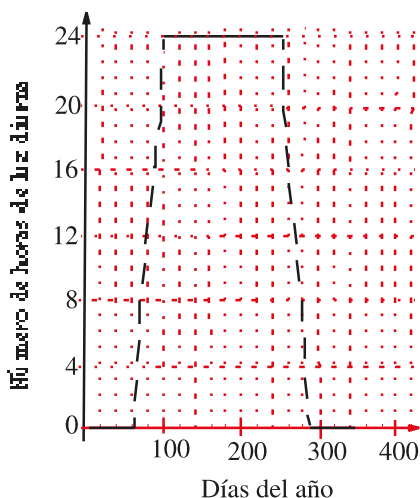
perspectiva de su contenido matemático, se agudizó a lo largo de todo el análisis sistemático de los episodios subsiguientes. Ya fuera observando la pareja a simple vista o con la ayuda de herramientas específicamente diseñadas para el efecto, no podíamos sustraernos a la impresión de que no había mucho aprendizaje matemático durante las largas horas que los muchachos pasaban juntos y que el progreso más eficaz se daba en las situaciones que estaban planeadas como ocasiones para la evaluación y no para el aprendizaje: las entrevistas.

Figura 1: Episodio *Luz diurna* — Hoja de trabajo

Lectura de gráficas continuas

El número de horas de luz diurna de un día cualquiera es una función de qué día del año es, y de la latitud del lugar en cuestión. El número de horas de luz diurna en Alert, NWT (cerca del polo norte) se registró cada día durante el año 1993. La representación gráfica muestra esa información.

Número de horas de luz diurna en Alert, durante el año



Describan qué le ocurrió al número de horas de luz diurna a lo largo del año, respondiendo a las siguientes preguntas.

- (1) ¿Cuántas horas de luz diurna hubo el primero de enero de 1993?
- (2) ¿Durante cuántos días ocurrió lo mismo antes de que hubiera un cambio en el número de horas de luz diurna?
- (3) ¿En cuál período, el número de horas de luz diurna aumentó más rápidamente? Desde el día..... hasta el día.....
- (4) ¿Cuál fue el máximo número de horas de luz diurna en Alert? ¿Cuánto duró esto?
- (5) ¿Cuál fue el máximo número de horas de luz diurna en Alert? ¿Cuánto duró esto?

Figura 2: Episodio *Luz diurna* — Protocolo

Lo que fue realizado	Lo que fue dicho
	19:14
	[1] A.: ¿En cuál período, el número de horas de luz diurna aumentó más rápidamente? Desde el día, hasta el día
	[2] G.: Woah
	[3] A.: ¿Aumentó más rápidamente?
[4] “día 60”: G. señala (60, 0) “hasta el día”; G. señala alrededor de (290, 0)	[4] G.: Sí (musita). Desde el día 60 hasta el día... 290.
	[5] A.: Desde el día 60 hasta
	[6] G.: 290. ¡Ah! no, no, no, no. (Musita)
	[7] A.: Desde el día 60 hasta el cien.
	[8] (Interrupción del profesor sobre un asunto diferente)
[9] G. señala a lo largo de la línea $x = 250$	[9] G.: Entonces, desde el día
	[10] A.: ¿En cuál período, el número de horas de luz diurna aumentó más rápidamente? Desde el día
[11] G. señala a lo largo de la línea $x = 100$	[11] G.: cien
	[12] A.: 60 hasta 100. Desde el día 60 hasta el 100.
[13] “aquí arriba”: G. señala (100, 24). “hasta el día”: G. se mueve sobre la línea horizontal de la parte superior y baja por la vertical para llegar alrededor de $x = 250$	[13] G.: Porque... ¡Ah! no, no, no, no. Mire, mire. Aquí arriba. Es del día 100 al día... al día
	[14] A.: ¿De qué está hablando?
	[15] G.: 55
	[16] A.: ¿Dónde?
[17] “de aquí a aquí”: G. señala varias veces alternativamente a los extremos de la línea horizontal que está en la parte superior, alrededor de (100, 24) a (250, 24)	[17] G.: Mire. Éste cambió lo más rápido de aquí a aquí. ¿Ve?
	[18] A.: ¿Ah? Éste es exactamente lo mismo.
[19] G. traza el descenso de la línea desde $x = 100$ hasta $x = 0$	[19] G.: No, porque mire, éste se mueve hacia arriba (musita)
	[20] A.: Éste va hacia arriba lo más rápido
	[21] G.: Entonces éste es desde el día 100
	[22] A.: Hasta el día 100

[23] G. sigue señalando alrededor de 250 sobre el eje x	[23] G.: No, desde el día 100 hasta el día...
	[24] A.: No, no, no.
	[25] G.: Doscientos sesenta
	[26] A.: Así no es como se hace.
	[27] G.: Doscientos ochenta. Hasta el día
	[28] A.: Mire, durante qué tiempo. El tiempo, el período de tiempo tiene que cambiar rápidamente.
	[29] G.: Ah. No. Dice de día a día ¿qué?
[30] A. subraya “tiempo” en la hoja de preguntas de G	[30] A.: Lea la pregunta. En cuál período de <i>tiempo</i> - tiempo .
[31] G. traza una línea horizontal en 24 horas	[31] G.: Aquí arriba, tiempo.
[32] “eso no cambió”: A. traza una línea horizontal en 24 horas. “precisamente aquí”: A. marca con lápiz a lo largo de la gráfica desde $y = 20$ hasta 24	[32] A.: No, pero eso no cambió; permaneció lo mismo, lo que quiere decir que debe estar precisamente aquí.
	[33] G.: No.
	[34] A.: Lo que está alrededor de 90
[35] G. traza el ascenso del gráfico desde 0 hasta 100	[35] G.: Precisamente aquí.
	[36] A.: No, aquí.
[37] G. traza una curva a lo largo del gráfico desde 0 hasta alrededor de 250	[37] G.: No lo entiende ¿no es cierto? Si fuera así
	[38] A.: Bueno, es desde 60 hasta cien, ¿verdad?
	[39] G.: No.
	[40] A.: Sí. Estoy escribiendo eso.
	[41] G.: ¿Por qué?
	[42] A.: Podemos tener respuestas diferentes.
	[43] G.: ¿Por qué? No me importa.
[44] G. continúa señalando alrededor (250, 0)	[44] A.: ¿Cuál fue el máximo número de horas de luz diurna en Alert?
	[45] G.: Hasta el día 250.
	[46] A.: 24
	[47] G.: Un momento, un momento.
	[48] A.: 24
	[49] G.: 250. Le estoy diciendo, cámbielo. De todas maneras, no importa.
	22:44

De manera gradual, la forma como Ari y Gur interactuaron pasó a ser el centro de nuestra atención. A medida que avanzábamos en el análisis de la información, nos fuimos interesando cada vez más en interrogantes que al principio de nuestro estudio nos parecían de menor importancia: *¿Qué es lo que obviamente impide que Ari y Gur se comprendan mutuamente? ¿Cómo se lograría que su conversación tuviera éxito? ¿Cuál es el papel de los artefactos que los estudiantes están usando en la comunicación?* Y así, en forma lenta pero segura, el asunto de la comunicación matemática se convirtió en el foco de nuestras investigaciones, mientras los otros asuntos, incluso aquellos considerados como los incentivos directos del presente estudio, a partir de ese momento se formularon como sus derivados.

A raíz del cambio de foco en la investigación surgió un nuevo interrogante: el método. En realidad, para tratar con el nuevo conjunto de problemas requeríamos de nuevos tipos de herramientas analíticas, diseñadas especialmente para la magnitud de estos problemas. Al principio, sin olvidar el objetivo principal del proyecto, desarrollamos un tipo especial de análisis que se esperaba nos ayudara a extraer de las transcripciones, la historia del desarrollo matemático de nuestros estudiantes⁵. Por razones que expondremos más adelante, hemos denominado *focal* a este tipo de análisis (*nivel de los objetos*). No obstante, aunque esta herramienta demostró ser muy útil para revelar el éxito y el fracaso comunicativo, no nos ofrecía una clave para determinar las razones de uno u otro. Con el tiempo comprendimos que la ventana que abrimos con la ayuda de ese tipo de análisis de orientación cognitiva era muy estrecha y dejaba demasiado por fuera del campo de visión. Decidimos complementar nuestra herramienta inicial con otra,

⁵ Nuestras herramientas analíticas para cumplir un propósito especial, a pesar de ser específicas, tienen algunos rasgos en común con ciertos métodos que se pueden hallar en la literatura (véase el análisis semántico de las conversaciones de la clase de ciencias cuyo propósito es “descubrir los patrones temáticos de los contenidos de esa asignatura”, en Lemke, 1993, p. 231). Debido a la singularidad de los asuntos que queríamos tratar —la manera en que el contenido matemático se despliega en una conversación— nos sentimos comprometidas a tomar los métodos existentes como punto de partida.

6 Estos dos tipos de análisis, el focal y el preocupacional, corresponden vagamente a los análisis que Brown y Yule (1983) denominan *transaccional* e *interaccional*, y a lo que Halliday y Hasan (1976) llaman análisis de aspectos *ideacionales* e *interpersonales* del discurso, respectivamente.

diseñada para el propósito especial de diagnosticar la manera como los estudiantes se involucran en las interacciones con otros. Denominamos el nuevo método *análisis preocupacional (metanivel)*⁶. Desde ese momento, nuestra cuidadosa y detallada investigación se realizaría por medio de la aplicación combinada de estas dos maneras estrechamente interrelacionadas de observar la información. Sentíamos que al usar conjuntamente las dos herramientas podíamos evadir las insostenibles dicotomías, inherentes a métodos mucho más tradicionales, que habían venido obstaculizando la comprensión que buscábamos. En lo que resta de este capítulo se presentarán las herramientas mismas y la visión unificada de los procesos cognitivo y comunicativo que se pudo esbozar con su ayuda.

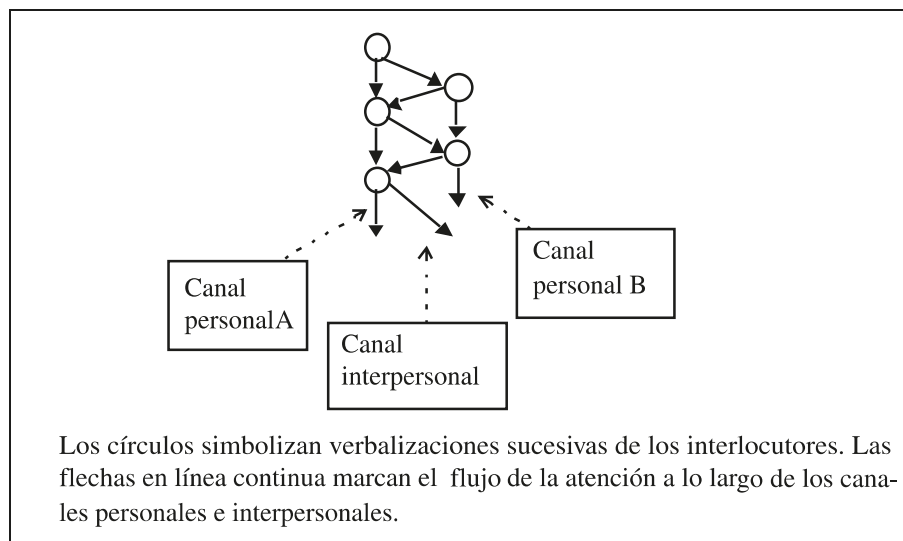
ANOTACIONES PRELIMINARES SOBRE EL PENSAR COMO ACTO COMUNICATIVO

En esta sección explicamos cómo se deben entender los conceptos básicos *comunicación* y *discurso* en este capítulo. Aunque ambas nociones se destacan en la literatura actual, sus significados varían de unos textos a otros y, por tanto, no se pueden dar por sentados.

Quizá el aspecto más importante en la historia de nuestra investigación es que lo observado en el salón de clase nos impulsó a considerar el asunto de la comunicación como centro de nuestra atención y a reformular, como sus derivados, todos los interrogantes cognitivos iniciales. Esta inversión en el orden de las concepciones básicas se hizo inevitable una vez que decidimos manifestar explícitamente nuestra comprensión de la relación entre la cognición y la comunicación. La forma como concebimos esta relación probó ser totalmente diferente a lo que parecen revelar las afirmaciones populares sobre el papel de la conversación en el aprendizaje. Así, por ejemplo, según el documento *The curriculum and evaluation standards for school Mathematics* (NCTM, 1989), hablar sobre matemáticas ayuda al estudiante a “clarificar, depurar y consolidar su pensamiento” (p. 6) y por eso se promueve el aprendizaje y se mejora la calidad del conocimiento resultante. Esta forma de ver las cosas implica que la comunicación asiste al pensamiento y que el *conocimiento* y los *pensamientos* matemáticos son, de alguna forma, anteriores a los actos comunicativos, o por lo menos, independientes de ellos. En el presente capítulo no consideramos el asunto de esta manera. Ya no concebimos el pensar como una función autónoma, solitaria e individual, previa a la actividad de comunicar e independiente de sus varias manifestaciones (cf. el último trabajo de Wittgenstein, 1953, 1969). En realidad,

nuestra concepción epistemológica básica va mucho más allá: proponemos que el pensar, que a veces se describe como “conversar con uno mismo”, se puede conceptualizar de manera bastante útil como una variación de la actividad de comunicar⁷. Por supuesto, este “autodiscurso” no tiene que ser en forma auditiva o visual, y no tiene que ser realizado por medio de palabras. Parafraseando las ideas de Vygotsky diríamos que cualesquiera sean los recursos, el pensar no se “expresa” a sí mismo a través de ellos sino que más bien se origina en su uso. En consecuencia, el pensar que tiene lugar dentro de la conversación sostenida con otros se convierte en una actividad comunicativa inmersa en otra actividad de comunicación, tal como se presenta en la Figura 3. Es razonable suponer que estos discursos simultáneos intra e interpersonales se informan y moldean de manera mutua y reflexiva.

Figura 3: Diálogo como comunicación de varios niveles



Con respecto a nuestro estudio, todo esto significa que la comunicación entre Ari y Gur será investigada como tal con el propósito de esclarecer el tema y no

⁷ Obsérvese que la actividad de comunicar se puede dar entre varias personas, pero también puede ser una interacción de una persona consigo misma; después de todo, casi siempre nuestros pensamientos toman la forma de un diálogo interno; compárese la idea de dialogismo de Bakhtin (1986), o la metáfora de la conversación de la mente, propuesta inicialmente por Herbert Mead (1934); también consúltese a Holquist (1990); Ernest (1993, 1994). Para mayor elaboración véase Sfard (2000b).

como un mero mecanismo didáctico o como una “ventana” del investigador hacia sus mentes (cf. Edwards, 1993, 1997). También significa que aun cuando nuestro interés principal resida en la actividad cognitiva de los estudiantes, ningún otro aspecto de sus interacciones se puede considerar insignificante. El pensamiento de los estudiantes sólo se puede comprender en el contexto de las exigencias y los patrones de toda la actividad comunicativa de la cual constituye una parte inseparable.

La *comunicación* misma se define aquí, en el espíritu de Grice (1975) y en el enfoque de Levinson (1983), como el uso y producción de recursos destinados a lograr que un interlocutor actúe o sienta de cierta manera⁸. La palabra *discurso* se utiliza para denotar cualquier instancia específica del comunicar, ya sea diacrónica o sincrónica, con otras personas o con uno mismo, marcadamente verbal o asistida por cualquier otro sistema de símbolos.

La definición que escogimos puede ser cuestionada por ser menos cercana al sentido común que las descripciones que se pueden hallar en muchos lugares, y, en particular, en los diccionarios. Según los autores del *Collins Dictionary of the English Language*, edición de 1986, podríamos decir que comunicación es “la transmisión o intercambio de información, ideas o sentimientos”, y, según la *Encyclopaedia Britannica* (1998), es el “intercambio de significados entre individuos a través de un sistema común de símbolos”. Estas definiciones ciertamente se ajustan mejor a los modelos tradicionales implícitos en el discurso cotidiano. Infortunadamente, ellos también transmiten suposiciones poco útiles de este modelo, que dan a entender que la información, las ideas, los sentimientos y los significados, que inherentemente son de carácter privado, pueden ser objetificados y estar sujetos a la medición externa y a comparaciones interpersonales. De acuerdo con estas definiciones, para determinar si la comunicación funciona se requeriría examinar si la entidad “enviada” por un emisor —idea, significado o sentimiento— es “la misma” que la que “recibe” el receptor. Puesto que la única manera de juzgar la mismidad de las experiencias humanas es comparar los discursos que ellas producen, estaríamos estimando esa mismidad mediante la evaluación de la eficacia de la comunicación. De esta manera, terminaríamos enredados en una circularidad lógica. Con nuestra definición, las comparaciones problemáticas no son necesarias aun cuando se haga referencia a las *intenciones*. En verdad, en el caso que nos ocupa, el emisor valorará el éxito de la comunicación preguntándose simplemente si las acciones del que responde (y su propia

8 “La comunicación consiste en que el ‘emisor’ logre que el ‘receptor’ reconozca que el ‘emisor’ está tratando de causar ese pensamiento o acción” (Levinson, 1983, p. 16). En el espíritu de nuestra visión dialógica de la mente, el receptor puede ser el hablante.

interpretación de estas acciones) se ajustan a sus expectativas. Esto obvia el riesgo de circularidad.

Debemos hacer una aclaración. Nuestra forma de evadir el riesgo de la circularidad conceptual no es la única posible. La solución de Wittgenstein (1953) al problema fue definir el significado en términos de características externas del discurso (véase su famosa Observación 43: “el significado de una palabra es su uso en la lengua”, p. 20), convirtiendo así el significado en un asunto público y abriendo la posibilidad de una definición no circular de la comunicación (siempre y cuando el “uso de una palabra en la lengua” esté sujeto a una inspección directa). Este puede ser un modo efectivo de tratar la lógica del sistema conceptual, pero no parece ser adecuado para el propósito que nos ocupa aquí: comprender *lo que* la gente realmente hace y *por qué* lo hace cuando se comunica. El elemento experiencial, cuya realidad no puede ser negada por ninguno de nosotros, parece jugar un papel importante en la toma de decisión de los interlocutores. Por lo tanto, no se debe pasar por alto este elemento. Afortunadamente, en cuanto seamos cautelosos para no hacer comparaciones de las experiencias interpersonales, incluir las experiencias humanas en el discurso sobre la comunicación parece seguro desde el punto de vista lógico. A pesar de todo esto, somos bien conscientes de que los seguidores cuidadosos de Wittgenstein (los “psicólogos del discurso”⁹, sobre todo) seguirán teniendo recelo de nuestra confianza en la noción de intención). Esperamos que nuestra forma especial de interpretar esta noción nos proteja contra los escollos de los que nos han venido advirtiéndolo. En este capítulo, no se entiende que la intención sea anterior a la verbalización que se supone la “transmite”, ni tampoco que requiera “representación” especial alguna. La intención es un aspecto del acto de comunicar y se genera en este acto. Halla su expresión en todas las propiedades de la verbalización por razón de las cuales se supone que los interlocutores saben qué tipos de respuestas contarían como apropiadas. De este modo, la intención no preexiste al acto de hablar, de la misma manera que la valencia de un átomo no preexiste al átomo mismo y, por tanto, no requiere de medio de comunicación alguno separado, intrínsecamente privado, adicional a los que se usan en las interacciones interpersonales. Así como la valencia permite que un átomo se combine solamente con ciertos átomos y hace imposible que se combine con algunos otros, la intención es la propiedad de la verbalización que permite que le sigan algunos tipos de respuesta pero no

9 Véanse, por ejemplo, Edwards y Potter (1992), Harre y Gillett (1995) y Edwards (1997).

10 Hay algo engañoso en la forma que hemos usado para hablar de las intenciones. A veces cuando alguien formula una verbalización y agrega inme-

otros. Para impedir vínculos no deseables de la metáfora, permítasenos agregar inmediatamente que a diferencia de los átomos, la gente puede reflexionar sobre lo que le está sucediendo y esto, naturalmente marca una gran diferencia: las intenciones pueden llegar a ser objeto de pensamiento explícito y, por tanto, también de la regulación antes, durante y después de la acción¹⁰.

Siguiendo nuestra definición, diremos que la comunicación es *eficaz* si logra su propósito comunicativo, es decir, que las distintas verbalizaciones de los interlocutores evoquen respuestas que estén en sintonía con las expectativas metadiscursivas de los hablantes. Esto es acorde con la afirmación de Levinson (1983) según la cual: “la comunicación es un tipo complejo de intención que se logra o satisface sólo al ser reconocida” (p. 16; nótese que puesto que las *intenciones* conllevan *expectativas*, en ciertos contextos estas dos nociones pueden ser usadas indistintamente). Hacemos énfasis en la palabra “metadiscursiva” porque para que la respuesta sea considerada como una instancia de comunicación eficaz debe ser de un tipo esperado más que tener un contenido dado. Existen otros dos aspectos de la noción de eficacia que se deben recordar siempre. En primer lugar, debemos siempre tener presente que es un concepto *interpretativo*: cualquier evaluación de la comunicación se basa en interpretaciones personales del discurso. El hablante compara sus intenciones con los efectos que su verbalización tuvo en un interlocutor; un observador, un participante pasivo, compara las intenciones evocadas *en él* por los diferentes interlocutores a quienes está mirando y escuchando. Diferentes participantes, entre los que está el observador, pueden tener opiniones diferentes acerca de la eficacia de la misma conversación. Así que cuando se van a evaluar los esfuerzos comunicativos, es importante hacer explícito de quién es la perspectiva que se está considerando. Sin desconocer todo eso, cabe la posibilidad de coincidir en denominar eficaz a una instancia dada de comunicación (simplemente así, sin especificar de quién es la decisión) si consideramos que hay una posibilidad razonable de consenso con relación al éxito completo de la comunicación, entre todos los evaluadores posibles. En segundo lugar, nuestra única posibilidad de

diatamente “esto no es lo que yo quería decir”, ello no significa, contrario a lo que se implica, que esta persona supiera de antemano lo que quería decir (i.e., que ella tuviera una intención separada de lo que realmente dijo después). Si este fuera el caso, la persona lo habría dicho. De hecho, esta persona reflexiona sobre sus intenciones sólo *después* de formular la verbalización. La persona queda insatisfecha porque tal verbalización no parece ajustarse bien con otras cosas que ha dicho o con sus pensamientos actuales.

11 Construir interpretaciones fundamentadas de las intenciones de los interlocutores

tener éxito en este esfuerzo interpretativo es adherir al principio que es similar al que gobierna los veredictos legales de la inocencia de un acusado: *un acto de comunicación se debería considerar eficaz en tanto que no haya evidencia de lo contrario*. Nuestro análisis, por lo tanto, estará encaminado a la detección de señales de fallas en la comunicación más que a la búsqueda activa de una confirmación directa de eficacia¹¹.

A la luz de su significado restringido, la eficacia comunicativa no es más que una precondition para el éxito de una interacción de aprendizaje. Es una característica sin la cual no se puede hablar de la productividad de tal interacción desde el punto de vista de la educación. El término *productividad*, a su vez, se refiere al discurso del que se puede probar que ha tenido algún efecto concreto y duradero: el discurso condujo a la solución de un problema, influyó el pensamiento de los participantes y los modos de comunicarse, cambió la posición de cada quien, se enriqueció en reglas y conceptos. En el caso del discurso matemático, se considerará que una interacción es productiva a nivel educativo si parece tener un impacto *duradero y deseable* en la participación futura de los estudiantes en ese tipo de discurso. Por tanto, la productividad educativa es un concepto normativo y siempre se juzgará con respecto a las metas educativas externas que se hayan propuesto con antelación.

Podemos entonces usar el vocabulario presentado para formular nuestra hipótesis en lo que se refiere a la interacción de Ari y Gur. Tenemos la impresión de que esta interacción no fue tan *productiva* como esperábamos. Debido a que en situaciones como estas la *eficacia* de la comunicación es la sospecha natural, decidimos concentrarnos en el análisis de este aspecto de las interacciones. En la próxima sección haremos concretamente lo siguiente: escrutaremos las interacciones de Ari y Gur para ver qué tan eficaces son.

a partir de poca evidencia es una tarea bastante complicada, para la cual no tendríamos bases suficientes sin hacer ciertos supuestos restrictivos. Levinson (1983) basándose en Grice (1975), señala uno de tales principios, al que denomina “un supuesto de coherencia temática: si una segunda verbalización se puede interpretar como consecuente de una primera verbalización, en el sentido de que se puede “escuchar” que trata del mismo tema, entonces tal interpretación de la segunda verbalización se corrobora, a menos que haya

¿SE COMUNICAN ARI Y GUR? ANÁLISIS FOCAL DEL ENCUENTRO INICIAL ENTRE ELLOS

Estamos ahora en capacidad de estudiar más de cerca el esfuerzo colaborativo de Ari y Gur para aprender álgebra. En este capítulo sólo nos ocupamos de dos episodios breves, uno de ellos tomado del segundo encuentro de los muchachos y el otro de su vigésima primera sesión con nosotras. Nuestras razones para hacer un muestreo de las treinta horas de interacción de aprendizaje en vez de tratar de analizarlas todas, son similares a las que subyacen a la práctica médica de someter a los pacientes a exámenes médicos periódicos. Esperamos que, a pesar de su brevedad, los encuentros escrutados nos den una noción razonable sobre las maneras en que los dos jóvenes aprendieron y los posibles cambios en sus patrones de interacción.

Tabla 1: Estructura de las tres fases del episodio *Luz diurna*

Fase	Segmento	La naturaleza de la actividad	
		Ari	Gur
Precompromiso Solucionar individualmente	[1]-[13]	Resuelve	Resuelve
Compromiso Argumentar/explicar	[14]-[37]	Argumenta en contra de la solución de Gur y presenta su propia solución	Insiste en su solución
Ruptura del compromiso	[38]-[49]	Escribe su respuesta; comienza a resolver el siguiente problema	Sigue insistiendo en su solución

En esta sección nos centramos en el episodio *Luz diurna* (véanse Figuras 1 y 2). Antes de comenzar nuestro análisis disciplinado y detallado del evento, es preciso advertir que la conversación breve se puede dividir en tres fases distintas de acuerdo con la intensidad y la naturaleza de la interacción. El episodio comienza con la fase de *precompromiso*, en la que ambos muchachos parecen ensimismados en sus propios pensamientos y no se preocupan por el intercambio con el compañero; luego sigue el período de *compromiso*, en el que los estudiantes entablan una conversación vívida acerca de sus soluciones; y termina con la *ruptura del compromiso*, fase en la que se escriben las respuestas y se hace la transición al siguiente problema de la hoja de trabajo (véase resumen en la Tabla 1).

¿QUÉ ES EL ANÁLISIS FOCAL?

A medida que nos aproximamos al análisis detallado del intercambio de Ari y Gur, nuestra primera tarea es ser más explícitas en cuanto a las características del discurso que pueden servir como indicadores de su eficacia o la ausencia de ésta. Permítasenos poner en práctica el consejo dado al lector: hagamos una mirada directa y sin prejuicios al protocolo. De acuerdo con el principio de “eficacia por defecto” presentado con anterioridad, deberíamos buscar signos “negativos” en vez de “positivos”, es decir claves de comunicación fallida.

Como se puede ver, no toma mucho tiempo detectar dichas claves. Las primeras señales de una mala comunicación aparecen en las verbalizaciones [11] y [12], cuando los dos jóvenes proponen respuestas diferentes a las preguntas que se les formularon. Esto es lo que activa la discusión e inicia la fase de compromiso. El hecho de que la conversación ascienda de manera inmediata al metanivel y se convierta en una mezcla de conversación en el nivel de los objetos, y “discurso acerca del discurso” (véase la verbalización de Ari “¿De qué está hablando?” en [14]) indica que los interlocutores son conscientes del problema. Pronto llega a ser igualmente claro que no son capaces de hacer mucho al respecto (véase [38]) y la conversación termina sin que haya acuerdo alguno.

Podemos concluir que Ari y Gur tienen un problema general de comunicación, que se manifiesta en el nivel de los objetos y en el metanivel. Nuestra próxima pregunta es más ambiciosa. Ahora nos gustaría saber más acerca de las razones de la dificultad. Esto nos obliga a profundizar en el asunto de la eficacia de la comunicación. Como se discutió en la sección anterior, la eficacia de un intercambio significa que todos los participantes en el mismo ven que sus expectativas son satisfechas por los interlocutores. La expectativa metadiscursiva más fundamental de un hablante es que la conversación sea *coherente*, es decir que el interlocutor se refiera en su respuesta a la misma cosa de la que ha hablado el hablante. Así, la eficacia se puede presentar como dependiente del grado de claridad del *foco discursivo*: la comunicación no se puede considerar eficaz a menos que, en un momento dado, todos los participantes parezcan saber de qué objetos están hablando y se sientan confiados en que todas las partes involucradas se refieren a los mismos objetos cuando usan las mismas palabras. Veamos el intercambio de Ari y Gur para determinar si cumple con esta condición. Concentremos nuestra atención en el segmento [17]-[21], en el que luego de la pregunta de Ari, “¿De qué está hablando?” [14], los muchachos tratan de comparar sus respectivos focos por sí mismos.

¿Están Ari y Gur hablando del mismo objeto aquí? No parece ser el caso: tienen opiniones diametralmente opuestas acerca de las características de sus

focos (“Éste cambió lo más rápido de aquí a aquí” dice Gur en [17]); “Éste es exactamente lo mismo”, responde Ari en [18]). Si así fuera, ¿entonces de qué está hablando cada uno? Usualmente, este tipo de pregunta se puede responder identificando el nombre del objeto que los interlocutores están pronunciando (e.g., “*el sombrero de Dina* es bonito”) o señalando lo que están mirando mientras hablan (en el caso del sombrero, probablemente sea un pedazo de tela que está sobre la cabeza de Dina). Pero esta vez, no. En este caso, los muchachos se refieren a los objetos de su conversación con el pronombre “éste” (véanse, e.g., [17]-[21]) y, a pesar de la evidente controversia, parecen estar mirando las mismas partes del gráfico. Si las cosas dichas y las imágenes inspeccionadas hubieran sido los únicos ingredientes del foco discursivo, los muchachos tendrían que haber llegado a un completo acuerdo. Por el contrario, la controversia persiste y esto quiere decir que con respecto a los objetos, de los que están hablando, hay algo más de lo que se oye y se ve. En efecto, la pregunta formulada a los estudiantes no se refiere al gráfico en sí, sino más bien a los números de horas de luz diurna, a las tasas de aumento, a los períodos de cambio más rápido, etc. El pronombre usado en las verbalizaciones sucesivas se debe interpretar como si se refiriera, de una u otra forma, al número de horas de luz diurna. Por consiguiente, además de lo *locutivo* (el pronombre) y de lo *perlocutivo* (el gráfico), también hay una entidad intangible, la *ilocutiva*, a la que al parecer los interlocutores se refieren. Como a simple vista los dos primeros ingredientes focales parecen ser los mismos para los dos muchachos, el tercero, es decir el ilocutivo, debe ser la fuente de controversia.

Permítasenos tratar de imaginar los focos ilocutivos de Ari y Gur. Esta no es, en manera alguna, una tarea fácil, puesto que estamos hablando de aspectos esencialmente *privados* de la actividad de los muchachos, es decir, de aspectos a los que no se tiene acceso desde el “exterior” y no pueden ser comparados. No obstante, una vez que estemos de acuerdo con respecto al *estatus interpretativo* de nuestras afirmaciones (véase el final de esta sección para un análisis más detallado), podremos lanzar una conjetura acerca de las intenciones que llevaron a los muchachos a comportarse de la manera en que lo hicieron. En lo que concierne a Ari, la tarea es relativamente sencilla: parece que al decir “Desde el día 60 hasta el cien” (véanse [7], [12]), quiere expresar exactamente lo

indicios evidentes de lo contrario (p. 51). Para más elaboración, véase Sfard (2000b).

12 No importa que la respuesta de Ari no sea precisa; teniendo en cuenta todo lo que dice es evidente que está buscando las partes más empinadas del gráfico. Por cierto, el muchacho parece estar cerca de la solución precisa en [34], donde menciona el número 90, uno de los que debe ser usado como límite inferior del “período de crecimiento más rápido”. Sin

que se le pidió que encontrara: el período de tiempo durante el cual el número de horas de luz diurna en Alert aumenta más rápidamente¹². Este *período de tiempo* específico es, por lo tanto, su foco ilocutivo, foco que mantiene en mente mientras explora el gráfico. Interpretar las intenciones de Gur resulta más difícil. A pesar de la elocuencia y la notoria gesticulación de Gur, no es fácil interpretar su elección de la meseta alta de la gráfica (el segmento que va desde $x = 100$ hasta $x = 250$) como un foco perlocutivo. Dejemos estas preguntas abiertas por un momento y pensemos en la naturaleza de la dificultad que estamos enfrentando como intérpretes.

La mejor manera de comprender la complejidad especial del presente caso es comparándolo con uno más simple. Tal ejemplo debe provenir de un intercambio cotidiano, en el que los interlocutores discuten sobre objetos materiales conocidos y, quizá, también pueden examinarlos mientras hablan. De hecho, permítasenos imaginar que Ari y Gur hablan acerca de un sombrero y no sobre el tiempo:

Ari: El sombrero de Dina es bonito.
Gur: Pienso que éste es más bien feo.

Uno se puede preguntar si en este caso también es relevante hablar de un foco *ilocutivo* como algo diferente, en alguna forma, de lo que en realidad recibe atención. La respuesta es un sí rotundo: aun cuando la conversación sea acerca de objetos materiales, hay algo más con respecto al foco de lo que se puede ver u oír. Es gracias al foco ilocutivo que los interlocutores saben qué decir o hacia dónde mirar. Así, cuando Ari habla del sombrero de Dina, Gur sabe cómo interpretar las intenciones de su compañero gracias a su experiencia previa con objetos llamados sombreros. Es por su foco ilocutivo, evocado por el foco locutivo de Ari, que Gur sabe que debe mirar hacia arriba y no hacia abajo, tratando de localizar un objeto en la cabeza de Dina. Las intenciones de Gur son también lo suficientemente claras como para hacerlo distinguir sin dificultad entre el sombrero y otros objetos que pueden verse en la cabeza de Dina (como una cinta, una peineta o incluso el mismo pelo de Dina). De manera breve, cualquiera sea el discurso y cualquiera sea la naturaleza de sus objetos, el foco ilocutivo es más que una imagen que uno pueda ver o imaginar.

Para resumir, se puede definir el foco discursivo como un constructo teórico tripartito. El elemento focal *locutivo* es público. El componente *ilocutivo*, que se puede describir como un conglomerado de experiencias evocadas por los otros componentes focales más todas las enunciaciones que una persona es capaz de

hacer sobre el ente en cuestión, es principalmente privado. Usando una metáfora matemática, se puede decir que el foco ilocutivo es un gradiente que dirige el foco locutivo dado hacia sus usos discursivos futuros. El foco *perlocutivo*, compuesto no sólo de la imagen que una persona puede percibir (o imaginar), sino también del procedimiento de atención que ella está llevando a cabo mientras escruta tal imagen, es el mediador entre los otros dos componentes. Dado que el foco perlocutivo con frecuencia se puede hacer explícito, la traducción de lo privado a lo público y viceversa —la actividad que constituye la esencia de la comunicación— se vuelve posible.

Los ejemplos vistos previamente muestran que la eficacia de la comunicación depende primordialmente del foco ilocutivo. Sin embargo, al ser éste predominantemente privado resulta poco plausible como materia de comparación. La solución a este dilema se puede encontrar, una vez más, en la idea de interpretación. Interpretar es una actividad natural, desarrollada por todos los seres humanos de una manera instintiva al oír pronunciar palabras. Las verbalizaciones de los hablantes y sus gestos traen a la mente del oyente *sus propios* focos ilocutivos que se acomodan a dichas verbalizaciones y gestos en particular. Esto significa que la propia evaluación de la coherencia comunicativa, realizada al participar en una conversación o simplemente al escucharla, *no implica comparar los focos ilocutivos de los diferentes interlocutores*. Aun si decimos que “la persona A tiene un foco ilocutivo diferente al de la persona B” (como es probable que nos pase, al no poder escapar del dictamen del modelo tradicional de comunicación) estaríamos, en realidad, comparando *nuestros propios* focos ilocutivos evocados por el de A y el de B. Por lo tanto, cualquiera que sea nuestro veredicto con respecto a la coherencia y a la eficacia de una instancia dada de comunicación, siempre debe ser visto simplemente como la mejor hipótesis que somos capaces de producir hasta ese momento.

ANÁLISIS FOCAL DEL EPISODIO *LUZ DIURNA*

Una vez provistos del concepto de foco discursivo, ahora podemos volver al análisis de la conversación de Ari y Gur. Mientras miran el gráfico, los muchachos deben hablar sobre el número de horas de luz diurna, las tasas de aumento, los períodos de cambio más rápidos, etc., todo lo cual pertenece al lejano pueblo norteño, Alert. A nada de lo anterior se puede tener acceso en forma directa. En verdad, esto también ocurriría en el último ejemplo si el sombrero de Dina no estuviera a la vista de los interlocutores. La presente situación es bastante diferente ya que hacer cualquier comparación *directa* de la cantidad de luz

diurna entre los diferentes días del año es generalmente imposible, sea que la persona viva lejos de Alert o en el pueblo mismo. Tales comparaciones sólo se pueden hacer gracias a la ayuda de artefactos mediadores. El principal papel de los dispositivos simbólicos, como el gráfico en la Figura 1, es superar la extensión en el tiempo, haciendo constantemente presente lo transitorio y, al mismo tiempo, proporcionando medios de comunicación tangibles sobre el fenómeno en cuestión. En este episodio, el gráfico comprime largas horas de luz diurna de un día cualquiera en un solo punto, y ofrece la posibilidad de ver las cantidades medidas en días diferentes como si coexistieran en una sola línea. En esta curva, los períodos existentes de luz diurna son atrapados simultáneamente dentro de un todo atemporal, formado por los diferentes componentes que pueden ocupar distintos lugares en el espacio, pero no en el tiempo¹³.

En resumen, los recursos simbólicos son nuestra única forma de acceso al foco de la presente conversación, el “período de más rápido aumento” (y esto difiere mucho del caso de un sombrero que también se puede tocar, oler, jugar con él, etc.). Además, a diferencia del caso del sombrero de Dina, el gráfico se presta a una gran variedad de interpretaciones y permite el acceso a numerosos focos ilocutivos de estratos diferentes. Así, por ejemplo, un punto en un gráfico puede ser observado simplemente como tal —como una pequeña marca sobre el papel, o como la representación de un par de números, x y y . A su vez, los números pueden ser tomados como objetos matemáticos abstractos, o como representaciones de un día del año y de la longitud del período de luz diurna durante ese día, respectivamente. Además, es fácil dar una nueva interpretación al gráfico en la cual los números representen algo totalmente diferente, como por ejemplo nuestras cuentas bancarias (sería mucho más difícil reinterpretar de otra manera la figura del sombrero; sin embargo, Antoine de Saint-Exupéry, 1945/1992, en *El Principito* demostró que ¡no es imposible hacerlo!). Las actividades con el gráfico se pueden concebir como la activación o suspensión inter-

embargo, en [38] este número vuelve a ser 60.

13 A pesar de que decimos que el gráfico es una *representación* de estos objetos (la longitud de los períodos de luz diurna, el aumento en la longitud de ellos, etc.), los objetos en sí mismos no existirían sin su presencia (o la de cualquier otro símbolo que pertenezca a un sistema simbólico isomorfo). Nótese que en el presente contexto la palabra *existir* se refiere al hecho de que se puede pensar sobre el objeto y hablar de él, y a lo mejor verlo como algo que es, en cierto modo, externo e independiente a nuestro pensamiento y a la referencia que a él se haga.

14 El concepto de “cadena de significación”, ampliamente estudiado (con nombres

mitente de sus diferentes funciones de significación. Los movimientos de vaivén a lo largo de “la cadena de significación”¹⁴ por lo general son rápidos y naturales y muy pocas veces somos conscientes de ellos. Por otro lado, estos estratos de significación son una fuente infalible de dificultades comunicativas (por ejemplo, piénsese en los numerosos focos ilocutivos ocultos en el pronombre “éste” de la verbalización [20] de Ari: “Éste va hacia arriba lo más rápido”).

Retomemos nuestro intento de averiguar el foco ilocutivo de Gur. Mientras parece que Ari no tiene dificultades en zigzaguear a lo largo de la cadena de entidades conceptuales que conectan el fenómeno natural con el gráfico, se observa que Gur es claramente incapaz de alcanzar estratos más profundos de la significación. Parece que el foco ilocutivo de Gur permanece todo el tiempo en el estrato más superficial. Es evidente que el muchacho toma las palabras que aparecen en el texto del problema (“aumentó”, “rápidamente”) como si se refirieran a las propiedades del gráfico mismo. Vygotsky (1978) afirmaría que Gur aún “está atrapado en su campo de visión”. Como resultado, mientras Ari se

Tabla 2: Focos tripartitos de Ari y Gur

Canal privado de Gur			Canal privado de Ari		
Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo	Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo
[17] <i>Éste</i> cambió lo más rápido <i>de aquí a aquí</i>	El gráfico La parte horizontal superior del gráfico	El gráfico La parte del gráfico en la que el cambio en la forma es más extremo			
			[18] <i>Éste</i> es exactamente lo mismo	La <i>altura</i> de la meseta extrema del gráfico	El número de horas de luz diurna entre $x = 100$ y $x = 250$
[19] <i>Éste</i> se mueve hacia arriba	La parte no horizontal del gráfico (antes de la meseta)	La parte no horizontal (“cambiante”) del gráfico			
			[20] <i>Éste</i> va hacia arriba lo más rápido	La <i>altura</i> de la parte empinada del gráfico	El número de horas de luz diurna entre $x = 60$ y $x = 100$

diferentes) por los prominentes semiólogos Peirce y Lacan, fue explicado y ejemplificado por Walkerdine (1988) y por Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain y Whitenack (1997).

15 Es significativo que en cierto punto, verbalización [17], Gur sustituya el término original

concentra, como habría de esperarse, en el número de horas de luz diurna y el crecimiento más rápido en este número, Gur, quien no posee otro foco ilocutivo diferente al gráfico mismo, no tiene otra opción que intentar aplicar los términos “aumento” y “cambio”¹⁵ al gráfico para interpretarlos como propiedades de éste. Además, ya que el gráfico es un objeto estable, Gur tiene dificultades con la palabra “rápidamente”, la cual sólo tiene sentido dentro del contexto de un proceso. Una forma de explicar su elección de la meseta más alta del gráfico es que, confinado al contexto de la línea que no representa ninguna otra cosa, él interpreta las palabras “aumentó más rápidamente” como si simplemente se refiriesen al cambio más *extremo* en la forma del gráfico.

La Tabla 2 nos permite seguir el curso del flujo del foco a lo largo de los diferentes canales. Esta representación resalta la diferencia entre los focos ilocutivos de los muchachos. Además deja claro que, aunque los muchachos aparentemente están observando las mismas partes del gráfico desde el principio, sus focos perlocutivos posiblemente no son los mismos (la parte perlocutiva no permanece igual de una verbalización a otra, pero gracias a los gestos elocuentes de Gur, Ari puede hacerle seguimiento a los “cambios” y “zums” de su compañero). Parece que cada uno de ellos mira el gráfico a su manera. Mientras que Gur considera el gráfico o sus partes como formas que no se pueden descomponer, Ari enfoca su atención en aspectos selectivos tales como la *altura* de una porción dada de la línea¹⁶.

Con base en todo lo expuesto hasta el momento, es obvio que la conversación entre Ari y Gur puede ser descrita como *incoherente*: los focos discursivos de los interlocutores no encajan el uno en el otro, por lo menos a lo largo del eje del foco ilocutivo, así como tampoco en el eje del foco perlocutivo. En realidad, los muchachos discuten simplemente porque, aunque están mirando en la misma dirección, no están viendo lo mismo. Es claro que la incoherencia es una de

“aumento” por la palabra “cambio” (“cambio” no aparece en el enunciado de la pregunta 3 del problema). Parece que la palabra “cambio” es mucho más fácil de interpretar cuando se refiere al gráfico. En realidad, no es evidente lo que pueda significar “aumento” respecto a una figura en posición horizontal.

16 La distinción entre las dos maneras de ver la gráfica es reminiscente de la diferencia entre el pensamiento “visual” y “analítico” (Kieran, Hillel y Erlwanger, 1986) y de sus niveles en el modelo de van Hiele (van Hiele, 1985; Clements y Battista, 1992).

17 Levinson (1983) explica por qué debemos mantener presente esta hipótesis si deseamos sacar el mejor partido a la comunicación. Por ejemplo, cuando le preguntamos a alguien “¿Puedes reunirte conmigo hoy?” y la otra persona responde “Estoy enfermo”, no seríamos capaces de comprender la respuesta sin suponer que nuestro compañero, así como nosotros mismos, se refiere a un posible encuentro a pesar de que en su respuesta no hay indicio explícito de esto. La hipótesis de relevancia (véase la máxima de relevancia

esas características que hace que la comunicación no sea eficaz, en particular si los interlocutores no la reconocen. Así, a primera vista, uno siempre debería en cierto modo dudar de sus propias interpretaciones de los focos ilocutivos provenientes de otros interlocutores y estar alerta ante la posibilidad de que estas interpretaciones puedan, de hecho, ser incompatibles con las realizadas por otras personas. Sin embargo, como lo han señalado otros escritores, suponer la coherencia al hablar es una condición de la comunicación (Grice, 1975; Levinson, 1983). En efecto, muy a menudo seríamos incapaces de entender las respuestas dadas por nuestros interlocutores, si no creyéramos que se refieren al mismo asunto. Por eso es que la gente habitualmente es renuente a admitir la disparidad de los focos, incluso en aquellos casos en que se presenta la más marcada controversia¹⁷.

Entonces, no es sorprendente que Gur y Ari gasten un buen rato sencillamente contradiciéndose el uno al otro antes de que Ari por fin haga el intento de ser más explícito con respecto a su foco ilocutivo. Evidentemente, al sospechar que Gur no interpreta el gráfico en forma adecuada, Ari de manera enfática trae a colación el motivo subyacente al tiempo (véanse [28] y [30])¹⁸. No obstante, este intento resulta poco fructífero. Parece que el fracaso se debe a dos errores de táctica. En primer lugar, ambos, Gur y Ari hicieron un uso amplio del “sujeto tácito de la oración” y nunca intentaron llamar al objeto de su atención por su propio nombre. En segunda instancia, ninguno de los dos es verdaderamente explícito respecto a su foco perlocutivo. Lo que no se había podido lograr con el foco locutivo, se podría haber obtenido con la ayuda del foco perlocutivo.

de Grice, 1975, p. 107) es necesaria si queremos eliminar los vacíos entre las verbalizaciones adyacentes dentro de una conversación.

18 En [28] Ari usa el foco locutivo ‘tiempo’ mientras que su foco ilocutivo es evidentemente el *número de horas de luz diurna por día*. Esta parece ser la única interpretación factible, en la medida en que él habla de la necesidad de considerar los “cambios rápidos” de este “tiempo”. En su siguiente verbalización, [30], utilizando la misma palabra “tiempo”, Ari cambia el foco ilocutivo (¿se retracta?); en este caso, el foco ilocutivo es lo que debería ser: *momento del año*

¿Por qué no se comunican? Análisis preocupacional del encuentro inicial de Gur y Ari

UNAS POCAS PALABRAS SOBRE EL CONCEPTO DE *PREOCUPACIÓN*

A través del análisis focal sistemático del intercambio entre Ari y Gur observamos que tal intercambio fue poco exitoso por partida doble: los muchachos fracasaron al comunicarse y también en su intento por superar esta situación. En esta sección intentaremos profundizar en las posibles fuentes de esta doble dificultad.

Existe un gran número de posibles razones de por qué la gente puede fracasar al actuar de acuerdo con las intenciones de sus interlocutores y, en particular, de por qué interpreta los focos discursivos de otras personas en formas inútiles. Si realmente la comunicación ha de tener alguna posibilidad de éxito, es necesario seguir ciertas normas tácitas de interacción. En efecto, las formas en que las personas se comunican con otras, aun cuando no sean del todo predecibles, están sin embargo muy lejos de ser arbitrarias. Las secuencias de movimientos de quienes interactúan están sujetas a una gama amplia de requisitos, muchos de los cuales son independientes de los contenidos reales de un intercambio. Muchos autores han hablado extensamente de las diferentes clases de normas metadiscursivas que hacen posible la comunicación y garantizan su eficacia¹⁹. Así, por ejemplo, Gadamer (1975) acuñó el término *verdadera conversación* y la definió como aquella en que “cada uno se muestra como es, acepta de verdad que vale la pena considerar el otro punto de vista” (p. 347). Dicha actitud, de hecho, aumenta las posibilidades de un foco discursivo compartido. En el intento de ser mucho más explícito, Grice (1975) formuló el *principio cooperativo* y un buen número de *máximas conversacionales* generales (de *cantidad*, de *calidad*, de *relación* y de *modo*) que la gente parece obedecer instintivamente para comunicarse²⁰. Goffman (1967) presentó una perspectiva más bien diferente aunque no relacionada, y dedicó especial atención al caso de la interacción fallida. Este último término (interacción fallida) se refiere a aquellas interacciones en las que los participantes no cumplen con sus obligaciones discursivas y por

(período) durante el cual el número de horas de luz diurna cambia más rápido. Su confusión momentánea posiblemente se deba a que la palabra *tiempo* tiene dos significados en estos enunciados y puede ser medido en días sobre el eje x, y en horas sobre el eje y.

19 Estas reglas de la conversación son un arma de doble filo. En primer lugar, hacen posible la comunicación, pero también limitan las interacciones de una manera significativa. Véanse Wittgenstein (1953) respecto al *seguimiento*

ende fracasan al seguir el “ritual de la interacción”. Goffman pone en primer plano como la principal razón de tal fracaso, a la preocupación de los interlocutores en asuntos diferentes al tema sobre el que trata la conversación en el nivel de los objetos. El hecho de no cumplir con el “ritual” no significa que se impida el discurso, sino que el incumplimiento tiende a disminuir en gran manera la posibilidad del foco coordinado y así, mina en forma significativa la eficacia de la comunicación. A diferencia de Goffman, quien se preocupa por la ofensa que resulta de la violación de las reglas, estudiaremos en este capítulo el siguiente elemento en la cadena de efectos —el impacto de la interacción fallida en los aspectos cognitivos de esta historia. Debido a su importancia central en el tema de la eficacia de la comunicación, el concepto de *preocupación* merece ser desarrollado cuidadosamente.

Recordemos que se definió la comunicación como el intento de hacer que otras personas actúen o reaccionen de acuerdo con nuestras intenciones. Es importante enfatizar aquí que existen dos tipos de propósitos que pueden generar intenciones discursivas locales. En primer lugar, hay propósitos manifiestos de una actividad dada que producen intenciones manifiestas en el nivel de los objetos (cognitivas). En el caso del discurso matemático de la escuela, se puede dar que un estudiante tenga un propósito inmediato en el nivel de los objetos al resolver un problema matemático que, a su vez, está enmarcado dentro del propósito a largo plazo de aprender más matemáticas. Algunos aspectos de estas intenciones se han analizado ya con la ayuda del análisis focal. El otro tipo de propósitos, generalmente menos visible aunque no menos influyente, se relaciona con diversos aspectos de la interacción misma. Esta última categoría denominada *meta-discursiva* o de *metanivel*, es amplia y variada; e incluye, por un lado, las preocupaciones de los interlocutores por la forma como se maneja la interacción, y por otra parte, los asuntos, determinantes y en ocasiones bastante densos, que conciernen a la relación entre interlocutores. Después de todo, cada instancia de comunicación es una oportunidad para negociar otra vez la posición recíproca de los interlocutores y sus identidades respectivas (esto se aplica mucho más a una conversación entre varias personas que a un “discurso interior” de una persona, es decir al proceso de pensamiento). Muy a menudo los participantes usan diferentes recursos para comunicar los propósitos en el nivel de los objetos y en el metanivel. Aunque los primeros se expresan mejor de manera explícita, los últimos tienden a residir en las formas de las verbalizaciones y en los mecanismos de interacción más que en sus contenidos explícitos. Debido a la naturaleza predominantemente encubierta de los mensajes interpersonales, las intenciones metadiscursivas que se comunican por medio del discurso seguirán siendo ocultas, aun para aquellos a quienes afectan. En nuestro análisis

tenemos que ser cautelosos ante la posibilidad de cometer el error de tomar los contenidos y los focos de la comunicación en su sentido literal.

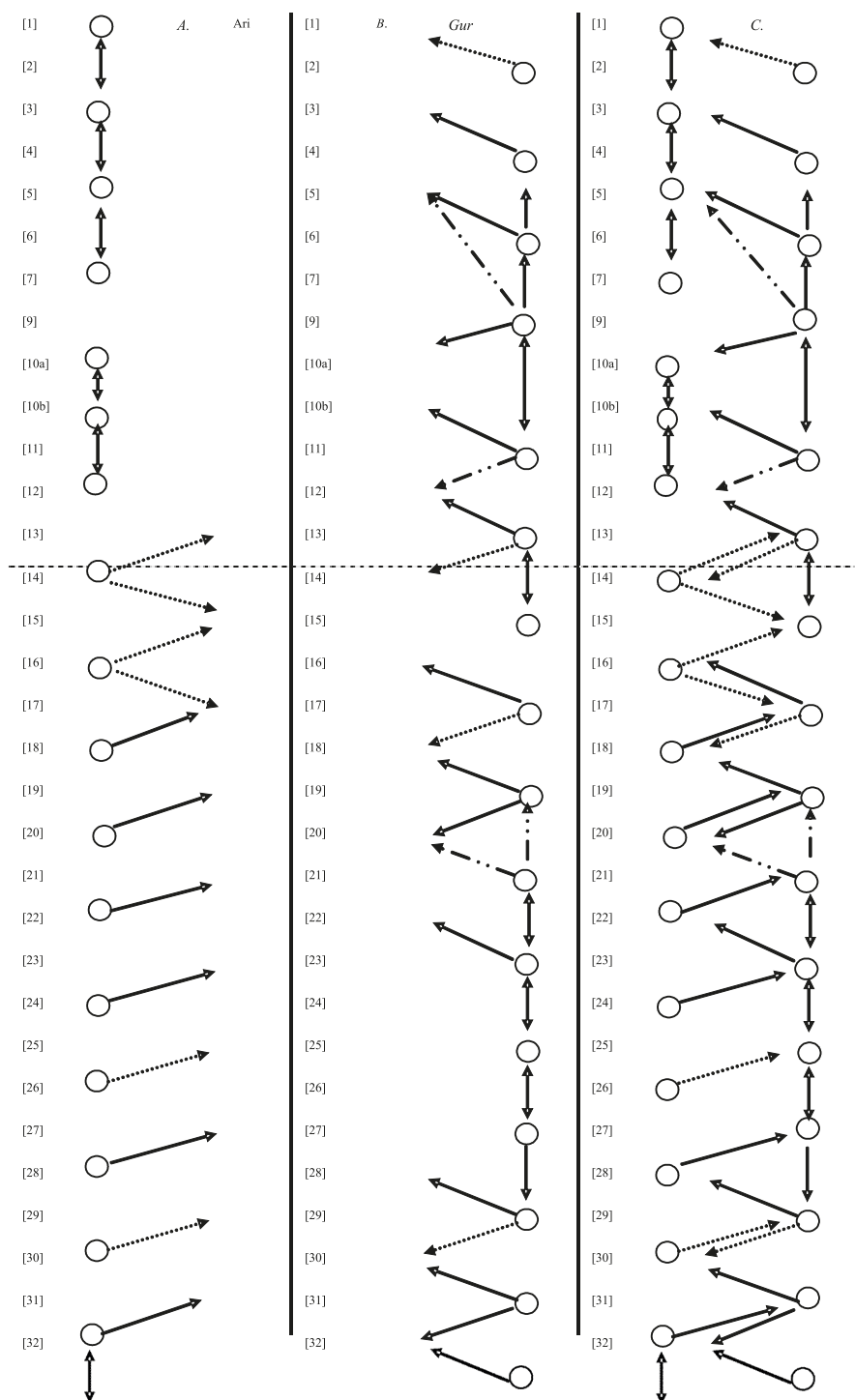
Las dos categorías de intenciones discursivas, en el nivel de los objetos y en el metanivel, parecen no estar relacionadas y, a primera vista, las últimas podrían dejarse de lado cuando se investiga el aspecto cognitivo del aprendizaje. En efecto, hay una tensión constante entre estos dos tipos de intenciones, sólo por el simple hecho de que compiten por ser el foco. La comunicación interpersonal es un fenómeno particularmente complejo puesto que en un momento dado cada participante se involucra de manera simultánea en varias tareas del nivel de los objetos y del metanivel: tratar de comprender los contenidos explícitos de verbalizaciones previas y producir nuevas verbalizaciones, monitorear la interacción, presentarse ante los otros como la persona que se quiere que ellos vean, gestionar la propia posición dentro de un grupo dado, etc. Puesto que se deben atender simultáneamente todas estas diferentes preocupaciones, parece un milagro que la gente logre la tarea de comunicarse en alguna ocasión.

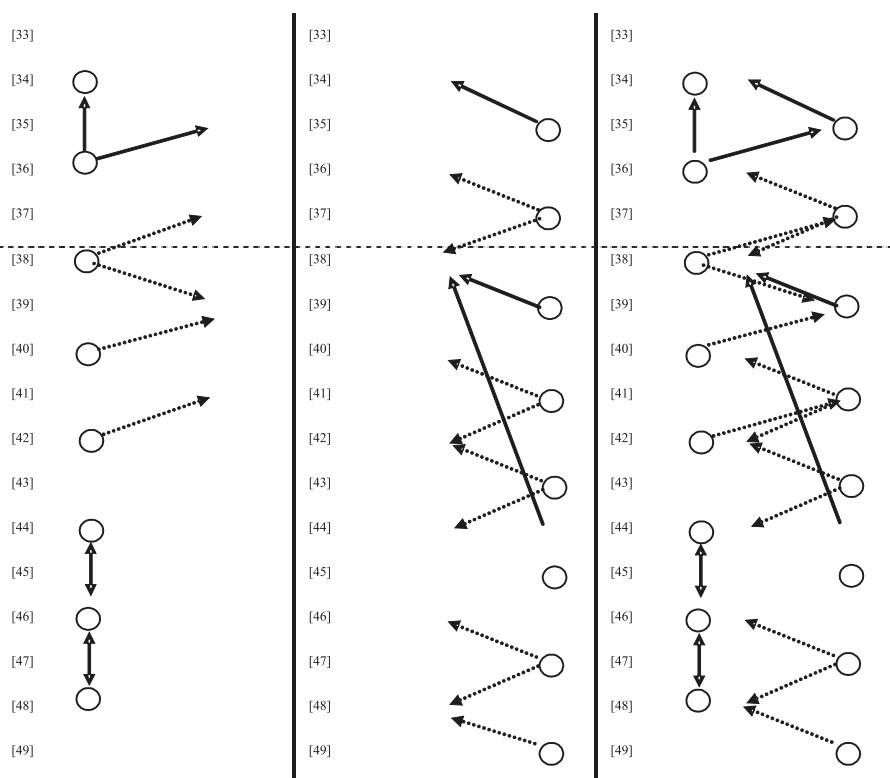
Así, a medida que el discurso evoluciona, su foco —y la atención de los participantes— se mueve entre canales —entre la propia línea de pensamiento de una persona y las de sus compañeros; y también se desplaza constantemente entre los niveles discursivos— entre el objeto explícito del discurso y las consideraciones metadiscursivas. Si la comunicación ha de ser eficaz, la navegación focal se debe hacer de manera fluida, reservando los recursos intelectuales de los interlocutores para la tarea principal, la del nivel de los objetos. En lo que resta de esta sección trataremos de determinar si el intercambio entre Ari y Gur cumplió con todas estas condiciones.

¿QUÉ ES EL ANÁLISIS PREOCUPACIONAL?

El análisis focal que examina minuciosamente las acciones discursivas de los interlocutores, ocurridas en el nivel de los objetos, se completará ahora con el

Figura 4: Diagrama de flujo de la interacción en el Episodio *Luz diurna*





análisis preocupacional que atiende las preguntas acerca de cómo los participantes de una conversación se mueven entre diferentes canales de comunicación (privado, interpersonal) y en diferentes niveles (de los objetos y metadiscursivo). En esta sección empezamos con el interrogante sobre cómo Ari y Gur regularon el grado de actividad individual e interpersonal. Luego usamos los hallazgos para hacer conjeturas sobre los contenidos del nivel metadiscursivo de la conversación, es decir de las intenciones de los dos interlocutores que tienen que ver con el discurso mismo y con asuntos interpersonales más que con el tema explícito del intercambio. Por ejemplo, es razonable esperar que en la fase de precompromiso los estudiantes manifestaran el uno al otro por medio de signos no verbales su deseo de trabajar solos por un rato, en tanto que la fase de compromiso del discurso transmitía, en el nivel metadiscursivo, un mensaje

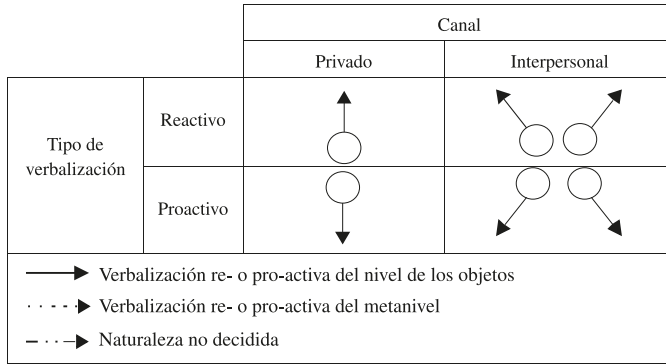
de normas, y también Griffin y Mehan (1981); Goffman (1967, 1981, 1986); Cazden (1988); Garfinkel (1967); Quine (1960); Voigt (1985, 1994, 1995); Cobb, Wood y Yackel (1993).

opuesto. Nuestra herramienta principal en este tipo de análisis será el *diagrama de flujo de interactividad*. Con la ayuda de este instrumento especial podremos evaluar el interés de los interlocutores por activar diferentes canales y por crear un verdadero diálogo con sus compañeros. Esperamos que esta información, a su vez, nos permita hacer conjeturas sobre los asuntos que preocupaban a los interlocutores.

Análisis de interactividad. Puesto que las verbalizaciones de los individuos, bien sean audibles y públicas o silenciosas y privadas, se producen para satisfacer el propósito comunicativo, nunca son eventos independientes o aislados. La comunicación es un proceso en el que cualquier acción particular siempre significa *dirigirse* a alguien o *reaccionar* ante verbalizaciones que alguien produjo, o ambas cosas. Esto es cierto aun cuando todo lo que oigamos o leamos sea una sola oración²¹. En este capítulo hablaremos de verbalizaciones *reactivas* y *proactivas* (que invitan a la respuesta), para distinguir así entre los dos tipos de intenciones metadiscursivas del hablante: el deseo de reaccionar ante el aporte de un compañero o el deseo de evocar una respuesta en otro interlocutor. Por consiguiente, podemos considerar que las verbalizaciones consecutivas en un discurso están dotadas de flechas invisibles que las relacionan con otras verbalizaciones —aquellas que ya han sido pronunciadas y las que están por producirse. Estas flechas son nuestra metáfora para las intenciones del nivel metadiscursivo de un hablante, que se comunican de manera indirecta. Cuando se dirige a sus compañeros, el hablante les permite entender que está interesado en interactuar.

La organización de estas flechas invisibles en una conversación a menudo revela ciertas regularidades. Las formas recurrentes de comportamientos reactivos y proactivos, a su vez, pueden ayudar a determinar si los interlocutores se están dirigiendo en verdad a sus compañeros o de hecho se están concentrando en una “conversación consigo mismos”. En este capítulo, el análisis de la interacción se llevará a cabo por medio de un diagrama en el que las flechas imaginarias mencionadas se vuelven visibles. A continuación vamos a hablar un poco de la construcción de los diagramas de flujo de tal interacción. A medida que se revisan las explicaciones, se le aconseja al lector que observe el ejemplo de la Figura 4 y el resumen del método en la Figura 5.

Figura 5: Símbolos del diagrama de flujo de la interactividad



En el diagrama de flujo, los dos *canales personales*, concretamente las respectivas “partes” de los dos muchachos, se muestran en las columnas A y B. Los canales combinados se presentan en la columna C. Los números que están señalando los círculos pequeños corresponden a la enumeración de las verbalizaciones en la transcripción del episodio (a veces dividimos una verbalización en varias partes y las enumeramos con las letras *a, b, c...*). Como se puede ver en la Figura 4, hay dos tipos de flechas que se originan en las diferentes verbalizaciones:

1. Flecha *reactiva*: es una flecha que apunta vertical o diagonalmente, hacia atrás o hacia arriba; este tipo de flecha expresa el hecho de que la verbalización de partida (en la que la flecha se origina) es una reacción a la verbalización en cuestión (a la que está apuntando).

2. Flecha *proactiva*: es una flecha que apunta vertical o diagonalmente, hacia adelante o hacia abajo; este tipo de flecha simboliza el hecho de que la verbalización de partida *invita* a una respuesta, por tanto, se espera que la siguiente verbalización sea una reacción. Nótese que se dibujará la flecha proactiva aun cuando la verbalización a la que apunte, resulte no estar, de hecho, relacionada con la verbalización de partida y por consiguiente no se pueda considerar como una reacción. En otras palabras, son las intenciones del hablante y no las de su compañero las que se deben tener en cuenta al decidir cuál es la naturaleza de la verbalización.

Ambos tipos de flechas pueden ir en el medio de dos canales privados; en otras palabras, pueden conectar verbalizaciones hechas por diferentes interlocutores. Éstas son las flechas *oblicuas*. Sin embargo, tanto las flechas proactivas como las reactivas pueden ser *verticales*, para conectar verbalizaciones localizadas en el mismo canal privado. En este último caso, la flecha refleja el hecho de que un interlocutor está llevando a cabo una conversación consigo mismo, o sea que reacciona a sus propios enunciados e invita a sus propias respuestas. Las

flechas *continuas* simbolizan verbalizaciones en el nivel de los objetos, mientras que las interacciones en el nivel metadiscursivo (nos referimos al discurso del metanivel —o metadiscurso— cuando el foco de una verbalización se centra en elementos discursivos y no en los objetos de las matemáticas) están indicadas con flechas *punteadas*. Con frecuencia dos clases de enunciados están “anidados” uno dentro del otro, pero la interacción en sí misma usualmente es de tipo “puro”, es decir, invita o reacciona, sólo uno de los dos componentes.

Antes de pasar a aplicar el método al episodio *Luz diurna*, tenemos que hacer dos comentarios generales sobre el análisis de la interacción. De acuerdo con la descripción anterior, al análisis de la interacción le conciernen dos preguntas: si en realidad los interlocutores unen fuerzas para controlar y moldear el discurso y, en caso tal, cómo lo hacen; qué tanto se interesan los interlocutores por asegurarse de la eficacia de su comunicación. Por consiguiente, al parecer, este tipo de análisis es independiente del contenido, es decir, está determinado por las relaciones dadas entre los participantes del discurso más que por la naturaleza de la tarea que ellos tienen entre manos. Pero, de hecho, para poder decidir si la naturaleza de una verbalización es proactiva o reactiva, se debe considerar su contenido así como los contenidos de las otras verbalizaciones de la cadena. Aunque es cierto que mientras analizamos la interacción nos interesamos por las intenciones metadiscursivas de los interlocutores, también es cierto que tales intenciones sólo se pueden identificar después de mirar el contenido (la ausencia de referencia directa al contenido en este tipo de análisis no significa que el cuadro resultante no sea también específico de un contenido en un nivel más general: podríamos conjeturar patrones muy diferentes de interacción si los muchachos estuvieran tratando otro tema). De igual manera, el análisis focal es, en cierto modo, dependiente de los resultados del análisis preocupacional. Así, aun cuando presentamos informes sobre los resultados de los dos tipos de análisis en orden serial, ninguno de ellos es autocontenido y ninguno se puede llevar a cabo con independencia del otro. Estas dos formas de considerar el discurso están inextricablemente interconectadas y sólo se puede obtener un cuadro confiable del proceso de aprendizaje después de poner los resultados de una de ellas en el contexto de los producidos por la otra.

En segundo lugar, dibujar un diagrama de flujo de interacción es, naturalmente, una tarea interpretativa así que es bastante posible que los cuadros obtenidos por analistas diferentes a veces difieran en unos cuantos detalles. A partir de nuestra experiencia, sin embargo, pudimos observar que los usuarios del método alcanzan un nivel considerable de consenso. Al preparar los diagramas de flujo que se presentan en la Figura 4, siempre que tuvimos duda sobre el estatus

interaccional exacto de una flecha (e.g., cuando no podíamos decidir si estaba dirigida al interlocutor o al hablante mismo), dibujamos una flecha *punteada*.

ANÁLISIS PREOCUPACIONAL DEL EPISODIO *LUZ DIURNA*

Análisis de interactividad. A partir de los diagramas de flujo que obtuvimos para el episodio *Luz diurna* (Figura 4) podemos ver claramente que los comportamientos interactivos de los dos muchachos tuvieron diferencias significativas. Las diferencias se hacen particularmente notorias al observar los dos diagramas de “un solo lado”, en la Figura 4, columnas A y B.

Comencemos por analizar las acciones comunicativas realizadas por Ari, en el metanivel. Debido a la forma desbalanceada de la columna A en la Figura 4, en general, queda la impresión de que Ari trata de evitar o, al menos, minimizar una verdadera interacción bidireccional con Gur. A continuación se presentan algunas características destacadas de su actividad discursiva que apuntan en esa dirección.

El diagrama de flujo de Ari empieza con un tramo integrado por verbalizaciones que se mueven dentro de su canal privado. Esta larga secuencia de continua conversación consigo mismo, correspondiente a la fase de precompromiso, muestra la preferencia de Ari por trabajar separadamente, al menos mientras puede llegar a la solución del problema. Este fenómeno se puede observar dos veces en el breve episodio —véanse los segmentos [1]-[12] y [44]-[49]. Algunas otras características del diagrama de flujo en la columna A de la Figura 4 apuntan en la misma dirección. Quizá la más sorprendente de ellas es la unidireccionalidad: mientras que hay algunas flechas reactivas, las proactivas son casi inexistentes (excepto en [14], [16] y [38]; nótese que todos son casos de verbalizaciones metadiscursivas en las que Ari trata de regular la interacción más que de evocar una conversación genuina en el nivel de los objetos). Incluso, en la fase de compromiso y evidentemente tratando de corregir la solución de Gur, Ari limita sus verbalizaciones a reacciones ante lo que dice Gur. Algunas veces simplemente presenta su punto de vista alternativo. Por lo tanto, se puede decir que el muchacho se abstiene de hacer verbalizaciones que inviten a dar respuestas, lo que evidencia su falta de interés en una interacción prolongada con su compañero. Resumiremos diciendo que esta conducta discursiva *carece de iniciativa*. Además, a pesar del predominio de verbalizaciones reactivas, el comportamiento de Ari también se puede describir como *indiferente*. De hecho, rara vez ofrece respuestas completas a las verbalizaciones proactivas de Gur. Con bastante frecuencia Ari sólo se dirige a Gur para expresar su desacuerdo. También es notorio que Ari es rápido, verdaderamente abrupto, para iniciar la fase

de ruptura del compromiso. Por eso en [40], después de un muy breve (y quizá, ¡no muy sincero!) intento de volver la conversación, a todas luces incoherente, al foco, se rinde y vuelca su atención sobre una nueva pregunta. También es inflexible al tomar la decisión de abandonar la conversación insulsa en vez de tratar de hacerla fluir de nuevo. Primero interrumpe la discusión diciendo que va a escribir su respuesta [40], luego ratifica este paso objetando la norma que requiere que todo el mundo tenga la misma respuesta [42], y finalmente pasa a la siguiente pregunta [44] e insiste en resolverla a pesar del intento de Gur por detenerlo [47], [49].

Ahora centrémonos en Gur (véase Figura 4, columna B). Darle una ojeada a las flechas que tienen origen en las verbalizaciones de Gur es suficiente para notar que el comportamiento interaccional del muchacho es, en cierto modo, totalmente opuesto al de su compañero. En efecto, este nuevo diagrama de flujo parece desintegrado en comparación con el otro, incluso en la fase de precompromiso. Es más, la actividad unidireccional de Ari se presenta como un contraste sorprendente con el comportamiento altamente interactivo y bidireccional de Gur, quien “bombardea” a su compañero con afirmaciones proactivas mostrando de esta manera una actitud de *iniciativa*. ¡La razón del número de verbalizaciones proactivas de Ari al respectivo número de Gur es de 3 a 11!. Al estar totalmente dispuesto a hablar y a escuchar, Gur tiene un arsenal de recursos para mantener el contacto y para incitar a responder. Además de su gran cantidad de ademanes y sus numerosos enunciados proactivos, Gur se caracteriza por una actitud muy *comprometida*. Sus recursos para señalar que está prestando atención a las verbalizaciones de su compañero son particularmente interesantes (“Woah” en [2]), así como los que utiliza para llamar la atención (“mire”, etc). Algunas de estas expresiones parecen no tener otro papel que el de dar a entender “lo escucho” e iniciar o mantener la fase de compromiso.

Las diferentes proporciones de las actividades de iniciación y reacción sugieren diversas necesidades, actitudes y expectativas de parte de los dos interlocutores. Para quienes estén interesados en la percepción que tienen los dos muchachos de su propia posición, la estructura interactiva del discurso es particularmente reveladora. La elocuencia, la gesticulación y el comportamiento, en general, altamente interactivo de Gur pueden crear la impresión de que

20 Véanse Levinson (1983) y Blum-Kulka (1997) con respecto a la crítica de esta teoría y los argumentos en contra de la crítica.

21 Compárense las afirmaciones de Bakhtin (1986) sobre las verbalizaciones para *dirigirse* y *reaccionar*, y su insistencia en que “no existe una verbalización aislada”

es él quien controla la conversación. Una observación más detallada revelará una apreciación diferente. Ari usa *técnicas de abstención y mimetismo en la interacción* para lograr que se tome su camino en el discurso. Estas técnicas en particular están bien ejemplificadas en la fase de ruptura, [38]-[49]. Ari es quien inicia este giro discursivo y parece realmente decidido a conseguir su propósito. Interrumpe cualquier intento de discusión sobre el problema que, una vez solucionado, pierde todo interés para él. Decide escribir su respuesta y continúa con la pregunta siguiente. Su técnica de ruptura es más bien poco cortés, aun cuando intenta mimetizar²² su impaciencia de diversas maneras (e.g., habla en un tono agradable y justifica sus movimientos con la “norma”: “Podemos tener diferentes respuestas” [42]). Gur, mucho más interesado que Ari en una verdadera comunicación, se encuentra en una posición algo inferior. La acción de ruptura de Ari, como muestra de su confianza en sí mismo y de una actitud algo condescendiente, hace que su compañero se percate irremediabilmente de su posición desventajosa. Para enfrentar la situación, Gur acude a la ayuda de variadas *técnicas para guardar las apariencias*²³. Así que Gur, después de reaccionar en forma espontánea a la afirmación hecha por Ari con la solicitud de una explicación ([43]: “¿Por qué?”), de inmediato reacciona, pone otra cara y dice “No me importa” [43]. Entonces, cuando Ari en forma desafiante continúa con la siguiente pregunta de la hoja de trabajo [44], Gur simula estar absorto aún en la pregunta anterior [45], y estar convencido aún de que tiene la razón (aunque posiblemente la verdad es que tenga duda de ello). Finalmente, cuando en [44]-[48] Ari en una actitud terca se aferra a su canal privado y hace de cuenta que Gur no está presente, este último a su vez, con el tiempo se rinde y lo expresa ofreciéndole a Ari el “amigable” consejo (“Le estoy diciendo, cámbielo”) y concluye con “De todas maneras, no importa” [49].

Podemos resumir diciendo que mientras Gur está evidentemente mucho más preocupado por su posición en el discurso y por tanto está interesado en una interacción genuina bidireccional, Ari preferiría que lo dejaran solo. En otras palabras, Ari está principalmente preocupado por asuntos del nivel de los objetos (resolver el problema matemático) mientras que Gur dirige su atención a la interacción en sí. Las respectivas preocupaciones de los dos muchachos están destinadas a tener un efecto significativo en la forma como manejan sus canales privados y en cuán bien funcionan en el nivel de los objetos. Este efecto se tratará en la siguiente sección, en donde combinamos los resultados de nuestros dos análisis para obtener una comprensión más profunda del aspecto cognitivo de esta historia.

Combinación de los resultados de los análisis focal y preocupacional: se necesita un cambio

El análisis focal ha demostrado que hubo muy poca coherencia en la conversación entre Ari y Gur. Es realmente notable cuán ineficaz resultó el intento de comunicación a pesar de los muchos recursos, visuales y verbales, empleados a lo largo de todo el proceso y no obstante el hecho de que Ari tuvo cierto éxito en sus esfuerzos privados para resolver el problema. En el argot de los cognitivistas, podemos resumir estos resultados afirmando que Gur, a diferencia de Ari, exhibió muy poca comprensión matemática. También podemos avanzar y hacer conjeturas sobre las habilidades matemáticas de los dos muchachos. Sin embargo, el análisis preocupacional sugiere que posiblemente deberíamos considerar una interpretación mucho más local y específica del caso que nos ocupa antes de aventurarnos a realizar inferencias trascendentales sobre el potencial general de los estudiantes para tratar las matemáticas de manera exitosa. En vez de (o, al menos, además de) hablar de las habilidades matemáticas de Gur y Ari, haciendo así aseveraciones indirectas e hipotéticas acerca de su rendimiento matemático pasado y futuro, podemos mirar las posibles razones por las cuales los resultados de los dos jóvenes en su funcionamiento discursivo fueron poco satisfactorios. En realidad, en el presente caso, la calidad de la interacción es más sospechosa que la calidad de las mentes de cada uno de los estudiantes. Como lo ha demostrado el análisis preocupacional, por lo menos uno de los estudiantes pudo haber tenido inconvenientes en el manejo de su foco entre los asuntos del nivel de los objetos y los del metanivel. En una situación como la descrita no es necesario tener acceso a las habilidades matemáticas generales de una persona para explicar su fracaso al solucionar un problema matemático. Para tener una visión mucho más profunda de las formas en las que la interacción pudo interferir en la actividad cognitiva de los jóvenes, es preciso revisar sus canales privados —el principal escenario de esta clase de actividad.

El canal privado de Gur, como se presenta en el diagrama de flujo de interactividad en la Figura 4, columna *B*, parece inconexo, discontinuo y muy pobre. Gur está totalmente absorto en tratar de asegurar el intercambio con Ari y no se ve como alguien que en verdad quiera intentar hablarse o escucharse a sí mismo. Expresado en sentido metafórico, una preocupación de esa naturaleza por asuntos interpersonales y por la actividad a lo largo del canal interpersonal está destinada a debilitar el flujo del discurso interno. Por el contrario, Ari, quien destina la mayor parte de su atención a su canal privado, parece no tener problema en mantener su foco, bien definido y estable, en el nivel de los objetos. Además, prueba que tiene habilidad para monitorear su propia actividad en el

nivel de los objetos. No obstante, hay señales de que la comunicación interpersonal cobra su tributo también en este caso. Esto se expresa en un fenómeno que se repite un gran número de veces durante el curso del breve intercambio: se presentan desviaciones momentáneas del foco, por lo general corregidas de manera espontánea, sin que Ari se percate del breve zigzaguo. Por ejemplo, esto es lo que sucede con la imprecisión, ya señalada, en su uso de la palabra “tiempo” en el subepisodio [28]–[36] (véase la nota de pie de página 18) o con su momentáneo cambio de idea con respecto al *período de más rápido crecimiento en el número de horas de luz diurna* ([32], [34]; véase también la nota de pie de página 12).

Para resumir, la interacción interpersonal parece interferir con el pensamiento de Ari, aun cuando los resultados de esa interferencia no sean tan visibles y no tengan tantas consecuencias como en el caso de Gur. Gracias a la insistencia de Ari en seguir su propia ruta mental, su foco perlocutivo, y por tanto el foco ilocutivo también, son estables y resistentes a fluctuaciones momentáneas de los focos locutivos. Es probable, por la misma razón, que sin duda no le interesen los *lapsus linguae* cometidos por su compañero. Por ejemplo, hace caso omiso de la sustitución que Gur hace de la palabra “aumento” por “cambio” (véanse [17] y siguientes), incluso adopta el lenguaje de Gur por un momento [28] —un acto que obviamente, no tiene efecto sobre la continuidad de los focos perlocutivos e ilocutivos a lo largo de su canal privado (su foco ilocutivo se ajusta aun más al foco locutivo “aumento” y no a “cambio”).

El análisis anterior muestra que la solución interactiva de problemas puede ser vista como un intrincado trueque entre las necesidades de la comunicación interpersonal y las del pensamiento individual, las cuales deben ocurrir al mismo tiempo. Los recursos intelectuales de los interlocutores pueden ser amplios, pero de hecho tienen sus límites. Poner atención al canal interpersonal de la comunicación usualmente tiene un costo en la atención que la persona destina a su canal privado. En los casos más extremos, cuando las necesidades del canal interpersonal se superponen a otras, la actividad cognitiva relacionada con el contenido matemático de la conversación puede ser descontinuada. En tal caso, no tiene sentido tratar de decir algo acerca del “pensamiento matemático” de esta persona, el cual sencillamente se encuentra suspendido.

Como resultado, que es contrario a las expectativas, la conversación con el compañero que sabía un poco más y era más exitoso no estimuló el progreso de Gur y el discurso incoherente claramente no contribuyó a su comprensión. ¿Se debió esto al hecho de que los interlocutores no estaban receptivos al pensamiento del otro o a que no tenían las habilidades necesarias para llevar a

cabo la interacción eficaz? Posiblemente, a ambas. Cuando nos enfrentamos a los resultados de nuestro análisis por primera vez, nos consolamos con la idea de que los problemas que identificamos eran locales y transitorios. Nos dijimos que los estudiantes llegarían de manera natural y sin esfuerzo a comunicarse eficazmente. Por consiguiente, al empezar el análisis de un episodio posterior esperábamos que el discurso fuera mucho más coherente y eficaz y que la tensión poco útil que se había percibido hubiera quedado atrás y en el olvido.

¿APRENDERÁN A COMUNICARSE? ANÁLISIS DEL ENCUENTRO POSTERIOR ENTRE ARI Y GUR

ANÁLISIS FOCAL Y PREOCUPACIONAL DEL EPISODIO *LA PENDIENTE*

En esta sección nos reunimos con Ari y Gur nuevamente, seis semanas y veinte sesiones de clase después. De la sesión número veintiuno fueron tomadas la hoja de trabajo y la transcripción del nuevo intercambio, de dos minutos de duración, entre los dos muchachos (véanse Figuras 6 y 7). Antes de seguir leyendo para ver lo que tenemos que decir al respecto, se le aconseja al lector que trate de estimar los cambios que podrían haber ocurrido en el patrón de las actividades discursivas de Ari y de Gur desde el episodio *Luz diurna*.

Figura 6: Episodio *La pendiente* – Hoja de trabajo

Una función $g(x)$ está representada parcialmente por la tabla que se presenta debajo. Responda las preguntas del recuadro.

x	$g(x)$
0	-5
1	0
2	5
3	10
4	15
5	20

1) ¿Cuánto es $g(6)$? ____

2) ¿Cuánto es $g(10)$? ____

3) A los estudiantes de grado séptimo se les pidió escribir una expresión para la función $g(x)$.

- Evan escribió $g(x) = 5(x - 1)$
- Amy escribió $g(x) = 3(x - 3) + 2(x - 2)$
- Stuart escribió $g(x) = 5x - 5$

¿Quién está en lo correcto? ¿Por qué?

Figura 7: Episodio *La pendiente* – Protocolo

Lo que fue realizado	Lo que fue dicho
	-25:40-

[1] A. está tratando de obtener la expresión a partir de la tabla

[6] A. ha escrito $5x + -5$

[9] realiza la siguiente tarea: encontrar $g(6)$

[13] “los dos”: A. señala ambas columnas indicando que hay que revisarlas “desde cero hasta lo que”: él señala la columna de las x

[14] La contraparte izquierda del 0 de la columna derecha es 1

[15] “cero”: hace un redondel alrededor del cero de la columna de la x en la hoja de Gur

[16] -5 es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$

[19] A. primero señala la columna de las x (“va bajando de uno en uno”), luego la columna de las $f(x)$ (“de cinco en cinco”) y de nuevo, la columna de $f(x)$ (“mire aquí”)

[26] “esta columna”: señala la columna de las x

[1] A.: [1a] Espere, ¿cómo encontramos la pendiente otra vez? [1b] No, no, no, no. La pendiente, no; espere, [1c] el intercepto es 5 negativo. [1d] Pendiente.

[2] G.: ¿De qué está hablando?

[3] A.: Estoy hablando de esto. Es 5.

[4] G.: No importa si está sobre (musita)

[5] A.: $5x$. ¿Cierto?

[6] G.: ¿Qué es eso?

[7] A.: Es la fórmula para poder calcularlo.

[8] G.: Oh. ¿Cómo obtuvo esa fórmula?

[9] A.: Y reemplaza la x por 6.

[10] G.: Oh. Bien, yo

[11] A.: [11a] Mire. Porque... hum la pendiente, es el cero. [11b] Ah, no, el intercepto es el cero.

[12] G.: Oh, sí, sí, sí. Entonces, obtuvo su

[13] A.: [13a] Y luego mira cuántos hay entre los dos, [13b] como desde cero hasta lo que

[14] G.: Y la pendiente es, entonces la pendiente es 1.

[15] A.: [15a] ¿Hum? No, la pendiente, [15b] vea, mire al cero,

[16] G.: [16a] Oh, *ese* cero, bueno. [16b] Entonces la pendiente es menos 5

[17] A.: Sí. Y

[18] G.: ¿Cómo se supone que obtiene los otros?

[19] A.: [19a] Mira cuántas veces ha bajado, como hicimos antes. Entonces va bajando de uno en uno. [19b] Así es fácil. Esto es ah... de cinco en cinco. Mire, está bajando de uno en uno, entonces sólo mire aquí

[20] G.: Oh. Entonces es 5

[21] A.: Sí, $5x$ más

[22] G.: 5 negativo

[23] A.: ¿Entiende?

[24] G.: [24a] 5 negativo. Sí, sí. Bueno. [24b] Entonces, ¿cuánto es g de 6?

[25] A.: [25a] 5 veces 6 es 30, más 5 negativo es 25. [25b] Entonces *sí* lo hicimos bien.

[26] G.: No, pero es... ¿en esta columna?

[27] A.: Sí.

	[27] A.: Sí.
	[28] G.: [28a] Oh, <i>entonces</i> eso tiene sentido.[28b] (escribe) Es 30. [28c] ¿Cuánto es g de 10? ... 40
	[29] A.: 20, ah 40. No, 45.
	[30] G.: No.
	[31] A.: 45
	[32] G.: porque 20
	[33] A.: 10 veces 5 es 50, menos
[34] Él señala las dos entradas en la última fila	[34] G.: Bueno, 5 es 20, entonces 10 debe tener 40
[35] A. encierra en un redondel el 10 del $g(10)$ en la hoja de Gur	[35] A.: Cinco veces
	[36] G.: Oh, hacemos esa cosa. Bueno, sólo trato de encontrarlo.
	[37] A.: Sí.
[38] de nuevo él señala la última fila de la tabla	[38] G.: Porque estaba pensando por qué 5 es 20.
	[39] A.: Es 45. Sí.
	[40] G.: (Musita) Entonces es 45.
	-27:42-

Tabla 3: La estructura del episodio La pendiente

Fase	Subepisodio 1: Encontrar $g(6)$			Subepisodio 2: Encontrar $g(10)$		
	Segmento	Ari	Gur	Segmento	Ari	Gur
Precompromiso Resolver independientemente	[1]-[5]	Resuelve	Indaga	[28], [29]	Resuelve Obtiene $g(10) = 45$	Resuelve Obtiene $g(10) = 40$
Compromiso Discutir/explicar	[2]-[26]	Explica su solución	Indaga sobre la solución de Ari	[30]-[38]	Repite su solución	Trata de explicar su solución
Ruptura del compromiso	[23]-[28]	Confirma su respuesta	Dice aceptar la respuesta de Ari pero se equivoca al escribirla. Va al siguiente problema	[39], [40]	Repite su respuesta	Acepta la respuesta de Ari

No se necesita un análisis detallado para ver que la esperanza de cambio no se materializó. Sin embargo, al examinar la presente conversación es sorprendente la similitud con el episodio *Luz diurna*. La similitud se expresa, primero que todo, en la estructura general del evento. En este caso se le presenta a los estudiantes una tabla con la función de gráfica lineal g y se espera que encuentren ciertos valores de esta función que no se muestran explícitamente. La conversación de dos minutos se puede dividir en dos subepisodios, cada uno de los cuales gira alrededor de un valor diferente de la función: la secuencia [1]-[28] es una con-

Tabla 4: Episodio *La pendiente* - Análisis del foco tripartito de Ari

Verbalizaciones	Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo
[1a], [1b], [11a] [1c], [11b] [1c] [11b]	“la pendiente” “el intercepto” “cinco negativo” “El cero”	Intercepto en la tabla^a: 1. Encuentra 0 en la columna de la izquierda de la tabla 2. Encuentra en la columna de la derecha de la tabla, el número que corresponde a ese 0	El intercepto
[3], [5]	“Pendiente”	Fórmula de la pendiente^b: El coeficiente de x en la fórmula $5x + -5$	La pendiente
Escribe: $5x + -5$		Fórmula del intercepto^c: El coeficiente libre en la fórmula $5x + -5$	El intercepto
[1d], [13], [15], [19]	“Pendiente”	Pendiente en la tabla^d: 1. Va al 0 en la columna de la izquierda de la tabla 2. Verifica el tamaño del incremento entre números sucesivos de la columna de la izquierda 3. Si el incremento es 1, simplemente encuentra la diferencia entre un número y el que está inmediatamente arriba en la columna de la derecha	La pendiente

- a. “Intercepto en la tabla” es un procedimiento perlocutivo para identificar el intercepto de una función con la ayuda de una tabla; también puede ser descrito en términos estructurales como b. “la contraparte en la columna de la derecha, del cero que está en la columna de la izquierda”.
- b. “Fórmula de la pendiente” es un procedimiento perlocutivo para identificar la pendiente de una función con la ayuda de una fórmula.
- c. “Fórmula del intercepto” es un procedimiento perlocutivo para identificar el intercepto con la ayuda de una fórmula.
- d. “Pendiente en la tabla” es un procedimiento perlocutivo para identificar la pendiente de una función con la ayuda de una tabla.

(p. xix).

22 Goffman (1967) diría que con la ayuda de estas técnicas de mimetismo, Ari intenta minimizar la ofensa que se desprende de su incapacidad (o deberíamos denominarla *falta de voluntad*) para seguir los patrones de una interacción cortés y satisfactoria.

versación sobre $g(6)$, mientras que el segmento [28]-[40] está dedicado a $g(10)$. A pesar de la diferencia más bien sustancial en la duración de los dos subepisodios, su disposición tripartita es exactamente la misma que la del episodio *Luz diurna* (véase Tabla 3; cf. Tabla 1).

En la estructura general de tres fases de cada interacción, se observa que

Tabla 5: Episodio *La pendiente* - Análisis del flujo de los focos

Ari			Gur		
Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo	Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo
[11] [11a] “la pendiente” [11b] “el intercepto” “el cero ^b ”	Intercepto en la tabla	El intercepto			
			[12] “su...”	?	?
[13] [13a] “cuántos... entre los dos” [13b] “desde cero ^b hasta”	Pendiente en la tabla	La pendiente			
			[14] “pendiente”, “1”	Lo contrario del intercepto en la tabla^a	?
[15] [15a] “pendiente” [15b] “cero ^b ”	Intercepto en la tabla	El intercepto			
			[16] [16a] “pendiente” [16b] “ese cero ^b ” “-5”	Intercepto en la tabla	?

- A este foco perlocutivo lo llamamos “lo contrario del intercepto en la tabla” porque lo que Gur está mirando se puede describir como la contraparte del cero de la columna de la derecha, en la columna de la izquierda, y porque “la contraparte del cero de la columna de la izquierda, en la columna de la derecha” es el intercepto en la tabla.
- La recurrente aparición de la palabra cero es evidentemente una de las fuentes de confusión, dado que hay dos ceros en la tabla (en la primera fila de la columna de la izquierda y en la segunda fila de la columna de la derecha). En particular, no es claro a cuál de los dos ceros se refiere Ari en [15b] porque cualquiera de ellos se puede usar para apreciar el incremento del valor de y correspondiente al incremento de 1 en el valor de x que Ari está mirando en [14]. Gur está mirando evidentemente el cero de la columna de la derecha y por esta razón él apunta a 1, que es la contraparte del cero en la columna de la izquierda.

la actitud relativamente moderada de Ari, y no la extrovertida de Gur, marca la pauta. Cada nueva actividad comienza con el período de precompromiso durante el cual los muchachos abordan el problema en cuestión de manera independiente. Ari no dejará esta fase hasta que haya resuelto el problema. De hecho, los muchachos nunca resuelven los problemas juntos. La fase de compromiso comienza sólo cuando hay una o dos soluciones listas para discutir. En los tres casos la única razón para el compromiso es cierta controversia entre Ari y Gur: o tienen diferentes soluciones o sólo Ari tiene una. Ari siempre promociona su propia solución, se rehusa a escuchar verdaderamente a Gur y continúa sin darse cuenta de las fuentes de los errores de su compañero. Gur, a su vez, sigue deseoso de no parecer que insiste en preguntarle a su compañero. Aun si pregunta, lo hace de un modo más bien ineficaz.

La ruptura del compromiso que generalmente inicia Ari²⁴, siempre sucede más rápido de lo que a Gur le gustaría, pero el muchacho es demasiado orgulloso como para insistir en un aplazamiento. Por consiguiente, Ari deteriora la interacción, antes de que Gur tenga la oportunidad de aprender algo importante de ella.

La calidad de la comunicación entre Ari y Gur no cambió tampoco. No parece que los dos estudiantes se estén refiriendo a las mismas cosas, aunque por lo menos uno de ellos, Ari, da la impresión de saber muy bien de qué está hablando. Un análisis focal disciplinado confirma esta impresión.

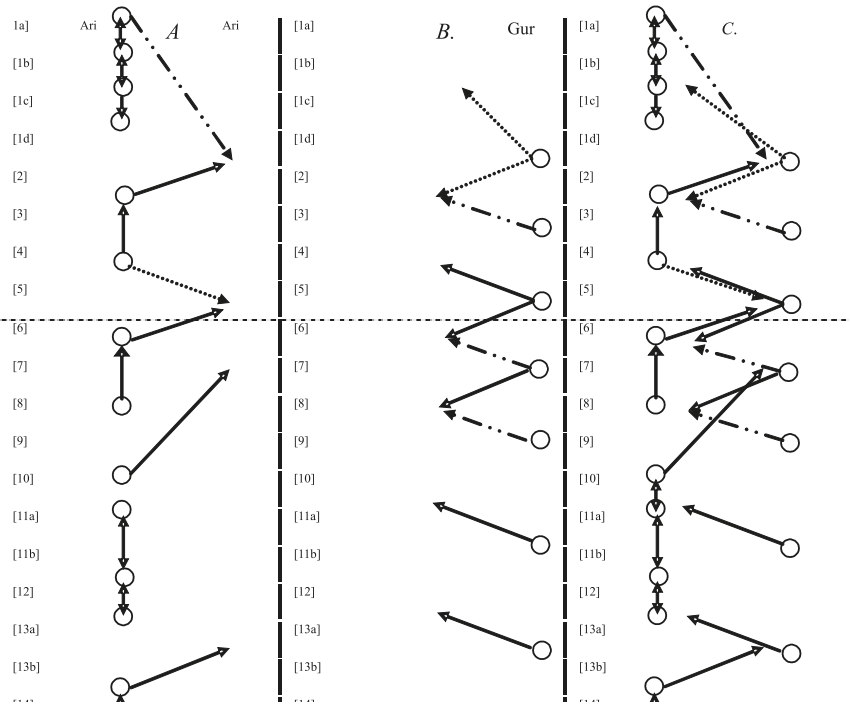
El flujo del foco tripartito de Ari ha sido registrado en la Tabla 4. Probablemente la característica más notable de la conversación del muchacho es que está bien articulada por el foco ilocutivo. Aunque las diferentes verbalizaciones se construyen alrededor de diferentes focos locutivos e implican diferentes focos perlocutivos, todos ellos hablan de la pendiente o del intercepto de la misma función lineal. Es notable cómo Ari se mueve con seguridad, sabiendo qué mirar y qué cálculos hacer, a pesar de que sigue confundiendo las palabras “pendiente” e “intercepto”. Podemos decir que el discurso de Ari está bien integrado a lo largo de los ejes de los focos ilocutivo y perlocutivo, y por tanto es resistente a las fallas del foco locutivo. Para Gur la situación es dramáticamente diferente. Como se puede percibir al escuchar la conversación y como se ha mostrado con claridad en nuestro análisis detallado del flujo del foco (véase la Tabla 5), el compañero de Ari no se puede mover con la misma facilidad entre la tabla y la fórmula, y su foco perlocutivo es extremadamente sensible a los cambios del foco locutivo. De hecho, en el primer subepisodio Gur no muestra ninguna iniciativa propia y parece entender muy poco de lo que Ari está diciendo. La conversación como se presenta en la Tabla 5 está desintegrada y el discurso a lo largo del canal privado

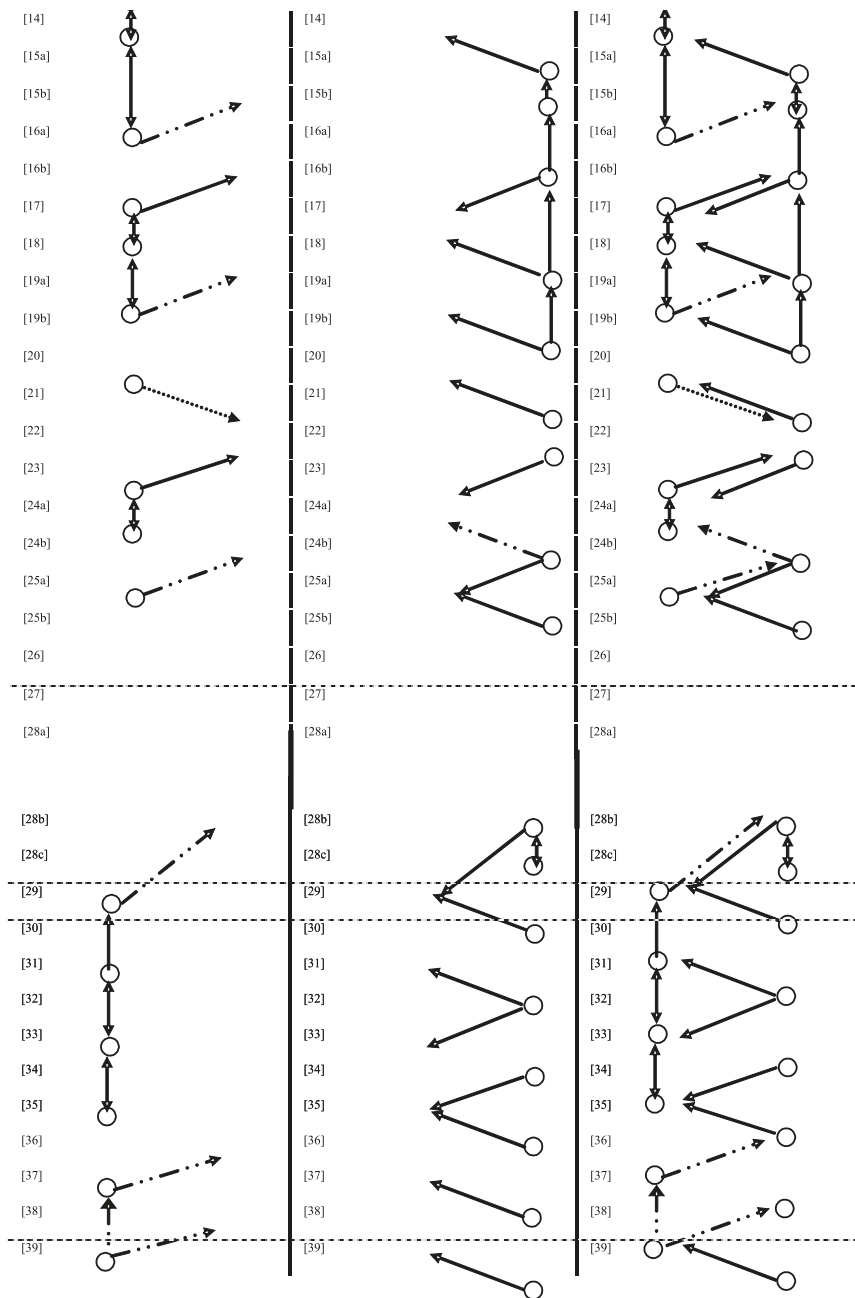
de Gur está desenfocado y es discontinuo.

Aunque Ari sí hace varios intentos para superar la incoherencia obvia, señalando explícitamente sus focos perlocutivos, sus esfuerzos no funcionan. Indicar el foco perlocutivo per se, no es suficiente para crear un foco ilocutivo. Podemos encontrar dos razones para la ineficacia de la intervención de Ari. En primer lugar, Ari realmente no trata de coordinar los focos ilocutivo y perlocutivo —él sólo señala la tabla o la fórmula sin especificar los procedimientos perlocutivos. En segundo lugar, Ari no explora a fondo la comprensión de Gur; parece estar tan desinteresado en el proceso de pensamiento de su compañero que no se da cuenta siquiera del error de Gur en el foco locutivo o de sus respuestas erróneas.

En el intento de buscar razones posibles para justificar la comunicación fallida, miremos ahora los resultados del análisis preocupacional. Una somera ojeada a los diagramas de flujo de la Figura 8 es suficiente para mostrar que si hubo algún cambio en los patrones de las interacciones de Ari y de Gur, éste debió ser marginal. Las características generales que identificamos en el episodio *Luz diurna* regresan al presente con una claridad aun mayor: los diagramas revelan que la actitud de Ari es *carente de iniciativa e indiferente*, mientras que la aproximación de Gur es exactamente opuesto. Todo esto significa que mientras Ari está muy interesado en proteger su pensamiento de distracciones, Gur se preocupa por el intercambio de ideas. En esta situación, no es sorprendente

Figura 8: Diagrama de flujo de la interacción en el Episodio La pendiente





que haya largas extensiones de continuidad a lo largo del canal privado de Ari (véase la Figura 8, columna A), mientras que el canal privado de Gur es prácticamente inexistente (véase la Figura 8, columna B). De la misma manera que en el episodio inicial, Ari trata de *controlar* el discurso y, al mismo tiempo, de ocultar este hecho con diferentes *técnicas de camuflaje*. Gur, por su parte, ha ampliado sus métodos para *iniciar el discurso* y *guardar las apariencias*.

Así, transcurridos dos tercios de la duración del curso, Ari y Gur no parecen haber ido muy lejos del punto de partida. Veinte sesiones de trabajo conjunto no cambiaron mucho la naturaleza y la calidad de la cooperación de Ari y de Gur excepto, quizá, que empujaron mucho más a cada muchacho en su propia dirección: Ari se volvió aun más diestro en proteger su canal privado y en evitar cualquier intercambio verdadero y Gur se volvió aun más dependiente de su interacción con Ari. El único cambio real que se puede notar es un claro progreso del conocimiento matemático de Ari.

En lo que concierne al conocimiento y comprensión, Gur se queda rezagado con respecto a su compañero; al menos, así lo revelan sus conversaciones con Ari, y esto parece estar nada cerca de lo que queríamos que nuestros estudiantes logaran. La causa principal de esta situación, nos parece ahora, es la persistente ineficacia de la comunicación entre los jóvenes.

CONCLUSIONES: RECONSIDERAR EL APRENDIZAJE MEDIADO POR LA CONVERSACIÓN

Después del análisis detallado que se llevó a cabo en este capítulo, es tiempo de resumir y tratar de sacar conclusiones más generales. Puesto que nos hemos centrado en sólo dos estudiantes de doce años y analizamos completamente tan sólo dos episodios muy breves de las treinta horas que ellos pasaron juntos en el transcurso de dos meses, uno puede sentir que sería poco prudente aventurarse a establecer una generalización. Creemos, sin embargo, que una perspectiva cercana y detallada de una muestra puede ser más reveladora que un estudio extenso con cientos de participantes. Cuando se usa un microscopio es posible descubrir un mundo totalmente nuevo de relaciones complejas y de ricos fenómenos. Creemos que esto es lo que sucedió en el presente estudio. Consideramos que lo que se presentó en este capítulo es ni más ni menos una “prueba de existencia” de tal universo escondido. Nuestra exploración de este mundo subterráneo de los microfenómenos que subyacen a las interacciones de los estudiantes demostró tener bastantes consecuencias. Lo que vimos con la ayuda de nuestras dos herramientas especialmente diseñadas para el análisis

del discurso de los estudiantes nos obligó a reconceptualizar algunas de nuestras creencias iniciales sobre hacer y aprender matemáticas.

SOBRE LOS MÉRITOS DEL APRENDIZAJE MEDIADO POR LA CONVERSACIÓN

Nuestra decisión inicial de hacer énfasis en las interacciones de los estudiantes en el salón de clase había sido una elección más de tipo pedagógico que investigativo. Cuando lanzamos nuestro experimento, creíamos que la colaboración entre los estudiantes y la conversación matemática eran las mejores formas de aprender matemáticas. Teníamos muchos argumentos para respaldar esta convicción. En primer lugar, estaba la famosa idea de Vygotsky (1978, 1987) de la *zona de desarrollo proximal* que alimentó nuestra confianza en las ventajas que tienen las interacciones entre estudiantes que de alguna manera tienen conocimientos y habilidades diferentes. En segunda instancia, cada vez había más evidencia empírica y teórica que mostraba los efectos benéficos de la verbalización del pensamiento matemático por parte de los estudiantes (véanse Lampert, 1990; Lampert y Cobb, 2003; O'Connor, 1996, 1998). Para finalizar, el énfasis en la comunicación matemática en las escuelas ha sido la tendencia pedagógica general y parecía estar bien fundamentada y haber tenido un éxito razonable.

Al mirar cuidadosamente a una pareja de estudiantes trabajando juntos nos dimos cuenta de que los méritos del aprendizaje mediado por la conversación no se pueden dar por sentados. Nuestros análisis nos llevaron a concluir que si Gur logró algún avance, no fue *gracias* a su colaboración con Ari sino más bien *a pesar* de ella, y que si esta colaboración a la larga estimuló el desarrollo de Gur fue quizá porque de manera indirecta le dio un incentivo para aprender. Este experimento ha demostrado que la interacción entre los dos muchachos fue poco útil para cualquiera de ellos. Por lo tanto, el presente estudio no respalda la creencia común de que siempre se debe confiar en que el trabajo en conjunto estará provisto de la cualidad sinérgica. No necesariamente es verdad que dos personas que unan fuerzas puedan hacer más que la suma de lo que cada uno puede hacer por su lado.

La colaboración de Ari y Gur parece poco útil debido a la ineficacia de su comunicación. Nuestro análisis ha confirmado claramente lo que Reddy (1979) afirmó hace un buen tiempo: “Comprender sin esfuerzo” es un mito y la comunicación humana está sujeta a la ley de la entropía. El camino hacia la comprensión mutua es tortuoso y está lleno de trampas, así que el éxito en el acto comunicativo se percibe como un milagro. Y si la eficacia en la comunicación es en general difícil de alcanzar, en las matemáticas es una verdadera lucha. La escasez de mediación perceptiva y la polisemia inherente a los símbolos

matemáticos sólo se pueden compensar con la concentración extrema. Por lo tanto, en este discurso, la interacción con otros, que exige una gran atención de parte y parte, resulta contraproducente. De hecho, es bastante complicado mantener una conversación bien enfocada y a la vez tratar de resolver problemas con creatividad. Esta es probablemente la razón por la cual las matemáticas se han ganado la fama a lo largo de la historia de ser una actividad para solitarios. De igual manera, aquellos a quienes les toca aprender matemáticas por medio de la conversación deben sentir a menudo que de hecho les iría mejor solos. Se requiere de una gran motivación para comprometerse en una conversación matemática y lograr que funcione. Sin duda, el deseo de Ari de comunicarse con Gur era no sólo insuficiente sino, en cierto modo, negativo. De hecho, tuvo un progreso satisfactorio trabajando solo y es bien probable que lo hubiera hecho más rápido y con mayor eficacia de no estar obligado a comunicarse con Gur al mismo tiempo. Además, parece que aunque Ari hubiera querido ayudar a Gur no contaba con los medios apropiados para hacerlo. Todos estos hallazgos ponen en duda que la creencia generalizada según la cual trabajar con un “compañero que sabe más” acelera el desarrollo propio, *sea una regla*.

LO QUE LLEVAMOS DE ESTE ESTUDIO A LA AULA: SOBRE LAS MANERAS DE MEJORAR LA EFICACIA Y LA PRODUCTIVIDAD DIDÁCTICA DE LA CONVERSACIÓN MATEMÁTICA

Aclaremos el siguiente punto: la idea central de lo dicho hasta ahora *no es* que las matemáticas no se puedan ni se deban aprender de forma interactiva. Nuestro ejemplo limitado no puede haber originado tal afirmación. Es más, en un estudio reciente centrado en dos estudiantes dedicados a exploraciones matemáticas de manera colaborativa y con el apoyo del computador (Lavy, 2000), los mismos métodos de análisis indicaron la existencia de una suerte de progreso productivo en el aprendizaje que quizá no habría ocurrido si los muchachos hubieran trabajado por separado. Por eso es que, basadas en los argumentos teóricos y la amplia evidencia proveniente de otras investigaciones, aún creemos en el potencial de la conversación sobre matemáticas. La única conclusión razonable de nuestro análisis es que para que la conversación sea eficaz y conduzca al aprendizaje, el arte de comunicarse *debe ser enseñado*. Con base en nuestras observaciones, pudimos llegar a algunas ideas sobre los aspectos del aprendizaje que quizá se deben promover deliberadamente si queremos que los estudiantes puedan sacar provecho de la conversación matemática. Así, por ejemplo, vimos la importancia de ser precisos en el foco locutivo y explícitos en el foco perlocutivo. Sobra decir que este es sólo el inicio de las recomendaciones para alguien que quiera aprender mediante la conversación.

A pesar de que el foco de este estudio eran las conversaciones entre estudiantes, también es necesario atender la comunicación entre el profesor y sus alumnos. Es digno de anotar que nuestras herramientas especiales de análisis se pueden usar en la práctica como instrumentos para mejorar este último tipo de interacción. Para un profesor, una muestra analizada de su interacción con los estudiantes puede ser reveladora. Un análisis de esta naturaleza lo obligaría a enfrentar ciertos patrones recurrentes y posiblemente poco útiles de su conducta discursiva de los que hasta el momento podría no ser consciente. Una mirada fugaz a una muestra representativa del discurso del salón de clase puede revelar, por ejemplo, si el profesor escucha realmente a los muchachos o, como Ari, sólo se escucha a sí mismo.

ELPAPELDELAMEDIACIÓNPERCEPTUALENLACOMUNICACIÓN(YPORENDE,ENELPENSAMIENTO)

El análisis focal realizado en el presente estudio nos adentró en la comprensión de la forma como los aspectos visuales median la comunicación y, con frecuencia, ante todo la hacen posible. De hecho, un foco perlocutivo bien definido es crucial para el éxito de la comunicación. Podemos concluir ahora que una de las habilidades, posiblemente más devaluadas, que se tiene que fomentar para lograr la comunicación es el uso de mediadores perceptuales, es decir la habilidad de desarrollar focos perlocutivos que sean útiles. En este capítulo hemos visto un ejemplo de interacción en la que la mediación perceptual funcionó bien sólo a lo largo de un canal personal (el de Ari), y falló a lo largo del canal interpersonal²⁵.

Parece que la habilidad para usar recursos de mediación perceptual de manera útil no siempre se desarrolla de manera espontánea. Usualmente hay que trabajar duro para ser capaz de construir focos perlocutivos adecuados, es decir, para aprender a ver las cosas que deben ser vistas si se quiere que una comunicación sea eficaz²⁶. Lo anterior es válido para cualquier tipo de discurso, y el de tipo matemático no es la excepción. En la comunicación matemática, en la que no existen objetos visibles conocidos que sirvan de base para un foco perlocutivo, las personas se valen de artefactos simbólicos como una especie de sustituto. Sin embargo, como mediadores de la comunicación, los sustitutos

23 Véase Goffman (1967).

24 El primer subepisodio de *La pendiente* es una excepción en la que Gur precede a Ari en la transición al siguiente problema. Esa excepción no contradice la regla. Parece que Gur había aprendido de su experiencia anterior con Ari que tal transición iba a suceder de todos modos. Por tanto, Gur se precipita a hacerlo simplemente para evitarse incomodidades posteriores.

simbólicos no son tan eficaces como los objetos conocidos que se usan en el discurso cotidiano. Los símbolos pueden suministrar a los interlocutores un foco perlocutivo práctico pero, debido a su inherente polisemia y extremada generalidad, su uso como mediadores de la comunicación no es tan claro como el de los objetos materiales conocidos.

METACONCLUSIONES:

RECONSIDERACIÓN DE NUESTRAS IDEAS ACERCA DEL PENSAR

Lo que encontramos en este estudio cambió no solamente nuestra opinión acerca de aprender mediante la conversación, sino que nos obligó a revisar las suposiciones básicas que nos guiaron como investigadoras al iniciar el estudio. De manera retrospectiva podemos decir que lo sucedido estuvo dentro del espíritu de nuestra época: a mitad de camino en nuestro estudio experimentamos un cambio de paradigma. Al igual que muchos otros investigadores, encontramos que el marco de trabajo del cual partimos para adelantar la investigación se quedó corto para capturar ciertos aspectos esenciales del aprendizaje, si no la esencia misma de todo el proceso. Terminamos reconceptualizando por completo algunas de nuestras nociones fundamentales y descartando o revisando ciertas viejas creencias.

SOBRE LA IDEA DE COGNICIÓN AUTÓNOMA

Siguiendo nuestras observaciones de clase, el asunto de la comunicación, que supuestamente era “auxiliar” para el propio tema de este estudio, pasó a un primer plano y se convirtió en el centro de atención. Al tener una nueva conceptualización del pensamiento como instancia de la actividad de comunicación nos alejamos de la tradicional dicotomía cognitivista entre “contenidos de la mente” y las cosas que la gente dice o hace (cf. Bruner, 1986; Sfard, 2000a, b; Edwards y Potter, 1992; Harre y Gillett, 1995; Edwards, 1997). Concluimos que el pensamiento no es un factor independiente que regula la comunicación; más bien, es un acto de comunicación en sí mismo y se debe estudiar como tal.

Debemos agregar que al escoger la actividad de comunicación como nuestra unidad de análisis, pudimos superar al menos dos divisiones tradicionales que, al principio de nuestro estudio, bloqueaban nuestra mirada en profundidad a las interacciones de aprendizaje de Ari y de Gur. En primera instancia, al parecer evadimos la conocida división existente entre las perspectivas de investigación social e individual. Como lo han señalado muchos autores, esta división origina

dos tipos incompatibles, y de alguna manera incompletos, de estudios (véanse Cobb, 1996; Confrey, 1994; Lerman, 1996). La división problemática sencillamente desaparece cuando uno se percata de que los enfoques cognitivista e interactivo son dos formas de mirar lo que básicamente es el mismo fenómeno: el fenómeno de la comunicación.

Otra dicotomía famosa que también se vuelve irrelevante en nuestro tipo de análisis es la división entre cognición y afectividad. Un eco distante de esta división se puede encontrar en nuestra distinción entre el nivel de los objetos y el metanivel de la comunicación, donde los factores cognitivos encuentran su expresión en el primer tipo de comunicación, y la afectividad reside principalmente en el nivel “superior”. Sin embargo, puesto que la interacción incesante y la dependencia dialéctica entre los diferentes niveles es el tema principal de este capítulo, el carácter insostenible de la división entre los factores cognitivos y afectivos pasa a ser uno de los mensajes centrales de este estudio.

Nuestros métodos especiales de análisis fueron diseñados para sustentar este cambio de perspectiva. El cuadro final que se obtuvo por medio del análisis focal y preocupacional es muy diferente al que produjimos aplicando tradicionales métodos de investigación cognitivista. En general, consideramos que nuestro nuevo método es confiable porque la imagen del aprendizaje que logramos construir con su ayuda concuerda con la percepción intuitiva de la situación que creció en claridad y fuerza mientras que observábamos a los muchachos en el aula.

SOBRE LA EVALUACIÓN DE LA “HABILIDAD MATEMÁTICA” DE LOS ESTUDIANTES

Parece natural establecer que algunas personas no tienen éxito en las matemáticas por la carencia de algunas habilidades cognitivas especiales. Ciertamente, este sería el tipo de veredicto que haríamos sobre Gur si no lo hubiésemos observado tan de cerca. Esta inspección minuciosa de las acciones de Gur nos hizo pensar que lo que vimos durante el experimento de treinta horas no es suficiente para emitir ningún tipo de juicio sobre las posibilidades y las limitaciones del desempeño matemático de Gur. Lo único que podemos asegurar razonablemente es que durante todo este período nunca observamos que Gur tuviera una interacción directa con las matemáticas.

A juzgar por los logros obtenidos por Gur, tal interacción debe haber ocurrido en algún momento. Puesto que no sucedió durante las sesiones de Gur con Ari, debe haber sucedido cuando el muchacho trabajó por su cuenta —o durante las entrevistas. Intrigadas por este asunto, hicimos algunas averiguaciones y nos dijeron que Gur trabajó en casa, donde su padre algunas veces lo ayudaba. Todo esto corroboró nuestras percepciones acerca de la clase. De acuerdo con

cualquier parámetro, creemos que Gur es un chico más bien brillante, sin ninguna razón para tener dificultades con hechos tan simples e inmediatos, como por ejemplo que el valor de una función se debe calcular mediante la sustitución de un número en la fórmula. En últimas, cosas como esa pueden ser simplemente memorizadas. Sonaría poco convincente decir que Gur no los pudo dominar por su limitación matemática. El cuadro que arrojó el presente estudio proporciona una explicación alternativa. Mostró que a Gur realmente no le preocupan las matemáticas. Mas bien, estaba preocupado por asuntos interpersonales y esta preocupación erigió una pared de cristal entre él y los problemas matemáticos. Este estudio, por consiguiente, nos enseñó a ser más cuidadosas cuando juzgamos el “potencial matemático” de un estudiante. El desempeño matemático parece depender de muchos factores sin relación aparente, por lo tanto, éste no se puede considerar una simple función de algunas características permanentes del estudiante.

Aunque lo que obtuvimos en este estudio no era lo que esperábamos, esta historia sí tiene un final feliz. Mientras intentábamos sintetizar el resultado del experimento mostrado en este capítulo, nos descubrimos formulando nuevos interrogantes, revisando nuestras concepciones y creencias iniciales acerca del aprendizaje, y construyendo nuevas herramientas para el análisis discursivo. Lo que se suponía iba ser un estudio sobre la eficacia de ciertas maneras de aprender álgebra, se convirtió en una investigación de las condiciones para la eficacia comunicativa de los estudiantes. Responder preguntas sobre las interacciones discursivas y sobre la posibilidad de su mejoramiento requería que sometiéramos nuestras creencias básicas acerca de la comunicación y la cognición a una revisión crítica. Creemos que nuestra confusión pasajera, en últimas, valió la pena pues nos llevó a una comprensión nueva y más útil de las preguntas iniciales.

**PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

CAPÍTULO 6

En el discurso hay más de lo que se oye: mirar el pensamiento como acto comunicativo para aprender más acerca del aprendizaje matemático¹

Los enfoques tradicionales para investigar el pensamiento matemático, tales como el estudio de concepciones erróneas y modelos tácitos, han arrojado luz sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero también han dejado sin resolver un gran número de problemas importantes. En este capítulo, después de observar con detenimiento dos episodios que dan origen a una serie de preguntas difíciles, propongo basar la investigación en una metáfora que alude al *pensamiento como acto comunicativo*. Esta conceptualización requiere ver el aprendizaje de las matemáticas como una iniciación a un cierto *discurso* bien definido. Dos factores principales hacen especial al discurso matemático: primero, su excepcional dependencia de artefactos simbólicos en calidad de herramientas de *mediación comunicativa*, y segundo, las *metarreglas* particulares que regulan este tipo de comunicación. Las metarreglas son un constructo del observador y de manera usual permanecen tácitas para los participantes del discurso. En este capítulo argumento que al elicitar estos elementos especiales de la comunicación matemática, uno tiene más oportunidad de dar razón de por lo menos algunos de los fenómenos que continúan siendo confusos. Para mostrar cómo funcionan, retomo los episodios presentados al inicio del

1 Traducción realizada por Luz Dary Acosta, Giovanni Camacho, Ángela María Forero y Catalina Ruiz. [N.E.]

capítulo, reformulo en el lenguaje del pensamiento como acto comunicativo las preguntas planteadas, y vuelvo a abordar los viejos dilemas con el apoyo de herramientas analíticas especiales que ayudan a combinar el análisis del contenido matemático de la interacción en la clase con la atención que los participantes prestan a asuntos que conciernen al nivel metadiscursivo.

En el campo de la educación matemática, por estos días, el término *discurso* parece estar en boca de todos. Figura de manera prominente en artículos de investigación, se puede escuchar su mención en cursos para profesores, y aparece una y otra vez en una variedad de documentos programáticos que pretenden establecer políticas para la enseñanza (véase, e.g., NCTM, 2000). Todo esto se podría interpretar como una mera muestra de que nos hacemos más conscientes que nunca de la importancia de la conversación matemática para tener éxito en el aprendizaje de las matemáticas. En este capítulo intento mostrar que en el discurso hay más de lo que se oye, y que al ubicar la comunicación en el corazón de la educación matemática es probable que cambie no sólo la manera como enseñamos sino también lo que pensamos sobre el aprendizaje y sobre lo que se está aprendiendo. De manera especial, argumentaré que la comunicación se debe ver no como una mera ayuda al pensamiento, sino como equivalente al pensamiento mismo. El *enfoque comunicacional de la cognición*, que está bajo escrutinio en este escrito, se construye alrededor de ese principio teórico básico.

En lo que sigue, presento la visión de aprendizaje que resulta y explico por qué se puede esperar que esta conceptualización haga una contribución importante tanto a la teoría como a la práctica de la educación matemática. Comienzo con un examen detallado de dos episodios que dan origen a una serie de preguntas difíciles. Lo intrincado de los problemas sirve como motivación inmediata para una mirada crítica a la tradicional investigación de corte cognitivista, basada en la metáfora del aprendizaje como adquisición, y para la introducción de un marco conceptual adicional, fundamentado en la metáfora del aprendizaje como participación. En la última parte de este capítulo, para mostrar cómo funciona la conceptualización propuesta, retomo los episodios presentados al comienzo del capítulo, reformulo en el nuevo lenguaje las preguntas planteadas desde siempre, y vuelvo a abordar los viejos dilemas con la ayuda de herramientas analíticas especialmente diseñadas.

Preguntas que hemos planteado desde siempre sobre el pensamiento matemático, aún vigentes

A pesar de ser una disciplina relativamente joven, el estudio del pensamiento matemático tiene una historia rica y llena de acontecimientos. Desde su nacimiento, en la primera mitad del siglo veinte, ha estado sujeta a numerosos e importantes cambios (Kilpatrick, 1992; Sfard, 1998b). Por estos días es posible que esté en camino de otra reencarnación. ¿Qué es lo que hace a este nuevo campo de estudio tan propenso al cambio? ¿Por qué los investigadores en educación matemática nunca parecen estar del todo satisfechos con lo que han logrado hasta ahora?

Por supuesto hay más de una razón, y más adelante trataré algunas de ellas. Por ahora permítaseme dar una respuesta de sentido común, que probablemente sería la de cualquier persona relacionada con la educación matemática (profesores, estudiantes, padres de familia, matemáticos o simples ciudadanos que se interesan por el bienestar de sus niños y de la sociedad). La sospecha inmediata, según parece, es el abismo entre investigación y práctica, expresado en la falta de mejoras significativas y duraderas en la enseñanza y el aprendizaje que supuestamente la investigación debería proporcionar. Al parecer, hay poca correlación de la intensidad de la investigación y el desarrollo basado en ella en un país dado con el nivel promedio de desempeño en matemáticas de los estudiantes en ese país (véanse, e.g., Macnab, 2000; Schmidt, McKnight, Cogan, Jakwerth y Houang, 1999; Stigler y Hiebert, 1999). A la vez esto significa que, como investigadores, es posible que aún tengamos un largo camino por recorrer antes de que las soluciones que demos a los problemas más básicos, planteados por profesores de matemáticas frustrados y estudiantes desesperados, sean efectivas a largo plazo. Los asuntos aún no resueltos van desde las preguntas más generales relativas a nuestros supuestos básicos sobre el aprendizaje de las matemáticas, hasta interrogantes específicos que surgen diariamente en situaciones concretas de clase. Me limitaré a sólo dos ejemplos breves de los dilemas de profesores e investigadores.

EJEMPLO 1. ¿POR QUÉ LOS ESTUDIANTES TIENEN ÉXITO O FRACASAN EN LAS TAREAS MATEMÁTICAS? ¿CUÁL ES LA NATURALEZA Y CUÁL EL MECANISMO DEL ÉXITO Y DEL FRACASO?

O mejor aun, ¿por qué parecen las matemáticas tan difíciles de aprender y por qué la tendencia a fracasar en este aprendizaje? Ésta es quizá la más obvia de las preguntas que se plantean con gran frecuencia, y se puede formular en muchos niveles diferentes. El ejemplo que se expone a continuación proporciona una

oportunidad de observar un ‘fracaso al hacer’ —un intento fallido en el aprendizaje que parece ser un caso muy común.

La Figura 2 muestra un fragmento de una conversación entre dos muchachos de doce años, Ari y Gur, quienes se enfrentan juntos a una larga serie de problemas que supuestamente les servirán de introducción al pensamiento algebraico y les ayudarán a aprender la noción de función². Los muchachos se ocupan de la primera pregunta de la hoja de trabajo presentada en la Figura 1. La pregunta requiere encontrar el valor de la función $g(x)$, representada por una tabla parcial, para un valor de x que no aparece en la tabla ($g(6)$). Antes de proseguir, se aconseja al lector prestar especial atención al intercambio entre Ari y Gur y tratar de responder las preguntas más comunes que vienen a la mente en una situación como ésta: ¿Qué se puede decir de la comprensión de los muchachos a partir de la manera como tratan el problema? ¿La colaboración entre ellos contribuye de manera notoria a su aprendizaje? Si alguno de los muchachos tiene dificultades, ¿cuál es la naturaleza del problema? ¿Cómo se le podría ayudar? ¿Cuál sería una manera efectiva de superar —o a la vez prevenir— la dificultad?

Figura 1: Episodio *La pendiente* – Hoja de trabajo

Una función $g(x)$ está representada parcialmente por la tabla que se presenta debajo. Responda las preguntas del recuadro.

x	$g(x)$
0	-5
1	0
2	5
3	10
4	15
5	20

1) ¿Cuánto es $g(6)$? ____

2) ¿Cuánto es $g(10)$? ____

3) A los estudiantes de grado séptimo se les pidió escribir una expresión para la función $g(x)$.

- Evan escribió $g(x) = 5(x - 1)$
- Amy escribió $g(x) = 3(x - 3) + 2(x - 2)$
- Stuart escribió $g(x) = 5x - 5$

¿Quién está en lo correcto? ¿Por qué?

Aunque no es muy difícil responder algunas de estas preguntas, otras de ellas parecen sorprendentemente elusivas. En efecto, un simple vistazo a la transcripción es suficiente para ver que mientras Ari procede sin tropiezos y de manera eficaz, Gur es incapaz de habérselas con la tarea. Más aun, a pesar de las habilidades

2 El episodio está tomado de un proyecto de investigación en Montreal, que codirigí con Carolyn Kieran desde 1993. El propósito de la secuencia de enseñanza para treinta sesiones, producida para el estudio, era introducir a los estudiantes al álgebra a la vez que se investigaban sus formas de construir conceptos algebraicos y se ponían a prueba ciertas hipótesis sobre las posibles maneras de estimular estas construcciones. El presente episodio está tomado de la sesión número 21. Para mayor información sobre este estudio, lo mismo que

Figura 2: Episodio *La pendiente* – Protocolo

Lo que fue realizado	Lo que fue dicho
	-25:40-
[1] A. está tratando de obtener la expresión a partir de la tabla	[1] A.: [1a] Espere, ¿cómo encontramos la pendiente otra vez? [1b] No, no, no, no. La pendiente, no; espere, [1c] el intercepto es 5 negativo. [1d] Pendiente.
	[2] G.: ¿De qué está hablando?
	[3] A.: Estoy hablando de esto. Es 5.
	[4] G.: No importa si está sobre (musita)
	[5] A.: $5x$. ¿Cierto?
[6] A. ha escrito $5x + -5$	[6] G.: ¿Qué es eso?
	[7] A.: Es la fórmula para poder calcularlo.
	[8] G.: Oh. ¿Cómo obtuvo esa fórmula?
[9] realiza la siguiente tarea: encontrar $g(6)$	[9] A.: Y reemplaza la x por 6.
	[10] G.: Oh. Bien, yo
	[11] A.: [11a] Mire. Porque... hum la pendiente, es el cero. [11b] Ah, no, el intercepto es el cero.
	[12] G.: Oh, sí, sí, sí. Entonces, obtuvo su
[13] “los dos”: A. señala ambas columnas indicando que hay que revisarlas “desde cero hasta lo que”: él señala la columna de las x	[13] A.: [13a] Y luego mira cuántos hay entre los dos, [13b] como desde cero hasta lo que
[14] La contraparte izquierda del 0 de la columna derecha es 1	[14] G.: Y la pendiente es, entonces la pendiente es 1.
[15] “cero”: hace un redondel alrededor del cero de la columna de la x en la hoja de Gur	[15] A.: [15a] ¿Hum? No, la pendiente, [15b] vea, mire al cero,
[16] -5 es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$	[16] G.: [16a] Oh, <i>ese</i> cero, bueno. [16b] Entonces la pendiente es menos 5
	[17] A.: Sí. Y
	[18] G.: ¿Cómo se supone que obtiene los otros?
[19] A. primero señala la columna de las x (“va bajando de uno en uno”), luego la columna de las $f(x)$ (“de cinco en cinco”) y de nuevo, la columna de $f(x)$ (“mire aquí”)	[19] A.: [19a] Mira cuántas veces ha bajado, como hicimos antes. Entonces va bajando de uno en uno. [19b] Así es fácil. Esto es ah... de cinco en cinco. Mire, está bajando de uno en uno, entonces sólo mire aquí
	[20] G.: Oh. Entonces es 5
	[21] A.: Sí, $5x$ más
	[22] G.: 5 negativo
	[23] A.: ¿Entiende?
	[24] G.: [24a] 5 negativo. Sí, sí. Bueno. [24b] Entonces, ¿cuánto es g de 6?

	[25] A.: [25a] 5 veces 6 es 30, más 5 negativo es 25. [25b] Entonces <i>sí</i> lo hicimos bien.
[26] “esta columna”: señala la columna de las x	[26] G.: No, pero es... ¿en esta columna?
	[27] A.: Sí.
	[28] G.: [28a] Oh, <i>entonces</i> eso tiene sentido.[28b] (escribe) Es 30. [28c] ¿Cuánto es g de 10? ... 40
	[29] A.: 20, ah 40. No, 45.
	[30] G.: No.
	[31] A.: 45
	[32] G.: porque 20
	[33] A.: 10 veces 5 es 50, menos
[34] Él señala las dos entradas en la última fila	[34] G.: Bueno, 5 es 20, entonces 10 debe tener 40
[35] A. encierra en un redondel el 10 del $g(10)$ en la hoja de Gur	[35] A.: Cinco veces
	[36] G.: Oh, hacemos esa cosa. Bueno, sólo trato de encontrarlo.
	[37] A.: Sí.
[38] de nuevo él señala la última fila de la tabla	[38] G.: Porque estaba pensando por qué 5 es 20.
	[39] A.: Es 45. Sí.
	[40] G.: (Musita) Entonces es 45.
	-27:42-

algebraicas aparentemente adecuadas de Ari, la conversación que tiene lugar durante el proceso de resolución no parece ayudar a Gur. Podemos concluir que mientras el desempeño de Ari es totalmente satisfactorio, Gur no ‘pasa la prueba’.

Hasta aquí todo va bien: la pregunta básica sobre la eficacia general de los esfuerzos de los estudiantes para resolver problemas no plantea ninguna dificultad especial. Nuestro problema comienza cuando damos un paso más allá de esta evaluación rudimentaria y nos aventuramos en busca de una comprensión más profunda del pensamiento de los muchachos. Intentemos, por ejemplo, diagnosticar la naturaleza de la dificultad de Gur. Lo primero que se podría decir es “Gur no comprende el concepto de función” o más exactamente, “No comprende de qué tratan la fórmula y la tabla, cuál es su relación, ni cómo se deben usar en este contexto”. Aunque esta afirmación es cierta, tiene poco poder explicativo. Lo que Tolstoi dijo sobre la infelicidad también parece cierto sobre la falta de

comprensión: quien carece de medios para comprender, no logra comprender a su manera. No es mucho lo que sabemos si no podemos decir algo específico sobre la naturaleza única de la incompreensión de Gur.

Siguiendo una tradición de vieja data, muchos investigadores tienden a enfocar el problema de manera bien diferente. Como lo señalara Davis (1988), en vez de preguntar si una persona comprende, debemos preguntar *cómo* es que comprende. En efecto, Davis dice: “los estudiantes *en realidad* manejan significados”, lo que sucede es que a menudo “*crean sus propios significados*” (p. 9, énfasis en el original). De esta manera, podríamos analizar el evento en términos de las construcciones conceptuales idiosincrásicas de los estudiantes. Podríamos decir, por ejemplo, que a diferencia de su compañero, Gur no ha desarrollado, hasta ahora, una concepción adecuada de función. Con una mirada a la transcripción, identificamos la consabida naturaleza de la dificultad: la secuencia [28]-[34] muestra que Gur tiene la mal concebida idea de linealidad según la cual los valores de cualquier función deben ser proporcionales al argumento (esta creencia es una variante de la bien conocida concepción errónea según la cual toda función debe ser lineal; véanse, e.g., Markovitz, Eylon y Bruckheimer (1986), Vinner y Dreyfus, 1989)³. Sin duda esta información es importante, pero ¿es suficiente para nuestra necesidad de explicación? ¿Es suficiente para nosotros decir que comprendemos la manera de pensar de Gur? ¿Es una guía suficiente para nosotros, como profesores, que deseamos ayudarle a Gur en su aprendizaje?

Aunque contamos con un conocimiento amplio sobre las concepciones erróneas típicas de los estudiantes, aún no tenemos en claro muchos aspectos de esta conversación y, más específicamente, las razones de Gur para sus selecciones y respuestas. Así, por ejemplo, lo que se ha dicho hasta ahora no nos aclara los motivos de la constante confusión que tiene Gur con la ecuación de la función lineal, ni de su incapacidad para seguir las explicaciones de Ari. La concepción errónea que ciertamente juega un papel en la última parte de la conversación, no da cuenta de las primeras respuestas de Gur a la noción de fórmula. Estas respuestas son tan inesperadas como poco reveladoras. Es más, aunque es obvio que Gur se esfuerza por comprender, y aunque las ideas que desea comprender no parecen muy complicadas (de hecho, ¿qué podría ser más

para tener otra perspectiva del mismo episodio, véanse Kieran y Sfard (1999), Sfard y Kieran (2001a, b).

3 La expectativa de la proporcionalidad es un fenómeno bien conocido que ha sido evidenciado de manera reciente en un episodio de “Friends”, una serie de televisión popular dirigida a la audiencia juvenil. Una persona trata de evitar que un muchacho de dieciocho años se case con una mujer de cuarenta y cuatro. La persona dice: “Ella es mucho mayor que

directo que la necesidad de sustituir números en la fórmula para calcular el valor de la función para este número?), extrañamente todos sus esfuerzos resultaron ser ineficaces —parece que no le ayudaron a comprender, ni siquiera un poco, la solución que Ari le explicaba una y otra vez. No es fácil imaginar qué tipo de acción de parte del “compañero más capacitado” (Vygotsky, 1978, p. 86) podría ser de ayuda.

En este punto uno podría afirmar que la dificultad que enfrentamos como intérpretes radica principalmente en la escasez de datos de que disponemos. Algunas personas podrían decir que el episodio que observamos no suministra suficiente información para emitir un enunciado definitivo sobre el pensamiento matemático de Ari y de Gur. Si bien es cierta, esta afirmación no resta importancia a la queja anterior: aunque en verdad sería mejor tener más información, el episodio que estamos tratando se debe comprender en sí mismo. Para que las cosas que los dos muchachos dicen tengan sentido en la situación dada, no necesitamos sólo de datos adicionales, sino también, y sobre todo, de formas de observación más desarrolladas y organizadas en teorías más penetrantes acerca del pensamiento y aprendizaje matemáticos. Antes de ocuparnos del desarrollo de la actual búsqueda de esas teorías, miremos otro caso de aprendizaje matemático.

EJEMPLO 2. ¿QUÉ SE DEBE CONSIDERAR COMO ‘APRENDER CON COMPRENSIÓN’?

La noción de comprensión, tan central en las presentes deliberaciones, resulta una fuente inagotable de dificultades tanto para teóricos como para profesores en ejercicio. Ilustraré esta dificultad con un ejemplo relacionado, esta vez, con el famoso llamado al *aprendizaje significativo* o *aprendizaje con comprensión* que ha guiado nuestras políticas de instrucción por muchos años. Este llamado marcó un hito en la historia de la investigación en educación ya que selló el fin de la era conductista y dio inicio a la nueva dirección en el estudio de la cognición humana. Cuando Brownell (1935) publicó, hace más de seis décadas, su exhortación con respecto a “un total reconocimiento del valor de las experiencias de los niños” y a “la aritmética más como un reto a la inteligencia del estudiante que a su memoria” (p. 31), sus palabras sonaron innovadoras y hasta desafiantes. En últimas, estas palabras ayudaron a levantar el veto a la indagación en la ‘caja negra’ de la mente, impuesto por el conductismo. Una vez obtenido el permiso para investigar ‘dentro de la cabeza humana’, el asunto de la comprensión se convirtió en uno de los tópicos centrales de investigación.

A pesar de los impresionantes avances de esta investigación, la mayoría de los educadores coinciden en que encontrar maneras para hacer operativo el principio

del aprendizaje con comprensión representa una tarea en extremo difícil. Mayer (1983) lamenta que los métodos de una enseñanza ‘significativa’ “aún son desconocidos, y la mayoría de los profesores de matemáticas probablemente tienen que fiarse de un conjunto de intuiciones sobre el pensamiento cuantitativo que involucra tanto la importancia del significado —como sea que se defina— como la del cálculo” (p. 77). Hiebert y Carpenter (1992) hacen eco a esta preocupación y dicen que promover el aprendizaje con comprensión “ha sido como la búsqueda del Santo Grial” y agregan que “se persiste en creer en los méritos de esta meta, pero ha sido muy difícil diseñar los ambientes escolares que promuevan exitosamente el aprendizaje con comprensión” (p. 65). La conversación entre Rada, una profesora que está haciendo su práctica para graduarse, y Noa, una niña de siete años de edad, acerca del concepto de ‘el número más grande’ (véase Episodio) destaca cierto aspecto de la dificultad.

De manera clara, esta conversación breve se convierte para Noa en una oportunidad para aprender. La niña comienza el diálogo convencida de que hay un número que se puede llamar ‘el más grande de todos’ y termina asegurando enfáticamente lo opuesto: “¡No hay ese número!”. La pregunta es si este aprendizaje se puede considerar como aprendizaje con comprensión, y si, por lo tanto, es la clase de aprendizaje deseado.

Episodio: *Conversación entre la profesora practicante, Rada, y Noa, la niña de siete años (de primer grado)*

- | | | |
|----|------------|--|
| 1 | Profesora: | ¿Puedes contar hasta diez? |
| 2 | Noa: | Sí. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, |
| | | diez. |
| 3 | Profesora: | ¿Sabes contar más de diez? |
| 4 | Noa: | Sí. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, |
| | | diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, die- |
| | | cisiete, diecio- |
| | | cho, diecinueve, veinte |
| 5 | Profesora: | ¿Cuál es el número más grande en el que puedes |
| | | pensar? |
| 6 | Noa: | Un millón. |
| 7 | Profesora: | ¿Qué pasa cuando le sumamos uno a un millón? |
| 8 | Noa: | Un millón uno. |
| 9 | Profesora: | ¿Ese número es más grande que un millón? |
| 10 | Noa: | Sí. |

- 11 Profesora: Por tanto, ¿cuál es el número más grande?
- 12 Noa: Dos millones.
- 13 Profesora: Y, ¿si sumamos uno a dos millones?
- 14 Noa: Es más que dos millones.
- 15 Profesora: Entonces, ¿se puede llegar al número más grande?
- 16 Noa: Sí.
- 17 Profesora: Supongamos que *googol* es el número más grande. ¿Podemos sumar uno a googol?
- 18 Noa: Sí. Hay números más grandes que googol.
- 19 Profesora: Entonces, ¿cuál es el número más grande?
- 20 Noa: ¡No hay ese número!
- 21 Profesora: ¿Por qué no hay un número que sea el más grande?
- 22 Noa: ¿Porque siempre hay un número más grande que ese?

Para responder esta pregunta, uno tiene que observar la manera como ocurre este aprendizaje. Aparentemente lo más natural sería decir, si enfocamos el asunto desde la perspectiva tradicional ya mencionada en el ejemplo anterior, que la profesora lleva a la niña a darse cuenta de la contradicción en su concepción de número: Noa ve el conjunto de los números como finito pero también parece ser consciente del hecho de que al sumar uno a cualquier número da como resultado un número aun más grande. Estos dos hechos, en conjunto, llevan a lo que se conoce en la literatura como ‘un conflicto cognitivo’ (véase, e.g., Tall y Schwartzenberger, 1978) que exige revisión y modificación del esquema numérico de la niña. Esto es lo que ella finalmente hace. A primera vista, el cambio ocurre como resultado de consideraciones racionales, y por lo tanto se puede considerar como una instancia de aprendizaje con comprensión.

Sin embargo, parece que algo hace falta en esta explicación. ¿Por qué a Noa no le impresiona la contradicción la primera vez que se le pregunta sobre el número que se obtiene al sumar uno al número que ella ha dicho que es el más grande? ¿Por qué no modifica su respuesta cuando se le presenta una situación similar por segunda vez? ¿Por qué cuando por fin pone juntas las dos afirmaciones que se contradicen —la de que al sumar uno da como resultado un número más grande y la de que hay un número que es *el* más grande— su conclusión

termina con entonación más de pregunta que de enunciación firme (véase [22])? ¿Es acaso que la niña no es consciente de la necesidad lógica de esta conclusión?

Otra posibilidad, que discutiré más adelante en este capítulo, es que el cambio de opinión de Noa tiene que ver menos con el hecho de comprender los conceptos que con el uso espontáneo de las inferencias que ella hace acerca de lo apropiado de sus respuestas, de acuerdo con las reacciones de la profesora. En este caso la conclusión a la que finalmente se llega, de que “¡No hay ese número!” no puede ser considerada como evidencia de ‘aprendizaje con comprensión’, por lo menos no como el término ‘comprensión’ ha sido interpretado en este contexto. Si así fuera, los partidarios del aprendizaje significativo probablemente criticarían a la profesora por la estrategia pedagógica que usó. Sin embargo, gracias a numerosos encuentros con profesores sé con certeza que para la gran mayoría de ellos la manera como Rada procedió en el presente ejemplo sería la elección más natural. El investigador no debe, por ningún motivo, menospreciar las intuiciones del profesor. Al parecer ahora enfrentamos otro dilema que con seguridad desafiará a profesores e investigadores.

RESUMEN: SOBRE EL APRENDIZAJE COMO METÁFORA DE ADQUISICIÓN, SUS VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Luego de considerar varias preguntas surgidas de los dos episodios breves, es hora de decir unas cuantas palabras acerca de la investigación en educación matemática en general. Aunque los investigadores han estado mirando los fenómenos estudiados de muchas y diversas maneras, todos los enfoques conocidos estaban, hasta ahora, unificados por la misma visión básica del aprendizaje. Influidos por modelos populares del aprendizaje —implícitos en nuestras formas cotidianas de hablar e impulsados por numerosas teorías científicas sobre la mente— que lo conceptualizan como almacenamiento de información en forma de representaciones mentales, los que estudian el pensamiento matemático y la resolución de problemas adoptaron tácitamente la metáfora del *aprendizaje como adquisición* de conocimiento. El énfasis aquí está en el término *adquisición* que subraya la naturaleza individual de la labor. La adquisición tiene lugar ya sea por recepción pasiva o por construcción activa, y resulta en una versión personalizada de los conceptos y procedimientos. La mayoría de las veces, estas construcciones individuales han sido llamadas *concepciones erróneas* y no simplemente concepciones. Esta etiqueta sugestiva implica que uno debe esperar una disparidad entre las versiones privadas de los estudiantes y la versión ‘oficial’, ‘correcta’ de los conceptos matemáticos. Se puede pensar que expresiones como *imagen conceptual* (en oposición a definición conceptual; Tall y Vinner, 1981) o *modelos tácitos* (Fischbein, 1989; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985),

que comenzaron a aparecer al tiempo con la noción de concepciones erróneas tienen un significado muy parecido, ya que implican la misma idea básica de discrepancia entre construcciones conceptuales individuales y públicas.

Las teorías acerca del desarrollo conceptual, con las que de alguna manera se relacionan todas estas nociones, se inspiran en la idea de representación interna y en el concepto de esquemas de Kant y Piaget (estructuras mentales de organización que supuestamente cada uno construye para sí mismo partiendo de los bloques de construcción elemental llamados concepciones). Es a través de estos esquemas mentales que nuestras concepciones presuntamente adquieren su significado. La psicología cognitiva equiparó la comprensión con el perfeccionamiento de representaciones mentales y definió el aprendizaje con comprensión como aquel que relaciona eficazmente el nuevo conocimiento con el conocimiento que ya se posee. Dentro del marco adquisicionista, comprender es, por lo tanto, un modo de conocer, mientras que el conocimiento en sí mismo es conceptualizado como cierto objeto que una persona puede o no poseer, y aprender es considerado como un proceso de adquisición de ese objeto (cf. Sfard, 1998a). Una vez adquirido, este conocimiento se lleva de una situación a otra y se usa cuando es apropiado hacerlo. Para ponerlo en términos de Jean Lave (1988, p. 24), dentro de esta tradición existente desde hace mucho tiempo,

la mente y sus contenidos han sido tratados más que nada como una caja de herramientas bien equipada. El conocimiento es concebido como un juego de herramientas almacenado en la memoria, que los individuos cargan y del cual seleccionan una (e.g., algoritmos aritméticos ‘infalibles’) para usarla. Cuanto más frecuente y apropiado sea su uso, mejor. Luego se guarda nuevamente sin alterarla en ningún momento durante el proceso.

Con sus muchas ramificaciones en la nueva ciencia de la cognición, que se desarrolla rápidamente, este enfoque ha venido floreciendo desde hace algunas décadas y ha provocado un flujo masivo de investigación (véase, e.g., Hiebert y Carpenter, 1992).

Es hora de enfatizar que con toda la crítica previa, de ninguna manera tenía la intención de menospreciar ni la metáfora de la adquisición ni las teorías que surgen de ella. La idea de que la idiosincrasia de los estudiantes influye sus concepciones, y la noción de aprendizaje con comprensión han hecho mucho bien tanto a la teoría como a la práctica de la educación matemática, y en este momento parecen de especial utilidad para aquellos que tratan de establecer un puente entre la ciencia de la mente y la ciencia del cerebro. Sólo quiero decir que, ya sea que actuemos como investigadores o como profesores en ejercicio,

las nociones basadas en la metáfora de la adquisición pueden ser un instrumento demasiado rudimentario para algunas de nuestras actuales y más avanzadas necesidades. Las teorías basadas en la adquisición ‘filtran’ las actividades cognitivas separándolas de su contexto, razón por la cual sólo nos dejan ver una parte de lo que sucede en el aprendizaje. Los elementos que dejan de lado por lo general son indispensables para el tipo de comprensión que debe subyacer a cualquier decisión razonable y práctica. En los párrafos anteriores ilustré esta afirmación con dos ejemplos, y en la última parte de este capítulo sostendré que esos elementos dejados de lado, de hecho, pueden ser lo bastante significativos para cambiar el panorama de manera radical. La conclusión por la que opto es que más que rechazar la tradicional metáfora de la adquisición, debemos complementarla con teorías basadas en metáforas alternativas. El enfoque comunicacional, fundamentado en una de esas otras metáforas, debe ser considerado complementario más que incompatible con los enfoques más tradicionales. En la siguiente sección, antes de introducir el enfoque comunicacional presento una metáfora complementaria.

ENFOQUE COMUNICACIONAL DE LA COGNICIÓN

ENFOQUE PARTICIPACIONISTA DE LA COGNICIÓN

La conceptualización complementaria de aprendizaje que quiero introducir en este capítulo proviene de la tradición sociocultural. Como lo enfatizan los editores en la introducción de este volumen⁴, la característica central de esta tendencia reciente, que configura su identidad única y la ubica aparte de enfoques anteriores de la cognición humana, es su actitud profundamente suspicaz hacia afirmaciones de vieja data, ampliamente difundidas, sobre varios invariantes cognitivos —ya sean los que supuestamente cruzan barreras culturales, o aquellos de los que se espera no sean afectados por cambios históricos, o simplemente aquellos de los cuales se cree que son transferidos por un individuo de una situación a otra. Dicho esto, nótese que el énfasis en esta última oración está en la palabra *difundidas*. Aunque las teorías socioculturales hacen una advertencia contra las suposiciones infundadas sobre la universalidad y nos alertan en relación con la dificultad conceptual inherente a la noción de invariante cognitivo, no afirman

tú. Y piensa en el futuro: cuando tengas treinta y seis años, ella tendrá ochenta y ocho”. “Sí, lo sé”, contesta el muchacho.

la total inexistencia de éstos (véase, e.g., el recuento sociocultural de la filogénesis y la ontogénesis del lenguaje en Bruner, 1986; véanse también Cole, 1996; Tomasello, 1999; Mantovani, 2000).

Desilusionados del poder explicativo de las teorías que hablan de los rasgos del individuo que son independientes del contexto, los psicólogos socioculturales prefieren ver el acto de aprender como *llegar a ser un participante en ciertas actividades distintivas* más que como llegar a ser un poseedor de esquemas conceptuales generalizados e independientes del contexto. Representantes de diferentes variantes del marco sociocultural hablan del aprendizaje como “la participación periférica en una comunidad de práctica” (Lave y Wenger, 1991), como “una participación mejorada en un sistema interactivo” (Greeno, 1997), como “la iniciación a un discurso” (Edwards, 1993; Harre y Gillett, 1995) o como “una reorganización de una actividad” (Cobb, 1998). Existe un abismo ontológico entre las nuevas y las antiguas metáforas, y dada esta profunda disparidad, las concepciones de aprendizaje engendradas por estas metáforas divergen en muchas dimensiones.

Antes de revisar las implicaciones más inmediatas de la metáfora de la participación, debo hacer una advertencia sobre dos puntos. Primero, ninguna teoría se construye con base en una sola metáfora. Sin embargo, de aquellas metáforas que se pueden identificar, usualmente una es la más prominente y de mayor influencia. Además, no todas las diferencias entre los distintos enfoques son requeridas por las metáforas en cuestión. Algunas de las implicaciones son opcionales y se mantienen por el mero hábito. Sin embargo, ambos tipos de metáforas merecen atención ya que los dos tienen un impacto considerable en la teoría y en la práctica. Segundo, la dicotomía entre adquisición y participación no se debe confundir con las distinciones teóricas bien conocidas. Tal como se enfatizó antes, incluso si la metáfora de adquisición es más común en el enfoque cognitivista tradicional que en la teorización sociocultural, no necesariamente está ausente del todo en esta última. Algunas veces, puede ser incluso prominente. De hecho, es el caso cuando se habla, siguiendo a Vygotsky —pensador, generalmente reconocido como uno de los fundadores de la tendencia sociocultural en psicología—, sobre “interiorización de funciones mentales de alto nivel” por su transmisión desde el plano “interpsicológico” hasta el plano “intrapsicológico” (Vygotsky, 1931/1981, p. 163). La dicotomía adquisición/participación tampoco es equivalente a la distinción entre las perspectivas individualista y social del aprendizaje. Aunque la dimensión social se destaca en la metáfora de la participación, no necesariamente está ausente de las teorías dominadas por la metáfora de la adquisición. Es importante comprender que las dos distinciones

se han realizado de acuerdo a criterios diferentes: mientras que la naturaleza de la división adquisición/participación es ontológica y proporciona dos respuestas diferentes a la pregunta fundamental “Qué es esa cosa llamada aprendizaje”, la dicotomía individual/social no implica una controversia en la definición de aprendizaje sino que recae en diferentes visiones del mecanismo para aprender.

Como ya se dijo, para los participacionistas el aprendizaje tiene que ver primero y ante todo, con el desarrollo de las formas en las cuales un individuo participa en actividades comunales bien establecidas. Por lo tanto, el investigador participacionista es sensible a las interacciones que se llevan a cabo y que estimulan este desarrollo, más que a aquellas propiedades del individuo que se pueden considerar responsables de la constancia de su comportamiento. Esta visión implica que debemos estar menos interesados en las explicaciones basadas en lo no observable, como los esquemas mentales, que en las descripciones de los procesos de aprendizaje, sus patrones y mecanismos. Las descripciones deben ser realizadas prestando especial atención a las dimensiones, hasta ahora olvidadas, de una situación de aprendizaje que subyace a la creciente habilidad del estudiante para crear y mantener la “relación de mutuo compromiso para interactuar” con otros miembros de la comunidad (Wenger, 1998, p. 81). En palabras más simples, el investigador participacionista se centra en el crecimiento de la comprensión y coordinación mutua entre el estudiante y el resto de la comunidad. Todo esto significa que mientras los adquisicionistas están principalmente interesados en señalar invariantes intercontextuales del aprendizaje, los participacionistas cambian el foco a la actividad misma y a sus dimensiones cambiantes que dependen del contexto. En el caso de Ari y Gur, de nuestro primer ejemplo, esto significa analizar la conversación prestando atención a todos esos elementos y circunstancias de la actividad conjunta de los muchachos que hacen ineficaz su intercambio. En el caso de Noa y Rada, esto significa hacer la pregunta paralela acerca de los mecanismos de interacción que llevaron a la estudiante a coincidir con la profesora. En los dos casos el giro hacia los aspectos de la interacción del aprendizaje implica atender muchos factores que, hasta ahora, habían sido considerados irrelevantes para el asunto del desarrollo cognitivo.

4 La autora se refiere al volumen 46 de la revista *Educational Studies in Mathematics* en la que se publicó inicialmente el texto que constituye el presente capítulo. [N.E.]

5 Un número considerable de unidades de análisis de las propuestas por los representantes de diferentes escuelas socioculturales, parecen ser buenas candidatas para el tipo de estudio que requieren los participacionistas. Entre las

En efecto, la inclusión de la comunidad en el panorama del aprendizaje afecta el alcance de las cosas que se deben considerar cuando se estudia el cambio en las formas de actuar de un recién llegado a una comunidad de práctica. Cuando se mira al estudiante no como una entidad aislada sino como parte de un todo más amplio, el estudiante se convierte en un aspecto de una nueva unidad de análisis mucho más amplia⁵, muchos de cuyos elementos se deben tener en cuenta aun si la intención final del estudio es el cambio en el individuo. En los dos episodios anteriores, esto significa que describir todo lo que pasa entre los interlocutores exclusivamente en términos de la cognición independiente, es decir, de las capacidades y de los contenidos de las mentes de los actores (lo que sea que se entienda con estos dos términos), significaría pasar por alto gran cantidad de aspectos y factores de cambio. Al final de cuentas, seguramente esto conduce a una figura empobrecida, y de poca ayuda, si no distorsionada, del aprendizaje.

Los participacionistas dicen que no sólo el éxito en la resolución de problemas resulta ser sumamente susceptible al contexto de la actividad, sino que también las maneras de actuar de las personas podrían cambiar de una situación a otra⁶. Así, el aprendizaje escolar abstracto puede tener la ventaja teórica de un alcance más amplio, pero en realidad con frecuencia resulta ser mucho

que se conocen y aplican más ampliamente están la *actividad*, unidad propuesta por los teóricos de la actividad, el *discurso* o sus segmentos, unidad sugerida por los psicólogos discursivos, y la *práctica*, presentada por aquellos participacionistas que están más fuertemente orientados hacia los asuntos sociológicos.

6 Es interesante notar que esta afirmación aparentemente ‘factual’ es objeto de vigoroso debate entre los cognitivistas tradicionales y los adeptos al enfoque sociocultural. La controversia con frecuencia está enmarcada en el lenguaje de la transferencia del aprendizaje: mientras la creencia de los adquisicionistas en la posibilidad de transferencias de largo alcance se mantiene firme a pesar de una evidencia empírica bastante pobre, los participacionistas o niegan dicha posibilidad, o simplemente dicen, como Lave (1988), que el concepto de transferencia está fundamentalmente mal concebido. En realidad, un seguidor coherente del marco participacionista debe, tarde o temprano, darse cuenta de que la idea de transferencia, que implica ‘desplazamiento’ de ciertas entidades mentales, simplemente no encaja con la conceptualización participacionista del aprendizaje (véase también el debate en curso sobre la transferencia en *Educational Researcher*, e.g., Brown, Collins y Duguid, 1989; Anderson, Reder y Simon, 1996; Greeno, 1997; Sfard, 1998a; Cobb y Bowers, 1999).

7 Esta definición de aprendizaje fue propuesta por Lave y Wenger (1991). Ya en la dé-

menos eficaz que la participación como aprendiz en el restringido repertorio de actividades específicas para las cuales la persona desea prepararse. Obviamente, esta creencia tiene muchas implicaciones tanto para la práctica como para la investigación educativa. Los participacionistas recomiendan el ‘aprendizaje cognitivo’ (Brown, Collins y Duguid, 1989) como un modo ideal de aprendizaje, y en tanto investigadores están interesados tanto en la “participación periférica legítima”⁷ que se da a nivel informal y en el lugar de trabajo, como en el aprendizaje escolar institucionalizado.

Existe aún otra cuestión de larga tradición que parece incitar a debates acalorados entre adquisicionistas y participacionistas, ya que toma en consideración la naturaleza y las fuentes del conocer humano. El interés de los adquisicionistas en factores universales con los que se explican los aspectos del aprendizaje que parecen relativamente insensibles al contexto social, cultural, histórico y situacional, implica un énfasis en las circunstancias del aprendizaje que no dependen del hombre, como el encuentro directo entre éste y el mundo, y una gama de determinantes biológicos, desde la herencia hasta el crecimiento fisiológico y la estructura del cerebro humano. Los participacionistas que consideran el aprendizaje como iniciarse en una cierta práctica humana, obviamente cambian el énfasis hacia la sociedad como el entorno que produce y apoya esta práctica. En efecto, el profundo escepticismo de los participacionistas con respecto a los invariantes comunes a diversas culturas está alimentado por su visión del aprendizaje que empieza y termina en la sociedad —generado por la necesidad de interacción y de comunicación e impulsado hacia su crecimiento continuo. Dado que nuestra supervivencia básica depende de ser parte de una comunidad, esta necesidad de comunicación parece inherente a la naturaleza humana. Una gran sensibilidad hacia nuestras formas de actuar en contextos sociales, culturales, históricos y situacionales es una consecuencia inevitable del hecho de que las actividades en sí mismas, más que ser determinadas por un mundo externo no humano, tienen sus raíces en nuestra herencia cultural, y son moldeadas y remoldeadas constantemente por generaciones sucesivas de

cada de 1970 la ‘cognición en el trabajo’ empezó a atraer la atención de los investigadores, y recientemente se ha estado convirtiendo en el tema de estudio favorito para los interesados en el aprendizaje (véanse, e.g., Engstrom y Middleton (1996); <http://www.helsinki.fi/~jengestr/activity/1.htm>). Muchos de estos estudios pueden parecer simples registros de lo que las personas hacen en los sitios de trabajo y de cómo lo hacen. Sin embargo, si se acepta la definición de Wenger (1998) de la práctica como historia del aprendizaje, entonces hacer y aprender se vuelven prácticamente lo mismo.

8 Como lo anotan muchos, entre otros Bruner (1990), el asunto ‘naturaleza o crianza’ está

practicantes. Esta discusión entre adquisicionistas y participacionistas hace eco claramente a la controversia de años, que gira en torno a naturaleza o crianza, y se puede ver como su versión moderna⁸. En nuestros ejemplos, la manera como los participacionistas proponen enfocar el dilema, sugiere que, en un intento de explicar el desempeño de Gur o de Noa, se debe prestar mucha atención a la variedad de factores contextuales antes de decidir explicar el desempeño de los niños en términos de valoraciones tajantes tales como su ‘habilidad matemática’ o su carencia de ella.

CONCEPTUALIZACIÓN DEL PENSAMIENTO COMO ACTO COMUNICATIVO

Aunque la metáfora de la participación puede ahora parecer muy bien definida, muchos de los intentos por convertir sus implicaciones en una base sólida para la investigación y para la toma de decisiones prácticas están aún en sus etapas iniciales. Como lo expresó Cole:

En ninguna parte estas ideas están tan desarrolladas como para que sea posible referirse a ellas como un paradigma científico maduro con fundamentos teóricos aceptados generalmente, una metodología, y un conjunto de prescripciones bien delimitado para relacionar la teoría con la práctica. (Cole, 1995, p. 187)

Las palabras ‘estas ideas’ de la cita se refieren a los principios que subyacen al enfoque sociocultural de la cognición, y el enunciado mismo, proferido hace casi una década⁹, aún parece estar vigente. Sin embargo, en estos días, si no la situación misma, al menos las posibilidades para encontrar lo que todavía hace falta, parecen mejores. En esta última década, se han hecho algunos pocos intentos notables por constituir marcos de trabajo que satisfagan los estándares de un ‘paradigma de investigación maduro’ y que al mismo tiempo respeten los principios básicos del enfoque sociocultural. El *enfoque comunicacional* presentado en el resto de este capítulo es actualmente uno de los productos disponibles de estos intentos. Esta perspectiva, con sus raíces en los escritos vygotskianos y con sus ramificaciones en el pensamiento filosófico y sociológico contemporáneo (e.g., Wittgenstein y pensadores franceses postmodernos) y en recientes avances en lingüística, parece tener una probabilidad particularmente alta de

probablemente mal propuesto. Tiene sus raíces en lo que puede ser denominado ‘la primera falacia del hardware’: la convicción de que siempre que se encuentra una diferencia psicológica entre dos grupos de gente, esta diferencia puede ser considerada como causa de las diferencias en los comportamientos de los dos grupos. Actualmente es claro que la perspectiva unidireccional de causalidad de la relación entre los factores biológicos y cognitivos tiene

convertirse en un marco de trabajo de investigación bien fundamentado que cumpla a cabalidad con los requerimientos especificados por Cole.

El principio básico del enfoque comunicacional para el estudio de la cognición humana es que *el pensamiento se puede conceptualizar como un caso de comunicación*, es decir, como la comunicación con uno mismo. En efecto, nuestro pensamiento es claramente una tarea dialógica en la que nos informamos a nosotros mismos, argumentamos, hacemos preguntas, y esperamos nuestra propia respuesta. La conceptualización del pensamiento como comunicación es una implicación casi ineludible de la tesis acerca de los orígenes inherentemente sociales de todas las actividades humanas. Quien quiera que crea, como Vygotsky, en la prioridad del desarrollo del habla pública comunicativa sobre el habla privada interior (e.g., Vygotsky, 1987) debe también admitir que ya sea que se tome en consideración la filogenia o la ontogenia, el pensamiento surge como una versión privada y modificada de la comunicación interpersonal. Todo esto resulta en la afirmación de que el pensamiento no es más que la comunicación con uno mismo, no necesariamente interior, y no necesariamente verbal. En este punto es importante enfatizar la diferencia crucial entre esta afirmación y la hipótesis de vieja data que equipara pensamiento con conversación interna: la palabra *comunicación* se usa aquí en sentido muy amplio y no se confina a interacciones mediadas por el lenguaje. Esta conceptualización de cognición, aun si no se hace explícita, parece encontrar lugar dentro del pensamiento psicológico actual. Harre y Gillett (1995) llegan hasta el punto de declarar el surgimiento de una nueva clase de psicología, que ellos denominan *discursiva*. Estos autores han descrito la *psicología discursiva* como una cuyo sostén es una suposición similar a la que acabamos de mencionar: “Los usos individuales y privados de los sistemas simbólicos, que ... constituyen el pensamiento, se derivan de procesos discursivos interpersonales que son el rasgo principal del entorno humano” (p. 27). La razón por la que describo el presente enfoque con el término *comunicacional* en vez de *discursivo*, a pesar de su clara semejanza con la posición que asumen Harre y Gillett (compartida posiblemente por otros; véase, e.g., Edwards, 1997), es que el primero difiere del segundo en sus fundamentos epistemológicos y esta diferencia tiene grandes consecuencias en términos de implicaciones teóricas y metodológicas. Esta diferencia será explicada en uno de los siguientes párrafos.

Se debe señalar una serie de implicaciones inmediatas de esta conceptualización. En primer lugar, dado que la comunicación se puede definir como el intento de una persona para hacer que un interlocutor actúe, piense o sienta de acuerdo con las intenciones de esa persona (cf. Levinson, 1983; Sfard, 2000a, b), la investigación que considera la cognición como una actividad comunicativa, de hecho, se centra en el fenómeno de la regulación mutua y de la autorregulación.

Es precisamente este fenómeno el que Leont'ev señaló como un rasgo distintivo del ser humano: “No encontramos en el mundo animal ninguna forma especial de acción que al llamar la atención de otros individuos tenga como fin único y particular el dominio de su comportamiento” (Leont'ev, 1930, p. 59, citado en Cole, 1988). Así, cuando se mira la cognición como una forma de comunicación, un individuo se convierte automáticamente en un nexo en la red de relaciones sociales —causa y efecto de dichas relaciones. Esto se cumple tanto si ese individuo está en una interacción con otros en tiempo real como si actúa solo. Cualquier intento que se haga por comprender a los seres humanos, ahora debe tener en cuenta que todas las acciones y obras humanas están guiadas, en una forma u otra, por fuerzas de cohesión social, es decir, por el hecho de que, al igual que los diferentes órganos de nuestro cuerpo, el individuo no existe más que como parte de un todo.

Además, de la visión de cognición propuesta se deriva que el pensamiento está subordinado a la exigencia de hacer eficaz la comunicación y también está informado por tal exigencia. Cuando se vincula este hecho al análisis de mecanismos cognitivos, el primer punto que se debe tener presente es que las fuerzas básicas que guían la comunicación, y por tanto los mecanismos básicos, son casi las mismas sea que se trate de la comunicación con uno mismo o con los demás. En segundo lugar, en este enfoque la dicotomía pensamiento/comunicación prácticamente desaparece, y el habla ya no se considera como una simple ‘ventana hacia la mente’ —como una actividad secundaria al pensamiento, que se encarga solamente de ‘expresar’ un pensamiento ya elaborado. Aunque aún existe espacio para la discusión sobre el pensamiento y el habla como cosas diferentes, estas dos ‘cosas’ se deben entender como aspectos inseparables de básicamente uno y el mismo fenómeno, sin que alguno de ellos preceda al otro.

EL APRENDIZAJE COMO INICIACIÓN A UN DISCURSO

En este marco conceptual, el foco de estudio está en el discurso. En nuestra investigación, el término *discurso* se usará para denotar cualquier caso específico de comunicación, ya sea diacrónica o sincrónica, con los demás o con uno mismo, predominantemente verbal o apoyada en cualquier otro sistema simbólico. El significado particularmente amplio del término en el presente contexto implica la inclusión de instancias que probablemente se excluirían de la categoría de discurso según los usuarios habituales del término. Por ejemplo, la producción de un texto escrito u oral, a menudo considerada como el rasgo que define al discurso, no es un ingrediente necesario de lo que nosotros consideraremos como ‘discursivo’. Usaré una sola regla para decidir si un cierto aspecto de una

situación observada ha de ser o no considerado como un componente del discurso: puesto que los discursos se analizan como actos de comunicación, todo lo que haga parte de la comunicación e influya en su eficacia —movimientos corporales, factores situacionales, historias de los interlocutores, etc.— debe ser incluido en el análisis.

Aprender matemáticas se puede definir ahora como una iniciación al discurso matemático, es decir, a una forma especial de comunicación conocida como matemática. Examinemos los factores que están automáticamente incluidos en el estudio del pensamiento como acto comunicativo y que dictan lo que una persona debe aprender para convertirse en un participante diestro de un discurso particular. Dos tipos de factores merecen una atención particular: las *herramientas de mediación* (o simplemente *mediadores*) que las personas utilizan como medios de comunicación, y las reglas metadiscursivas que regulan el esfuerzo comunicativo. Las herramientas dan forma al contenido, es decir, a los aspectos del discurso que están en el nivel de los objetos (cf. Sfard, 2000b; Sfard y Kieran, 2001b); las *reglas metadiscursivas* moldean, posibilitan y orientan las actividades comunicativas (Sfard, 2000c). La descripción más detallada que se presenta a continuación, explica por qué tanto las herramientas de mediación como las reglas metadiscursivas pueden ser consideradas como las principales portadoras de la herencia cultural.

Factores que dan su identidad a los distintos discursos: herramientas mediadoras y reglas metadiscursivas

Primero dirijamos la mirada hacia las *herramientas mediadoras*. “El hombre difiere de los animales en que puede hacer y usar herramientas”, dice Luria (1928, p. 493). La comunicación, ya sea interpersonal o con uno mismo (pensamiento), no sería posible sin herramientas simbólicas, entre las cuales el lenguaje es la más destacada. En los ejemplos iniciales, la notación numérica, las gráficas, las tablas y las fórmulas algebraicas son herramientas simbólicas adicionales que los muchachos usaron. Se puede observar qué tan estrecha es la relación entre las maneras en que conceptualizamos y las maneras en que simbolizamos, por ejemplo, a partir del hecho de que todas nuestras referencias verbales a los números (véase, e.g., las de Noa en la Figura 3) muestran distintas evidencias de la notación decimal, ya sea que en realidad hagan explícitos los numerales decimales o no. (Piénsese, por ejemplo, en la forma en que mentalmente realizamos un cálculo, en especial, la multiplicación por diez.)

Esta última afirmación, que se refiere al papel de los símbolos en el pensamiento, es tan relevante para la presente discusión que amerita una explicación

adicional. Contrario a lo que comúnmente implica la comprensión de una herramienta en general y de una herramienta simbólica en particular, en el marco comunicacional, los artefactos usados en la comunicación no se conciben como simples medios auxiliares para proporcionar expresión al pensamiento preexistente y preformado. En cambio, se perciben como parte integrante del acto de la comunicación, y por tanto de la cognición (para una discusión detallada véase Sfard, 2000a). Por consiguiente, en ningún sentido se puede decir que el pensamiento tiene existencia independiente de las herramientas simbólicas que se usan en el proceso de comunicación. Esto significa, entre otras cosas, que debemos considerar más bien sin sentido enunciados tales como “el mismo pensamiento ha sido transmitido por diferentes medios” (lo que, sin embargo, no significa que no podamos *interpretar* dos expresiones de la misma manera, siendo *interpretación* y *pensamiento* dos cosas diferentes). En otras palabras, no existe ‘esencia cognitiva’ o ‘pensamiento puro’ que se pueda extraer de una representación simbólica y ponerla en otra.

Permítaseme decir ahora unas pocas palabras acerca de las *reglas metadiscursivas*. Aunque las herramientas desempeñan una función central en lo que concierne a formar los aspectos visibles, en el nivel de los objetos (con relación al contenido) del discurso, las reglas metadiscursivas son las que guían el curso general de las actividades comunicativas. Es digno de mencionar que las reglas metadiscursivas son principalmente invisibles y actúan ‘tras bambalinas’. Debido a su naturaleza implícita, y a pesar de su ubicuidad, en el pasado no se les había dado ninguna atención directa. Por estos días, la situación está cambiando de manera bastante rápida, a medida que el interés general en el marco participacionista y en actividades discursivas de comunidades ‘de habla matemática’ empieza a extenderse (véanse, e.g., Voigt, 1985, 1996; Bauersfeld, 1995; Lampert, 1990; Lampert y Blunk, 1998; Forman, 1996; Forman y Larreamendy-Joerns, 1998; Cobb, Wood y Yackel, 1993; Yackel y Cobb, 1996; O’Connor, 1998; Morgan, 1996; Sfard, 2000a, b, c; para una recopilación, véase Lampert y Cobb, 2003).¹⁰

Es importante establecer enseguida que el término *reglas metadiscursivas* es muy amplio y que, debido a ciertas sutilezas de su pretendido significado, es propenso a malinterpretaciones. Lo primero que hay que advertir es que la idea es cercana a muchos otros conceptos relativos al discurso, conocidos en la literatura

poco fundamento. Descubrimientos recientes han mostrado que las actividades humanas, más que ser determinadas por un sistema neural preformado, son en parte responsables de la estructura y funcionamiento de este sistema. Por tanto, parece que la cultura humana evolutiva se perpetúa a sí misma no sólo al afectar la mente humana sino también al cambiar su cerebro; este proceso de cambio ocurre en los niveles filogenético y ontogenético.

filosófica, sociológica y antropológica. Así, por ejemplo, no es del todo diferente a lo que Wittgenstein (1953) llama *juegos del lenguaje* y lo que Bordieau (1999) denomina *disposiciones* (que en conjunto constituyen *habitus*). También está relacionada con lo que Goffman (1974) refiere como *marcos* de interacción (véase también Bateson, 1973), y lo que Bruner (1983) incluye en la idea de *formato*. La búsqueda de semejanza también debe conducir inevitablemente al trabajo de Schutz (1967) en sociología y al de Garfinkel (1967) en etnometodología. En el dominio de la educación matemática, se puede pensar que el término *normas sociomatemáticas* usado por varios autores (e.g., Yackel y Cobb, 1996) describe un cierto subconjunto de reglas metadiscursivas aun si hay una diferencia sutil entre las nociones de *regla* y *norma* (véase la discusión sobre esta diferencia en Sfard, 2000c). Esto, para decir que el término *regla metadiscursiva* usado en este capítulo no es un constructo del todo nuevo sino más bien un término casi autoexplicativo que se supone incluye todos los fenómenos señalados por las nociones enumeradas antes.

Es importante enfatizar que de acuerdo con la idea de Wittgenstein de juegos del lenguaje y con el enfoque de Bordieau para el asunto de las regulaciones sociales, el término *metarregla* se debería entender como “una hipótesis explicativa construida por el teórico para explicar lo que él ve” (Bouveresse, 1999) más que para explicar lo que está ‘realmente ahí’. Es decir, usualmente, las metarreglas no son algo de lo que los interlocutores tengan plena consciencia o sigan de manera consciente. Lo que un analista del discurso ve como una regla metadiscursiva se puede comparar con lo que un físico considera que es una ley de la naturaleza: la regularidad es percibida por quienes observan pero no necesariamente por quienes son vistos ‘usándola’¹¹. Tomando como punto de partida el estatus interpretativo de la regla metadiscursiva, ahora puedo ser un poco más específica con respecto a este concepto, a la vez que trato de ilustrarlo con unos ejemplos (véase un tratamiento mucho más detallado en Sfard, 2000c).

En el marco comunicacional, las reglas metadiscursivas se deben entender como reglas que se expresan a sí mismas en regularidades observadas en aquellos aspectos de las actividades comunicativas que no están directamente relacionadas con el contenido particular del intercambio (lo que no significa

9 La cita se tomó de un texto que se presentó por primera vez en una conferencia en 1992.

10 Se pueden distinguir dos tendencias diferentes en la investigación que se enfoca en el discurso y sólo una de ellas ve la comunicación como verdaderamente relevante para los procesos cognitivos si no es que los identifica con aquélla. La otra tendencia, menos

que las reglas no tengan un impacto en la comprensión del contenido por parte de los interlocutores o que ellas no cambien cuando el contenido cambia). De acuerdo con reglas metadiscursivas, las personas llevan a cabo acciones que se consideran apropiadas en un contexto dado y se abstienen de comportamientos que se ven fuera de lugar. En el caso del discurso matemático, esta categoría de reglas incluye aquellas que subyacen a las formas estrictamente matemáticas de definir y probar. Además, es gracias a metarreglas que se siguen de manera espontánea y no reflexiva como los interlocutores son capaces de conducir un intercambio interpersonal y regular la comunicación con sí mismos. Es dentro del sistema de metarreglas donde las normas, los valores y las creencias específicamente culturales de las personas son codificadas. La forma en que las herramientas simbólicas se deberían usar en un tipo dado de comunicación es un aspecto más donde se puede identificar una categoría distinta de metarreglas. Existen además conjuntos especiales de metarreglas involucradas en regular el posicionamiento mutuo de los interlocutores y en moldear sus identidades.

La variedad de metarreglas que orientan y moldean un discurso particular es obviamente muy amplia y heterogénea, junto con las metarreglas específicas para este discurso particular, contiene una considerable cantidad de regulaciones implícitas relacionadas con aspectos más generales de la comunicación, que probablemente son comunes a una amplia variedad de discursos (Cazden, 1988). Es importante enfatizar que las reglas metadiscursivas son responsables no sólo de las formas en que la gente se comunica, sino ante todo del hecho mismo de que sean capaces de hacerlo. Estas reglas tienen un efecto que permite la eliminación de una infinidad de posibles movimientos discursivos y deja a los interlocutores sólo con un número manejable de posibilidades.

Ya que las metarreglas son tácitas, usualmente se enseñan y se aprenden ‘sobre la marcha’, sin que de tal aprendizaje sean conscientes profesores y estudiantes. Algunas de las metarreglas que se incluyen en este currículo oculto son realmente indispensables, otras pueden entrar en escena aun en contra del buen criterio del profesor. El análisis profundo que busca elicitar estos ingredientes tácitos del aprendizaje puede conducir a una reevaluación de ciertos principios educativos. Tal como lo argumentaré más adelante cuando haga una revisión de los ejemplos planteados al inicio, dicho análisis a menudo podría mostrar que aun aquellas metarreglas ‘indeseadas’ pueden ser medios efectivos, y algunas veces irremplazables, para el aprendizaje significativo.

La afirmación de que el enfoque comunicacional tiene la probabilidad de convertirse en un marco de trabajo para la investigación bien fundamentado no puede ser del todo convincente a menos que nos aseguremos de la posibilidad de complementarlo con una metodología sólida. Aunque los esfuerzos para construir dicha metodología están aún en proceso, es bastante claro que la conceptualización del pensamiento que se ha propuesto implica una gama amplia de estrategias de recolección de datos y se puede esperar que produzca una familia ricamente diversificada de métodos analíticos. Además de los análisis del discurso y de la conversación ya existentes, quienes trabajan dentro del enfoque comunicacional de la cognición, todavía tienen por construir y poner a prueba sus propios métodos para el manejo de datos, y adaptarlos de acuerdo a sus necesidades específicas. Dichos métodos parecen estar en proceso (véanse, e.g., Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998; Lampert y Blunk, 1998). Más que todo, gracias a la desaparición de la dicotomía cognición/comunicación, el presente objeto de estudio —los procesos discursivos— es mucho más accesible que el tradicional —los procesos cognitivos ‘en la mente’.

Permítaseme advertir que, hace algunas décadas, Wittgenstein (1953) hizo público un argumento poderoso en contra del mentalismo, ya que exigía que el discurso psicológico fuera purificado de cualquier referencia a los ‘estados mentales’ y a las entidades ‘en la mente’ de naturaleza no observable. En las aproximaciones a la cognición que se están desarrollando en la actualidad, tal exhortación se está interpretando y operacionalizando en más de una forma. A pesar de que los psicólogos discursivistas están listos a responder de forma inmediata a este llamado de Wittgenstein (Harre y Gillet, 1995; Edwards, 1997), el conductismo lógico extremo no es el punto de vista que se establece en este capítulo. En la definición de comunicación que subyace al enfoque comunicacional se hace referencia a dichas entidades ‘no observables’, tales como las *intenciones* de las personas, y con frecuencia, si no siempre, aparecen en forma predominante en los análisis que se llevan a cabo dentro de este marco de trabajo. De forma más general, la suposición importante aquí es que nuestras experiencias, sentimientos e intenciones son centrales para todas nuestras decisiones, y por esto no se pueden dejar de lado en un intento serio por comprender las acciones humanas. Sin embargo, a la luz de la advertencia bien argumentada de Wittgenstein, incluso los que están de acuerdo con esta suposición podrán preguntarse cómo se pueden investigar dichas ideas mentalistas de la ‘experiencia humana’. Recordemos entonces que cuando Wittgenstein estaba haciendo la advertencia en contra del

lenguaje mentalista, lo hacía por la preocupación de una posible circularidad de las definiciones resultantes. Sin embargo, se puede mostrar que el peligro de la circularidad desaparece si nos abstenemos de hacer comparaciones entre los estados mentales de personas diferentes. En realidad, el uso de términos tales como *intenciones* es seguro en la medida en que se entienda que el estatus de cualquier afirmación que el investigador haga de las intenciones de otras personas es *interpretativo*, y de esta manera, las comparaciones se establecen entre las *interpretaciones que el investigador haga* de las intenciones de otras personas (para una discusión más completa véase Sfard y Kieran, 2001b).

La conclusión final de estas últimas consideraciones es que la única posibilidad viable para el investigador es proporcionar una *interpretación convincente* de los fenómenos observados, en lugar de una explicación definitiva. La interpretación debe ser tan convincente, contundente y fidedigna como sea posible, pero, no obstante, siempre permanecerá sujeta a cuestionamientos y modificaciones. Como intérpretes, no debemos establecer ninguna afirmación sobre la exclusividad o el carácter definitivo: la calidad de tentativa es la propiedad endémica de la interpretación, y la coexistencia de interpretaciones alternativas (o complementarias) forma parte del marco interpretativo.

¿CÓMO CAMBIA EL PANORAMA EL ENFOQUE COMUNICACIONAL? RETOMAR LAS PREGUNTAS INICIALES

Ahora es tiempo de mostrar de qué manera el enfoque comunicacional, entendido como se expuso en la sección anterior, puede aportar a nuestra comprensión de las preguntas iniciales. Permítaseme entonces retomar esas preguntas y tratar de observarlas a través de lentes conceptuales que equiparan el pensamiento con el acto comunicativo.

¿Por qué los estudiantes tienen éxito o fracasan en las tareas matemáticas? ¿Cuál es la naturaleza del fracaso y cuál su mecanismo?

Volvamos al episodio *La pendiente*, presentado en las Figuras 1 y 2. Vamos ahora a involucrarnos en una actividad no muy diferente a la de los arqueólogos que usan vestigios escasos de un vaso antiguo para reconstruir el vaso original. Si pensar es comunicar, entonces una conversación entre dos personas es una combinación compleja de varios intentos de comunicación, interrelacionados de forma estrecha y parcialmente sobrepuestos, de los cuales sólo algunos son accesibles a los observadores pero todos influyen en los otros. Lo que realmente

se oye correspondería a los vestigios disponibles del vaso, y mediante la interpretación se agregan sustitutos de las partes faltantes. Aunque los elementos reconstruidos son producto de la imaginación del arqueólogo, ayudan a integrar las piezas en un todo.

En el presente marco de trabajo, el fracaso de Gur se entiende como una falla de comunicación. En efecto, en el enfoque comunicacional ya no deberíamos considerar que el fracaso sea de Gur. Aunque es cierto que el muchacho resulta ser incapaz de sostener un diálogo eficaz ya sea con su compañero o consigo mismo, probablemente también es cierto que esta incapacidad no es propiedad inherente de Gur sino más bien la propiedad de la interacción entre los dos muchachos y posiblemente un producto de ésta. Para entender mejor este punto, examinaré con detenimiento y de manera detallada la forma en que evoluciona la comunicación. Revisar la forma en que el contenido matemático se desarrolla es lo primero pero no lo único que se debe hacer. En párrafos anteriores hablábamos de factores tácitos que pueden tener un impacto considerable en el curso y la eficacia de las interacciones discursivas. En un intento por entender las razones de la persistente ineficacia de la comunicación también examinaré estos factores ocultos. Con este propósito en mente, usaré dos tipos de análisis que se complementan mutuamente, ya que uno de ellos se encarga de los aspectos de la comunicación en el nivel de los objetos mientras que el otro se encarga de los factores del nivel metadiscursivo o metanivel. Estos dos métodos, denominados análisis *focal* y análisis *preocupacional* respectivamente, se integran a un conjunto en rápido crecimiento de herramientas analíticas, que por estos días construimos quienes creemos que las respuestas a muchas preguntas persistentes acerca de la forma en que los seres humanos están en el mundo pueden encontrarse en el ‘rastros discursivo’ que los seres humanos dejan detrás de sí. Los dos tipos específicos de análisis¹² que se presentan a continuación fueron desarrollados por Carolyn Kieran y yo cuando considerábamos asuntos como los que han surgido en este capítulo.

Análisis focal. En primera instancia exploraré más a fondo el asunto de la eficacia de la comunicación que empieza a destacarse en el momento en que la cognición se conceptualiza en términos comunicacionales. Esta última noción, *eficacia de la comunicación*, se puede presentar como dependiente del grado

radical, refleja el interés en la comunicación como una ayuda para aprender, más que como un objeto de aprendizaje en sí mismo.

11 Para evitar una implicación no deseable de la metáfora, permítaseme agregar de

de claridad del *foco discursivo*; la comunicación no se considerará como eficaz a menos que, en un momento dado, todos los participantes sepan de qué están hablando y confíen en que todas las partes involucradas se refieren a las mismas cosas cuando usan las mismas palabras. La palabra *foco* requiere explicación. Mientras se trataba de definir este término en nuestro proyecto de Montreal, primero lo consideramos como *la expresión que usa un interlocutor para identificar el objeto de su atención*. Más tarde, debido a que somos conscientes de la importancia de las herramientas mediadoras de la comunicación, pensamos que sería importante incluir alguna indicación sobre *a qué y cómo* una persona *presta atención* (observa, escucha, etc.) cuando habla o piensa. Por lo tanto, decidimos considerar dos ingredientes focales, el *locutivo* y el *perlocutivo* (por ejemplo, en la verbalización de Ari “Ah, no, el intercepto es el cero” [11b] el foco locutivo está constituido por las palabras ‘el intercepto’ y el foco perlocutivo es el procedimiento de búsqueda que él usa para localizar el intercepto en la tabla). Sin embargo, sabemos que hay más en la comunicación que los aspectos locutivo y perlocutivo. Cualquier cosa que se exprese o se vea evoca todo un conglomerado de experiencias, y relaciona a la persona con una colección de enunciados que ahora es capaz de hacer acerca del ente identificado por el foco locutivo. Decidimos dar el nombre de foco *ilocutivo* a esta colección de experiencias y potenciales discursivos (en el caso de la verbalización de Ari, citada antes, el foco ilocutivo está constituido por todos los enunciados que el muchacho es capaz de hacer y todos los focos perlocutivos a los que es capaz de dirigir su atención, mientras usa ‘el intercepto’ como un foco locutivo). Ahora podemos usar estos términos para decir que la dificultad en la comunicación humana se deriva del hecho de que el *foco ilocutivo*, que parece ser el factor definitivo del asunto, es esencialmente un ente dinámico y privado que cambia entre una y otra verbalización. Sin embargo, con frecuencia esta dificultad puede tener una solución directa: el foco perlocutivo se puede usar como un exponente público del foco ilocutivo, y de esta manera juega un papel primordial en el éxito de la comunicación.

Permítaseme aplicar el análisis focal al episodio *La pendiente*. Es conveniente empezar por observar con detenimiento las verbalizaciones de Ari con el propósito de preparar un fondo de contraste para el caso de Gur. El flujo del foco tripartito de Ari se muestra en la Tabla 1. Es probable que el rasgo más destacado de la conversación del muchacho sea que ella está bien articulada por el foco ilocutivo. Aunque las diferentes verbalizaciones se fundamentan en diferentes focos locutivos, e implican focos perlocutivos que difieren, todas parecen referirse ya sea a la pendiente o al intercepto de la misma función de gráfica lineal.

Esta estabilidad del foco ilocutivo justifica comparar el discurso de Ari sobre la función g con lo que alguna vez llamé “verdaderos discursos sobre la realidad” (Sfard, 2000a), cuya característica principal es que versan sobre objetos materiales, y son guiados y orientados por retratos reales o imaginarias de esos

Tabla 1: Episodio *La pendiente* - Análisis del foco tripartito de Ari

Verbalizaciones	Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo
[1a], [1b], [11a] [1c], [11b] [1c] [11b]	“la pendiente” “el intercepto” “cinco negativo” “El cero”	Intercepto en la tabla^a: 1. Encuentra 0 en la columna de la izquierda de la tabla 2. Encuentra en la columna de la derecha de la tabla, el número que corresponde a ese 0	El intercepto
[3], [5]	“Pendiente”	Fórmula de la pendiente^b: El coeficiente de x en la fórmula $5x + -5$	La pendiente
Escribe: $5x + -5$		Fórmula del intercepto^c: El coeficiente libre en la fórmula $5x + -5$	El intercepto
[1d], [13], [15], [19]	“Pendiente”	Pendiente en la tabla^d: 1. Va al 0 en la columna de la izquierda de la tabla 2. Verifica el tamaño del incremento entre números sucesivos de la columna de la izquierda 3. Si el incremento es 1, simplemente encuentra la diferencia entre un número y el que está inmediatamente arriba en la columna de la derecha	La pendiente
Nótese que al mirar la figura se debe tener en mente que las palabras <i>pendiente</i> e <i>intercepto</i> , usadas en el análisis focal, se refieren a características abstractas de objetos matemáticos abstractos (funciones de gráfica lineal), más que a cualquier clase de símbolos. Por ejemplo, la pendiente es aquella característica de las funciones de gráfica lineal que tiene su expresión ‘material’ en el coeficiente de x en la fórmula $ax + b$, en el incremento del valor de y correspondiente a un incremento de 1 en el valor de x , y en la inclinación de la gráfica. Decimos que la pendiente está representada por todos estos medios simbólicos pero no es ninguno de ellos en particular.			

- “Intercepto en la tabla” es un procedimiento perlocutivo para identificar el intercepto de una función con la ayuda de una tabla; también puede ser descrito en términos estructurales como b. “la contraparte en la columna de la derecha, del cero que está en la columna de la izquierda”.
- “Fórmula de la pendiente” es un procedimiento perlocutivo para identificar la pendiente de una función con la ayuda de una fórmula.
- “Fórmula del intercepto” es un procedimiento perlocutivo para identificar el intercepto con la ayuda de una fórmula.
- “Pendiente en la tabla” es un procedimiento perlocutivo para identificar la pendiente de una función con la ayuda de una tabla.

objetos. En realidad, la forma en que el muchacho usa la función y las nociones relacionadas (tales como pendiente, intercepto, valores específicos de la función) recuerda, en muchos aspectos, la forma en que la gente habla, por decir algo, de los árboles, las sillas y las personas. En el discurso de Ari sobre las funciones, así como en los discursos sobre cosas materiales, el objeto bajo consideración parece preservar su identidad mientras que su imagen y sus aspectos perlocutivos cambian de una verbalización a otra. Parece como si Ari realizara una serie de zums de acercamiento y alejamiento desde este objeto (la función) a su parte específica (la pendiente), luego a la función completa una vez más, y luego a su otro ingrediente específico (e.g., el intercepto). Lo que hace que la metáfora del zum sea convincente es la facilidad y la confianza con las que Ari hace las transiciones de un elemento relacionado con la función a otro. Otro fenómeno notorio es la agilidad con la que el muchacho se mueve entre diferentes representaciones: de sus procedimientos perlocutivos bien definidos para, por decir algo, encontrar la pendiente en la tabla, pasa al procedimiento que involucra la fórmula, y luego regresa al primero. Véase, por ejemplo, cómo en [1d], [3], [5], [13], [15] y [19] reparte su atención entre la expresión y la tabla una y otra vez, mientras que el foco ilocutivo, la pendiente, se mantiene igual. La exclamación de Ari en [25] “Entonces sí lo hicimos bien”, realizada después de extrapolar $g(6)$ a partir de la tabla y compararlo con el valor $g(6)$ calculado con la fórmula recién construida, justifica la opinión de que en su discurso la palabra ‘función’ no significa ni la tabla ni la expresión, sino más bien algo que las unifica. Evidentemente el muchacho sabe bastante bien qué rasgos de la tabla y qué tipo de cálculos con la fórmula se corresponden. Su buen sentido del isomorfismo entre diferentes sistemas simbólicos lo hace capaz de llegar al mismo objetivo de muchos modos diferentes, de la misma manera como tener un buen sentido de un objeto físico nos hace capaces de imaginar muchas maneras diferentes de transferirlo de una posición a otra. Finalmente, es notable la manera en que Ari sigue confundiendo las palabras ‘pendiente’ e ‘intercepto’, y cómo a pesar de eso sigue adelante seguro, sabiendo qué mirar y qué cálculos hacer. Una vez más, esta relativa inmunidad del flujo discursivo a las inadvertidas confusiones verbales, y la habilidad de Ari para corregirse a sí mismo, son también otro rasgo característico de discursos acerca de cosas que pueden verse o imaginarse.

Para resumir, diré que el discurso de Ari está *objetificado* (véase también discurso *mediado por un objeto* en Sfard, 2000a, b). De ahora en adelante, daré este nombre a todos los discursos que muestren rasgos similares a los del discurso de Ari que acabo de describir. Una mirada a la parte de Gur en la conversación

basta para darse cuenta de que la descripción no aplica a su discurso. En realidad, la mayoría de los rasgos que definen el discurso objetificado no están presentes en el habla de Gur. Como lo ha mostrado el análisis detallado del flujo del foco (véase la Tabla 2), el muchacho no puede moverse con facilidad entre la tabla y la fórmula, y su foco perlocutivo es extremadamente susceptible al cambio del foco locutivo. De hecho, la mayor parte del tiempo Gur no demuestra una iniciativa de su parte y aunque aparentemente sigue a Ari, parece carecer de foco ilocutivo consistente, el cual mantendría unidas diferentes verbalizaciones. Sus interpretaciones de los enunciados de Ari son *ad hoc* y están muy poco relacionadas unas con otras. Como resultado, varias herramientas simbólicas —la tabla, la fórmula $5x + (-5)$, las expresiones $g(x)$, $g(6)$ y $g(10)$ — funcionan en su habla como objetos independientes autónomos, sin ninguna evidencia en lo absoluto de un foco ilocutivo conjunto que las trasformaría, discursivamente hablando, en ‘representaciones’ de diferentes aspectos de una cosa. La evidencia de esta desintegración es más que suficiente. Primero, Gur se pregunta abiertamente acerca de las razones por las cuales Ari intenta hallar la fórmula antes de calcular

Tabla 2: Episodio *La pendiente* - Análisis del flujo de los focos

Ari			Gur		
Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo	Foco locutivo	Foco perlocutivo	Foco ilocutivo
[11] [11a] “la pendiente” [11b] “el intercepto” “el cero” ^b	Intercepto en la tabla	El intercepto			
			[12] “su...”	?	?
[13] [13a] “cuántos... entre los dos” [13b] “desde cero” ^b hasta”	Pendiente en la tabla	La pendiente			
			[14] “pendiente”, “1”	Lo contrario del intercepto en la tabla ^a	?
[15] [15a] “pendiente” [15b] “cero” ^b	Intercepto en la tabla	El intercepto			

	[16] [16a] “pendiente” [16b] “ese cero” ^b “-5”	Intercepto en la tabla	?
--	---	-----------------------------------	---

- a. A este foco perlocutivo lo llamamos “lo contrario del intercepto en la tabla” porque lo que Gur está mirando se puede describir como la contraparte del cero de la columna de la derecha, en la columna de la izquierda, y porque “la contraparte del cero de la columna de la izquierda, en la columna de la derecha” es el intercepto en la tabla.
- b. La recurrente aparición de la palabra cero es evidentemente una de las fuentes de confusión, dado que hay dos ceros en la tabla (en la primera fila de la columna de la izquierda y en la segunda fila de la columna de la derecha). En particular, no es claro a cuál de los dos ceros se refiere Ari en [15b] porque cualquiera de ellos se puede usar para apreciar el incremento del valor de y correspondiente al incremento de 1 en el valor de x que Ari está mirando en [14]. Gur está mirando evidentemente el cero de la columna de la derecha y por esta razón él apunta a 1, que es la contraparte del cero en la columna de la izquierda.

$g(6)$. No sólo lo hace al principio, cuando Ari empieza a construir la fórmula, sino también más tarde, cuando observa a Ari trabajando ([2], [6], [8]). Cuando la fórmula para $g(x)$ ya está ahí, Gur todavía se pregunta qué tiene que ver ésta con $g(6)$ [24]. No sólo no conoce la conexión entre la fórmula $5x + (-5)$ recientemente calculada y $g(6)$, sino que además no logra hallarle sentido a la sustitución de Ari (Gur anota en su hoja como respuesta, el resultado intermedio 30, en lugar del resultado final 25). La evidencia más reveladora de la falta de mediación de un objeto es la forma en que Gur aborda la subsiguiente tarea de calcular $g(10)$. Como si la fórmula nunca hubiera estado ahí, él supone que la tabla está gobernada por una proporción simple: decide que si ‘5 es 20, entonces 10 debe ser 40’ [34]. Podríamos decir que es incapaz de realizar un zum de alejamiento para pasar de $g(6)$ o $g(10)$ a la función $g(x)$. Tampoco es capaz de realizar un zum de acercamiento para obtener el intercepto y la pendiente en la fórmula ([6], [8]) o en la tabla ([14], [16], [18]).

manera inmediata que a diferencia de los objetos físicos inanimados, la gente puede —y usualmente lo hace— jugar el doble papel de actor y observador. Si esto es así, las reglas metadiscursivas con frecuencia se convierten en un objeto de reflexión y, por tanto, también de regulación.

12 Debido a la falta de espacio, los análisis focal y preocupacional se presentarán de forma muy breve. Inevitablemente, se omitirá la discusión de suma importancia de sus bases epistemológicas. Para más detalles, véanse Sfard y Kieran (2001b) y Sfard (2000b).

13 Después, y por un momento, Ari sí muestra una señal de distracción al pasar por alto el error de Gur y repite ‘pendiente’ cuando lo que realmente quiere decir es intercepto

Para resumir, Gur no tiene un foco ilocutivo propio consistente. En cada una de sus intervenciones está construyendo un nuevo foco ilocutivo al construir su interpretación de lo que Ari acaba de decir. Dado que él no se guía por sus propios focos ilocutivos preexistentes, sus interpretaciones dependen en gran medida de pistas que obtiene del ambiente, tales como las que encajan con las palabras usadas por Ari (e.g., cuando Ari usa la palabra ‘cero’, Gur mira el primer cero que puede encontrar en lo escrito). Como resultado, los errores involuntarios del foco locutivo, que para Ari apenas son deslices momentáneos fáciles de corregir, para Gur tienen consecuencias más bien graves. Primero, es Ari quien dice ‘pendiente’ por error, pero entonces se corrige inmediatamente [11]¹³. Gur continúa con la ‘pendiente’, aunque aplica la explicación de Ari para encontrar el intercepto [14]-[16]. Además, como resultado de otro malentendido, no escoge el foco perlocutivo correcto. Esta vez, la razón aparente para el error es la interpretación errónea de Gur del uso de la sinécdoque en la expresión ‘el cero’ como un foco locutivo (compárese [11], [14], [15], [16]). Todo esto es evidencia contundente de la debilidad de su foco ilocutivo y de su dificultad para convertirse en un participante hábil en un discurso matemático objetificado y bien fundamentado.

Mientras que el canal privado de Ari parece perfectamente enfocado y continuo, el discurso entre los dos muchachos es incoherente. Ari sí hace varios intentos para superar la incoherencia al señalar de manera explícita sus focos perlocutivos¹⁴. Esto es lo que hace, por ejemplo, en [13], [15] y [19]. Sin embargo, los gestos que hace no funcionan. Señalar el foco perlocutivo, *per se*, no es suficiente para crear un foco ilocutivo adecuado. Podemos ver dos razones posibles para la ineficacia de la intervención de Ari. Primero, Ari en realidad no trata de coordinar los focos ilocutivo y perlocutivo, sólo señala la tabla o la fórmula sin especificar los procedimientos perlocutivos. Segundo, Ari no comprueba que Gur haya comprendido. Parece no mostrar interés en el pensamiento de Gur a tal punto que ni siquiera se da cuenta de las equivocaciones de Gur con respecto al foco locutivo o de sus respuestas erróneas. Desde este punto de vista, la situación puede ser bien diferente para Gur quien, como parece, está ansioso por mantener el curso de la conversación.

Estas últimas afirmaciones acerca de las distintas actitudes de los muchachos hacia la interacción, a pesar de resultar plausibles, aún no están basadas en un análisis sistemático. Sin embargo, llevar a cabo ese análisis no parece un esfuerzo

(véase en [15] y [17] su afirmación injustificada de lo que Gur dijo en [14]). Se podría hacer la pregunta: ¿cómo sabemos que el foco ilocutivo de Ari era el intercepto y no la pendiente? Podemos estar bastante seguros de esto al menos por dos razones. Primero, el número que ambos muchachos señalan es el intercepto. Segundo, cuando Gur más tarde [18] le pre-

que valga la pena. A decir verdad, podríamos encontrar las razones ocultas para las fallas observadas en la comunicación: las expectativas y deseos dispares de los muchachos con respecto a la interacción, así como algunas metas y deseos interpersonales que no están relacionados con las matemáticas y que pueden estar preocupándolos mientras hablan el uno con el otro —todo esto parece interferir bastante con la eficacia de la interacción en el nivel de los objetos. Para comprobar esta conjetura, nos ocuparemos entonces del *análisis preocupacional*.

Análisis preocupacional. Para tener una mejor idea de lo que se quiere decir con este término, recordemos que la comunicación interpersonal se definió como el intento de hacer que otras personas actúen o sientan de acuerdo con nuestras intenciones. Es importante resaltar ahora que hay dos tipos de intenciones que pueden ser transmitidas mediante las acciones comunicativas. En primer lugar, hay intenciones explícitas del nivel de los objetos (cognitivas) relacionadas con un objetivo declarado para una actividad determinada. En el caso del discurso de las matemáticas escolares, un estudiante puede tener un objetivo inmediato, en el nivel de los objetos, de resolver un problema matemático, que a su vez hace parte de un objetivo de largo plazo de aprender algunas matemáticas nuevas. En el episodio *La pendiente* ya se han considerado, con la ayuda del análisis focal, algunos aspectos de estas intenciones del nivel de los objetos. El otro tipo de intenciones discursivas que se pueden transmitir y que usualmente son menos visibles pero no menos influyentes, tiene que ver con varios aspectos de la interacción, y por lo tanto, tiene al discurso como su objeto. Esta última categoría, que se puede llamar metadiscursiva o metanivel, es amplia y multiforme, e incluye por un lado las preocupaciones de los interlocutores acerca de la forma en que se maneja la interacción, y por otro lado, los asuntos densos y algunas veces álgidos asociados a las relaciones entre los interlocutores. Después de todo, cada instancia de comunicación es una ocasión para renegociar las posiciones mutuas de los interlocutores y sus respectivas identidades. A menudo, los participantes usan diferentes medios para comunicar las intenciones del nivel de los objetos y del metanivel. Mientras que las primeras se expresan mejor de manera explícita, las segundas, con frecuencia, residen en formas de verbalizaciones y en mecanismos de interacción más que en su contenidos explícitos. Por razón de la naturaleza encubierta que predomina en los mensajes interpersonales, las intenciones del metanivel que se transmiten mediante el discurso, a menudo, permanecen invisibles incluso para quienes son afectados por ellas (algunos interlocutores son más reflexivos y otros menos; así, las personas pueden ser conscientes de sus propias intenciones metadiscursivas en diferentes grados; sin embargo, la preocupación sobre el metanivel siempre está presente y siempre

somos testigos de esta coexistencia de dos agendas: la relativa al contenido y la que hace referencia a la manera en que se desarrolla el discurso).

Las dos categorías de intenciones discursivas, la del nivel de los objetos y la del metanivel, parecen no relacionadas; tanto es así, que la última se puede hacer a un lado cuando se investiga el aspecto cognitivo de la interacción en el aprendizaje. De hecho, hay una tensión constante entre los dos tipos de intenciones aunque sólo sea por el simple hecho de que compiten por ser el foco. La comunicación interpersonal es un fenómeno particularmente complejo puesto que en un momento dado cada participante se involucra de manera simultánea en varias actividades del nivel de los objetos y del metanivel: tratar de comprender los contenidos explícitos de verbalizaciones previas y producir unas nuevas, monitorear la interacción, presentarse ante otros como la persona que se quiere que ellos vean, manejar la propia posición dentro de un grupo dado, etc. Puesto que se deben atender todas estas preocupaciones al mismo tiempo, parece un milagro que la gente logre la tarea de comunicarse en alguna ocasión.

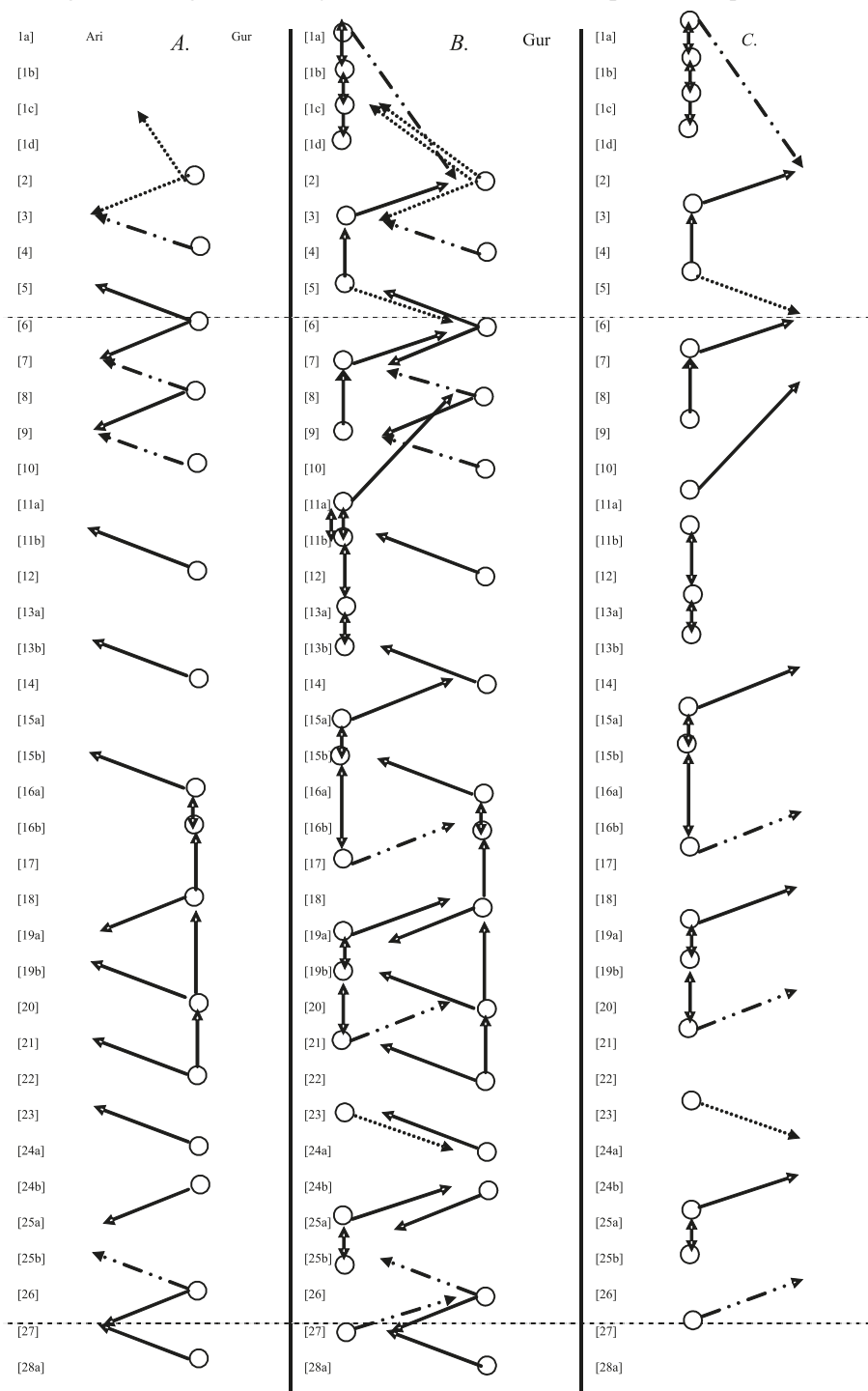
Nuestra principal herramienta en el análisis preocupacional es el *diagrama de flujo de interactividad* que ayuda a evaluar el interés de los interlocutores por activar diferentes canales y por crear un diálogo real con sus compañeros. Consideramos las verbalizaciones consecutivas en un discurso como provistas de flechas invisibles que las relacionan con otras verbalizaciones —aquellas que ya se han expresado y aquellas que están por venir. Estas flechas expresan los deseos metadiscursivos de los participantes: el deseo de reaccionar a una contribución previa de un compañero o el de provocar una respuesta en otro interlocutor (véase una explicación adicional en la leyenda de la Figura 4). La organización conversacional de estas flechas *reactivas* y *proactivas* a menudo revelará ciertas regularidades. A su vez, las formas recurrentes de comportamientos reactivos y proactivos, podrían ayudar a decidir si los interlocutores realmente se dirigen a sus compañeros y están interpretando lo que ellos dicen o, si de hecho, se concentran en una ‘conversación consigo mismos’. En nuestro estudio de Montreal, el análisis de la interacción se ha hecho con la ayuda de un diagrama en el que las flechas imaginarias que mencionamos anteriormente se hacen visibles.

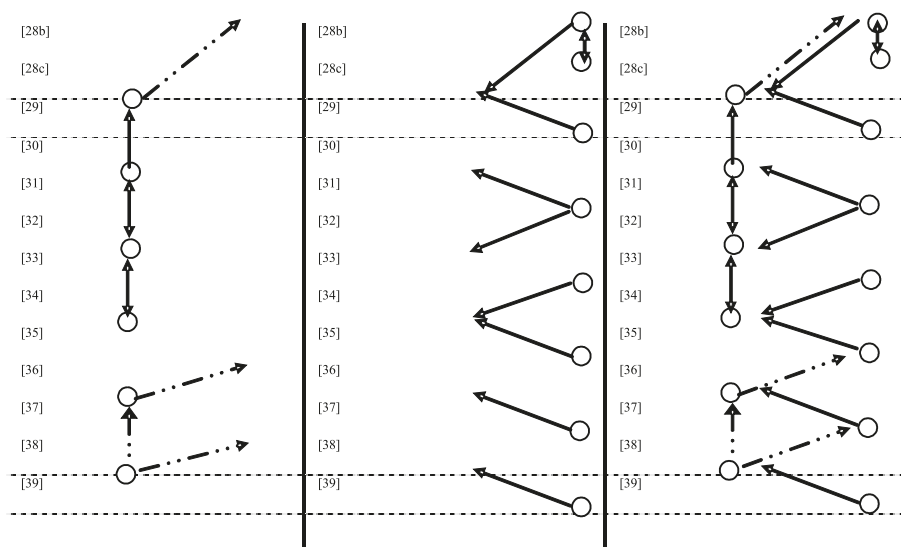
El diagrama de flujo de interactividad del episodio *La pendiente* se presenta y explica en la Figura 4. Con esta gráfica se puede aprender bastante acerca de la pregunta a Ari cómo se “supone que se obtienen los otros”, Ari inmediatamente contesta con una fórmula para hallar la pendiente, mostrando, por lo tanto, que la pendiente es ‘lo otro’, concretamente diferente de lo que acaban de hallar.

14 Es importante recalcar que, a diferencia de Gur, quien señala con el dedo todo el tiempo en ambos episodios, Ari sólo lo hace para lograr la comunicación interpersonal, y no hace ningún ademán cuando habla ‘con él mismo’.

15 Por ejemplo, en [24], Gur, tras responder la pregunta explícita de Ari ase-

Figura 3: Diagrama de flujo de la interacción en el Episodio *La pendiente*





Leyenda. En el diagrama de flujo, los dos *canales personales*, a saber, las respectivas ‘partes’ de los dos muchachos, se muestran en columnas separadas, A y B. Los números que marcan los pequeños redondeles corresponden a los números de las verbalizaciones en el episodio transcrito.

Hay dos tipos de flechas que se originan en las diferentes verbalizaciones.

- Flecha reactiva (flecha que señala vertical o diagonalmente hacia atrás/hacia arriba): este tipo de flecha expresa el hecho de que la fuente de la verbalización es una reacción a la verbalización objetivo;
- Flecha proactiva (flecha que señala vertical o diagonalmente hacia adelante/hacia abajo): este tipo de flecha simboliza el hecho de que la fuente de la verbalización *invita* a una respuesta, de tal manera que se espera que la siguiente verbalización sea una reacción.

actitudes de Ari y Gur hacia la comunicación interpersonal. Un análisis detallado muestra que Ari no está realmente interesado en la interacción. No inicia ninguno de los intercambios y no responde a muchas de las verbalizaciones proactivas de Gur. Durante el episodio de dos minutos, Ari sólo hace dos o tres verbalizaciones proactivas (véanse [1], [5], [23]), todas ellas metadiscursivas (en comparación, Gur profiere nueve verbalizaciones proactivas, ocho de las cuales se formulan como preguntas en el nivel de los objetos). A decir verdad, estas verbalizaciones ni siquiera parecen realmente proactivas: después de hacer sus preguntas Ari no espera respuesta y deja claro que está ansioso por terminar la tarea de explicar tan rápido como sea posible. Es bastante obvio que él nunca analiza a fondo las respuestas de Gur y realmente no le preocupa si su compañero es sincero cuando dice que sí entiende, y eso es suficiente para mostrar su falta de iniciativa. La renuencia de Ari a responder se refleja en su indiferencia hacia los intentos de

Gur por crear un intercambio. En vez de responder a las verbalizaciones proactivas de Gur, él continúa en su monólogo. En todo momento hace caso omiso de las preguntas de Gur y de las explicaciones que pide (véanse [4]-[6], [11]-[13] y, sobre todo, [29]-[40], donde Gur trata de explicar lo que piensa), haciendo que los signos de incomprensión y angustia de Gur pasen inadvertidos¹⁵.

Una mirada a la columna B de la Figura 4 revela que Gur todavía está muy interesado en la interacción y depende realmente de ella. Evidencia de esto es la abundancia de verbalizaciones proactivas y reactivas, que revela una actitud de *iniciativa* e *interés*. Como resultado, el contraste entre los comportamientos discursivos de los dos muchachos es ahora más marcado que antes.

Todo esto significa que mientras Ari desea alejar su mente de las distracciones, Gur está interesado en el intercambio de ideas. En efecto, muchas de las verbalizaciones de Ari toman la forma de diálogo consigo mismo (véanse, e.g., [1], [11], [19], [25]), mientras Gur está claramente dirigiéndose a su compañero. No es de sorprender que, en esta situación, mientras encontramos largos períodos de continuidad en el canal privado de Ari (véase columna A de la Figura 4: en particular [1]-[21] y [29]-[35]), Gur prácticamente carece de un canal privado (véase columna B de la Figura 4). También es interesante notar que el canal privado de Ari tiene una estructura argumentativa clara. Incluso cuando habla con Gur, parece como si discutiera consigo mismo. El constante monitoreo a sí mismo es uno de los rasgos distintivos de las acciones discursivas de Ari. Esta es la manera como puede corregir sus propios errores y verificar sus propias soluciones¹⁶. Es claro que hay una *parte oculta* de su discurso, en la que Ari realiza con rapidez el cálculo mental recursivo (véase, en particular, la verbalización [25] que parece mostrar tal cálculo mental)¹⁷.

También vale la pena notar que Ari trata de desviar el discurso y, a la vez, gurando que había entendido lo que él le había explicado, pregunta: “Entonces, ¿qué es $g(6)$?”. Con esto, es obvio que él no puede ver la conexión entre hallar la fórmula de una función y calcular su valor específico, $g(6)$ (esta interpretación tiene confirmación adicional en la forma en que Gur procede para calcular $g(10)$). De esta forma, Gur deja bastante claro que su “Sí, sí” en respuesta al “¿Entiende?” de Ari, es apenas una estrategia para guardar las apariencias y que en realidad él no tiene idea de lo que hasta ahora ha sucedido en el discurso. Sin embargo, Ari no parece darse cuenta del predicamento de su compañero.

16 En [11], Ari ‘corrige’ su propio error pues nota que lo que ha dicho no se ajusta a lo que intenta decir. En [29], de nuevo se corrige. También verifica sus propias soluciones de manera espontánea. El ejemplo más revelador, desde

disimular este hecho a través de diferentes técnicas de camuflaje. Con el deseo de mantener su canal privado ajeno a las distracciones, y consciente del hecho de que no está actuando conforme a las expectativas, Ari trata de atenuar su imagen poco sociable sólo de labios para afuera. Así, de vez en cuando reconoce las contribuciones de Gur ([15]: “¿Hum?” [17], [21], [27]: “Sí”), pero es claro que sus monosílabos cortantes “¿Hum?” y “Sí” son sólo formalidades y no muestran un interés real en lo que Gur está diciendo. De hecho, en todos los casos registrados anteriormente las verbalizaciones de Gur a las que Ari respondió “Sí” eran o incorrectas o estaban mal enfocadas; eran tan equivocadas que esto habría sido obvio de inmediato para Ari, si realmente hubiera estado prestando atención. Gur, a su vez, posee una amplia variedad de técnicas para *sostener el discurso* y para *guardar las apariencias*. Así, por ejemplo, disimula cuando tiene alguna duda en vez de tratar de resolverla (véanse, e.g., su “Sí, sí” en [12] y en [24], y su “Oh, entonces eso tiene sentido” en [28] cuando en verdad no parece entender nada). El hecho de que en el primer subepisodio empiece preguntándole a Ari sin siquiera tratar de resolver el problema por sí mismo muestra que acepta la superioridad de su compañero y que no confía realmente en sus propias capacidades matemáticas.

Permítaseme combinar el análisis focal y el análisis preocupacional para tratar de ver lo que esta perspectiva conjunta nos dice acerca del aprendizaje de Ari y Gur. Lo primero por decir es que una vez que el pensamiento se ha conceptualizado como acto comunicativo, la dimensión dinámica del pensamiento, que cambia continuamente, y es extremadamente susceptible al contexto, viene a ser de especial atención. Las acciones ineficaces de Gur ya no se ven como un resultado directo de unos ‘escenarios’ de resolución de problemas, estables e independientes del contexto, que han sido almacenados en su mente, y que probablemente se repetirán en cualquier situación que implique una tarea similar. Por el contrario, se consideran una cadena de decisiones momentáneas que se toman como reacción espontánea e inmediata a las verbalizaciones de su compañero. Puesto que Gur no parece tener ni su propia forma de proceder ni una interpretación coherente de las acciones discursivas de Ari, sus respuestas resultan globalmente incoherentes aun cuando algunas veces den la impresión de ser localmente apropiadas. Esta espontaneidad sin control también explica, por lo menos parcialmente, las fallas en la comunicación que infestan esta conversación.

Se debe entender que el panorama detallado de la conversación incoherente que nos provee el análisis focal contiene una reconstrucción interpretativa de parte de un observador del pensamiento de los participantes, es decir, de los

‘diálogos’ que tienen lugar a lo largo de los canales privados de los interlocutores. Con base en este análisis, y de acuerdo con lo que se ha dicho previamente, hay una diferencia considerable entre el pensamiento de Ari y el de Gur: mientras Ari está concentrado en la comunicación consigo mismo y sigue su propia línea discursiva a expensas de la comunicación interpersonal, Gur da prioridad a su interacción con Ari y se olvida casi por completo de su canal privado. En sentido figurado, podríamos decir que Gur abandona su propio pensamiento en el intento por interpretar el diálogo de Ari consigo mismo.

Si es así, ¿por qué este esfuerzo aparentemente serio tiene un final tan desalentador e insatisfactorio? Una respuesta plausible a esta pregunta surge gracias a los resultados del análisis preocupacional. A pesar de que el interés de Gur por el pensamiento de Ari es incuestionable, éste se contrapone a otra preocupación, no menos importante: la preocupación de Gur por su posicionamiento y su imagen. Probablemente es el temor de parecer incapaz y sin mérito lo que impide que el muchacho atienda su deseo de entender a su compañero de manera consistente y en últimas exitosa.

Este análisis bidimensional provoca un cambio importante en nuestra comprensión del mecanismo del fracaso. Lo que hasta ahora se consideraba como producto casi directo de las capacidades de una persona y, la mayoría de las veces, resultado del ‘potencial matemático’ de esa persona ahora se considera como producto de una acción colectiva. El análisis ha mostrado que cuando dos personas se involucran en la comunicación y algo fracasa, las dos personas son responsables de ello. Aunque Ari no puso a Gur de manera deliberada en tal predicamento, sí contribuyó a ello en cierta forma aunque sólo fuera por su presencia e insensibilidad hacia las necesidades de Gur. Si hubiera trabajado solo o con la colaboración de otro compañero, Gur podría haber actuado de una forma diferente y más exitosa. Todo esto lleva a cuestionar de manera justificada la relevancia de la investigación en la que las capacidades cognitivas y la cognición se tratan como factores autónomos que se pueden estudiar independientemente de otros aspectos de la situación. Es importante notar también que esto nos hace reflexionar sobre la práctica común que consiste en tratar de establecer el ‘potencial matemático’ de los niños, basándose en episodios de aprendizaje aislados y evaluados superficialmente.

Las consecuencias de la interpretación teórica alternativa no se quedan en simples palabras. Lo primero y más importante es que el marco participacionista que enfatiza el cambio y rechaza el poner rótulos permanentes, ofrece una perspectiva más prometedora del aprendizaje. Este enfoque establece, entre otras cosas, que el profesor no se debe apresurar a proyectar los futuros desempeños

de un estudiante con base en triunfos o fracasos anteriores. Dada la índole de profecía autocumplida que tiene la acción de poner etiquetas permanentes, no se debe subestimar la importancia de esta advertencia. Además, el análisis del episodio *La pendiente* dejó muy claro que no se puede garantizar que habrá beneficios en un ejercicio de resolución colaborativa de problemas. Para que las interacciones de los estudiantes sirvan para promover el aprendizaje, se les debe enseñar a desarrollar sus habilidades comunicativas. Se puede confiar en los análisis minuciosos de diversas situaciones en el aula para formarse una buena idea de lo que se podría implementar para hacer que la comunicación matemática, y con ella el aprendizaje matemático, sean más eficaces. A partir del episodio analizado en este trabajo podemos concluir de manera tentativa que los interlocutores quizá deberían aprender a hacer explícitos sus focos perlocutivos; además, que el aprender solos puede ser algunas veces más eficaz que aprender con otros; y que se debe ser muy cuidadoso a la hora de decidir quién debería ser compañero de quién para llevar a cabo un aprendizaje colaborativo.

¿QUÉ SE DEBE CONSIDERAR COMO ‘APRENDIZAJE CON COMPRENSIÓN’?

Volvamos al caso de Noa (véase Figura 3). El primer intento hecho para interpretar y explicar la breve interacción dio lugar a interrogantes sobre el significado del término *aprender con comprensión* y nos dejó dudas en cuanto a si el aparente cambio de opinión de Noa con respecto a la existencia del ‘número más grande’ fue un caso de aprendizaje significativo. Afirmaré ahora que se puede proporcionar una interpretación alternativa al plantear el análisis del episodio en términos de los usos discursivos de las palabras y al inspeccionar detenidamente el mecanismo discursivo que obliga a la niña a cambiar este uso.

Antes de hacerlo, sin embargo, elaboraré la idea de discurso *objetificado* que aparece en el análisis del episodio *La pendiente* y podría ser de ayuda en el caso de la conversación que Noa y Rada sostienen sobre números. En el episodio *La pendiente* describí el discurso de Ari sobre función como *objetificado* porque el muchacho hablaba sobre funciones como si se tratara de objetos reales con existencia propia. Al mirar la manera en que Ari habló sobre funciones, es razonable decir que para él la palabra función se refiere a una entidad bien definida y fundamentada, que existe de manera independiente del discurso mismo. Esta propiedad de su foco ilocutivo se puede inferir del hecho de que a lo largo del camino Ari hace rápidamente transiciones sin tropiezos de un foco perlocutivo (la tabla) a otro (la expresión $5x + (-5)$) conservando el mismo foco locutivo (la función g). Así, él está usando símbolos diferentes —la tabla, la expresión, y quizá también una gráfica, que no ha presentado pero que puede haberla ima-

ginado— como si todos estos símbolos fueran *representaciones* de un objeto específico. La propiedad especial de este discurso objetificado es que él engloba varios discursos creados de manera independiente, con lo cual los convierte en discursos ‘sobre la misma cosa’ y hace posible expresar en el nuevo lenguaje todo lo que se pueda decir, de una manera diferente, en cualquiera de los discursos involucrados. Por ejemplo, el discurso sobre funciones subsume discursos sobre gráficas y sobre expresiones algebraicas. En este discurso subsumido, la oración “el intercepto de esta función es -5” reemplaza, de manera simultánea, a la sentencia “esta línea recta corta al eje de las y en $y = 5$ ” en el discurso sobre gráficas, y a la oración “la constante en esta fórmula es -5” en el discurso sobre expresiones. Este efecto englobante es evidente en las acciones discursivas de Ari, pero difícilmente se puede encontrar en lo que dice Gur. Por ser apenas un principiante en el discurso sobre funciones, Gur tiene gran dificultad para hacer paralelos entre gráficas y expresiones. Lo que para Ari constituye “dos representaciones diferentes de la misma función”, para Gur no son más que un par de marcas en el papel no relacionadas. Mientras que el uso de los diferentes símbolos por parte de Gur sea no objetificado, es comprensible su dificultad para seguir los rápidos movimientos discursivos de Ari.

Volviendo al episodio *El número más grande*, argumentaré ahora que mucho de lo que sucede entre Noa y Rada se puede explicar por el hecho de que a diferencia de la profesora, la niña usa las palabras relacionadas con números de una forma no objetificada. El término ‘número’ funciona en el discurso de Noa como un equivalente del término ‘nombre de número’ y palabras tales como *cien* o *millón* son cosas en sí mismas más que meros indicadores de algunas entidades intangibles. En consecuencia, la afirmación inicial de Noa según la cual existe el número más grande, es perfectamente racional. O, por el contrario, la afirmación de que no hay un número más grande es inconsistente con su uso no objetificado de la palabra ‘número’: después de todo, sólo hay unos cuantos nombres de números, y uno de ellos debe por tanto ser el más grande, es decir, debe ser el último en la secuencia bien ordenada de números (el orden de la secuencia determina la relaciones ‘más grande que’ o ‘más pequeño que’ entre sus elementos). Más aun, puesto que dentro de este tipo de uso la expresión ‘millón uno’ no se puede considerar como un número (sino como una concatenación de números) la posibilidad de añadir uno a cualquier número no necesita de la no existencia del número más grande.

Tal como en el caso de Ari y Gur, el hecho de que uno de los interlocutores hace uso de nociones centrales de manera objetificada mientras que el otro no lo hace, obstruye la comunicación entre Noa y Rada. A diferencia del primer caso,

sin embargo, el comportamiento metadiscursivo de los interlocutores es ahora diferente y sus esfuerzos por mejorar la comunicación son suficientemente genuinos para llegar a ser exitosos. En efecto, esta vez, *ambos* interlocutores parecen estar interesados en sintonizar sus posiciones. La profesora continúa repitiendo la pregunta sobre la existencia del ‘número más grande’ y de esta manera le da a la niña una señal metadiscursiva de que su respuesta no satisface las expectativas. Para lograr avanzar, Noa intenta ajustar sus respuestas a esas expectativas, y lo hace aunque lo que supuestamente debe decir no encaja dentro de su uso de las palabras el *número más grande*. La necesidad del cambio muestra a la niña posibilidades que no había considerado. Más aun, en esta etapa la niña todavía no tiene recursos para enfrentar el problema. Aunque debe ser obvio para ella que el cambio deseado debe estar de alguna manera relacionado con el hecho de que siempre se puede sumar uno a cualquier número, la relación entre este hecho y la aseveración acerca de la inexistencia del número más grande posiblemente no es clara para ella. A pesar de esto, la niña está evidentemente deseosa de acogerse a las reglas del juego impuestas por su interlocutora, que tiene más experiencia al respecto.

De esta manera, parece que el esfuerzo primordial de Noa es satisfacer las expectativas discursivas de la profesora. Su foco está en la comunicación y no en tratar de aclarar para sí misma la dificultad que tiene con el uso de los números. Podríamos decir que está tratando de comprender ‘a través del otro’ antes de tratar de construir su propia comprensión. Sin detenerse a pensar, la niña considera que el discurso de la profesora es superior al suyo, y por lo tanto es el ‘correcto’. Su inseguridad con respecto a sus propias formas discursivas se ve reflejada en la última pregunta: ella ya ha dado una respuesta satisfactoria y ahora trata de relacionar esta respuesta con otras cosas que han sido mencionados en el encuentro; así, trata de reconstruir el razonamiento de la profesora.

En lo que concierne al asunto del aprendizaje con comprensión, algunas personas podrían decir que las razones que llevaron a la niña a modificar sus respuestas fueron equivocadas: simplemente quería complacer a la profesora y para ello estaba adivinando sus intenciones. Para cumplir con este objetivo la niña siguió un juego racional; sin embargo, su forma de racionalizar la información no se ajustó a la forma de raciocinio que los profesores tradicionales quisieran observar. En su raciocinio, la información se obtenía, a partir de las señales metadiscursivas, por adivinación más que por inferencia de las relaciones en el nivel de los objetos. Es probable que los adeptos al principio de aprendizaje con comprensión se unan a la crítica que ofrece Cazden (1988) en contra de este tipo de situación, en la que los patrones de comunicación establecidos apenas dan “la

impresión de que el aprendizaje está teniendo lugar” (p. 48). Esto implica que el verdadero aprendizaje —el que ellos llaman “aprendizaje con comprensión”— tenía que haber seguido otro camino.

La pregunta, sin embargo, es si dicha alternativa es siempre posible. En el caso de Noa difícilmente podríamos pensar en otra ruta exclusivamente racional en el nivel de los objetos hacia una eventual objetificación de su discurso sobre números. En términos más tradicionales: es difícil imaginar cómo la niña habría podido tomar un camino más “significativo” hacia la reconceptualización de la noción de número. Para cambiar sus hábitos y disposiciones discursivos, tuvo que pasar por una experiencia de incomprensión —de considerar alternativas a la única posibilidad de la que estaba consciente cuando la conversación comenzó. Los recursos del metanivel que la profesora empleó para mostrarle tales posibilidades no podían ser reemplazados por consideraciones directas pertenecientes al nivel de los objetos. De hecho, el discurso de Noa era perfectamente coherente y no había ninguna contradicción entre su uso de número como una palabra que designa y su aserción de que uno de los números debe, por esta razón, ser el más grande de todos. De esta manera y al contrario del tradicional análisis cognitivista que presenté al comienzo, el caso de Noa no se puede considerar como uno de conflicto cognitivo originado por creencias incompatibles sobre número. El dilema final de Noa tiene origen en una discrepancia *interdiscursiva*, no en una contradicción *intradiscursiva*. En un caso como este, uno no tiene la posibilidad de modificar los hábitos discursivos por uno mismo. Para cambiarlos, alguien nos tiene que conducir fuera de nuestro propio discurso. Sólo así, podría finalmente producirse el conflicto necesario para provocar una experiencia de incomprensión que engendre el aprendizaje¹⁸.

De manera más general, lo que hemos visto en el caso de Noa es probablemente una de las formas principales de aprendizaje que todos empleamos a lo largo de nuestras vidas. Gracias a una combinación intrincada de sintonía con nuestros interlocutores en el nivel de los objetos y en el metanivel, nos abrimos paso a una mejor comunicación y perfeccionamos nuestra participación en

este punto de vista, es su afirmación “Entonces sí lo hicimos bien” en [25], la cual expresa con entusiasmo luego de calcular $g(6)$. Es obvio que tiene criterios para juzgar si el resultado es correcto. Aunque no lo dice, la única forma posible que tiene para evaluar el resultado es compararlo con el que se puede obtener de otra forma; esta otra forma sólo puede ser el patrón recurrente que detectó antes en la tabla —el incremento de los valores, de cinco en cinco, de la columna de la derecha.

discursos especializados. Los participantes llegan a los discursos con sus propios usos de palabras, quizá idiosincrásicos, y con sus propias expectativas con respecto a las reglas del juego que se va a jugar. La forma real del intercambio será el resultado de la interacción entre las expectativas de todos los interlocutores. Por supuesto, no todos ellos ejercerán la misma influencia sobre las reglas de juego. En todo discurso especializado casi siempre hay una voz dominante y autoritaria que dicta las reglas más que las demás voces. En el aula, esta voz pertenece al profesor. Muy a menudo, los estudiantes deben seguir al profesor hasta que manejan bien el nuevo discurso en el que están siendo inducidos con el objetivo de aprender. Este tipo de aprendizaje probablemente no será valorado por los seguidores del principio tradicional de aprendizaje con comprensión. Aun así, este tipo de aprendizaje no se puede reemplazar por ningún otro. Esta imposibilidad es inherente a la afirmación de que todo nuestro pensamiento es en esencia social y corresponde al significado profundo de la famosa afirmación hecha por Vygotsky:

Cualquier función en el desarrollo cultural del niño aparece dos veces, en dos planos. Primero, aparece en el plano social, y luego en el plano psicológico. Primero aparece entre las personas como una categoría interpsicológica, y luego dentro del niño, como una categoría intrapsicológica. (Vygotsky, 1931/1981, p. 163)

Hay sin embargo otra implicación más general del presente ejemplo. El aprendizaje que tuvo lugar en el episodio que analizamos hace unos momentos ya no se considera como el resultado de un conflicto *cognitivo*. Si acaso, la situación que hemos presenciado se puede describir como una situación de conflicto *discursivo*, un caso muy diferente al de ser expuesto a lo que parecen ser hechos independientes de la mente y bien justificados, que se contradicen entre sí. A decir verdad, mientras el concepto de conflicto cognitivo involucra nuestra capacidad ~~para justificar~~ *racionalmente* dos afirmaciones antagónicas acerca del mundo, la

17 Lo interesante es que si tuvo tanta dificultad para encontrar la fórmula, hallar el valor de la función con la fórmula debe ser para Ari, el ‘método canónico’. Erna Yackel y Paul Cobb (Yackel y Cobb, 1996) dirían que responder la pregunta sobre el valor concreto de una función usando la fórmula es una norma sociomatemática que Ari aceptó.

18 Esta es la forma en la cual Noa podría superar la paradoja del aprendizaje: ella tenía que saber lo que supuestamente debía comprender para comprenderlo. En efecto, ¿cómo podría la niña comprender el nuevo uso discursivo de las palabras ‘número’, ‘más grande que’, ‘millón uno’ y ‘el número más grande’ sin haber sido expuesta antes a este nuevo uso? ¡No iba a inventarlo ella misma! Aquí es donde el ir y venir entre lo que se espera y lo que se verifica entró en juego. Es gracias al hecho de que su comunicación con otros se rompió, develando lo inapropiado de sus hábitos discursivos, que se vio obligada a revisar el uso que ella hacía de la palabra ‘número’.

noción de conflicto discursivo enfatiza la discrepancia entre los usos habituales de las palabras, lo cual es un fenómeno inherentemente discursivo. En el caso que estamos considerando, pudimos observar un conflicto entre los usos de las palabras ‘número’ y ‘número más grande que’ de los dos interlocutores. Aunque Noa era consciente de que la profesora aplicaba los términos de una manera totalmente diferente a la suya, ignoraba las razones de esta incompatibilidad. En este caso, por consiguiente, la niña tuvo que *presuponer* la superioridad del uso dado por la profesora para así motivarse a pensar en una justificación racional para cambiar sus propios hábitos discursivos.

De esta manera, quizá la diferencia más marcada entre las interpretaciones cognitivista y comunicacional del episodio *El número más grande* yace en sus respectivas visiones de las brechas de comprensión que motivan el aprendizaje. El concepto de conflicto cognitivo supone que el estudiante busca continuamente la verdad acerca del mundo, y cualquier nuevo conocimiento que se adquiera es fruto de los intentos del estudiante por acomodar su comprensión a conjuntos de hechos e ideas dados externamente e independientes de la mente. Sin lugar a dudas, esta clase de esfuerzos se pueden realizar, por lo menos en teoría, sin la mediación de otras personas. En contraste, la idea de conflicto discursivo recalca la necesidad de comunicación como un estímulo importante para nuestras acciones cognitivas y señala el deseo de ajustar nuestros usos discursivos de las palabras a los de otras personas como uno de los motivos principales para aprender¹⁹.

EPÍLOGO: CAMBIAR MUNDOS CON PALABRAS

En este capítulo traté de demostrar que la idea del pensamiento como acto comunicativo tiene poder para generar un cambio valioso en nuestra visión del aprendizaje en general, y del aprendizaje matemático en particular. Este cambio, al parecer, no es sólo un cambio en las palabras. Junto con las nuevas palabras vienen las nuevas ideas sobre lo que forma parte del aprendizaje y lo que se debería hacer para promoverlo.

En los análisis anteriores hice mi mejor esfuerzo para mostrar que el enfoque comunicacional, basado en la metáfora del aprendizaje como participación, hace mucho más que agregar información nueva. Lo que espero haber mostrado es

¹⁹ Esta visión de la forma en la que las brechas de comunicación incitan el aprendizaje nos da una respuesta al dilema planteado por Smith, diSessa y Rochelle (1993) quienes tal vez fueron los primeros escritores en cuestionar la idea de conflicto cognitivo. Estos autores

que esta perspectiva especial a menudo cambiará el panorama de tal manera que aun las partes ‘viejas’ de su imagen —las que se podían ver antes— adquieren un nuevo significado. La transformación global a la que llegamos en nuestra percepción de las dos escenas en el aula, como resultado de la reinterpretación comunicacional, fue bastante notable. Lo que hasta ahora se consideraba como una función de las ‘posesiones’ y disposiciones estables o semiestables del individuo se convirtió en una propiedad dinámica de las interacciones humanas, la cual no existe más allá de esas interacciones. Las decisiones del profesor que hasta ahora probablemente se debían considerar, de alguna forma, en desacuerdo con el principio de aprendizaje con comprensión, se han rehabilitado y promovido al rango de útiles y valiosas, si no rotundamente indispensables. Sobre todo, se han elicitado los aspectos hasta ahora marginados del aprendizaje, y se les ha atribuido especial importancia.

Dicho todo esto, permítaseme enfatizar de nuevo que el enfoque comunicacional se debería ver como un complemento y no como un reemplazo de las perspectivas más tradicionales. Mi preferencia actual por el marco comunicacional y por la subyacente metáfora de la participación no implica mi rechazo de la otra metáfora, ni tampoco mi intento por menoscabar la valiosa contribución de esa otra metáfora en cuanto a la comprensión del aprendizaje en general, y del aprendizaje de las matemáticas en particular. En mi opinión, la única conclusión razonable de mi crítica a los enfoques cognitivistas más tradicionales, es que se debe perfeccionar la manera en que la metáfora de la adquisición se concreta en conceptos científicos, y se deben reconsiderar cuidadosamente sus implicaciones. En vez de rechazar la metáfora como tal, el discurso sobre el aprendizaje se debería depurar de sus implicaciones poco útiles e indeseables.

Esta declaración ‘reconciliadora’, por supuesto, puede causar sorpresa. A la luz de los cambios de amplia repercusión en la visión de aprendizaje que el cambio de metáfora conlleva, ¿podemos sostener que las diferentes metáforas son ‘complementarias’ y no incompatibles? Naturalmente, la afirmación acerca de la complementariedad no puede ser cierta a menos que los fundamentos ontológicos y epistemológicos del marco tradicional sean sometidos a una cierta revisión y se reconceptualicen las nociones básicas. El tipo de cambio del que estoy hablando es, en cierta forma, análogo al cambio que fue necesario en las matemáticas para hacer posible la coexistencia de la geometría euclidiana y las no euclidianas dentro de un sistema consistente y sorprendentemente útil; o al cambio en física, que hizo posible que se usaran de forma intermitente dos visiones aparentemente incompatibles de los fenómenos subatómicos, dependiendo de las preguntas que se hacían. En el estudio de la mente humana, como

en geometría, se debe entender que los supuestos básicos en los que descansa el marco completo no se refieren a cómo el mundo ‘es en realidad’ sino a cómo se puede considerar el mundo en ciertas situaciones. Es claro que las perspectivas inconmensurables no se pueden aplicar al mismo fenómeno a la vez, de la misma manera que las teorías ondular y corpuscular de la luz no se pueden combinar en una respuesta a la misma pregunta. Aun así, puedo imaginar muchas situaciones en las que sería razonable utilizar ambos enfoques en un intento por encontrar

CAPÍTULO 7

SOBRE EL MOVIMIENTO DE REFORMA Y LOS LÍMITES DEL DISCURSO MATEMÁTICO¹

En este capítulo asumo una posición crítica respecto a ciertas concepciones populares sobre la enseñanza de las matemáticas, que en la actualidad han sido promovidas con gran fuerza por el movimiento reformista en diferentes partes del mundo. El asunto central está relacionado con la naturaleza y los límites del discurso matemático. Debido a que saber matemáticas se conceptualiza como la habilidad de participar en este discurso, se le presta atención especial a las reglas metadiscursivas que regulan la participación y, por consiguiente, son el objeto de aprendizaje central, aunque sea implícito. Al seguir el análisis teórico ilustrado con ejemplos empíricos, surge el interrogante de qué tan lejos se puede llegar en la renegociación y relajación de las reglas del discurso matemático antes de afectar seriamente su posibilidad de ser aprendido.

ALGUNAS PREGUNTAS SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS QUE TODO REFORMISTA DEBE FORMULAR

No se requiere ser investigador en educación para estar de acuerdo con lo siguiente: las matemáticas son una de las asignaturas escolares más difíciles. Se comprende entonces por qué la enseñanza de las matemáticas ha sido siempre

1 Traducción realizada por Diego Hernán Gómez, Pascual Orduz y Jaime Soler. [N.E.]

2 Permítaseme aclarar: no pretendo dar a entender que el conocimiento de los

objeto de modificación y perfeccionamiento y, probablemente, lo seguirá siendo. Mejorar la enseñanza de las matemáticas es el objetivo principal del movimiento de reforma, cuya influencia puede sentirse en todo el mundo. La forma exacta de los cambios requeridos puede variar de un país a otro, pero sus múltiples manifestaciones obviamente tienen un fuerte núcleo en común. De hecho, todas ellas parecen estar arraigadas en la misma filosofía educativa generada por un número de principios básicos generalmente compartidos. Esta es la razón por la cual se espera que la expresión *movimiento de reforma* evoque connotaciones similares en la mayoría de los educadores, sin importar su ubicación geográfica.

El consenso aparente es algo positivo siempre y cuando los supuestos subyacentes a la posición acordada sean claros y firmes. Lo anterior, sin embargo, puede no ser el caso de la presente reforma. Mientras que las intenciones detrás de la palabra *reforma* parecen relativamente claras hoy en día, el criterio con el que se ha llevado a cabo esta reforma parece impreciso en algunas ocasiones. A pesar de algunas décadas de intensa investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, muchas preguntas sobre el aprendizaje de los estudiantes, de vital importancia para cualquier decisión pedagógica², aún esperan ser respondidas. Para ilustrar esta afirmación, consideraré un caso específico de una asignatura de matemáticas del nivel escolar, para luego discutir asuntos prácticos generados por sus aspectos pedagógicos. De esta manera, ejemplificaré los dilemas que, a mi juicio, deberían de abordarse antes de tomar cualquier decisión acerca de la enseñanza.

Hablemos de los *números negativos*, un tema incluido en la mayoría de los currículos de matemáticas en el nivel de escuela media. Aunque obligatorio, este tema no es desde ningún punto de vista fácil de aprender y puede ser bastante problemático aun a los ojos de los estudiantes más brillantes. Nadie ha logrado describir la exasperación del estudiante frente a las complejidades relacionadas con el concepto de número negativo, de forma más convincente que el escritor francés del siglo XIX, Stendhal (pseudónimo de Marie-Henri Beyle, 1783-1842):

Pensaba que las matemáticas no daban cabida a la hipocresía, y en mi ingenuidad juvenil creí que esto debía ser igualmente cierto para todas las ciencias,

procesos de aprendizaje sea fundamento suficiente para decisiones didácticas específicas. Sin embargo, bien puede beneficiarlas aunque esto no necesariamente se pueda asegurar. Aunque no hay un camino directo desde la investigación sobre el aprendizaje hasta el diseño instruccional, comprender las dificultades de los estudiantes es un factor importante que debería informar nuestra escogencia de aproximaciones a la enseñanza.

3 Por ejemplo, al final del medioevo y principios del Renacimiento, los matemáticos

que me dijeron que las empleaban... Imagínense como me sentí cuando me di cuenta de que nadie podía explicarme por qué *menos por menos da más*... Que esta dificultad no me haya sido explicada fue bastante malo (esto conduce a la verdad, por lo tanto debe, sin lugar a dudas, ser explicable). Lo peor es que *me fue explicada mediante razones que evidentemente no eran claras para quienes las daban*.

El señor Chabert, a quien yo cuestionaba duramente, se avergonzaba. Repetía la misma lección que le había objetado y yo leía en su rostro lo que él pensaba: “No es más que un ritual, todo el mundo se conforma con esta explicación. Euler y Lagrange, quienes seguramente sabían tanto como usted, la aceptaron sin reparo. Sabemos que es usted un tipo inteligente... Es claro que quiere asumir el papel de una persona torpe...”.

Me tomó mucho tiempo concluir que mis objeciones al teorema *menos por menos da más* simplemente no cabían en la cabeza del señor Chabert, que el señor Dupuy siempre respondería con una sonrisa soberbia y que las luminarias de las matemáticas a las que abordaba con mi pregunta siempre se burlarían de mí. Finalmente, me dije lo que me digo hoy en día: *debe* ser que menos por menos tiene que ser más. Después de todo, esta regla se utiliza todo el tiempo en cálculos matemáticos y aparentemente conduce a resultados ciertos e irrefutables. (Citado en Hefendehl-Hebeker, 1991, p. 27)

Las técnicas para sumar, restar, multiplicar y dividir números positivos y negativos pueden no ser muy difíciles de dominar, pero existen serios dilemas conceptuales que los estudiantes encontrarían invariablemente si tuvieran la necesidad de comprender a qué se refiere el concepto de número negativo. El interrogante de por qué el producto de dos números negativos debe ser positivo es probablemente el más famoso de estos dilemas. Es tiempo de detenernos por un momento y hacer la siguiente pregunta: dado que los números negativos deben ser incluidos en el currículo escolar, ¿cómo debemos enseñar este tema teniendo en cuenta los reparos de Stendhal?

No dudo de que a pesar de la familiaridad con la asignatura, o quizá debido a ella, esta pregunta puede parecer asombrosamente difícil de responder. Es muy probable que a causa de esta dificultad algunos profesores de matemáticas recurran a la estrategia tipificada en la inolvidable rima: “Menos por menos da más, no me pregunte más” (W. H. Auden, citado en Kline, 1980, p. 115).

La inesperada pregunta sin respuesta justifica algunas reflexiones serias. Para empezar, escuchemos más cuidadosamente lo que Stendhal tiene que decir.

Es notable, y a la vez provocador, que la queja del escritor francés no sea tanto sobre la inaccesibilidad de las definiciones matemáticas que él trata de digerir, sino sobre la naturaleza de las explicaciones de sus profesores. En efecto, es poco probable que las “luminarias de las matemáticas” no tuvieran nada que decir al respecto, o que trataran de ocultar “la verdad” al joven que la necesitaba. A pesar de las acusaciones de Stendhal, lo más probable es que sus profesores sí hayan tratado de explicarle y que lo hayan hecho lo mejor que podían. Por desgracia, es obvio que la mejor explicación no fue suficientemente buena para el joven Stendhal. Cualesquiera que hayan sido las explicaciones de los profesores, a él le resultaron poco convincentes. Así, el problema fue de comunicación ineficaz y no de ausencia de un intento serio por comunicarse. Se debe abordar entonces un asunto preliminar, antes de responder la pregunta sobre las formas de enseñar: ¿por qué ciertos conceptos matemáticos son inadmisibles y ciertos argumentos matemáticos resultan poco convincentes para muchos estudiantes?

Al enfatizar en el aspecto de la admisibilidad, esta pregunta destaca la similitud de las dificultades experimentadas por estudiantes de matemáticas, con aquellas observadas por los matemáticos en el pasado (véanse Fauvel y van Maanen, 1997; Sfard, 1992, 1994a; Sfard y Linchevski, 1994). De acuerdo con fuentes históricas, los obstáculos conceptuales con los que tuvieron que habérselas los primeros matemáticos que hablaron de números negativos fueron sorprendentemente cercanos a los mencionados por Stendhal. Por lo menos durante tres siglos, los matemáticos conocieron las reglas de operación para los números positivos y negativos, reconocieron su carácter inevitable y sintieron que cualquier explicación que pudieran ofrecer no valdría como una *justificación* inequívoca de la idea de número negativo³. El fenómeno es ciertamente desconcertante: ¿cómo pueden las personas tener un sentido claro de la inevitabilidad de ciertas definiciones y reglas, y al mismo tiempo alegar su inadmisibilidad? ¿Cómo puede una persona creer en dos cosas opuestas sin ser capaz de decidir entre ellas? Si los hechos se contradicen, ¿de dónde proviene la confianza en su veracidad?

Una buena comprensión de éste y otros fenómenos similares es indispen-

Chuquet, Stifel y Cardan, los denominaron con nombres despectivos como “absurdos”, “falsos”, “imaginarios” o “símbolos vacíos”, incluso mientras los usaban. Descartes consideró los números negativos como “falsos, porque representaban números menores que la nada”, en tanto que Pascal no dejó duda al respecto de lo que pensaba acerca de los usuarios de los números negativos en una afirmación tan arrogante como ingenua: “Conozco gente que no entiende que si restamos cuatro de cero no queda nada” (cf. Kline, 1980).

4 En la descripción funcional de Gee (1997) sobre los Discursos puede verse lo im-

sable para quienes desean construir sus decisiones pedagógicas sobre una base más sólida que la de las intuiciones desescolarizadas. En lo que resta de este capítulo, trataré de enfrentar este reto por medio de la conceptualización del aprendizaje como el logro del acceso a cierto discurso. Como mostraré, la perspectiva discursiva promete una nueva comprensión de fenómenos como los descritos previamente, y es probable que provea herramientas eficaces con las cuales abordar algunas preguntas persistentes sobre la reforma.

PREPARACIÓN DEL ESCENARIO PARA RESPONDER

LAS PREGUNTAS DEL REFORMISTA:

HABLAR DE APRENDIZAJE EN TÉRMINOS DEL DISCURSO

Hoy en día, más que hablar de “adquisición de conocimiento”, muchas personas prefieren ver el aprendizaje como el *convertirse en participante de cierto discurso*. En el contexto actual, la palabra *discurso* tiene un significado muy amplio y se refiere a la totalidad de actividades comunicativas que se practican en una comunidad determinada (para evitar confusiones con el sentido limitado y común del término, algunos autores, por ejemplo Gee, 1997, proponen escribirlo con mayúscula inicial: Discurso⁴). Dentro del marco de investigación discursiva se asume que diferentes comunidades —la comunidad matemática es una entre muchas— pueden estar caracterizadas por los discursos distintivos que ellas crean. Por supuesto, también se debe entender que los discursos son entidades dinámicas y en continuo cambio, por consiguiente, determinar sus identidades exactas y definir sus límites no es una tarea tan directa como un investigador esperaría. Además, los discursos de diversas comunidades, con frecuencia, se traslapan y esto da como resultado su incesante hibridación. A pesar de todas estas dificultades, la noción de discurso prueba ser suficientemente clara como para estimular un flujo regular de investigación de alto contenido informativo,

portante y completo que es este término: “Los Discursos son coordinaciones sociohistóricas de personas, objetos (elementos), formas de hablar, actuar, interactuar, pensar, valorar, y (en ocasiones) escribir y leer, que permiten la manifestación y el reconocimiento de identidades socialmente significativas, como ser (cierto tipo de) afroamericano, ejecutivo, feminista, abogado, pandillero, físico teórico, partera del siglo XVIII, modernista del siglo XIX, soviético o ruso, estudiante, profesor, y así sucesivamente a través de innumerables posibilidades. Si se destruye un Discurso (como de hecho sucede), también se destruyen sus modelos culturales, significados situados y sus identidades afines” (pp. 255-256).

5 Las reglas tales como “si va a resolver la ecuación $3x+2=5$, la forma física

que tiene el poder de destacar aspectos del aprendizaje inadvertidos hasta este momento.

Al sustituir la palabra *conocimiento* por *discurso*, los filósofos hacen evidente el papel central del habla en las tareas intelectuales humanas. Para muchos investigadores el estudio de la comunicación matemática se ha convertido en una tarea casi equiparable a estudiar el desarrollo del pensamiento matemático como tal, aunque no lo manifiesten de manera explícita (véanse, e.g., Bauersfeld, 1995; Forman, 1996; Lampert y Cobb, 2003; Morgan, 1996; O'Connor, 1998; Pimm, 1987, 1995). Sin embargo, el cambio de enfoque, que es evidente en la red denominación, va más allá de un cambio en el énfasis. Primero que todo, puede representar un acto de encarnar en sujetos particulares el proceso de construcción de conocimiento. El conocimiento considerado como un aspecto de la actividad discursiva ya no sería un conjunto de proposiciones impersonales, desencarnadas, cuya naturaleza exacta es cuestión de “la verdadera forma” del mundo real; ahora es más bien una construcción humana. Además, dado que la noción de discurso sólo tiene sentido en el contexto de la interacción social, hablar de discurso más que de conocimiento, excluye la posibilidad de ver el aprendizaje como una empresa puramente individual. Más aun, debido a que el pensamiento puede ser conceptualizado como una instancia de la actividad discursiva (Bakhtin, 1981; Sfard, 2000b), al poner el discurso en el lugar que ocupa el conocimiento desencarnado se reducen las barreras conceptuales que separaron lo “individual” de lo “social” durante siglos. De hecho, la interpretación discursiva del asunto del conocimiento y el aprendizaje aclara que las exigencias de comunicación son la fuerza principal detrás de toda actividad intelectual humana, y así todas estas actividades son sociales por naturaleza, ya sean realizadas individualmente o en equipo. Finalmente, la palabra *discurso* parece abarcar más que la palabra *conocimiento*. Los investigadores que hablan sobre el discurso se interesan no sólo por aquellas proposiciones y reglas que constituyen el contenido inmediato del discurso específico, sino también por reglas mucho menos explícitas de las acciones comunicativas humanas, que se consideran como las formas adecuadas de conducir un tipo particular de discurso. Podemos entonces hablar de *reglas del nivel de los objetos* del discurso matemático, es decir, reglas que gobiernan el contenido del intercambio; y de *reglas metadiscursivas* (o simplemente *meta-reglas*) que regulan el flujo del intercambio y, por lo tanto, son de alguna forma superiores al tipo anterior de reglas, aunque sea sólo de manera implícita (el prefijo *meta* indica que las reglas en cuestión son una parte del discurso sobre el discurso; es decir, tienen como objeto al discurso y sus partes)⁵.
real de la letra empleada no es importante” o “si quiere asegurarse de la veracidad de una proposición matemática sobre números, tiene que derivarla de axiomas sobre números con la ayuda de inferencias deductivas” o “si es cierto que la proposición A implica a B y la propo-

EN EL DISCURSO HAY MÁS DE LO QUE SE OYE. UN EJEMPLO

Permítaseme profundizar sobre las reglas metadiscursivas teniendo en cuenta que, a pesar de la ubicuidad de este aspecto del aprendizaje, sólo hasta hace poco los profesores e investigadores le han prestado atención directa. Este abandono prolongado es poco sorprendente. Las reglas metadiscursivas están presentes únicamente de manera implícita en los discursos, y su aprendizaje ocurre de forma espontánea sin la planeación deliberada de los profesores, sin la intención de los estudiantes y sin la consideración consciente de alguien. Aun así, estas reglas invisibles son responsables no sólo de la manera en que hacemos las cosas, sino también de que seamos capaces de hacerlas. Es más, su influencia en nuestras decisiones discursivas espontáneas puede algunas veces ser muy radical. Para aclarar este punto, veamos un ejemplo.

Las observaciones incluidas más adelante fueron hechas por accidente, cuando yo enseñaba dos cursos universitarios de forma paralela. Uno de los cursos, llamado “Seminario didáctico de las matemáticas”⁶ era una clase obligatoria para estudiantes de pregrado con énfasis en matemáticas, que se preparaban para ser profesores de esta asignatura en escuelas secundarias. El otro era un seminario titulado “Aproximación discursiva a la investigación sobre el pensamiento matemático”, dirigido a estudiantes de postgrado. Aunque no se requería conocimiento especial de matemáticas por parte de los asistentes a este último, todos los estudiantes del grupo tenían por lo menos conocimiento de las matemáticas de secundaria y algunos de ellos poseían grado universitario en

sición B implica a C, entonces la proposición A implica a C”, son claramente metadiscursivas dado que sus objetos son proposiciones matemáticas (y no las entidades que son objetos de las proposiciones matemáticas). Para dar un ejemplo de las reglas del nivel de los objetos en el discurso matemático, se puede recurrir a las leyes del campo numérico que gobiernan las relaciones entre números reales, o en el discurso cotidiano, a las leyes según las cuales se decide si hay posibilidad de lluvia con base en lo que se sabe en la actualidad sobre el clima. El conocimiento de las reglas del nivel de los objetos es indispensable al evaluar la veracidad de las enunciaciones. Por supuesto, de igual forma, lo son las leyes de la lógica que por sí mismas pertenecen a la categoría metadiscursiva. Se debe resaltar inmediatamente que en un enfoque discursivo radical, la distinción aparentemente clara entre el nivel de los objetos y el metanivel se hace difusa; para una explicación mas detallada, véase la nota de pie de página 10.

6 Lo que en Israel se llama “seminario didáctico” se aproxima a lo que se conoce en otras partes del mundo como “curso de metodología”.

7 Nótese que aunque parece un argumento inductivo usual, la primera parte del texto en la Figura 2 no presenta una declaración verdaderamente significativa.

matemáticas. Unos pocos estaban trabajando como profesores de matemáticas en escuelas de secundaria.

Los dos grupos debían discutir, entre otras cosas, la bien conocida idea de aprender matemáticas por medio de la escritura. Con el objeto de ofrecer a los participantes material para una reflexión posterior, les propuse la actividad que se presenta en la Figura 1. Se les pidió “Escribir una carta a un amigo” en la que intentaran convencerlo de que cierta igualdad que ellos consideraban verdadera debía funcionar para cualquier número natural. De manera inesperada, pero no del todo sorpresiva, los resultados obtenidos en las dos clases fueron muy diferentes. Se exhiben dos muestras de repuestas de los estudiantes en el Cuadro 1. Es importante resaltar que las muestras son verdaderamente representativas en la medida en que cada una de ellas evidencia ciertas características críticas, comunes a los demás textos producidos en la misma clase. La diferencia entre el desempeño de las dos clases movilizó mi reflexión; en lo que queda de esta sección intentaré explicar por qué.

Figura 1: La tarea asignada a los estudiantes en dos clases diferentes

Observe las dos secuencias siguientes:

La secuencia de **cuadrados** : y la secuencia de “ **triángulos** ”:

R_1 R_2 $R_3 \dots$

P_1 P_2 $P_3 \dots$

1. ¿Qué puede decir sobre la relación entre el área de R_{200} y P_{200} ? Presente su respuesta por escrito.
2. Escriba una carta a un amigo tratando de convencerlo de que su respuesta es correcta.

La diferencia entre las dos muestras de texto es impresionante y a primera vista ya es obvia: mientras un texto hace uso extensivo de símbolos matemáticos, el otro, difícilmente puede reconocerse como perteneciente al discurso matemático (cabe anotar que esta diferencia no es menos visible en la versión original hebrea de las respuestas de los estudiantes; uno no tiene que entender el lenguaje para percibir la disparidad de los dos textos). Sin embargo, también hay muchas otras diferencias. El estilo, en general, de las dos “cartas” es incompatible; se podrían presentar problemas al creer que los dos textos intentan responder la misma pregunta. El estudiante del seminario didáctico expuso su argumento

en la reconocida forma de prueba por inducción matemática mientras que el participante del seminario del discurso utilizó una forma menos especializada y más basada en el sentido común para tratar de convencer.

Cuadro 1: Muestras representativas de los estudiantes de ambos grupos

1. Estudiante de pregrado, con énfasis en matemáticas, del “Seminario didáctica de las matemáticas” $R_{200} = P_{200}$ Esto es cierto también para $R_1, \dots, R_n$ y $P_1, \dots, P_n$, los primeros cuadrados y triángulos. Además, $R_n = n^2$ $P_n = n^2$ $P_n = R_n$ Suponiendo que esto es cierto para n, comprobémoslo para $n + 1$: $i?$ $R_{n+1} = (n+1)^2$ $R_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = R_n + 2n + 1$ $\downarrow$ R_n $P_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ $P_n = R_n \text{ (de acuerdo al supuesto)}$ $\Rightarrow P_{n+1} = R_{n+1}$ $\Rightarrow P_{200} = R_{200}$	2. Estudiante de postgrado del seminario sobre el discurso Querido amigo: El área de R_{200} es igual a la de P_{200}. Permíteme explicarlo: Primero, el área de R_1 es igual al área de P_1. Esto significa que son exactamente del mismo tamaño. Ahora bien, si agregamos la misma área a P y a R, la relación entre ellos seguirá siendo la misma. Tomemos un ejemplo de un campo diferente (sólo pretendo explicar por qué la relación se mantiene constante cuando las magnitudes básicas son las mismas y las aumentamos [en la misma cantidad] respectivamente). Miremos las balanzas. En un lado ponemos una manzana y en el otro lado una naranja de peso equivalente. Ahora agreguemos a cada lado una fruta de manera que ambas frutas tengan el mismo peso. Es claro que los pesos en ambos lados se mantienen iguales. Esto mismo es cierto para nuestros cuadrados y triángulos. Los primeros cuadrados pequeños R_1 y P_1 son iguales y entonces la igualdad se mantiene cuando adicionamos la misma cantidad a ambos.
--	--

En primera instancia, la diferencia notoria que existe puede parecer sorprendente, dado que los dos grupos se pueden considerar como casi idénticos en tres aspectos relevantes: su conocimiento matemático, su profesor y la tarea a la que se estaban enfrentando. Mientras continuemos creyendo que estos tres aspectos son los principales factores responsables de la manera en que los estudiantes se comportan en clase, no tenemos explicación en lo absoluto para las incompatibilidades observadas en el desempeño de los dos grupos. La situación cambia cuando usamos la metáfora según la cual el aprendizaje se ve como el convertirse en participante en un discurso, y empezamos a prestar atención al complejo asunto de las reglas metadiscursivas. Ahora podemos decir que los dos grupos *participaron en diferentes discursos*, y que esta diferencia fue una cuestión de aspectos invisibles del metanivel más que de los factores explícitos del nivel de los objetos. Los estudiantes del seminario didáctico se comportaron, o por lo menos trataron de comportarse⁷, como participantes del discurso matemático, mientras los del otro seminario estaban inclinados hacia el discurso cotidiano —un discurso que es muy diferente, en sus reglas metadiscursivas, a las formas de comunicación comúnmente empleadas en una clase de matemáticas normal.

Una comparación, de sentido común y concisa, de las reglas que evidentemente fueron empleadas en los dos entornos se puede observar en la Tabla 1. Debido a las diferencias sustanciales entre estos dos conjuntos de reglas, la labor de *convencer* (o *probar*) estuvo ligada a evocar una reacción completamente diferente en los dos grupos. Lo que condujo a los grupos en direcciones tan asombrosamente diferentes no fue la tarea, ni el profesor, ni nada de lo que sucedió en el colegio el mismo día en que se desarrolló la tarea. Más bien, las distintas elecciones en el nivel meta del discurso fueron determinadas por diferentes connotaciones y expectativas respecto a la tarea, que están fundamentadas en las diferentes tradiciones de clase que se habían desarrollado en los dos grupos durante sus actividades pasadas.

De hecho, lo que el estudiante afirma que está probando es una tautología evidente: $Pn = Rn$, mientras $Pn = n2$, $Rn = n2$. Para esta declaración, obviamente verdadera, que no requiere prueba, el estudiante produjo una justificación extensa y cuasinductiva. Un texto cuasimatemático como el que se presenta en el primer ejemplo de la Figura 2, es una respuesta natural de los estudiantes cuya visión de ellos mismos como profesores está moldeada por libros de texto de matemáticas típicos.

8 El trabajo de Voigt (1985) se inspiró entre otros en Schutz (1967) y su idea de “actitud natural” que se expresa a sí misma en nuestra propensión a ciertos tipos de conducta.

Tabla 1: Descripción comparativa
de la actividad de persuasión en los dos grupos

	Estudiantes de pregrado del “Seminario didáctico de las matemáticas”	Estudiantes de postgrado del Seminario sobre el discurso
¿Cuál es el <i>propósito</i> de la actividad?	Elaborar un argumento matemáticamente convincente (un argumento que se pueda considerar una prueba matemática).	Elaborar un argumento de sentido común y convincente.
¿Qué se considera un argumento convincente?	Un argumento obtenido de acuerdo con los principios de verificación matemática (inducción matemática, en este caso).	Cualquier argumento basado en el sentido común que tenga la oportunidad de apelar a la razón y creencias del interlocutor.
¿Cuál es la <i>forma</i> requerida del argumento?	Formal, simbólica, claramente diferenciada del discurso cotidiano.	No hay reglas estrictas: cualquier argumento puede funcionar siempre y cuando sea comprensible y cumpla su función.
¿A qué clase de discurso pertenece?	Discurso de la clase de matemáticas.	Discurso cotidiano.

UNA MIRADA MÁS DETALLADA A LAS REGLAS METADISCURSIVAS

El ejemplo anterior ha mostrado que dos piezas de discurso que se traslapan sustancialmente en sus aspectos del nivel de los objetos, es decir, en su contenido, pueden ser casi irreconocibles como tales, debido a que han sido construidas de acuerdo con diferentes reglas metadiscursivas. Ahora es el momento de aclarar esta última noción de una forma más explícita.

Como se mencionó antes, la atención de los investigadores a las regularidades discursivas, ya sea en matemáticas o en cualquier otro tipo de discurso, es un fenómeno relativamente nuevo. Aun así, el estudio de los patrones discursivos que se repiten ha producido un impresionante volumen de publicaciones. Para apreciar la gama de los intereses actuales en el tema del discurso y sus modos, se debe ser consciente de que el término *regla* no es el único que se usa en este contexto. Muchas publicaciones en los campos de la filosofía, la sociología, la antropología y áreas relacionadas han estado dedicadas a las regularidades que llaman la atención dentro de las acciones discursivas humanas, las cuales van

más mucho más allá de las que pueden ser presentadas exclusivamente como cánones de comportamiento lingüístico, gramatical. Cuando la gente se involucra en la actividad de la comunicación —hablarse o escribirse, leer textos, o aun tener una conversación consigo mismos— no parece actuar de manera accidental y los discursos resultantes no parecen ser formaciones arbitrarias. Esta observación básica fue hecha por numerosos escritores y ha sido presentada y explicada con la ayuda de numerosos constructos teóricos. De esta forma, Wittgenstein (1953) habla profusamente de la comunicación humana como un ejemplo de actividad de seguimiento de reglas. Son las reglas lo que permite a la persona tomar parte en los complejos juegos del lenguaje que jugamos al hablar con otra persona. Esto es lo que hace posible la existencia del significado, mejor dicho, esto es el significado. En efecto, el conjunto de reglas que gobiernan el uso de una palabra específica es considerado por Wittgenstein como una definición del concepto de significado. De la misma manera, en el corazón de la teoría de las formaciones discursivas de Foucault (1972), se encuentra la presunción de la existencia de reglas que regulan el discurso “desde adentro” y “desde afuera” y sin las cuales los diferentes discursos no serían posibles ni tendrían sus distintas identidades:

Las reglas de formación no operan sólo en la mente o en la consciencia de los individuos, sino en el discurso en sí mismo; por lo tanto, éstas operan de acuerdo a una clase de anonimato uniforme, en todos los individuos que se atreven a ingresar en este campo discursivo. (p. 63)

El *motif* de las reglas que regulan la actividad, frecuentemente escondido bajo diferentes nombres y referido a un amplio espectro de fenómenos relacionados, es recurrente en el trabajo germinal del sociólogo francés Bordieau (1999). Sin hacer referencia explícita a las actividades comunicativas, Bordieau contribuye a nuestro tema actual cuando habla de *habitus*, “sistema de disposiciones transferibles duraderas, estructuras estructuradas predispuestas a funcionar como estructuras estructurantes, o sea, como principios que generan y organizan prácticas y representaciones [es decir, discursos]” (p. 108). Más relacionado con lo que nos concierne, se le presta considerable atención a las regularidades del discurso matemático en la clase, en el trabajo de Bauersfeld (1995), Forman (1996), Krummheuer (1995), O’Connor y Michaels (1996) y Voigt (1985, 1994, 1995, 1996), por nombrar unos pocos. Nociones tales como “rutinas”, “patrones de interacción”, “obligaciones” (Voigt, 1985)⁹, “estructuras de participación” (O’Connor y Michaels, 1996), y “prácticas discursivas” (O’Connor, 1998), aunque no equivalentes a la idea

9 El lector no debería estar tentado a interpretar el prefijo *socio* como si éste sugiriera que también existen normas que no son sociales en su origen.

10 El asunto permanece abierto ya sea que también se pueda decir que lo que

de regla metadiscursiva, se refieren claramente al mismo fenómeno. Las nociones relacionadas “normas sociales” y “normas sociomatemáticas”⁹, presentadas por Cobb, Yackel y sus colegas (Cobb, 1996; Cobb, Wood y Yackel, 1993; Yackel y Cobb, 1996), han sido tomadas por muchos otros investigadores como una herramienta útil no sólo para analizar el aprendizaje matemático en un salón de clase, sino también para pensar en asuntos prácticos, tales como el diseño instruccional y el mejoramiento del aprendizaje¹⁰. Ciertas diferencias sutiles entre los conceptos *regla* y *norma* serán discutidas más adelante, a medida que se presentan las funciones y las propiedades de las metarreglas. Debe quedar claro que el término *regla metadiscursiva* utilizado en este artículo no aparece como un constructo enteramente nuevo, sino más bien, como un término casi autoexplicativo que se supone debe abarcar todos los fenómenos señalados por las nociones enumeradas anteriormente. La noción actual parece cubrir más o menos el mismo terreno que todas las nociones arriba mencionadas, tomados en conjunto.

El impacto regulador de las metarreglas se siente en cada acción discursiva. Ellas nos dicen “*cuándo* hacer qué y *cómo* hacerlo” (Bauersfeld, 1993, p. 4; cf. Cazden, 1988). Empieza con eventos aparentemente triviales tales como nues-

Cobb (1996) denominó “prácticas matemáticas” implica su propio conjunto de reglas metadiscursivas o no. Después de todo, las prácticas en cuestión son prácticas discursivas. Por ejemplo, las reglas que gobiernan las operaciones con números, ¿son metadiscursivas o del nivel de los objetos? La respuesta depende del estatus ontológico atribuido a los objetos de estas reglas, tales como números, funciones, etc. Si estos objetos se perciben como externos al discurso en sí mismo, como poseedores de una existencia independiente del discurso, entonces también las operaciones con ellos deben ser vistas como determinadas externamente. En este caso, las reglas que gobiernan estas operaciones son claramente de un tipo diferente a aquellas que forman el discurso en sí mismo: las anteriores son reglas del nivel de los objetos, mientras que las últimas son del metanivel. Sin embargo, si uno rechaza esta posición platónica y ve los objetos de las matemáticas y las operaciones que se pueden realizar con ellos como fenómenos puramente discursivos, entonces también las reglas que gobiernan los objetos y las operaciones con objetos, probablemente, deberían tomarse como metadiscursivas. O, para expresarlo de otra manera, la distinción entre estos dos conjuntos de reglas se hace difusa si no insostenible del todo. Sin embargo, mantendremos esta distinción, suponiendo que es posible distinguir entre las afirmaciones del nivel de los objetos y las del metanivel, sin caer en implicaciones

tras decisiones rutinarias que llevan a responder un cierto tipo de enunciación (e.g., el saludo) con un cierto tipo de respuesta bien definida (usualmente, otro saludo), y continúa con nuestro uso de la lógica en la construcción de segmentos discursivos, con las formas particulares de moldear el posicionamiento mutuo de los interlocutores, con los medios que escogemos para convencer a nuestros compañeros, y así sucesivamente. En matemáticas, la presencia de las metarreglas específicas del discurso se manifiesta en nuestra elección instintiva de atender aspectos particulares de expresiones simbólicas (e.g., el grado de una variable en expresiones algebraicas) en tanto se desconocen otros (e.g., la forma de las letras con las que se escribe la expresión), y en nuestra habilidad para decidir si una descripción determinada puede ser tomada como una verdadera definición matemática, si una solución dada puede ser considerada como completa y satisfactoria desde el punto de vista matemático y si el argumento expuesto puede ser considerado como una confirmación final y definitiva de lo que se afirma. Para dar un último ejemplo, hasta hace muy poco, las metarreglas tácitas del discurso matemático en la clase hicieron posible que, con respecto a los problemas de palabras, el estudiante desconociera el contenido de la “vida real” y se olvidara de la credibilidad de los “datos proporcionados”. Como se documentó ampliamente (véase, e.g., Even, 1999), esta regla ha sido frecuentemente vista por los estudiantes como la que los exime de la preocupación por la credibilidad de los resultados.

La extensa lista de ejemplos, evidencia que a pesar del intento actual por referirse a las reglas metadiscursivas como principios consolidados, estas reglas están estrechamente conectadas al nivel de los objetos del discurso y tienen un impacto considerable sobre la interpretación del contenido por parte de los interlocutores. Permítaseme ahora hacer algunos comentarios adicionales sobre la noción de metarreglas, tal como se debería entender en este capítulo.

La naturaleza interpretativa del concepto de reglas metadiscursivas. Contrario a lo que parece implicar la noción de reglas reguladoras de actividad, la mayoría

platónicas. La distinción puede hacerse más aguda al decir, por ejemplo, que las reglas del metanivel son aquellas que hablan de enunciaciones matemáticas, de sus estructuras y de las relaciones entre ellas; y también aquellas que tienen que ver con los productores de las expresiones, es decir, los interlocutores. En contraste, las reglas del nivel de los objetos se refieren a entidades de las que habla el discurso determinado. Como tal, estas reglas, de ser formuladas, se pueden considerar como una parte del discurso en sí (e.g., “ $2 + 3$ igual 5 ”; “para dividir a en b encuentre el número c de manera que $b \times c = a$ ”).

de estas reglas no son algo real para el participante del discurso. Por decirlo de otra forma, excepto para algunas instancias especiales¹¹, no se deben observar estas reglas como algo que está siendo aplicado por los interlocutores de forma intencional. Las reglas metadiscursivas no están en la cabeza de los interlocutores más de lo que la ley de la gravedad está en la piedra que cae. Para usar la formulación de Bordieau, aunque deducimos la existencia de principios reguladores de regularidades visibles en las actividades humanas, las estructuras de patrón que vemos son “objetivamente ‘reguladas’ y ‘regulares’ sin ser de ninguna manera el producto de la obediencia [intencional] a las reglas; éstas pueden estar orquestadas colectivamente sin ser el producto de la acción organizadora de un conductor” (Bordieau, 1999, p. 108). Una idea similar ha sido expresada por Wittgenstein en su ataque a la ‘mitología de las reglas’ como principios que gobiernan el comportamiento humano en cualquier sentido real (Bouveresse, 1999, p. 45). En este capítulo haré referencia a las metarreglas como constructos del observador, percibidos de manera retroactiva en las actividades pasadas del interlocutor y que se espera reaparezcan, quizá, en una versión ligeramente modificada, en las actividades futuras de tales interlocutores. Las reglas metadiscursivas pueden ser entonces descritas como “una hipótesis explicativa construida por el teórico para explicar lo que observa” (p. 46). La forma en que esta ‘hipótesis’ debería ser construida, es decir, los métodos que debería emplear el analista del discurso en busca de reglas metadiscursivas implícitas es un interrogante diferente, que aún requiere de una gran inversión conceptual.

La naturaleza implícita de las reglas metadiscursivas y su aprendizaje. Aunque las metarreglas son más un constructo del observador que algo que gobierna las acciones humanas en el sentido común de la palabra “gobernar”, aun así existen ciertos patrones de acción que deben ser aprendidos por aquellos que deseen volverse hábiles en un tipo de discurso determinado. Es en este sentido que podemos continuar con la discusión sobre el aprendizaje de las reglas metadiscursivas. El interrogante que surge es cómo ocurre tal aprendizaje. En tanto que nuestro seguimiento de las reglas (o mejor, nuestro acatamiento de ellas) es inconsciente e involuntario, igual es nuestro aprendizaje de las formas determinadas de interacción. Es la forma en que hablamos y nos comunicamos con otros lo que transmite las normas tácitas. Así, por ejemplo, los alumnos por lo general aprenden las reglas del juego matemático sin un esfuerzo consciente, simplemente participando en el discurso matemático. Por supuesto, esto no excluye la posibilidad de dilucidar reglas y convertirlas en un objeto explícito de reflexión y modificación. Sin embargo, como lo planteó Magdalene Lampert

(1990), los estudiantes no aprenderían las reglas “con el solo hecho de decirles qué hacer, de la misma manera que no se aprende a bailar sólo porque le digan cómo hacerlo”. Además, si las reglas expresadas de forma explícita llegaran a estar en conflicto con las implicadas en las acciones concretas de los participantes, lo más probable sería que estas últimas, y no las primeras, fueran las usadas de manera más natural por los principiantes. En algunos casos, la *ambigüedad* (Bateson, 1973), así creada, probablemente obstaculizaría cualquier aprendizaje. Todo esto concuerda con la afirmación de Wittgenstein según la cual “la persona que sigue una regla ha sido *entrenada* para reaccionar de una forma determinada. A través de este entrenamiento la persona aprende a responder de formas convencionales y por consiguiente entra a la *práctica*” (Fogelin, 1995, p. 175).

Injustificabilidad de las metarreglas. Por estar presentes implícitamente en las interacciones humanas, las reglas metadiscursivas son un objeto improbable de justificación racional. Los patrones discursivos existentes y las reglas metadiscursivas que parten de ellos, desarrollados de forma espontánea a través de los años, son más un asunto de costumbre que de necesidad lógica. Este mensaje es expresado de forma enérgica por Wittgenstein (1956), quien para ilustrar este punto, escoge tal vez el tipo menos esperado de actividad discursiva —la actividad de comprobación matemática:

Dado que este es un procedimiento peculiar: *reviso* la prueba y luego acepto sus resultados. En otras palabras, esto es *todo lo que hago*. Es el uso y costumbre entre nosotros, o un hecho de nuestra historia natural. (p. 61)

Es incluso más explícito en su afirmación sobre la injustificación inherente a las metarreglas en el contexto de los cálculos matemáticos:

Creo que el riesgo aquí consiste en dar una justificación de nuestro proceder en donde no hay tal cosa como justificación y simplemente debimos haber dicho: *Así es como lo hacemos*. (p. 199)

En contraste con lo anterior, esta es una afirmación más bien sorprendente. Después de todo, nada podría ser más racional que la comprobación matemática. No obstante la afirmación de injustificabilidad, no considera la comprobación como tal sino las reglas metadiscursivas que rigen la actividad de construirla. Es la justificabilidad de las convenciones metadiscursivas la que es cuestionada y no la consistencia interna de las inferencias del nivel de los objetos. Además, el decir que las reglas metadiscursivas no se pueden justificar no significa que no

existan razones para su existencia. Sólo quiere decir que, contrario a la visión platónica de las matemáticas, las razones que se pueden ofrecer son no deterministas y tienen que ver con juicios humanos y elecciones, más que con una “necesidad objetiva”¹².

La imposibilidad de dar cuenta de las reglas metadiscursivas de una manera completamente racional explica por qué su aprendizaje es con frecuencia cuestión de práctica. Esta también puede ser la razón por la cual el reconocido matemático von Neumann, según se sabe, declaró que “uno no *comprende* las matemáticas, se *acostumbra* a ellas”.

La naturaleza no-determinista de las reglas. Un riesgo inevitable al usar el término regla es que parece referirse a que la forma en que se desarrollan los discursos es determinista. Pero nada se alejaría más de las intenciones de quienes eligen hablar de reglas para describir y explicar el fenómeno de los patrones discursivos. Las reglas del discurso no nos dicen qué decir más de lo que las reglas de tránsito nos dicen a dónde ir. Si acaso, nos hacen conscientes de lo que no sería apropiado decir en una situación dada. Al hacer esto, hacen posible la comunicación, de la misma forma que las normas de tránsito hacen posible transitar sin estrellarse. Por lo tanto aquéllas no son deterministas sino posibilitadoras y no hay nada causal en la forma en que ellas regulan la participación de las personas en el intercambio simbólico.

La naturaleza normativa de las reglas. Como se ha enfatizado en repetidas oportunidades, las reglas metadiscursivas no toman usualmente la forma de prescripciones explícitas para la acción, ni son conocidas o seguidas de manera consciente por los participantes del discurso. Sin embargo, por su repetición ininterrumpida, las reglas tácitas y en su mayoría involuntarias dan forma a las concepciones de la gente acerca de “una conducta normal” y, como tal, tienen un impacto normativo. En otras palabras, muchas de estas reglas funcionan como normas más que como sólo reglas neutrales: están cargadas de valor y cuentan como formas de comportamiento preferidas. Así, muchas de las reglas metadiscursivas son concebidas por los participantes del discurso, aun si sólo de manera tácita, como principios normativos. En palabras de Voigt (1985): “La interacción,

11 Cobb y su colegas (véanse, e.g., Yackel y Cobb, 1996; Cobb, Boufi, McClain, y Whitenack, 1997) pretenden hacer de las normas sociales y sociomatemáticas del discurso, objetos explícitos de negociación y aprendizaje en el salón de clase.

12 Las metarreglas estrictas del discurso matemático moderno son el resultado de esfuerzos sin precedente por parte de los matemáticos de los siglos XIX y XX por lograr una

en especial en el salón de clase, adquiere características *normativas*” (p. 85). Las nociones de normas sociales y sociomatemáticas de Cobb y sus colegas (e.g., Cobb, 1996; Cobb et al., 1993; Yackel y Cobb, 1996) son contrapartes normativas de las metarreglas *generales* y las metarreglas *específicas del discurso matemático* (más adelante se dará un tratamiento más detallado a esta última distinción).

Es una verdad simple y reconocida que las formas predominantes de la acción tienden a ser consideradas, después de algún tiempo, como las formas preferidas de conducta. Lo usual, lo común y lo dominante adquieren la calidad de lo deseable y privilegiado. El adjetivo “normal” se convierte en la confirmación de un mérito, mientras que todo lo que se desvía de lo normal se describe como una patología, como incorrecto e incluso algunas veces antiético. Este hecho se expresa, por ejemplo, en una resistencia bien documentada, muy común entre profesores, a los cambios en sus hábitos profesionales y, también, en el uso de los estudiantes de las palabras “no es justo”, para describir los requerimientos de los profesores que no pueden implementarse en las formas habituales.

Debido a la naturaleza tácita de las reglas metadiscursivas, las normas en sí mismas rara vez se hacen explícitas ya sea en el salón de matemáticas o por los investigadores matemáticos, aunque a veces sí ocurre¹³. De hecho, hacerlas explícitas fue el objetivo manifestado por el movimiento que se ocupó de los fundamentos de las matemáticas a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Cobb y sus colegas (e.g., Cobb, 1996; Cobb, Wood y Yackel, 1993; Yackel y Cobb, 1996) dirigen su investigación no solamente hacia la exposición de normas existentes en el salón de clase, sino hacia la posibilidad de moldear estas normas en formas bien definidas. Vale la pena mencionar que mientras las normas discursivas sean tácitas, su raigambre en nuestro pensamiento es particularmente fuerte y su modificación es, por lo tanto, difícil de obtener.

La naturaleza dinámica de las reglas metadiscursivas. La existencia de patrones repetitivos del discurso es la razón de nuestro presente debate sobre las reglas metadiscursivas. El énfasis en la repetitividad implica una relativa estabilidad de la conducta discursiva y de los principios subyacentes. Aunque la repetitividad y estabilidad son nuestros puntos de partida, es el momento de mencionar la *naturaleza dinámica* de los fenómenos discutidos. De hecho, los patrones discursivos creados y recreados ininterrumpidamente mientras las interacciones

comunicación lo más eficaz posible. Evidentemente, su esperanza no manifiesta era crear un discurso que no diera lugar a idiosincrasias personales y, por consiguiente, condujera a un consenso incuestionable. Tal consenso implicaría certeza en el conocimiento matemático.

se desarrollan, no siempre reaparecen exactamente como eran antes, y con el paso del tiempo, sufren transformaciones sustanciales. En efecto, tales transformaciones son el principal propósito del aprendizaje. El estudiante que llega a una clase de matemáticas debe aprender a participar en un discurso, el cual hasta el momento era inaccesible para él, y esto representa, entre otras cosas, adquirir la costumbre de comportarse de acuerdo a un nuevo grupo de reglas metadiscursivas. El nuevo comportamiento discursivo del estudiante se desarrolla gradualmente como resultado de las interacciones en clase. La forma en que esto ocurre merece cierta atención.

Aparentemente, las reglas del juego matemático de la clase son establecidas de manera exclusiva por el profesor, quien tiene una posición de relativo poder y autoridad otorgada por su experiencia en el discurso. De hecho, las formas discursivas del maestro son privilegiadas por todos los participantes y el lograr dominar este tipo privilegiado de discurso es el objetivo general del aprendizaje. Empero, esta visión unidireccional del aprendizaje es una simplificación exagerada. Al hablar de *normas* sociales y sociomatemáticas, Cobb (1996) enfatizó en la *reflexividad* de la relación entre la actividad matemática de los estudiantes y las prácticas en comunidad dentro del salón de clase:

Esta es una relación extremadamente fuerte y no significa simplemente que las actividades individuales y las prácticas en comunidad sean interdependientes. Por el contrario, implica literalmente que unas no existen sin las otras. (p. 97)

Esta afirmación tiene muchas implicaciones, una de las cuales es la reflexividad inherente al proceso mismo de construcción de la práctica: las normas discursivas en vez de ser dictadas de forma implícita por el profesor a través de sus propios comportamientos discursivos, se consideran como un producto que evoluciona a partir de los esfuerzos conjuntos del profesor y los estudiantes. En términos de Bauersfeld (Bauersfeld, 1988), “El profesor y el (los) alumno(s) *constituye(n) la realidad* del salón de clase *de forma interactiva*” (p. 37), y esto significa en nuestro contexto una negociación infinita de reglas a través de las cuales el discurso de una clase determinada es moldeado y remodelado. Yackel y Cobb (1996) dedican gran parte de su investigación al estudio de las formas en que los principios reguladores de la actividad son *constituidos de forma interactiva* por todos los participantes.

La observación de la reflexividad de los procesos constitutivos es muy importante, pero antes de avanzar se requiere una advertencia. Las afirmaciones hechas, bien sea aplicadas a las normas o a las reglas, no quieren decir que los principios discursivos en cuestión sean creados en el salón de clase partiendo de cero, ni implican que la clase y el profesor sean autónomos desde la elección

misma. El discurso matemático que se aprende en el salón es una parte bien establecida de la herencia cultural y se supone que precisamente por esta razón, los estudiantes están llamados a convertirse en sus participantes. Valga decir que las reglas del discurso se modifican cada vez que un nuevo profesor y una nueva clase empiezan a trabajar juntos. Después de todo, los niños llegan a clase con sus propios hábitos discursivos y estos hábitos tienen que dejar su huella en los hábitos discursivos de toda la clase, aunque es el profesor quien hará la contribución definitiva a las prácticas discursivas en el salón de clase. Siendo él “el portador de la tradición” está obligado a asegurarse de que los estudiantes estén en capacidad de participar en las prácticas matemáticas de una comunidad más amplia. Esta es la razón por la cual Cobb y sus colegas requieren que el profesor tenga un papel *proactivo* en la formación de las reglas del discurso en el salón de clase (véase Cobb y McClain, 1999).

Las metarreglas como arma de doble filo. La inclinación hacia la conducta habitual se relaciona con la necesidad general humana de interactuar significativamente con los otros. El comportarse de acuerdo a reglas es una condición necesaria de la comunicación eficaz. Las metarreglas invisibles tienen un efecto facilitador por cuanto eliminan infinidad de posibles movimientos discursivos y dejan a los interlocutores con un pequeño número de opciones razonables. Sin esta preselección, podríamos estar privados de la capacidad para participar en cualquier tipo de discurso. Sólo imagínese que se le pide “investigar la función $f(x)=3x^3-2x+5$ ” y usted no está seguro de si se le pide enumerar las propiedades del gráfico (aunque tendría que dibujarlo) o admirar su estética, contar los caracteres con los cuales la función ha sido escrita en el papel o expresar su opinión sobre ellos, investigar los efectos de la expresión $3x^3 - 2x + 5$ en las aplicaciones de la vida real o revisar las opciones para transformarla, y así sucesivamente.

De este modo, el impacto posibilitador de las metarreglas parece importante en su totalidad. Sin embargo, vale la pena mencionar que toda ganancia tiene su precio: la influencia limitadora de las metarreglas puede ir más allá de lo que es realmente útil. De vez en cuando, éstas pueden enceguecer a quienes solucionan problemas, ante posibilidades prometedoras o rutas no comunes que a veces se deben tomar para solucionar un problema que se tiene entre manos. Los educadores matemáticos han identificado una variedad de problemas que

13 Por supuesto, ningún análisis agotaría todas las reglas metadiscursivas y ninguna cantidad de reglas explícitas sería suficiente para reconstruir el todo del discurso. Por consiguiente, cualquier número de normas que se formulen solo cubrirá un área discursiva

suelen llamar problemas de *insight*¹⁴, que son particularmente difíciles de resolver, no sólo debido a las intrincadas técnicas matemáticas requeridas, sino por el “efecto ajá”, poco común, que se necesita para emprender un proceso de solución exitoso. Los problemas de *insight* son los que simplemente no pueden ser resueltos dentro de los límites de las reglas aceptadas del discurso matemático en el salón de clase. En efecto, las reglas de cualquier tipo frecuentemente crearían patrones mentales. Por dar sólo un ejemplo anecdótico: una persona con quien se practique el juego de hallar el “número diferente” en la secuencia (2, 3, 8, 10) durante la clase de matemáticas, probablemente no dé la respuesta que tengo en mente: “Es 8, porque 8 es el único número en la secuencia cuyo nombre en inglés no empieza con la letra *t*”. Con mayor frecuencia, el estudiante de matemáticas no pensaría en este tipo de respuesta simplemente porque considera que las letras que forman los nombres de los números no pertenecen al repertorio de actividades que cuentan dentro de lo matemático. Para resumir, las metarreglas discursivas son delimitantes e indispensables. Aunque demasiado rigor paraliza, su ausencia también lo hace.

UNA MIRADA MÁS DETALLADA AL CONCEPTO DE DISCURSO MATEMÁTICO

En lo que resta de este trabajo, mientras se pretende llegar a resolver la pregunta del reformista, prestaré atención particular a un tipo especial de reglas metadiscursivas que, como intentaré mostrar, podría estar entre los factores más influyentes en los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Las reglas que trataré son aquellas que proporcionan al discurso matemático su identidad única. Las reglas específicas del discurso matemático tradicional imponen, entre otras cosas, las formas extremadamente rigurosas y definidas de manera precisa con las cuales se argumentan nuestras afirmaciones matemáticas. La creencia de que la prueba es una deducción formal para obtener axiomas, junto con la prerrogativa de los matemáticos de establecer sistemas axiomáticos en la forma en que lo deseen, siempre y cuando los sistemas estén libres de contradicción, pertenecen a esta categoría.¹⁵ Con las reglas metadiscursivas del discurso específico también decidimos, usualmente en forma instintiva, qué tipo de acción

restringida.

14 Haciendo eco a la traducción del libro *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos* de L. Resnick y W. Ford, publicada en 1990, el término *insight* se puede traducir aproximadamente como “comprensión súbita”. Pero puesto que no es fácil encontrar un término en español que encierre los matices del vocablo inglés, hemos

de nuestra parte será apropiada en un contexto dado y qué comportamiento parecería fuera de lugar. Para ser más específicos, las metarreglas de las que estamos hablando son aquellas que determinan las formas de comunicación que son exclusivas de las matemáticas. Son los principios que regulan aquellas actividades discursivas tales como delinear el significado de los conceptos (definir), validar afirmaciones sobre estos conceptos (probar), preparar registros escritos, etc. Claramente, este subconjunto de reglas metadiscursivas también determina la infraestructura epistemológica-ontológica del discurso matemático.

En este punto, probablemente un lector cuidadoso podría señalar que esta descripción no es clara porque la noción central, discurso matemático, no es inequívoca. Hay algo impreciso acerca del término *discurso* en sí mismo; y por tanto, incluso si se acepta el término, difícilmente podremos ubicar en la misma categoría discursos tan diferentes como los dirigidos por matemáticos profesionales y los manejados por los estudiantes en la escuela. Permítaseme profundizar sobre estos dos problemas mientras argumento la sostenibilidad y utilidad del término *discurso matemático*.

De los comentarios anteriores sobre la naturaleza dinámica de las metarreglas se desprende que, de hecho, los discursos no pueden ser vistos como entidades invariables con propiedades inmutables. Más bien, deberían compararse con ríos que fluyen, cambian y nunca se detienen, pero que sin embargo conservan sus identidades aunque sea sólo por la continuidad de este proceso. Además, cualquier grupo de personas comprometidas en una conversación continua y, en particular, cualquier clase en la escuela, está en la obligación de crear su propio tipo idiosincrásico de discurso, con un conjunto de metarreglas que de alguna manera es único.

Después de todo lo dicho, sigo sosteniendo que hay algo distintivo y relativamente invariable sobre aquellos discursos que identificamos como matemáticos. Por otra parte, existen razones para creer que las similitudes que nos hacen decir “esta clase está aprendiendo matemáticas” cuando vemos a los niños ocupados en ciertos tipos de actividad, cruzan los límites de clases, escuelas, lenguajes y naciones específicas. Lo que hace al discurso matemático distinto y fácilmente reconocible no es sólo su contenido. El rasgo que buscamos instintivamente es un subconjunto de reglas metadiscursivas que son distintas de todo lo que se conoce acerca de otros discursos.

La variedad de discursos que se identifican como matemáticos pueden

decidido no traducirlo. [N.E.]

15 Vale la pena mencionar que esta regla es relativamente nueva; hasta por lo menos

aun diferir considerablemente en ciertos subconjuntos de sus metarreglas. Por ejemplo, es importante distinguir entre discurso matemático académico (o de investigación)¹⁶, discurso matemático en la escuela y discurso matemático cotidiano (Rittenhouse, 1998). Cada uno de estos discursos tiene su propio y único conjunto de metarreglas, y cualquiera que trate de comparar la clase de matemáticas a nivel universitario con la clase en la escuela puede testificar que estos conjuntos difieren entre ellos de muchas maneras¹⁷.

Por supuesto, el descriptor común “matemático” señala también una similitud en el nivel de los objetos: indica que enunciaciones que provienen de diferentes discursos pueden hablar de los mismos objetos. De este modo, ya sea delineada en un lenguaje escolarmente formal o en el descuidado lenguaje cotidiano, una enunciación que tiene que ver con operaciones numéricas o con transformaciones de formas geométricas puede calificar como matemática. Muchos conceptos matemáticos pueden ser tratados con una precisión razonable dentro de los límites flexibles del discurso cotidiano y, por lo tanto, muchos hechos matemáticos se pueden presentar y discutir en conversaciones que no muestran muchos de los rasgos típicos del discurso académico. Esto es definitivamente válido casi para cualquier noción matemática aprendida en la escuela primaria. El foco en este capítulo es el discurso matemático que va más allá del discurso cotidiano de una manera esencial, o sea, el discurso que tiene que ver con conceptos matemáticos que el estudiante no puede incorporar en el discurso cotidiano¹⁸.

el siglo XVIII solamente eran consideradas como axiomas las proposiciones que se veían como verdades universales y objetivas.

16 Para consultar diferentes aspectos del discurso matemático profesional, véase, por ejemplo, Davis y Hersh (1981).

17 Compárese la noción de *transposición didáctica* introducida por Chevallard (1985, 1990; véase también Sierpinska y Lerman, 1996) para denotar el cambio que ocurre de manera inevitable en los discursos durante su transición de la academia a la escuela. En su versión original, el término se refería al hecho de que el conocimiento profesional debe cambiar de acuerdo con las necesidades de la institución en la cual este conocimiento se pone en práctica; en el lenguaje del discurso, podríamos decir que lo que aquí nos interesa es la transformación del discurso de acuerdo a las necesidades y requerimientos de diferentes

EL USO DEL LENTE DISCURSIVO PARA RESPONDER LAS PREGUNTAS ORIGINALES

Volvamos a la pregunta que hicimos después de escuchar la queja de Stendhal sobre las poco convincentes explicaciones de la regla “menos por menos da mas”: ¿por qué ciertos conceptos matemáticos son inadmisibles y ciertos argumentos matemáticos resultan poco convincentes para muchos estudiantes?

En este momento, lo natural es ver si la conceptualización discursiva del concepto de aprendizaje, recientemente presentada, ayuda a encontrar una respuesta. No tenemos información sobre las explicaciones que dieron los profesores de Stendhal y, aunque éstas parecen defectuosas de alguna manera, no tenemos razones para descartar la posibilidad de que el problema de Stendhal fuera otro. Bien podría ser que las dificultades que experimentó tuvieran que ver con las *metarreglas implícitas* responsables del tipo de argumento que se le ofreció, más que con los contenidos explícitos del argumento. El tipo de argumento que contaba como apropiado y final a los ojos de los profesores pudo haber parecido inadmisible o insuficiente a los ojos del estudiante.

He aquí una posibilidad de cómo pudieron ser las justificaciones de los profesores de Stendhal¹⁹. A partir de la necesidad de no violar las leyes básicas de los números, conocidas hasta ahora, y suponiendo que la ley “más por menos da menos” y la regla $-(-x) = x$ han sido deducidas de tales leyes, (¡Stendhal parece no haber tenido problema con éstas!), la persona que explica podría ahora argumentar que para dos números positivos cualesquiera, a y b , se cumple lo siguiente. Por un lado,

$$(1) \quad 0 = 0 \cdot (-b) = [a + (-a)](-b)$$

y, por otro lado, por la ley distributiva, que se supone se debe cumplir,

$$(2) \quad [a + (-a)](-b) = a(-b) + (-a)(-b)$$

Puesto que ya se acordó que $a(-b) = -ab$, obtenemos de (1) y (2):

$$-ab + (-a)(-b) = 0$$

De ahí, y de la ley $-(-x) = x$, ahora se obtiene:

$$(-a)(-b) = -(-ab) = ab$$

comunidades.

18 Como se explicará más adelante, esta dificultad se deriva de una cierta incompatibilidad entre conceptos matemáticos avanzados, como números negativos, y las metarreglas del discurso cotidiano que generan su infraestructura epistemológica.

Uno podría sentirse ofendido por el grado de formalidad de esta justificación. Un tipo de explicación diferente, más convincente a los ojos del estudiante, sólo podría provenir del discurso cotidiano. En efecto, las conversaciones en clase entre estudiantes de secundaria, que no son realmente el caso de un discurso

1 Dan: El menos es algo que la gente se inventó. Es decir... no hay nada a nuestro alrededor para mostrarlo. No puedo imaginarme nada así.

2 Anna: ¿Todo lo relacionado con los números es inventado por la gente?

3 Dan: No, no todo...

4 Anna: ¿Por ejemplo?

5 Dan: Por ejemplo, la operación básica de adición, uno más uno [es dos] y según la lógica del mundo no puede ser de otra manera.

6 Anna: Y un medio más un tercio es igual a cinco sextos. ¿Depende eso de nosotros, los seres humanos, o...

7 Dan: No depende de nosotros. Se puede mostrar en el mundo.

8 Anna: Ajá... Y, cinco menos ocho igual a menos tres, ¿depende de nosotros o no?

9 Dan: De nosotros.

10 Anna: ¿Por qué?

11 Dan: Porque en nuestro mundo no hay ejemplo para una cosa así^a.

- a. Si el objeto que carece de sustento en el “mundo real” ha sido de alguna manera admitido en el discurso (y esto bien podría suceder porque lo solicita el profesor!), permanecerá siempre en su propia categoría independiente de “invenciones humanas”. Esto significa un estatus de ciudadano de segunda clase dentro del discurso matemático. Esta creencia en la inferioridad de las entidades que no se ajustan completamente al discurso cotidiano, se expresa algunas veces con el adjetivo imaginario, el cual implica que otros objetos completamente consolidados, son “reales”, es decir, independientes de la mente (cf. Sfard, 2000b).

19 Es importante tener en cuenta que lo que sigue no es sino una especulación y que la justificación presentada es una explicación de las razones para definir el producto de dos

matemático consolidado, son típicamente un resultado de la hibridación entre el discurso cotidiano y el discurso matemático moderno. En el discurso cotidiano, las afirmaciones acerca de los objetos son aceptables (verdaderas) si parecen necesarias e inevitables y si se conciben como declaratorias de una propiedad del “mundo externo” independiente de la mente. Esto se aplica no sólo para objetos materiales, sino también para los números, las formas geométricas y todas las otras entidades matemáticas que se encuentran en usos coloquiales²⁰. Es esta “realidad externa”, la piedra angular de la inevitabilidad y la certeza. En las matemáticas, como en el discurso cotidiano, el estudiante espera ser guiado por algo que puede considerar está más allá del discurso mismo y es independiente de las decisiones humanas. Esto es lo que se percibe en las palabras de Dan, uno de los estudiantes que respondió a mi cuestionario, cuando trataba de explicar la dificultad que tiene con los números negativos.

Por consiguiente, el camino más seguro para el estudiante hacia una comprensión y aceptación de los números negativos y las operaciones con ellos sería hacerlos parte de su discurso cotidiano. Infortunadamente, en este caso, esto no parece posible. A pesar de que la gente puede por lo general incorporar números negativos en oraciones al hablar de asuntos comunes, estas apariciones

números negativos como positivo.

20 Por supuesto, este sentido de externalidad e independencia de la mente puede verse por sí mismo como consecuencia de las actividades discursivas, una característica que contemplamos siempre que los objetos del discurso tengan ya una larga historia y constituyan una parte inextricable de la realidad cotidiana de cada uno. Debido a que esta realidad se encuentra en el interminable proceso de construcción discursiva casi desde el día en que nacemos, se convierte para nosotros en actual y objetiva y la aceptamos de forma irreflexiva como externa a nosotros, necesaria y la única posible. Los objetos que habitan esta realidad, aunque sean construcciones discursivas en sí, funcionan en nuestro discurso cotidiano como si tuvieran vida propia. Este sentido de independencia es fortalecido por el hecho de que nuestro uso discursivo cotidiano de los objetos es con frecuencia masivamente apoyado con experiencia visual y está mediado por las operaciones que ejecutamos en imágenes asociadas con los objetos. La disponibilidad de tales recursos manipulables visualmente, ya sean reales o imaginarios, subyace a nuestra habilidad de comunicarnos sobre estos objetos y operarlos discursivamente y es, por consiguiente, una condición de nuestra aceptación intuitiva de estos objetos. Entre más aceptación intuitiva, más “condicionados discursivamente” estamos para considerar como externo lo que sea que llegue a nosotros bajo la forma de experiencia perceptual (los modelos populares implícitos en la forma en que hablamos presentan los objetos accesibles perceptualmente, como poseedores de una existencia externa e independiente). Esta es una de las metarreglas tácitas del discurso cotidiano que está obviamente ausente cuando se consideran los números negativos.

Tabla 2: Ejemplos de verbalizaciones “cotidianas” encontradas por los estudiantes, que incluyen números negativos.

Ejemplo	%
Oración con -3 :	
“La temperatura descendió a -3 ”	42
Preguntas cuya respuesta debe ser -2 :	
“La temperatura descendió 12 grados a partir de 10 grados. ¿Cuál es la temperatura ahora?”	42
“¿Cuánto dinero debe a John?”	25

discursivas son incompletas en la medida en que rara vez incluyen operaciones con números y por consiguiente se refieren a entidades tales como -2 , o -10.5 como etiquetas en lugar de números en toda su dimensión. Esto se evidencia en los resultados de mi experimento en el cual se le solicitó a dieciocho estudiantes construir oraciones con el número -3 , al igual que preguntas cuya respuesta pudiera ser -2 . En ambos casos, se les pidió buscar afirmaciones de “contenido cotidiano”. Como se observa en los resultados que presenta la Tabla 2, no todos los estudiantes estaban interesados en responder el ejercicio. Los escasos usos

²¹ También es de resaltar que muchas de las preguntas “cotidianas” de las cuales se suponía que su respuesta era -2 , presentaron el síndrome de desenfoque; es decir, aunque la cantidad negativa estaba de alguna forma involucrada en la situación que planteaba la pregunta, la verdadera respuesta era 2 y no -2 (véase el último ejemplo de la Figura 3).

Este resultado es fácilmente explicable en el campo de los comentarios anteriores sobre el papel crucial de la mediación perceptual en el discurso. Aunque podemos respaldar visualmente algunas de las operaciones que involucran números negativos, con modelos contruidos especialmente, ninguno de tales modelos permitiría tomar decisiones discursivas definidas sobre la forma en que se debe hacer la multiplicación entre dos números negativos (cualquier decisión de esas debe estar sustentada por supuestos en el modelo, que a los ojos del aprendiz parecerían arbitrarios, véase también la siguiente nota de pie de página).

22 En primera instancia, este reclamo podría ser contestado ya que se han propuesto muchas ideas para explicar los números negativos y hacer modelos de ellos (por ejemplo, existe el modelo del movimiento en el que el tiempo, la velocidad y la distancia pueden ser medidos tanto en números positivos como negativos; los números se pueden representar como vectores, etc.). No obstante, al observar en forma más detallada, todas estas explicaciones y justificaciones resultan ser deducciones de las mismas decisiones básicas con respecto a si se preservan o no ciertas reglas primarias de los números; estas decisiones fundamentales

cotidianos de números negativos se presentaron únicamente en los contextos de temperatura, latitud y sobregiro bancario. En todos estos casos, los números negativos fueron empleados como etiqueta más que como medida de cantidad²¹. El supuesto de que la deducción formal vista antes debió haber sido la que ofrecieron sus profesores al joven Stendhal es así más que plausible, simplemente porque los eruditos que le explicaban no parecían haber tenido muchas opciones: el argumento formal presentado no tiene una alternativa genuina²². Sin embargo, para un estudiante que busca objetos y formas para operar con ellos en “el mundo externo”, cualquier idea propuesta que recurra a la fuerza pura de un argumento lógico debe ser difícil de aceptar. La justificación de la matemática moderna sólo puede sonar convincente si uno admite la superioridad de los axiomas y reconoce la convención de que la consistencia con un conjunto de axiomas, posiblemente arbitrario, es la condición última de aceptabilidad. Esta regla metadiscursiva parte, más que todo, de la infraestructura epistemológica del discurso cotidiano. Es por consiguiente bastante obvio que la deducción formal no tiene, ni podía tener, mayor atractivo a los ojos del joven quien aún tenía un largo camino por recorrer para convertirse en un participante elocuente del discurso formal de las matemáticas modernas.

En resumen, aunque Stendhal y sus profesores se referían a la misma cosa, podrían de hecho estar participando en discursos diferentes, a su vez regulados por reglas metamatemáticas diferentes. Con razón, las argumentaciones de los profesores no convencieron al estudiante desconcertado: ¿uno no puede perder o ganar en un juego en el que no participa! Luego, ¿cómo podemos proceder si insistimos en enseñar números negativos y al mismo tiempo deseamos respetar la necesidad de comprensión de los estudiantes? Los mismos matemáticos superaron sus dificultades con los números negativos ajustando las reglas del juego matemático a las nuevas necesidades. Sin embargo, este fue un proceso prolongado y doloroso. Aun así, tres siglos de aplicación discursiva persistente logró que los matemáticos se acostumbraran a las nuevas regulaciones metadiscursivas a tal punto que, con el paso del tiempo, las nuevas reglas llegaron a ser para ellos tan “naturales”, evidentes y aparentemente ineludibles como el conjunto anterior de metarreglas lo fue para sus predecesores. Una revolución similar debe ocurrir probablemente en el discurso matemático en el salón de clase si se acepta la operación de multiplicar números negativos. Si esto se puede lograr en el salón de clase actual y de qué manera hacerlo es una pregunta aparte que retomaré en la sección final al reflexionar sobre el presente movimiento de reforma.

LAREFORMA,¿QUÉTANBIENSUPLILELASNECESIDADESDELPARTICIPANTEINEXPERTO EN EL DISCURSO MATEMÁTICO?

DISCURSOMATEMÁTICODELSALÓNDECLASE:¿DEDÓNDEDEBERÍANPROVENIRSUSREGLAS?

Se debe responder ahora una nueva pregunta: *¿de dónde deberían venir las metarreglas que hacen que el discurso del salón de clase sea específicamente matemático?* Al parecer, la respuesta es simple: en lo que concierne a las matemáticas, este discurso particular del colegio debería ser, en lo que a sus metarreglas se refiere, tan cercano como sea posible al discurso de los matemáticos. Sin embargo, el ejemplo discutido anteriormente muestra que el asunto no es tan simple. Otra evidencia contundente proviene de la experiencia con la propuesta de las Nuevas Matemáticas que, al final de los años cincuenta y al comienzo de los años sesenta, intentó transportar el discurso de los matemáticos directamente de las universidades al colegio (cf. Brown, 1997). Este intento no pudo ser del todo exitoso simplemente porque quienes lo concibieron no tuvieron en cuenta los efectos adversos de la tensión entre el discurso matemático profesional y la primera experiencia discursiva del estudiante.

Aun así, la necesidad de preservar en el colegio ciertas características básicas del discurso profesional es incuestionable. Después de todo, la decisión de enseñar matemáticas a todo el mundo resulta del reconocimiento de la importancia de este discurso. A este respecto, Lampert (1990) argumentó que, en últimas, el objetivo de enseñar matemáticas debería ser “acercar la práctica de saber matemáticas en el colegio, a lo que significa saber matemáticas dentro de la disciplina” (p. 29). Las palabras “la práctica de saber matemáticas” señalan que el énfasis se centra en los estratos metadiscursivos²³.

¿QUÉ DICEN LOS ESTÁNDARES DEL NCTM²⁴ ACERCA DEL DISCURSO MATEMÁTICO?

Dado que es difícil hablar acerca del movimiento de reforma en general, tomaré los *Estándares* del NCTM (1989, 1991), como un ejemplo genérico que representa

son exactamente iguales a las que encuentran su expresión en la aceptación de axiomas del campo numérico como base para cualquier decisión posterior y deben ser aceptadas (de manera tácita) antes de cualquier justificación.

²³ Este enfoque está relacionado con lo que Deborah Hicks denominó “instrucción deliberada de género” (citado en Lampert y Cobb, 2003) y con lo que Cobb, Wood y Yackel (1993) denominan “hablar acerca de la charla sobre matemáticas” (p. 96). Véase también Yackel y Cobb (1996).

acertadamente el espíritu y los principios del cambio perseguido en estos días en todo el mundo. El lenguaje del discurso está presente en los *Estándares*, especialmente en el volumen dedicado a la enseñanza. Los autores de los *Estándares* explican que:

El discurso se refiere a las formas de representar, pensar, hablar, acordar, disentir que los profesores y estudiantes utilizan para interactuar... El discurso lleva incluidos valores fundamentales acerca del conocimiento y la autoridad. Su naturaleza se refleja en lo que hace que una respuesta sea correcta y lo que cuenta como quehacer, argumento y pensamiento matemáticos legítimos. Los profesores, a través de las formas como dirigen el discurso, transmiten mensajes relativos a: de quién es el conocimiento y las formas de pensar y conocer que se valoran, quién se considera que está en capacidad de contribuir, y quién tiene estatus en el grupo. (NCTM, 1991, p. 20)

Esta definición es un intento de alertar, a quienes están implementando la reforma, sobre la existencia de reglas implícitas así como sobre las formas discursivas indirectas en las que se comunican estos contenidos especiales. Los *Estándares*, en su totalidad, se pueden tomar como un intento exhaustivo por aclarar lo que, de acuerdo a los autores, constituye el verdadero discurso del salón de clase. En este contexto es importante darse cuenta de que a diferencia de otros documentos más tradicionales, los *Estándares* proveen un espacio para ciertas reglas concretas del metanivel, tal como la que exige que la experiencia y el razonamiento propios del estudiante, más que el profesor y el texto de clase, sean vistos como la fuente principal de conocimiento y certeza en matemáticas (véase, por ejemplo, NCTM 1989, p. 129).

¿En qué se diferencia el discurso del salón de clase inspirado en la reforma del discurso matemático profesional?

Polya (1957, p. 11) afirma que: “Las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática deductiva, pero las matemáticas en construcción son una ciencia experimental inductiva”. Esto significa, entre otras cosas, que el “discurso de hacer” matemático es mucho más natural y menos restrictivo que el “discurso de reportar”. Sin embargo, el discurso de hacer es más disciplinado en comparación con otros discursos ya sean cotidianos o científicos. Al restringir en gran manera las formas admisibles de expresión, los matemáticos tratan de asegurarse de que la forma y el contenido exactos de su discurso se consideren independientes de los gustos, juicios y preferencias de los interlocutores. Con justa razón, se podría esperar que el discurso matemático del salón de clase, sea

una versión bastante relajada, mucho menos rigurosa y más asequible que la de dicho discurso. A veces, sin embargo, la simplificación de las reglas puede ser tan radical que comenzaría a considerarse como “la redefinición de lo que constituyen las matemáticas” (Wu, 1997, p. 954; cf. Sierpinska, 1995; Thomas, 1996). Un análisis cuidadoso de los requisitos de los *Estándares* del NCTM muestra que, al contrario de las recomendaciones de Lampert (1990) arriba citadas, las nuevas matemáticas del colegio pueden, y de hecho resultan, ser muy diferentes de “lo que significa saber matemáticas dentro de la disciplina”.

Permítaseme dar un informe muy breve e incompleto de las formas en que el discurso del salón de clase, inspirado en la reforma, puede ser diferente del discurso del profesional (véanse también Brown, 1997; Love y Pimm, 1996). Como trataré de mostrarlo, ciertos valores y pautas profesadas por los *Estándares* pueden ser interpretadas en una forma que riñe en cierta medida con las normas que regulan el discurso matemático tradicional. Esta incompatibilidad normativa se puede ver principalmente en el nivel de las reglas que hablan de los derechos y obligaciones de uno como participante en el discurso matemático.

En primer lugar, los educadores y los matemáticos están a menudo divididos en lo que respecta al asunto de qué es lo que se considera una verdadera actividad matemática. Inspirados por las afirmaciones sobre el aprendizaje como fenómeno esencialmente situado (Brown, Collins, Duguid, 1989; Lave, 1988; Lave y Wenger, 1991), los *Estándares* promueven la incrustación de ideas matemáticas abstractas en contextos familiares concretos (cf. Sfard, 2003). La tendencia a buscar siempre situaciones de la vida real y a abstenerse de tratar con contenidos matemáticos “destilados” concuerda en gran medida con el espíritu de los discursos cotidianos, pero contradice lo que con frecuencia se cree que es la esencia misma de la matematización. Después de todo, matematizar es casi un sinónimo de “volar alto” por encima de lo concreto, y de clasificar las cosas de acuerdo a características que traspasan los contextos. Los matemáticos afirmarían (véase, e.g., Wu, 1997) que es la capacidad para extraer esqueletos de estructuras abstractas a partir de corporeizaciones concretas lo que constituye la fuente principal de la belleza y la fuerza únicas de las matemáticas. Cuando nos restringimos a las matemáticas basadas en la vida real, estamos atándolas de nuevo a lo concreto y lo particular, y perdiendo lo que para el matemático es la esencia de la creación matemática. Además, los matemáticos anotarían que el gran énfasis para poner las matemáticas en un contexto de la vida real, crea una atmósfera utilitaria, ajena al discurso matemático moderno: Wu lamenta la desaparición del “espíritu de cuestionamiento intelectual por el puro cuestionamiento” (p. 956).

De manera similar, los educadores y los matemáticos discutirían por la admi-

sibilidad de argumentos no analíticos, tales como aquellos que emplean medios visuales. A pesar de que este último tipo de argumento a menudo se reconoce como suficiente en el colegio, los matemáticos aún lo ven como distante del decisivo o final, si es que conveniente (Davis, 1993; Rotman, 1994; Sfard, 1998). De forma más general, los *Estándares* le dan un gran valor a la heurística, la cual a veces se malinterpreta como una luz verde para actuar sin ninguna restricción. De hecho, con mucha frecuencia la única instrucción que se les da a los estudiantes con el propósito de involucrarlos en una actividad de prueba, es: “Convenza a su compañero”. Y así, de la misma manera como los argumentos del matemático con frecuencia fracasan en su propósito de convencer a los niños del colegio, fracasarán los argumentos de los niños para convencer a los matemáticos. Debido a la prácticamente ilimitada libertad en la escogencia de las formas para “convencer”, se puede perder lo que es propio del discurso matemático en cuanto a demostración se refiere. Esta es probablemente la razón por la que los críticos se refieren a una “forma arrogante en la que la reforma trata el argumento lógico” (Wu, 1997, p. 955), al tiempo que lamentan la “supresión de la precisión” (p. 957).

Además, el discurso matemático del colegio iniciado por los *Estándares* resulta ser altamente personal. Se invita a los estudiantes a hablar y escribir sobre su experiencia matemática en la forma en que ellos escojan, utilizando el lenguaje en primera persona. La “subjektivización” del discurso puede ser llevada a un extremo absurdo —por supuesto, sin intención— si el llamado que hacen los *Estándares* para que se propongan problemas de respuesta abierta “sin respuestas correctas” (NCTM, 1989, p. 6) es malinterpretado al decir que “cualquier solución sirve”. Todo esto se presenta en contraste rígido con el discurso matemático clásico cuyo sello es una impersonalidad inflexible. Este estilo es lo que impregna el discurso con un aire de objetividad e independencia de pensamiento. Un matemático para quien el platonismo es “un estado mental frente al trabajo”, si no un artículo rotundo de fe (Sfard, 1994a), puede encontrar que la nota personal va en detrimento de todo el proyecto matemático.

Quizá la diferencia más dramática entre las matemáticas del colegio y la matemática profesional ha de encontrarse en las metarreglas que constituyen las infraestructuras epistemológicas de estos discursos. El cambio principal que ocurre en la transición de la escuela a la academia se expresa por sí mismo en la ya mencionada transferencia de la fuente de certeza desde afuera de las matemáticas hacia el propio discurso matemático. Para los matemáticos, la consistencia interna y la coherencia global de las matemáticas son la fuente esencial de su justificación. En el discurso matemático moderno, la validez de un concepto parte de su calidad de elemento de un sistema armónico. Para los estudiantes que no tienen los medios para apreciar esta coherencia global, las pequeñas

piezas aisladas encontradas sucesivamente en el curso del aprendizaje siempre pueden, de alguna forma, permanecer arbitrarias.

¿Qué puede salir mal o cómo pueden ciertas interpretaciones de los requisitos de la reforma hacer que el discurso matemático del salón de clase sea imposible de aprender?

En síntesis, el discurso matemático que se desarrolla en salones de clase que se ciñen a los *Estándares* del NCTM puede resultar algo distinto del discurso profesional del matemático activo. Esto sigue siendo una contradicción al objetivo ya declarado de convertir al estudiante en “un participante periférico legítimo” (Lave y Wenger, 1991) del verdadero discurso matemático. Sin embargo, uno podría calificar este estado de cosas como completamente justificado. Después de todo, las disparidades anteriormente mencionadas son resultado inevitable de un intento de inculcar el aprendizaje de las matemáticas con valores más progresivos, y sobre todo, con respeto por las formas de pensar del estudiante. La flexibilización de las reglas se justifica aun más en vista de la gran diversidad de necesidades y capacidades de los estudiantes. Muchos alegarían que tal cambio no tiene que ser aceptable a los ojos de los matemáticos profesionales, para ser considerado necesario y válido desde el punto de vista pedagógico. Así mismo, los “practicantes expertos”, insatisfechos ante la presencia de concesiones necesarias, deben estar de acuerdo en que un arreglo razonable es la única solución posible. De hecho, ¿cuál es la utilidad de tratar de enseñar reglas estrictas del discurso matemático profesional si casi nadie las puede aprender?

Un arreglo, sin embargo, puede tomarse como razonable sólo si el discurso con el que nos quedamos está bien definido, es intrínsecamente coherente y en general convincente. Si, por otra parte, tan sólo descartamos algunas de las convenciones básicas sin reemplazarlas por reglas alternativas, o si los cambios que hacemos son ocasionales e inconsistentes, podríamos terminar con un discurso tan pobremente definido y amorfo que simplemente no podría ser aprendido. Y se ha visto que dicho peligro es bastante real. Las matemáticas son un sistema bien diseñado y altamente organizado que no se puede modificar de manera arbitraria en un lugar sin que se creen problemas en otro. Tal como un juego de ajedrez se convertiría en algo desesperanzador e imposible de aprender si arbitrariamente sustituyéramos o elimináramos algunas de sus reglas, así también las matemáticas pueden tornarse de alguna forma carentes de significado si siguen un proceso descuidado de “flexibilización”. Tal como fue expuesto, la idea de número negativo no se puede comprender a cabalidad dentro de un discurso que se considera descriptivo del mundo tangible, dado que no hay nada en este mundo, como el estudiante lo sabe, que pudiera dictar la regla de “menos por

menos da más”. Así mismo, la necesidad de definiciones rigurosas que puedan ser consideradas “matemáticamente verdaderas” no puede sonar convincente sin relacionarse con la idea de prueba matemática; y las reglas matemáticas relativas a la prueba, a su vez, no se pueden comprender sin el acuerdo de que el criterio definitivo para considerar apropiada una argumentación, es la unión lógica entre proposiciones y no las relaciones entre estas proposiciones y la realidad tangible. Ninguna de estas metarreglas puede ser suprimida o cambiada arbitrariamente sin afectar la congruencia y coherencia del discurso. Desde una perspectiva más cercana, por lo tanto, resulta que debido al agudo deseo de respetar la necesidad de comprender de los estudiantes, uno podría terminar poniendo en peligro la verdadera característica del discurso matemático, a saber, la condición básica de su comprensibilidad: su coherencia interna.

¿Qué se puede hacer para salvar tanto
el discurso matemático del salón de clase
como la reforma (y enseñar los números negativos de una forma
significativa)?

El problema que enfrentamos es intrínsecamente complejo y quizá su solución no es una simple cuestión de buena voluntad de legisladores y ejecutores. Como educadores estamos frente a un dilema. Por un lado, la decisión de no intentar enseñar el discurso consolidado de las matemáticas modernas es un resultado del reconocimiento de que los estudiantes de hoy día, lo mismo que Stendhal en su momento, posiblemente no pueden aceptar sus metarreglas formales y, aparentemente, arbitrarias. Por otro lado, sin tales metarreglas, el aprendiz puede no estar en capacidad de considerar como completamente justificados ciertos conceptos y técnicas más avanzados. Como si esto no fuera suficiente, hay otra complicación didáctica. Ya he enfatizado la injustificabilidad de las reglas metadiscursivas, o por lo menos la imposibilidad de abogar por su inevitabilidad en una forma totalmente racional. Aun así, dentro del discurso matemático, la racionalidad es el nombre del juego. Cuando enseñamos matemáticas generamos la creencia de que la comprensión sólo se puede obtener por la fuerza de la argumentación lógica. Aunque esta creencia intenta guiar al estudiante en el juicio sobre la veracidad de las afirmaciones del nivel de los objetos, puede pensarse que se “desborda” hacia el metanivel, lo que crearía expectativas que no pueden ser satisfechas. El estudiante puede exigir justificación racional de las metarreglas, sin que sea posible proveer tal justificación.

El problema al que nos enfrentamos parece imposible de solucionar. Es ex-

tremadamente difícil establecer medidas apropiadas de rigor y disciplina en el discurso matemático del colegio; es aun más difícil decidir las formas de enseñar dichas metarreglas avanzadas que eventualmente crearíamos indispensables. Se han sugerido muchas soluciones, y cada una de ellas puede merecer algún análisis (para una reseña de los enfoques educativos de la prueba, como proceso y producto, véase Hanna y Jahnke, 1996). Conscientes de la imposibilidad básica de resolver el problema, algunas personas sugieren un cambio radical en el enfoque general de las matemáticas del colegio, o por lo menos de las matemáticas de la secundaria. De esta forma, por ejemplo, algunos educadores evidentemente sensibles a la interdependencia de las reglas, tienden a mirar la “flexibilización” como un acuerdo conjunto y sugieren olvidarse de cualquier clase de rigor matemático. Obviamente esto no se puede hacer, por lo menos no en el nivel de la secundaria, si queremos que el aprendizaje de las matemáticas siga siendo significativo. Algunos otros educadores matemáticos construyen una analogía con la poesía o la música y proponen que, comenzando en cierto nivel, le enseñemos a los estudiantes sobre matemáticas en lugar de involucrarlos en hacer matemáticas. Al fin y al cabo, al igual que la poesía y la música, las técnicas matemáticas no tienen que dominarse totalmente para ser apreciadas como parte de nuestra cultura (véanse, e.g., Devlin, 1994, 1997). Está lejos de ser obvia la viabilidad de esta propuesta: aunque ciertamente uno puede apreciar y disfrutar la poesía y la música sin ser capaz de reproducir ninguna de las dos, quizá este no es el caso de las matemáticas. Otra solución radical, sería convertir las matemáticas de la secundaria en una materia electiva²⁵.

Si en realidad insistimos en enseñar unas matemáticas que no se pueden incorporar fácilmente en el discurso diario o derivar del mismo, entonces no parece haber escapatoria con respecto a iniciar a los estudiantes en las metarreglas de las matemáticas modernas, o por lo menos a su subconjunto seleccionado. Esto

²⁴ NCTM es la sigla para *National Council of Teachers of Mathematics*, asociación estadounidense de profesores de matemáticas. [N.E.]

²⁵ Algunos alegarían que el valor agregado de tal movimiento sería una mejoría general en la enseñanza: todos tendríamos que trabajar más arduamente para hacer la materia más atractiva a los ojos de los estudiantes. La relación entre popularidad y la calidad de la instrucción está, sin embargo, lejos de ser obvia.

²⁶ Una forma posible de facilitar la transición del discurso matemático diario al profesional ha sido ofrecida por los diseñadores del programa *Realistic Mathematics Education* (RME) en Holanda (véanse, por ejemplo, Gravemeijer, 1994; Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000). De acuerdo al escenario planeado cuidadosamente por ellos, el discurso diario ha de extenderse paso a paso, para incluir ideas matemáticas cada vez más avanzadas y abstractas. El principio que guía es que ninguna de estas extensiones

se debe hacer no a pesar de, sino debido a, nuestro respeto hacia el pensamiento de los estudiantes y debido a que nos interesa que comprendan la lógica de la materia que se supone deben aprender.

Este objetivo, aunque extremadamente difícil de lograr, puede no ser del todo imposible de alcanzar. Aun cuando los problemas que enfrentamos como profesores de matemáticas podrían de hecho parecer insolubles, se puede hacer mucho para reducir su impacto²⁶. Uno puede indicar una serie de principios que quizá deberían guiarnos en la enseñanza de aquellas partes de las matemáticas escolares que exceden los límites del discurso cotidiano. Primero, mientras decidimos cuáles metarreglas matemáticas se deberían preservar y cuáles se deben descartar, necesitamos tener cuidado de no extraer ingredientes sin los cuales la construcción completa podría colapsar. Segundo, ser más explícitos acerca de las reglas del metanivel que se deben aprender puede también ser de alguna ayuda. Lampert (1990), Ball (1997) y Cobb y sus colegas (Cobb, Wood y Yackel, 1991, 1993), han demostrado que esto se puede hacer incluso en los niveles más elementales. En sus estudios han investigado sobre las formas en que los profesores y los niños pueden negociar las normas multifacéticas de su discurso en el salón de clase. Tercero, es importante reconocer la dependencia mutua de ciertos conjuntos de metarreglas y conjuntos específicos de conceptos. Sería un error pensar, por ejemplo, que el método axiomático debería ser enseñado antes de la introducción de cualquier concepto dependiente de este método. De hecho, parece ser que la única forma de lograr el reconocimiento del método axiomático, es tratar de manejar conceptos que dependen de él para su justificación. Así, la aceptación del concepto de número negativo y del principio axiomático sólo puede surgir en conjunto como el resultado de un largo y complejo proceso dialéctico, en el cual el uno necesita estimular el otro. Sobra decir que el principio que establece el uso discursivo disciplinado de un nuevo concepto cuando hay una duda persistente, es una de las metarreglas que se debería convertir en norma en un salón de clase donde se supone que los estudiantes deben proceder en dicha forma.

Al dar todos estos consejos, se necesita recordar que las reglas únicas del discurso matemático no pueden ser aprendidas por una simple articulación ni pueden ser reinventadas por estudiantes involucrados en la discusión de problemas matemáticos “en cualquier forma que ellos consideren apropiada”. Las reglas de los juegos del lenguaje sólo se pueden aprender interactuando en el juego con jugadores más experimentados. Los principios constructivistas profundos que subyacen al actual movimiento de reforma son muy a menudo malinterpretados como un llamado a los profesores a abstenerse de cualquier

clase de intervención. Más aun, el profesor que exige a los estudiantes trabajar por sí solos, que se abstiene de “decirles”, y que nunca demuestra sus formas propias de hacer matemáticas, priva a los estudiantes de la única oportunidad que tienen de iniciarse en el discurso matemático y en sus metarreglas. El profesor de matemáticas que se abstiene de hacer un despliegue de sus propias habilidades matemáticas se puede comparar con el profesor de lengua extranjera que nunca se dirige a sus estudiantes en el idioma que se supone deben aprender. Las razones históricas que hay detrás de las formas en que se desarrolló el discurso matemático no convencerían al estudiante de hoy. Por ello sería ingenuo pensar que los niños pueden desarrollar ya sea los hábitos discursivos matemáticos o la habilidad para hablar una lengua extranjera estando solos.

Finalmente, el punto que estaba tratando de desarrollar en este escrito se puede ilustrar con la historia de un hombre pobre que le pidió a su esposa que le cocinara un plato que a menudo se servía en la casa de un hombre rico y del que se decía era verdaderamente delicioso. La obediente mujer hizo lo que se le pidió, pero infortunadamente reemplazó o suprimió la mayoría de los ingredientes exquisitos que estaban más allá del alcance de sus recursos económicos. Desde el momento en que el hombre saboreó el resultado de los esfuerzos de su esposa, no pudo dejar de preguntarse acerca de la peculiaridad del gusto del hombre rico: ¿cómo podría ese plato desagradable ser objeto de deleite para aquél? De la misma manera, si suprimimos demasiados ingredientes del sistema exquisitamente estructurado llamado matemáticas, podríamos quedarnos con una materia más bien insípida que no conduce a un aprendizaje eficaz.

**PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

UN GLOSARIO PARA EL ENFOQUE COMUNICACIONAL DEL PENSAMIENTO¹

El glosario que se presenta más adelante sintetiza los principios básicos del enfoque comunicacional² usado en el estudio del aprendizaje. El principio básico de esta perspectiva es que el pensamiento se puede concebir útilmente como una forma de comunicación que no tiene que ser verbal, audible o sincrónica. Esta idea, inspirada por la afirmación de Vygotsky que establece la precedencia de la comunicación con los otros sobre la comunicación con uno mismo y por la crítica de Wittgenstein sobre la dicotomía entre pensar y comunicar, da origen al marco de investigación que quizá plantea sus propias soluciones a por lo menos algunos de los dilemas que subyacen al debate actual entre los “adquisicionistas” y los “participacionistas”. Permítaseme mencionar entre estos dilemas, el asunto de las relaciones entre los factores individuales y colectivos en el aprendizaje humano; la controversia que rodea las afirmaciones sobre la calidad de situado, inherente al aprendizaje; y la búsqueda de métodos de investigación que por una parte deben ser suficientemente claros y rigurosos para garantizar la comunicación eficaz, y por otra parte deben ser suficientemente flexibles para evitar recuentos reduccionistas que sobresimplifican las actividades humanas.

1 Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E]

2 Para una presentación más detallada del marco de trabajo comunicacional-cognitivista (*commognitive*) y sus aplicaciones en la investigación empírica, véanse Sfard y Kieran (2001a). Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski y Sfard (2005), Sfard y Lavi (2005), Sfard y Prusak (2005).

Al elaborar el glosario para el enfoque comunicacional respeté el principio de “dar cuenta de los conceptos a cabalidad”: si los investigadores están interesados en sostener una conversación que sea genuinamente productiva, tienen que ser explícitos sobre la manera en que utilizan sus ideas centrales y sobre cómo se relacionan tales usos personales con los de otras personas. Más aun, para ser eficaz, cualquier definición tiene que ser *operacional*: debe especificar qué se debe mirar mientras se intenta identificar las instancias del concepto en cuestión, debe establecer qué no debe ser considerado como un miembro de la clase, y debe posibilitar la acumulación de conocimiento (véase Blumer, 1969, p. 90). Con mucha frecuencia, tal grado de explicitación operacional puede ser no sólo necesario sino también suficiente para garantizar una conversación eficaz y una comprensión mutua.

Las definiciones explícitas son indispensables también si uno quiere ajustar el uso de una palabra clave a una nueva infraestructura epistemológica/ontológica. Así, por ejemplo, la transición del adquisicionismo al participacionismo requiere la redefinición de nociones tan básicas como *aprender* y *enseñar*. Sin embargo, hay casos extremos en los que operacionalizar la modificación del uso de términos no puede tener éxito. Algunas palabras han llegado a estar tan estrechamente asociadas con ciertos supuestos epistemológicos y ontológicos que no se pueden liberar de las implicaciones no deseadas por el mero acto formal de redefinirlas. En estos casos, lo mejor sería dejar de usar la palabra. En mi trabajo tomé ambos tipos de decisiones: redefiní algunas palabras y abandoné otras.

TÉRMINOS EXPLÍCITAMENTE REDEFINIDOS

Pensamiento. Se puede conceptualizar como *un caso de comunicación*, es decir, como comunicación con uno mismo. En efecto, nuestro pensamiento es claramente un esfuerzo dialógico en el que nos informamos, argumentamos, nos formulamos preguntas, y esperamos nuestra propia respuesta. La conceptualización del pensamiento como acto comunicativo es una implicación casi ineludible de la tesis de los orígenes inherentemente sociales de todas las actividades humanas. Quienquiera que crea, como lo hizo Vygotsky (1987), en la prioridad evolutiva del discurso público comunicativo sobre el discurso privado interno, debe admitir también que ya sea que se considere la filogénesis o la ontogénesis, el pensamiento surge como una versión privada y modificada de la comunicación interpersonal. Esta comunicación con uno mismo no necesariamente es verbal. Esta última advertencia señala la diferencia importante entre la definición de pensamiento desde el punto de vista de la comunicación y la

hipótesis de vieja data que identifica pensamiento como habla internalizada: la palabra *comunicación* se usa aquí en un sentido muy amplio y no se confina a interacciones mediadas por el lenguaje. La conceptualización comunicacional del pensamiento, aun si no se establece de manera explícita, parece estar abriéndose camino en la psicología actual³.

Debo destacar que eliminar la separación entre pensamiento y comunicación o entre significado y forma no implica el rechazo de la idea de que una actividad discursiva pueda ser más o menos significativa para sus participantes. Más que eliminar cualquier cosa que siempre se haya visto como crucial para nuestra comprensión del pensamiento humano, el enfoque comunicacional-cognitivista se rehusa a ver los diferentes elementos como separados. Esta es quizá la característica principal que lo ubica aparte del conductismo y del cognitivismo (el conductismo separó la conducta del pensamiento —entendido como mente y en el que está incluida el habla— y lo descalificó como tópico de investigación, en tanto que el cognitivismo trajo de regreso el pensamiento pero mantuvo la división).

Comunicación. Para operacionalizar a cabalidad la noción de pensamiento, se tiene que mostrar que la palabra *comunicación* también se puede definir en términos operacionales. En el marco comunicacional, la palabra comunicación se interpreta como algo que se refiere al uso y producción de los recursos cuyo propósito es lograr que un interlocutor reaccione de una cierta manera⁴ (el “interlocutor” puede ser el hablante mismo). Esta definición se puede cuestionar porque tiene menos sentido común que las descripciones que se pueden encontrar en muchos lugares y, en particular, en los diccionarios. Junto con los autores del *Collins Dictionary of the English Language* (1986) podemos decir que comunicación es “transmisión o intercambio de información, ideas o sentimientos” y con la *Encyclopædia Britannica* (1998) podemos afirmar que es “intercambio de significados entre individuos a través de un sistema común de símbolos”. Estas definiciones ciertamente encajan mejor con modelos populares de comunica-

3 Véanse, e.g., Harre y Gillett (1995); Edwards (1997).

4 Una definición similar fue introducida por los pragmatistas: “La comunicación consiste de un ‘emisor’ que logra que el ‘receptor’ reconozca que el ‘emisor’ está tratando de generar ese pensamiento o acción” (Levinson, 1983, p. 16). El pragmatismo es una escuela lingüística, desarrollada a finales de la década de los setenta, que estudia cómo las personas producen y comprenden un acto comunicativo o un acto de habla en situaciones concretas de habla (véase también Grice, 1975).

ción, implícitos en el discurso cotidiano. Infortunadamente, también transmiten implicaciones poco útiles de este modelo: implican que la información, las ideas, los sentimientos, que son inherentemente privados, se pueden objetificar y someter a medición externa y a comparaciones interpersonales. En efecto, de acuerdo con estas definiciones, constatar si la comunicación funciona podría requerir revisar si la entidad “enviada” por el hablante —una idea, significado o sentimiento— es “la misma” que la “recibida” por quien escucha. Puesto que la única forma de juzgar la mismidad de las experiencias humanas es comparar los discursos que producen, se estaría estimando tal mismidad con la evaluación de la eficacia de la comunicación. Y, por tanto, terminaríamos inmersos en un círculo vicioso. Con la definición propuesta, no son necesarias las comparaciones problemáticas aun si se hace referencia a las *intenciones* —entidades que lo mismo que los sentimientos, son privadas. En efecto, en este caso, la persona A mide el éxito de la comunicación preguntándose si las *acciones* de B, que es quien responde, (desde la interpretación de A) constituyen una reacción adecuada a las verbalizaciones de A. El hecho de que esta evaluación no implique comparar intenciones de personas diferentes supera el peligro de circularidad⁵.

Discurso. Este término se refiere a cualquier instancia específica de la comunicación, ya sea diacrónica o sincrónica, bien sea con otros o con uno mismo, ya sea predominantemente verbal o con la ayuda de cualquier otro sistema simbólico.

Un tipo particular de discurso se puede distinguir de otros de acuerdo con cuatro características: palabras clave y su uso, mediadores visuales, relatos acreditados y rutinas. Permítaseme ilustrar esto con el caso del discurso matemático.

5 La solución de Wittgenstein (1953) al problema de la circularidad fue definir *significado* en términos de características externas discursivas (véase su famosa Observación 43: “el significado de una palabra es su *uso* en el lenguaje”, p. 20). De esa manera, convirtió el significado en un asunto público y abrió la posibilidad de una definición de comunicación no circular (siempre que “el uso de la palabra en el lenguaje” esté disponible para una inspección directa). Esto puede ser una manera eficaz de manejar la lógica de un sistema conceptual, pero no parece suficiente para comprender lo que la gente *hace* realmente cuando se comunica. El elemento experiencial, la realidad que para cada uno de nosotros no puede ser negada, parece jugar un papel importante en la toma de decisiones de los interlocutores. Por lo tanto, no se debería desconocer este elemento. Por fortuna, siempre y cuando estemos alerta de no hacer comparación alguna entre experiencias personales, parece lógicamente seguro

(1) *Uso que se da a la palabra.* Un discurso se considera matemático si incluye términos matemáticos tales como los relacionados con cantidades y formas. Mientras que muchas palabras relacionadas con números pueden aparecer en discursos no especializados y coloquiales, los discursos matemáticos como se practican en la escuela o en la academia dictan sus propios usos, más disciplinados, de estas palabras. El uso que se da a la palabra es un asunto bien importante ya que, siendo equivalente a lo que otros llaman “significado de la palabra”, es responsable de cómo ve el mundo quien usa tal palabra.

(2) *Mediadores visuales.* Son recursos con los que quienes participan en un discurso matemático identifican el objeto de su conversación y coordinan su comunicación. Mientras que los discursos coloquiales usualmente están mediados por imágenes de cosas materiales, es decir, por objetos concretos a los que se señala con sustantivos o pronombres y que pueden ser vistos realmente o sólo imaginados, los discursos matemáticos con frecuencia involucran artefactos simbólicos, creados de manera especial para efectos de esta forma particular de comunicación. Las operaciones físicas sobre los mediadores visuales (entre las cuales, las más elementales son los procedimientos de examinar el mediador con los ojos, de manera bien definida), a menudo llegan a ser automatizadas y materializadas, es decir, pueden ser recordadas, activadas e implementadas en la respuesta directa a ciertos estímulos discursivos, en oposición a una implementación que requiere decisiones deliberadas y evocación explícita de una prescripción verbal para estas operaciones.

(3) *Relatos acreditados.* Son conjuntos de proposiciones que una cierta comunidad acredita y etiqueta como verdaderas. En el caso del discurso matemático, los relatos, para ser aprobados, tienen que ser contruidos y estructurados de acuerdo con un conjunto de reglas bien definidas, específicas al discurso. En efecto, la forma en que se crean y se materializan los enunciados matemáticos difiere considerablemente de la forma en que uno crea y materializa, por ejemplo, los relatos históricos, sociológicos o científicos. En el caso del discurso matemático escolar, estos relatos acreditados se conocen como teorías matemáticas, y esto incluye constructos discursivos tales como definiciones, demostraciones y teoremas. De manera más general, un relato es cualquier texto, hablado o escrito, que cuenta como una descripción de objetos, de relaciones entre objetos o actividades con o por objetos. Los términos y criterios de acreditación pueden variar en gran medida de un discurso a otro, y con frecuencia, los asuntos de relaciones de poder entre los interlocutores pueden jugar un papel importante.

(4) *Rutinas*. Son patrones repetitivos bien definidos que caracterizan el discurso dado. Específicamente, las regularidades del discurso matemático se pueden notar ya sea que uno esté observando el uso de palabras y mediadores de índole matemática o que uno esté siguiendo el proceso de creación y estructuración de relatos sobre números o formas geométricas. De hecho, tales patrones repetitivos se pueden ver en casi cualquier aspecto de los discursos matemáticos: en las formas matemáticas de categorizar, en los modos matemáticos de atender al entorno, en las formas de ver que las situaciones son “la misma” o no —cuestión crucial para la habilidad de los interlocutores al aplicar el discurso matemático siempre que sea apropiado—, y la lista se puede continuar. Este uso del término ‘rutina’ es cercano al uso propuesto por Schutz y Luckmann (1973), y al que aplica Voigt (1985) en el contexto del aprendizaje de las matemáticas.

La tendencia humana espontánea a reiterar acciones discursivas previamente aprendidas es lo que hace posible la comunicación. En efecto, gracias a las regularidades en la conducta humana, los interlocutores pueden interpretar lo que otros dicen, y están en capacidad de decidir qué clase de respuesta se espera. Sin embargo, en la mayoría de los discursos, los participantes no son conscientes del hecho de que sus acciones despliegan regularidades estructurales, y de ellos no se puede decir, con certeza, que “sigan las reglas” del discurso de una manera consciente e intencional. Una característica distintiva de la actividad matemática es que trata de hacer explícitas algunas de sus reglas. De hecho, intentos metadiscursivos tales como formular definiciones que posteriormente controlarán el uso de las palabras matemáticas, constituyen parte integral del discurso matemático mismo.

Aprendizaje. El aprendizaje de una materia bien definida, tal como las matemáticas, ahora se puede definir como la modificación y el incremento de la complejidad del discurso propio. La eficacia del aprendizaje puede, por tanto, ser medida por los cambios que ocurren en el uso que uno hace de palabras, mediadores y rutinas específicamente matemáticos, y por el repertorio de relatos significativos que uno acredita.

TÉRMINOS Y DICOTOMÍAS QUE SE HAN REMOVIDO DEL DISCURSO

La supuesta **separación entre lo que la persona dice y lo que piensa** cuando habla, comúnmente hecha, es la primera división conceptual que desaparece con la introducción del enfoque comunicacional. La idea que subyace en la dicotomía

hablar/pensar es la del “**pensamiento puro**” que se puede reflejar de diferentes maneras en el habla y que conserva su identidad mientras es transferido de una “representación” a otra. Equiparar el pensamiento con el acto comunicativo nos aclara el sinsentido de la existencia de una conversación esencialista sobre un “**contenido**” que existe de manera independiente de su forma: no hay comunicación sin los recursos apropiados, y por tanto, no hay pensamiento que no sea un acto de usar recursos comunicacionales⁶.

De esta última observación se deriva inmediatamente la desaparición, del discurso de investigación, de otro par de divisiones conceptuales relacionadas estrechamente —la separación entre **pensamiento** y **objeto** y la dicotomía entre **signo** y **referente**. Por ejemplo, dentro del marco de trabajo comunicacional no vemos que palabras específicamente matemáticas tales como *número* o *adición*, o símbolos tales como 0, 2, ó 100, señalen referentes autónomos, extradiscursivos que recuerden “lo mismo” mientras cambian las “representaciones”. El rechazo de las dicotomías y de las palabras que perpetúan el mensaje sobre ellas (e.g., **representación**) está fundamentado en el supuesto básico del marco comunicacional, inherente en sus nociones básicas, de que la visión platonista de los significadores abstractos como avatares concretos de objetos intangibles independientes, es un producto adicional de las formas expertas de los participantes al usar estas palabras.

Una vez dicho lo anterior, es importante enfatizar que eliminar la separación entre pensamiento y contenido o entre forma y significado no implica el rechazo de la idea de que una actividad discursiva puede ser más o menos significativa para sus participantes. En verdad, el objeto de la investigación comunicacional es el discurso, y nada más que el discurso. Aun así, no se deja nada por fuera en comparación con formas de indagación más tradicionales. Como ningún otro, el

incluir experiencias humanas en el discurso sobre comunicación.

⁶ La crítica comunicacional de todas estas dicotomías se origina en los escritos de Ludwig Wittgenstein (1953). De acuerdo con Wittgenstein, las dicotomías implícitas en la manera en que hablamos sobre el pensamiento interfieren con nuestros intentos de comprender qué es el pensamiento. Wittgenstein (1953, § 339) señala que “El pensamiento no es un proceso incorporeal que cobra vida y sentido al hablar, y que se puede desligar del hablar”. En verdad, del habla se puede decir que es más o menos *pensada* o *con significado* (o por el contrario, que es más o menos *ritualizada* cuando es conducida por el hábito más que por una urgencia de informar o de convencerse a sí mismo de algo). Sin embargo, de aquí no se puede concluir que pueda contener mayor o menor proporción de la entidad o el proceso llamado “pensamiento”. Simplemente podemos experimentar diversos actos discursivos de manera diferente. Por ejemplo, podemos

investigador comunicacional, está buscando esas características del discurso que indican que éste es significativo para el aprendiz. De manera breve, el enfoque comunicacional, más que eliminar cualquier cosa que haya sido siempre crucial para la comprensión del pensamiento humano, se rehúsa a ver los elementos diferentes como separados. Esta es quizá la característica principal que ubica este enfoque aparte del conductismo y del cognitivismo.

REFERENCIAS

- Anderson, J.R., Reder, L.M. y Simon, H.A. (1996). *Situated learning and education*. *Educational Researcher*, 25 (4), 5-11.
- Bakhtin, M.M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays* (editado por M. Holquist; traducido por C. Emerson). Austin: University of Texas Press.
- Bakhtin, M.M. (1986). *Speech genres and other late essays* (editado por C. Emerson y M. Holquist; traducido por V.W. McGee). Austin: University of Texas Press.
- Ball, D. (1997). From the general to particular: Knowing our own students as learners of mathematics. *Mathematics Teacher*, 90, 732-737.
- Bateson, G. (1973). *Steps to an ecology of the mind*. Frogmre, St. Albans: Paladin.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Cooney y D. Grouws (Eds.), *Effective mathematics teaching* (pp. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics y Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Bauersfeld, H. (1993). Teachers pre and in-service education for mathematics teaching (Seminario sobre la representación, No. 78). Montreal, Canada: Universite du Quebec, CIRADE.
- Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in the mathematics classroom: Their function and their effects. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 271-292). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L. y Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: What bars students' access to arithmetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (3), 176 - 247.
- Berieter, C. (1985). Towards the solution of the learning paradox. *Review of Educational*

Research, 55, 201-226.

- Blum-Kulka, S. (1997). Discourse pragmatics. En T.A. van Dijk (Ed.), *Discourse as social interaction* (pp. 38-63). London: Sage.
- Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspectives and methods*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Bourdieu, P. (1999). Structures, habitus, practices. En A. Elliot (Ed.), *The Blackwell reader in contemporary social theory* (pp. 107-118). Oxford, UK: Blackwell.
- Bouveresse, J. (1999). Rules, dispositions, and the habitus. En R. Shusterman (Ed.), *Bourdieu: A critical reader* (pp. 45-63). Oxford, UK: Blackwell.
- Brown, G. y Yule, G. (1983). *Discourse analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Brown, J.S, Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18 (1), 32-42.
- Brown, S.I. (1997). Thinking like a mathematician: A problematic perspective. *For the Learning of Mathematics*, 17 (2), 35-38.
- Brownell, W.A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. En W. Reeve (Ed.), *The teaching of arithmetic. Tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1-31). New York: Teachers College, Columbia University.
- Bruner, J. (1983). The acquisition of pragmatic commitments. En R. Golinkoff (Ed.), *The transition from prelinguistic to linguistic communication* (pp. 27-42). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Calvino, I. (1983). *Mr. Palomar*. San Diego: A Harvest/HBJ Book.
- Cazden, C. (1988). *Classroom discourse*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigner*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage Editions.
- Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: Critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 3-28.
- Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Cobb, P. (1995). Continuing the conversation: A response to Smith. *Educational Researcher*, 24 (7), 25-27.
- Cobb, P. (1996). Accounting for mathematics learning in the social context of the

- classroom. En C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematics Education: Selected lectures* (pp. 85-100). Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thales.
- Cobb, P. (1998). Learning from distributed theories of intelligence. *Mind, Culture, and Activity*, 5 (3), 187-204.
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 5-43.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (3), 258-277.
- Cobb, P. y Bowers, J. (1999). Cognitive and situated perspectives in theory and practice. *Educational Researcher*, 28 (2), 4-15.
- Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. En D. Kirshner y J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151-234). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Cobb, P., y McClain, K. (1999). Supporting teachers' learning in social and institutional context. Ponencia presentada en International Conference on Mathematics Teacher Education, Taipei, Taiwan.
- Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 157-176). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. En E. Forman, N. Minick y A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.
- Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (1), 2-33.
- Cole, M. (1988). Cross-cultural research in the socio-historical tradition. *Human Development*, 31, 137-151.
- Cole, M. (1995). Socio-cultural-historical psychology: some general remarks and a proposal for a new kind of cultural-genetic methodology. En J.V. Wertsch, P. del Rio y A. Álvarez (Eds.), *Sociocultural studies of mind* (pp. 187-214). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Cole, M. (1996). *Cultural Psychology*. Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Confrey, J. (1994). A theory of intellectual development (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), 2-8.
- Davis, P. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 333-344.

- Davis, P. y Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. London: Penguin.
- Davis, R. (1988). The interplay of algebra, geometry, and logic. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 9-28.
- Devlin, K. (1994). A collegiate mathematical experience for non-science majors. En M. Quigley (Ed.), *Proceedings of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 21-35). Regina, Canada: University of Regina.
- Devlin, K. (1997). Editorial: Reduce skills teaching in math class. *Focus*, 17 (6), 2-3.
- Douady, R. (1985). The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability—Examples from elementary school teaching. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 33-52). Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht, OW & OC.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. I, pp. 33-48). Assisi, Italy: PME Program Committee.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Edwards, D. (1993). But what do children really think? Discourse analysis and conceptual content in children's talk. *Cognition and Instruction*, 11 (3 y 4), 207-225.
- Edwards, D. (1997). *Discourse and cognition*. London: Sage.
- Edwards, D. y Potter, J. (1992). *Discursive psychology*. Newbury Park, CA: Sage.
- Encyclopædia Britannica. (1998). *Britannica CD 98, Multimedia Edition*. International version.
- Engstrom, Y. y Middleton, D. (1996). *Cognition and communication at work*. Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.
- Ernest, P. (1993). Conversation as a metaphor for mathematics and learning. *Proceedings of the Day Conference* (pp. 58-63). Manchester, UK: Manchester Metropolitan University.
- Ernest, P. (1994). The dialogical nature of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: An international perspective* (pp. 33-48). London: The Falmer Press.
- Even, R. (1999). What can teachers learn from research? Documento no publicado.
- Fauvel, J. y van Maanen, J. (1997). The role of history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. Discussion document for an ICMI study. *Educational*

- Studies in Mathematics*, 34, 255-259.
- Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 9-14.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.
- Fogelin, R.J. (1995). *Wittgenstein* (segunda edición.). London: Routledge.
- Forman, E.A. (1996). Forms of participation in classroom practice: Implications for learning mathematics. En P. Neshet, L. Steffe, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 115-130). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Forman, E.A. y Larreamendy-Joerns, J. (1998). Making the implicit explicit: classroom explanations and conversational implicatures. *Mind, Culture, and Activity*, 5 (2), 105-113.
- Forman, E.A., Minick, N. y Stone, C.A. (Eds.). (1993). *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Foucault, M. (1972). *The archaeology of knowledge*. New York: Harper Colophon.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.
- Gadamer, H.-G. (1975). *Truth and method*. New York: The Seabury Press.
- Garfinkel, H. (1967). *Studies in ethnomethodology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Gee, J.P. (1997). Thinking, learning, and reading: The situated sociocultural mind. En D. Kirshner y J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 235-260). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Goffman, E. (1967). *Interaction ritual: Essays on face-to-face behavior*. New York: Pantheon Books.
- Goffman, E. (1974). *Frame analysis, an essay on organization of experience*. Boston, MA: Northeastern University Press.
- Goffman, E. (1981). *Forms of talk*. Oxford, UK: Blackwell.
- Goffman, E. (1986). *Frame analysis: An essay on organization of experience*. Boston, MA: Northeastern University Press.
- Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist*, 96, 606-633.
- Goodwin, C. y Goodwin, M.H. (1996). Seeing as situated activity: Formulating planes. En Y. Engeström y D. Middleton (Eds.), *Cognition and communication at work* (pp. 61-95). New York: Cambridge University Press.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: CD-beta Press.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. (2000) Symbolizing, modeling, and

- instructional design. En P. Cobb, K.E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Gray, E.M. y Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116-140.
- Greeno, J.G. (1983). Conceptual entities. En D. Gentner y A.L. Stevens (Eds.). *Mental models* (pp. 227-252). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Greeno, J.G. (1997). On claims that answer the wrong question. *Educational Researcher*, 26 (1), 5-17.
- Grice, H.P. (1975). Logic and conversation. En P. Cole y J.L. Morgan (Eds.), *Syntax and semantics* (vol. 3: Speech acts, pp. 41-58). New York: Academic Press.
- Griffin, P. y Mehan, H. (1981). Sense and ritual in classroom discourse. En F. Coulmas (Ed.), *Conversational routine: Explorations in standardized communication situations and pre-patterned speech*. The Hague, Netherlands: Mouton.
- Halliday, M.A.K. y Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. London: Longman.
- Hanks, P. (Ed.). (1986). *Collins Dictionary of the English Language*. London: Collins.
- Hanna, G. y Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hardy, G.H. (1940/1967). *A mathematician’s apology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Harel, G. y Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 82-94). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Harre, R. y Gillett, G. (1995). *The discursive mind*. Thousand Oaks: SAGE Publications.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the Learning of Mathematics*, 11 (1), 26-32.
- Hicks, D. (Ed.). (1996). *Discourse, learning, and schooling*. Cambridge University Press.
- Hiebert, J. y Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan.
- Holquist, M. (1990). *Dialogism. Bakhtin and his world*. London: Routledge.
- Johnson, M. (1987). *The body in the mind: the bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New

York: MacMillan.

- Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: Some pros and cons. En J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 157-175). Lisbon, Portugal: PME Program Committee.
- Kieran, C., Hillel, J. y Erlwanger, S. (1986). Perceptual and analytical schema in solving structured turtle-geometry tasks. En C. Hoyles, R. Noss y R. Sutherland (Eds.), *Proceedings of Second Logo and Mathematics Education Conference* (pp. 154-161). London, UK: University of London, Institute of Education.
- Kieran, C. y Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Mathematics*, 21 (1), 1-17.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: Macmillan.
- Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. Oxford, England: Oxford University Press.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lakoff, G. (1987). *Women, fire and dangerous things: what categories reveal about the mind*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of metaphor. En A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (segunda edición, pp. 202-250). Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *The metaphors we live by*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
- Lampert, M. y Blunk, M.L. (Eds.). (1998). *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lampert, M. y Cobb, P. (2003). Communication and learning in the mathematics classroom. En J. Kilpatrick y D. Schifter (Eds.), *A research companion to the NCTM Standards* (pp. 237-249). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lacan, J. (1996). *Ecrits 1*. Paris: Seuil.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- Lavy, I. (2000). Understanding of concepts in the elementary number theory: Collaborative investigations in interactive computerized learning environment. Disertación doctoral no publicada. Technion, Israel.
- Lemke, J.L. (1993). *Talking science: Language, learning, and science*. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Company.
- Leontiev, A.N. (1930). Studies in the cultural development of the child. II. The development of voluntary attention in the child. *Journal of Genetic Psychology*, 37, 52-81.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 133-150.
- Levinson, S. (1983). *Pragmatics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Love, E. y Pimm, D. (1996). "This is so": A text on text. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371-409). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Luria, A.R. (1928). The problem of the cultural development of the child. *Journal for Genetic Psychology*, 35, 493-506.
- Macnab, D. (2000). Raising standards in mathematics education: values, vision, and TIMSS. *Educational Studies in Mathematics*, 42 (1), 61-80.
- Mantovani, G. (2000). *Exploring borders: Understanding culture and psychology*. London: Routledge.
- Markovitz, Z., Eylon, B. y Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6 (2), 18-24.
- Maturana, H.R. y Varela, F.J. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*. Boston: Shambhala.
- Mayer, R.E. (1983). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W.H. Freeman and Company.
- Mead, H. (1934). *Mind, self, and society* (editado por C.W. Morris). Chicago: Chicago University Press.
- Morgan, C. (1996). "The language of mathematics": Towards a critical analysis of mathematical text. *For the Learning of Mathematics*, 16 (3), 2-10.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1992). What does it mean to understand a domain? A case study that examines equations and graphs of linear functions. Ponencia presentada en Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- O'Connor, M.C. (1996). Managing the intermental: classroom group discussion and the social context of learning. En D. Slobin, J. Gerhardt, A. Kyratzis y J. Guo (Eds.), *Social interaction, social context, and language* (pp. 495-509). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- O'Connor, M.C. (1998). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. En M. Lampert y M. Blunk (Eds.), *Talking mathematics: Studies of teaching and learning in school* (pp. 17-55). New York: Cambridge University Press.
- O'Connor, M.C. y Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: Orchestrating thinking practices in group discussions. En D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning, and schooling* (pp. 63-103). New York: Cambridge University Press.
- Ortony, A. (Ed.). (1993). *Metaphor and thought* (segunda edición). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York: Routledge & Kegan Paul.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Quine, W. van O. (1960). *Word and object*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Reddy, M. (1979/1993). The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. En A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (segunda edición, pp. 164-201). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Ricoeur, P. (1977). *The rule of metaphor*. Toronto: Toronto University Press.
- Rittenhouse, P.S. (1998). The teacher's role in mathematical conversation: Stepping in and stepping out. En M. Lampert y M.L. Blunk (Eds.), *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning* (pp. 163-189). Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context*. Oxford: Oxford University Press.
- Rorty, R. (1991). *Objectivity, relativism, and truth*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Rotman, B. (1988). Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica*, 72, 1-35.
- Rotman, B. (1994). Mathematical writing, thinking, and virtual reality. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education, and philosophy: An international perspective* (pp. 76-86).

London: Falmer Press.

Sacks, S. (Ed.), (1978). *On metaphor*. Chicago: The University of Chicago Press.

Salomon, G. (Ed.), (1993). *Distributed cognitions: psychological and educational considerations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Scheffler, I. (1991). "Educational metaphors". En *In praise of the cognitive emotions and other essays* (pp. 45-55). New York: Routledge.

Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Cogan, L.S., Jakwerth, P.M. y Houang, R.T. (1999). *Facing the consequences - Using TIMSS for a closer look at U.S. mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Schutz, A. (1967). The problem of social reality. En M. Natanson y H.L. van Breda (Eds.), *Collected papers* (vol. 1). The Hague, The Netherlands: Martinus Nijhoff.

Schutz, A. y Luckmann, T. (1973). *The structures of the life world*. Evanston: Northwestern University Press.

Schwartz, J. y Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes, vol. 25, pp. 261-289). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification—The case of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes, No. 25, pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1994a). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 44-55.

Sfard, A. (1994b). Mathematical practices, anomalies, and classroom communication problems. En P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge* (pp. 248-273). London: Falmer.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. En L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339-372). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Sfard, A. (1998a). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27 (2), 4-13.

Sfard, A. (1998b). The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing? En A. Sierpiska y J. Kilpatrick

- (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity. Book II, ICMI Study* (pp. 491-512). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A. (2000a). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, K.E. Yackel y K. McClain (Eds), *Symbolizing and communicating: perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sfard, A. (2000b). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 296-327.
- Sfard, A. (2000c). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3), 157-189.
- Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, W.G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Traducido al español por Patricia Inés Perry y Hernando Alfonso como: Equilibrar algo desequilibrado: los Estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA*, 6 (2), 95-140; 6 (3), 207-249).
- Sfard, A. y Kieran, C. (2001a). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity* 8 (1), 42-76.
- Sfard, A. y Kieran, C. (2001b). Preparing teachers for handling students' mathematical communication: Gathering knowledge and building tools. En F.L. Lin y T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A. y Lavi, I. (2005). Why cannot children see as the same what grownups cannot see as different? - Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23 (2), 237-309.
- Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sfard, A. y Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34 (4), 14-22.
http://www.aera.net/uploadedFiles/Publications/Journals/Educational_Researcher/3404/3404%20Sfard%20PDF.pdf
- Sierpinska, A. (1995). Mathematics “in context,” “pure” or “with applications”? *For the Learning of Mathematics*, 15 (1), 2-15.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics

- education. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Smith, E. (1995). Where is the mind? "Knowing" and "knowledge" in Cobb's constructivist and sociocultural perspectives. *Educational Researcher*, 24 (7), 23-24.
- Smith, J.P., diSessa, A.A. y Rochelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3 (2), 115-163.
- Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 9 (1), 24-33.
- Steinbring, H. (1998). Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity: An ICMI study* (Book 2, pp. 513-526). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Steinbring, H., Bartolini Bussi, M.G. y Sierpinska, A. (Eds.). (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stevens, R. y Hall, R. (1998). Disciplined perception: Learning to see in technoscience. En M. Lampert y M.L. Blunk (Eds.), *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning* (pp. 107-150). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap, best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.
- Tall, D. y Schwartzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *The Mathematics Teaching*, 82, 44-49.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Thomas, R. (1996). Proto-mathematics and/or real mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 16 (2), 11-18.
- Thompson, P.W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. En E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 189-236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Tomasello, M. (1999). *The cultural origins of human cognition*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- van Hiele, P.M. (1985). The child's thought and geometry. En D. Fuys, D. Geddes y R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre*

- M. van Hiele (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.
- van Oers, B. (2000). The appropriation of mathematical symbols: A psychosemiotic approach to mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 133-176). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), 356-366.
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), 69-118.
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.
- Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. En L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 21-50), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Vygotsky, L.S. (1931/1981). The genesis of higher mental functions. En J. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. New York: Sharpe.
- Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and language* (traducido y editado por E. Haufmann y G. Vakar). New York: Wiley.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (editado por M. Cole, V. John-Steiner, y E. Souberman). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L.S. (1987). Thinking and speech. En R.W. Rieber y A.C. Carton (Eds.), *The collected works of L.S. Vygotsky* (vol. 1, pp. 39-285). New York: Plenum Press.
- Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.
- Wenger, E (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and community*. New York: Cambridge University Press.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations* (G.E.M. Anscombe, traducción). Oxford, UK: Blackwell.
- Wittgenstein, L. (1956). *Remarks on the foundations of mathematics*. Oxford, England: Blackwell.
- Wittgenstein, L. (1967). *Philosophical investigations* (G.E.M. Anscombe, traducción).

Oxford, UK: Blackwell. (Original publicado en 1953).

Wittgenstein, L. (1969). *On certainty*. Oxford, UK: Blackwell.

Wu, H. (1997). The mathematics education reform: Why you should be concerned and what you can do. *American Mathematical Monthly*, 103, 954-962.

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.



Programa Editorial

Ciudad Universitaria, Meléndez
Cali, Colombia

Teléfonos: (+57) 2 321 2227
321 2100 ext. 7687

<http://programaeditorial.univalle.edu.co>
programa.editorial@correounivalle.edu.co