

ELECTRODINÁMICA ESCALAR PARA DISPERSIÓN DE MESONES π A BAJAS ENERGÍAS

Juan Camilo Vélez Quiñones

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título:
Físico

Director:
Ph.D Sergio Lennin Tostado Robledo
Codirector:
Ph.D Hernán Ocampo Duran

Universidad de Valle
Pregrado en Física, Facultad Ciencias Naturales y Exactas.
Cali, Colombia
2020

Agradecimientos

Mi más sincera gratitud para la Universidad del Valle y lo que representa, un lugar de oportunidad en un mundo ausente de ellas. Un lugar para abrir mentes, y las mentes abiertas son libres.

A mi director el Dr. Sergio Lennin Tostado, por el conocimiento compartido, su acompañamiento y orientación en el camino, todo mi respeto y gratitud para usted.

Al Dr. Hernán Ocampo por su disposición de ayuda y aportes oportunos.

Agradezco a mis maestros, compañeros, amigos y familiares. A los primeros por introducirme a lo sutil de la física. Al resto por no dejarme desfallecer, al develar lo sutil en la vida.

Finalmente, a la persona que me da respaldo y fortaleza con admirable ejemplo, para ti la más grande heroína de mi vida Diana Isabela Quiñones, gracias mamá.

Resumen

Desde el marco de la teoría cuántica de campos, la descripción de los estados ligados de quarks, como protones y neutrones, es elusiva en la región de bajas energías de interacción pues están predominantemente bajo la influencia de la fuerza de color. En este régimen, no es aplicable el cálculo perturbativo de Feynman usual en términos de la teoría subyacente, la cromodinámica cuántica (QCD), debido a los grandes valores que puede tomar la constante de acoplamiento fuerte. En vista de dicha dificultad, algunos métodos alternativos se pueden usar como herramientas para extraer información indirecta de las estructuras fundamentales mediante el estudio de las propiedades globales del hadrón, como su carga eléctrica. En este trabajo se estudia la electrodinámica cuántica escalar (SQED) con el objetivo de tener una primera aproximación sencilla en la descripción de la interacción electromagnética de los piones cargados $\pi^\pm$ y servir a su vez como introducción a la teoría cuántica de campos. Primero, se realiza una revisión de los conceptos básicos referentes al tratamiento cuántico de los campos y la obtención de las reglas de Feynman para los procesos de dispersión. Luego, proponemos y desarrollamos la descripción de la interacción electromagnética para piones mediante un campo escalar complejo (Klein-Gordon) acoplado al campo electromagnético. Calculamos las secciones eficaces de dispersión para los procesos de Compton, $\pi^\pm\gamma \rightarrow \pi^\pm\gamma$, fotoproducción, $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$, y realizamos una comparación con las mediciones experimentales disponibles.

Palabras clave: Fotoemisión de piones, dispersión Compton de piones, cuántica de campos, electrodinámica escalar.

Índice general

1. Introducción	1
2. Generalidades	4
2.1. Campos en mecánica clásica	4
2.2. Cuantización del campo electromagnético	5
2.3. Cuantización canónica	9
2.4. Operadores de campo	9
2.5. Propagadores	11
2.6. Cálculo perturbativo	12
2.6.1. Marco de interacción	12
2.6.2. Matriz de dispersión	13
2.6.3. Contracciones y teorema de Wick	14
2.6.4. Reglas y diagramas de Feynman	15
2.6.5. Regla de oro de Fermi	16
2.6.6. Sección transversal en el CM	19
3. Electrodinámica cuántica escalar para mesones π	21
3.1. Ecuación de Klein-Gordon	21
3.2. Acople mínimo	22
3.3. Cuantización de la electrodinámica escalar	22
3.4. Cálculo perturbativo para la SQED	24
3.5. Reglas de Feynman para SQED	29
3.6. Sección transversal de dispersión	31
3.6.1. Dispersión Compton	31
3.6.2. Fotoemisión de piones	34
4. Conclusiones	37

Capítulo 1

Introducción

La física de partículas elementales describe el comportamiento de las partículas fundamentales y sus interacciones con las fuerzas de la naturaleza, ambas son tratadas como excitaciones en campos cuánticos que permean el espacio y que son consideradas hasta ahora las entidades esenciales del universo.

La descripción más exitosa en este momento de los constituyentes de nuestro universo empleando la teoría de campos, es el modelo estándar de partículas elementales, que expresa como las partículas de materia conocidas interactúan entre sí a través de tres fuerzas fundamentales, sin incluir la gravedad: el electromagnetismo, la interacción débil y la interacción fuerte o de color. Estas fuerzas, al igual que las partículas materiales, tienen asociadas un campo. La fuerza electromagnética describe las interacciones entre los objetos con carga eléctrica, la fuerza débil o de sabor, media los procesos de decaimiento como las desintegraciones radioactivas, y la fuerza de color explica la dinámica en el interior de los núcleos atómicos, e incluso de los protones y neutrones, impidiendo que se separen, lo cual brindó indicios de su estructura interna [1].

Hoy en día sabemos que el modelo estándar no es una teoría completa, y presenta dificultades para describir algunos fenómenos de la naturaleza, por ejemplo, la interacción de color a bajas energías, descrita de primeros principios a partir de la cromodinámica cuántica (QCD). La herramienta usual para tratar las interacciones de las fuerzas con la materia es el cálculo perturbativo de Feynman, capaz de hacer predicciones precisas, como en el caso de la electrodinámica cuántica, pero que para bajas energías de la QCD es insuficiente, pues las interacciones no son susceptibles de una expansión perturbativa (ver por ejemplo [1]). Por lo anterior, trabajar con la teoría subyacente de las fuerzas de color puede ser una tarea difícil de afrontar en el régimen de energías bajas. Para saldar dicho impedimento se emplean métodos alternos, como la construcción de lagrangianos efectivos, caso de la teoría quiral de perturbaciones, o simulaciones numéricas de lattice QCD, que han realizado predicciones acordes a las medidas experimentales, como la polarización eléctrica y magnética de los mesones π , cuantificados en los coeficientes α_π y β_π , respectivamente, que miden la rigidez de la estructura del mesón [2], así como de sus masas y factores de forma [3].

El problema de la descripción de la fuerza de color atañe a las partículas del modelo estándar que la experimentan, los quarks (q), que a su vez son las únicas partículas que están bajo influencia de las tres interacciones. Por acción de la fuerza de color, los quarks solo están presentes en la naturaleza en estados confinados denominados hadrones, que generalmente son tríos (qqq) conocidos como bariones, entre los que se encuentran los protones o los neutrones; y parejas quark-antiquark ($q\bar{q}$) llamados mesones.

En ocasiones, para los procesos en los que hay involucrados estados ligados, se debe tener en cuenta la estructura y la interacción entre los componentes fundamentales. Para el caso de los mesones y bariones se tiene la dificultad de precisar su estructura interna; esto implica también imprecisión en las observables obtenidas a partir de las interacciones de dichas partículas. En busca de tener una descripción aproximada de estos estados ligados, optamos en este trabajo por el estudio de su electrodinámica, y comenzar con los estados más simples, los mesones, lo que motiva el estudio de la electrodinámica de mesones.

Los piones π^- , π^+ , π^0 , son los mesones más ligeros al estar compuestos por los quarks menos masivos, up (u) y down (d), confinados fuertemente según la QCD, y que son de forma mayoritaria los mediadores de la fuerza de color entre los protones y neutrones, manteniéndolos unidos en el núcleo atómico [1]. Estos estados ligados tienen espín 0, lo que simplifica su tratamiento, de modo que se podrían describir en un intento inicial a través de la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución

corresponde a un campo escalar complejo de espín 0 [4]. Mediante el acople del electromagnetismo al campo de Klein-Gordon se obtiene la electrodinámica escalar (SQED), que por la hipótesis anterior, podría modelar aproximadamente los procesos de dispersión para los piones cargados como $\pi^+\gamma \rightarrow \pi^+\gamma$ o $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$.

En el presente trabajo se propone el estudio de la SQED con el fin de obtener una primera aproximación sencilla en la descripción de la electrodinámica de los piones cargados $\pi^+ = (u\bar{d})$, $\pi^- = (\bar{u}d)$ y servir a su vez como introducción práctica a la cuántica de campos para un nivel de pregrado, al revisar los fundamentos teóricos que sustentan la descripción. La SQED como modelo tiene pues una intención pedagógica, que como aproximación sería válida para bajas energías del fotón (grandes longitudes de onda) en las cuales el campo electromagnético interactúa con el pión como un punto sin estructura, es decir como una partícula puntual y no con sus constituyentes individualmente.

Aunque este modelo se plantea en la literatura como es ejemplo [5], no se trabajan muchos su secciones diferenciales de dispersión, pues tiene un objetivo educativo más que descriptivo al dejar de lado la composición interna de los mesones, y sus efectos en observables como las polarizabilidades. Estas cualidades se pueden generar en modelos más realistas, introduciendo efectos de la estructura, y verse como desviaciones respecto a lo deducido para los piones puntuales [6]. Por lo tanto es usual encontrar en la literatura para la SQED el efecto Compton desarrollado, al ser un proceso representativo en las electrodinámicas, pero no la fotoemisión de piones, cálculo que aquí se efectúa.

Es preciso obtener resultados experimentales que permitan verificar las predicciones de la teoría, pero experimentalmente existe dificultad en el estudio de piones, pues estas partículas generalmente están de manera virtual al interior de los núcleos atómicos, o son producidos en procesos de colisión junto a otras partículas. En el primer caso, por partículas virtuales nos referimos a excitaciones espontáneas de los campos, permitidas por el principio de incertidumbre de Heisenberg para tiempo y energía, por el cual partículas puede crearse y destruirse sin que sea posible su medición. Por otra parte para las dispersiones que se pueden producir en los experimentos, se ven afectadas por la presencia de otras partículas (background) como se menciona en [7]. Ejemplo de esto es el estudio de la fotoemisión de piones tratada en [8], donde se produce en el experimento alrededor de 5 veces más la partícula muón que el pión, a demás del hecho de que tanto el muón como el pión son partículas inestables que se desintegran en otras, con tiempos de vida medios alrededor de $2,6 \cdot 10^{-8}$ para un pión, mucho menor que el de un muón de $2,2 \cdot 10^{-6}$, por lo que se dificulta la medición exclusiva de los piones haciendo que estos procesos no sean observables limpias desde el punto de vista experimental.

Debido a la dificultad para medir piones, es necesario realizar aproximaciones y extraer información con otros mecanismos, como es el caso de dispersión Compton que se estudia a través de la producción de piones por radiación de desaceleración $\pi^+Z \rightarrow \pi^+Z\gamma$, fotoproducción con protones $\gamma p \rightarrow \gamma\pi n$ o la producción de pares con fotones $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ [9].

Para la fotoemisión $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$, además de dar información sobre la dispersión Compton, relacionada a través de la llamada simetría de cruce, su sección eficaz de dispersión da cuenta de tres regímenes diferentes dinámicos en un rango de pocos MeV: para hadrones alrededor de 0.5 GeV, de resonancias a 1.2 GeV, y de quarks a 1.6 GeV [10].

En el caso del proceso $\gamma\pi \rightarrow \gamma\pi$, puede ser estudiado en colisiones de protones, por ejemplo, con un blanco fijo sobre el que incide un haz, en estas colisiones se producen otras partículas copiosamente, imposibilitando una medición limpia de los piones. Sin embargo, es posible extraer información a través de otros procesos [2], como:

- La radiación de piones por fotoproducción en protones $\gamma p \rightarrow p\pi^+n$ se ha estudiado en el experimento MAMI, del que se obtuvieron las polarizabilidades del pión con gran incertidumbre [11].
- La aniquilación $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$, que se puede extraer de $e^-e^- \rightarrow e^-e^-\pi^+\pi^-$, pues existe el paso intermedio $e^-e^- \rightarrow e^-e^-\gamma^*\gamma^*$, en el que los fotones virtuales se aniquilan [6]. Este canal ha sido observado en experimentos como PLUTO, SLAC MARK II[12], TASSO[13], CELLO[14], DELCO[15], TPC/2 γ [16], TOPAZ[17], MD-1[18], y más recientemente por el detector BELLE [19].
- En 2018, la colaboración COMPASS en el CERN, estudió indirectamente la dispersión

Compton de piones a través de la técnica Primakoff [7], que usa el proceso $\pi^+ Z \rightarrow \pi^+ Z \gamma$, considerando que partículas incidentes en un núcleo pueden ser dispersadas por fotones del campo electromagnético intenso en las vecindades del núcleo.

Las polarizabilidades de los piones cargados han sido obtenidas a partir de los datos de las colaboraciones MAMI, SLAC, MARK II, y COMPASS, este último es el que ha obtenido resultados con mejor precisión y que son consistentes con lo calculado desde la teoría quirial de perturbaciones [2].

Dado el interés experimental por el estudio de las transiciones $\pi^+ \gamma \rightarrow \pi^+ \gamma$ y $\gamma \gamma \rightarrow \pi^+ \pi^-$, y por su relevancia en la información que pueden brindar en la descripción de los mesones ligeros, se pretende en este trabajo realizar una revisión detallada de estos dos procesos desde el punto de vista de la SQED, que pueda ser utilizada como punto de partida para la implementación de modelos más sofisticados.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se realizará una revisión de los conceptos y herramientas teóricas necesarias para los cálculos de la sección transversal de dispersión. Se dará una descripción de la teoría del campo basada en lo expuesto en [20, 21]. Posteriormente, en el Capítulo 3 se tratará la cuantización del campo escalar complejo y su relación con los piones cargados [4], con lo que se presenta el cálculo de la sección transversal de los procesos $\gamma \gamma \rightarrow \pi^+ \pi^-$ y $\pi^+ \gamma \rightarrow \pi^+ \gamma$, para luego compararla con el resultado de la fotoemisión obtenida de los datos experimentales. Finalmente, se presentan en el último capítulo las conclusiones y perspectivas.

Capítulo 2

Generalidades

En el presente capítulo se hará una revisión de los conceptos y herramientas propias de la teoría cuántica de campos, preliminares para realizar cálculos elementales de la electrodinámica escalar. Antes de proceder con los desarrollos, estableceremos las convenciones de notación a utilizar en los capítulos siguientes:

- Se emplearán las unidades naturales, en las que las constantes físicas tienen un valor de 1, como son la velocidad de la luz c y la constante de Plank $\hbar$. Sólo se harán explícitas y tomarán sus valores nominales cuando sea indicado.
- Se usará la convención de Einstein, sumando sobre índices repetidos, $x_\mu y^\mu = \sum_\mu x_\mu y^\mu$ recorriendo todos los valores que puede tomar el índice. Los caracteres griegos abarcarán las 4 coordenadas espacio-temporales, mientras los índices latinos, solo las espaciales, a menos que se indique lo contrario.
- Siendo x y y dos cuadvectores, se entenderá el producto interno entre ellos como $xy = x_\mu y^\mu$.
- El tensor métrico de Minkowski estará denotado por $g^{\mu\nu}$ y la signatura a emplear será $(+---)$.
- En el caso de que se tenga una función f de una variable continua x , las notaciones $f(x)$ y f_x serán equivalentes.

Ya establecido lo referente a la notación utilizada, se procede en la siguiente sección el desarrollo de los conceptos más importantes. Al hablar de teoría de campos, un punto de partida natural es estudiar la noción de campo.

2.1. Campos en mecánica clásica

Un campo es la asignación de objetos matemáticos con puntos de un espacio. Estos objetos pueden ser de cualquier tipo como escalares, vectores, matrices, etcétera. Es común en física utilizar las correspondencias entre puntos del espacio de posición con un escalar o vectores como los campos de potencial o de fuerza.

Con lo anterior, si se quiere conocer la evolución de un sistema conformado por un conjunto de campos escalares $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} := \{\phi_i\}$ definidos en cada punto del espacio $\phi_i(x)$, se puede escribir la acción:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\{\phi_j\}, \{\partial_\mu \phi_j\}), \quad (2.1)$$

donde j recorre todos los elementos del conjunto. Para encontrar las ecuaciones de movimiento se utiliza el principio de Hamilton, $\delta S = 0$, llegando a las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right). \quad (2.2)$$

En el caso en que el campo es vectorial, solo es necesario sustituir $\phi \rightarrow \phi^\nu$ en Ec. (2.2). Al ser descritos por una densidad lagrangiana, los campos obedecen algunas leyes de conservación obtenidas

apartir del momentum generalizado Π_j^ν , o la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$, según las definiciones usuales, las cuales se hallan a partir de:

$$\Pi_j^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_j^\nu)}, \quad \mathcal{H} = \int d^4x (\Pi_{j\nu} \phi_j^\nu - \mathcal{L}), \quad (2.3)$$

en donde los campos juegan el papel de coordenadas generalizadas.

2.2. Cuantización del campo electromagnético

Teniendo los referentes de la mecánica clásica, lo siguiente es el tratamiento desde el formalismo cuántico para los campos. Lo anterior nos lleva a la pregunta ¿cómo volver a los campos entidades cuánticas?

La forma estándar de cuantizar un sistema clásico es por medio de la cuantización canónica, o método de Dirac, que se sirve de la similitud entre las ecuaciones de movimiento de la mecánica hamiltoniana y las ecuaciones de Heisenberg para operadores en mecánica cuántica. Esto último afirma que un sistema clásico se puede cuantizar al promover los brackets de Poisson a conmutadores, y los observables a operadores. Para las variables conjugadas posición y momentum se tiene la correspondencia [20]:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \rightarrow [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

La pregunta subsecuente es ¿cómo puede cuantizar un campo? Al estar presente en todo el espacio no se hace evidente una variable de posición análoga a q , más que el campo mismo, pero al poder tomar cualquier valor en cada punto, tienen infinitos grados de libertad. En todo caso, esta será la variable favorecida. Para tener una intuición más orgánica de la elección, analizaremos el caso del campo electromagnético.

Consideremos el lagrangiano conocido para el campo electromagnético:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.5)$$

en donde $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu$ es el tensor de Faraday, con $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ el cuadrivector potencial, y $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ el cuadrivector de corriente. Hallamos la cinemática a partir de la Ec. (2.2), de donde se obtienen las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho, & \nabla \times \vec{B} &= \vec{J} + \partial_t \vec{E}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ se pueden escribir en términos del potencial escalar $\phi(t, \vec{r})$ y vectorial $\vec{A}(t, \vec{r})$, con t el tiempo y $\vec{r}$ vector de posición, tal que:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.7)$$

Podemos observar que las definiciones de campo magnético y eléctrico son invariantes bajo las transformaciones de gauge $\phi \rightarrow \phi + \partial_t \chi$ y $\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla \chi$, siendo $\chi(t, \vec{r})$ una función escalar. Introduciendo estas transformaciones en las ecuaciones de Maxwell Ec. (2.6), obtenemos:

$$\square \phi - \partial_t(\partial_t \phi + \nabla \cdot \vec{A}) = \rho, \quad (2.8)$$

$$\square \vec{A} + \nabla(\partial_t \phi + \nabla \cdot \vec{A}) = \vec{J}. \quad (2.9)$$

Con $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$ el operador de d'Álambert. Escogiendo la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, conocido como gauge de radiación o de Coulomb, y tomando el caso en el que se esta fuera de la distribución de fuentes $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$, se llega a la ecuación del potencial de Coulomb Ec. (2.8):

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.10)$$

cuya solución tiende a 0 en el infinito, de manera que las Ecs. (2.9), lejos de las fuentes, obedecen la

ecuación de onda (2.11), con soluciones armónicas de ondas planas:

$$\square \vec{A} = 0, \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(t, \vec{r}) = \vec{A}_0 e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{A}_0 e^{-ikx}, \quad (2.12)$$

donde $x = (t, \vec{r})$ es el cuadrivector de posición, y $k = (\omega_k, \vec{k})$ el cuadrivector de onda. De las Ecs. (2.7) y la condición de gauge actuando sobre la solución en la Ec. (2.11), se tienen las siguientes relaciones:

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0, \quad (2.13)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A}. \quad (2.14)$$

Considerando la condición de transversalidad en la Ec. (2.13), podemos descomponer $\vec{A}$ en una base de vectores $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$, ortonormales y ortogonales a $\vec{k}$. Explícitamente estas condiciones son:

$$\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{\epsilon}_i \cdot \vec{k} = 0. \quad (2.15)$$

Empleando las ondas planas de la Ec. (2.11), y la transversalidad en Ec. (2.13), el potencial $\vec{A}$ se puede expresar como combinación lineal de los modos normales; los cuales son una base infinita y continua. Por facilidad se puede volver numerable, discretizándola al poner el potencial dentro de una caja cubica de volumen $V = L^3$ y requiriendo las condiciones de frontera periódicas tales que:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \vec{A}(t, \vec{r} + L\mathbb{1}), \quad (2.16)$$

para cualquier $\vec{r}$ contenido en la caja, con $\mathbb{1}$ como el vector unidad de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, en general podemos escribir que:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{sk} \vec{\epsilon}_s (A_{sk} e^{-ikx} + A_{sk}^* e^{ikx}). \quad (2.17)$$

La expresión anterior coincide con la descomposición de Fourier del campo, con los índice s sumando sobre los dos estados de polarización, y k recorriendo sus valores permitidos: $k_{ni} = 2\pi n/L_i$, donde n es entero e i referencia a las coordenadas espaciales x, y, z . Dado que $\vec{A}$ es real, se escribe la suma de los términos con su conjugado complejo. Cuando $V \rightarrow \infty \Rightarrow d^3k = (2\pi)^3/V^3$ el límite continuo se puede escribir como una transformada de Fourier:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{\epsilon}_s (A_{sk} e^{-ikx} + A_{sk}^* e^{ikx}), \quad (2.18)$$

las amplitudes han absorbido términos a conveniencia para dar la normalización.

Ahora, sabemos que la energía del campo electromagnético está dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2). \quad (2.19)$$

Con el fin de calcular la energía es necesario encontrar explícitamente los campos eléctrico y magnético, para lo que podemos utilizar la Ec. (2.14), obteniendo así que el hamiltoniano estará dado en términos únicamente del vector potencial con:

$$\vec{B} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s i\vec{k} \times \vec{\epsilon}_s (A_{sk} e^{-ikx} - A_{sk}^* e^{ikx}), \quad (2.20)$$

$$\vec{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s i\omega_k \vec{\epsilon}_s (A_{sk} e^{-ikx} - A_{sk}^* e^{ikx}). \quad (2.21)$$

Se hallan las normas de $\vec{E}$ y $\vec{B}$, teniendo presente que $\omega_k = \omega_{-k} = |\pm \vec{k}|$, y como consecuencia de que el potencial $\vec{A}$ es real, es necesaria la condición $A_{sk}^* = A_{s-k}$. De esta manera, podemos verificar

que:

$$\begin{aligned}
\int d^3x |\vec{E}|^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} d^3x \sum_{ss'} \vec{\epsilon}_s \cdot \vec{\epsilon}_{s'} \omega_k \omega_{k'} (A_{sk} e^{-ikx} - A_{sk}^* e^{ikx}) \\
&\quad \times (A_{s'k'}^* e^{ik'x} - A_{s'k'} e^{-ik'x}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{ss'} \vec{\epsilon}_s \cdot \vec{\epsilon}_{s'} \omega_k \omega_{k'} (2\pi)^3 ((A_{sk} A_{s'k'}^* + A_{sk}^* A_{s'k'}) \\
&\quad \times \delta(k - k') - (A_{sk} A_{s'k'} + A_{sk}^* A_{s'k'}^*) \delta(k + k')) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Con lo anterior, el valor de $\mathcal{H}$ será sólo debido a la contribución del término magnético:

$$\begin{aligned}
\int d^3x |\vec{B}|^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} d^3x \sum_{ss'} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_s) \cdot (\vec{k}' \times \vec{\epsilon}_{s'}) (A_{sk} e^{-ikx} - A_{sk}^* e^{ikx}) \\
&\quad \times (A_{s'k'} e^{-ik'x} - A_{s'k'}^* e^{ik'x}).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Para las operaciones entre vectores de onda y vectores de la base ortogonal, se emplea la identidad $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$:

$$(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_s) \cdot (\vec{k}' \times \vec{\epsilon}_{s'}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}')(\vec{\epsilon}_s \cdot \vec{\epsilon}_{s'}) - (\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{s'}) (\vec{k}' \cdot \vec{\epsilon}_s) = (\vec{k} \cdot \vec{k}') \delta_{ss'}. \tag{2.24}$$

Prosiguiendo con la integral de la norma cuadrada del campo magnético, y remplazando la identidad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\int d^3x |\vec{B}|^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{ss'} (\vec{k} \cdot \vec{k}') \delta_{ss'} (2\pi)^3 ((A_{sk} A_{s'k'}^* + A_{sk}^* A_{s'k'}) \\
&\quad \times \delta(k - k') - (A_{sk} A_{s'k'} + A_{sk}^* A_{s'k'}^*) \delta(k + k')) \\
&= \int d^3k \, 2 \sum_s \omega_k^2 (A_{sk} A_{sk}^* + A_{sk}^* A_{sk}).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Finalmente, se puede calcular la energía del campo como:

$$\mathcal{H} = \int d^3k \sum_s \omega_k^2 (A_{sk} A_{sk}^* + A_{sk}^* A_{sk}), \tag{2.26}$$

redefiniendo adecuadamente las amplitudes A_{sk} :

$$A_{sk} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_{sk}, \tag{2.27}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \int d^3k \sum_s \frac{\omega_k}{2} (a_{sk} a_{sk}^* + a_{sk}^* a_{sk}). \tag{2.28}$$

La expresión anterior para la energía evoca al hamiltoniano de osciladores armónicos desacoplados $\mathcal{H}_o$:

$$\mathcal{H}_o = \sum_k \frac{\omega_k}{2} (a_{sk} a_{sk}^\dagger + a_{sk}^\dagger a_{sk}). \tag{2.29}$$

Lo anterior sugiere identificar a los coeficientes de Fourier y los operadores de creación y aniquilación, $a_{sk} \rightarrow \hat{a}_{sk}$ y $a_{sk}^* \rightarrow \hat{a}_{sk}^\dagger$, con las respectivas relaciones de conmutación:

$$[\hat{a}_{sk}, \hat{a}_{s'k'}^\dagger] = i\delta_{ss'} \delta(k - k'), \quad [\hat{a}_{sk}, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_{sk}^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \tag{2.30}$$

Tras escribir la Ec. (2.29) sólo en términos de $\hat{a}_{sk}^\dagger$, $\hat{a}_{sk}$, y usando las propiedades de conmutación,

se obtiene una constante sumando, que al ser integrado diverge; pero dado que el espectro del operador corresponde con la energía del sistema, y sólo es posible medir las diferencias de energía, se pueden remover dicha constante. Para eliminar esta divergencia, se introduce el ordenamiento normal denotado por punto dobles :expresión:, que ubica todos los operadores de creación a la izquierda de los de aniquilación, sin poner la constante que emerge del conmutador ejemplificando:

$$: a_{jk} a_{jk}^\dagger a_{lq}^\dagger a_{lq} : = a_{jk}^\dagger a_{lq}^\dagger a_{jk} a_{lq} . \quad (2.31)$$

Aplicado lo anterior al hamiltoniano del electromagnetismo (ver Ec. (2.29)) se obtiene:

$$: \mathcal{H} := \int d^3k \sum_s : \frac{\omega_k}{2} a_{sk}^\dagger a_{sk} : . \quad (2.32)$$

Usando el formalismo de los operadores escalera, se da la caracterización de los estados propios del hamiltoniano, en términos de operadores de creación actuando sobre el vacío:

$$|\{n_j\}\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_{sj} k_j)^{n_{js}}}{\sqrt{n_{js}!}} |0\rangle , \quad (2.33)$$

donde este vacío se podrá ver como el producto tensorial de osciladores armónicos y la acción de $\hat{a}_{sj}^\dagger$ y $\hat{a}_{sj}$ es crear o aniquilar excitaciones en el campo con momentum k_j y polarización s_j . Excitaciones que se pueden interpretar como partículas, en este caso del campo electromagnético, fotones (γ).

Promoviendo las amplitudes A_{ks} a operadores, se induce el potencial $\vec{A}$ al mismo estatus. Esto lo sugiere como una posible coordenada generalizada para el proceso de cuantización canónica, puesto que el vector potencial está presente en el hamiltoniano, ahora cuantizado. Lo siguiente es encontrar la variable conjugada, es decir el momentum generalizado Π^μ :

$$\Pi^\mu(x) = \frac{d\mathcal{L}_{EM}}{d\dot{A}_\mu(x)} . \quad (2.34)$$

Se parte del lagrangiano para un campo electromagnético sin fuentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EM} &= -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \end{aligned} \quad (2.35)$$

y sustituyendo las Ecs. (2.35) en Ec. (2.34), se sigue que:

$$\Pi^\mu = -\mathcal{F}^{0\mu} . \quad (2.36)$$

En este caso $\Pi^0(x) = 0$, la cual sería la única variable conjugada con la que A^0 tendría un conmutador no nulo. En vista que todos los conmutadores para A^0 son 0, para efectos prácticos, la componente temporal del campo se puede fijar a $A^0 = 0$, con lo que sólo quedan los momentos de componentes espaciales, usando la Ec. (2.14), quedan:

$$\Pi_x^j = -\dot{A}_x^j = E_x^j . \quad (2.37)$$

Lo siguiente es encontrar los conmutadores de los operadores de campo, exigiendo la condición $x^0 = y^0$. Para no tener interacciones instantáneas a distancia, y usando las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción $\hat{a}_{sk}, \hat{a}_{s'k'}^\dagger$ en Ec. (2.30), es directo verificar que:

$$[A^j(x), A^l(y)]_{x^0=y^0} = [\Pi^j(x), \Pi^l(y)]_{x^0=y^0} = 0 . \quad (2.38)$$

Por otro lado los conmutadores del potencial y el momentum quedan de la forma

$$\begin{aligned}
[A^j(x), \Pi^l(y)] &= i\delta_{x^0y^0}\delta_{jl} \sum_{ss'} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{4\omega_k}} \vec{\epsilon}_s \cdot \vec{\epsilon}_{s'} \\
&\quad \times [(a_{sk}e^{-ikx} + a_{sk}^*e^{ikx}), (a_{s'k'}e^{ik'y} - a_{s'k'}^*e^{-ik'y})] \\
&= i\delta_{x^0y^0}\delta_{jl}\delta(x-y) .
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Se puede notar que al escoger el campo como variable canónica se obtienen las variables de conmutación esperadas. Aquí se cuantizó pues, el campo electromagnético a través de la descomposición de Fourier y promoviendo a operadores de creación y destrucción de osciladores armónicos a los coeficientes de Fourier, obteniendo relaciones de conmutación equivalentes para los operadores de campo. Con base al breve ejemplo anterior, se identifica al campo como variable generalizada y su momentum generalizado como las variables conjugadas para realiza la cuantización de los campos con el método de cuantización canónica.

2.3. Cuantización canónica

La aplicación de este método de cuantización a campos, se puede resumir en los siguientes pasos:

- I) Escribir la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ de la teoría clásica que se quiere tratar en términos de los campos ϕ_i .
- II) Encontrar el momentum Π_i asociado a un conjunto de campos $\{\phi_i\}$ en $\mathcal{L}$, para luego hallar el hamiltoniano $\mathcal{H}$ y obtener las ecuaciones de movimiento.
- III) Imponer relaciones de conmutación entre la densidad del campo y el momentum, promoviéndolos a operadores:

$$[\hat{\phi}(x)_i, \hat{\Pi}_j(y)]_{x^0=y^0} = i\hbar\delta_{ij}\delta^3(x-y) ,$$

$$[\hat{\phi}(x)_i, \hat{\phi}_j(y)]_{x^0=y^0} = [\hat{\Pi}_i(x), \hat{\Pi}_j(y)]_{x^0=y^0} = 0.$$

- IV) Expresar los operadores de campo en el espacio de posición a través de la superposición de las soluciones para las ecuaciones de movimiento, junto con operadores de creación y destrucción en el espacio de momentum.

2.4. Operadores de campo

Ya con la metodología para la cuantización, es razonable preguntar, cual es el significado de los operadores de campo, similares a $\hat{A}_x$ que emergieron en el proceso. En general se puede tomar la descomposición en ondas planas de un campo real arbitrario $\hat{\Phi}_x$ de manera análoga a la realizada para el campo electromagnético en la Ec. (2.18), teniendo en cuenta que:

$$\hat{\Phi}_x = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}). \tag{2.40}$$

Sobre los coeficientes de normalización fuera de los paréntesis, vale la pena preguntar cómo cambian bajo las transformaciones de Lorentz, pues d^3k no es invariante. Para avanzar en este punto se analiza el factor d^4p sobre las 4 variables espaciotemporales, y para asegurar de que se habla de una partícula real se exige que se cumpla la conservación de cuádrimomentum, tal que:

$$d^4p \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0), \tag{2.41}$$

donde el delta garantiza la conservación de energía-momentum y la función de Heaviside $\theta(p^0)$ toma las partículas con energías positivas, lo que queda evidenciado posteriormente al efectuar la integral,

para la cual se usa la siguiente identidad:

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{x_k | f(x_k)=0\}} \frac{1}{|f'(x_k)|} \delta(x), \quad (2.42)$$

con x_k como los ceros de f . El argumento de delta es $(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$, si se toma $x = E$, f se anula en $p^0 = E_p = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y $f'(E) = 2|E|$ en consecuencia al integrar la Ec. (2.41) respecto a la energía queda que:

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) &= \int \frac{d^4p}{2|E_p|} (\delta((p^0)^2 + E_p^2) \theta(p^0) + \delta((p^0)^2 - E_p^2) \theta(p^0)) \\ &= \frac{d^3p}{2E_p}, \end{aligned}$$

donde se tienen implícitas las condiciones de conservación del cuadrimomentum, y sólo se admiten partículas con energía positiva. Con lo anterior se puede escribir la identidad para la completeness de la base del espacio de momentum como:

$$\mathbb{1} = \int \frac{d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0)}{(2\pi)^3} |p\rangle \langle p| = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} |p\rangle \langle p|, \quad (2.43)$$

con $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}$ un invariante de Lorentz. El factor $(2\pi)^3$ se incluye, teniendo en cuenta que viene de la normalización de las ondas planas justificada en la Ec. (2.18), y recordando el hecho de que $\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p})$, se puede establecer la relación

$$|p\rangle = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p} |\vec{p}\rangle. \quad (2.44)$$

Volviendo a la descomposición en modos normales (ver Ec. (2.40)), ésta a su vez se puede separar en la suma de funciones armónicas con frecuencias positivas y negativas tales que:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_x &= \hat{\phi}_x + \hat{\phi}_x^\dagger, \\ \hat{\phi}_x &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k e^{-ikx}, \quad \hat{\phi}_x^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para ver el efecto de los operadores de campo, se deja actuar sobre el vacío, teniendo presente que $|x\rangle$ y $|k\rangle$ son kets de la base de posición y momentum. De la identidad de completeness en la Ec. (2.43) y normalización en Ec. (2.44) se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_x^\dagger |0\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \hat{a}_k^\dagger |0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} |k\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \langle k|x\rangle |k\rangle = \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} |k\rangle \langle k| \right) |x\rangle = \mathbb{1} |x\rangle, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $|x\rangle$ es el estado de la base en el espacio de posición localizado en x . Por lo que se hace explícito que el efecto de $\hat{\phi}_x^\dagger$ es el de crear una partícula con posición localizada. De aquí es inmediato que bajo el mismo razonamiento, $\hat{\phi}_x$ aniquila una partícula en la posición x .

$$\hat{\phi}_x^\dagger |0\rangle = |x\rangle, \quad \hat{\phi}_x |x\rangle = |0\rangle. \quad (2.47)$$

En general, podemos ahora considerar el caso en el que $\hat{\Phi}_x$ es complejo:

$$\hat{\Phi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx}). \quad (2.48)$$

Cabe notar que en este caso, las amplitudes que acompañan a las funciones armónicas no son el conjugado del otro. En consecuencia, $\hat{\Phi}_x$ se puede escribir como una combinación lineal de dos campos reales independientes:

$$\hat{\Phi}_x = \hat{\Phi}_a(x) + i\hat{\Phi}_b(x), \quad (2.49)$$

donde es de observar que $2\hat{\Phi}_a(x) = \hat{\Phi}_x + \hat{\Phi}_x^\dagger$ y $2i\hat{\Phi}_b(x) = \hat{\Phi}_x - \hat{\Phi}_x^\dagger$. Los campos explícitamente son:

$$\hat{\Phi}_a(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}) , \quad (2.50)$$

$$\hat{\Phi}_b(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\hat{b}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx}). \quad (2.51)$$

Cada campo con sus operadores $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ y $\hat{b}^\dagger$, $\hat{b}$ tiene la capacidad de crear o aniquilar excitaciones, análogo a las Ecs. (2.47). Por tanto, se asocian dos tipos de partículas al campo $\hat{\Phi}_x$, que como se desarrolla más a fondo en [4], resultan ser partículas idénticas una de la otra a excepción de sus cargas eléctricas que son opuestas. Siendo esta la relación que existe entre partículas y antipartículas, se asocia $\hat{\Phi}_x^\dagger$ a crear una partícula y destruir una antipartícula, mientras $\hat{\Phi}_x$ produce el efecto contrario.

2.5. Propagadores

Sea una ecuación diferencial:

$$\hat{R} X(x) = \phi(x), \quad (2.52)$$

se define la función de Green para el operador diferencial $\hat{R}$ tal que:

$$\hat{R} G(x, y) = \delta(x - y). \quad (2.53)$$

Encontrar la función de Green del operador $\hat{R}$ es equivalente a resolver la ecuación diferencial, pues:

$$\begin{aligned} \int \hat{R} [\phi(x)G(x, y)]du &= \int \delta(x - y)\phi(y)dy , \\ \Rightarrow X(x) &= \int G(x, y)\phi(y)dy. \end{aligned}$$

En el caso en que $X(x) = \phi(x)$, se puede entender que la acción de la función de Green sobre ϕ , es propagarla de un punto y a x :

$$\phi(x) = \int G(x, y)\phi(y)dy. \quad (2.54)$$

Por otro lado, si se tiene un estado $|\phi\rangle$, la probabilidad de que esté en una posición x , está dada por la proyección:

$$\langle x|\phi\rangle = \int dy \langle x|y\rangle \langle y|\phi\rangle = \int dy \langle x|y\rangle \phi(y). \quad (2.55)$$

Comparando Ec. (2.55) con la Ec. (2.54), se identifica la función de Green con la proyección de las dos bases espaciales:

$$\langle x|y\rangle = \langle 0|\hat{\phi}_x \hat{\phi}_y^\dagger|0\rangle = G(x, y) . \quad (2.56)$$

En el caso de tener un campo complejo como en la Ec. (2.48), un propagador de la forma $\hat{\Phi}_x \hat{\Phi}_y^\dagger$ o $\hat{\Phi}_y^\dagger \hat{\Phi}_x$ solo incluirá un tipo de partícula, dejando de lado su antipartícula. Para incluir ambas, se define el propagador de Feynman $\Delta_F(x - y)$ mediante:

$$i\Delta_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0)\hat{\Phi}_x \hat{\Phi}_y^\dagger + \theta(y^0 - x^0)\hat{\Phi}_y^\dagger \hat{\Phi}_x . \quad (2.57)$$

Siguiendo este análisis, se es capaz de obtener el propagador de Feynman para el fotón, $\Delta_F^{\mu\nu}(x - y)$, pudiéndose escribir como:

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x - y) = -\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^2} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} . \quad (2.58)$$

Una discusión completa acerca de la cuantización de un campo vectorial sin masa se puede encontrar

en [5, 20].

2.6. Cálculo perturbativo

Establecidas las bases de los campos cuánticos, lo que se sigue es utilizarlos para computar observables que se puedan verificar experimentalmente. Con este fin se empleará el cálculo perturbativo de Feynman, que permite encontrar teóricamente cantidades medibles para campos que interactúan. A continuación se revisarán las herramientas más relevantes para nuestro estudio.

2.6.1. Marco de interacción

La evolución dinámica de un sistema cuántico, se puede expresar de diferentes maneras equivalentes, siendo los marcos de Schrödinger y Heisenberg ejemplos de ello. En el primero son los estados los que evolucionan en el tiempo, y en el segundo los operadores.

El marco de interacción o de Dirac[21], es una manera alternativa, en la que tanto el estado como el operador dependen del tiempo. Partiendo de un hamiltoniano que se puede separar en dos partes:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (2.59)$$

donde H_0 representa el término que es solucionable analíticamente, y H_1 es conocido como el hamiltoniano de interacción. Las transformaciones unitarias que llevan un estado $|\psi\rangle$ y un operador $\hat{O}$ del marco de Schrödinger al de Dirac son:

$$\hat{O}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O} e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad |\psi_I(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle. \quad (2.60)$$

Para la evolución temporal del operador $\hat{O}$ se tiene:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \hat{O}_I &= \hat{U} \hat{H}_0 \hat{O} \hat{U}^\dagger + i \left(\frac{d}{dt} \hat{O} \right)_I - \hat{U} \hat{O} \hat{H}_0 \hat{U}^\dagger \\ &= i [\hat{O}, \hat{H}_0]_I + \left(\frac{d}{dt} \hat{O} \right)_I. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Las transformaciones inducen sobre el estado $|\psi(x)\rangle$ la dinámica:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= e^{i\hat{H}_0 t} \left(i^2 \hat{H}_0 + \hat{H} \right) e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle \\ &= \hat{H}_I |\psi_I(t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde $\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H} e^{-i\hat{H}_0 t}$. En resumen, se tiene que las definiciones en la Ec. (2.60), conducen a las ecuaciones de movimiento:

$$i \frac{d}{dt} \hat{O} = [\hat{O}, \hat{H}_0], \quad i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_I |\psi(t)_I\rangle, \quad (2.63)$$

que son, respectivamente, una ecuación de Heisenberg para un $\hat{O}$ que no depende explícitamente de t y una de Schrödinger para $|\psi(t)\rangle$. La ecuación del ket se puede escribir en términos del operador de evolución temporal $\hat{U}(t_1, t_0)$ sabiendo que $|\psi(t, x)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t, x)\rangle$, convirtiendo a la Ec. (2.62) en:

$$i \partial_t \hat{U}_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle = \hat{H}_I \hat{U}_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle, \quad (2.64)$$

donde $|\psi(t_0)\rangle$ es un ket arbitrario y constante que se puede omitir. De esta forma,

$$\partial_t \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_I \hat{U}_I(t, t_0), \quad (2.65)$$

que es similar a la expresión para el operador de evolución temporal conocido. El hamiltoniano en el marco de interacción da lugar a la solución

$$\hat{U}_I(t, t_0) = T \left\{ e^{i \int_{t_0}^t d^4 x \hat{H}_I(x)} \right\}, \quad (2.66)$$

donde T es el símbolo de ordenamiento temporal que da todos los posibles ordenamientos para los productos de un conjunto de operadores $\{H_j(x_m)\}$, evaluadas en una serie de puntos $\{x_p\}$, siendo p

todas las posibles permutaciones en las que $\{x_j > x_l > \dots > x_m\}$.

Por ejemplo, en el caso del producto de dos operadores $\hat{A}(x), \hat{B}(y)$ el operador T actúa como:

$$T\{\hat{A}_x \hat{B}_y\} = \theta(x^0 - y^0) \hat{A}_x \hat{B}_y + \theta(y^0 - x^0) \hat{B}_y \hat{A}_x, \quad (2.67)$$

disponiendo los operadores en orden decreciente de los argumentos temporales.

2.6.2. Matriz de dispersión

La cuantización canónica es de aplicación practica en aquellos campos con ecuaciones dinámicas, que se pueden solucionar analíticamente para poder expresar los operadores de campo en términos de funciones conocidas, por lo general son teorías que describen partículas libres. Para los casos con interacción, al no conocer las soluciones, no es posible hacer una expansión explícita del campo en términos de operadores de creación y destrucción, por lo que es necesario usar métodos alternos, por ejemplo la teoría de perturbaciones.

Se introduce la matriz de dispersión $\hat{S}$, como el operador que contiene la información de las interacciones entre campos, y permite expresar la proyección de dos estados arbitrarios, $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, en términos de las soluciones del campo libre $|\psi_{libre}\rangle$ y $|\phi_{libre}\rangle$ [21]:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi_{libre}|\hat{S}|\psi_{libre}\rangle, \quad (2.68)$$

El operador $\hat{S}$ se puede encontrar en el marco de Dirac cuando las interacciones decaen con la distancia considerando que la parte del hamiltoniano $\hat{H}_1$ en la Ec. (2.59), que impide encontrar una solución analítica, tiende a cero como se ilustra en la Fig. 2.1.

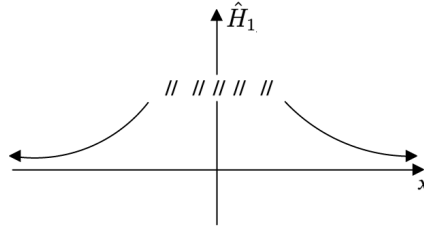


Figura 2.1: Esquema de un potencial genérico que decae con la distancia.

En consecuencia, de las ecuaciones para operadores y estados del marco de interacción, Ecs. (2.63), la expresión que da la dinámica de los estados se anula junto a $\hat{H}_1$. Por otro lado, la ecuación para operadores es la ecuación de Heisenberg, con el hamiltoniano de una teoría libre cuyas soluciones si se conocen, lo que es de esperarse, pues si las partículas se encuentran separadas una distancia grande, se comportaran asintóticamente como libres.

Se tiene que para partículas con estados ψ , ϕ , y $\hat{U}_I$ como el operador de evolución temporal, la proyección de un estado sobre otro en el marco de interacción es:

$$\begin{aligned} \langle\phi_{incial}|\psi_{final}\rangle &= \langle\phi_{libre}|\hat{U}_I^\dagger(0, -\infty)\hat{U}_I(0, -\infty)|\psi_{libre}\rangle \\ &= \langle\phi_{libre}|\hat{U}_I(\infty, -\infty)|\psi_{libre}\rangle; \end{aligned} \quad (2.69)$$

por ende se llega a la asociación del operador $\hat{S}$ con $\hat{U}_I(\infty, -\infty)$ para el que se obtiene la expresión explícita de la Ec. (2.66):

$$\hat{U}_I(\infty, -\infty) = T\left\{\mathbb{1} - i \int d^4x \hat{H}_I(x) + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x d^4y \hat{H}_I(x) \hat{H}_I(y) + \dots\right\}. \quad (2.70)$$

Como inicialmente las partículas se consideran separadas sin relacionarse, no se sabe con exactitud de qué forma se va a dar la interacción, y pueden haber varias posibilidades. Estos factibles mecanismos están representados por cada término en la expansión de $\hat{S}$, lo que será evidente más adelante en los

diagramas de Feynman. De aquí, definimos la matriz de transición $\hat{T}$ como:

$$\hat{S} = 1 + i\hat{T}, \quad (2.71)$$

donde el término 1 representa el caso trivial en el cual no hay interacción y las partículas viajan como estados libres, dejando los procesos no triviales en $\hat{T}$. Por último, pensando en que la matriz de transición debe cumplir con la conservación del cuadrimomentum, para que tenga sentido especificando procesos físicos, se determina la amplitud invariante $\mathcal{M}$ de estados iniciales con momentos $\{p_i\}$ y finales $\{p'_j\}$ como:

$$\langle \{p'_j | i\hat{T} | \{p_i\} \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma_j p'_j - \Sigma_i p_i) i\mathcal{M}, \quad (2.72)$$

donde el delta contiene la información dinámica y $\mathcal{M}$ el carácter propio de la interacción.

2.6.3. Contracciones y teorema de Wick

Para los cálculos usando la matriz de dispersión $\hat{S}$, será útil estudiar los valores esperados de la forma:

$$\langle 0 | T \left\{ \prod_j \hat{\Phi}_j(x_j) \right\} | 0 \rangle, \quad (2.73)$$

con $\hat{\Phi}(x_j) = \hat{\phi}^\dagger(x_j) + \hat{\phi}(x_j)$, pues estas expresiones serán recurrentes en los desarrollos.

Al expandir la Ec. (2.73) se tiene el ordenamiento temporal para la suma de productos con operadores de creación y destrucción. Estos valores esperados se pueden simplificar en términos del ordenamiento normal, pues la diferencia entre el temporal y normal, es la colocación de los operadores. Se tiene la ventaja en el ordenamiento normal que su valor esperado de vacío es 0, dado que $\hat{\phi}|0\rangle = \langle 0|\hat{\phi}^\dagger = 0$, lo que simplifica los cálculos.

Para escribir un ordenamiento en términos del otro, se analiza en qué difieren. Sean los campos $\hat{\Phi}(x) = \hat{\phi}(x) + \hat{\phi}^\dagger(x)$ y $\hat{\Psi}(y) = \hat{\psi}(y) + \hat{\psi}^\dagger(y)$, se define la contracción entre los operadores como

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y)} &= T \{ \hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y) \} - : \hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y) : \\ &= T \{ \hat{\phi}_x^\dagger \hat{\psi}_y^\dagger + \hat{\phi}_x^\dagger \hat{\psi}_y + \hat{\phi}_x \hat{\psi}_y^\dagger + \hat{\phi}_x \hat{\psi}_y \} - (\hat{\phi}_x^\dagger \hat{\psi}_y^\dagger + \hat{\phi}_x^\dagger \hat{\psi}_y + \hat{\psi}_y^\dagger \hat{\phi}_x + \hat{\phi}_x \hat{\psi}_y) \\ &= T \{ \hat{\phi}_x^\dagger \hat{\psi}_y + \hat{\phi}_x \hat{\psi}_y^\dagger \} - (\hat{\phi}_x^\dagger \hat{\psi}_y + \hat{\psi}_y^\dagger \hat{\phi}_x), \end{aligned} \quad (2.74)$$

que simplificado queda de la forma

$$\overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y)} = \theta(x^0 - y^0) [\hat{\phi}_x, \hat{\psi}_y^\dagger] + \theta(y^0 - x^0) [\hat{\psi}_y, \hat{\phi}_x^\dagger]. \quad (2.75)$$

De aquí, el valor esperado del vacío para la contracción, coincide con el del ordenamiento temporal:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y)} | 0 \rangle &= \langle 0 | (T \{ \hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y) \} - : \hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y) :) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Esta asociación de la aplicación de T y la contracción, son equivalentes a la definición en Ec. (2.57) del propagador de Feynman $\Delta_F(x - y)$ para un campo $\hat{\Phi}_x$:

$$i\Delta_F(x - y) = T \{ \hat{\Phi}_x \hat{\Phi}_y^\dagger \} = \overline{\hat{\Phi}_x \hat{\Phi}_y^\dagger}. \quad (2.77)$$

Por otro lado, los operadores de creación y destrucción de momentum, no son afectados por el ordenamiento temporal al no tener explícitos el tiempo; por tanto se pueden poner dentro o fuera del mismo, permitiendo extender la contracción como el producto:

$$T \{ \hat{\Phi}(x) \} \hat{a}_p = T \{ \hat{\Phi}(x) \hat{a}_p \} = \overline{\hat{\Phi}(x) \hat{a}_p}. \quad (2.78)$$

Los conmutadores en Ec. (2.75), tras actuar sobre los kets, arrojan funciones, por lo que el

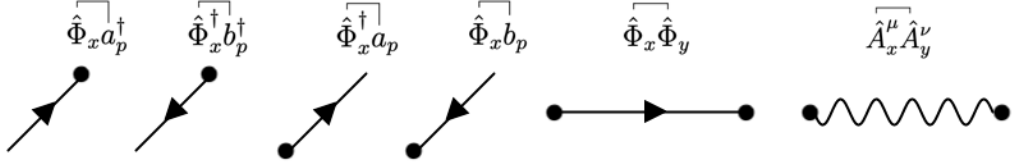


Figura 2.2: Representación pictográfica de contracciones para operadores de campo.

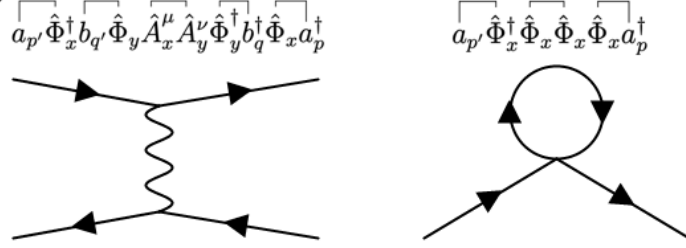


Figura 2.3: Diagramas correspondientes a partícula antipartícula del campo $\hat{\Phi}$ intercambiando un fotón (izquierda), y el el campo $\hat{\Phi}$ interactuando con sigo mismo en la posición x (derecha).

ordenamiento normal no tiene efecto sobre ellas al ser solo números, permitiendo escribir:

$$T\{\hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y)\} =: \hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y) - \overline{\hat{\Phi}(x)\hat{\Psi}(y)} :, \quad (2.79)$$

este resultado, al ser generalizado a una cadena de productos con operadores $\{\hat{A}_i\}$, se conoce como el teorema de Wick:

$$T\left\{\prod_{i=1}^n A_i\right\} =: \prod_{i=1}^n A_i + \left\{ \begin{array}{l} \text{todas las contracciones} \\ \text{posibles para los campos} \end{array} \right\} :. \quad (2.80)$$

Para la prueba del caso general se puede revisar Ref. [22].

2.6.4. Reglas y diagramas de Feynman

A las contracciones de operadores se les puede dar una interpretación física. Por ejemplo, ya se mostró que la contracción de $\hat{\Phi}_x^\dagger$ con $\hat{\Phi}_y$ corresponde al propagador que crea una partícula en la posición y , para destruirla en el punto x . Así mismo se puede dar interpretación a la contracción de un operador de campo de posición con uno de momentum p

$$\overline{\hat{\Phi}(x)\hat{a}_p} = \langle 0|\hat{\Phi}(x)\hat{a}_p|0\rangle = \langle x|p\rangle, \quad (2.81)$$

representando la probabilidad de llegada de una partícula de momentum p a una posición x . Siguiendo esta idea, se asocian pictogramas que den cuenta de estas interpretaciones a cada contracción como se puede observar en la Fig. 2.2.

Se asumirá la convención de que en este tipo de dibujos, el tiempo avanza de izquierda a derecha. En el caso de los productos de contracciones, estos bosquejos se juntan para formar figuras más complejas que representan procesos de dispersión compuestos, como se ejemplifica en Fig. (2.3).

La utilidad de estos dibujos es que permite tener representaciones esquemáticas de los términos que surgen tras la aplicación del teorema de Wick a una teoría cuántica de partículas y su relación con las interacciones. De la misma forma en que obtienen los diagramas, se puede partir de los dibujos, y las reglas de correspondencia de sus partes a las contracciones, para reconstruir los elementos de la matriz de dispersión, y a su vez la amplitud invariante, sin tener que realizar explícitamente la

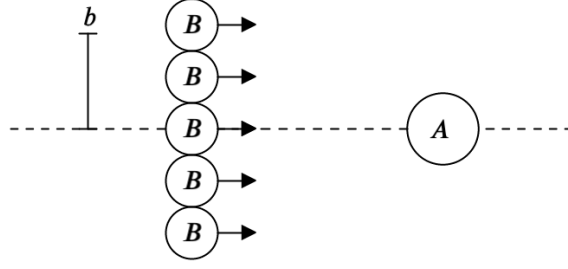


Figura 2.4: Haz de partículas B incidiendo sobre un blanco A .

expansión de S .

Estos dibujos, y las reglas de reciprocidad con $\mathcal{M}$ para una teoría cuántica de campos, son conocidos como diagramas y reglas de Feynman.

2.6.5. Regla de oro de Fermi

Hasta ahora, lo expuesto permite el entendimiento y tratamiento de campos cuánticos, pero no se ha planteado la forma de realizar predicciones de cantidades medibles. Esta brecha entre lo teórico y lo experimental es conectada a través de la regla de oro de Fermi, que posibilita el cálculo de secciones transversales de dispersión (σ) o anchos de desintegración (Γ).

En física de partículas, los experimentos que se efectúan son colisiones de partículas en las que se conocen los estados antes de los choques, y que después de la colisión en el punto de interacción, los productos de la misma son detectados a través de sensores, lo que posibilita la medición de la sección transversal. La predicción de σ puede efectuarse a partir de lo ya desarrollado en el capítulo previamente.

Si consideramos el escenario (ver Fig. 2.4) en que se dispara un rayo de partículas tipo B , con densidad volumétrica ρ_B , a un blanco de partículas A , de densidad volumétrica ρ_A , y si es N la cantidad de colisiones entre A y B , se define la sección transversal σ [22]:

$$\sigma = \frac{N}{\rho_A l_A \rho_B l_B}, \quad (2.82)$$

nótese que esta expresión tiene unidades de área inversa, convencionalmente medida en barns ($1b = 10^{-24} \text{cm}^2$). Experimentalmente, por lo general, las densidades tienen mayor valor en el centro de los haces, pero si se asume el caso en que sea casi constante, se puede aproximar:

$$N = \sigma l_A l_B \int d^2x \rho_A(x) \rho_B(x) = \frac{\sigma N_A N_B}{A}. \quad (2.83)$$

Ahora, la probabilidad $\mathcal{P}$ de pasar de un estado inicial $|\phi_A \phi_B\rangle$ a uno final es

$$\mathcal{P}(AB \rightarrow C D \dots) = |\langle \phi_C \phi_D \dots | \phi_A \phi_B \rangle|^2, \quad (2.84)$$

y escribiendo los estados en una posición determinada, a través de los operadores de campo se obtiene

$$|\phi\rangle = \phi^\dagger |0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \phi^*(k) |k\rangle. \quad (2.85)$$

Esta ecuación es útil para expresar los estados asintóticos incidentes y resultantes de los choques, que son ondas planas de la forma

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{in} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(k_A) \phi_B(k_B)}{2E} e^{-ik_B} |k_A k_B\rangle_{in}, \quad (2.86)$$

$${}_{\text{out}}\langle\phi_C\phi_D\dots| = \left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(p_f)}{\sqrt{2E_f}} \right) {}_{\text{out}}\langle p_C p_D \dots |, \quad (2.87)$$

donde f recorre todas las partículas resultantes. in y out denotan entrante y saliente, respectivamente, y el parámetro de impacto b se incluye explícito en el término e^{-ibk_B} .

Trabajando con el bracket en el espacio de momentos

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle p_C p_D \dots | k_A k_B \rangle_{in} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_C p_D \dots | U^\dagger(0, t) U(0, -t) | k_A k_B \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_C p_D \dots | e^{i\hat{H}2t} | k_A k_B \rangle \\ &= \langle p_C p_D \dots | \hat{S} | k_A k_B \rangle. \end{aligned} \quad (2.88)$$

De esta manera, se llega naturalmente a la matriz de dispersión $\hat{S}$, que como ya se explico en la sección 2.6.4, sus términos representan las posibles interacciones entre las partículas involucradas en el proceso. Ignorando el caso en que las partículas no interactúan, queda la parte de la matriz de transición

$$\langle p_C p_D \dots | i\hat{T} | k_A k_B \rangle = (4\pi)^2 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \Sigma_i p_i) i\mathcal{M}, \quad (2.89)$$

donde se ve que la amplitud invariante $\mathcal{M} = \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_f\})$ contiene la información sobre la transición del estado inicial al final, relacionada al hamiltoniano de interacción, mientras los delta de Dirac, resguardan la conservación de las cantidades cinéticas.

Ahora, usando la completeness de la base de momentum Ec. (2.46), para la norma del estado

$$1 = \langle \phi_A \phi_B | \phi_A \phi_B \rangle = \langle \phi_A \phi_B | \int \left(\prod_f \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) |\{p_j\}\rangle \langle \{p_j\}| \phi_A \phi_B \rangle, \quad (2.90)$$

de aquí que la proyección del estado final sobre una pequeña parte del espacio, es la probabilidad de que se haga una transición a un estado cuyo momentum esta contenido en una región $d^3p_C d^3p_D \dots d^3p_\#$

$$\mathcal{P}(AB \rightarrow C D \dots) = \left(\prod_j \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) |\langle \{p_j\} | \phi_A \phi_B \rangle|^2. \quad (2.91)$$

La cantidad N de colisiones esta dada por la probabilidad $\mathcal{P}$, de que se de la interacción entre las partículas, multiplicada la cantidad de las mismas:

$$N = \int d^2b n_B n_A \mathcal{P}(b). \quad (2.92)$$

Remplazando Ec. (2.92) en Ec. (2.83), se obtiene la sección transversal en términos de la probabilidad de colisión:

$$\sigma = \frac{N}{n_A n_B} = \int d^2b \mathcal{P}(b). \quad (2.93)$$

Sustituyendo la probabilidad $\mathcal{P}$ de la Ec. (2.91) y expresando los estados como operadores de campo actuando sobre el vacío, igual que en Ec. (2.85), se tiene la sección transversal diferencial

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_j \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2b \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k_i}}{\sqrt{2E_{k_i}}} \int \frac{d^3k'_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k'_i}^*}{\sqrt{2E_{k'_i}}} \\ &\quad \times e^{-ib(k'^\perp_B - k^\perp_B)} {}_{\text{out}}\langle \{p\}_j | \{k\}_i \rangle_{in} {}_{\text{out}}\langle \{p\}_j | \{k'\}_i \rangle_{in}^*. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Se trabaja aisladamente una parte de $d\sigma$:

$$\begin{aligned} & \int d^2b \int \frac{d^3k'_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k'_A}^*}{\sqrt{2E_{k'_A}}} \int \frac{d^3k'_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k'_B}^*}{\sqrt{2E_{k'_B}}} e^{-ib(k'_B - k'_A)} \text{out} \langle \{p\}_j | \{k'\}_i \rangle_{in}^* \\ &= \int \frac{d^3k'_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k'_A}^*}{\sqrt{2E_{k'_A}}} \int \frac{d^3k'_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k'_B}^*}{\sqrt{2E_{k'_B}}} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k'_B - k'_A) \\ & \quad \times (2\pi)^4 (i\mathcal{M})^* \delta^{(4)}(k'_A + k'_B - \Sigma_j p_j) . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ahora se toma un sistema de referencia en que las velocidades de ambas partículas son colineales al eje z . Fijándonos en la integral respecto a $d^3k'_A$ y separándola en la parte dependiente de z , y perpendicular ($d^2k'_A dk'_{Az}$), se tiene:

$$\begin{aligned} & \int d^2k'_A dk'_{Az} \frac{\phi_{k'_A}^*}{\sqrt{2E_{k'_A}}} \frac{\phi_{k'_B}^*}{\sqrt{2E_{k'_B}}} (i\mathcal{M})^* \delta^{(2)}(k'_B - k'_A) \delta^{(2)}(k'_A + k'_B - \Sigma_j p_j) \\ & \quad \delta(k'^z_A + k'^z_B - \Sigma_j p_j^z) \delta(E'^z_A + E'^z_B - \Sigma_j E_j) . \end{aligned} \quad (2.96)$$

Las integraciones respecto a $d^2k'_A$ son inmediatas y se obtienen las condiciones $k'^\perp_B = k'^\perp_A$ y $k'^\perp_A = \Sigma_j p_j^\perp - k'^\perp_B = k'^\perp_A$. Por otro lado, para dk'_{Az} la energía tiene dependencia del momentum en dirección z

$$\begin{aligned} & \int dk'_{Az} d^z k'_B \frac{\phi_{k'_A}^*}{\sqrt{2E_{k'_A}}} \frac{\phi_{k'_B}^*}{\sqrt{2E_{k'_B}}} (i\mathcal{M})^* \delta(k'^z_A + k'^z_B - \Sigma_j p_j^z) \delta(E'^z_A + E'^z_B - \Sigma_j E_j) \\ &= \int dk'_{Az} \frac{\phi_{k'_A}^*}{\sqrt{2E_{k'_A}}} \frac{\phi_{k'_B}^*}{\sqrt{2E_{k'_B}}} (i\mathcal{M})^* \\ & \quad \times \delta(\sqrt{(k'^z_A)^2 - m_A^2} + \sqrt{(k'^z_B)^2 - m_B^2} - \Sigma_j E_j) \Big|_{k'^z_B = \Sigma_j p_j^z - k'^z_A} . \end{aligned} \quad (2.97)$$

Lo que se sigue es usar la identidad de $\delta(g(x))$ en la Ec. (2.42), para tratar la función dentro de la distribución de Dirac:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{(k'^z_A)^2 - m_A^2} + \sqrt{(\Sigma_j p_j^z - k'^z_A)^2 - m_B^2} - \Sigma_j E_j , \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{k'_A}{E'_A} - \frac{k'_B}{E'_B} = v_A - v_B , \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde $v_A - v_B$ es la velocidad relativa entre la partícula A y B . Poniendo esto junto en la sección transversal diferencial Ec. (2.97)

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_j \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{k_A}}{\sqrt{2E_{k_A}}} \frac{\phi_{k_B}}{\sqrt{2E_{k_B}}} \text{out} \langle \{p\}_j | \{k\}_i \rangle_{in} \\ & \quad \times \left(\frac{\phi_{k_A}^*}{\sqrt{2E_{k_A}}} \frac{\phi_{k_B}^*}{\sqrt{2E_{k_B}}} (i\mathcal{M})^* \right) |v_A - v_B| . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Como los paquetes de onda están inicialmente muy localizados alrededor de los valores centrales p_A y p_B , las funciones suaves de k_A junto a k_B , se pueden evaluar en los momentos p_A y p_B , y extraer de la integral, dejando así

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_j \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_{p_A} 2E_{p_B} |v_A - v_B|} \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \\ & \quad \times |\phi_{k_A}^*|^2 |\phi_{k_B}^*|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \Sigma_j p_j) . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Los detectores usados en estos casos, no tienen la resolución suficiente como para captar las

variaciones de la medición por efecto de los pequeños cambios en ϕ_A y ϕ_B respecto k_A y k_B ; por lo cual, se pueden aproximar también k_A y k_B en la distribución de Dirac con los valores centrales p_A y p_B , dejando solo las integrales actuando sobre las normas cuadradas de las funciones de onda $|\phi_A|^2$ y $|\phi_B|^2$, que al estar normalizadas son 1, dando el resultado

$$d\sigma = \left((2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \Sigma_j p_j) \prod_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \right) \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_{p_A} 2E_{p_B} |v_A - v_B|}. \quad (2.101)$$

El factor de la izquierda es invariante de Lorentz y se le conoce como espacio de fase invariante relativista para n cuerpos

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \Sigma_j p_j) \prod_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}. \quad (2.102)$$

El divisor de velocidades colineales en la Ec. (2.101), se pueden trabajar con un poco de álgebra, para convertirlo en una expresión invariante de Lorentz manifiesta de forma evidente

$$\begin{aligned} E_A^2 E_B^2 |v_A - v_B|^2 &= E_A^2 E_B^2 (v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B) \\ &= E_B^2 p_A^2 + (p_A^2 + m_A^2) p_B^2 - 2E_A E_B p_A p_B \\ &= (p_B^2 + m_B^2) p_A^2 + m_A^2 p_B^2 + p_A^2 p_B^2 - 2E_A E_B p_A p_B + m_A^2 m_B^2 - m_A^2 m_B^2 \\ &= (p_B^2 + m_B^2)(p_A^2 + m_A^2) + p_A^2 p_B^2 - 2E_A E_B p_A p_B - m_A^2 m_B^2 \\ &= E_A^2 E_B^2 + p_A^2 p_B^2 - 2E_A E_B p_A p_B - m_A^2 m_B^2 \\ &= (E_A^2 E_B^2 - p_A^2 p_B^2)^2 - m_A^2 m_B^2 \\ &= (p_{A\mu} p_B^\mu)^2 - m_A^2 m_B^2. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Se puede escribir finalmente la sección transversal en términos de la amplitud invariante mediante

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_{A\mu} p_B^\mu)^2 - m_A^2 m_B^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \Sigma_j p_j) \prod_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}. \quad (2.104)$$

La Ec. (2.104) establece una relación con $\mathcal{M}$, calculable a partir de los diagramas de Feynman y obtener un valor para σ , que se puede medir experimentalmente, proporcionando una forma de hacer predicciones que puedan ser verificadas con los resultados experimentales.

2.6.6. Sección transversal en el CM

En el caso especial desde el sistema de referencia es el del centro de masa (CM), para la reacción

$$A + B \rightarrow C + D, \quad (2.105)$$

la sección transversal se puede llevar a una expresión aún más simple gracias a la restricción $\vec{p}_A = -\vec{p}_B := \vec{p}_I$. Comenzando por el factor dentro de la raíz cuadrada en la Ec. (2.104), se obtiene

$$(p_{A\mu} p_B^\mu)^2 - m_A^2 m_B^2 = E_A E_B \left| \frac{\vec{p}_I}{E_A} - \frac{-\vec{p}_I}{E_B} \right| = (E_A + E_B) |\vec{p}_I|. \quad (2.106)$$

Prosiguiendo con la parte integral

$$\begin{aligned}
I &= \int |\mathcal{M}|^2 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3 p_C}{E_C} \frac{d^3 p_D}{E_D} \\
&= \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(E_A + E_B - p_C^0 - p_D^0) \delta^{(3)}(\vec{p}_C + \vec{p}_D)}{\sqrt{p_C^2 + m_C^2} \sqrt{p_D^2 + m_D^2}} d^3 p_C d^3 p_D . \\
&= \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(E_A + E_B - \sqrt{p_C^2 + m_C^2} - \sqrt{p_C^2 + m_D^2})}{\sqrt{p_C^2 + m_C^2} \sqrt{p_C^2 + m_D^2}} d^3 p_C \Big|_{p_C = -p_C} .
\end{aligned} \tag{2.107}$$

se obtiene la condición $-\vec{p}_D = \vec{p}_C$.

Para continuar se expresa la integral en coordenadas esféricas $d^3 p_C = \rho^2 d\rho d\Omega$, con $\rho = |\vec{p}_C|$ y $E_A + E_B = E$:

$$I = \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(\sqrt{\rho^2 + m_C^2} + \sqrt{\rho^2 + m_D^2} - E)}{\sqrt{\rho^2 + m_C^2} \sqrt{\rho^2 + m_D^2}} \rho^2 d\rho d\Omega . \tag{2.108}$$

De aquí se hace el cambio de variable con el argumento de la distribución delta Dirac:

$$\begin{aligned}
u &= E_C + E_D - E , \\
\Rightarrow du &= \frac{u \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + m_C^2} \sqrt{\rho^2 + m_D^2}} , \\
\Rightarrow I &= \int |\mathcal{M}|^2 \delta(u - E) \frac{\rho}{u} d\rho d\Omega = \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\rho}{E} d\Omega \Big|_{u=E} ,
\end{aligned} \tag{2.109}$$

por lo que $E_C + E_D = E_A + E_B$. $\rho := p_F$ es la norma del momentum final en términos de u , que se puede despejar de la Ec. (2.109) cuando $u \rightarrow E$

$$\rho = |p_F| = \sqrt{\left(\frac{m_C^2 - m_D^2 - 4(E_A + E_B)^2}{2(E_A + E_B)} \right)^2 - m_D^2} . \tag{2.110}$$

Combinando el factor de la Ec. (2.106) y el resultado de la integral en la Ec. (2.109), se tiene que la sección transversal es

$$\sigma = \frac{1}{(8\pi)^2 (E_A + E_B) |\vec{p}_I|} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{|p_F|}{E_A + E_B} d\Omega , \tag{2.111}$$

reorganizando se llega a la expresión general para la sección transversal diferencial de dos partículas colisionando en el centro de masa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi)^2 (E_A + E_B)^2} \frac{|\vec{p}_F|}{|\vec{p}_I|} . \tag{2.112}$$

Hasta este punto disponemos de las herramientas necesarias para cuantizar un campo genérico, así como utilizar las herramientas del cálculo perturbativo de Feynman para predecir las secciones transversales en colisiones de distintos tipos de partículas. En el siguiente capítulo, se presenta la cuantización de un campo escalar complejo así como algunos procesos de dispersión en los que se ven involucrados y realizar un análisis fenomenológico de nuestros resultados.

Capítulo 3

Electrodinámica cuántica escalar para mesones π

Establecidas las herramientas básicas de la cuántica de campos, se pueden analizar la dispersión de partículas en presencia de una interacción. Lo que haremos en este capítulo será proponer el modelamiento de la interacción de los piones cargados π^+ y π^- con el campo electromagnético (fotones), a través de la electrodinámica cuántica escalar (SQED), que se obtiene del acoplamiento del campo de Maxwell a un campo escalar de Klein-Gordon.

La hipótesis que motiva nuestro estudio es que los piones tienen espín 0, y el campo de Klein-Gordon describe partículas puntuales con esta característica. Ha de tenerse presente que los piones si tienen estructura, de la que en nuestro modelo no se dará ninguna consideración. Dicha limitación nos hace esperar que nuestros resultados reproduzcan la física en determinado régimen energético, aquel en que el campo electromagnético tiene una longitud de onda lo suficientemente grande como para considerar que interactúa de forma puntual con los piones.

De esta hipótesis se efectuará la cuantización del campo y realizarán cálculos teóricos, de los cuales se obtendrá una predicción de sección eficaz para los procesos $\pi^-\gamma \rightarrow \pi^-\gamma$ y $\gamma\gamma \rightarrow \pi^-\pi^+$. Éste último será comparado directamente con resultados experimentales.

3.1. Ecuación de Klein-Gordon

Para obtener la ecuación de Klein-Gordon, podemos partir de la relación de energía-momentum en relatividad especial

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \quad (3.1)$$

siendo m la masa de los piones, E su energía, y $\vec{p}$ su momento lineal. Se sustituyen los operadores correspondientes de mecánica cuántica: $E \rightarrow i\partial_t$ y $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$, lo que da la ecuación

$$(\partial_\eta \partial^\eta + m^2) \pi(x) = 0. \quad (3.2)$$

Las soluciones para el campo π , son funciones armónicas de la forma:

$$\pi_x = \pi_0 e^{-ipx}, \quad (3.3)$$

siendo p el cuadrimomento y x la cuadriposición. El resultado es análogo al de las ecuaciones de Maxwell en el gauge de radiación en la Ec. (2.11), de modo que se podrá hacer, en su momento, una descomposición en modos normales para el campo, análoga a la efectuada en el capítulo anterior (ver Ec. (2.40)).

Al ser π un campo escalar, su misma definición dicta que cuando se cambia de sistema de referencia, el valor no se transforma por boost o rotaciones de Lorentz, así pues se puede pensar que las partículas que representan no tienen una dirección en la que apuntan, lo que permite asociar el campo de Klein-Gordon a partículas con espín 0, al igual que los piones.

3.2. Acople mínimo

Dado que es de interés la electrodinámica del campo de Klein-Gorodon, veremos en esta sección como acoplar el campo escalar al electromagnetismo. Se comienza con el lagrangiano de Klein-Gordon:

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\eta \pi_x^\dagger \partial^\eta \pi_x - m^2 \pi_x^\dagger \pi_x . \quad (3.4)$$

Ahora $\mathcal{L}_{KG}$ es invariante bajo transformaciones de fase complejas globales $\pi_x \rightarrow e^{i\chi} \pi_x$. Si se fuerza la transformación a ser local $\chi = \chi(x)$, el lagrangiano se torna en

$$(\partial_\eta \pi_x^\dagger - i\partial_\eta \chi_x \pi_x^\dagger)(\partial^\eta \pi_x + i\partial^\eta \chi_x \pi_x) - m^2 \pi_x^\dagger \pi_x . \quad (3.5)$$

Por ende para construir a partir de $\mathcal{L}_{KG}$ uno invariante bajo transformaciones de fase locales, los nuevos términos deben cancelarse, lo que se logra al introducir la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - iq\alpha_\mu(x) , \quad (3.6)$$

donde q es una constante, y $\pi(x)$ junto a $\alpha_\mu(x)$ transforman de modo que: $\pi(x) \rightarrow e^{i\chi(x)} \pi(x)$ como $\alpha_\mu \rightarrow \alpha_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \chi(x)$. Con esta derivada modificada se logra que los términos adicionales que surgen de la fase se cancelen si se toma el nuevo lagrangiano

$$\mathcal{L} = D_\eta^* \pi_x^\dagger D^\eta \pi_x - m^2 \pi_x^\dagger \pi_x . \quad (3.7)$$

La ley de transformación para $\alpha_\mu(x)$ coincide con las mismas que dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell en la Ec. (2.7), identificando así a $\alpha_\mu(x)$ con el cuadripotencial electromagnético $A_\mu(x)$. Remplazando la derivada y obviando la dependencia respecto a x , el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g^{\mu\nu} (\partial_\mu - ieA_\mu) \pi (\partial_\nu + ieA_\nu) \pi^* - m^2 \pi \pi^* \\ &= \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi^* - ieA_\mu + \partial_\mu \pi^* ieA^\mu + (e^2 A_\mu A^\mu - m^2) \pi \pi^* \\ &= \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi^* - m^2 \pi \pi^* + ieA_\mu [(\partial^\mu \pi^*) \pi - \pi^* (\partial^\mu \pi)] + e^2 A_\mu A^\mu \pi^* \pi . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para hacer la escritura más compacta, se define el gradiente bidireccional $\pi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi := \pi^* (\partial^\mu \pi) - (\partial^\mu \pi^*) \pi$, con el que la Ec. (3.8) se reescribe como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} - ie\pi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi A^\mu + e^2 \pi^\dagger \pi A_\mu A^\mu . \quad (3.9)$$

En los sumandos que surgen de hacer el lagrangiano invariante, se tiene explícita la interacción entre el campo piónico y el potencial electromagnético. A este procedimiento en el que surge una fuerza, al promover una simetría global a local, se le denomina acople mínimo.

Si en la Ec. (3.9) se agrega el término dinámico del campo de Maxwell, se escribe entonces el lagrangiano completo para un campo escalar y el electromagnetismo interactuantes, conocido como el lagrangiano de la SQED

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_A , \quad (3.10)$$

en donde $\mathcal{L}_A$ es el lagrangiano de acople que contiene los términos cruzados entre π y A_μ .

3.3. Cuantización de la electrodinámica escalar

La cuantización canónica del campo electromagnético ya se efectuó en el capítulo pasado, por lo tanto sólo falta aplicar dicho proceso a la parte escalar y de acople del lagrangiano para la SQED. Del desarrollo anterior, la Ec. (3.10) está en términos de los campos, así que se tiene el primer paso de la cuantización. Lo siguiente es encontrar el momento generalizado asociado al escalar mediante

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \pi)} = \partial_0 \pi^* - ieA^0 \pi^* = D_0 \pi^* . \quad (3.11)$$

Con esto se puede hallar el hamiltoniano de la SQED

$$H = \Pi \dot{\pi} + \Pi^* \dot{\pi}^* - \mathcal{L}_{KG} - \mathcal{L}_A - H_{EM} . \quad (3.12)$$

La parte correspondiente al campo electromagnético no cambia, y el término $\mathcal{L}_A$ se puede dejar simplemente expresado.

Aislando los tres primeros sumandos de la Ec. (3.12), y usando $\partial_0 \pi^* = \Pi + ieA^0 \pi^*$ de la Ec. (3.11), se obtiene

$$\begin{aligned}
& \Pi \dot{\pi} + \Pi^* \dot{\pi}^* - \partial_0 \pi^* \partial^0 \pi + \nabla \pi^* \nabla \pi + m^2 \pi^* \pi \\
&= \Pi(\Pi^* - ieA^0 \pi) + \Pi^*(\Pi + ieA^0 \pi^*) \\
&\quad - (\Pi + ieA^0 \pi^*)(\Pi^* - ieA^0 \pi) + \nabla \pi^* \nabla \pi + m^2 \pi^* \pi \\
&= [\Pi^* \Pi + \nabla \pi^* \nabla \pi + m^2 \pi^* \pi] + e^2 (A^0)^2 \pi^* \pi .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Lo que está entre corchetes corresponde al hamiltoniano de Klein-Gordon libre, permitiendo escribir H como

$$H = H_{KG} + H_{EM} + e^2 (A^0)^2 \pi^* - \mathcal{L}_A . \tag{3.14}$$

Se define el hamiltoniano de acople H_A tal que

$$H_A = ieA_\mu (\pi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi) + e^2 (A^0)^2 \pi^* \pi - e^2 A_\mu A^\mu \pi \pi^* . \tag{3.15}$$

Entonces, el hamiltoniano total se puede escribir mediante tres partes: las provenientes del campo escalar y vectorial, junto con el elemento que incorpora ambos

$$H = H_{KG} + H_{EM} + H_A . \tag{3.16}$$

Prosiguiendo con el tercer paso de la cuantización canónica, se promueven a operadores $\pi \rightarrow \hat{\pi}, \Pi \rightarrow \hat{\Pi}$, con las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
& [\hat{\pi}(x)_i, \hat{\Pi}_j(y)]_{x^0=y^0} = i\hbar \delta_{ij} \delta^3(x-y) , \\
& [\hat{\pi}(x)_i, \hat{\pi}_j(y)]_{x^0=y^0} = [\hat{\Pi}(x)_i, \hat{\Pi}_j(y)]_{x^0=y^0} = 0 .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Se establecen conmutadores análogos para el conjugado del campo. Haciendo una descomposición en modos normales, los operadores de campo son

$$\hat{\pi}_x = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{-ikx}) , \tag{3.18}$$

$$\hat{A}_x = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_s \epsilon_{sk} (\hat{c}_{sk} e^{ikx} + \hat{c}_{sk}^\dagger e^{-ikx}) . \tag{3.19}$$

Ahora se encuentra el propagador de Feynman para el campo escalar usando la definición en la Ec. (2.57)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{\pi}_x \hat{\pi}_y^\dagger | 0 \rangle &= \int N_k N_{k'} d^3 k d^3 k' \langle 0 | (\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx}) (\hat{b}_{k'} e^{-ik'y} + \hat{a}_{k'}^\dagger e^{ik'y}) | 0 \rangle \\
&= \int N_k N_{k'} d^3 k d^3 k' \langle 0 | \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger | 0 \rangle e^{-ikx} e^{ik'y} \\
&= \int N_k^2 d^3 k e^{-ik(x-y)} .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Como $\langle 0 | \hat{\pi}_y^\dagger \hat{\pi}_x | 0 \rangle$ es el conjugado complejo de la Ec. (3.20), el propagador queda:

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 (2E_k)^2} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)}) . \tag{3.21}$$

A la Ec. (3.21) es posible tomarla como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{4i(2\pi)^4} \int 2i\pi d^3 k \left(\theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-ik(x-y)}}{E + (E - i\lambda)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{ik(x-y)}}{E + (E + i\lambda)} \right) , \tag{3.22}$$

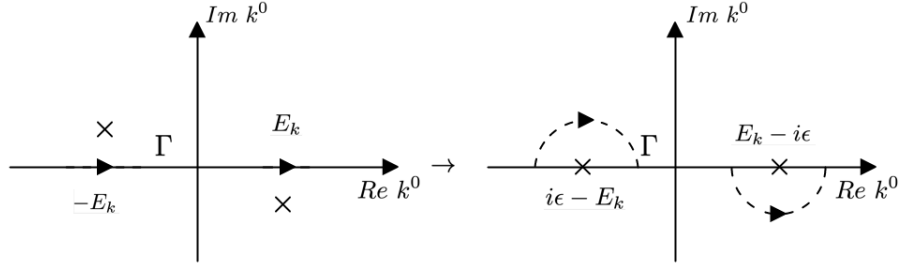


Figura 3.1: Trayectoria para el propagador en el plano complejo de k^0 .

lo que recuerda el teorema del residuo para integrales. Con esta idea en mente, se puede escribir el propagador, de forma compacta usando la integral de línea

$$\Delta_F(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} -i \oint_{\Gamma} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - (E_k - i\lambda)^2}, \quad (3.23)$$

siendo Γ la trayectoria en el plano complejo ilustrado en la Fig. (3.1).

Al desarrollar la integral, sólo la parte sobre el eje real es no anula. El resultado se puede simplificar, pues, tomando $\lambda^2 \simeq 0$ y $2i\lambda E_k = \epsilon$. Se escribe el propagador del campo escalar como

$$\Delta_F(x) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.24)$$

3.4. Cálculo perturbativo para la SQED

Con el fin de realizar cálculos procederemos a encontrar la matriz de dispersión en el marco de Dirac. Según las ecuaciones para esta representación (Ec. (2.6)), la transformación del hamiltoniano de acople $\hat{H}_a$, hará de hamiltoniano de interacción.

Sabiendo que el operador de evolución temporal $\hat{U}(t, t_0)$ conmuta con las derivadas espaciales ∂_k , pero no con la temporal, facilitará el procedimiento de pasar de un marco a otro, así como eliminar $\partial_0 \hat{\pi}$ y $\partial_0 \hat{\pi}^\dagger$ de $\hat{H}_A$ antes de realizar la transformación

$$\begin{aligned} \hat{H}_A &= ie\hat{\pi}^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_k \hat{\pi} \hat{A}^k + ie[\hat{\pi}^\dagger \partial_0 \hat{\pi} - (\partial_0 \hat{\pi}^\dagger) \hat{\pi}] \hat{A}^0 - e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu - e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} (\hat{A}^0)^2 \\ &= ie\hat{\pi}^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_k \hat{\pi} \hat{A}^k + ie\hat{\pi}^\dagger (\Pi^\dagger - ie\hat{A}^0 \hat{\pi}) \hat{A}^0 \\ &\quad - (\Pi + ie\hat{\pi}^\dagger) \hat{\pi} [\hat{A}^0 - e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu - e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} (\hat{A}^0)^2] \\ &= ie\hat{\pi}^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_k \hat{\pi} \hat{A}^k + ei(\hat{\pi}^\dagger \Pi^\dagger - \Pi \hat{\pi}) \hat{A}^0 + e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} (\hat{A}^0)^2 + e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu, \end{aligned} \quad (3.25)$$

sin la dependencia de las derivadas temporales, pasar al marco de interacción es inmediato

$$\begin{aligned} H_I &= \hat{U} \hat{H}_A \hat{U}^\dagger \\ &= \hat{U} [ie\hat{\pi}^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_k \hat{\pi} \hat{A}^k + ei(\hat{\pi}^\dagger \Pi^\dagger - \Pi \hat{\pi}) \hat{A}^0 \\ &\quad + e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} (\hat{A}^0)^2 - e^2 \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu] \hat{U}^\dagger \\ &= ie\hat{\pi}_I^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_k \hat{\pi}_I \hat{A}^k + ei(\hat{\pi}_I^\dagger \hat{\Pi}_I^\dagger - \hat{\Pi}_I \hat{\pi}_I) \hat{A}^0 + e^2 \hat{\pi}_I^\dagger \hat{\pi}_I (\hat{A}_I^0)^2 + e^2 \hat{\pi}_I^\dagger \hat{\pi}_I \hat{A}_{I\mu} \hat{A}_I^\mu. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Esta expresión es similar a la Ec. (3.25), por lo que se puede revertir el procedimiento y ponerlo en términos de $\partial_0 \hat{\pi}_I$ y $\partial_0 \hat{\pi}_I^\dagger$. Adoptando el ordenamiento normal, se obtiene finalmente el hamiltoniano en el marco de Dirac de la forma

$$\hat{H}_I =: ie\hat{A}_{I\mu} \hat{\pi}_I^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \hat{\pi}_I - e^2 \hat{A}_{I\mu} \hat{A}_I^\mu \hat{\pi}_I \hat{\pi}_I^\dagger + e^2 \hat{\pi}_I^\dagger \hat{\pi}_I \hat{A}_I^0 \hat{A}_I^0 :. \quad (3.27)$$

En la Ec. (3.27), el último sumando no es covariante de Lorentz, alarmante a primera vista; sin

embargo, como veremos más adelante, se anulará por un contratérmino proveniente del orden 2.

Con el hamiltoniano de interacción ya determinado, se prosigue a encontrar la matriz de dispersión. Para simplicidad en la escritura, el subíndice I y el símbolo de operador se eliminan, sobreentendiendo que se está en el marco de interacción y se trabaja con operadores. La expansión de $\hat{S}$ es por tanto

$$\begin{aligned} S &= T \left\{ \mathbb{1} - i \int d^4x H_I(x) + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x d^4y H_I(x) H_I(y) + \dots \right\} \\ &= \mathbb{1} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Lo que se desea estudiar son los procesos en los que dos partículas entran, interactúan y salen, de manera que tendremos productos de la forma

$$\langle q' p' | S | p q \rangle = \langle 0 | a_{q'} c_{p' \lambda'} S c_{p \lambda}^\dagger a_q^\dagger | 0 \rangle, \quad (3.29)$$

éste último representa por ejemplo, la dispersión Compton.

Para aplicar el método perturbativo en este tipo de procesos, es necesario encontrar todas las posibles contracciones que se pueden dar al momento de usar el teorema de Wick. Para esta tarea, basta con tomar hasta el orden 2 de S , que explícitamente es

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= -i \int d^4x T \{ H_I(x) \} \\ &= -i \int d^4x T \{ : ie A_{I\mu} \pi_x^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi_x + e^2 A_{x\mu} A_x^\mu \pi_x \pi_x^\dagger - e^2 \pi_x^\dagger \pi_x A_x^0 A_x^0 : \} , \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T \{ H_{Ix} H_{Iy} \} \\ &= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x d^4y T \{ (ie A_x^\mu (\pi_x^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi_x) - e^2 A_{x\mu} A_x^\mu \pi_x \pi_x^\dagger + e^2 (A_x^0)^2 \pi_x^\dagger \pi_x) \\ &\quad \times (ie A_{y\nu} (\pi_y^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \pi_y - e^2 A_{y\nu} A_y^\nu \pi_y \pi_y^\dagger + e^2 (A_y^0)^2 \pi_y^\dagger \pi_y) \} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como son interacciones entre dos partículas, los operadores de creación y destrucción de momentos deben quedar apareados, de lo contrario, tras hacer la contracción, los productos internos se anularán por la ortogonalidad de los kets. Sólo los términos resultantes de orden e^2 son los que aportan a la amplitud invariante.

Se comienza con la contribución en $S^{(1)}$, que consta únicamente, de pares entre operadores de campo, y de creación-destrucción de momentos

$$\begin{aligned} \overline{b_p \pi_x} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^{3/2} (2E_q)^{1/2}} \langle 0 | b_p (a_q e^{-iqx} + b_q^\dagger e^{iqx}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^{3/2} (2E_q)^{1/2}} \langle 0 | b_p b_q^\dagger e^{iqx} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^{3/2} (2E_q)^{1/2}} \delta(p - q) e^{iqx} = N_p e^{ixp} , \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \overline{A_x^{\dagger\mu} c_q^\dagger} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2} (2E_k)^{1/2}} \langle 0 | \sum_s \epsilon_s^\mu (c_{ks} e^{-ikx} + c_{ks}^\dagger e^{ikx}) c_{q\lambda}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2} (2E_p)^{1/2}} \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu \delta(k - q) e^{-ikx} = N_q \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu e^{-iqx} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con procedimientos análogos se encuentran las otras contracciones, entre los operadores de campo

en posición y a_q, b_q, c_q . En resumen

$$\begin{aligned}\overline{\pi_x a_p^\dagger} &= N_p e^{-ikp} , & \overline{\pi_x b_p} &= N_p e^{ikp} , \\ \overline{\pi_x^\dagger a_p} &= N_p e^{ikp} , & \overline{\pi_x^\dagger b_p^\dagger} &= N_p e^{-ikp} , \\ \overline{A_x^\mu c_q} &= N_q \epsilon_\lambda^\mu e^{iqx} , & \overline{A_x^\mu c_q^\dagger} &= N_q \epsilon_\lambda^\mu e^{-iqx} .\end{aligned}$$

Todas las otras combinaciones posibles se anulan.

Ahora, para las contracciones que se encuentran en $S^{(2)}$ se parte de

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2 i^2}{2} \int d^4 x d^4 y T \{ e^2 : (\pi_x^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi_x A_x^\mu) (\pi_y^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \pi_y A_y^\nu) : \} ,$$

y se asume la convención, ∂_μ es respecto a x y ∂_ν a y . Los operadores a_q y $a_q^\dagger$ deben quedar apareados con el campo piónico, de modo que se toman sólo los términos tales que tengan la contracción

$$S_{B\gamma}^{(2)} = \frac{e^2}{2} \int d^4 x d^4 y T \{ : 2 \pi_x^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \pi_x \overline{A_x^\mu \pi_y^\dagger} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \pi_y A_y^\nu : \} , \quad (3.34)$$

donde el factor 2 surge de que la contracción $\overline{\pi_x \dots \pi_y^\dagger}$ es equivalente a $\overline{\pi_x^\dagger \dots \pi_y}$, tras renombrar las variables $x \leftrightarrow y$.

Para encontrar $\overline{\pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger}$, es conveniente analizar la derivada del propagador

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_y} \Delta_F(x-y) &= \partial_{\nu_y} \langle 0 | T \{ \pi_x \pi_y^\dagger \} | 0 \rangle \\ &= \partial_{\nu_y} \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) \pi_x \pi_y^\dagger + \theta(y^0 - x^0) \pi_y^\dagger \pi_x | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | -g_{\nu 0} \delta(x^0 - y^0) \pi_x \pi_y^\dagger + \theta(x^0 - y^0) \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \\ &\quad + g_{\nu 0} \delta(y^0 - x^0) \pi_y^\dagger \pi_x + \theta(y^0 - x^0) \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \pi_x | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta(y^0 - x^0) g_{\nu 0} [\pi_y^\dagger, \pi_x] + T \{ \pi_x^\dagger, \partial_{\nu_y} \pi_y \} | 0 \rangle ,\end{aligned} \quad (3.35)$$

donde $[\pi_y^\dagger, \pi_x]$ es conocida como la función de Pauli-Jordan, que después de expresar los campos por su transformada de Fourier queda explícita como

$$i\Delta(x-y) = [\pi_x, \pi_y^\dagger] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) . \quad (3.36)$$

El termino que contiene la expresión anterior en la Ec. (3.35) se anula al ser integrado con el delta de Dirac, pues los argumentos de ambas exponenciales se hacen 0. Se encuentra entonces la contracción como

$$\partial_{\nu_y} \Delta_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \pi_x^\dagger, \partial_{\nu_y} \pi_y \} | 0 \rangle = \overline{\pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger} . \quad (3.37)$$

Si se sigue derivando la Ec. (3.37) respecto a x^μ se encuentra que

$$\begin{aligned}i\partial_\mu \partial_{\nu_y} \Delta_F(x-y) &= \partial_\mu \partial_{\nu_y} \langle 0 | T \{ \pi_x \pi_y^\dagger \} | 0 \rangle \\ &= \partial_\mu \langle 0 | T \{ \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \} | 0 \rangle \\ &= \partial_\mu \langle 0 | (\theta(x^0 - y^0) \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger + \theta(y^0 - x^0) \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \pi_x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger + \theta(x^0 - y^0) \partial_\mu \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \\ &\quad - g_{\mu 0} \delta(y^0 - x^0) \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \pi_x + \theta(y^0 - x^0) \partial_\mu \pi_y^\dagger \partial_{\nu_y} \pi_x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \{ \partial_\mu \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger \} + \delta(x^0 - y^0) [\pi_x, \partial_{\nu_y} \pi_y] | 0 \rangle .\end{aligned} \quad (3.38)$$

El término del ordenamiento temporal en Ec. (3.38) se identifica como la contracción $\overline{\partial_\mu \pi_x \partial_{\nu_y} \pi_y^\dagger}$,

mientras que el último viene dado por

$$\begin{aligned} g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi_x, \partial_\nu \pi_y^\dagger] | 0 \rangle &= g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \partial_\nu \Delta(x - y) \\ &= g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \int_a \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} i p_\nu (e^{ip(x-y)} + e^{-ip(x-y)}) . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para $\nu \neq 0$ los sumandos espaciales se anulan mutuamente, lo que queda evidente al expresar el integrando como el producto de una función par con una impar $p_\nu (e^{ip(x-y)} + e^{-ip(x-y)}) = p_\nu \cos(p(x-y))$, y cuya integral es 0. Diferente es el caso $\nu = 0$, $\omega_p = p_0$

$$\begin{aligned} g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi_x, \partial_\nu \pi_y^\dagger] | 0 \rangle &= g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) g_{\nu 0} \left(i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2} i e^{ip(x-y)} + i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2} e^{-ip(x-y)} \right) \\ &= i g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) g_{\nu 0} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \end{aligned} \quad (3.40)$$

En resumen,

$$g_{\mu 0} \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi_x, \partial_\nu \pi_y^\dagger] | 0 \rangle = i g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y) . \quad (3.41)$$

Como consecuencia, la contracción de las derivadas de operadores de campo se puede escribir:

$$\partial_\mu \overline{\pi_x \partial_\nu \pi_y^\dagger} = i \partial_\mu \partial_\nu \Delta_F(x - y) - i g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y) . \quad (3.42)$$

Insertando los resultados de las contracciones en la Ec. (3.38) y Ec. (3.42) en la Ec. (3.34),

$$\begin{aligned} S_{B\gamma}^{(2)} &= e^2 \int d^4 x d^4 y T \{ (\pi_x^\dagger \partial_\mu \pi_x - \partial_\mu \pi_x^\dagger \pi_x) (\pi_y^\dagger \partial_\nu \pi_y - \partial_\nu \pi_y^\dagger \pi_y) :: A_x^\mu A_y^\nu \} \\ &= e^2 \int d^4 x d^4 y : (\pi_x^\dagger \partial_\mu \overline{\pi_x \pi_y^\dagger} \partial_\nu \pi_y - \partial_\mu \pi_x^\dagger \overline{\pi_x \pi_y^\dagger} \partial_\nu \pi_y \\ &\quad + \partial_\mu \pi_x^\dagger \overline{\pi_x \partial_\nu \pi_y^\dagger} \pi_y - \pi_x^\dagger \partial_\mu \overline{\pi_x \partial_\nu \pi_y^\dagger} \pi_y) :: A_x^\mu A_y^\nu : \\ &= e^2 \int d^4 x d^4 y : (\pi_x^\dagger \partial_\nu \pi_y i \partial_\mu \Delta_F(x - y) - \partial_\mu \pi_x^\dagger \partial_\nu \pi_y i \Delta_F(x - y) \\ &\quad + \partial_\mu \pi_x^\dagger \pi_y i \partial_\nu \Delta_F(x - y) - \pi_x^\dagger \pi_y (i \partial_\mu \partial_\nu \Delta_F(x - y) \\ &\quad - i g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y))) :: A_x^\mu A_y^\nu : \\ &= i e^2 \int d^4 x d^4 y : (\pi_x^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu} \Delta(x - y) \overleftrightarrow{\partial_\nu} \pi_y - i g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y)) :: A_x^\mu A_y^\nu : . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Trabajando la parte no covariante de la Ec. (3.43)

$$- i e^2 \int d^4 x d^4 y : \pi_x^\dagger \pi_y g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y) A_x^\mu A_y^\nu := - i e^2 \int d^4 x : \pi_x^\dagger \pi_x :: A_{x0} A_{x0} : . \quad (3.44)$$

Éste último término se cancela con el no covariante de $S^{(1)}$. Se puede probar que esto sucede con las partes no covariantes de todos los ordenes en la expansión de la matriz S , como se comenta en [23]. Por lo tanto, se pueden escribir sin las partes covariantes, para lo que se suele introducir el ordenamiento temporal modificado $\mathcal{T}$ que las ignora, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu \Delta_F(x - y) &= \langle 0 | \mathcal{T} \{ \partial_\nu \pi_x \partial_\mu \pi_y \} + \delta(x^0 - y^0) \overline{[\pi_x, \partial_\nu \pi_y]} | 0 \rangle \\ &= \partial_\nu \overline{\pi_x \partial_\mu \pi_y} , \end{aligned} \quad (3.45)$$

→ descartado

permitiendo reescribir sin alteración en el resultado el hamiltoniano de interacción, y los elementos de la matriz S , sin la parte no covariantes. En particular tenemos que

$$\begin{aligned} H_I &=: i e A_{I\mu} \pi_I^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu} \pi_I - e^2 A_{I\mu} A_I^\mu \pi_I \pi_I^\dagger : , \\ S_{B\gamma}^{(1)} &= i e^2 \int d^4 x \mathcal{T} \{ : A_{x\mu} A_x^\mu \pi_x \pi_x^\dagger : \} , \\ S_{B\gamma}^{(2)} &= i e^2 \int d^4 x d^4 y \mathcal{T} \{ : \pi_x^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu} \Delta(x - y) \overleftrightarrow{\partial_\nu} \pi_y A_x^\mu A_y^\nu : \} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Hasta este punto de nuestro desarrollo, se tienen las primeras contribuciones para los procesos de dos partículas. Con el fin de encontrar las reglas de Feynman se analizará el efecto Compton $\pi^- \gamma \rightarrow \pi^- \gamma$ dado por el producto Ec. (3.29).

Se prosigue a calcular el aporte de $S_{B\gamma}^{(1)}$ para la transición del estado inicial al final de la forma

$$\begin{aligned}
\langle q' p' | S_{B\gamma}^{(1)} | p q \rangle &= N_p N_{p'} N_k N_{k'} i e^2 \int d^4 x : (\overline{a_{p'\lambda'}} \pi_x^\dagger \pi_x a_{p\lambda}^\dagger \overline{c_{q'}} A_x^\mu \overline{A_{x\mu}} c_q^\dagger \\
&\quad + \overline{a_{p'\lambda'}} \pi_x^\dagger \pi_x a_{p\lambda}^\dagger \overline{c_{q'}} A_x^\mu \overline{A_{x\mu}} c_q^\dagger) : \\
&= N_p N_{p'} N_k N_{k'} i e^2 \int d^4 x e^{ip'x} e^{-ipx} (2e^{-i(q-q')x}) \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon^\mu(k', \lambda') \\
&= N_p N_{p'} N_k N_{k'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) 2ie^2 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon^\mu(k', \lambda') . \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Por otro lado las contribuciones del segundo orden $S^{(2)}$ son:

$$\begin{aligned}
S_{B\gamma}^{(2)} &= ie^2 \int d^4 x d^4 y \langle 0 | a_{p'} c_{q'} : \pi_x^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Delta(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \pi_y : A_x^\mu A_y^\nu : a_p^\dagger c_q^\dagger | 0 \rangle \\
&= ie^2 \int d^4 x d^4 y \langle 0 | a_{p'} c_{q'} \pi_x^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Delta(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \pi_y A_x^\mu A_y^\nu a_p^\dagger c_q^\dagger \\
&\quad + c_{p'} a_{q'} \pi_x^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Delta(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \pi_y A_x^\mu A_y^\nu a_p^\dagger c_q^\dagger | 0 \rangle \\
&= ie^2 \int d^4 x d^4 y \langle 0 | (\pi_x^\dagger b_p^\dagger) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Delta(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_\nu (b_{p'} \pi_y) (a_{q'} A_x^\mu A_y^\nu a_q^\dagger + a_{q'} A_x^\mu A_y^\nu a_q^\dagger) | 0 \rangle . \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Para proseguir con el cálculo, se tiene en cuenta la transformada de Fourier del propagador en el espacio de coordenadas

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) , \tag{3.49}$$

posteriormente se inserta esta forma del propagador en $S^{(2)}$ de la Ec. (3.48)

$$\begin{aligned}
S_{B\gamma}^{(2)} &= ie^2 N_{p'} N_{q'} N_p N_q \int d^4 x d^4 y \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_F(k) e^{ip'x} \overleftrightarrow{\partial}_\mu e^{-ik(x-y)} \overleftrightarrow{\partial}_\nu e^{-ipy} \\
&\quad \times [\epsilon^\mu(q', \lambda') \epsilon^\nu(q, \lambda) e^{iq'x} e^{-iqy} + \epsilon^\mu(q, \lambda) \epsilon^\nu(q', \lambda') e^{-iqx} e^{iq'y}] . \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Se puede simplificar el elemento sobre el que actúan las derivadas parciales como

$$e^{ip'x} \overleftrightarrow{\partial}_\mu e^{-ik(x-y)} \overleftrightarrow{\partial}_\nu e^{-ipy} = (-i)(k_\mu - p'_\mu)(-i)(k_\nu + p_\nu) e^{i(p'-k)x - i(p+k)y} , \tag{3.51}$$

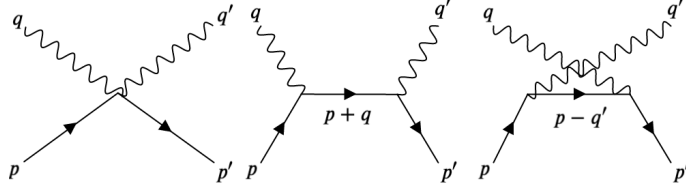


Figura 3.2: Diagramas de Feynman para dispersión Compton en SQED.

y se sustituye en $S^{(2)}$ de la Ec. (3.50), junto a las contracciones de los operadores de campo

$$\begin{aligned}
S_{B\gamma}^{(2)} &= e^2 N_{p'} N_{q'} N_p N_q \int d^4x d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\Delta_F(k) (-i)(k_\mu - p'_\mu) (-i)(k_\nu - p_\nu) \\
&\quad \times e^{i(p'-k)x - i(p-k)y} [\epsilon^\mu(q', \lambda') \epsilon^\nu(q, \lambda) e^{iq'x} e^{-iqy} + \epsilon^\mu(q, \lambda) \epsilon^\nu(q', \lambda') e^{-iqx} e^{iq'y}] \\
&= e^2 N_{p'} N_{q'} N_p N_q \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\Delta_F(k) (-i)(k_\mu + p'_\mu) (-i)(k_\nu + p_\nu) (2\pi)^8 \\
&\quad [\epsilon^\mu(q', \lambda') \epsilon^\nu(q, \lambda) \delta^{(4)}(p' + q' - k) \delta^{(4)}(p + q - k) \\
&\quad + \epsilon^\mu(q, \lambda) \epsilon^\nu(q', \lambda') \delta^{(4)}(p' - q - k) \delta^{(4)}(p - q' - k)] \\
&= N_{p'} N_{q'} N_p N_q e^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) [\\
&\quad (-i)(p + q + p')_\mu \epsilon^\mu(q', \lambda') i\Delta_F(k) (-i)(p + q + p)_\nu \epsilon^\nu(q, \lambda) \\
&\quad (-i)(p - q' + p')_\mu \epsilon^\mu(q, \lambda) i\Delta_F(k') (-i)(p - q' + p)_\nu \epsilon^\nu(q', \lambda')] . \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Juntando las contribuciones resultantes hasta orden 2 de la Ec. (3.47) y Ec. (3.52), se encuentra la amplitud invariante correspondiente, usando su definición en la Ec. (2.72)

$$S_{B\gamma}^{(1)} + S_{B\gamma}^{(2)} = N_{p'} N_{q'} N_p N_q (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) \mathcal{M} . \tag{3.53}$$

donde se identifica $\mathcal{M}$ explícitamente como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= 2ig^{\mu\nu} \epsilon_\mu(q', \lambda') \epsilon_\nu(q, \lambda) \\
&\quad + (-i)(p + q + p')_\mu \epsilon^\mu(q', \lambda') \Delta_F(p + q) (-i)(p + q + p)_\nu \epsilon^\nu(q, \lambda) \\
&\quad + (-i)(p - q' + p')_\mu \epsilon^\mu(q, \lambda) \Delta_F(p - q') (-i)(p - q' + p)_\nu \epsilon^\nu(q', \lambda') . \tag{3.54}
\end{aligned}$$

La amplitud encontrada viene de las contracciones en la Ec. (3.47) y Ec. (3.48), que reescritas juntas son de la forma

$$2\overline{a_{p'\lambda'}^\dagger \pi_x^\dagger a_{p\lambda}^\dagger} \overline{c_{q'\lambda'}^\dagger A_x^\mu A_{x\mu} c_q^\dagger} + (\overline{b_p^\dagger \pi_x^\dagger}) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Delta(x - y) \overleftrightarrow{\partial}_\nu (\overline{\pi_y b_{p'}}) (\overline{a_{q'}^\dagger A_x^\mu A_y^\nu a_q^\dagger} + \overline{a_{q'}^\dagger A_x^\mu A_y^\nu a_q^\dagger}) . \tag{3.55}$$

Según lo discutido en el capítulo anterior, se le pueden asociar entonces los diagramas de Feynman mostrados en la Fig. 3.2.

Con la amplitud, y a partir de los diagramas en la Fig. 3.2, se pueden deducir las reglas de Feynman a partir de la correspondencia de las contracciones y las partes del pictograma, mismas que discutiremos en la siguiente sección.

3.5. Reglas de Feynman para SQED

A continuación presentamos las reglas de Feynman para la SQED.

1. Para cada línea externa se asocia la interpretación y factores en $\mathcal{M}$:

- a) π^- entrando con momentum p
se asocia a un factor de 1.
- b) π^- saliendo con momentum p
se asocia a un factor de 1.
- c) π^+ entrando con momentum p
se asocia a un factor de 1.
- d) π^+ saliendo con momentum p
se asocia a un factor de 1.
- e) γ entrando agrega las componentes
del vector de polarización $\epsilon_\mu(k)$ con
 k el cuadrivector de onda..
- f) γ entrando añaden las componentes
del vector de polarización conjugado
 $\epsilon_\mu^*(k)$.



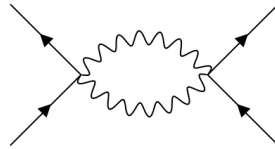
2. Cada línea interna esta asociada a un factor $i\Delta_F$, si es un pión o $i\Delta^{\mu\nu}$, si es un fotón:

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad i\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

3. La conservación del momentum se mantiene en cada vértice. Los vértices son de dos tipos: dos piones y un fotón tienen asociado a un coeficiente $-ie(p'^\mu - p^\mu)$, con p el momento inicial y p' el final; o de dos piones y 2 fotones, con un factor $2ie^2g^{\mu\nu}$.



4. Cada loop cerrado de dos fotones es asociado a un factor $1/2$.



Esta última norma se justifica en que por la tercera regla, habría que poner a cada vértice un factor 2, pero este tipo de diagramas viene asociado a los ordenamientos temporales de la forma $\mathcal{T}\{H_I(x)H_I(y)\}$, que conllevan a las contracciones del tipo

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(x)A^\mu(y)A^\nu(y)} + \overbrace{A_\mu(x)A_\nu(x)A^\mu(y)A^\nu(y)} , \quad (3.56)$$

las cuales, como en la Ec. (3.47), son iguales, y lanzan un factor 2, no 4 que sería la doble cuenta que compensa esta cuarta regla.

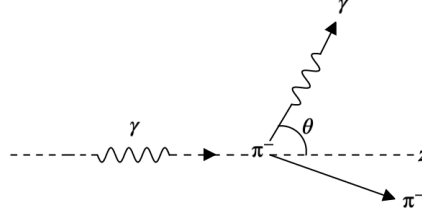


Figura 3.3: Dispersión Compton de un fotón por un pión.

3.6. Sección transversal de dispersión

Ya con las reglas de Feynman, se pueden construir las contribuciones a cualquier orden para la amplitud invariante de los procesos que involucran dos mesones π y dos fotones, para que a partir de ella podamos encontrar la sección transversal de dispersión.

3.6.1. Dispersión Compton

Para la dispersión de Compton $\pi^- \gamma \rightarrow \pi^- \gamma$, desde el sistema de referencia del laboratorio, como se ilustra en la Fig. (3.3), un pión en reposo es impactado por un fotón. Se definen las variables t, u, s como:

$$\begin{aligned} s &= (p + q)^2 = (p' + q')^2, \\ t &= (p - p')^2 = (q - q')^2, \\ u &= (p - q')^2 = (p' - q)^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

conocidas como las variables de Mandelstam.

Retomando la amplitud de la Ec. (3.54), y adoptando la notación para las polarizaciones $\epsilon = \epsilon(\vec{q}, \lambda)^*$ y $\epsilon' = \epsilon(\vec{q}', \lambda')^*$, se puede reescribir

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= e^2 \epsilon^\nu [2ig_{\mu\nu} + (-i)(p' + q' + p')_\mu \Delta_F(p + q)(-i)(p + q + p)_\nu \\ &\quad + (-i)(p' - q + p')_\nu \Delta_F(p - q')(-i)(p - q' + p)_\mu] \epsilon^\mu \\ &= \epsilon^\nu T_{\mu\nu} \epsilon^\mu, \end{aligned} \quad (3.58)$$

con $T_{\mu\nu}$ como el tensor de Compton.

Lo común en estos experimentos de dispersión es que no se conoce en cual de los 2 estados de polarización están los fotones, de manera que la amplitud invariante cuadrada resultante $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, para el proceso que se espera medir, debe promediarse respecto a los estados iniciales posibles y sumar sobre los finales. En este caso, son 2 los estados factibles de polarización para el fotón inicial de modo que la amplitud invariante al cuadrado es

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon^\mu T_{\mu\nu} \epsilon'^\nu (\epsilon^\sigma T_{\sigma\eta} \epsilon'^\eta)^* . \quad (3.59)$$

Usando la identidad $\sum_\lambda \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \epsilon(\vec{p}, \lambda)^\nu = -g^{\mu\nu}$, se tiene simplemente:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} . \quad (3.60)$$

Tras sustituir en la Ec. (3.60) el tensor Compton y su conjugado explícitamente, se llega a

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \frac{e^4}{2} \left(4^2 + \frac{(2p+q)^2(2p'+q')^2}{(t-m^2)^2} + \frac{(2p-q')^2(2p'-q)^2}{(u-m^2)^2} \right. \\
& + \frac{2}{(t-m^2)(u-m^2)} (2p+q)_\mu (2p'-q)^\mu (2p'+q')_\nu (2p-q')^\nu \\
& \left. - \frac{4}{t-m^2} (2p+q)_\mu (2p'+q')^\mu - \frac{4}{u-m^2} (2p-q')_\mu (2p'-q)^\mu \right). \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Considerando que para los fotones se cumple $q^2 = q'^2 = 0$, se tienen las siguientes relaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned}
p \cdot p' &= \frac{m^2 - t}{2}, & q \cdot q' &= -\frac{t}{2}, \\
p \cdot q &= p' \cdot q' = \frac{s}{2} - m^2, & p \cdot q' &= p' \cdot q = \frac{m^2 - u}{2}, \\
s+u+t &= 2m^2. \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Utilizando las expresiones anteriores para poner a $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ completamente en términos de s, u y t , se obtiene de la Ec. (3.61) que

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \frac{e^4}{2} \left[4^2 + 4 \left(\frac{s+m^2}{s-m^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{u+m^2}{u-m^2} \right)^2 \right. \\
& + \frac{1}{(s-m^2)(u-m^2)} \left[2(t-4m^2)^2 + 4t \left(6m^2 - \frac{5}{2}t \right) \right] \\
& \left. + 8 \left(\frac{u}{s-m^2} + \frac{s}{u-m^2} \right) \right]. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Ahora, del sistema de referencia, se toman los cuádrimomentos iniciales genéricos: $p = (m, 0, 0, 0)$, $\omega = (\omega, 0, 0, \omega)$ y para el fotón final $\omega' = \omega'(1, \sin\theta, 0, \cos\theta)$. De aquí que las variables de Mandelstam explícitamente dan

$$\begin{aligned}
s &= m^2 + 2m\omega, \\
u &= m^2 - 2m\omega', \\
t &= -2m(\omega - \omega') = -2\omega\omega'(1 - \cos^2\theta). \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Es de hacer notar que t , implica la conocido relación de Compton para longitud de onda:

$$\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{1}{m} (1 - \cos^2\theta). \quad (3.65)$$

Simplificando Ec. (3.63) con Ec. (3.64) se llega a la expresión:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2(1 + \cos^2\theta). \quad (3.66)$$

Los detalles algebraicos de la simplificación, son extensos aunque directos, por lo que se omiten. Para calcular la sección transversal, se sustituye $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ en la regla de oro de Fermi Ec. (2.104), tal

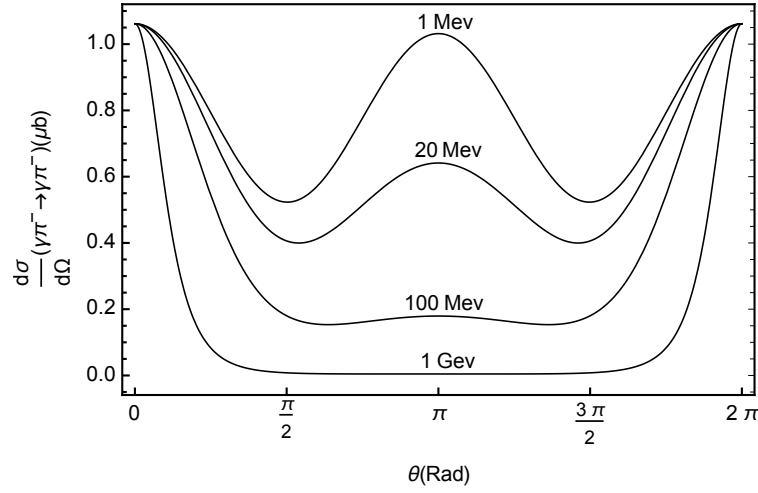


Figura 3.4: Sección diferencial para Compton de piones.

que:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{4m\omega} \int 2e^2(1 + \cos^2\theta)(4\pi)^2 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} \\
 &= \frac{\alpha^2}{m\omega} \int (1 + \cos^2\theta) \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) \delta(p'^2 - m^2) \Theta(p'^0) d^4p' \frac{d^3q'}{\omega'} \\
 &= \frac{\alpha^2}{m\omega} \int_0^{m+\omega} (1 + \cos^2\theta) \delta(2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta)) \omega' d\omega' d\Omega \\
 &= \frac{\alpha^2}{2m^2\omega} \int \frac{\omega'}{|1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)|} (1 + \cos^2\theta) d\Omega .
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

A fin de simplificar, vale la pena usar la relación de Compton (3.64), y encontrar la razón ω/ω' :

$$\frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta) , \tag{3.68}$$

con lo que finalmente se obtiene la sección transversal diferencial, que volviendo al sistema SI es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(\alpha\hbar)^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 (1 + \cos^2\theta) . \tag{3.69}$$

En el caso de bajas energías, el fotón y el pión, no transmiten el suficiente momentum, como para que se dispersen en ángulos grandes respecto a z , en conjunto con la variable t en la Ec. (3.64), implica que $\omega \approx \omega'$. Aplicando esta aproximación en la Ec. (3.69) se tiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} (1 + \cos^2\theta) , \tag{3.70}$$

este resultado recuperar el límite clásico para la dispersión de cargas eléctricas por luz sin polarizar, obtenida por Thompson en la que no se tiene en cuenta el espín de las partículas, y la luz es tratada como una onda que incide sobre la partícula cargada haciendola oscilar y por tanto emitir radiación electromagnética por aceleración.

Para proseguir con los cálculos, se especifica la masa del pión proporcionada por el Particle Data Group [24]:

$$m \approx 139.57 \text{ MeV} . \tag{3.71}$$

En Fig. (3.4) se muestra gráficamente la sección diferencial en función del ángulo θ respecto al eje z para diferentes energías de radiación. De la gráfica se puede decir que conforme se aumenta la energía, la distribución angular de la función tiende a ser mayor para ángulos de transmisión, es decir las trayectorias se concentran al rededor del ángulo 0 y disminuyendo para reflexiones o dispersiones en direcciones abruptas, indicando que como es de esperarse, a mayor energía la luz adquiere un comportamiento corpuscular, en contraste a las bajas energías aproximadas por la Ec.

(3.70) donde se comporta como una onda.

Para este fenómeno no se cuentan con datos experimentales con los que comparar, pues los piones se producen en medios con partículas de fondo que interfieren con la medición. En la practica, para estudiar indirectamente el efecto Compton se analizan datos de procesos en los que contribuye a la amplitud, por ejemplo el efecto Primakoff de desaceleración con núcleos $\pi^- Z \rightarrow \pi^- Z \gamma$ o la fotoproducción de piones a partir de protones $\gamma p \rightarrow \gamma \pi^+ n$, teniendo mediciones en las que está implícito como se discute con detalle en [2].

Se concluye que pese a la ausencia de datos, con lo desarrollado se evidencia que hay coincidencia con el límite clásico, de aquí que la SQED tiene éxito al recrear para bajas energías el comportamiento de las partículas cargadas, en el que no hay efectos por espín.

3.6.2. Fotoemisión de piones

En esta sección, se estudiará la fotoemisión de piones $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ desde el centro de masa, motivados por el hecho de que hay datos experimentales con los que contrastar resultados teóricos. El proceso se esquematiza en Fig. (3.5).

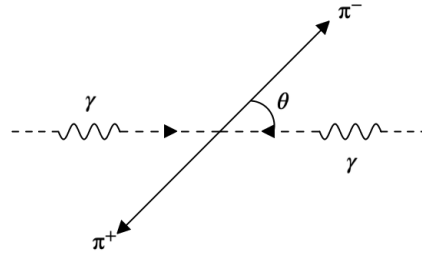


Figura 3.5: Fotoemisión de piones desde en CM.

Como se muestra en Fig. (3.6), se construyen los diagramas que describen este proceso hasta el orden dos.

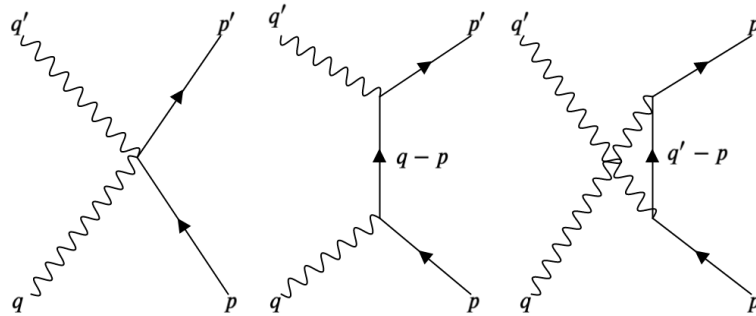


Figura 3.6: Diagramas para la fotoemisión de piones.

Usando las reglas de Feynman, las amplitudes correspondientes vienen dadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^t &= (-ie)(p - q + p)_\mu \epsilon^\mu \Delta_F(t) (-p' + q' - p')_\nu \epsilon'^\nu, \\ \mathcal{M}^u &= (-ie)(p - q' + p)_\nu \epsilon'^\nu \Delta_F(u) (-p' + q - p')_\mu \epsilon^\mu, \\ \mathcal{M}^s &= 2ie^2 \epsilon_\mu \epsilon'_\nu g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Es de hacer notar, que los diagramas son los mismos, que para la dispersión Compton, pero rotados, y las amplitudes de ambos procesos Ec. (3.61), junto a Ec. (3.72), se diferencian en que $p' \rightarrow -p'$ y

$q \rightarrow -q$. Esto se explica tomando por ejemplo $s = (p + q)^2$, si p o q son negativos, significaría que la partícula viaja en la dirección contraria, no solo en el espacio, también en el tiempo. Con ayuda de los diagramas esto se entiende físicamente como una antipartícula yendo hacia el futuro pero en la dirección opuesta. De aquí que el canal s de Compton $\pi^- \gamma \rightarrow \pi^- \gamma$ también sea el $t = (p - q)^2$ para la fotoemisión $\gamma \gamma \rightarrow \pi^+ \pi^-$. De forma general implica, que si un proceso se puede dar, también es posible el que cambia una partícula, por su antipartícula en la trayectoria contraria. A esta relación se le llama simetría de cruce.

Como la amplitud invariante para la dispersión Compton Ec. (3.63), es una función analítica de s, t, u , para que represente la fotoemisión por la simetría de cruce, sólo hay que realizar la sustitución $s \rightarrow t, t \rightarrow s$, además de recordar, que se promedia sobre los estados iniciales de polarización, y se suma sobre los finales; es decir que se divide por 4 y no 2, se llega a la amplitud cuadrada:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \frac{e^4}{4} \left[4^2 + 4 \left(\frac{t + m^2}{t - m^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{u + m^2}{u - m^2} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{(t - m^2)(u - m^2)} \left[2(s - 4m^2)^2 + 4s \left(6m^2 - \frac{5}{2}s \right) \right] \\ & \left. + 8 \left(\frac{u}{t - m^2} + \frac{t}{u - m^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Haciendo uso de las ligaduras propias del centro de masa: $\omega_q = \omega_{q'}$, $E_p = E_{p'}$, $\vec{q} = -\vec{q}'$ y $\vec{p} = -\vec{p}'$ se pueden encontrar las variables de Mandelstam explícitamente como:

$$\begin{aligned} t &= m^2 - 2E\omega + 2|\vec{p}|\omega x , \\ u &= m^2 - 2E\omega - 2|\vec{p}|\omega x , \\ s &= 4\omega^2 , \end{aligned} \quad (3.74)$$

con $\cos\theta = x$. Se Inserta la amplitud invariante en la sección transversal de dispersión Ec. (2.112), y teniendo en cuenta, que para la energía del CM (masa invariante) se tiene la igualdad $E = 2\omega$, la sección transversal esta dada por:

$$\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{e^2} \right)^2 \frac{1}{E^3} \sqrt{\frac{E^2}{4} - m^2} \int_{x_0}^{x_1} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dx . \quad (3.75)$$

En este punto, se vuelve del sistema de unidades naturales al SI, e integrando Ec. (3.75), se llega finalmente a la expresión:

$$\sigma = \frac{2\pi (\alpha \hbar c)^2 \rho}{E^3} \left[x + \frac{16m^4 x}{E^4 + (4m^2 - E^2)(xE)^2} + \frac{4m^2(2m^2 - E^2)}{E^3 \rho} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho x}{E} \right) \right]_{x_0}^{x_1} , \quad (3.76)$$

con $\rho = \sqrt{E^2/4 - m^2}$ y la masa de Ec. (3.71).

Experimentalmente se tiene que los procesos con piones son difíciles de estudiar, pues están de manera virtual al interior de los núcleos atómicos, y no se conoce su distribución en los mismos; o se producen con colisiones en conjunto a otras partículas, que dificultan su estudio exclusivo[7].

Con el fin de estudiar la fotoemisión, se opta por usar el proceso $e^- e^- \rightarrow e^- e^- \pi^+ \pi^-$ [6, 25], que está entre los más limpios. Se aprovecha el paso intermedio $e^- e^- \rightarrow e^- e^- \gamma^* \gamma^*$ con γ^* como fotón virtual. Para las colisiones en que los electrones se dispersan en ángulos pequeños, los γ^* se pueden considerar casi reales, lo que sirve para aproximarse al proceso deseado $\gamma \gamma \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Como los ángulos no deben ser grandes, lo usual es que los datos se toman en el rango $|\cos\theta| < 0.6$ [10].

En la Fig.(3.7), se muestra el σ teórico encontrado, y datos del detector Mark II en el SLAC[25]. De la Fig.(3.7) se observa primeramente, que la curva y los datos son de los mismos ordenes de magnitud. Se tiene que la sección transversal se anula aproximadamente en $0.278 GeV/c^2$, lo que coincide con la energía umbral de dos veces la masa en reposo, para producir piones.

Para el rango de energías de 0.2 a $0.9 GeV/c^2$ la curva cae entre las barras de erro de los primeros

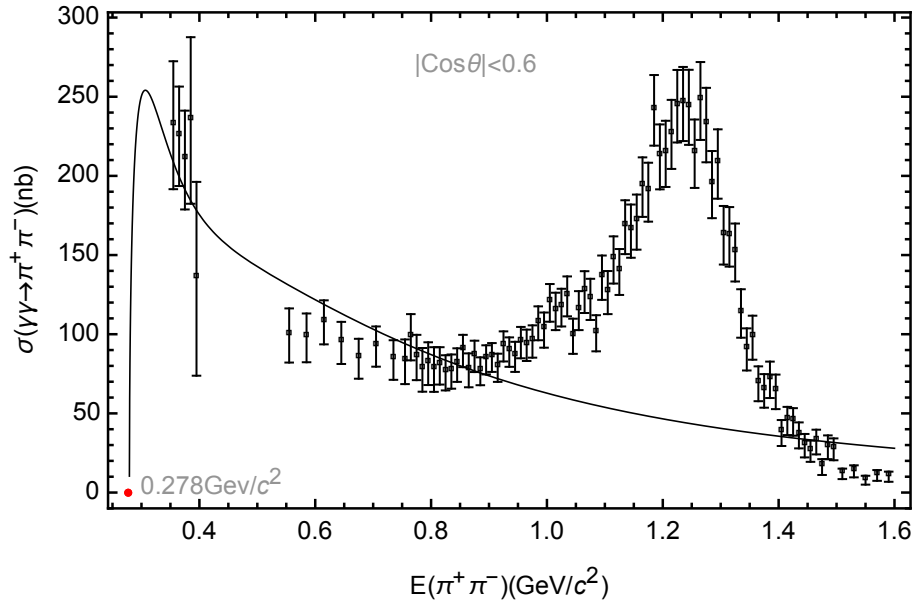


Figura 3.7: Sección transversal de dispersión para fotoemisión de piones cargados en función de la energía del centro de masa.

datos al rededor del máximo. Para estos datos la incertidumbre es grande y no se puede concluir que se tenga una descripción precisa del comportamiento por lo que nos podemos limitar a afirmar que el modelo es una descripción aceptable en las proximidades del máximo hasta mejorar en la precisión de las medidas y que se puede considerar que la luz en ese rango de baja energía, no ve los quarks constituyentes de los piones, sino los piones como partícula puntual, lo que es hipótesis del modelo tratado. Conforme la curva se distancia del máximo, entre $0.4\text{GeV}/c^2$ y $0.6\text{GeV}/c^2$, no hay suficientes datos para sugerir una semejanza, y los que hay llegan a coincidir con la curva, por lo tanto respecto a este rango no se pueden hacer conclusiones. Desde $0.6\text{GeV}/c^2$ hasta aproximadamente $0.9\text{GeV}/c^2$ la curva cae en el error de la mayoría de los datos.

Al incrementar la energía de la luz, pierde validez el tratar de los piones como puntuales y entra a jugar la estructura interna, es de esperarse que a este punto el modelo falle, en concordancia a la Fig.(3.7). La sección en la que se da discrepancia insalvable, de los datos y el resultado teórico, se puede dividir en dos partes: entre 0.9 y $1.4\text{GeV}/c^2$ se comienza a dar la suficiente energía como para que se creen las llamadas resonancias, estados intermedios entre los fotones iniciales y los piones finales, que son partículas que se desintegran rápidamente vía interacción de color. Y de $1.4\text{GeV}/c^2$ en adelante, los fotones tienen tanta energía como para interactuar individualmente con los componentes del pion, por lo que la última parte de la gráfica está regida por la dinámica de los quarks.

Con lo anterior se puede decir que, en un rango en que los fotones tienen una energía menor a $0.9\text{GeV}/c^2$, hay congruencia parcial entre los datos experimentales y el resultado teórico del modelo propuesto, siendo este último una descripción aproximada pero no suficientemente precisa del fenómeno. Por lo que es útil como primera aproximación, y sirve de referencia para modelos más realistas.

Capítulo 4

Conclusiones

A partir de la SQED se modelaron las interacciones electromagnéticas de piones, trabajando la dispersión Compton $\pi^\pm\gamma \rightarrow \pi^\pm\gamma$ y la fotoemisión $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$. En el primer canal a bajas energías, se recuperó la sección transversal de dispersión de Thompson para interacción radiación materia. Mediante la simetría de cruce se pudo establecer una relación entre ambos procesos siendo capaces de calcular a partir de la amplitud de Compton la sección de dispersión para fotoemisión. Posteriormente se realizó un análisis fenomenológico para la sección transversal de la fotoemisión donde comparamos con los datos experimentales del experimento SLAC, y se encontró un acuerdo parcial para los fotones con masa invariante menor a 0.9GeV .

El hecho de que la fotoemisión haya sido modelada en el régimen de bajas energías, se explica a través de que en este rango, la longitud de onda de los fotones es lo suficientemente grande para que el campo electromagnético no vea la estructura de los piones, y se de la interacción de forma aproximadamente puntual. A su vez, la discrepancia de los datos en la región entre 0.9GeV y 1.4GeV es manifestación del hecho en que se cuenta con la suficiente energía para producir los estados excitados conocidos como resonancias. Por otro lado, después de los 1.4GeV , los fotones tienen suficiente energía como para interactuar individualmente con los quarks.

Haber obtenido resultados acordes al fenómeno que se modeló, confirma los métodos tratados: se logra una descripción cuántica partiendo de campos clásicos empleando el método de la cuantización canónica, donde las variables canónicas que se promueven a operadores son los campos y sus momentos generalizados, y por otro lado, que se genera el acople al electromagnetismo de una teoría cuyo lagrangiano es invariante bajo cambios de fase compleja globales, promoviendo la invarianza global a local.

Con lo anterior se puede concluir que, los piones cargados interactuando con el electromagnetismo, pueden ser descritos aproximadamente aunque no con precisión por la SQED, para procesos en los que la longitud de onda de los fotones es grande, tal que el campo electromagnético percibe a los piones como puntos sin estructura.

Por último, se puede agregar que, actualmente la electrodinámica de los piones es de interés por su relevancia para determinar la estructura interna de los mismos, y por ende tener información de la QCD a bajas energías, como es el caso de la determinación de los coeficientes de polarización eléctrica α_π y magnética β_π discutido a fondo en [26]. La importancia del entendimiento, viene de la mano con la perspectiva de mejores mediciones de estas cualidades electromagnéticas, que se vienen realizando como se proyecta en [8], por la colaboración COMPASS del CERN, el GlueX en el Jefferson-Lab[27] o el laboratorio Frascati. El panorama a futuro a partir de lo desarrollado, será optar por modelos más realistas en los que se agregue información sobre los quarks y la estructura de los piones con lagrangianos efectivos, como es la teoría quirial de perturbaciones.

Bibliografía

- [1] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particle*, 2nd ed. (WILEY, 2008) Chap. 1,2.
- [2] M. Moinester and S. Scherer, International Journal of Modern Physics A **34** (2019), 10.1142/S0217751X19300084, arXiv:arXiv:1905.05640v1 .
- [3] A. S. Kronfeld, Journal of Physics: Conference Series **46**, 147 (2006), arXiv:0607011 [hep-lat] .
- [4] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, 2nd ed. (WILEY, 2010) Chap. 3.
- [5] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, 4th ed. (Springer, 2009) p. Sección 4.
- [6] S. J. Brodsky, T. Kinoshita, and H. Terazawa, Physical Review D **4**, 1532 (1971).
- [7] J. Friedrich, “Goldstone nature of the pion confirmed,” (2015).
- [8] R. Miskimen, A. Mushkarenkov, D. Lawrence, and E. Smith, Letter of Intent submitted to PAC **39** (2014).
- [9] N. Kaiser and J. M. Friedrich, Nuclear Physics A **812**, 186 (2008), arXiv:arXiv:0806.2614v2 .
- [10] M. R. Pennington, Acta Physica Polonica B **37**, 1 (2005), arXiv:0511146 [hep-ph] .
- [11] J. e. a. Ahrens, The European Physical Journal A **23**, 113 (2005).
- [12] A. Roussarie, D. Burke, G. Abrams, M. Alam, C. Blocker, A. Blondel, A. Boyarski, M. Breidenbach, W. Carithers, W. Chinowsky, *et al.*, Physics Letters B **105**, 304 (1981).
- [13] R. Brandelik, W. Braunschweig, K. Gather, F. Kirschfink, K. Lübelmeyer, H.-U. Martyn, G. Peise, J. Rimkus, H. Sander, D. Schmitz, *et al.*, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **10**, 117 (1981).
- [14] H. J. e. a. Behrend, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **56**, 381 (1992).
- [15] A. Courau, R. Johnson, S. Sherman, W. Atwood, P. Baillon, B. C. Barish, G. Bonneaud, G. Donaldson, R. Dubois, M. Duro, *et al.*, Physics Letters B **147**, 227 (1984).
- [16] H. Aihara, M. Alston-Garnjost, R. Avery, A. Barbaro-Galtieri, A. Barker, A. Barnes, B. Barnett, D. Bauer, H.-U. Bengtsson, D. Bintinger, *et al.*, Physical Review Letters **57**, 404 (1986).
- [17] I. Adachi, M. Doser, R. Enomoto, H. Fujii, K. Fujii, T. Fujii, J. Fujimoto, K. Fujiwara, N. Fujiwara, H. Hayashii, *et al.*, Physics Letters B **234**, 185 (1990).
- [18] A. Blinov, V. Blinov, A. Bondar, A. Bukin, V. Groshev, S. Klimenko, G. Kolachev, A. Onuchin, V. Panin, I. Y. Protopopov, *et al.*, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **53**, 33 (1992).
- [19] T. e. a. Mori, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **75** (2007), 10.1103/PhysRevD.75.051101.
- [20] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, 2nd ed. (WILEY, 2010) Chap. 1,2.
- [21] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur* (Oxford University Press, 2014) Chap. 3.
- [22] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, 1st ed. (Westview Press, 1995) p. section 4.

- [23] W. Greiner, J. Reinhardt, and D. Bromley, *Physica Scripta*, 1st ed., 0 (Springer, 1996).
- [24] M. e. a. Tanabashi, *Physical Review D* **98**, 30001 (2018).
- [25] J. Boyer, F. Butler, G. Gidal, G. Abrams, D. Amidei, A. Baden, M. Gold, L. Golding, G. Goldhaber, J. Haggerty, *et al.*, *Physical Review D* **42**, 1350 (1990).
- [26] M. Moinester, in *Proceedings of the 8th International Conference on Quarks and Nuclear Physics (QNP2018)*, 4 (Journal of the Physical Society of Japan, 2017) pp. 0–8.
- [27] M. Ito, “Pion Polarizability, SESAPS 2019,” <https://halldweb.jlab.org/doc-public/DocDB/ShowDocument?docid=4260> (2019).

