

Sobre el cálculo de masa de agujeros negros

Steven Sanchez Perlaza

Septiembre, 2023

Universidad del Valle



Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Física

Trabajo presentado para optar por el título de Físico

Sobre el cálculo de masa de agujeros negros

Steven Sanchez Perlaza

<i>Evaluador</i>	Dr. Luis Norberto Granda Velásquez Universidad del Valle
<i>Director</i>	Dr. Gerardo Velázquez Rodríguez Arkansas State University Campus Querétaro
<i>Codirector</i>	Dr. Hernán Ocampo Durán Universidad del Valle

Septiembre, 2023

Steven Sanchez Perlaza

Sobre el cálculo de masa de agujeros negros

Trabajo presentado para optar por el título de Físico, Septiembre, 2023

Evaluador: Dr. Luis Norberto Granda Velásquez

Director: Dr. Gerardo Velázquez Rodríguez

Codirector: Dr. Hernán Ocampo Durán

Universidad del Valle

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Física

Calle 13 # 100-00, Edificio 320, Ciudadela Universitaria Meléndez

76001 - Cali

Resumen

Desde el desarrollo de la teoría de la relatividad general en 1915, se ha buscado calcular las cargas conservadas en los espaciotiempos curvados. Con el surgimiento de los agujeros negros en 1916 como solución a las ecuaciones de campo de Einstein, y su posterior estudio termodinámico en los años 70, se han utilizado distintos métodos para encontrar las cantidades conservadas asociadas a estos astros. En este trabajo se presentan tres métodos para el cálculo de cargas conservadas en diferentes tipos de espaciotiempo

El primero de ellos, conocido como método ADM, fue desarrollado por Arnowitt, Deser y Misner en 1962 y considera un espaciotiempo globalmente hiperbólico y asintóticamente plano para obtener la masa del agujero negro de Schwarzschild. El segundo método, descubierto en 1982 por Abbott y Deser y posteriormente perfeccionado por Deser y Tekin en 2002 y 2003, denominado método ADT, amplía el estudio de cargas conservadas, ya que se centra en aplicar el teorema de Noether utilizando las simetrías asintóticas de una métrica de fondo (es decir, sus vectores Killing), la cual será perturbada para construir el espaciotiempo del agujero negro que hay que analizar. En este caso se estudió el agujero negro de Schwarzschild-dS. Finalmente, ambos métodos se extienden al utilizar el método cuasilocal, que fue desarrollado por Kim, Kulkarni y Yi en 2013. Este método contiene al método ADT en su forma procedimental, pero difiere en su enfoque, ya que permite que la métrica de fondo en cuestión sea genérica (no necesariamente una solución de vacío). En conjunto con una corriente de Noether off-shell y unas direcciones fijas contravariantes Killing, el método de Kim, Kulkarni y Yi permite la construcción de una carga conservada de manera cuasilocal, relacionando los potenciales de Noether y ADT de manera off-shell, e integrando los factores libres de una solución por un camino de parámetros. Este método se utilizó para calcular la masa del agujero negro de Lifshitz.

Palabras clave: Teoría de la relatividad general, agujeros negros, cargas conservadas, masas de agujeros negros, termodinámica de agujeros negros, método ADM, método ADT, método Cuasilocal, simetrías asintóticas, agujero negro de Schwarzschild, agujero negro de Lifshitz.

Abstract

Since the development of the theory of general relativity in 1915, efforts have been made to calculate the conserved charges in curved spacetimes . With the emergence of black holes in 1916 as a solution to Einstein's field equations and their subsequent thermodynamic study in the 1970s, various methods have been used to find the conserved quantities associated with these celestial bodies. This paper presents three methods for calculating conserved charges in different types of spacetime.

The first of them was developed by Arnowitt-Deser-Misner in 1962 and is known as the ADM method (with the initials of its creators). It considers a globally hyperbolic and asymptotically flat spacetime for the calculation of the mass of the Schwarzschild black hole. The second method was discovered in 1982 by Abbot-Deser and later perfected by Deser-Tekin in 2002 and 2003, called the ADT method. This extends the study of conserved charges by focusing on applying the Noether theorem using the asymptotic symmetries for a background metric (i.e. its Killing vectors), which will be perturbed to construct the black hole spacetime under analysis. In this case, the Schwarzschild-dS black hole was studied. Finally, both methods are extended by using the Quasilocal method, which was developed by Kim-Kulkarni-Yi in 2013. It contains the ADT method in its procedural form, but it differs in its essence, as it enables the background metric under consideration to be generic (not necessarily a vacuum solution). This, together with an off-shell Noether current and fixed contravariant Killing directions, allows the construction of a conserved charge in a quasi-local way by relating the off-shell Noether and ADT potentials and integrating the free factors of a solution along a parameter path. This method was used to calculate the mass of the Lifshitz black hole.

Keywords: General relativity, black holes, conserved charges, black hole masses, black holes thermodynamics, ADM method, ADT method, Quasilocal method, asymptotic symmetries, Schwarzschild black hole, Lifshitz black hole.

Agradecimientos

”...una última dicotomía, una que atraviesa esta profesión con demasiada frecuencia: No tienes que elegir entre ser científico y ser compasivo. Puedes ser ambas.

— Robert Sapolsky

Conferencia sobre las diferencias individuales

Para comenzar, agradezco a Dios. Él es el *leitmotiv* de mi vida, ha sido mis significados y ha dado sentido a todos mis significantes, ha puesto la pasión por la física y me ha dado un propósito de vida. A mi abuela Amparo, gracias por soportarme, y apoyarme con amor durante todo este tiempo de estudio. A mi padre Walter, quien ha sido mi filósofo favorito desde que tengo conciencia, pues me ha inspirado a preguntarme por todo en este universo. Así mismo, gracias a mi madre Lorena, por enseñarme sobre el amor, la amabilidad, y el carácter; además, a ambos les debo mi estudio, mi formación como persona y su apoyo incondicional en mis sueños.

Especialmente, agradezco al Dr. Gerardo Velázquez Rodríguez, quien me adoptó y guió en medio de todo este proyecto. Él me ha hecho una versión mejorada de mí mismo, no podría haber trabajado con una mejor persona. Muchas gracias por todo el apoyo, tiempo, conocimiento y explicaciones. He crecido enormemente con todos los consejos brindados. Además, he aprendido mucho sobre Relatividad General al estar junto a un gran profesor e investigador apasionado.

Agradezco inmensamente a mis cuatro mentores de vida:

Primero, al Dr. Alejandro Perdomo Ortiz, quien me ha inspirado como científico desde que tenía 12 años. Gracias por aconsejarme y ayudarme a tomar las mejores decisiones en mi carrera, además de guiarme en la vida fuera de esta.

Segundo, al Dr. Hernán Ocampo Durán, quien desde mis 13 años me enseñó que "debo aprender primero a gatear para luego intentar correr" en la academia y en la vida. Estoy muy

agradecido por todo el conocimiento que pude aprender en todos los cursos junto a él, por sus consejos y apoyo en mis metas académicas.

Tercero, a Carlos Bermeo Rodríguez, quien me ha enseñado siempre que "Dios es más que ciencia". Gracias por siempre estar en mis mejores y peores momentos, siempre agradeceré los tiempos de consejos y de palabras de apoyo.

Cuarto, a Julián Echeverri Henao, quien me ha enseñado que "todo el mundo del conocimiento está irremediablemente conectado entre sí" y que, por ende, "el que sólo sabe de física, no sabe de física". Gracias por tantas enseñanzas, por las horas y horas aprendiendo temas apasionantes. Además, le agradezco por tomarse el tiempo de leer el manuscrito de la tesis y darme consejos de redacción.

Finalmente, le agradezco al Dr. Héber Mesa Palomino, pues ha hecho crecer mi espíritu matemático con sus clases y consejos. Soy un mejor físico gracias a él. También agradezco a mis compañeros de cohorte: José Luis, Diego, Daniel, Nikolas, Jhoan y Camilo, quienes han sido un gran equipo y apoyo durante el tiempo de esta carrera. Agradezco a Isabella Becerra y Camilo Taborda por ofrecerme su amistad sincera, su apoyo fue fundamental para culminar la carrera. Les agradezco inmensamente a mis amigos matemáticos: Camilo Velasco, Samir Herrera, Geiler Galindo, José Bastidas, Daniel Londoño, por los increíbles momentos platicando sobre temas profundos y divertidos. Junto a ellos, pude crecer de manera extraordinaria.

Dedicatoria

A Amparo, mi amada abuela, por siempre demostrarme que el amor se expresa con hechos más que con palabras, e inspirarme a ser fuerte frente a la entropía creciente de la vida.

Contents

1	Introducción	1
1.1	Motivación y Declaración del Problema	3
1.1.1	Algunas referencias	4
1.2	Estructura de la tesis	4
2	Método ADM	7
2.1	Descomposición $3 + 1$ del espaciotiempo	7
2.2	Funciones Shift y Lapse	8
2.3	Componentes de la métrica inducida	9
2.4	Descomposición del tensor de Riemann	11
2.5	Formulación Hamiltoniana en relatividad general	15
2.5.1	Acción de Einstein-Hilbert en la descomposición $3+1$	15
2.5.2	Hamiltoniano y variables canónicamente conjugadas	18
2.6	Masa ADM	22
2.6.1	Masa del agujero negro de Schwarzschild	24
3	Método ADT	27
3.1	Cantidades conservadas	28
3.1.1	$E(\xi)$ como una integral de flujo para un superpotencial	30
3.2	Masa del agujero negro dS-Schwarzschild	34
4	Método Cuasilocal	41
4.1	Corriente y potencial de Noether off-shell	42
4.2	Corriente y potencial ADT off-shell	45
4.3	Masa del agujero negro Lifshitz 3-dimensional	49
4.4	Corroboración de la primera ley de la termodinámica para el agujero negro Lifshitz 3-dimensional	53
5	Resultados y conclusiones	55
5.1	Trabajo hacia el futuro	56
A	Cálculos suplementarios	59
A.1	Expansión de las ecuaciones de movimiento	59
A.1.1	Términos lineales	62
A.1.2	Divergencia covariante de las ecuaciones linearizadas	63

A.2	Reescritura del tensor de energía-momento	66
A.2.1	Antisimetría de $F^{\mu\alpha}$	67
A.3	Vectores Killings para De Sitter	68
A.4	Expresión explícita de $E(\xi)$ en términos de la perturbación	73
A.5	Sustitución de la perturbación en la expresión de la energía Killing	80
A.6	Cálculo de la corriente ADT	82
A.7	Ecuaciones de movimiento, término de borde, corriente y potencial de Noether en el método Cuasilocal	87
B	Identidades útiles	97
B.1	Christoffel con índices contraídos	97
B.2	Dobles derivadas sobre vectores Killing	97
B.3	Diagonal de un 2-tensor antisimétrico	98
B.4	Primera identidad de Bianchi para el tensor $\mathbf{P}$	99
	Bibliography	101

Introducción

“¿Qué es lo que da vida a las ecuaciones y crea un universo para que ellas lo describan?

— Stephen Hawking

En 1905 Albert Einstein cambió radicalmente nuestra comprensión del tiempo al proponer que no es absoluto, como se había creído desde los tiempos de Sir Isaac Newton en el siglo XVII. Esta nueva perspectiva trajo consigo una redefinición de los fundamentos de la física, permitiendo que dos observadores pudieran percibir un mismo evento de forma diferente, sin que ninguna de las dos perspectivas fuera más verdadera que la otra. En lugar de considerar que cada suceso tenía una descripción espacial y temporal distinta para cada observador, ahora se entendía que cada observador experimentaba el mismo universo de forma unificada, con coordenadas espaciales y temporales que variaban según el marco de referencia utilizado, configurando de esta manera la noción de *espaciotiempo*. Así, cada marco de referencia se volvía independiente en la descripción del universo, y los observadores podían tener una comprensión propia y coherente del espaciotiempo en el que vivían.

Fue Hermann Minkowski, profesor de Einstein, en 1907, quien se planteó seriamente describir matemáticamente la nueva noción de espaciotiempo, inspirándose en la geometría hiperbólica. Su formalismo cuatridimensional del espaciotiempo fue usado como fortín matemático entre 1907 y 1915 por Einstein, el cual, añadiendo la geometría Riemanniana de Bernhard Riemann y el cálculo tensorial de Tulio Levi-Civita, consiguió en 1915 revolucionar nuevamente la física, llevando la estafeta del conocimiento más lejos, al declarar que si se considerara su desarrollo de 1905 (conocido como teoría de la relatividad especial) para un marco de referencia sujeto a un observador acelerado uniformemente, existiría una equivalencia entre este sistema y uno asociado a un observador en caída libre dentro de un campo gravitacional uniforme. Así, Einstein concluyó que la fuerza gravitacional no era más que una ilusión emergente de un fundamento geométrico intrínseco a la curvatura de un espaciotiempo curvado por la presencia de materia-energía en él. Esta extensión de su teoría de la relatividad especial es conocida como teoría de la relatividad general.

Las ecuaciones que describen cómo se curva el espaciotiempo en presencia de materia-energía, vienen dadas por:¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Donde la variable $g_{\mu\nu}$ es conocida como tensor métrico y se encarga de codificar el "ADN" espaciotemporal (la información intrínseca del espaciotiempo), permitiendo a entes geométricos que la contienen, como el tensor de Riemann $R_{\mu\nu}$ y su escalar R , detallar la curvatura causada por una cantidad de materia-energía, representada por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Además, si se considera un espaciotiempo en expansión o contracción, es necesario considerar la cantidad Λ denominada constante cosmológica.

En 1916, un año después de la publicación de la teoría de la relatividad general, Karl Schwarzschild encontró una solución a las ecuaciones, que describe el espaciotiempo en ausencia de materia y con simetría esférica. Esta solución predecía la existencia de regiones en el espaciotiempo cuyo interior y frontera eran desconectados causalmente de su exterior, es decir, regiones en las que cualquier objeto que entrara se perdería en su interior, destinado a terminar destruido en el centro de esta región esférica, denominada singularidad, un punto de densidad y curvatura infinita. A estos objetos se les dio el nombre de *agujeros negros*, siguiendo la idea de que ni la luz podría escapar de ellos. A pesar de que Einstein no consideraba realistas estas soluciones, especialmente por la existencia de estas singularidades, en 1939 Robert Oppenheimer y Hartland Snyder propusieron la existencia de estos objetos como consecuencia de la explosión de estrellas que se convierten en supernovas. Esto llevó en 1983 a Subrahmanyam Chandrasekhar a publicar un estudio fundamental sobre la formación de estos astros como resultado del colapso estelar.

Teniendo ya una explicación plausible para la formación y existencia de estos astros, en la comunidad científica nació mucho más interés por ellos, en particular, en el círculo de Jhon A. Wheeler, en Princeton, uno de sus estudiantes, Jacob Bekestein, se percató de que la naturaleza teórica de estos objetos tenía un choque directo con la segunda ley de la termodinámica aplicada a todo el universo como un sistema físico aislado, y dado que la entropía en un sistema aislado nunca decrece, entonces, ¿qué pasaría si objetos que se encuentran en el exterior del agujero negro y que aportan a la entropía del universo cayeran en su interior?: Igual debería seguirse cumpliendo la segunda ley, por lo que estos hoyos negros deberían tener una entropía asociada para que se mantenga una coherencia con las leyes de la termodinámica.

Fue así como Jacob Bekestein descubrió en 1972 que existe una entropía asociada a estos objetos, la cual es proporcional a su área. En 1975 un joven inglés doctor en física, llamado Stephen Hawking, llega a la equivalencia exacta entre entropía y área, completando así la investigación hecha por Bekestein. Tiempo después el mismo Hawking encontraría que estos objetos negros no eran tan oscuros como se pensaba, sino que emitían una radiación de

¹Las cuales provienen de variar la conocida como acción de Einstein-Hilbert $S = \int \left[\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} d^4x$

partículas, consecuencia de la existencia de partículas virtuales que nacían y desaparecían en el vacío del espaciotiempo. Esto dotaba de una temperatura a estos objetos, la cual es conocida en su honor como "Temperatura de Hawking". Con esta temperatura y con una entropía para el sistema, se desarrolló una rama de estudio en torno a estos astros, que lleva el nombre de *termodinámica de los agujeros negros*, la cual consta de cuatro leyes fundamentales para su análisis termodinámico. En este caso se consideran las leyes para un agujero negro rotante y con carga eléctrica:

Ley 0	1 ^{ra} Ley	2 ^{da} Ley	3 ^{ra} Ley
$\kappa = cte$	$dM = TdS_{BH} + \Omega dJ + \Phi dQ$	$S_{BH} + S_{ext} \geq 0$	Imposibilidad de $\kappa = 0$

La ley cero establece que cualquier observador que se encuentre en el horizonte de eventos de un agujero negro sentirá el mismo tirón gravitacional a lo largo de toda el área de este. La primera ley garantiza que la energía total del agujero negro-su masa- es equivalente a las demás cantidades termodinámicas que este arrastra, por lo que su masa variará dependiendo del cambio en su entropía, carga eléctrica y rotación. La segunda ley menciona que la entropía del agujero negro y la entropía del exterior a éste siempre aumentarán en conjunto. Por último, la tercera ley establece que es imposible crear agujeros negros con gravedad superficial nula a través de procesos físicos finitos. En conjunto, estas leyes permitieron estudiar distintos tipos de agujeros negros soluciones de la ecuaciones de campo de Einstein.

1.1 Motivación y Declaración del Problema

Dentro del contexto de la termodinámica de agujeros negros, durante mucho tiempo se asumía el cumplimiento de la primera ley para la obtención de la masa de estos como soluciones de las ecuaciones de Einstein, es decir, dado el cálculo de la entropía, temperatura, momento angular, carga eléctrica, se aceptaba la equivalencia entre la adición de estas cantidades y la masa del espaciotiempo estudiado. Esto radicaba un problema en los fundamentos del análisis termodinámico de estos astros, pues debería existir una manera clara y precisa para obtener cargas conservadas en cualquier tipo de solución a las ecuaciones de campo de Einstein con o sin materia, de tal manera que, en particular, para la masa, se pudiera verificar desde primeros principios la equivalencia de esta con las demás cantidades físicas involucradas. Nunca se llegó a forma única para obtener estas cantidades conservadas, en cambio, sólo se consiguieron distintos métodos dependientes de la geometría y topología del espaciotiempo que enmarcaba cada solución de agujero negro estudiada.²

²Como en el caso en donde se considera un espacio tiempo con constante cosmológica, la cual genera una topología distinta a la plana en el infinito espacial.

El problema se agravó cuando se consideraron soluciones tipo agujero negro para teorías con correcciones cuadráticas al tensor de curvatura³ en la acción de Einstein-Hilbert. Un ejemplo de soluciones tipo agujero negro para estas modificaciones de gravedad anteriormente mencionada son los agujeros negros Lifschitz, los cuales nacieron en el contexto de la correspondencia AdS/CFT para estudiar sistemas no relativistas a temperatura finita. Así, para este ejemplo y muchos otros, se necesitaron métodos de cálculo más general, pues la geometría y topología de estos espacios sobrepasaban las normalmente emergentes de las ecuaciones Einstein. Además, se despertó la necesidad de estudiar la termodinámica de este tipo de agujeros negros teóricos con la intención de perfeccionar y ampliar el diccionario brindado por la correspondencia Gauge/Gravity. De tal manera, tener la certeza de que las leyes de la termodinámica provenientes del pensamiento clásico de Hawking se podrían extender a estos, llevaba a una irremediable necesidad de verificación de estas leyes termodinámicas desde primeros principios, es decir, en el caso de la primera ley, corroborar de manera independiente cada uno de los lados en la equivalencia, lo que llevó a construir nuevos métodos para el cálculo de cargas conservadas en espaciotiempos provenientes de teorías que modifican la acción de Einstein-Hilbert, en particular, para calcular la masa de agujeros negros en este nuevo y más general contexto.

1.1.1 Algunas referencias

[Sus09; Tho95; GR17; RT10; HP12]

1.2 Estructura de la tesis

Capítulo 2

En este capítulo se estudia el método Arnowitt-Deser-Misner (ADM) para calcular la masa de un agujero negro Schwarzschild. Para ello se considera un espaciotiempo globalmente hiperbólico, de tal manera que se pueda hacer una foliación a este, mediante una familia de 3-variedades de Cauchy, permitiendo tomar una dirección particular temporal para todo el espaciotiempo, lo que da una fragmentación $3 + 1$, y la creación de unas variables, que permiten describir la geometría y dinámica de este espaciotiempo, denominadas variables ADM. Así, finalmente, al tomar una asintoticidad plana, se obtiene la masa ADM del agujero negro en cuestión.

Capítulo 3

En este capítulo se estudia el método Abbot-Deser-Tekin (ADT) para calcular la masa de un agujero negro Schwarzschild-dS. El proceso comienza al considerar la métrica del agujero negro a partir de una métrica de fondo dS y de una perturbación a esta no necesariamente

³En este caso el lagrangiano que compone la acción tomará la forma $L = L[g, R, R^2, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \dots]$

pequeña, y que se desvanece en el infinito espacial. Esto permite estudiar las ecuaciones linealizadas y obtener una cantidad conservada para estas, así, al tomar la diferencia entre la métrica del agujero negro y la métrica de fondo, es decir, una solución de vacío, es posible obtener la perturbación de tal manera que al usarla en conjunto con un campo Killing de la métrica de fondo se puede encontrar una expresión para las cargas conservadas del espaciotiempo en cuestión, y en particular, obtener la masa del agujero negro al considerar un vector Killing temporal.

Capítulo 4

En este capítulo se estudia el método cuasilocal, el cual se utiliza para la obtención de la masa del agujero negro tipo Lifschitz en tres dimensiones. Con este propósito se construyen de manera *off-shell* las corrientes de Noether y ADT, posteriormente se obtienen sus potenciales asociados y una relación entre ellos, de tal manera que, al considerar un camino de parámetros para los factores libres en el espacio de soluciones, se obtiene una carga conservada de manera cuasilocal. Finalmente, tomando la métrica del agujero negro Lifschitz, se obtiene su masa al construir dicha carga conservada a partir del término de borde y potencial de Noether asociados al lagrangiano del sistema.

Método ADM

” *El espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse.*

— John Archibald Wheeler

Las ecuaciones de campo de Einstein son el fundamento para el estudio del espaciotiempo como ente dinámico a merced de la materia sumergida en él. Desde su desarrollo en 1915, las soluciones estudiadas venían de variadas simplificaciones-dadas por simetrías-al sistema, de tal manera que, al pensar en espaciotiempos más generales, las soluciones se presentaban como un difícil reto teórico. Para atacar estas dificultades, se construyeron dos caminos, uno se da mediante el uso de métodos numéricos, mientras que el otro se basa en perturbaciones. Para llegar a soluciones numéricas, es necesario reformular las ecuaciones de Campo como un problema de valor inicial o de Cauchy, el cual se basa en una formulación $3 + 1$ del espaciotiempo, en donde se estudia la dinámica de éste mediante la evolución temporal de una hipersuperficie(3-variedad) tipo Cauchy, con los campos definidos en esta. Esta reformulación fue desarrollada por R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner[ADM62], completando todo su desarrollo para principios de los 60's.

2.1 Descomposición $3 + 1$ del espaciotiempo

Para comenzar, se debe tener una forma para describir el espaciotiempo cuatridimensional de tal manera que se diferencie la parte espacial de la temporal de este. Este reparto es conocido como descomposición $3 + 1$ y garantiza una independencia entre las tres coordenadas espaciales y la temporal. Para visualizarlo, piense que la variedad espaciotemporal $\mathcal{M}$ es foliada por una familia de hipersuperficies espaciales $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Ahora, si se desea estudiar la dinámica de este espaciotiempo, no es suficiente una descomposición, se necesita preservar la causalidad dada esta fragmentación, para ello, primero se debe tener claro que la descomposición induce una nueva descripción para la variedad $\mathcal{M}$, es decir, existirán curvas integrales, campos vectoriales y 1-formas regidas por esta, de esta manera, se tendrán curvas tipo espacio, tipo tiempo o tipo nulas, provenientes de campos vectoriales con características causales específicas asociadas construidas a partir de la descomposición $3 + 1$.

Definición 1. Dada una estructura causal sobre la variedad $\mathcal{M}$, se define una hipersuperficie acronal como una subvariedad $\mathcal{N}$ tal que ninguno de sus puntos se encuentra conectado por una curva temporal futura, de tal manera que todas las curvas tipo tiempo la cortan una única vez.¹ Adicionalmente, si el conjunto de campos vectoriales en $\mathcal{N}$ es de carácter espacial, y toda geodésica nula la corta una sola vez, se dirá que esta hipersuperficie acronal es suave y completa, y se le llamará *hipersuperficie de Cauchy*.

Definición 2. Se dirá que un espaciotiempo $\mathcal{M}$ es globalmente hiperbólico, si él permite una foliación por hipersuperficies del tipo Cauchy. Donde cada elemento Σ_t de la familia de hipersuperficies representará una superficie de nivel de un campo $\hat{t}$ sobre la variedad.[SA16][CN22]

2.2 Funciones Shift y Lapse

Para estudiar la dinámica de este espaciotiempo dada la descomposición $3 + 1$ es necesario describir la geometría de esta foliación, por lo que cada 4-vector $\underline{t}$ tendrá una descomposición espacial y temporal coherente con la fragmentación ya hecha. Los vectores que hacen parte de esta descomposición los llamaremos funciones Shift y Lapse respectivamente.

Dado un 4-vector $\underline{t} = t^\nu e_\nu$ en un punto $q \in \Sigma_t$, se puede ver su descomposición mediante el uso de la métrica transversa γ^μ_ν tal que, al mirar por componentes, se tiene:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu_\nu t^\nu &= (\delta^\mu_\nu - n^\mu n_\nu) t^\nu \\ &= \delta^\mu_\nu t^\nu - n^\mu n_\nu t^\nu \\ &= t^\mu - (\underline{t} \cdot \underline{n}) n^\mu \\ \Rightarrow t^\mu &= \gamma^\mu_\nu t^\nu - (\underline{t} \cdot \underline{n}) n^\mu \\ t^\mu &= N^\mu + N n^\mu\end{aligned}\tag{2.1}$$

Como se puede ver en la ecuación (2.1), tenemos una escritura para t^μ en términos de dos vectores de naturaleza distinta. Por un lado $N^\mu = \gamma^\mu_\nu t^\nu$ representa la proyección del 4-vector $\underline{t}$ sobre la hipersuperficies de Cauchy, esto es, N^μ representa un 3-vector tipo espacio, el cual es tangente a Σ_t en el punto q , es decir, $N^\mu \in T_q(\Sigma)$. Esta función se conoce como **Shift**. Por otro lado, se tiene $N = \underline{t} \cdot \underline{n}$ como la magnitud de la proyección de $\underline{t}$ sobre el vector normal a Σ_t en el punto q . Esta otra función se denomina **Lapse**, y sus formas geométricas se pueden observar en la siguiente figura:

¹Nótese que no toda hipersuperficie espacial es acronal, se puede tener una hipersuperficie cuyos campos vectoriales sean todos tipo espacio, pero en la que existan curvas temporales que la corten en más de un punto.

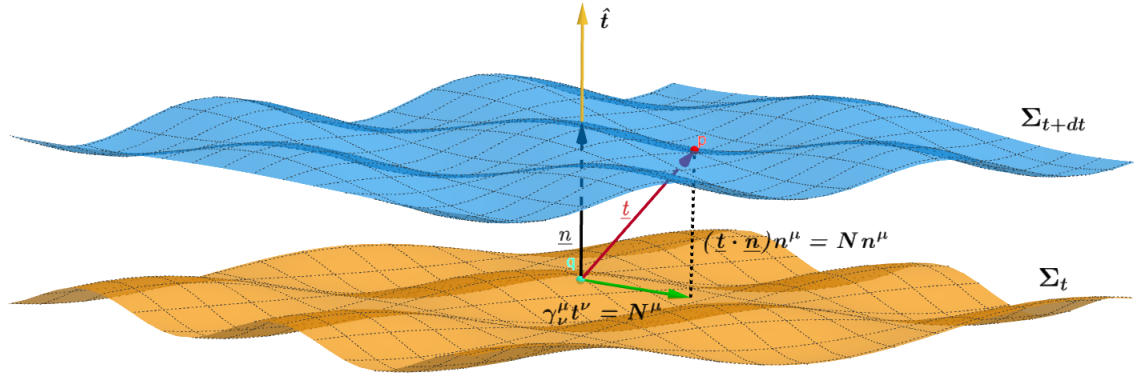


Fig. 2.1.: Foliación por hipersuperficies de Cauchy, junto con las variables Lapse y Shift, formando el vector temporal que describe una trayectoria arbitraria.

En este punto, merece la pena mencionar la aportación física que carga la función Lapse para la descripción de la dinámica de un observador dada la descomposición. Para ello note que la función Lapse no es más que la magnitud necesaria para normalizar el vector n^μ dada la función global $\hat{t}$, es decir $N = (\nabla \hat{t} \cdot \nabla \hat{t})^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}$ y representa la variación del tiempo propio medido por un observador que se mueve en dirección normal n^μ entre pares de hipersuperficies.[Wal10]

2.3 Componentes de la métrica inducida

Es claro que hecha la descomposición y teniendo un par de funciones Lapse y Shift que permiten describir la evolución temporal entre puntos de distintas hipersuperficies, es necesario construir algo que permita medir en cada hipersuperficie. De esta manera, se define la métrica inducida²:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (2.2)$$

Donde $g_{\mu\nu}$ es la 4-métrica de la variedad ambiente $\mathcal{M}$, y n_μ son los 4-vectores covariantes normales a cada Σ_t . Usando $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$, $n^0 n_0 = -1$ y $N^\mu = \gamma^\mu_\nu t^\nu$, se obtienen la forma explícita para las componentes contravariantes del vector normal, la función Shift y el vector temporal:[SA16]

$$n^\mu = \left(\frac{1}{N}, \frac{N^i}{N} \right) \quad N^\mu = (0, N^i) \quad t^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.3)$$

²Nótese que aquí se ha escrito la métrica inducida como una 4-métrica, al igual que $g_{\mu\nu}$. Esto es sólo una extensión, pues debe notarse que $\gamma^{0\mu} = 0$, para $\mu = 0, 1, 2, 3$

Junto con las relaciones (2.2) y (2.1), los anteriores resultados son útiles para encontrar las componentes del tensor métrico g , obteniendo³

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu \\ &= \gamma^{\mu\nu} - \frac{1}{N^2}(t^\mu - N^\mu)(t^\nu - N^\nu) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Finalmente, como consecuencia de la naturaleza 3-dimensional de γ , se tiene que $\gamma^{00} = \gamma^{\mu 0} = 0$, además, una reescritura directa para el vector temporal es $t^\mu = \delta^\mu_0$. Ambas conclusiones se pueden usar para conseguir las componentes para $g^{\mu\nu}$, como sigue:

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{1}{N^2}(t^0 - N^0)^2 & g^{\mu 0} &= -\frac{1}{N^2}(t^\mu - N^\mu) & g^{ij} &= \gamma^{ij} - \frac{1}{N^2}(t^i - N^i)(t^j - N^j) \\ &= -\frac{1}{N^2} & &= \frac{N^i}{N^2} & &= \gamma^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{aligned}$$

Dichas componentes permiten escribir de forma matricial $g^{\mu\nu}$ y su inversa $g_{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_i N^i - N^2 & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$$

De igual manera, se halla la forma matricial para el tensor métrico γ usando (2.2), en componentes contravariantes y covariantes respectivamente:

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^i N_i & N^i \\ N^i & \gamma^{ij} \end{pmatrix} \quad \gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$$

Una conclusión clave entre las matrices g y γ es la relación que tienen sus determinantes, esto es

$$g = -N^2 \gamma \rightarrow \sqrt{-g} = N \sqrt{\gamma} \quad (2.5)$$

resultado de la naturaleza inducida del tensor métrico γ .

Como colorario y conclusión final, basta decir que al conjunto de tensores N , N^i y γ^{ab} se le denomina variables ADM⁴ y permite describir completamente la dinámica del espaciotiempo cuatridimensional dada la descomposición $3 + 1$, es decir, mientras γ se encarga de la geometría intrínseca para cada Σ_t , las variables Shift y Lapse dirigen cómo cada elemento intrínseco a las hipersuperficies varía en el tiempo $\hat{t}$.

³Nótese que $n^\mu = \frac{1}{N}(t^\mu - N^\mu)$

⁴De ahora en adelante, durante este capítulo, los índices y superíndices latinos representarán coordenadas sobre las hipersuperficies, mientras que las coordenadas completas de la 4-variedad espaciotemporal se denotarán por letras griegas.

2.4 Descomposición del tensor de Riemann

En relatividad general la dinámica de un sistema se estudia partiendo del análisis geométrico del espaciotiempo, como lo denota la frase clásica de Jhon A. Wheeler que abre este capítulo y que pronunció con la intención de explicar las ecuaciones de campo de Einstein: la curvatura del espaciotiempo dictamina cómo ha de moverse la materia dentro de este, por lo que, si se desea estudiar la dinámica de la 4-variedad usando las variables ADM, es menester analizar las cantidades geométricas que permiten estudiar la curvatura de esta 4-variedad en cada uno de sus puntos. Para esta tarea, se utilizan las nuevas variables Lapse y Shift junto con la métrica inducida γ , consiguiendo una descomposición para el tensor de Riemann ${}^4R^d_{cab}$ y para el escalar de curvatura 4R de la 4-variedad en términos de una componente sobre las hipersuperficies Σ_t y un término perpendicular a estas.

Valiéndose de la definición para el tensor de curvatura extrínseca[DM20, pág 10]:

$$K_{ab} = -{}^4\nabla_b n_a = -\partial_b n_a + {}^4\Gamma^d_{ba} n_d$$

Se conoce que $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$, así que $\partial_b n_a = 0$, además ${}^4\Gamma^\mu_{ba} n_\mu = -{}^4\Gamma^0_{ba} N$, por lo que se obtiene^{5,6}:

$$K_{ab} = -{}^4\Gamma^0_{ba} N = -N \left[g^{00} {}^4\Gamma_{0ab} + g^{0c} \Gamma_{cab} \right]$$

Sustituyendo $g^{00} = -\frac{1}{N^2}$, $g^{0c} = \frac{N^c}{N^2}$

$$K_{ab} = -N \left[-\frac{1}{N^2} {}^4\Gamma_{0ab} + \frac{N^c}{N^2} \Gamma_{cab} \right]$$

Luego, ya que ${}^4\Gamma$ está sobre todo el espacio ambiente, entonces:

$${}^4\Gamma_{\mu\nu\delta} = \frac{1}{2}(\partial_\delta g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\delta} - \partial_\mu g_{\nu\delta}) \Rightarrow {}^4\Gamma_{0ab} = \frac{1}{2}(\partial_b g_{0a} + \partial_a g_{0b} - \partial_0 g_{ab})$$

De la sección anterior, se tiene que $g_{0a} = N_a$, $g_{0b} = N_b$ y $g_{ab} = \gamma_{ab}$, por lo que la expresión final para el tensor de curvatura extrínseca será:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -N \left[-\frac{1}{2N^2} (\partial_b N_a + \partial_a N_b - \dot{\gamma}_{ab}) + \frac{N^c}{N^2} \Gamma_{cab} \right] \\ &= \frac{1}{2N} (\partial_b N_a + \partial_a N_b - \dot{\gamma}_{ab}) - \frac{N^c}{N} \Gamma_{cab} \\ &= \frac{1}{2N} \left[\partial_b N_a + \partial_a N_b - \dot{\gamma}_{ab} - 2N^c \Gamma_{cab} \right] \\ &= \frac{1}{2N} \left[(\partial_b N_a - N^c \Gamma_{cab}) + (\partial_a N_b - N^c \Gamma_{cab}) - \dot{\gamma}_{ab} \right] \\ &= \frac{1}{2N} \left[{}^3\nabla_b N_a + {}^3\nabla_a N_b - \dot{\gamma}_{ab} \right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

⁵Recuerdese ${}^4\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = g^{\mu\delta} {}^4\Gamma_{\delta\nu\sigma}$

⁶ $\Gamma_{cab} \equiv {}^3\Gamma_{cab}$

Ahora, note que se puede hacer uso de la ortogonalidad entre los vectores $\vec{n}$ y las hipersuperficies Σ_t cuyos vectores base para $T_p\Sigma$ denotaremos por $\{\mathbf{e}_i\}|_p$, de tal manera que se cumple $(\mathbf{e}_i \cdot \vec{n}) = 0^7$, para reescribir el tensor de curvatura extrínseca propuesto en (citar preliminares):

$$K_{ab} = -\mathbf{e}_b \cdot {}^4\nabla_a \vec{n} \Rightarrow K_{ab} = \vec{n} \cdot {}^4\nabla_a \mathbf{e}_b \quad (2.7)$$

Además, recordando cómo se define la conexión afín sobre las hipersuperficies a partir de sus vectores base y de la derivada covariantes en estas,

$$\Gamma_{cab} \equiv {}^3\Gamma_{cab} = \mathbf{e}_c \cdot \nabla_b \mathbf{e}_a \quad (2.8)$$

es posible escribir ${}^4\nabla_a \mathbf{e}_b$ bajo una descomposición normal y tangente a las hipersuperficies⁸:

$${}^4\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab} \vec{n} + {}^3\Gamma_{ab}^c \mathbf{e}_c \quad (2.9)$$

Note que al realizar el producto escalar de (2.7) con los vectores $\vec{n}$ y $\mathbf{e}_j$ se recuperan las expresiones (2.5) y (2.6) respectivamente. Usando esta descomposición, se puede calcular $[{}^4\nabla_a, {}^4\nabla_b] \mathbf{e}_c$ de tal forma que se pueda conocer la curvatura en cada punto de la 4-variedad $\mathcal{M}$, esto es, conocer la expresión del **tensor de Riemann**:

$$[{}^4\nabla_a, {}^4\nabla_b] \mathbf{e}_c \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \bullet {}^4\nabla_a {}^4\nabla_b \mathbf{e}_c &= {}^4\nabla_a [-K_{cb} \vec{n} + {}^3\Gamma_{cb}^d \mathbf{e}_d] \\ &= -(\partial_a K_{cb}) \vec{n} - K_{cb} {}^4\nabla_a \vec{n} + (\partial_a {}^3\Gamma_{cb}^d) \mathbf{e}_d + {}^3\Gamma_{cb}^d {}^4\nabla_a \mathbf{e}_c = \dots \end{aligned}$$

Como $K_{ab} = -\mathbf{e}_b \cdot {}^4\nabla_a \vec{n} \Rightarrow -\mathbf{e}^b K_{ab} = {}^4\nabla_a \vec{n}$, se puede usar la identidad $\gamma_{db} \gamma^{db} = 1$ para reescribirla de tal modo que $-\gamma_{db} \mathbf{e}^b \gamma^{db} K_{ab} = -K_a^d \mathbf{e}_d = {}^4\nabla_a \vec{n}$,

$$\begin{aligned} \dots &= -(\partial_a K_{cb}) \vec{n} + K_{cb} K_a^d \mathbf{e}_d + (\partial_a {}^3\Gamma_{cb}^d) \mathbf{e}_d + {}^3\Gamma_{cb}^d [-K_{da} \vec{n} + {}^3\Gamma_{da}^l \mathbf{e}_l] \\ &= -(\partial_a K_{cb}) \vec{n} + K_{cb} K_a^d \mathbf{e}_d + (\partial_a {}^3\Gamma_{cb}^d) \mathbf{e}_d - {}^3\Gamma_{cb}^d K_{da} \vec{n} + {}^3\Gamma_{cb}^d {}^3\Gamma_{da}^l \mathbf{e}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet {}^4\nabla_b {}^4\nabla_a \mathbf{e}_c &= {}^4\nabla_b [-K_{ca} \vec{n} + {}^3\Gamma_{ca}^d \mathbf{e}_d] \\ &= -(\partial_b K_{ca}) \vec{n} - K_{ca} {}^4\nabla_b \vec{n} + (\partial_b {}^3\Gamma_{ca}^d) \mathbf{e}_d + {}^3\Gamma_{ca}^d {}^4\nabla_b \mathbf{e}_c \\ &= -(\partial_b K_{ca}) \vec{n} + K_{ca} K_b^d \mathbf{e}_d + (\partial_b {}^3\Gamma_{ca}^d) \mathbf{e}_d + {}^3\Gamma_{ca}^d [-K_{db} \vec{n} + {}^3\Gamma_{db}^l \mathbf{e}_l] \\ &= -(\partial_b K_{ca}) \vec{n} + K_{ca} K_b^d \mathbf{e}_d + (\partial_b {}^3\Gamma_{ca}^d) \mathbf{e}_d - {}^3\Gamma_{ca}^d K_{db} \vec{n} + {}^3\Gamma_{ca}^d {}^3\Gamma_{db}^l \mathbf{e}_l \end{aligned}$$

⁷ $0 = {}^4\nabla_a (\mathbf{e}_i \cdot \vec{n}) = ({}^4\nabla_a \vec{n}) \cdot \mathbf{e}_i + \vec{n} \cdot ({}^4\nabla_a \mathbf{e}_i) \Rightarrow ({}^4\nabla_a \vec{n}) \cdot \mathbf{e}_i = -\vec{n} \cdot ({}^4\nabla_a \mathbf{e}_i)$

⁸ $K_{ab} = \vec{n} \cdot {}^4\nabla_a \mathbf{e}_b \Rightarrow K_{ab} \vec{n} = -({}^4\nabla_a \mathbf{e}_b)^\perp$

${}^3\Gamma_{cab} = \mathbf{e}_c \cdot \nabla_b \mathbf{e}_a \Rightarrow {}^3\Gamma_{ab}^c \mathbf{e}_c = ({}^4\nabla_a \mathbf{e}_b)^\parallel$

Finalmente, al hacer ${}^4\nabla_a{}^4\nabla_b\mathbf{e}_c - {}^4\nabla_b{}^4\nabla_a\mathbf{e}_c$:

$$= \left[\left(\partial_b K_{ca} - {}^3\Gamma_{cb}^d K_{da} - {}^3\Gamma_{ab}^d K_{cd} \right) - \left(\partial_a K_{cb} - {}^3\Gamma_{ca}^d K_{db} - {}^3\Gamma_{ab}^d K_{cd} \right) \right] \vec{n} + \dots$$

$$\dots + \left[K_{cb} K_a^d - K_{ca} K_b^d + {}^3R_{cab}^d \right] \mathbf{e}_d$$

Donde ${}^3R_{cab}^d = \partial_a {}^3\Gamma_{cb}^d - \partial_b {}^3\Gamma_{ca}^d + {}^3\Gamma_{cb}^l {}^3\Gamma_{la}^d - {}^3\Gamma_{ca}^l {}^3\Gamma_{lb}^d$ y recordando la definición para la derivada covariante de un tensor (2,0): $\nabla_\beta T_{\mu\nu} = \partial_\beta T_{\mu\nu} - T_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - T_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha$, el resultado final para el conmutador $[{}^4\nabla_a, {}^4\nabla_b] \mathbf{e}_c$ en términos de su parte normal y tangencial a las hipersuperficies será:

$$[{}^4\nabla_a, {}^4\nabla_b] \mathbf{e}_c = [\nabla_b K_{ca} - \nabla_a K_{cb}] \vec{n} + [{}^3R_{cab}^d + K_{cb} K_a^d - K_{ca} K_b^d] \mathbf{e}_d \quad (2.10)$$

De donde se obtienen las siguientes ecuaciones:

Gauss-Codazzi	Codazzi-Mainardi
${}^4R_{cab}^d = {}^3R_{cab}^d + K_{cb} K_a^d - K_{ca} K_b^d$	${}^4R_{cab}^\perp = \nabla_b K_{ca} - \nabla_a K_{cb}$

Las cuales representan las componentes normales y tangenciales a las hipersuperficies de Cauchy para el tensor de Riemann de la 4-variedad ambiente $\mathcal{M}$. Continuando con el proceso de obtención de cantidades geométricas para este espacio globalmente hiperbólico, se puede obtener el escalar de curvatura 4R en términos del tensor de Riemann antes calculado:[CN22]

$${}^4R \equiv {}^4R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = {}^4R^{ab}{}_{ab} + 2 {}^4R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp} \quad (2.11)$$

Con " $\perp$ " el símbolo para indicar la contracción de cualquiera de las componentes del tensor con un vector normal $\vec{n}$, tal que ${}^4R_{\nu\alpha\beta}^\perp \equiv {}^4R_{\nu\alpha\beta}^\rho n_\rho$. Ahora, dada la expresión (2.9), basta encontrar el segundo término de esta, ya que su primer término viene dado por la ecuación de Gauss-Codazzi. De tal manera, usando la definición para el tensor de Riemann⁹:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] n_\nu = R_{\nu\alpha\beta}^\rho n_\rho \equiv R_{\nu\alpha\beta}^\perp$$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\beta}^\rho = g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta n_\nu - g^{\mu\nu} \nabla_\beta \nabla_\alpha n_\nu$$

$$= \nabla_\alpha \nabla_\beta (g^{\mu\nu} n_\nu) - \nabla_\beta \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} n_\nu)$$

$$R_{\alpha\beta}^{\rho\mu} = \nabla_\alpha \nabla_\beta n^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha n^\mu \equiv R_{\alpha\beta}^{\perp\mu}$$

Tomando $\beta \rightarrow \mu$,

$$R_{\alpha\beta}^{\perp\mu} = \nabla_\alpha \nabla_\mu n^\mu - \nabla_\mu \nabla_\alpha n^\mu$$

⁹En este punto, para facilitar la escritura, las derivadas covariantes con índices griegos denotarán la conexión sobre $\mathcal{M}$.

Proyectando la componente α del tensor de Riemann sobre el campo vectorial normal:

$$n^\alpha R^\perp_{\alpha\beta} = n^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\mu n^\mu - n^\alpha \nabla_\mu \nabla_\alpha n^\mu$$

Reescribiendo los términos de esta expresión,

- $n^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\mu n^\mu \Rightarrow \nabla_\alpha (n^\alpha \nabla_\mu n^\mu) = (\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\mu n^\mu) + n^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\mu n^\mu$
 $\rightarrow n^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\mu n^\mu = \nabla_\alpha (n^\alpha \nabla_\mu n^\mu) - (\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\mu n^\mu)$
- $n^\alpha \nabla_\mu \nabla_\alpha n^\mu \Rightarrow \nabla_\mu (n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) = (\nabla_\mu n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\mu) + n^\alpha \nabla_\mu \nabla_\alpha n^\mu$
 $\rightarrow n^\alpha \nabla_\mu \nabla_\alpha n^\mu = \nabla_\mu (n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) - (\nabla_\mu n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\mu)$

Se obtiene,

$$n^\alpha R^\perp_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha (n^\alpha \nabla_\mu n^\mu) - \nabla_\mu (n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) - (\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\mu n^\mu) + (\nabla_\mu n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\mu)$$

Intercambiando los índices mudos $\alpha \leftrightarrow \mu$ en el primer término, es posible factorizar la derivada covariante ∇_μ para los dos primeros términos,

$$n^\alpha R^\perp_{\alpha\beta} = \nabla_\mu (n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) - (\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\mu n^\mu) + (\nabla_\mu n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\mu)$$

Nombrando $\Delta^\mu = n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu$, y recordando las expresiones para el tensor de curvatura extrínseca y su escalar,

$$(\nabla_\mu n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\mu) = K_{\mu\alpha} K^{\mu\alpha} = K_{ab} K^{ab}, \quad \nabla_\mu n^\mu = -K$$

Se obtiene la expresión para el segundo término geométrico en (2,9),

$$R^\perp_{\perp\beta} \equiv n^\alpha R^\perp_{\alpha\beta} = \nabla_\mu (\Delta^\mu) - K^2 + K_{ab} K^{ab} \quad (2.12)$$

Finalmente, usando la ecuación de Gauss-Codazzi, se contraen en pares los índices para el tensor de Riemann, tal que:

$$g^{\mu c} {}^4 R^d_{cab} = g^{\mu c} {}^3 R^d_{cab} + g^{\mu c} K_{cb} K^d_a - g^{\mu c} K_{ca} K^d_b$$

$${}^4 R^{d\mu}_{ab} = {}^3 R^{d\mu}_{ab} + K^\mu_b K^d_a - K^\mu_a K^d_b$$

Contrayendo los índices b con a y μ con b , se consigue,

$${}^4 R^{ab}_{ab} = {}^3 R^{ab}_{ab} + K^b_b K^a_a - K^b_a K^a_b$$

$$= {}^3 R + K^2 - K_{ab} K^{ab}$$

Tomando este último resultado junto con (2.10), finalmente se puede obtener el escalar de curvatura de (2.9) al sustituir:

$${}^4 R = {}^3 R + K^2 - K_{ab} K^{ab} + 2 \left[\nabla_\mu (\Delta^\mu) - K^2 + K_{ab} K^{ab} \right]$$

$${}^4R = {}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_\mu(\Delta^\mu) \quad (2.13)$$

2.5 Formulaci3n Hamiltoniana en relatividad general

2.5.1 Acci3n de Einstein-Hilbert en la descomposici3n 3+1

Conocida la densidad Lagrangiana de Hilbert $\mathcal{L}_H = {}^4R\sqrt{-g}$ ¹⁰, es posible usar las equivalencias en la formulaci3n ADM de los t3rminos geom3tricos en esta (2.13) y (2.5), para conocer su expresi3n lagrangiana bajo la descomposici3n 3 + 1:

$$\mathcal{L}_H = \left[{}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_\mu(n^\mu\nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha\nabla_\alpha n^\mu) \right] N\sqrt{\gamma} \quad (2.14)$$

Como se explic3 en la secci3n 2.1, la 4-variedad $\mathcal{M}$ espaciotemporal queda foliada por hipersuperficies de Cauchy. Este formalismo 3 + 1 permite repensar el 4-volumen $\mathcal{V}$ como la uni3n de dos hipersuperficies de Cauchy Σ_{t_2} y Σ_{t_1} (para $t_2 > t_1$) conectadas por una hipersuperficie tipo tiempo $\mathcal{T}$ [DM20]. Tomando esto de manera infinitesimal, es admisible reescribir la acci3n de Einstein-Hilbert $\mathcal{S}_H$ como:

$$\mathcal{S}_H = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[{}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_\mu(n^\mu\nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha\nabla_\alpha n^\mu) \right] N\sqrt{\gamma} d^3x \quad (2.15)$$

De esta acci3n, se puede identificar un t3rmino de borde, el cual ser3 a~naddido al t3rmino de borde de la acci3n gravitacional $\mathcal{S}_G$ y jugar3 un papel esencial en la descripci3n de la geometr3a interior del espaciotiempo. Usando el teorema de Stokes generalizado y considerando el factor $(16\pi)^{-1}$, se obtiene

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} \nabla_\mu (n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) d^4x = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon (n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) \sqrt{|h|} r_\mu d^3x \quad (2.16)$$

Donde h es el determinante de la m3trica inducida por $g_{\mu\nu}$ en $\partial\mathcal{V}$, mientras que $d\sigma_\mu = \varepsilon r_\mu \sqrt{|h|} d^3x$ es el elemento de volumen orientado sobre $\partial\mathcal{V}$ por el vector unitario r_μ a 3ste. Con el prop3sito de calcular la contribuci3n que hace cada una de las hipersuperficies mostradas en la Figura 2.2 a la integral de superficie (2.16), es indispensable reescribir el segundo t3rmino dentro de ella. Para ello n3tese que,

$$\begin{aligned} n^\alpha [(\nabla_\alpha n^\mu) r_\mu + n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu)] &= n^\alpha \nabla_\alpha (n^\mu r_\mu) \\ n^\alpha (\nabla_\alpha n^\mu) r_\mu + n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) &= 0 \\ \Rightarrow n^\alpha (\nabla_\alpha n^\mu) r_\mu &= -n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) \end{aligned}$$

¹⁰Omitiendo el factor $(16\pi)^{-1}$

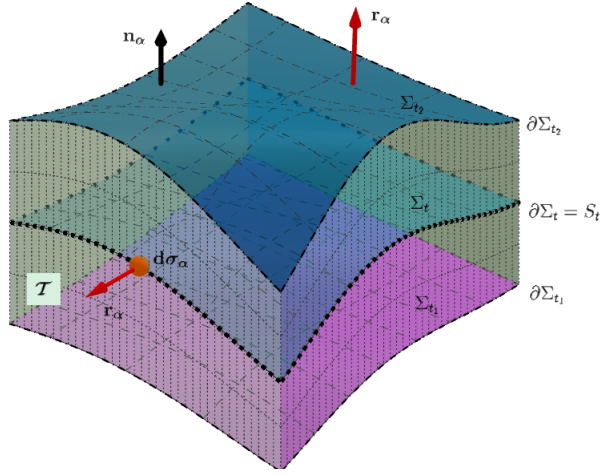


Fig. 2.2.: Elemento de 4-volumen espaciotemporal $\mathcal{V}$, cuya frontera $\partial\mathcal{V}$ se compone de dos hipersuperficies de Cauchy Σ_{t_2} y Σ_{t_1} y una hipersuperficie tipo tiempo $\mathcal{T}$. El vector normal al 3-volumen $\partial\mathcal{V}$ corresponde a r_α , el cual da la orientación al elemento diferencial de 3-volumen $d\sigma_\alpha$. Las fronteras de las hipersuperficies de Cauchy $\partial\Sigma_t$ formarán una foliación para la hipersuperficie $\mathcal{T}$ y en tal caso se les denotará como S_t .

Por lo que (2.16) queda,

$$\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon \left[(\nabla_\alpha n^\alpha) n^\mu r_\mu + n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) \right] \sqrt{|h|} d^3x \quad (2.17)$$

Ahora, dado que $\partial\mathcal{V} \equiv \Sigma_{t_2} \cup \Sigma_{t_1} \cup \mathcal{T}$, se pueden obtener las contribuciones para cada hipersuperficie al considerar que $\varepsilon = -1 \rightarrow \varepsilon r_\mu = -n_\mu$ para Σ_{t_i} , mientras que $\varepsilon = 1 \rightarrow r_\mu$ para $\mathcal{T}$:

Σ_{t_2}

Sustituyendo, $n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) = -n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha n_\mu) = 0$ y $(\nabla_\alpha n^\alpha) n^\mu r_\mu = -(\nabla_\alpha n^\alpha) n^\mu n_\mu = -K$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_{t_2}} \varepsilon (n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) \sqrt{|h|} r_\mu d^3x = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_{t_2}} K \sqrt{|h|} d^3x \quad (2.18)$$

Σ_{t_1} ¹¹

Sustituyendo, $n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) = n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha n_\mu) = 0$ y $(\nabla_\alpha n^\alpha) n^\mu r_\mu = (\nabla_\alpha n^\alpha) n^\mu n_\mu = K$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_{t_1}} \varepsilon (n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) \sqrt{|h|} r_\mu d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_{t_1}} K \sqrt{|h|} d^3x \quad (2.19)$$

Tomando las ecuaciones (2.18) y (2.19) se puede ver que no hay contribución a la integral de borde por parte de adición de las hipersuperficies de Cauchy Σ_{t_2} y Σ_{t_1} . La contribución vendrá entonces de la hipersuperficie tipo tiempo $\mathcal{T}$,

$\mathcal{T}$

Al considerar la hipersuperficie tipo tiempo, se tiene que $r_\mu \perp n^\mu \rightarrow (\nabla_\alpha n^\alpha) n^\mu r_\mu = 0$

¹¹Nótese que para esta hipersuperficie, el vector $\varepsilon r_\mu = (-1)(-n_\mu) = n_\mu$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} \varepsilon (n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha - n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu) \sqrt{|h|} r_\mu d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) \sqrt{|h|} d^3x \quad (2.20)$$

Finalmente, tomando esta contribución junto con el término de borde $\mathcal{S}_B$ de la acción gravitacional, se puede reescribir un termino de borde,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_B &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} n^\alpha n^\mu (\nabla_\alpha r_\mu) \sqrt{|h|} d^3x - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} K \sqrt{|h|} d^3x \\ &\dots = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} (n^\alpha n^\mu \nabla_\alpha r_\mu - K) \sqrt{|h|} d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} (n^\alpha n^\mu \nabla_\alpha r_\mu + \nabla_\alpha r^\alpha) \sqrt{|h|} d^3x \\ &\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} (n^\alpha n^\mu \nabla_\alpha r_\mu + g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha r_\mu) \sqrt{|h|} d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{T}} (n^\alpha n^\mu + g^{\alpha\mu}) \nabla_\alpha r_\mu \sqrt{|h|} d^3x \end{aligned} \quad (2.21)$$

Con el propósito de simplificar esta última expresión, se puede pensar en una foliación para $\mathcal{T}$ mediante 2-variedades S_t , las cuales corresponderán a la frontera de las Σ_t , es decir, $S_t = \partial\Sigma_t$. De esta manera, es posible definir una extensión para el tensor de curvatura extrínseca en virtud del encaje de S_t en la las 3-variedades de Cauchy.

$$\kappa_{ij} = -\nabla_i r_j + r_i \nabla_{\vec{r}} r_j$$

Donde los índices i, j indican que se está trabajando con la conexión sobre Σ_t , mientras que r^i será el vector normal a S_t . Bajo la misma línea de trabajo, es posible obtener una expresión para la curvatura escalar mediante el uso de la métrica inducida h ,

$$\begin{aligned} \kappa &= h^{ij} \kappa_{ij} = h^{ij} (-\nabla_i r_j + r_i \nabla_{\vec{r}} r_j) \\ &= -h^{ij} \nabla_i r_j + h^{ij} r_i \nabla_{\vec{r}} r_j \\ &= -h^{ij} \nabla_i r_j + r^j \nabla_{\vec{r}} r_j \\ &= -h^{ij} \nabla_i r_j \\ \Rightarrow \kappa &= -\nabla_i r^i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora, se pueden extender κ_{ij} y κ a la 4-variedad $\mathcal{M}$ mediante el uso de la métrica g y los proyectores (citar los preliminares),

$$\begin{aligned} \kappa_{\mu\nu} &= \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu \nabla_\alpha r_\beta \\ &= (\delta^\alpha_\mu + n_\mu n^\alpha) (\delta^\beta_\nu + n_\nu n^\beta) \nabla_\alpha r_\beta \\ &= \nabla_\mu r_\nu + n_\nu n^\beta \nabla_\mu r_\beta + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha r_\nu + n_\mu n_\nu n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\kappa &= -g^{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} \\
&= -g^{\mu\nu} [\nabla_\mu r_\nu + n_\nu n^\beta \nabla_\mu r_\beta + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha r_\nu + n_\mu n_\nu n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta] \\
&= -g^{\mu\nu} \nabla_\mu r_\nu - g^{\mu\nu} n_\nu n^\beta \nabla_\mu r_\beta - g^{\mu\nu} n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha r_\nu - g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta \\
&= -g^{\mu\nu} \nabla_\mu r_\nu - n^\mu n^\beta \nabla_\mu r_\beta - n^\nu n^\alpha \nabla_\alpha r_\nu - n^\nu n_\nu n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta
\end{aligned}$$

cambiando $\mu \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \nu$ en el segundo término,

$$\Rightarrow -g^{\mu\nu} \nabla_\mu r_\nu - 2n^\nu n^\alpha \nabla_\alpha r_\nu + n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta$$

nuevamente, cambiando $\nu \rightarrow \beta$ en el segundo término,

$$\Rightarrow -g^{\mu\nu} \nabla_\mu r_\nu - n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta$$

Finalmente, cambiando $\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \beta$ en el primer término,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha r_\beta - n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta \\
\kappa &= -(g^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta) \nabla_\alpha r_\beta \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Con este último resultado se puede reescribir $\tilde{\mathcal{S}}_B$ (2.21) en términos de la curvatura escalar sobre S_t , al usar la relación $\sqrt{|h|} = N\sqrt{\sigma}$,¹² entre las métricas de $\partial\mathcal{V}$ y $\partial\Sigma_t$,

$$\tilde{\mathcal{S}}_B = -\frac{1}{8\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{S_t} \kappa N \sqrt{\sigma} d^2x \tag{2.24}$$

Considerando este nuevo término de borde junto con la reescritura del término no dinámico $\mathcal{S}_0$ en función de κ_0 ,¹³ es decir, dependiente de la curvatura extrínseca de S_t encajada en un espacio plano, es posible escribir completamente la acción gravitacional $\mathcal{S}_G$ ¹⁴bajo el formalismo 3 + 1, usando (2.15) y (2.24),

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} ({}^3R + K_{ab} K^{ab} - K^2) N \sqrt{\gamma} d^3x - 2 \oint_{S_t} (\kappa - \kappa_0) N \sqrt{\sigma} d^2x \right] \tag{2.25}$$

2.5.2 Hamiltoniano y variables canónicamente conjugadas

Para obtener el Hamiltoniano total H de nuestro sistema, es necesario tener claro cuáles variables dentro de la acción gravitacional pueden ser consideradas como dinámicas. En este caso, la acción gravitacional $\mathcal{S}_G$ depende de γ_{ij} , $\dot{\gamma}_{ij}$, N , N^i y de las derivadas espaciales

¹²Análogamente a la relación entre los determinantes de γ y g en (2.3).

¹³Dado que la forma funcional del término no dinámico es igual a la de $\mathcal{S}_B$, el proceso para restringirla a S_t es análogo al hecho en esta subsección.

¹⁴En este caso $\mathcal{S}_G = \tilde{\mathcal{S}}_H + \tilde{\mathcal{S}}_B + \mathcal{S}_0$, donde $\tilde{\mathcal{S}}_H$ es (2.15), sin el término de borde

de estas últimas [DM20]. Esto se puede ver muy claramente en el lagrangiano de este sistema.¹⁵

$$L = \int_{\Sigma_t} ({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{\gamma}d^3x - 2 \oint_{S_t} (\kappa - \kappa_0)N\sqrt{\sigma}d^2x \quad (2.26)$$

En donde este Lagrangiano total L puede verse como la adición de dos densidades lagrangianas $\mathcal{L}_0 = ({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2)N\sqrt{\gamma}$, y $\mathcal{L}_B = (\kappa - \kappa_0)N\sqrt{\sigma}$,¹⁶ integradas sobre el volumen determinado por Σ_t , y su frontera S_t respectivamente. Dado que en (2.25) no se encuentran explícitamente las derivadas temporales de las funciones Lapse y Shift, estas no podrán ser consideradas un conjunto válido de variables dinámicas. De esta manera, nuestras coordenadas generalizadas vendrán dadas únicamente por γ_{ij} , cuyo momento canónicamente conjugado π^{ij} viene dado por la derivada parcial de la densidad lagrangiana con respecto a $\dot{\gamma}_{ij}$.¹⁷ Para obtener la forma explícita para este momento, se debe notar que $\mathcal{L}_B$ es independiente de $\dot{\gamma}_{ij}$, por lo que el cálculo se reduce a $\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}$. Si se consideran los siguientes resultados previos:

Dada la expresión (2.6) para la curvatura extrínseca, y que 3R es un tensor espacial,

$$\frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = -\frac{1}{2N} \frac{\partial \dot{\gamma}_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = -\frac{1}{2N} \delta^i_a \delta^j_b, \quad \frac{\partial {}^3R}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = 0 \quad (2.27)$$

Se puede calcular la forma de π^{ij} :

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \left[-\gamma^{rk} K_{rk} \gamma^{sl} K_{sl} + K_{ab} K^{ab} N \sqrt{\gamma} \right] \\ &= N \sqrt{\gamma} \left[-\gamma^{rk} \gamma^{sl} \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} (K_{rk} K_{sl}) + \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} (\gamma^{pa} \gamma^{qb} K_{pq} K_{ab}) \right] \\ &= N \sqrt{\gamma} \left[-\gamma^{rk} \gamma^{sl} \left(\frac{\partial K_{rk}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} K_{sl} + K_{rk} \frac{\partial K_{sl}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right) + \gamma^{pa} \gamma^{qb} \left(\frac{\partial K_{pq}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} K_{ab} + K_{pq} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \left[\gamma^{rk} \gamma^{sl} \delta^i_r \delta^j_s K_{kl} + \gamma^{rk} \gamma^{sl} \delta^i_s \delta^j_r K_{kl} - \gamma^{pa} \gamma^{qb} \delta^i_p \delta^j_q K_{ab} - \gamma^{pa} \gamma^{qb} \delta^i_q \delta^j_p K_{ab} \right] \\ &= \sqrt{\gamma} [K \gamma^{ij} - K^{ij}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

También es posible ver la traza de π^{ij} , usando $\gamma_{ab} \gamma^{ab} = \gamma^b_b = 3$, así:

$$\begin{aligned} \pi &= \gamma_{ij} \pi^{ij} = \gamma_{ij} \left[\sqrt{\gamma} (K \gamma^{ij} - K^{ij}) \right] \\ &= \sqrt{\gamma} (K \gamma_{ij} \gamma^{ij} - \gamma_{ij} K^{ij}) \\ &= \sqrt{\gamma} (3K - K) = 2\sqrt{\gamma} K \end{aligned} \quad (2.29)$$

¹⁵No consideraremos el término $\frac{1}{16\pi}$ de aquí en adelante.

¹⁶Así, la densidad lagrangiana total será $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_B$

¹⁷Nótese que $\pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} = 0$ y $\pi_{N^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^i} = 0$

Despejando K en términos de π , usando la anterior expresión, se tiene,

$$\bullet K = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.30)$$

Sustituyendo K en (2.28) es posible obtener K^{ij} en términos de π^{ij} y su traza,

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= \sqrt{\gamma} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{ij} - K^{ij} \right) \\ \Rightarrow \bullet K^{ij} &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Finalmente, es posible obtener $\dot{\gamma}_{ij}$ en términos del momento conjugado y su traza, al utilizar la expresión (2.6) y sustituir el valor de K^{ij} ,

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{2N} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \dot{\gamma}_{ij}) \\ 2NK_{ij} &= \nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \dot{\gamma}_{ij} \\ \Rightarrow \dot{\gamma}_{ij} &= \nabla_i N_j + \nabla_j N_i - 2NK_{ij} \\ &= \nabla_i N_j + \nabla_j N_i - 2N \left[\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) \right] \\ \Rightarrow \bullet \dot{\gamma}_{ij} &= \nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Con las equivalencias (2.5.2), (2.31) y (2.32), se puede reescribir la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_0$ en dependencia de π^{ij} y π ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= N\sqrt{\gamma} \left({}^3R - K^2 + K^{ij} K_{ij} \right) \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma_{ij} - 2\pi_{ij}) \right] \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \frac{\pi^2}{4\gamma} + \frac{1}{4\gamma} (\pi \gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) (\pi \gamma_{ij} - 2\pi_{ij}) \right] \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \frac{\pi^2}{4\gamma} + \frac{1}{4\gamma} (\pi^2 \gamma^{ij} \gamma_{ij} - 2\pi \gamma^{ij} \pi_{ij} - 2\pi^{ij} \pi \gamma_{ij} + 4\pi^{ij} \pi_{ij}) \right] \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \frac{\pi^2}{4\gamma} + \frac{1}{4\gamma} (3\pi^2 - 2\pi \gamma_{ij} \pi^{ij} - 2\pi \gamma_{ij} \pi^{ij} + 4\pi^{ij} \pi_{ij}) \right] \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \frac{\pi^2}{4\gamma} + \frac{3\pi^2}{4\gamma} - \frac{1}{4\gamma} (2\pi^2 \gamma_{ij} \pi^{ij}) + \frac{1}{\gamma} \pi^{ij} \pi_{ij} \right] \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \frac{\pi^2}{4\gamma} + \frac{3\pi^2}{4\gamma} - \frac{1}{\gamma} \pi^2 + \frac{1}{\gamma} \pi^{ij} \pi_{ij} \right] \\ &= N\sqrt{\gamma} \left[{}^3R + \frac{1}{\gamma} \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right] \\ \Rightarrow \mathcal{L}_0 &= N\sqrt{\gamma} {}^3R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por lo que la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}_0$ correspondiente a $\mathcal{L}_0$ será:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_0 \\ &= \pi^{ij} \left[\nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma_{ij} - 2\pi_{ij}) \right] - N\sqrt{\gamma} {}^3R - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right)\end{aligned}$$

Dado que $\pi^{ij} = \pi^{ji}$,

$$\begin{aligned}&= \pi^{ij} \nabla_i N_j + \pi^{ij} \nabla_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi \pi^{ij} \gamma_{ij} - 2\pi^{ij} \pi_{ij}) - N\sqrt{\gamma} {}^3R - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \\ &= 2\pi^{ij} \nabla_i N_j - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi^2 - 2\pi^{ii} \pi_{ij}) - N\sqrt{\gamma} {}^3R - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \\ &= 2\pi^{ij} \nabla_i N_j - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \pi^2 + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \frac{\pi^2}{2} + \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \pi^{ij} \pi_{ij} - N\sqrt{\gamma} {}^3R \\ &= 2\pi^{ij} \nabla_i N_j - \frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \pi^2 + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \pi^{ij} \pi_{ij} - N\sqrt{\gamma} {}^3R \\ &= 2\pi^{ij} \nabla_i N_j - N\sqrt{\gamma} {}^3R + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \dots\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que,

$$\nabla_i (\pi^{ij} N_j) = (\nabla_i \pi^{ij}) N_j + \pi^{ij} (\nabla_i N_j) \Rightarrow \pi^{ij} \nabla_i N_j = \nabla_i (\pi^{ij} N_j) - (\nabla_i \pi^{ij}) N_j$$

Se tiene densidad Hamiltoniana volumétrica:

$$\dots \Rightarrow \mathcal{H}_0 = 2\nabla_i (\pi^{ij} N_j) - 2(\nabla_i \pi^{ij}) N_j - N\sqrt{\gamma} {}^3R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \quad (2.34)$$

De igual manera, es posible obtener la densidad Hamiltoniana que le corresponde al Lagrangiano $\mathcal{L}_B$, de manera trivial como $\mathcal{H}_B = -\mathcal{L}_B$, pues no se tiene más que una variable dinámica, por lo que H queda:

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_0 d^3x + 2 \oint_{S_t} (\kappa - \kappa_0) N \sqrt{\sigma} d^2x \quad (2.35)$$

Al integrar sobre Σ_t el primer término de la ecuación (2.34), se puede aplicar el teorema de Stokes generalizado en éste, transformando esta integral volumétrica en una integral de contorno, es decir, [DM20]

$$2 \int_{\Sigma_t} \nabla_i (\pi^{ij} N_j) d^3x = 2 \oint_{S_t} N_i \frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} r_j \sqrt{\sigma} d^2x$$

De esta manera, el Hamiltoniano total del sistema H estará constituido por una parte volumétrica H_Σ y otra parte de borde H_S , como sigue¹⁸:

$$H_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[-2 \left(\nabla_i \pi^{ij} \right) N_j - N \sqrt{\gamma} {}^3R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) \right] d^3x \quad (2.36)$$

$$H_S = 2 \oint_{S_t} \left[N(\kappa - \kappa_0) + N_i \frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} r_j \right] \sqrt{\sigma} d^2x \quad (2.37)$$

2.6 Masa ADM

Cuando se impone que los campos tensoriales γ_{ij} y K_{ij} satisfagan las ecuaciones de movimiento en el vacío, el término volumétrico (2.36) del Hamiltoniano total desaparece. Esto se puede ver al tomar una reescritura para este.

Sean,

$$B^0 = \sqrt{\gamma} {}^3R + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right)$$

$$B^j = -2 \nabla_i \pi^{ij}$$

Reescrituras para los términos del Hamiltoniano volumétrico, los cuales permiten verlo de una manera compacta, es decir,

$$H_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[N B^0 + N_j B^j \right] d^3x = \int_{\Sigma_t} N_\mu B^\mu d^3x$$

Ahora, recordando que δN y δN^i son distintos de cero en el interior del espaciotiempo, entonces la variación de la acción con respecto a cada una de las variables ADM será,

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta N} = B^0 \quad \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta N_j} = B^j \quad (2.38)$$

Por lo que al extremar, se obtendrá de manera clara que $B^0 = 0$ y $B^j = 0$ al satisfacerse las ecuaciones de movimiento en el vacío, lo que implica que H_{Σ_t} desaparece. De esta manera, la única contribución al Hamiltoniano total H vendrá por cuenta del término de frontera (2.37).

Para garantizar que este Hamiltoniano $H = H_S$ represente una buena definición para la energía total del espaciotiempo, se deben imponer ciertas restricciones sobre la geometría asintótica de las 3-variedades Σ_t que folian $\mathcal{M}$, además de tomar una elección adecuada para las variables Lapse y Shift.

Definición 3. Sea una 4-variedad $(\mathcal{M}, g)$ espaciotemporal globalmente hiperbolica, foliada por una familia $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de hipersuperficies tipo espacio. Se dice que un espaciotiempo

¹⁸Es decir, $H = H_\Sigma + H_S$

es asintóticamente plano si y sólo si existe en cada Σ_t una métrica de fondo f_{ij} , tal que: [DM20]

1. f_{ij} es plana excepto en un subconjunto compacto $\mathcal{C} \subset \Sigma_t$.
2. Dado un sistema de coordenadas (y^i) en Σ_t . Fuera de $\mathcal{C}$ se tendrá que $f_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ y la función radial $r(y^i)$ será no acotada.
3. Cuando $r \rightarrow \infty$ los campos tensoriales γ_{ij} , K_{ij} y sus derivadas muestran el siguiente comportamiento asintótico:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= f_{ij} + \mathcal{O}(r^{-1}) & K_{ij} &= \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial y^a} &= \mathcal{O}(r^{-2}) & \frac{\partial K_{ij}}{\partial y^a} &= \mathcal{O}(r^{-3}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Considerando un marco de referencia tipo Lorentz (ξ^μ) , de tal manera que $\xi^0 = \text{constante}$, se reproduce la región asintóticamente plana de Σ_t , en donde las coordenadas sobre ésta van como $y^i = y^i(\xi^j)$, mientras que en $\mathcal{M}$ las coordenadas serán $x^\mu = x^\mu(\xi^\alpha)$. Un observador en reposo (en el marco de Lorentz) se moverá con una 4-velocidad,

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \quad (2.40)$$

Dado que $u_\mu u^\mu = -1$ y u^μ es ortogonal a la hipersuperficie dada por el tiempo propio constante $\xi^0 = \tau = \text{constante}$, la cual es equivalente a Σ_t asintóticamente plano, entonces en infinito,

$$u^\mu = n^\mu \quad (2.41)$$

Por lo que al tomar la expresión (2.1), se logra describir el vector tangente ∂_t a $y^i = \text{constante}$ en términos de las funciones Lapse y Shift,

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial t} = N n^\mu + N^i \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} = N u^\mu + N^i \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \quad (2.42)$$

Si se toma $N = 1$ y $N^i = 0$, se logra una equivalencia entre la 4-velocidad del observador en reposo y el vector tangente a curvas constantes sobre el infinito asintótico de las hipersuperficies de Cauchy, lo que valida el hecho de tener un observador estático para esta región en cuestión.

Finalmente, conocidas las restricciones para la frontera de Σ_t y los valores necesarios que deben tomar las funciones Lapse y Shift para garantizar un observador estático en esta región, se puede garantizar una expresión para la energía del espaciotiempo, al adicionar la constante multiplicativa $(16\pi)^{-1}$ en (2.37):

$$M_{ADM} = \lim_{S_t \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \oint_{S_t} (\kappa - \kappa_0) \sqrt{\sigma} d^2x \quad (2.43)$$

2.6.1 Masa del agujero negro de Schwarzschild

Considerando el espaciotiempo de Schwarzschild, en las coordenadas estándar (t, r, θ, ϕ) se tiene el siguiente elemento de línea,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.44)$$

luego, la métrica inducida γ sobre cada Σ_t al usar la coordenadas (r, θ, ϕ) en ésta viene dada por

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2\theta, \right] \quad (2.45)$$

Cuya métrica plana de fondo f se puede ver en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) como:

$$f_{ij} = \text{diag} (1, r^2, r^2 \sin^2\theta) \quad (2.46)$$

Ahora, el escalar de curvatura extrínseca κ en el borde S_t viene dado por $\kappa = -\nabla_i n^i$,¹⁹

$$\kappa = \partial_i n^i + \Gamma_{ki}^i n^k \quad (2.47)$$

Recordando que las componentes contravariantes del vector normal a S_t vienen dadas por

$$n^i = \left(\sqrt{\frac{r-2m}{r}}, 0, 0 \right)^i \quad (2.48)$$

y que los símbolos de Christoffel para γ son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= -\frac{m}{r(r-2m)} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -(r-2m)\sin^2\theta & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -(r-2m) & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot\theta \end{aligned} \quad (2.49)$$

Se obtiene la expresión explícita para la curvatura extrínseca

$$\begin{aligned} \kappa &= - \left[\partial_i \left(\sqrt{\frac{r-2m}{r}} \right) + \sqrt{\frac{r-2m}{r}} \left(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi \right) \right] \\ &= - \left[\frac{m}{r^2 \sqrt{\frac{r-2m}{r}}} + \sqrt{\frac{r-2m}{r}} \left(-\frac{m}{r(r-2m)} + \frac{2}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{2}{r} \sqrt{\frac{r-2m}{r}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

¹⁹En esta parte nombramos $r^i = n^i$, para evitar confusiones con la naturaleza de $\vec{r}$, el cual es normal a S_t .

De manera similar se puede obtener la curvatura escalar κ_0 para S_t como una incrustación en un espaciotiempo plano ($m = 0$), al utilizar los símbolos de Christoffel para la métrica f_{ij} ,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{1}{r} & \Gamma_{r\phi}^{\phi} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \operatorname{sen}^2 \theta & \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r & \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \cot \theta\end{aligned}\tag{2.51}$$

$$\kappa_0 = -\left(\Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{r\phi}^{\phi}\right) = -\frac{2}{r}\tag{2.52}$$

Finalmente, si se describe S_t como una 2-esfera con radio r , entonces el determinante de la métrica σ inducida en éste tendrá la forma $\sigma = r^2 \operatorname{sen} \theta$. Tomando esta última consideración junto a los valores de las curvatura escalares en (2.43), se obtiene la masa m para el agujero negro Schwarzschild para un espacio asintóticamente plano:

$$\begin{aligned}M_{ADM} &= \frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (\kappa - \kappa_0) \sqrt{\sigma} d^2x \\ &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{r} \left(\sqrt{\frac{r-2m}{r}} - 1 \right) r^2 \operatorname{sen} \theta \\ &= -\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\sqrt{\frac{r-2m}{r}} - 1 \right) = m\end{aligned}\tag{2.53}$$

Método ADT

” *A partir de ahora el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a desvanecerse en meras sombras, y solamente una especie de unión de los dos conservará la independencia.*

— **Hermann Minkowski**

A principios del siglo XX, la matemática Emmy Noether postuló que todo sistema de leyes físicas que contenga algún tipo de simetría continua tendrá asociado una ley de conservación para una cantidad física particular. Después de la construcción de la Relatividad General en 1915, y con la lupa del desarrollo hecho por Noether en 1918, multitud de físicos se preguntaron sobre cómo las simetrías de ciertos espaciotiempos podrían hablar sobre las cantidades conservadas en estos, algo que se denominó *cargas conservadas*. En estos términos, las direcciones dadas por los campos Killing alimentaban justamente el hambre por encontrar, en el caso de una teoría completamente geométrica (como es el caso de la relatividad general), cantidades conservadas, pues como base se tenía que el tensor métrico era invariante al moverlo por alguna de estas direcciones. Por lo que estudiar a partir de las simetrías geométricas las simetrías asociadas con el tensor de energía-momento fue un claro camino para conseguir información de cantidades conservadas del espaciotiempo en presencia o no de materia.

El método de Abbott-Deser-Tekin (ADT), el cual se encuentra descrito en un conjunto de artículos [AD82], [DT03], [DT02], tiene su fundación en el año 1982, y se basa fuertemente en el uso de las simetrías de un espaciotiempo de fondo medidas por sus killings asociados, asegurando que al perturbar esta solución de vacío para construir una solución nueva (no necesariamente solución de vacío), se puede, en el borde espacial, restringir a nulidad lo perturbado, de tal manera que se puedan calcular cantidades conservadas de la solución perturbada, mediante las simetrías de borde del espaciotiempo de fondo.

3.1 Cantidades conservadas

Dado un espaciotiempo cuatridimensional con constante cosmológica Λ , las ecuaciones de movimiento que describen este espacio al considerar la ausencia de materia serán:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

La presencia de un término Λ acompañando al tensor de Einstein induce un grado extra de libertad para describir la topología del espaciotiempo en cuestión. Particularmente, las soluciones máximamente simétricas con $\Lambda \neq 0$ caracterizan una 4-variedad $\mathcal{M}$ con curvatura constante positiva $\Lambda > 0$ en todos sus puntos o constante negativa $\Lambda < 0$ en los mismos. A las soluciones de vacío que acompañan a cada elección de Λ se les conoce como *de Sitter* (**dS**) y *Anti de Sitter* (**AdS**), respectivamente, dado el signo para la constante cosmológica.¹

En este formalismo se aprovechan fuertemente las simetrías subyacentes para las soluciones de vacío (*A*)dS,² para estudiar otras soluciones a (3.1), como es el caso de los agujeros negros **dS-Schwarzschild**. El enfoque que se tomará es un caso simplificado para el método ADT; su fuerza se extiende más allá de lo aquí tratado; para ver la forma general de este véase [DT02][DT03]. Bajo estas circunstancias, se comienza pensando la métrica $g_{\mu\nu}$ solución para (3.1), como la adición de dos 2-tensores simétricos $\bar{g}_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

El primero de ellos representa la solución de vacío maximalmente simétrica (*A*)dS, mientras que el segundo será una perturbación(no necesariamente pequeña) a esta métrica de fondo, el cual decae en infinito.

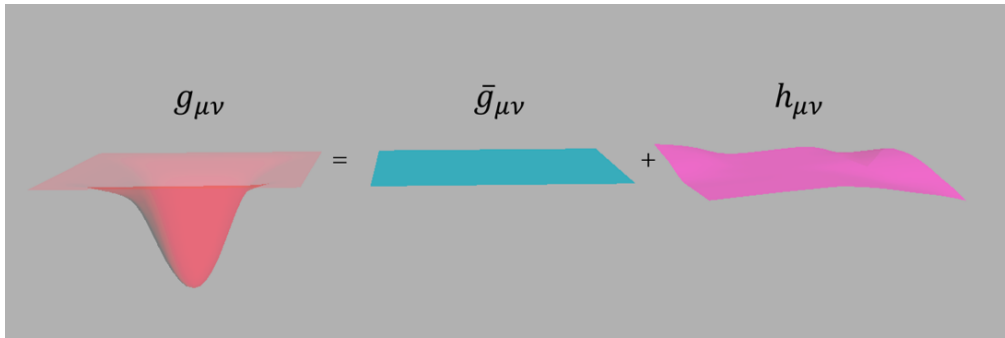


Fig. 3.1.: Representación de la ecuación (3.2), en donde $g_{\mu\nu}$ representará la métrica de un agujero negro, $\bar{g}_{\mu\nu}$ será la métrica de fondo solución a las ecuaciones de campo sin presencia de materia, y $h_{\mu\nu}$ será la perturbación que decae rápidamente en el infinito espacial. En la figura se han considerado superficies con tiempo constante

¹Estas soluciones describen un universo en expansión (caso dS) o contracción (caso AdS) con aceleración constante.

²De ahora en adelante, para hablar de las soluciones AdS y dS de manera conjunta, se utilizará (*A*)dS.

Basándose en esta división, es posible expandir la parte izquierda de (3.1) de tal manera que se obtienen las ecuaciones de movimiento repartidas en distintos términos, clasificados según el orden para la perturbación $h_{\mu\nu}$ que contengan (ver [A.1] para un desarrollo completo), es decir,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)} + \mathcal{G}_{\mu\nu}^L + B_{\mu\nu}^{(2)} + C_{\mu\nu}^{(3)} + D_{\mu\nu}^{(4)} + E_{\mu\nu}^{(5)} + F_{\mu\nu}^{(6)} = 0 \quad (3.3)$$

En particular, nótese que $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)} = 0$ pues representa las ecuaciones en (3.1). Por otro lado, $\mathcal{G}_{\mu\nu}^L$ representa las ecuaciones de movimiento linearizadas en $h_{\mu\nu}$, las cuales pueden ser despejadas de tal manera que los términos cuadráticos y de mayor orden para $h_{\mu\nu}$ se puedan agrupar en un lado de la equivalencia para definir la densidad tensorial de energía-momento $T^{\mu\nu}$ del campo gravitacional

$${}^L R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} R^L - \Lambda h^{\mu\nu} = (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Aquí las cantidades geométricas en términos lineales de la perturbación se tienen como:

$$\left. \begin{aligned} {}^L \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla}_\mu h_{\nu}^\alpha + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu}^\alpha - \bar{\nabla}^\alpha h_{\mu\nu} \right) \\ R_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\mu h_{\alpha\nu} + \bar{\nabla}^\beta \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\beta} \right] \\ R^L &= -\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h^{\alpha\rho} - \Lambda h \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Para mayor detalle de cómo se obtienen estas expresiones linearizadas consúltese el apéndice (A.1.1). Una característica notoria para las ecuaciones en (3.4) es que estas al obedecer las identidades de Bianchi permiten concluir que (ver A.1.2):

$$\bar{\nabla}_\mu {}^L \mathcal{G}^\mu_\nu = \bar{\nabla}_\mu \left({}^L R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R^L - \Lambda h^\mu_\nu \right) = 0 \quad (3.6)$$

Lo que conlleva que $\bar{\nabla}_\mu [(-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu}] = 0$, al ver el lado derecho de (3.4). Dado que la nulidad de divergencia covariante no garantiza una cantidad conservada, pues su conservación depende fuertemente de los espacios vectoriales $T_p \mathcal{M}$ a cada punto (p) de la 4-variedad $\mathcal{M}$ espaciotemporal de fondo³ se puede construir una nueva cantidad tensorial $W^\mu \equiv (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu$, tal que al usar las ecuaciones de Killing $\bar{\nabla}_\mu \bar{\xi}_\nu + \bar{\nabla}_\nu \bar{\xi}_\mu = 0$ y las simetrías del tensor energía-momento $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, se concluya que dicha cantidad se manifieste globalmente conservada. Para conseguir esto, se procede como sigue:⁴

³Nótese que $\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + T^{\alpha\nu} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\mu} + T^{\mu\alpha} \bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\mu}$ por lo que $\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = 0$ no garantiza necesariamente la nulidad para $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

⁴Para efectos de cálculo, se considerará en lo siguiente la densidad tensorial $\tilde{T}^{\mu\nu} = (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu}$.

Primero, se prueba que W^μ es covariantemente conservado:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) &= \bar{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu + \tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\xi}_\nu \\
&= \bar{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu + \frac{1}{2} (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\xi}_\nu + \tilde{T}^{\nu\mu} \bar{\nabla}_\nu \bar{\xi}_\mu) \\
&= \bar{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu + \frac{1}{2} \tilde{T}^{\mu\nu} (\bar{\nabla}_\mu \bar{\xi}_\nu + \bar{\nabla}_\nu \bar{\xi}_\mu) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por otro lado, desarrollando la derivada covariante del tensor W^μ ,

$$\bar{\nabla}_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) = \partial_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\sigma} \tilde{T}^{\sigma\nu} \bar{\xi}_\nu = 0$$

se utiliza la identidad $\bar{\Gamma}^\mu_{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (\sqrt{-g})$ -ver (B.1)-, y se consigue finalmente que W^μ es conservado:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) &= \partial_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (\sqrt{-g}) \tilde{T}^{\sigma\nu} \bar{\xi}_\nu \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \partial_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) + \partial_\mu (\sqrt{-g}) (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) = 0 \\
\Rightarrow \bar{\nabla}_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) &= \partial_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

De esta manera, si se asume que la perturbación $h_{\mu\nu}$ se anula en el infinito espacial y adicionalmente se tiene en cuenta que sólo cantidades integrales que contienen divergencias de tensores contravariantes permiten definir cantidades invariantes, es posible construir una cantidad conservada (dependiente del tiempo) asociada al vector Killing $\bar{\xi}_\nu$, mediante el uso de (3.8), como:

$$E(\bar{\xi}) = \frac{1}{8\pi G} \int d^3x T^{0\nu} \bar{\xi}_\nu \tag{3.9}$$

Esta cantidad es denominada **Energía Killing** cuando $\bar{\xi}$ es vector tipo tiempo.

3.1.1 $E(\xi)$ como una integral de flujo para un superpotencial

Para reescribir la energía Killing en términos de una integral de flujo es necesario escribir $T^{\mu\nu}$ en términos de un superpotencial $K^{\mu\alpha\nu\beta}$, siguiendo [TWM00, cap. 20]. Para ello se utiliza (3.4)-el desarrollo completo se puede encontrar en (A.2)- y se sustituyen todas sus cantidades linearizadas (3.5), consiguiendo:

$$(-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta} + X^{\mu\nu} \tag{3.10}$$

Con

$$\bullet K^{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} \left[\bar{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} + \bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} - \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} \right] \tag{3.11}$$

$$\bullet X^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}^\nu] H^{\mu\alpha} - \Lambda H^{\mu\nu} \quad (3.12)$$

Donde $H^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\nu}h$, el cual es un 2-tensor simétrico, consecuencia de que $\bar{g}^{\mu\nu}$ y $h^{\mu\nu}$ lo son.

Aquí el tensor $\mathbf{K}$ tiene las simetrías del tensor de Riemann, lo cual se puede verificar fácilmente usando (3.11):

$$\left. \begin{aligned} K^{\mu\alpha\nu\beta} &= \frac{1}{2} [\bar{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} + \bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} - \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu}] \\ K^{\alpha\mu\nu\beta} &= \frac{1}{2} [\bar{g}^{\alpha\beta} H^{\nu\mu} + \bar{g}^{\nu\mu} H^{\alpha\beta} - \bar{g}^{\alpha\nu} H^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\beta} H^{\alpha\nu}] \end{aligned} \right\} K^{\mu\alpha\nu\beta} + K^{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} K^{\mu\alpha\nu\beta} &= \frac{1}{2} [\bar{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} + \bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} - \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu}] \\ K^{\mu\alpha\beta\nu} &= \frac{1}{2} [\bar{g}^{\mu\nu} H^{\beta\alpha} + \bar{g}^{\beta\alpha} H^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\beta} H^{\alpha\nu} - \bar{g}^{\alpha\nu} H^{\mu\beta}] \end{aligned} \right\} K^{\mu\alpha\nu\beta} + K^{\mu\alpha\beta\nu} = 0 \quad (3.13)$$

$$\left. \begin{aligned} K^{\mu\alpha\nu\beta} &= \frac{1}{2} [\bar{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} + \bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} - \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu}] \\ K^{\nu\beta\mu\alpha} &= \frac{1}{2} [\bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} + \bar{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} - \bar{g}^{\nu\mu} H^{\beta\alpha} - \bar{g}^{\beta\alpha} H^{\nu\mu}] \end{aligned} \right\} K^{\mu\alpha\nu\beta} - K^{\nu\beta\mu\alpha} = 0$$

Mientras $X^{\mu\nu}$ se puede reescribir al reemplazar el conmutador por su desarrollo en tensores de Riemann,

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}^\nu] H^{\mu\alpha} &= \bar{R}_\alpha{}^{\nu\mu}{}_\rho H^{\rho\alpha} + \bar{R}_\alpha{}^{\nu\alpha}{}_\rho H^{\mu\rho} \\ &= \bar{R}^\nu{}_{\alpha\rho}{}^\mu H^{\rho\alpha} + \bar{R}^\nu{}_\rho H^{\mu\rho} \\ &= \bar{R}^\mu{}_{\rho\alpha}{}^\nu H^{\rho\alpha} + \bar{R}^\nu{}_\rho H^{\mu\rho} \\ &= \bar{R}^\mu{}_{\rho\alpha}{}^\nu H^{\rho\alpha} + \Lambda \delta_\rho^\nu H^{\mu\rho} \\ &= \bar{R}^\mu{}_{\rho\alpha}{}^\nu H^{\rho\alpha} + \Lambda H^{\mu\nu} \end{aligned}$$

sustituyendo en (3.12), se tiene:

$$\begin{aligned} X^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \bar{R}^\mu{}_{\rho\alpha}{}^\nu H^{\rho\alpha} + \frac{1}{2} \Lambda H^{\mu\nu} - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} [\bar{R}^\mu{}_{\rho\alpha}{}^\nu H^{\rho\alpha} - \Lambda H^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Con esta reexpresión, se pueden verificar fácilmente las simetrías de $X^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} X^{\nu\mu} &= \frac{1}{2} [\bar{R}^\nu{}_{\rho\alpha}{}^\mu H^{\rho\alpha} - \Lambda H^{\nu\mu}] = \frac{1}{2} [\bar{R}^{\nu ab\mu} H_{ab} - \Lambda H^{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{2} [\bar{R}^{b\mu\nu a} H_{ab} - \Lambda H^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} [\bar{R}^{\mu ba\nu} H_{ba} - \Lambda H^{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{2} [\bar{R}^{\mu\rho\alpha\nu} H_{\rho\alpha} - \Lambda H^{\mu\nu}] = X^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Modificando (3.14), es posible reescribir $X^{\mu\nu}$ en términos del superpotencial $K^{\mu\alpha\nu\beta}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
2X^{\mu\nu} &= \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu} H^{\alpha\beta} - \Lambda \delta^{\mu}_{\rho} H^{\nu\rho} = \frac{1}{2} \left[2\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu} H^{\alpha\beta} - 2\bar{R}^{\mu}{}_{\rho} H^{\nu\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu} H^{\alpha\beta} + \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\rho}{}^{\nu} H^{\alpha\rho} - \bar{R}^{\mu}{}_{\bullet\rho\bullet} H^{\nu\rho} - \bar{R}^{\mu}{}_{\bullet\beta\bullet} H^{\nu\beta} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu} H^{\alpha\beta} + \bar{R}^{\mu}{}_{\bullet\bullet\rho} H^{\nu\rho} - \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\rho} H^{\alpha\rho} - \bar{R}^{\mu}{}_{\bullet\beta\bullet} H^{\nu\beta} \right] \\
&= \frac{1}{2} \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta\rho} \left[\bar{g}^{\nu\rho} H^{\beta\alpha} + \bar{g}^{\beta\alpha} H^{\nu\rho} - \bar{g}^{\nu\beta} H^{\alpha\rho} - \bar{g}^{\alpha\rho} H^{\nu\beta} \right] \\
&\Rightarrow X^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta\rho} K^{\nu\alpha\beta\rho} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Con esto último es posible obtener una reescritura para $T^{\mu\nu}$ en (3.10) sólo en términos del superpotencial, lo que hace evidentes las simetrías para el tensor de energía-momento al ver cada término a la derecha de la equivalencia, y que se sustenta en las simetrías mostradas en (3.11)

$$(-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} = \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} K^{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2} \bar{R}^{\mu}{}_{\alpha\beta\rho} K^{\nu\alpha\beta\rho} \tag{3.16}$$

Por otro lado, dando continuidad al desarrollo hecho para conseguir la cantidad conservada $E(\xi)$ en (3.9), se puede ver explícitamente su argumento al contraer la expresión (3.11) con un vector Killing covariante

$$(-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \bar{\xi}_{\nu} = \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} + X^{\mu\nu} \bar{\xi}_{\nu} \tag{3.17}$$

Dado que,

$$\begin{aligned}
\bullet \bar{\nabla}_{\alpha} \left[\bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} \right] &= \left[\bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \right] \bar{\xi}_{\nu} + \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \\
\Rightarrow \left[\bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \right] \bar{\xi}_{\nu} &= \bar{\nabla}_{\alpha} \left[\bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} \right] - \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \tag{*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \bar{\nabla}_{\beta} \left[K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \right] &= \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} + K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \\
\Rightarrow \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} &= \bar{\nabla}_{\beta} \left[K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \right] - K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \tag{**}
\end{aligned}$$

Sustituyendo primeramente (**) en (*), y finalmente reemplazando esta última en (3.17), se tiene

$$\begin{aligned}
\left[\bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \right] \bar{\xi}_{\nu} &= \bar{\nabla}_{\alpha} \left[\bar{\nabla}_{\beta} \left(K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} \right] - \bar{\nabla}_{\beta} \left[K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \right] + K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \\
&= \bar{\nabla}_{\alpha} \left[\left(\bar{\nabla}_{\beta} K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} \right] - \bar{\nabla}_{\alpha} \left[K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\xi}_{\nu} \right] + K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \\
&= \bar{\nabla}_{\alpha} \left[\left(\bar{\nabla}_{\beta} K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} - K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\xi}_{\nu} \right] + K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{\xi}_{\nu} \\
\Rightarrow (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \bar{\xi}_{\nu} &= \bar{\nabla}_{\alpha} \left[\left(\bar{\nabla}_{\beta} K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_{\nu} - K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\xi}_{\nu} \right] + \left[K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_{\beta} \bar{\nabla}_{\alpha} + X^{\mu\nu} \right] \bar{\xi}_{\nu} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Esta expresión puede reducirse más, al usar la identidad $\nabla_\beta \nabla_\alpha \xi_\nu = R^\lambda_{\beta\alpha\nu} \xi_\lambda$ -ver (B.5)-, junto con (3.14), de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
K^{\mu\alpha\nu\beta} \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\alpha \bar{\xi}_\nu + X^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu &= \left[\bar{R}^\lambda_{\beta\alpha\nu} K^{\mu\alpha\nu\beta} + X^{\mu\lambda} \right] \bar{\xi}_\lambda \\
&\bullet \bar{R}^\lambda_{\beta\alpha\nu} K^{\mu\alpha\nu\beta} + X^{\mu\lambda} \\
&\Rightarrow \bar{R}^\lambda_{\beta\alpha\nu} \left[\frac{1}{2} \left(\bar{g}^{\mu\beta} H^{\nu\alpha} + \bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} - \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{R}^\mu_{\alpha\beta\lambda} H^{\alpha\beta} - \Lambda H^{\mu\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\bar{R}^{\lambda\mu}_{\alpha\nu} H^{\nu\alpha} + \bar{R}^\lambda_{\beta\alpha\nu} \bar{g}^{\nu\alpha} H^{\mu\beta} - \bar{R}^\lambda_{\beta\alpha\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} + \bar{R}^\mu_{\alpha\beta}{}^\lambda H^{\alpha\beta} - \Lambda H^{\mu\lambda} \right]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dadas las simetrías para los índices del tensor de Riemann, y dada su contracción con el tensor simétrico $H^{\mu\nu}$, se anularán productos de tensores simétricos cuyos índices están contraídos con dos índices antisimétricos del tensor $\mathbf{R}$. Es el caso del primer y del segundo término, reduciéndose como sigue:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[-\bar{R}^\lambda_{\beta\alpha\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \Lambda H^{\mu\lambda} \right] = \frac{1}{2} \left[\bar{R}^\lambda_{\beta\nu\alpha} \bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \Lambda H^{\mu\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\bar{R}^\lambda_{\nu} H^{\mu\nu} - \Lambda H^{\mu\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\Lambda \delta^\lambda_\nu H^{\mu\nu} - \Lambda H^{\mu\lambda} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Esto concluye que (3.19) es nulo,

por lo que (3.18) se reduce a la divergencia covariante de un tensor $F^{\mu\alpha}$ antisimétrico.

$$(-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu = \bar{\nabla}_\alpha \left[\left(\bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta} \right) \bar{\xi}_\nu - K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu \right] = \bar{\nabla}_\alpha (F^{\mu\alpha}) \tag{3.21}$$

En virtud de su antisimetría (A.2.1), al expandir la derivada covariante se anula el término $\bar{\Gamma}^\alpha_{\delta\alpha} F^{\mu\delta}$ y se puede proceder de la misma manera que en (3.8) para obtener una derivada ordinaria sobre este tensor:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\alpha (F^{\mu\alpha}) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{\mu\alpha}) = (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu \\
&\Rightarrow \partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{\mu\alpha}) = T^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Aplicando el teorema de Stokes generalizado y tomando en cuenta (B.8), se sustituye (3.22) en (3.9), para obtener,

$$E(\bar{\xi}) = \frac{1}{8\pi G} \int d^3x T^{0\nu} \bar{\xi}_\nu = \frac{1}{8\pi G} \oint dS_i \sqrt{-\bar{g}} \left[\bar{\nabla}_\beta K^{0i\nu\beta} - K^{0j\nu i} \bar{\nabla}_j \right] \bar{\xi}_\nu \tag{3.23}$$

3.2 Masa del agujero negro dS-Schwarzschild

Se define el espaciotiempo n -dimensional *de Sitter* (dS^n) como una subvariedad Lorentziana embebida en un espacio plano $\mathbb{L}^{n+1}$ cuya signatura $(-, +, +, +, \dots)$ induce una categorización para los vectores que pertenecen a él, basado en el cálculo de su norma con un producto escalar $\langle\langle, \rangle\rangle$ distinto al euclidiano $\langle, \rangle$ ⁵[ver One83, cap. 3]. En particular, dada la constante cosmológica Λ , dS^n formalmente se describe como:

$$dS^n = \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+1} / \langle\langle x, x \rangle\rangle = \frac{3}{\Lambda} \right\} \quad (3.24)$$

Tomando $n = 4$, se tiene $\mathbb{L}^5$ y dS^4 . Este último representará una 4-variedad cuya forma algebraica se ve como sigue,

$$-z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \frac{3}{\Lambda}, \quad \Lambda > 0 \quad (3.25)$$

Donde $3/\Lambda = \ell^2$ representa el radio de dS^4 . En la figura 3.2(i), representará el radio de S^1 formada al cortar dS^2 con el plano $z_0 = 0$.⁶

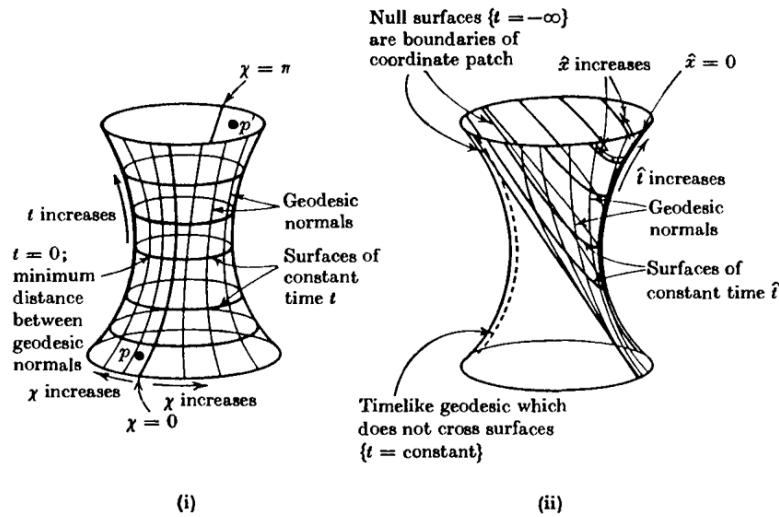


Fig. 3.2.: Espaciotiempo dS^4 , visto como un hiperboloide de una rama, embebido en un espaciotiempo plano dS^2 . En esta figura se han dejado 2 dimensiones constantes para poder visualizar la forma geométrica para de Sitter. (i)Representa dS^4 descrito por las coordenadas globales (t, χ, θ, ϕ) , las cuales, como su nombre lo indica, cubren todo el hiperboloide, y generan 3-superficies de curvatura constante positiva (+1) para $t = \text{constante}$. (ii)Representa dS^4 descrito por las coordenadas "Flat slicing" $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, las cuales cubren sólo la mitad del hiperboloide, y generan 3-superficies planas para $\hat{t} = \text{constante}$. Extraído de [HE23, cap. 5]

Esta subvariedad es maximalmente simétrica, lo que significa que contiene el número máximo de vectores Killing dada su dimensión [Bla11, cap. 14], algo que, como ya se mencionó,

⁵ $\langle\langle u, v \rangle\rangle = -u_0 v_0 + \sum_i u_i v_i = -u_0 v_0 + \langle u, v \rangle$

⁶Los valores de $z_0 = \text{const}$, serán $t = \text{const}$

es bastante útil para encontrar cantidades que permanecen invariantes en estas direcciones Killing y que en virtud del teorema de Noether representarán una cantidad física conservada.

Si se considera dS^4 descrito por la métrica Flat Slicing [ver Rip13], su forma matricial será

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & f(t)\delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

mientras que su elemento de línea asociado viene dado como:

$$ds^2 = -dt^2 + f^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (3.27)$$

Donde $f(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$. Como se ve en la figura 3.2(ii), las coordenadas $(t, \vec{x})$ cubren la mitad del hiperboloide, además, al analizar las dilataciones temporales en (3.27) se puede notar que estas necesariamente van ligadas a dilataciones espaciales con un factor de $f^2(t)$, por lo que el vector Killing asociado a estas simetrías viene dado como -ver (■) en (A.3)-

$$\bar{\xi}^\mu = \left(-1, \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x^i\right) \quad (3.28)$$

cuya norma viene dada por $\xi^2 = -1 + \frac{\Lambda}{3}f^2|\vec{x}|^2$, por lo que si se desea garantizar que (3.28) sea un vector temporal, se debe cumplir que $\frac{\Lambda}{3}f^2|\vec{x}|^2 < 1$. De tal manera, configurando $\bar{\xi}^\mu$ como un vector tipo tiempo, es posible conseguir la energía Killing $E(\bar{\xi})$ asociada a estos campos temporales de forma explícita en términos de la perturbación $h_{\mu\nu}$.

Tomando (3.26) junto con los vectores Killing temporales, se sustituye en (3.23) y se consigue para ver los cálculos completos ver (A.4),

$$\begin{aligned} E(\bar{\xi}) = \frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_j h^{ij} - \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} + 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} h^{0i} \right) \right. \\ + \frac{1}{2} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{jk} x^k \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{ml} \partial_0 (f^2 h^{ml}) + f^{-2} (\delta^{ij} \partial_l h^{0l} - \delta^{il} \partial_l h^{0j}) - \partial_0 h^{ij} \right] \\ \left. + \frac{\Lambda}{3} (h^{00} x^i - f^2 h^{ij} \delta_{jk} x^k) \right\} \quad (3.29) \end{aligned}$$

Adicionalmente, se debe obtener la forma explícita para la perturbación $h_{\mu\nu}$. Para ello, se toma la métrica $g_{\mu\nu}$ del agujero dS-Schwarzschild presentada en ([KN81a]) y ([KN81b]),

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1-\psi}{1+\psi}\right)^2 & 0 \\ 0 & f^2(t) (1+\psi)^4 \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

cuyo elemento de línea viene definido como:

$$ds^2 = - \left(\frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^2 dt^2 + f^2(t) (1+\psi)^4 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.31)$$

Donde $\psi = r_0/f r$ con r_0 el radio del horizonte de eventos del agujero negro dS-Schwarzschild y $r \equiv \sqrt{\delta_{ij} x^i x^j}$. Por lo que al usar (3.2) se obtiene la forma explícita para la perturbación $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^2 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} f^2(t) [(1+\psi)^4 - 1] \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Considerando el radio del agujero negro de Schwarzschild⁷ $R_s = f^{-1} r_0$ de tal manera que este sea mucho más pequeño que el horizonte de dS^4 en la carta de coordenadas estática $f^{-1} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ [ver Rip13, cap. 2], se tiene que:

$$R_s \lll f^{-1} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \Rightarrow r_0 \lll \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \quad (3.33)$$

Así que la integral de superficie (3.29) puede computarse muy lejos del horizonte de eventos del agujero negro, pero aún estando dentro del horizonte de dS^4 .⁸ Por otro lado, en virtud de la restricción $r \rightarrow \infty \Rightarrow h_{\mu\nu} \rightarrow 0$, es posible expandir la perturbación $h_{\mu\nu}$ centrada en $\psi = 0$ ⁹ y descartar los términos $\mathcal{O}[(r_0/r)^2]$. Para ellos, se definen las siguientes funciones:

$$\bullet H(\psi) = \left(\frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^2 \quad (*)$$

$$\bullet K(\psi) = (1+\psi)^4 \quad (**)$$

Expandiendo (*) en serie de Taylor sobre $\psi = 0$,

$$\rightarrow H(\psi) = H(\psi)|_{\psi=0} + \left[\frac{d}{d\psi} H(\psi) \right]_{\psi=0} \psi + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\psi^2} H(\psi) \right]_{\psi=0} \psi^2 + \dots$$

a primer orden,

$$\begin{aligned} \rightarrow H(\psi) &\simeq H(0) + \left[\frac{d}{d\psi} \left(\frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^2 \right]_{\psi=0} \psi \\ \rightarrow H(\psi) &\simeq 1 + 2 \left(\frac{1-\psi}{1+\psi} \right)_{\psi=0} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1-\psi}{1+\psi} \right) \Big|_{\psi=0} \psi \\ \rightarrow H(\psi) &\simeq 1 + 2 \left(\frac{-2}{(\psi+1)^2} \right)_{\psi=0} \psi = 1 - 4\psi \end{aligned}$$

⁷Este radio subtiende un horizonte de eventos estático a diferencia de r_0 que crece en un factor de $f(t)$, basta recalcar que esto sólo es un cambio de carta coordenada.

⁸ $r_0 \lll r < \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$

⁹Nótese que esto se realiza para mantener la consistencia de $\mathbf{h}$ nula en el infinito, pues en esos regímenes $\psi \rightarrow 0$

sustituyendo en $h_{00} = g_{00} - \bar{g}_{00}$,

$$h_{00} = g_{00} - \bar{g}_{00} = 1 - (1 - 4\psi) = 4\psi, \text{ como } \psi = \frac{r_0}{fr}$$

y dado que,

$$\begin{aligned} h^{00} &= \bar{g}^{0\alpha} \bar{g}^{0\beta} h_{\alpha\beta} \Rightarrow h^{00} = h_{00}, \text{ pues } \bar{g}^{0\nu} = \bar{g}^{00} = -1 \\ &\Rightarrow h^{00} = 4f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

De la misma manera, se expande (**) en serie de Taylor en torno a $\psi = 0$,

$$\rightarrow K(\psi) = K(\psi)|_{\psi=0} + \left[\frac{d}{d\psi} K(\psi) \right]_{\psi=0} \psi + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\psi^2} K(\psi) \right]_{\psi=0} \psi^2 + \dots$$

a primer orden,

$$\begin{aligned} \rightarrow K(\psi) &\simeq K(\psi)|_{\psi=0} + \left[\frac{d}{d\psi} (1 + \psi)^4 \right]_{\psi=0} \psi \\ \rightarrow K(\psi) &\simeq K(0) + 4(1 + \psi)^3|_{\psi=0} \left[\frac{d}{d\psi} (1 + \psi) \right]_{\psi=0} \psi \\ \rightarrow K(\psi) &\simeq 1 + 4\psi \end{aligned}$$

dado que $h_{kl} = \delta_{kl} f^2(t) [(1 + \psi)^4 - 1]$ y $\bar{g}^{ab} = f^{-2} \delta^{ab}$, entonces,

$$\begin{aligned} h^{ij} &= \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} h_{kl} \\ &= \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} \delta_{kl} f^2(t) [(1 + \psi)^4 - 1] \\ &= f^{-4} \delta^{ik} \delta^{jl} \delta_{kl} f^2 [(1 + \psi)^4 - 1] \\ &\Rightarrow h^{ij} = f^{-2} \delta^{ij} [(1 + \psi)^4 - 1] \end{aligned}$$

se sustituye el valor de la aproximación para $K(\psi)$ en h^{ij} , para conseguir:

$$\begin{aligned} h^{ij} &= f^{-2} \delta^{ij} [1 + 4\psi - 1] = 4f^{-2} \delta^{ij} \psi \\ &= 4f^{-2} \delta^{ij} f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) \\ &\Rightarrow h^{ij} = 4f^{-3} \delta^{ij} \left(\frac{r_0}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $h^{\mu\nu}$ es diagonal, y por lo tanto sus términos $h^{i0} = h^{0i} = 0$, además, reescribiendo $h^{ij} = 4f^{-3} \delta^{ij} \left(\frac{r_0}{r} \right) = A \delta^{ij}$ y $h^{00} = 4f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) = B$, se puede dar uso a la ecuación (3.29), sustituyendo las reescrituras para las componentes diagonales de la

perturbación y anulando en esta expresión aquellos que estén fuera de la diagonal, de tal manera que la expresión para la energía se reduce a (para los cálculos completos ver (A.5)):

$$E(\bar{\xi}) = \frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i \left\{ -\partial_j A \delta^{ij} + x^i \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} (2f^2 A + B) \right] \right\} \quad (3.36)$$

Analizando los términos, en la anterior expresión, que están multiplicados por x^i , $\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} (2f^2 A + B) \Rightarrow$

dado que,

$$2f^2 A = 2f^2 \left[4f^{-3} \left(\frac{r_0}{r} \right) \right] = 8f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

$$\bullet \frac{\Lambda}{3} (2f^2 A + B) = \frac{\Lambda}{3} \left[8f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) + 4f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) \right] = \frac{\Lambda}{3} \left[12f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) \right]$$

por otro lado,

$$\partial_0 A = 4 \left(\frac{r_0}{r} \right) \partial_0 f^{-3} = 4 \frac{r_0}{r} (-3f^{-4}) \partial_0 f = 4 \frac{r_0}{r} (-3f^{-4}) \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f$$

$$\rightarrow \partial_0 A = 4 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{r_0}{r} \right) (-3f^{-4}) f = -12 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{r_0}{r} \right) f^{-3}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \left[-12 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{r_0}{r} \right) f^{-3} \right] = -12 \left(\frac{\Lambda}{3} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right) f^{-1}.$$

Sustituyendo, se puede ver que este conjunto de términos se anula,

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} (2f^2 A + B) = -12 \left(\frac{\Lambda}{3} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right) f^{-1} + \frac{\Lambda}{3} \left[12f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) \right] = 0. \quad (3.37)$$

Por último, $E(\bar{\xi})$ se reduce como:

$$E(\bar{\xi}) = -\frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i (\partial_j A) \delta^{ij} \quad (3.38)$$

Usando la métrica (3.27) en coordenadas esféricas, se procede a calcular la integral de flujo sobre una superficie esférica de radio r , para ello, nótese que:

$$\partial_j A = 4f^{-3} r_0 \partial_j \left(\frac{1}{r} \right)$$

Con $\partial_j (r^{-1}) = -r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x^j} = -r^{-2} \partial_j r$, se puede verificar que:

$$r^2 = x^a x_a = \delta_{ij} x^i x^j \Rightarrow \partial_k (r^2) = \partial_k (\delta_{ij} x^i x^j)$$

$$\rightarrow 2r \partial_k r = \delta_{ij} \left[(\partial_k x^i) x^j + x^i (\partial_k x^j) \right]$$

$$\rightarrow 2r \partial_k r = \delta_{ij} \left[\delta^i_k x^j + \delta^j_k x^i \right] = \delta_{kj} x^j + \delta_{ki} x^i$$

$$\rightarrow 2r \partial_k r = \delta_{ka} x^a + \delta_{ka} x^a = 2\delta_{ka} x^a$$

$$\Rightarrow \partial_j r = \frac{1}{r} \delta_{ja} x^a$$

Resultando que $\partial_j A$ queda como,

$$\partial_j A = -4f^{-3} \left(\frac{r_0}{r^3} \right) \delta_{ja} x^a \quad (3.39)$$

entonces al sustituir esto en (3.38), se halla el valor de la energía Killing, es decir, la masa del agujero negro dS-Schwarzschild,

$$E(\bar{\xi}) = -\frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i (\partial_j A) \delta^{ij} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \oint dS_i (\partial_j A) \delta^{ij} &= -4f^{-3} r_0 \oint |dS| \left(\frac{1}{r^3} \right) \delta_{ja} \delta^{ij} x^a n_i \\ &= -4f^{-3} r_0 \oint |dS| \left(\frac{1}{r^3} \right) r = -4f^{-3} r_0 \oint |dS| \frac{1}{r^2} \\ &= -4r_0 f^{-3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r^2 \sin \phi) \frac{1}{r^2} d\phi d\theta = -16r_0 \pi f^{-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(\bar{\xi}) = -\frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i (\partial_j A) \delta^{ij} = -\frac{f^3}{8\pi G} [-16r_0 \pi f^{-3}] = \frac{2r_0}{G} = M \quad (3.40)$$

pues $r_0 = \frac{GM}{2}$.

Método Cuasilocal

” *Hay más cosas en el cielo y la tierra, Horacio, de las que puedes soñar en tu filosofía*

— William Shakespeare
Hamlet

En la física, se utiliza una cantidad matemática llamada acción para describir la dinámica de un sistema. La extremización de la acción permite obtener las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento de este en la realidad, a través del principio de mínima acción. Es importante destacar que cuando un sistema satisface las ecuaciones de movimiento derivadas de la extremización de la acción, se dice que está "on-shell". En cambio, si se eliminan las restricciones impuestas por estas ecuaciones, se dice que está "off-shell". La acción contiene un término llamado lagrangiano L , que depende de las variables dinámicas y codifica su información física. Al considerar transformaciones continuas que dejan invariante el lagrangiano de un sistema, se obtiene un conjunto de simetrías para él, y una corriente conservada asociada a ellas, conocida como "corriente de Noether". A partir de esta corriente, se pueden construir cargas conservadas, las cuales son responsables de mantener las simetrías en el espacio de estados de la teoría correspondiente.

En 2013, Kim, Kulkarni, y Yi perfeccionaron los resultados de Barnich y sus colaboradores [Bar03; BC05] en el cálculo de cargas conservadas para espaciotiempos más generales. Basados en el desarrollo previo y las ideas propuestas por el método ADT, Kim y sus colegas desarrollaron un método que elimina la limitación de tener una métrica de fondo (una solución de vacío). Este método se basa en relacionar potenciales conservados de manera *off-shell* e integrarlos de forma cuasilocal, es decir, sobre un dominio espaciotemporal extenso pero finito, apoyándose en los factores libres de la métrica solución para considerar una integral sobre un camino de parámetros. Hasta ahora, la integración de los potenciales conservados se realizaba necesariamente sobre todo el espaciotiempo, pero el método cuasilocal permite una integración más restringida.

4.1 Corriente y potencial de Noether off-shell

Considerando la acción I para una teoría general de gravedad covariante en D dimensiones,

$$I[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} L[g_{\mu\nu}, R, R_{\mu\nu}, \nabla R, \nabla R_{\mu\nu}]. \quad (4.1)$$

Es bien conocido que la forma general para la variación de la acción δI con respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$, viene dada por (siguiendo a [KKY13]):

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x [\sqrt{-g} \mathcal{E}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \partial_\mu \Pi^\mu(g; \delta g)]. \quad (4.2)$$

Donde $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$ representa las ecuaciones de movimiento para la métrica, y $\partial_\mu \Pi^\mu$ representará los términos de borde.

Con la intención de ver cómo cambia la acción I al tomar un difeomorfismo infinitesimal θ , es menester, en primera instancia, responder a esta pregunta para la métrica $g_{\mu\nu}$ y para la densidad Lagrangiana $\sqrt{-g}L$. En el caso de la métrica, al considerar un difeomorfismo infinitesimal $x^a \rightarrow x^a + \theta^a(x)$ su elemento de línea queda como:

$$g_{ab}(x) dx^a dx^b \rightarrow g_{ab}(x + \theta)(dx^a + d\theta^a)(dx^b + d\theta^b) \equiv \overline{g_{ab}}(x) dx^a dx^b$$

Con $\overline{g_{ab}}(x)$ la métrica transformada bajo θ . Si se expande $g_{ab}(x + \theta)$ hasta primer orden, lo que se tiene es:

$$g_{ab}(x + \theta) \approx g_{ab}(x) + \theta^c \partial_c g_{ab}(x).$$

Ahora, con esto, y teniendo el diferencial total $d\theta^a = (\partial_c \theta^a) dx^c$, sustituimos en el elemento de línea, despreciando los términos de segundo y mayor orden en θ :

$$\begin{aligned} \overline{g_{ab}} dx^a dx^b &\equiv [g_{ab}(x) + \theta^c (\partial_c g_{ab}(x))] [dx^a + (\partial_c \theta^a) dx^c] [dx^b + (\partial_c \theta^b) dx^c]. \\ &\Rightarrow [g_{ab} + \theta^c \partial_c g_{ab}] [dx^a dx^b + (\partial_c \theta^b) dx^c dx^a + (\partial_c \theta^a) dx^c dx^b + (dx^c)^2 (\partial_c \theta^a) (\partial_c \theta^b)] \\ &= (g_{ab} dx^a dx^b) + (g_{ab} (\partial_c \theta^b) dx^c dx^a) + (g_{ab} (\partial_c \theta^a) dx^c dx^b) + (\theta^c \partial_c g_{ab} dx^a dx^b) + \\ &\quad (\theta^c (\partial_c g_{ab}) (\partial_c \theta^b) dx^c dx^a) + (\theta^c (\partial_c g_{ab}) (\partial_c \theta^a) dx^c dx^b) \\ &= g_{ab} dx^a dx^b + g_{ab} (\partial_c \theta^b) dx^c dx^a + g_{ab} (\partial_c \theta^a) dx^c dx^b + \theta^c (\partial_c g_{ab}) dx^a dx^b \\ &= g_{ab} dx^a dx^b + g_{ab} (\partial_b \theta^c) dx^b dx^a + g_{ab} (\partial_a \theta^c) dx^a dx^b + \theta^c (\partial_c g_{ab}) dx^a dx^b \\ &= [g_{ab} + g_{ac} (\partial_b \theta^c) + g_{cb} (\partial_a \theta^c) + \theta^c (\partial_c g_{ab})] dx^a dx^b \equiv \overline{g_{ab}} dx^a dx^b \\ &\Rightarrow \overline{g_{ab}} = g_{ab} + g_{ac} (\partial_b \theta^c) + g_{cb} (\partial_a \theta^c) + \theta^c (\partial_c g_{ab}). \end{aligned}$$

así,

$$\delta_\theta(g_{ab}) \equiv \overline{g_{ab}} - g_{ab} = g_{ac} (\partial_b \theta^c) + g_{cb} (\partial_a \theta^c) + \theta^c (\partial_c g_{ab}) \quad (4.3)$$

Ahora, por otro lado, dado $\theta_b = g_{bc}\theta^c$ y que $\nabla g = 0$, tomemos $\nabla_a\theta_b + \nabla_b\theta_a$, entonces,

$$\nabla_a(g_{bc}\theta^c) + \nabla_b(g_{ac}\theta^c) = g_{bc}\nabla_a\theta^c + g_{ac}\nabla_b\theta^c$$

además, recordando que,

$$\nabla_a\theta^c = \partial_a\theta^c + \Gamma_{ae}^c\theta^e, \quad g_{cb}\Gamma_{ae}^c = \frac{1}{2}(\partial_a g_{cb} + \partial_e g_{ab} - \partial_b g_{ac}),$$

se sustituye y se obtiene:

$$\begin{aligned} g_{bc}[\partial_a\theta^c + \Gamma_{ae}^c\theta^e] + g_{ac}[\partial_b\theta^c + \Gamma_{be}^c\theta^e] &= g_{bc}\partial_a\theta^c + g_{bc}\Gamma_{ae}^c\theta^e + g_{ac}\partial_b\theta^c + g_{ac}\Gamma_{be}^c\theta^e \\ &= g_{bc}\partial_a\theta^c + \left[\frac{1}{2}(\partial_a g_{eb} + \partial_e g_{ab} - \partial_b g_{ac})\right]\theta^e + g_{ac}\partial_b\theta^c \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(\partial_b g_{ea} + \partial_e g_{ba} - \partial_a g_{be})\right]\theta^e \\ &= g_{bc}\partial_a\theta^c + g_{ac}\partial_b\theta^c + \left[\frac{1}{2}\theta^c(\partial_a g_{eb} + \partial_e g_{ab} - \partial_b g_{ac})\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\theta^c(\partial_b g_{ea} + \partial_e g_{ba} - \partial_a g_{be})\right] \\ &= g_{cb}\partial_a\theta^c + \partial_b\theta^c g_{ac} + \frac{1}{2}\theta^c\partial_e g_{ab} + \frac{1}{2}\theta^c\partial_e g_{ba} \\ &\Rightarrow g_{cb}\partial_a\theta^c + g_{ac}\partial_b\theta^c + \theta^c\partial_e g_{ab} \end{aligned}$$

Así, al comparar con (4.3),

$$\nabla_a\theta_b + \nabla_b\theta_a = g_{cb}\partial_a\theta^c + g_{ac}\partial_b\theta^c + \theta^c\partial_e g_{ab} \equiv \delta_\theta(g_{ab}).$$

y finalmente se concluye que la métrica transforma bajo difeomorfismos infinitesimales, como¹:

$$\delta_\theta(g_{ab}) = \nabla_a\theta_b + \nabla_b\theta_a. \quad (4.4)$$

Mientras tanto, para la densidad Lagrangiana $\sqrt{-g}L$, la variación $x^a \rightarrow x^a + \theta^a(x)$ se ve como sigue:

$$\delta_\theta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = \delta_\theta(\sqrt{-g})\mathcal{L} + (\delta_\theta\mathcal{L})\sqrt{-g}. \quad (4.5)$$

Si se expande $\mathcal{L}(x + \theta)$ hasta primer orden, lo que se tiene es:

$$\mathcal{L}(x + \theta) \approx \mathcal{L}(x) + \theta^c\partial_c\mathcal{L}$$

De tal modo que $\delta_\theta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x + \theta) - \mathcal{L}(x) \approx \theta^c\partial_c\mathcal{L}$. Por otro lado, tomando en cuenta que $\delta_\theta(\sqrt{-g}) = -\frac{gg^{\mu\nu}\delta_\theta(g_{\mu\nu})}{2\sqrt{-g}}$, es posible sustituir estos resultados en (4.5) y obtener

$$\delta_\theta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = -\frac{gg^{\mu\nu}\delta_\theta(g_{\mu\nu})}{2\sqrt{-g}}\mathcal{L} + \theta^c(\partial_c\mathcal{L})\sqrt{-g}.$$

¹Si el difeomorfismo se da como Killings, es decir, $\theta_i = \xi_i$, entonces $\nabla_a\theta_b + \nabla_b\theta_a = \nabla_a\xi_b + \nabla_b\xi_a \equiv 0$, lo cual tiene sentido pues la métrica no varía por los campos Killing, es decir, $\delta g = 0$. Esto se puede ver desde la derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi g = 0$.

dado que $g^{\mu\nu}\delta_\theta(g_{\mu\nu}) = 2\nabla_\mu\theta^\mu = 2\left[\partial_\mu\theta^\mu + \Gamma_{\mu\gamma}^\mu\theta^\gamma\right]$, y que $\Gamma_{\mu\gamma}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\gamma(\sqrt{-g})$, la anterior expresión se puede reducir a

$$\begin{aligned}\Rightarrow \delta_\theta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) &= \sqrt{-g}\nabla_\mu\theta^\mu\mathcal{L} + \theta^\mu(\partial_\mu\mathcal{L})\sqrt{-g} \\ &= \sqrt{-g}\mathcal{L}[\partial_\mu\theta^\mu + \Gamma_{\mu\gamma}^\mu\theta^\gamma] + \sqrt{-g}(\partial_\mu\mathcal{L})\theta^\mu \\ &= \sqrt{-g}\mathcal{L}\left[\partial_\mu\theta^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\gamma(\sqrt{-g})\theta^\gamma\right] + \sqrt{-g}(\partial_\mu\mathcal{L})\theta^\mu \\ &= \sqrt{-g}\mathcal{L}(\partial_\mu\theta^\mu) + \partial_\mu(\sqrt{-g})\theta^\mu\mathcal{L} + \sqrt{-g}(\partial_\mu\mathcal{L})\theta^\mu \\ &= \partial_\mu(\sqrt{-g}\mathcal{L}\theta^\mu).\end{aligned}$$

Concluyendo que la variación bajo difeomorfismos infinitesimales de la densidad Lagrangiana es:

$$\delta_\theta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = \partial_\mu(\sqrt{-g}\mathcal{L}\theta^\mu) \quad (4.6)$$

Ahora, en virtud de (4.4) y (4.6), es posible conocer cómo varía la acción gravitacional I bajo difeomorfismos infinitesimales y con esto encontrar una cantidad conservada off-shell, es decir, que es independiente de las ecuaciones de movimiento, conocida como: *Corriente de Noether off-shell*.

Para ello, se toma (4.6) y se integra toda la equivalencia, de tal manera que

$$\delta_\theta I = \int d^D x \delta_\theta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = \int d^D x \partial_\mu(\sqrt{-g}\mathcal{L}\theta^\mu)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la equivalencia, y teniendo en cuenta que $\delta_\theta(g^{\alpha\beta}) = -(\nabla^\alpha\theta^\beta + \nabla^\beta\theta^\alpha)$, se consigue,

$$\begin{aligned}\delta_\theta I &= \int d^D x \partial_\mu(\sqrt{-g}\mathcal{L}\theta^\mu) = \int d^D x [\sqrt{-g}\mathcal{E}_{\mu\nu}\delta_\theta(g^{\mu\nu}) + \partial_\mu\Pi^\mu(g;\theta)] \\ &= \int d^D x [-\sqrt{-g}\mathcal{E}_{\mu\nu}(\nabla^\mu\theta^\nu + \nabla^\nu\theta^\mu) + \partial_\mu\Pi^\mu(g;\theta)]\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ es simétrico, se tiene que $\mathcal{E}_{\mu\nu}(\nabla^\mu\theta^\nu + \nabla^\nu\theta^\mu) = 2\mathcal{E}_{\mu\nu}\nabla^\mu\theta^\nu$, lo cual se sustituye a continuación,

$$\delta_\theta I = \int d^D x \partial_\mu(\sqrt{-g}\mathcal{L}\theta^\mu) = \int d^D x [-2\sqrt{-g}\mathcal{E}_{\mu\nu}\nabla^\mu\theta^\nu + \partial_\mu\Pi^\mu(g;\theta)]. \quad (4.7)$$

Analizando el término $\mathcal{E}_{\mu\nu}\nabla^\mu\theta^\nu$, con el fin de obtener una derivada parcial sobre toda esta expresión, se procede como sigue:

$$\text{Dado que } \nabla_\mu\mathcal{E}^{\mu\nu} = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mu\nu}\nabla^\mu\theta^\nu &= \nabla^\mu(\mathcal{E}_{\mu\nu}\theta^\nu) = \nabla_\mu(\mathcal{E}^{\mu\nu}\theta_\nu) \equiv \nabla_\mu X^\mu \\
\rightarrow \nabla_\mu X^\mu &= \partial_\mu X^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\gamma}X^\gamma, \text{ con } \Gamma^\mu_{\mu\gamma} = (-g)^{-1/2}\partial_\gamma(\sqrt{-g}) \\
\rightarrow \nabla_\mu X^\mu &= \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g})X^\mu \\
\rightarrow \sqrt{-g}\nabla_\mu X^\mu &= \sqrt{-g}\partial_\mu X^\mu + \partial_\mu(\sqrt{-g})X^\mu
\end{aligned}$$

aquí, debe notarse que $\partial_\mu(\sqrt{-g}X^\mu) = \partial_\mu(\sqrt{-g})X^\mu + \sqrt{-g}\partial_\mu X^\mu$, por lo que,

$$\Rightarrow \sqrt{-g}\nabla_\mu X^\mu = \mathcal{E}_{\mu\nu}\nabla^\mu\theta^\nu = \partial_\mu(\sqrt{-g}X^\mu)$$

sustituyendo este resultado en (4.7), se obtiene la corriente conservada de Noether off-shell,

$$\int d^D x \partial_\mu(\sqrt{-g}\mathcal{L}\theta^\mu) = \int d^D x [\partial_\mu(-2\sqrt{-g}\mathcal{E}^{\mu\nu}\theta_\nu) + \partial_\mu\Pi^\mu(g;\theta)]$$

dejando todo a un lado de la equivalencia, y factorizando la derivada parcial,

$$\int d^D x \partial_\mu [\sqrt{-g}\theta^\mu\mathcal{L} + 2\sqrt{-g}\mathcal{E}^{\mu\nu}\theta_\nu - \Pi^\mu(g;\theta)] = \int d^D x \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow J^\mu = 2\sqrt{-g}\mathcal{E}^{\mu\nu}\theta_\nu + \sqrt{-g}\theta^\mu\mathcal{L} - \Pi^\mu(g;\theta). \quad (4.8)$$

Ahora, dado que esta corriente es idénticamente conservada, como se puede ver en (*), es posible escribirla como la derivada de un 2-tensor antisimétrico $K^{\mu\nu}$, el cual se define como el *potencial de Noether off-shell*, de tal manera que,

$$J^\mu \equiv \partial_\nu K^{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Con la intención de poder comparar esta corriente de Noether off-shell proveniente de un difeomorfismo infinitesimal con una corriente conservada linearizada para un campo killing, es útil considerar la variación del potencial de Noether bajo una perturbación de la métrica $g_{\mu\nu}$, siguiendo la intuición expuesta en (3.2), es decir $g \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ donde $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$, esto manteniendo las direcciones Killings contravariantes fijas $\delta\xi^\mu = 0$. Así las cosas, el cambio en la corriente de Noether bajo la perturbación $h_{\mu\nu}$ se puede escribir como la derivada parcial del cambio de su potencial de Noether asociado bajo la misma perturbación, es decir,

$$\partial_\nu(\delta K^{\mu\nu}) = 2\delta(\sqrt{-g}\mathcal{E}^{\mu\nu}\xi_\nu) + \xi^\mu\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) - \delta\Pi^\mu(g;\xi) \quad (4.10)$$

4.2 Corriente y potencial ADT off-shell

Considerando el método ADT desarrollado en el anterior capítulo, se busca tomar su modo de proceder, esto es: Tomar una métrica $g_{\mu\nu}$, perturbarla $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$, expandir las ecuaciones de movimiento que la tienen como solución en órdenes de dicha perturbación, de tal manera que se puedan construir cargas conservadas *on-shell* a partir de la contracción de un campo Killing

con las ecuaciones linearizadas $J^\mu = \delta \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu$, las cuales se pueden ver como la divergencia covariante de un potencial ADT *on-shell* $J^\mu = \nabla_\nu Q^{\mu\nu}$.²

Sin embargo, con la idea de expandir la noción de cargas conservadas a espaciotiempos que no sean asintóticamente una solución de vacío, es necesario considerar el cálculo de esta corriente y potencial ADT de manera *off-shell*, es decir, sin recurrir a que se satisfagan las ecuaciones de movimiento. De tal forma, se comienza considerando una métrica genérica $g_{\mu\nu}$ ³, cuya perturbación $h_{\mu\nu}$, no necesariamente pequeña, decae rápidamente en el infinito espacial. Siguiendo de cerca a (A.1), se expanden las ecuaciones de movimiento $\mathcal{E}_{\mu\nu}$, las cuales vendrán de la variación para la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica⁴ y demás acciones que representarán correcciones covariantes al escalar de curvatura R , así, la linearización $\delta \mathcal{E}_{\mu\nu}$ no será más que la linearización de las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica Λ ⁵ más la linearización para otras cantidades tensoriales provenientes de variar las correcciones de segundo y mayor orden:

$$\delta \mathcal{E}_{\mu\nu} = \delta \mathcal{G}_{\mu\nu} + \delta \mathcal{W}_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

El proceso para la obtención de la corriente ADT *off-shell* J_{ADT}^μ consiste en obtener la contribución a esta por parte de los tensores $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{W}_{\mu\nu}$, es decir,

$$J_{ADT}^\mu = \mathcal{J}_G^\mu + \mathcal{J}_W^\mu \quad (4.12)$$

de modo que J_{ADT}^μ se ve de la siguiente manera, aclarando que los cálculos completos se encuentran en el apéndice (A.6):

$$J_{ADT}^\mu = \delta \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu + \mathcal{E}^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \xi^\nu - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{E}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h \mathcal{E}^\mu{}_\nu \xi^\nu \quad (4.13)$$

La cual tiene asociada un potencial ADT *off-shell* $Q_{ADT}^{\mu\nu}$ de tal manera que, al igual que en el caso *on-shell* J_{ADT}^μ se pueda ver como la divergencia covariante de este $J_{ADT}^\mu = \nabla_\nu Q_{ADT}^{\mu\nu}$. Con $Q_{ADT}^{\mu\nu}$ construido a partir de la adición de superpotenciales $\mathcal{F}_G^{\mu\nu}$ y $\mathcal{F}_W^{\mu\nu}$ asociados a los tensores $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{W}_{\mu\nu}$, como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu Q_{ADT}^{\mu\nu} &= \nabla_\nu \mathcal{F}_G^{\mu\nu} + \nabla_\nu \mathcal{F}_W^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\nu \left(\mathcal{F}_G^{\mu\nu} + \mathcal{F}_W^{\mu\nu} \right) \\ \Rightarrow Q_{ADT}^{\mu\nu} &= \mathcal{F}_G^{\mu\nu} + \mathcal{F}_W^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.14)$$

El proceso para obtener estas cantidades, en particular, para el tensor ya bien conocido $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, se ve en (A.65) y (A.66). La forma funcional explícita para $\nabla_\nu \mathcal{F}_W^{\mu\nu}$ es idéntica a la forma de la divergencia covariante del superpotencial de Einstein $\mathcal{F}_G^{\mu\nu}$, con la salvedad de que ambas

²El potencial ADT aquí referido es el $F^{\mu\alpha}$ en (3.21) y está definido únicamente para las ecuaciones de movimiento linearizadas.

³No necesariamente solución para unas ecuaciones de vacío

⁴ $\mathcal{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$, con $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

⁵ $\delta \mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu}^L$

corrientes provienen de cantidades tensoriales distintas, por lo que cada término geométrico dentro de $\mathcal{W}_{\mu\nu}$ ⁶ tendrá un superpotencial asociado y por lo tanto un aporte implícito distinto a la corriente ADT al considerar la divergencia covariante de cada uno de estos, es decir:

$$\begin{aligned} \bullet \nabla_\nu \mathcal{F}_G^{\mu\nu} &= \xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} + \xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \xi^\nu \mathcal{G}_\nu{}^\mu h \\ \bullet \nabla_\nu \mathcal{F}_W^{\mu\nu} &= \sum_i \nabla_\nu \mathcal{F}_i^{\mu\nu} = \sum_i \left[\xi_\nu \delta (w^{\mu\nu})_i + \xi^\nu (w^{\mu\lambda})_i h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \xi^\mu (w_{\lambda\rho})_i h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \xi^\nu (w_\nu{}^\mu)_i h \right] \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando (4.13), recordando que esta se puede ver como $J_{ADT}^\mu = \nabla_\nu Q_{ADT}^{\mu\nu}$, y teniendo en mente que $\delta \xi^\mu = 0$, se puede reescribir $\nabla_\nu Q_{ADT}^{\mu\nu}$ procediendo de igual modo que en (3.8), tal que:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left[\delta \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu + \mathcal{E}^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \xi^\nu - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{E}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h \mathcal{E}^\mu{}_\nu \xi^\nu \right]$$

Utilizando,

$$\begin{aligned} \bullet \delta(\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu) &= \delta(\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} \xi^\alpha) \\ &= \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{E}^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} \xi^\alpha + \sqrt{-g} \delta(\mathcal{E}^{\mu\nu}) g_{\alpha\nu} \xi^\alpha + \sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \delta(g_{\alpha\nu}) \xi^\alpha + \sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} \delta(\xi^\alpha) \\ &= \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{E}^\mu{}_\nu \xi^\nu + \sqrt{-g} \delta \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu + \sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} h_{\alpha\nu} \xi^\alpha \\ \bullet \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} h \end{aligned}$$

se puede reescribir la expresión para la divergencia del potencial ADT, como sigue,

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}) = \delta(\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \xi^\mu \mathcal{E}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (4.15)$$

tomando este resultado junto con (4.10), es posible relacionar la corriente de Noether *off-shell* con el potencial ADT *off-shell*, al despejar $\delta(\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu)$ en una de estas expresiones y sustituirla en la otra, de tal manera que se relacionen como sigue:

$$\partial_\nu (\delta K^{\mu\nu}) = 2 \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{E}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right] + \xi^\mu \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}) - \delta \Pi^\mu(g; \xi)$$

Usando, $\delta(\sqrt{-g} L) = -\sqrt{-g} \mathcal{E}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \partial_\mu \Pi^\mu(h)$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\delta K^{\mu\nu}) &= 2\partial_\nu (\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} \xi^\mu \mathcal{E}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \sqrt{-g} \xi^\mu \mathcal{E}_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \xi^\mu \partial_\alpha \Pi^\alpha - \delta \Pi^\mu \\ &= 2\partial_\nu (\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}) + \xi^\mu \partial_\alpha \Pi^\alpha - \delta \Pi^\mu \end{aligned}$$

considerando la derivada de Lie a lo largo del campo Killing ξ de la densidad tensorial Π^μ , se le identifica con $\delta \Pi^\mu$ [Hyu+14, pag. 4],

$$\delta \Pi^\mu = \mathcal{L}_\xi \Pi^\mu = \xi^\nu \partial_\nu \Pi^\mu - \Pi^\nu \partial_\nu \xi^\mu + \Pi^\mu \partial_\nu \xi^\nu$$

⁶Nótese que $\mathcal{W}^{\mu\nu} = \sum_i (w^{\mu\nu})_i$, con $(w^{\mu\nu})_i$ el conjunto de tensores provenientes de variar los términos correctivos a la acción de Einstein-Hilbert.

se sustituye y se obtiene,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \partial_\nu (\delta K^{\mu\nu}) &= 2\partial_\nu (\sqrt{-g}Q^{\mu\nu}) + \xi^\mu \partial_\nu \Pi^\nu - \xi^\nu \partial_\nu \Pi^\mu + \Pi^\nu \partial_\nu \xi^\mu - \Pi^\mu \partial_\nu \xi^\nu \\
&= 2\partial_\nu (\sqrt{-g}Q^{\mu\nu}) + [\partial_\nu (\Pi^\nu \xi^\mu) - \partial_\nu \Pi^\nu \xi^\mu] - [\partial_\nu (\xi^\nu \Pi^\mu) - \partial_\nu \xi^\nu \Pi^\mu] + \xi^\mu \partial_\nu \Pi^\nu - \Pi^\mu \partial_\nu \xi^\nu \\
&= 2\partial_\nu (\sqrt{-g}Q^{\mu\nu}) + \partial_\nu [\Pi^\nu \xi^\mu - \xi^\nu \Pi^\mu] = \partial_\nu [2\sqrt{-g}Q^{\mu\nu} + \xi^{[\mu} \Pi^{\nu]}]
\end{aligned}$$

despejando el potencial ADT, se obtiene la expresión final que relaciona los dos potenciales *off-shell* anteriormente estudiados,

$$\sqrt{-g}Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}(g; h) = \frac{1}{2}\delta K^{\mu\nu}(g; \xi) - \xi^{[\mu} \Pi^{\nu]}(g; h) \quad (4.16)$$

siguiendo a [Bar03, pag. 7], es posible reescribir la anterior expresión. Para ello, se debe considerar la métrica solución a las ecuaciones de movimiento para una teoría de gravedad covariante $\hat{g}_{\mu\nu}$, teniendo muy presentes los parámetros libres que esta subtiende, así, dado que esta métrica se puede construir a partir de una métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ más una perturbación $h_{\mu\nu}$, es posible encontrar dentro del espacio de soluciones una función $g_{\mu\nu}^{(s)}$ -familia de parámetros- que interpola o conecta la solución completa con la solución de fondo; esto lo consigue al asociar un parámetro s ($0 \leq s \leq 1$) a los parámetros libres $\mathcal{P}$ de la métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, de tal manera que $s\mathcal{P}$ sea un camino para llegar de una solución de fondo a una perturbada⁷, además, se considera a la perturbación $h_{\mu\nu}$ en términos de la familia de parámetros como $h_{\mu\nu}^{(s)} = \frac{dg_{\mu\nu}^{(s)}}{ds}$, de tal manera que:

$$h_{\mu\nu}^{(s)} = h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}), \quad g_{\mu\nu}^{(s)} = g_{\mu\nu} + sh_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu})$$

Claramente para $g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{\mu\nu}$, mientras que $g_{\mu\nu}^{(1)} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, como ya se había comentado, adicionalmente, nótese que $h_{\mu\nu}^{(0)} = h_{\mu\nu} = 0$. Ahora, teniendo estas consideraciones, se reescribe el potencial ADT *off-shell* en (4.16)- apoyándose fuertemente en la familia de parámetros $g_{\mu\nu}^{(s)}$ y su desviación $h_{\mu\nu}^{(s)}$ - como una $(D-2)$ -forma cerrada[Bar03, cor 1], tal que:

$$Q(\xi) = \frac{1}{16\pi G} \left(d^{D-2}x \right)_{\mu\nu} \int_0^1 ds \sqrt{-g} Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}(g | s) \quad (4.17)$$

Integrando sobre las coordenadas de un subespacio de codimensión 2, en donde $d^{D-2}x_{\mu\nu}$ denotará una integración antisimetrizada sobre estas subvariedades⁸[HHH21, pág 7], tal que,

$$Q(\xi) = \frac{1}{8\pi G} \int_0^1 ds \int d^{D-2}x_{\mu\nu} \sqrt{-g} Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}(g | s) \quad (4.18)$$

luego, sustituyendo explícitamente (4.16), se tiene la carga conservada cuasilocal, la cual es definible no sólo para el borde espaciotemporal, sino también para su interior, como

⁷Tómese un caso simple, la métrica del agujero negro de Schwarzschild. Dicha solución contiene un parámetro libre, el cual es su masa. Si se asociara un camino o familia de parámetros $g_{\mu\nu}^{(s)}$ en el espacio de soluciones, de tal manera que el parámetro libre tomara la forma sM , entonces al tener $s = 0$ se tendría un espaciotiempo plano, mientras que $s = 1$ implicaría que se tiene un espaciotiempo con un agujero negro del tipo ya descrito.

⁸Donde $d^{D-2}x_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{1}{(D-2)!} \epsilon_{\mu\nu\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{D-2}}$, con $\epsilon_{\mu\nu\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}}$ como la antisimetrización total de tensor de Levi-Civita.

consecuencia de la naturaleza cerrada de la $D - 2$ forma en (4.17). Esto garantiza que dicha cantidad sea independiente del radio escogido para describir la superficie cuasilocal que envuelve cierta región espaciotemporal[Por+15, cap 2], así:

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \frac{1}{16\pi G} \int d^{D-2} x_{\mu\nu} \left\{ \int_0^1 ds \left(\frac{d}{ds} K_{\xi}^{\mu\nu} [g^{(s)}(x)] - 2\xi^{[\nu} \Pi^{\nu]} [g^{(s)}(x), h^{(s)}(x)] \right) \right\} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^{D-2} x_{\mu\nu} \left\{ K_{\xi}^{\mu\nu} [g^{(1)}(x)] - K_{\xi}^{\mu\nu} [g^{(0)}(x)] - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Pi^{\nu]} \right\} \\ \Rightarrow Q(\xi) &= \frac{1}{16\pi G} \int d^{D-2} x_{\mu\nu} \left(\Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Pi^{\nu]} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Donde $\Delta K^{\mu\nu}(\xi) \equiv K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$ y $K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$ representa el potencial de Noether para la métrica de vacío.

4.3 Masa del agujero negro Lifshitz 3-dimensional

Considerando un lagrangiano de la forma $L = L[g, R, R^2, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \dots]$, se puede construir un tensor $P^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}$ de tal manera que al variar la acción S , se pueden obtener las ecuaciones de movimiento $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ y el término de borde Π^{μ} en términos de este, ver (A.7) para más detalles de cálculo:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = P_{(\mu}^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} - 2\nabla^{\rho} \nabla^{\sigma} P_{\rho(\mu\nu)\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L, \quad (4.20)$$

$$\Pi^{\mu}(\delta g) = 2\sqrt{-g} \left[P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_{\gamma} \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_{\gamma} P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right] \quad (4.21)$$

De esta manera, utilizando (4.8), se pueden sustituir los anteriores resultados y obtener:

$$\mathcal{J}^{\mu} = 4\nabla_{\nu} P^{\mu(\rho\sigma)\nu} \nabla_{\rho} \xi_{\sigma} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_{\nu} \nabla_{\rho} \xi_{\sigma} - 4\xi_{\sigma} \nabla_{\nu} \nabla_{\rho} P^{\nu(\mu\sigma)\rho} \quad (4.22)$$

Con $J^{\mu} \equiv \sqrt{-g} \mathcal{J}^{\mu}$, de este modo, es posible factorizar una derivada para cada término anterior $\mathcal{J}^{\mu} = \partial_{\nu} \mathcal{K}^{\mu\nu}$, y obtener un potencial de Noether asociado $K^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} \mathcal{K}^{\mu\nu}$:

$$K^{\mu\nu} = \sqrt{-g} [2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_{\rho} \xi_{\sigma} - 4\xi_{\sigma} \nabla_{\rho} P^{\mu\nu\rho\sigma}] \quad (4.23)$$

Finalmente, considerando la acción para una teoría de gravedad cuadrática genérica,

$$I = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa} (R + 2\Lambda) + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma (R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) \right]$$

es posible encontrar una solución para la ecuaciones de movimiento[DS11] provenientes de esta acción en el caso 3-dimensional y cuyas constantes de acoplamiento se reducen a

$\alpha = -3\ell^2/4\kappa$, $\beta = 2\ell^2/\kappa$, $\gamma = 0$, además, $\Lambda = 13/(2\ell^2)$ y $\kappa = 16\pi G$. Dicha solución se conoce como el agujero negro Lifshitz 3-dimensional:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2}\right)^z \left(1 - \frac{m\ell^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\frac{r^2}{\ell^2} \left(1 - \frac{m\ell^2}{r^2}\right)} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (4.24)$$

Donde m representa una constante de integración o parámetro libre de la solución, y z , el exponente crítico, debe ser fijado a 3 para que la anterior métrica sea solución de las ecuaciones de movimiento en el vacío. El horizonte de este agujero negro viene en términos de su radio ℓ y m , y se denota como $r_{\mathcal{H}} = \ell\sqrt{m}$.

En este punto, se toma el lagrangiano de la forma $L = \frac{1}{\kappa}(R + 2\Lambda) + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ (manteniendo los valores establecidos para las constantes de acoplamiento) y se procede a calcular el tensor $P^{\mu\nu\rho\sigma}$ como sigue,⁹

$$P^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial R}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} + \alpha \frac{\partial R^2}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} + \beta \frac{\partial (R_{\delta\phi} R^{\delta\phi})}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (4.25)$$

y dado que,¹⁰

$$\frac{\partial R}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} = g^{\mu[\rho} g^{\sigma]\nu}, \quad \frac{\partial R^2}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} = 2R g^{\mu[\rho} g^{\sigma]\nu}, \quad \frac{\partial (R_{\delta\phi} R^{\delta\phi})}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} = 2g^{[\mu[\rho} R^{\sigma]]\nu]}$$

se obtiene el tensor al sustituir los valores de las derivadas en (4.25),

$$P^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\kappa} g^{\mu[\rho} g^{\sigma]\nu} + 2\alpha R g^{\mu[\rho} g^{\sigma]\nu} + 2\beta g^{[\mu[\rho} R^{\sigma]]\nu]} \quad (4.26)$$

Con este 4-tensor, es posible obtener la forma explícita para el potencial de Noether $K^{\mu\nu}$ (4.23) y el término de borde $\Pi^{\mu\nu}$ (4.21). Usando el paquete `tensorGR` de Maple, se calculan los tensores de Riemann, Ricci y el escalar de curvatura para la métrica (4.24). A continuación se procede a calcular los productos y antisimetrizaciones que construyen al tensor $\mathbf{P}$. Una vez obtenido este, se consigue $\delta g_{\mu\nu}$ al considerar una expansión en serie de Taylor¹¹ de la métrica $g_{\mu\nu}$ sobre una variación infinitesimal en el parámetro libre m dentro de $\mathbf{g}$, de tal manera que $m \rightarrow m + dm$. Así, quedando a primer orden,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(m+dm) - \mathbf{g}(m) &= \delta \mathbf{g}(dm) + \mathcal{O}[(dm)^2] \\ \Rightarrow \delta \mathbf{g}(dm) &= \mathbf{g}(m+dm) - \mathbf{g}(m) \end{aligned}$$

de tal manera que $\delta g_{\mu\nu}$ resulta como:

$$\delta g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[\frac{r^4 dm}{\ell^4}, \frac{\ell^4 dm}{(\ell^2 m - r^2)^2}, 0 \right] \quad (4.27)$$

⁹El tensor $P^{\mu\nu\rho\sigma}$ tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann.

¹⁰En A.7 se hacen estos desarrollos en medio de los cálculos adicionales.

¹¹Esto se realizó con el paquete `Student [Calculus1]`.

Ahora, tomando el vector de Killing temporal $\xi^t = (1, 0, 0)$ para la métrica (4.24) y $\delta g_{\mu\nu}$, siguiendo a [GKY14, pág. 7], es posible obtener los valores para el término de borde y el potencial de Noether,

$$\Pi^r = -\frac{4(\ell^2 m - 2r^2)}{\ell^2 \kappa} dm \quad (4.28)$$

$$K^{tr} = \frac{8mr^2}{\ell^2} \quad (4.29)$$

Además, teniendo en cuenta que $K_{s=0}^{tr} = 0$, entonces $\Delta K^{tr} = K^{tr}$. De esta manera, se puede obtener la integral en el camino de parámetros de la 1-forma que representa al término de borde (4.29) desde $\tilde{m} = 0$ hasta $\tilde{m} = m$:

$$\int_0^m \Pi^r = -\frac{2m^2}{\kappa} + \frac{8mr^2}{\ell^2 \kappa}$$

Finalmente, escogiendo la esfera S^1 con radio R como la superficie de codimensión 2, se puede encontrar la métrica inducida asociada a esta $d\bar{s}^2 = R^2 d\phi^2$ y con ella obtener su determinante $\det(h_{\mu\nu}) = h = R^2$. Calculando la raíz de h y sustituyendo los anteriores resultados en (4.19), se consigue la masa M para el agujero negro Lifshitz 3-dimensional

$$\begin{aligned} M \equiv Q(\xi_t) &= \frac{1}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{h} \left[2\epsilon_{tr} K_{s=1}^{tr} - 2\epsilon_{tr} \xi^t \int_0^m \Pi^r \right] \\ &= \frac{m^2}{4\pi G} \int_0^{2\pi} R d\phi = \frac{m^2 \ell^4}{4G \ell^4} R = \frac{\ell^4 (\sqrt{m})^4}{4G \ell^4} R \\ &= \frac{r_H^4}{4G \ell^4} R \end{aligned}$$

Dado que (4.17) representa una forma cerrada, se garantiza la independencia del radio R para la superficie de codimensión 2, de tal manera que ya no es necesario definir una integración en el infinito asintótico del espaciotiempo en cuestión, sino que basta con considerar la definición de la 2-forma cerrada y integrarla sobre un dominio espaciotemporal extenso pero finito, es decir, cuasilocal, representado por la superficie de codimensión 2, de tal manera que la cantidad M/R permanece constante al variar el radio de la superficie, así que se puede considerar finalmente el valor de la masa como:

$$M = \frac{r_H^4}{4G \ell^4} \quad (4.30)$$

Finalmente, como corolario, merece la pena tener una idea intuitiva de la construcción geométrica hecha con el método cuasilocal, ya que su desarrollo matemático superlativo en comparación con los otros métodos podría llevar a que pasara desapercibido el gran avance en cuanto a cálculo de cargas conservadas se habla. La importancia del método radica en su fabricación *off shell*, la cual garantiza una relación entre los potenciales ADT y Noether. Basada en esta relación, la decisión de sustituir el parámetro libre $\mathcal{M} \rightarrow s\mathcal{M}$ ¹² permite abrir un camino para pensar dos cosas dentro del espaciotiempo en cuestión: Primero, este cambio

¹² $\mathcal{M}$ al considerar la masa del agujero negro.

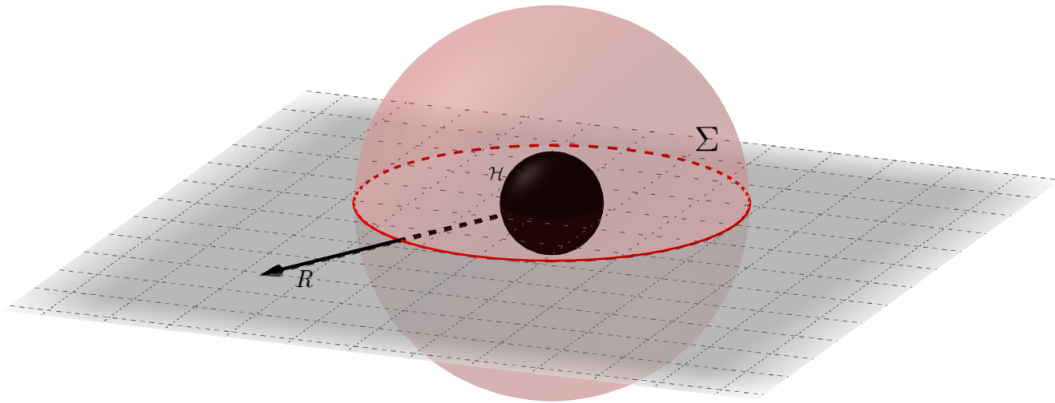


Fig. 4.1.: Representación de un espaciotiempo 4-dimensional a tiempo constante. En él se pueden visualizar la superficies de codimensión 2 Σ en donde se medirán de manera cuasilocal las cantidades conservadas en su interior. Aquí R simboliza el radio de la superficie cuasilocal, la cual es independiente de éste. Es por eso que en la figura el vector negro sobresale de la superficie Σ indicando independencia a la hora de elegir Σ . Por otro lado, $\mathcal{H}$ representa el horizonte de eventos del agujero negro, el cual cumplirá que $\mathcal{H} < \Sigma$.

en el parámetro libre da la idea de tener una especie de "perilla" (la cual vendría representada por el factor s) cuya función es apagar la curvatura del espaciotiempo causada por la presencia de un agujero negro- para el caso en donde $s = 0$ - e ir "suavemente" encendiendo dicha curvatura (construyendo el agujero negro) en la medida en que s se acerca a 1, justo como sucedería si se tuviera una perilla de un altavoz que va subiendo el volumen de este desde 0% hasta el 100%. Segundo, al integrar por el camino de parámetros definido por la variable s la relación entre los anteriores potenciales *off shell* antes mencionados, se garantiza la generación de una D-2 forma cerrada, la cual concede a dicha cantidad una independencia radial y temporal, al considerar el cálculo de cargas conservadas, y por ende, esto constituye la principal razón por la que se permite considerar una integración sobre un dominio extenso pero finito del espaciotiempo, es decir cuasilocal, eximiendo la necesidad de cubrir todo el espacio tiempo a razón de calcular dichas cantidades conservadas.

Con estos dos pensamientos en mente, y tomando la visualización permitida por la (citar figura 4.1), se puede terminar interpretando la expresión para la carga cuasilocal (4.19), para el particular caso del cálculo de la masa del agujero negro Lifschitz 3-dimensional, como una cantidad que se calcula sobre una 1-superficie de radio R que envuelve al agujero negro, de donde se extraerá toda la información del interior de esta superficie. En el caso del término de borde, la consideración de $s\mathcal{M}$ le permite a un observador en dicha superficie definirlo a

partir de la observación de la transición de dicho término, desde cuando se tiene sólo Lifschitz hasta cuando se tiene el agujero negro Lifschitz.

4.4 Corroboración de la primera ley de la termodinámica para el agujero negro Lifshitz 3-dimensional

Considerando las expresiones para la entropía y temperatura del agujero negro Lifshitz 3-dimensional dadas por [GKY14, pág. 7], es posible corroborar desde primeros principios la primera ley de la termodinámica para agujeros negros $dM = T_{\mathcal{H}}dS$, usando el resultado de masa obtenido en (4.30). Dadas las cantidades termodinámicas:

$$S = \frac{2\pi r_{\mathcal{H}}}{G}, \quad T_{\mathcal{H}} = \frac{r_{\mathcal{H}}^3}{(2\pi\ell^4)}, \quad M = \frac{r_{\mathcal{H}}^4}{4G\ell^4}$$

$\Rightarrow$)

$$dM = \frac{r_{\mathcal{H}}^3}{G\ell^4} dr_{\mathcal{H}}$$

$\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}}dS &= \frac{r_{\mathcal{H}}^3}{(2\pi\ell^4)} \frac{2\pi}{G} dr_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{r_{\mathcal{H}}^3}{G\ell^4} dr_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Como ya se ha mencionado a lo largo de la introducción de este trabajo, la importancia fundamental de tener un método general para atacar el cálculo acertado de cantidades conservadas en espaciotiempos generales radica en la necesidad de corroborar la primera ley de la termodinámica para agujeros negros (en el caso de que el espaciotiempo tratado sea una solución de este estilo). Dentro del contexto de la correspondencia Gauge/Gravity es común buscar agujeros negros útiles dentro de esta dualidad, por lo que al final de este ejercicio "detectivesco" es menester verificar que dicha solución tiene validez, es decir, que satisfaga una primera ley de la termodinámica para agujeros negros, de tal manera que la solución construida u obtenida pueda ser usada para aplicar este diccionario holográfico.

Resultados y conclusiones

” *Muy probablemente somos aún principiantes confundidos con imágenes mentales muy fuertes, y la realidad última permanece mucho más allá de nuestro alcance. El viejo término de los cartógrafos *terra incognita* viene a la mente. Cuanto más descubrimos, menos parecemos saber. Eso es la física en pocas palabras.*

— Leonard Susskind

La guerra de los agujeros negros

En este trabajo se buscó analizar un conjunto de métodos para el cálculo de cargas conservadas en distintos tipos de teorías de la gravedad. La motivación fundamental para estudiar el estado del arte sobre el desarrollo de estos métodos fue entender un problema abierto en la Relatividad General: obtener un método general para la obtención de cargas conservadas en cualquier clase de teoría gravitacional. Esto es esencial para las investigaciones actuales dentro del contexto de la correspondencia Gauge/Gravity, donde la certidumbre sobre el cumplimiento de las leyes de la termodinámica para los agujeros negros es necesaria para el cálculo de sus cargas conservadas y de sus equivalencias dadas por la primera ley. Esto es crucial para cronometrar su crecimiento y verificar su verosimilitud.

Dentro de los métodos estudiados el método Arnowitt-Misner-Deser (ADM) sólo se puede aplicar a espaciotiempos que admitan una foliación por hipersuperficies de Cauchy, es decir, que sean globalmente hiperbólicos, además de ser asintóticamente planos, de tal manera que, cuando se intentó calcular la masa del agujero negro Schwarzschild-dS el procedimiento falló, dado que el espaciotiempo dS no admite una globalidad hiperbólica y su espacio asintótico tiene una topología no plana, por lo que fue necesario estudiar este último tipo de agujero mediante otro enfoque como lo es el método Abbot-Deser-Tekin (ADT), el cual tiene como ingredientes fundamentales una solución de vacío de la teoría que se está analizando,¹ y un campo Killing asociado a esta métrica de fondo.

Claramente, Schwarzschild-dS soporta estas condiciones, ya que su espacio de fondo *de Sitter* (dS) es solución de las ecuaciones de campo de Einstein. Tomando una perturbación que se

¹En este caso, la teoría utilizada fue Einstein-Hilbert, pero hay extensiones de este método para tratar, por ejemplo, con teorías con correcciones cuadráticas al escalar de curvatura.

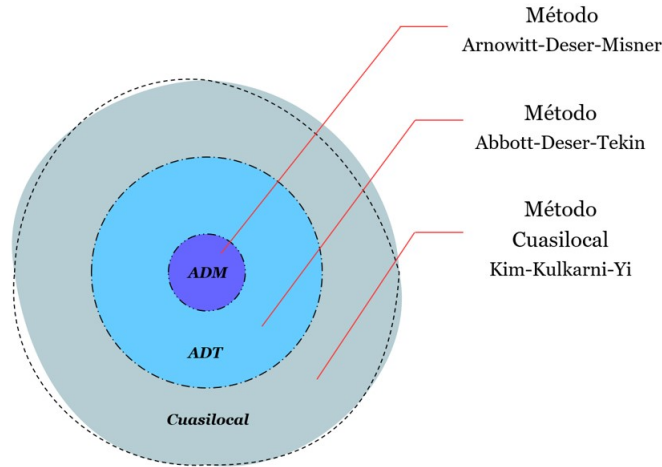


Fig. 5.1.: Esta figura busca ilustrar el modo en el que los métodos para el cálculo de cargas conservadas en espaciotiempos encajan entre sí: Como se observa, el método Cuasilocal contiene a los otros dos, pues este posibilita no solo el estudio de espaciotiempo provenientes de modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert como también lo hace el método ADT, sino que quita la restricción impuesta por este último de tener una solución de vacío para poder funcionar. Así mismo se puede ver cómo el método ADT contiene al método ADM pues el primero extiende la posibilidad de cómputo para cargas conservadas a espaciotiempos que no posibiliten una globalidad hiperbólica, y que tenga una tipología asintótica distinta a la plana.

desvanece en el infinito espacial sobre esta, se construye la solución del agujero negro. La cual, en conjunto con los campos Killing temporales, permite calcular la masa de este agujero negro. A pesar de que este método permite estudiar nuevas teorías de gravedad, su limitación principal es la necesidad de una solución de vacío. Por lo tanto, cuando se intenta considerar un agujero negro cuyo espaciotiempo de fondo no corresponde a una solución de vacío, como es el caso de Lifshitz, el método fracasa. Por ende, se necesitó un método que generalizara los dos anteriores, el cual es conocido como método Cuasilocal. Este se fundamenta en considerar el método ADT con una métrica de fondo genérica, no necesariamente solución de vacío, y un conjunto de cantidades conservadas *off-shell*, como lo son un potencial de Noether y un potencial ADT. Esto permite conformar una carga conservada de manera cuasilocal al tomar las direcciones contravariantes Killing fijas. De esta manera, fue posible abordar el cálculo de la masa para el agujero negro Lifshitz en tres dimensiones.

5.1 Trabajo hacia el futuro

Los alcances de estos métodos para el cálculo de cargas conservadas son muy amplios, además de muy variados. En particular, se buscará calcular la masa para agujeros negros en el contexto de *cubic gravity* mediante la implementación de los métodos ADT y cuasilocal dependiendo del caso a atacar. Por otro lado, dentro del ejercicio de corroborar la primera ley de la termodinámica para agujeros negros, se buscará aprender y aplicar los métodos para

calcular la entropía y temperatura de agujeros negros con la intención de poder tener todas las herramientas para verificar esta ley en su totalidad.

Cálculos suplementarios

En este apéndice se reúne un gran número de cálculos intermedios que acompañan el cuerpo principal de la tesis, en particular para los métodos ADT y Cuasilocal.

A.1 Expansión de las ecuaciones de movimiento

Considerando las componentes covariantes de métrica como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$$

se puede obtener sus componentes contravariantes $g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} + \varepsilon a^{\mu\nu}$, como sigue

$$\begin{aligned} \delta^\mu{}_\nu &= g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} \\ &= (\bar{g}^{\mu\alpha} + \varepsilon a^{\mu\alpha}) (\bar{g}_{\alpha\nu} + \varepsilon h_{\alpha\nu}) \\ &= \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}_{\alpha\nu} + \varepsilon (\bar{g}^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu} a^{\mu\alpha}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &\cong \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon (h^\mu{}_\nu + a^\mu{}_\nu) \end{aligned}$$

Por lo tanto $h^\mu{}_\nu + a^\mu{}_\nu = 0$, lo que implica que $a_{\alpha\nu} = -h_{\alpha\nu}$ y $a^{\alpha\nu} = -h^{\alpha\nu}$, y se concluye que:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= \bar{g}^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dada la expresión para los símbolos de Christoffel, se sustituyen las expresiones (A.1) en ellos, y se encuentra la expansión para ellos mismos para distintos órdenes de la perturbación

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} (\partial_\mu \bar{g}_{\beta\nu} + \partial_\nu \bar{g}_{\mu\beta} - \partial_\beta \bar{g}_{\mu\nu}) + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} (\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\partial_\mu \bar{g}_{\beta\nu} + \partial_\nu \bar{g}_{\mu\beta} - \partial_\beta \bar{g}_{\mu\nu}) \right\} - \varepsilon^2 \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Usando $\bar{\nabla}_\mu h_{\beta\nu} = \partial_\mu h_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\beta} h_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} h_{\beta\sigma}$ y que $\bar{\nabla}_\mu \bar{g}_{\beta\nu} = 0 \rightarrow \partial_\mu \bar{g}_{\beta\nu} = \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\beta} \bar{g}_{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} \bar{g}_{\beta\sigma}$, se pueden reescribir el término de orden lineal (ε) y el término de segundo orden (ε)² así

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla}_\mu h^\alpha_\nu + \bar{\nabla}_\nu h^\alpha_\mu - \bar{\nabla}^\alpha h_{\mu\nu} \right) \\ &\quad - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \left(\bar{\nabla}_\mu h_{\beta\nu} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\beta} - \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\nu} \right) + \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} h_{\beta\sigma} \right\}\end{aligned}$$

Así que los símbolos de Christoffel de orden lineal y de segundo orden serán

$$\begin{aligned}{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla}_\mu h^\alpha_\nu + \bar{\nabla}_\nu h^\alpha_\mu - \bar{\nabla}^\alpha h_{\mu\nu} \right) \\ {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \left(\bar{\nabla}_\mu h_{\beta\nu} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\beta} - \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\nu} \right) + \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} h_{\beta\sigma}\end{aligned}\tag{A.2}$$

Por lo que finalmente la expansión para $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ será

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \varepsilon {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\tag{A.3}$$

De tal manera que se puede usar esta ultima expresión para hallar la expansión para el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, como sigue:

$$R_{\mu\rho} = R^\alpha_{\mu\alpha\rho} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\rho} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\tag{A.4}$$

Con la expansión para cada término

$$\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\rho} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho} + \varepsilon \partial_\alpha {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\rho} + \varepsilon^2 \partial_\alpha {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\rho}\tag{A.5a}$$

$$\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\rho} = \partial_\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\rho} + \varepsilon \partial_\mu {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} + \varepsilon^2 \partial_\mu {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\tag{A.5b}$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} = \left[\bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} + \varepsilon {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \right] \left[\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} + \varepsilon {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} \right]\tag{A.5c}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} = \left[\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} + \varepsilon {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \right] \left[\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} + \varepsilon {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \right]\tag{A.5d}$$

Al repartir los términos de (A.5c) y (A.5d) y factorizando según el orden del ε , se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} &= \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} + \varepsilon \left[\bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} \right] \\ &\quad + \varepsilon^3 \left[{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \right] + \varepsilon^4 \left[{}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} \right]\end{aligned}\tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} &= \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} + \varepsilon \left[\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} + {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} + {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} \right] \\ &\quad + \varepsilon^3 \left[{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} + {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \right] + \varepsilon^4 \left[{}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \right]\end{aligned}\tag{A.7}$$

Considerando los términos de orden cero, lineal y de mayores órdenes, se tiene respectivamente

$$\bar{R}_{\mu\rho} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho} - \partial_\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\rho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} \quad (\text{A.8})$$

$$R^L_{\mu\rho} = \partial_\alpha {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\rho} - \partial_\mu {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} + \left[\left(\bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \right) - \left(\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{\mu\rho} = & \partial_\alpha {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\rho} - \partial_\mu {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} \\ & - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} - {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} - {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{C}_{\mu\rho} = {}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + {}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} - {}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} - {}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{D}_{\mu\rho} = {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} - {}^{(2)}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \quad (\text{A.12})$$

Con estos se pueden calcular los escalares, como sigue

$$R = (\bar{g}^{\mu\rho} - \varepsilon h^{\mu\rho}) \left(\bar{R}_{\mu\rho} + \varepsilon R^L_{\mu\rho} + \varepsilon^2 \tilde{B}_{\mu\rho} + \varepsilon^3 \tilde{C}_{\mu\rho} + \varepsilon^4 \tilde{D}_{\mu\rho} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{R}_{\mu\rho} \quad (\text{A.14a})$$

$$R^L = \bar{g}^{\mu\rho} R^L_{\mu\rho} - \bar{R}_{\mu\rho} h^{\mu\rho} \quad (\text{A.14b})$$

$$\tilde{B} = \bar{g}^{\mu\rho} \tilde{B}_{\mu\rho} - h^{\mu\rho} R^L_{\mu\rho} \quad (\text{A.14c})$$

$$\tilde{C} = \bar{g}^{\mu\rho} \tilde{C}_{\mu\rho} - h^{\mu\rho} \tilde{B}_{\mu\rho} \quad (\text{A.14d})$$

$$\tilde{D} = \bar{g}^{\mu\rho} \tilde{D}_{\mu\rho} - h^{\mu\rho} \tilde{C}_{\mu\rho} \quad (\text{A.14e})$$

$$\tilde{E} = -h^{\mu\rho} \tilde{D}_{\mu\rho} \quad (\text{A.14f})$$

Por lo que al sustituir los valores de expansión para $R_{\mu\nu}$ y R en las ecuaciones de movimiento en el vacío se tiene

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 0 \\ \Rightarrow \left[\bar{R}_{\mu\nu} + \varepsilon R^L_{\mu\nu} + \dots \right] - \frac{1}{2} (\bar{g}_{\mu\nu} - \varepsilon h_{\mu\nu}) \left[\bar{R} + R^L + \dots \right] + \Lambda (\bar{g}_{\mu\nu} - \varepsilon h_{\mu\nu}) &= 0 \quad (\text{A.15}) \\ \Rightarrow \left[\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{\mu\nu} + \Lambda \bar{g}_{\mu\nu} \right] + \varepsilon \left[R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\bar{g}_{\mu\nu} R^L + h_{\mu\nu} \bar{R}) + \Lambda h_{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $\bar{g}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)} = 0 \rightarrow \bar{R} = 4\Lambda$, se puede reorganizar la expresión para los términos lineales para llegar a

$$\Rightarrow \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon \left[R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^L - \Lambda h_{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

Con lo que las ecuaciones se expanden completamente como

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)} + \mathcal{G}_{\mu\nu}^L + B_{\mu\nu}^{(2)} + C_{\mu\nu}^{(3)} + D_{\mu\nu}^{(4)} + E_{\mu\nu}^{(5)} + F_{\mu\nu}^{(6)} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Donde

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(0)} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}\bar{g}_{\mu\nu} + \Lambda\bar{g}_{\mu\nu} \quad (\text{A.17a})$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^L = R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^L - \Lambda h_{\mu\nu} \quad (\text{A.17b})$$

$$B_{\mu\nu}^{(2)} = \tilde{B}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}\tilde{B} + h_{\mu\nu}R^L$$

$$C_{\mu\nu}^{(3)} = \tilde{C}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}\tilde{C} + h_{\mu\nu}\tilde{B}$$

$$D_{\mu\nu}^{(4)} = \tilde{D}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}\tilde{D} + h_{\mu\nu}\tilde{C}$$

$$E_{\mu\nu}^{(5)} = \bar{g}_{\mu\nu}\tilde{E} + h_{\mu\nu}\tilde{D}$$

$$F_{\mu\nu}^{(6)} = h_{\mu\nu}\tilde{E}$$

A.1.1 Términos lineales

Organizando la expresión (A.9) se puede sumar y restar el término $\bar{\Gamma}^\delta_{\mu\alpha}{}^L\Gamma^\alpha_{\delta\rho}$, obteniendo

$$\begin{aligned} R^L_{\mu\rho} &= \left[\partial_\alpha{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\rho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda}{}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho}{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \right] \\ &\quad + \left[-\partial_\mu{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho}{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda}{}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \right] + \bar{\Gamma}^\delta_{\mu\alpha}{}^L\Gamma^\alpha_{\delta\rho} - \bar{\Gamma}^\delta_{\mu\alpha}{}^L\Gamma^\alpha_{\delta\rho} \\ \Rightarrow R^L_{\mu\rho} &= \left[\partial_\alpha{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\rho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda}{}^L\Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\rho}{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \bar{\Gamma}^\delta_{\mu\alpha}{}^L\Gamma^\alpha_{\delta\rho} \right] \\ &\quad - \left[\partial_\mu{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda}{}^L\Gamma^\lambda_{\alpha\rho} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho}{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} - \bar{\Gamma}^\delta_{\mu\alpha}{}^L\Gamma^\alpha_{\delta\rho} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Por lo que, al usar $\bar{\nabla}_\gamma T^\alpha_{\beta\nu} = \partial_\gamma T^\alpha_{\beta\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\sigma\gamma} T^\sigma_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\delta_{\gamma\beta} T^\alpha_{\delta\nu} - \bar{\Gamma}^\rho_{\gamma\nu} T^\alpha_{\rho\beta}$ para los símbolos de Christoffel lineales, se obtiene una expresión compacta para $R^L_{\mu\rho}$,

$$R^L_{\mu\rho} = \bar{\nabla}_\alpha{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\rho} - \bar{\nabla}_\mu{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} \quad (\text{A.19})$$

Esta última expresión es útil para encontrar el Ricci lineal en términos de derivadas covariantes de la perturbación, para ello se usa (A.2), y se sustituye en la última expresión,

$$\begin{aligned} \bullet \bar{\nabla}_\alpha{}^L\Gamma^\alpha_{\mu\rho} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta} \left(\bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu h_{\beta\rho} + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\beta} - \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\rho} \right) \\ \bullet \bar{\nabla}_\mu{}^L\Gamma^\alpha_{\alpha\rho} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta} \left(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha h_{\beta\rho} + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\rho h_{\alpha\beta} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\beta h_{\alpha\rho} \right) \end{aligned}$$

Para obtener,

$$R^L_{\mu\rho} = \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h_{\mu\rho} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\rho h + \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\mu h_{\alpha\rho} + \bar{\nabla}^\beta \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\beta} \right] \quad (\text{A.20})$$

Donde se debe tener en cuenta que $\bar{\square} \equiv \bar{\nabla}^\beta \bar{\nabla}_\beta$ y $h = \bar{g}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$.

El mismo análisis se puede hacer para el escalar lineal, de tal manera que se obtenga su forma explícita en términos de derivadas covariantes de la perturbación. Tomando en cuenta que al sustituir $\bar{R} = 4\Lambda$ en (A.17a) se consigue $\bar{R}_{\mu\rho} = \Lambda \bar{g}_{\mu\rho}$, se puede entonces reescribir (A.14b) como sigue

$$R^L = \bar{g}^{\mu\rho} R^L_{\mu\rho} - \bar{R}_{\mu\rho} h^{\mu\rho} = \bar{g}^{\mu\rho} R^L_{\mu\rho} - \Lambda h$$

Así que basta con desarrollar $\bar{g}^{\mu\rho} R^L_{\mu\rho}$ tomando (A.20)

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mu\rho} R^L_{\mu\rho} &= \bar{g}^{\mu\rho} \left\{ \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h_{\mu\rho} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\rho h + \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\mu h_{\alpha\rho} + \bar{\nabla}^\beta \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\beta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho h + \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\mu h_{\alpha\rho} + \bar{g}^{\mu\rho} \bar{\nabla}^\beta \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-2\bar{\square} h + \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\mu h_{\alpha\rho} + \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-2\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\mu \left(\bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\alpha\beta} h_{\alpha\rho} \right) + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho \left(\bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\alpha\beta} h_{\mu\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-2\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\mu h^{\beta\mu} + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h^{\alpha\rho} \right] \\ &\quad \beta \rightarrow \alpha, \mu \rightarrow \rho \\ &= -\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h^{\alpha\rho} \end{aligned}$$

Finalmente, el escalar de curvatura lineal queda:

$$R^L = -\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h^{\alpha\rho} - \Lambda h \quad (\text{A.21})$$

A.1.2 Divergencia covariante de las ecuaciones linearizadas

Partiendo de (A.17b), se tiene

$${}^L\mathcal{G}^\mu{}_\nu = {}^L R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R^L - \Lambda h^\mu{}_\nu \quad (\text{A.22})$$

Cuya divergencia covariante viene como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu {}^L\mathcal{G}^\mu{}_\nu &= \bar{\nabla}_\mu \left({}^L R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R^L - \Lambda h^\mu{}_\nu \right) \\ &= \bar{\nabla}_\mu {}^L R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\nu R^L - \Lambda \bar{\nabla}_\mu h^\mu{}_\nu \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

La divergencia para el Ricci lineal se obtiene como sigue,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu ({}^L R^\mu{}_\nu) &= \bar{\nabla}_\mu \left\{ \frac{1}{2} \left(-\bar{\square} h^\mu{}_\nu - \bar{\nabla}^\mu \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\bar{\nabla}_\mu \bar{\square} h^\mu{}_\nu - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Usando que,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha &= \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \left(\bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \right) \\
&= \left[\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\alpha \right] \left(\bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \right) + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \\
&= \left[\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\alpha \right] \left(\bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \right) + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\square} h_\nu{}^\alpha
\end{aligned}$$

Se pueden reducir el primer y último término de (A.24),

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha - \bar{\nabla}_\mu \bar{\square} h^\mu{}_\nu - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h &= \left[\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\alpha \right] \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\alpha \\
&= \bar{R}^\mu{}_{\sigma\mu\alpha} \bar{\nabla}^\sigma h_\nu{}^\alpha + \bar{R}^\alpha{}_{\sigma\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\sigma - \bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha \\
&= \bar{R}_{\sigma\alpha} \bar{\nabla}^\sigma h_\nu{}^\alpha - \bar{R}_{\sigma\mu} \bar{\nabla}^\mu h_\nu{}^\sigma - \bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha \\
&= -\bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha
\end{aligned}$$

Quedando,

$$\bar{\nabla}_\mu \left({}^L R^\mu{}_\nu \right) = \frac{1}{2} \left\{ -\bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} \right\}$$

Añadiendo la divergencia covariante del escalar de curvatura lineal, se sigue

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu {}^L R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\nu R^L &= \frac{1}{2} \left\{ -\bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} \right. \\
&\quad \left. - \bar{\nabla}_\nu \left(-\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h^{\alpha\rho} - \Lambda h \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -\bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\nabla}_\nu \bar{\square} h - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\rho h^{\alpha\rho} + \Lambda \bar{\nabla}_\nu h \right\} \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Dado que,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\nu \bar{\square} h - \bar{\nabla}_\nu - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h &= \left[\bar{\nabla}_\nu, \bar{\nabla}_\alpha \right] \bar{\nabla}^\alpha h \\
&= \bar{R}^\alpha{}_{\sigma\nu\alpha} \bar{\nabla}^\sigma h = \bar{R}_{\sigma\nu} \bar{\nabla}^\sigma h \\
&\text{usando } \bar{R}_{\sigma\nu} = \Lambda \bar{g}_{\sigma\nu}, \\
&= -\Lambda \bar{g}_{\sigma\nu} \bar{\nabla}^\sigma h = -\Lambda \bar{\nabla}^\sigma h \\
\Rightarrow \bar{\nabla}_\nu \bar{\square} h - \bar{\nabla}_\nu - \bar{\square} \bar{\nabla}_\nu h + \Lambda \bar{\nabla}^\sigma h &= 0
\end{aligned}$$

La expresión (A.25) se reduce a:

$$\bar{\nabla}_\mu {}^L R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\nu R^L = \frac{1}{2} \left\{ -\bar{R}^\sigma{}_{\nu\mu\alpha} \bar{\nabla}^\mu h_\sigma{}^\alpha + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\mu} \right\} \tag{A.26}$$

Al analizar el segundo término,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} &= \bar{\nabla}_\mu \left([\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}_\nu] h^{\alpha\mu} + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\mu} \right) \\
&= \bar{\nabla}_\mu \left(\bar{R}^\alpha_{\sigma\alpha\nu} h^{\sigma\mu} + \bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} h^{\alpha\sigma} \right) + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\mu} \\
&= \bar{\nabla}_\mu \left(\bar{R}_{\sigma\nu} h^{\sigma\mu} \right) + \bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\sigma} + \bar{\nabla}_\mu \left(\bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} \right) h^{\alpha\sigma} \\
&\quad + [\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\nu] \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\mu} + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\mu} &= \Lambda \bar{\nabla}_\mu (\bar{g}_{\sigma\nu} h^{\sigma\mu}) + \bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\sigma} \\
&\quad + [\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\nu] \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\mu} + \bar{\nabla}_\mu \left(\bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} \right) h^{\alpha\sigma}
\end{aligned}$$

Además usando que $\bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\sigma} = \bar{R}^\alpha_{\nu\mu\sigma} \bar{\nabla}^\mu h^\sigma_\alpha$, los términos dentro del corchete en (A.26) se reescriben como

$$\begin{aligned}
-\bar{R}^\alpha_{\nu\mu\sigma} \bar{\nabla}^\mu h^\sigma_\alpha + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\nu h^{\alpha\mu} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu h^{\alpha\mu} &= \Lambda \bar{\nabla}_\mu h_{\nu}{}^\mu + \bar{\nabla}_\mu \left(\bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} \right) h^{\alpha\sigma} \\
&\quad + [\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\nu] \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\mu} \tag{A.27}
\end{aligned}$$

Al usar las identidades de Bianchi $\bar{\nabla}_\lambda \bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} + \bar{\nabla}_\alpha \bar{R}^\mu_{\sigma\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu \bar{R}^\mu_{\sigma\lambda\alpha} = 0$ y contraer λ con μ , se concluye

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu \bar{R}^\mu_{\sigma\alpha\nu} &= \bar{\nabla}_\alpha \bar{R}_{\sigma\nu} - \bar{\nabla}_\nu \bar{R}_{\sigma\alpha} \\
&= \bar{\nabla}_\alpha (\Lambda \bar{g}_{\sigma\nu}) - \bar{\nabla}_\nu (\Lambda \bar{g}_{\sigma\alpha}) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que el segundo término en (A.27) se anula. Continuando con la reducción de términos, se puede abrir el anticonmutador en (A.27), además multiplicar por 1/2 para retomar (A.26), tal que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu {}^L R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\nu R^L &= \frac{1}{2} \left(\Lambda \bar{\nabla}_\mu h_{\nu}{}^\mu + \bar{R}^\alpha_{\sigma\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha h^{\sigma\mu} \right. \\
&\quad \left. + \bar{R}^\mu_{\sigma\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\sigma} - \bar{R}^\sigma_{\alpha\mu\nu} \bar{\nabla}_\sigma h^{\alpha\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\Lambda \bar{\nabla}_\mu h_{\nu}{}^\mu + \Lambda \bar{g}_{\sigma\nu} \bar{\nabla}_\alpha h^{\alpha\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\Lambda \bar{\nabla}_\mu h_{\nu}{}^\mu + \Lambda \bar{\nabla}_\alpha h_{\nu}{}^a \right) = \Lambda \bar{\nabla}_\mu h_{\nu}{}^\mu
\end{aligned}$$

Finalmente, si se sustituye lo anterior en la expresión total para la divergencia covariante de las ecuaciones linearizadas (A.23), se obtiene que su divergencia es nula:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu {}^L \mathcal{G}^\mu_\nu &= \bar{\nabla}_\mu {}^L R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\nu R^L - \Lambda \bar{\nabla}_\mu h^\mu_\nu \\
&= \Lambda \bar{\nabla}_\mu h^\mu_\nu - \Lambda \bar{\nabla}_\mu h^\mu_\nu = 0 \\
\Rightarrow \bar{\nabla}_\mu {}^L \mathcal{G}^\mu_\nu &= 0 \tag{A.28}
\end{aligned}$$

A.2 Reescritura del tensor de energía-momento

Partiendo de las ecuaciones de movimiento linearizadas en términos del tensor de energía-momento

$${}^L R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} R^L - \Lambda h^{\mu\nu} = (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \quad (\text{A.29})$$

Se sustituyen los valores para el Ricci (A.20) y el escalar de curvatura (A.21) linearizados, para obtener una reescritura de los términos del lado izquierdo de la igualdad como dos veces la derivada de un 4-tensor antisimétrico (Superpotencial) más un 2-tensor simétrico. Para ello téngase en cuenta que $H^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} h$,

$$\begin{aligned} & {}^L R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} R^L - \Lambda h^{\mu\nu} \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h^{\mu\nu} - \bar{\nabla}^\mu \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\nu h^{\mu\beta} \right] - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \left[-\bar{\square} h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} - \Lambda h \right] - \Lambda h^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h^{\mu\nu} - \bar{\nabla}^\mu \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\nu h^{\mu\beta} + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\square} h - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} \right] \\ &\quad - \Lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \Lambda h \\ &= \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h^{\mu\nu} + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\square} h - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\nu h^{\mu\beta} - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} \right] - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\bar{\square} h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\square} h + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\square} h - \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\nu h^{\mu\beta} + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} \right] \\ &\quad - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\square} H^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\square} h - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h^{\mu\alpha} + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} \right. \\ &\quad \left. - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} \right] - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\square} H^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu H^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\square} h - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\beta} \right] \\ &\quad - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\square} H^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta H^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}^\nu \right] H^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^\nu \bar{\nabla}_\alpha H^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h \right. \\ &\quad \left. + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} \right] - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \left[-\bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} + \bar{g}^{\alpha\nu} H^{\mu\beta} \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}^\nu \right] H^{\mu\alpha} - \Lambda H^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \left[-\bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} + \bar{g}^{\alpha\nu} H^{\mu\beta} \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\nu h + \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}^\mu h^{\alpha\nu} \right] + X^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \left[-\bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} + \bar{g}^{\alpha\nu} H^{\mu\beta} \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{g}^{\mu\beta} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\beta} \bar{g}^{\alpha\nu} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta h \right] + X^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \left[-\bar{g}^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} + \bar{g}^{\alpha\nu} H^{\mu\beta} + \bar{g}^{\mu\beta} H^{\alpha\nu} \right] + X^{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta} + X^{\mu\nu} = (-\bar{g})^{-1/2} T^{\mu\nu} \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

A.2.1 Antisimetría de $F^{\mu\alpha}$

Tómese $F^{\mu\alpha} = (\bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta}) \bar{\xi}_\nu - K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu$ e intercámbiese $\mu \longleftrightarrow \alpha$,

$$F^{\alpha\mu} = (\bar{\nabla}_\beta K^{\alpha\mu\nu\beta}) \bar{\xi}_\nu - K^{\alpha\beta\nu\mu} \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu$$

sumando $F^{\mu\alpha} + F^{\alpha\mu}$, y utilizando las simetrías algebraicas del superpotencial,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [\bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta} + \bar{\nabla}_\beta K^{\alpha\mu\nu\beta}] \bar{\xi}_\nu - [K^{\mu\beta\nu\alpha} + K^{\alpha\beta\nu\mu}] \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu \\ &= [\bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta} - \bar{\nabla}_\beta K^{\mu\alpha\nu\beta}] \bar{\xi}_\nu - [K^{\mu\beta\nu\alpha} + K^{\mu\nu\beta\alpha}] \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu \\ &= -[K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu - K^{\mu\nu\beta\alpha} \bar{\nabla}_\nu \bar{\xi}_\beta] \end{aligned}$$

renombrando $\nu \rightarrow \beta$

$$= -[K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu - K^{\mu\beta\nu\alpha} \bar{\nabla}_\beta \bar{\xi}_\nu] = 0$$

$$\Rightarrow F^{\mu\alpha} = -F^{\alpha\mu} \tag{A.31}$$

A.3 Vectores Killings para De Sitter

Para obtener las ecuaciones que satisfacen los 10 vectores de Killing para este espacio maximamente simétrico, primeramente se toman las ecuaciones Killing $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$, y se expande de tal manera que se obtenga una nueva expresión para ésta, dependiente de los coeficientes métricos. Para ello se abren las derivadas covariantes y posteriormente se sustituyen los valores explícitos para los símbolos de Christoffel en términos de la métrica, así como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \partial_\mu \xi_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \xi_\alpha + \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \xi_\alpha = 0 \\
 & \rightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \xi_\alpha = 0 \\
 & \rightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2 \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \right] \xi_\alpha = 0 \\
 & \rightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \xi^\beta (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) = 0 \\
 & \rightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \xi^\beta \partial_\mu g_{\beta\nu} - \xi^\beta \partial_\nu g_{\mu\beta} + \xi^\beta \partial_\beta g_{\mu\nu} = 0 \\
 & \rightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \left[\partial_\mu (\xi^\beta g_{\beta\nu}) + g_{\beta\nu} \partial_\mu \xi^\beta \right] - \left[\partial_\nu (\xi^\beta g_{\mu\beta}) + g_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta \right] + \xi^\beta \partial_\beta g_{\mu\nu} = 0 \\
 & \rightarrow \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi^\beta g_{\beta\nu} - g_{\beta\nu} \partial_\mu \xi^\beta - \partial_\nu \xi^\beta g_{\mu\beta} - g_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta + \xi^\beta \partial_\beta g_{\mu\nu} = 0 \\
 & \rightarrow \xi^\beta \partial_\beta g_{\mu\nu} - (g_{\beta\nu} \partial_\mu \xi^\beta + g_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta) = 0 \\
 & \Rightarrow \xi^\beta \partial_\beta g_{\mu\nu} - 2g_{\beta(\nu} \partial_{\mu)} \xi^\beta = 0
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Usando esta última expresión junto con la métrica para dS^4 en coordenadas flat slicing $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, f^2(t)\vec{x})$, se obtienen 4 ecuaciones diferenciales parciales acopladas, las cuales representan las ecuaciones que satisfacen los 10 vectores Killing para este espaciotiempo: Para $\mu = \nu = 0 = t$

$$\bullet \partial_t \xi^t = 0 \tag{A.33}$$

Para $\mu = t; \nu = i$

$$\bullet -\partial_i \xi^t + f^2(t) \partial_t \xi^i = 0 \tag{A.34}$$

Para $\mu = \nu = i$

$$\bullet \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \xi^t + \partial_i \xi^i = 0 \tag{A.35}$$

Para $\mu = i; \nu = j$, con $i \neq j$

$$\bullet \partial_j \xi^i + \partial_i \xi^j = 0 \tag{A.36}$$

Dadas estas ecuaciones, su solución vendrá dada como sigue:

Tomando ∂_i sobre (A.36),

$$\partial_{ij}^2 \xi^i + \partial_{ii}^2 \xi^j = 0 \tag{*}$$

multiplicando por -1 e intercambiando $l \leftrightarrow i$ en (*),

$$-\partial_{ij}^2 \xi^l - \partial_{il}^2 \xi^j = 0 \quad (**)$$

intercambiando $l \leftrightarrow j$ en (*),

$$\partial_{jl}^2 \xi^i + \partial_{ji}^2 \xi^l = 0 \quad (***)$$

sumando (*), (**) y (***), se concluye que:

$$\begin{aligned} \partial_{lj}^2 \xi^i + \partial_{li}^2 \xi^j - \partial_{ij}^2 \xi^l - \partial_{il}^2 \xi^j + \partial_{jl}^2 \xi^i + \partial_{ji}^2 \xi^l &= 0 \\ \rightarrow \partial_{lj}^2 \xi^i + \partial_{jl}^2 \xi^i &= 0 \\ \rightarrow 2\partial_{lj}^2 \xi^i &= 0 \\ \rightarrow \partial_l (\partial_j \xi^i) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_j \xi^i &= C_j^i(t) \end{aligned} \quad (A.37)$$

Reemplazando (A.37) en (A.36), se concluye que $C_j^i(t)$ es antisimétrico

$$C_j^i(t) = -C_i^j(t) \quad (A.38)$$

por otro lado, integrando (A.37), se tiene,

$$\begin{aligned} \partial_j \xi^i &= C_j^i(t) \\ \xi^i &= \int C_j^i(t) dx^j + h^i(t, x^k) \text{ con, } x^k \neq x^j \\ \Rightarrow \xi^i &= C_j^i(t) x^j + h^i(t, x^i) \end{aligned} \quad (A.39)$$

además, usando (A.33) al tomar ∂_t en (A.35),

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \xi^t + \partial_i \xi^i \right) &= 0 \\ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \partial_t \xi^t + \partial_{ti}^2 \xi^i &= 0 \\ \Rightarrow \partial_{ti}^2 \xi^i &= 0 \\ \text{usando (A.39)} \rightarrow \partial_{ti}^2 [C_j^i(t) x^j + h^i(t, x^i)] &= 0 \\ \rightarrow \partial_t [\partial_i (C_j^i(t) x^j + h^i(t, x^i))] &= 0 \\ \rightarrow \partial_t [C_j^i(t) \partial_i x^j + \partial_i (h^i(t, x^i))] &= 0 \\ \rightarrow \partial_t [C_j^i(t) \delta_i^j + \partial_i (h^i(t, x^i))] &= 0 \\ \rightarrow \partial_{ti}^2 [h^i(t, x^i)] &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t (\partial_i h^i) &= 0 \Rightarrow \partial_i h^i = \partial_i X^i(x^i) \end{aligned}$$

integrando este último resultado,

$$\begin{aligned} h^i &= \int \partial_i X^i(x^i) dx^i + f^i(t) \\ \Rightarrow h^i(t, x^i) &= X^i(x^i) + f^i(t) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

así, al sustituir en (A.39), se tiene,

$$\xi^i = C_j^i(t)x^j + f^i(t) + X^i(x^i). \quad (\text{A.41})$$

Tomando ∂_j en (A.34), con $j \neq i$, se tiene,

$$\begin{aligned} \partial_j \left(-\partial_i \xi^t + f^2(t) \partial_t \xi^i \right) &= 0 \\ -\partial_{ji}^2 \xi^t + f^2(t) \partial_{jt}^2 \xi^i &= 0 \end{aligned} \quad (\triangle)$$

intercambiando $i \leftrightarrow j$, en el anterior resultado,

$$-\partial_{ij}^2 \xi^t + f^2(t) \partial_{it}^2 \xi^j = 0 \quad (\diamond)$$

sumando $(\triangle)$ y $(\diamond)$, y usando (A.36),

$$\begin{aligned} -2\partial_{ij}^2 \xi^t + f^2(t) \partial_t \left(\partial_j \xi^i + \partial_i \xi^j \right) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_{ij}^2 \xi^t &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

De los resultados (A.33) y (A.42) se concluye que ξ^t es separable en suma en las coordenadas espaciales, por lo tanto, ξ^t se puede escribir como,

$$\xi^t = \sum_{k=1}^3 F^k(x^k) \quad (\text{A.43})$$

así, sustituyendo este último resultado (A.43) y (A.41) en (A.34),

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_i \xi^t + f^2(t) \partial_t \xi^i \\ &= -\partial_i \left\{ \sum_{k=1}^3 F^k(x^k) \right\} + f^2(t) \partial_t \left\{ C_j^i(t)x^j + f^i(t) + X^i(x^i) \right\} \\ &= -\sum_{k=1}^3 \frac{\partial F^k}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) + f^2(t) \left\{ \dot{C}_j^i(t)x^j + \dot{f}^i \right\} \\ &= -\sum_{k=1}^3 \frac{\partial F^k}{\partial x^k} \delta_i^k + f^2(t) \left\{ \dot{C}_j^i(t)x^j + \dot{f}^i \right\} \\ \Rightarrow -\partial_i F^i + f^2(t) \dot{C}_j^i(t)x_j + f^2(t) \dot{f}^i &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

ahora, tomando primero ∂_j con $j \neq i$ en la anterior expresión se llega a que,

$$\begin{aligned} f^2(t) \dot{C}_j^i(t) &= 0 \\ \rightarrow \dot{C}_j^i(t) &= 0 \\ \Rightarrow C_j^i &\text{ es constante} \end{aligned}$$

por lo que (A.44) se reduce a

$$-\partial_i F^i + f^2(t) \dot{f}^i = 0$$

luego, si se toma ∂_t de este resultado,

$$\begin{aligned} \partial_t (f^2(t) \dot{f}^i) &= 0 \\ \Rightarrow f^2(t) \dot{f}^i &= \lambda^i \text{ es constante} \end{aligned}$$

reduciendo aún más la ecuación (A.44), de tal manera,

$$-\partial_i F^i + \lambda^i = 0 \quad (\text{A.45})$$

resolviendo para F^i , se obtiene,

$$\begin{aligned} \partial_i F^i &= \lambda^i \\ \Rightarrow F^i(x^i) &= \lambda^i x^i + a^i \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

de igual manera, resolviendo para f^i ,

$$\begin{aligned} f^i &= \lambda^i f^{-2}(t) \\ &= \lambda^i \int e^{-2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} dt + b^i \\ &= \lambda^i \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right) e^{-2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} + b^i \\ \Rightarrow f^i &= -\frac{\lambda^i}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} f^{-2}(t) + b^i. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

De esta manera, un primer vistazo explícito para las componentes de los vectores Killing viene de sustituir (A.46) y (A.47) en (A.43) y (A.41) respectivamente, consiguiendo:

$$\begin{aligned} \xi^t &= \sum_{k=1}^3 \lambda^k x^k + C \\ \xi^i &= C_j^i x^j - \frac{\lambda^i}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} f^{-2}(t) + X^i(x^i) \end{aligned}$$

Dado que aún falta conocer la forma explícita de la cantidad X^i , se puede buscar su significado, al sustituir los anteriores resultados para ξ^t y ξ^i en cada una de las ecuaciones

(A.33), (A.34), (A.35) y (A.36), verificando que en las tres primeras se concluye con el resultado $0 = 0$, mientras que la última ecuación resulta ser:

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\xi^t + \partial_i X^i = 0 \quad (\square)$$

Tomando ∂_j y sustituyendo ξ^t , con $i \neq j$, en la anterior ecuación,

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\frac{\Lambda}{2}}\partial_j (\lambda^k x_k + C) + \partial_{ji}^2 X^i \\ &= \sqrt{\frac{\Lambda}{2}}\lambda^k \delta_j^k \Rightarrow \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\lambda^j = 0, \lambda^j = 0, \text{ si } j \neq i \end{aligned}$$

por lo que sólo sobrevivirán los términos i -ésimos del conjunto $\{x^k\}$, de tal manera que la expresión $(\square)$ resulta,

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{2}}\partial_j (\lambda^i x_i + C) + \partial_{ji}^2 X^i = 0$$

solucionando para X^i ,

$$\begin{aligned} \partial_i X^i &= -\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} (\lambda^i x_i + C) \\ \Rightarrow X^i &= -\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{\lambda^i}{2} x^a x_a + C x^i \right) + d^i. \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la forma explícita para las componentes del campo Killing,

- $\xi^t = \lambda^b x_b + C.$
- $\xi^i = C_j^i x^j - \frac{\lambda^i}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} f^{-2}(t) - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{\lambda^i}{2} x^a x_a + C x^i \right) + d^i.$

por lo tanto, dada la forma general para un campo vectorial Killing $\xi = \xi^\mu \partial_\mu = \xi^t \partial_t + \xi^i \partial_i$, se tiene:

$$\xi = \left\{ \lambda^b x_b + C \right\} \partial_t + \left\{ C_j^i x^j - \frac{\lambda^i}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} f^{-2}(t) - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{\lambda^i}{2} x^a x_a + C x^i \right) + d^i \right\} \partial_i \quad (\text{A.48})$$

factorizando en las constantes arbitrarias, se concluye que:

$$-C \left\{ -\partial_t + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i \partial_i \right\} + C_j^i x^j \partial_i + \lambda^i \left\{ x_i \partial_t - \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} f^{-2}(t) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^a x_a \right] \partial_i \right\} + d^i \partial_i \quad (\text{A.49})$$

Los vectores Killing que describen las simetrías de dS^4 :

$$\begin{aligned}
 & \bullet -\partial_t + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i \partial_i \\
 & \bullet x^j \partial_j \\
 & \bullet x_i \partial_t - \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} f^{-2}(t) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^a x_a \right] \partial_i \\
 & \bullet \partial_i
 \end{aligned} \tag{■}$$

A.4 Expresión explícita de $E(\xi)$ en términos de la perturbación

Utilizando la métrica para el espaciotiempo dS^4 en las coordenadas flat slicing,¹

$$ds^2 = -dt^2 + f^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{A.50}$$

se pueden obtener los símbolos de Christoffel asociados a esta, tomando la definición de ellos, y sustituyendo las componentes métricas diferentes de cero, se consigue:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

$\alpha = 0 \rightarrow \Gamma^0_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu g_{0\nu} + \partial_\nu g_{\mu 0} - \partial_0 g_{\mu\nu})$ • $\Gamma^0_{00} = 0$ • $\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij} f \dot{f}$	$\alpha = i \rightarrow \Gamma^i_{\mu\nu} = \frac{\delta^{ij}}{2f^2} (\partial_\mu g_{j\nu} + \partial_\nu g_{\mu j} - \partial_j g_{\mu\nu})$ • $\Gamma^i_{00} = 0$ • $\Gamma^i_{0l} = \delta^i_l f^{-1} \dot{f}$ • $\Gamma^i_{lk} = 0$
---	---

Por otro lado, usando la métrica, es posible obtener las componentes covariantes para el vector de Killing (■) de (A.3),

$$\begin{aligned}
 \xi_\mu &= g_{\mu\nu} \xi^\nu = g_{\mu 0} \xi^0 + g_{\mu j} \xi^j \\
 &= \delta^0_\mu g_{00} \xi^0 + \delta^i_\mu g_{ij} \xi^j \\
 &= \delta^0_\mu + \delta^i_\mu f^2(t) \delta_{ij} \xi^j \\
 &= \delta^0_\mu + \delta^i_\mu f^2(t) \delta_{ij} \xi^j \\
 &= \delta^0_\mu + \delta^i_\mu f^2(t) \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{ij} x^j
 \end{aligned}$$

¹En este apéndice la métrica $g_{\mu\nu}$ representará la métrica de dS^4 , es decir, representará la métrica de fondo cuya notación en el cuerpo principal del documento se denota como $\bar{g}_{\mu\nu}$, esto también para la conexión $\bar{\nabla} \rightarrow \nabla$ y los Killings $\bar{\xi} \rightarrow \xi$

$$\Rightarrow \xi_0 = 1 \text{ y } \xi_i = f^2(t) \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{ij} x^j. \quad (\text{A.51})$$

De esta manera, usando los símbolos de Christoffel y las componentes covariantes de la simetría espaciotemporal de la métrica (A.50) dadas por los anteriores Killings covariantes, y usando la definición para el superpotencial $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ en (3.11), se procede a calcular la cantidad:

$$\nabla_\beta K^{0i\nu\beta} \xi_\nu - K^{0j\nu i} \nabla_j \xi_\nu \quad (\text{A.52})$$

$$\bullet \nabla_\beta K^{0i\nu\beta} \xi_\nu \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \nabla_\beta (K^{0i\nu\beta}) \xi_\nu &= \nabla_\beta (K^{0i\nu\beta}) g_{\nu\alpha} \xi^\alpha \\ &= \nabla_\beta (K^{0i\nu\beta}) g_{\nu 0} \xi^0 + \nabla_\beta (K^{0i\nu\beta}) g_{\nu l} \xi^l \\ &= \nabla_\beta (K^{0i0\beta}) g_{00} \xi^0 + \nabla_\beta (K^{0ij\beta}) g_{jl} \xi^l \\ &= \nabla_\beta (K^{0i0\beta}) + \nabla_\beta (K^{0ij\beta}) g_{jl} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^l \\ &\Rightarrow \nabla_\beta (K^{0i\nu\beta}) \xi_\nu = \nabla_\beta (K^{0i0\beta}) + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x_j \nabla_\beta (K^{0ij\beta}) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} \nabla_\beta (K^{0i0\beta}) &= \nabla_\beta \left[\frac{1}{2} (g^{0\beta} H^{i0} + g^{i0} H^{0\beta} - g^{00} H^{i\beta} - g^{i\beta} H^{00}) \right] \\ &= \frac{1}{2} [g^{0\beta} \nabla_\beta H^{i0} + \nabla_\beta H^{i\beta} - g^{i\beta} \nabla_\beta H^{00}] \\ &= \frac{1}{2} [g^{00} \nabla_0 H^{i0} + \nabla_0 H^{i0} + \nabla_j H^{ij} - g^{ij} \nabla_j H^{00}] \\ &= \frac{1}{2} [-\nabla_0 H^{i0} + \nabla_0 H^{i0} + \nabla_j H^{ij} - g^{ij} \nabla_j H^{00}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\nabla_j \left(h^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right) - g^{ij} \nabla_j \left(h^{00} - \frac{1}{2} g^{00} g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\nabla_j h^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{\alpha\beta} \nabla_j h^{\alpha\beta} - g^{ij} \nabla_j h^{00} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{\alpha\beta} \nabla_j h^{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\nabla_j h^{ij} - g^{ij} \nabla_j h^{00} - g^{ij} g_{\alpha\beta} \nabla_j h^{\alpha\beta}] \\ &= \frac{1}{2} [\nabla_j h^{ij} - g^{ij} \nabla_j h^{00} - g^{ij} g_{00} \nabla_j h^{00} - g^{ij} g_{kl} \nabla_j h^{kl}] \\ &= \frac{1}{2} [\nabla_j h^{ij} - f^{-2} \delta^{ij} f^2 \delta_{kl} \nabla_j h^{kl}] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_j h^{ij} + \Gamma_{j\alpha}^i h^{\alpha j} + \Gamma_{j\alpha}^j h^{i\alpha} - \delta^{ij} \delta_{kl} (\partial_j h^{kl} + \Gamma_{j\alpha}^k h^{\alpha l} + \Gamma_{j\alpha}^l h^{k\alpha})] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_j h^{ij} + \Gamma_{j0}^i h^{0j} + \Gamma_{j0}^j h^{i0} - \delta^{ij} \delta_{kl} (\partial_j h^{kl} + \Gamma_{j0}^k h^{0l} + \Gamma_{j0}^l h^{k0})] \\ &= \frac{1}{2} \left[\partial_j h^{ij} + \frac{\dot{f}}{f} \delta_j^i h^{0j} + 3 \frac{\dot{f}}{f} h^{0i} - \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} - \delta^{ij} \delta_{jl} \frac{\dot{f}}{f} h^{0l} - \delta^{ij} \delta_{kj} \frac{\dot{f}}{f} h^{k0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\partial_j h^{ij} + 4 \frac{\dot{f}}{f} h^{0i} - \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} - \frac{\dot{f}}{f} h^{0i} - \frac{\dot{f}}{f} h^{i0} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} + \partial_j h^{ij} + 2 \frac{\dot{f}}{f} h^{0i} \right] \\
\Rightarrow \nabla_\beta (K^{0i0\beta}) &= \frac{1}{2} \left[-\delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} + \partial_j h^{ij} + 2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} h^{0i} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta (K^{0ij\beta}) &= \nabla_\beta \left[\frac{1}{2} (g^{0\beta} H^{ij} + g^{ij} H^{0\beta} - g^{0j} H^{i\beta} - g^{i\beta} H^{0j}) \right] \\
&= \frac{1}{2} [g^{0\beta} \nabla_\beta H^{ij} + g^{ij} \nabla_\beta H^{0\beta} - g^{i\beta} \nabla_\beta H^{00}] \\
&= \frac{1}{2} [g^{00} \nabla_0 H^{ij} + g^{ij} \nabla_0 H^{00} + g^{ij} \nabla_l H^{0l} - g^{il} \nabla_l H^{0j}] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\nabla_0 H^{ij} + g^{ij} \nabla_0 H^{00} + g^{ij} \nabla_l \left(h^{0l} - \frac{1}{2} g^{0l} h \right) - g^{il} \nabla_l \left(h^{0j} - \frac{1}{2} g^{0j} h \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} [-\nabla_0 H^{ij} + g^{ij} \nabla_0 H^{00} + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j}] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\nabla_0 \left(h^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right) + g^{ij} \nabla_0 \left(h^{00} - \frac{1}{2} g^{00} g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right) \right. \\
&\quad \left. + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\nabla_0 h^{ij} + \frac{1}{2} g^{ij} \nabla_0 (g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}) + g^{ij} \nabla_0 h^{00} + \frac{1}{2} g^{ij} \nabla_0 (g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}) \right. \\
&\quad \left. + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\nabla_0 h^{ij} + g^{ij} \nabla_0 (g_{00} h^{00}) + g^{ij} \nabla_0 (g_{kl} h^{kl}) + g^{ij} \nabla_0 h^{00} \right. \\
&\quad \left. + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\nabla_0 h^{ij} - g^{ij} \nabla_0 (h^{00}) + g^{ij} \nabla_0 h^{00} + g^{ij} \nabla_0 (g_{kl} h^{kl}) \right. \\
&\quad \left. + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j} \right] \\
&= \frac{1}{2} [-\nabla_0 h^{ij} + g^{ij} \partial_0 (g_{kl} h^{kl}) + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j}] \\
&= \frac{1}{2} [-\nabla_0 h^{ij} + f^{-2} \delta^{ij} \partial_0 (f^2 h^{kl}) + g^{ij} \nabla_l h^{0l} - g^{il} \nabla_l h^{0j}] \\
&= \frac{1}{2} [f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - (\partial_0 h^{ij} + \Gamma_{0\alpha}^i h^{\alpha j} + \Gamma_{0\alpha}^j h^{i\alpha}) \\
&\quad + g^{ij} (\partial_l h^{0l} + \Gamma_{l\alpha}^0 h^{\alpha l} + \Gamma_{l\alpha}^l h^{0\alpha}) - g^{il} (\partial_l h^{0j} + \Gamma_{l\alpha}^0 h^{\alpha j} + \Gamma_{l\alpha}^j h^{0\alpha})] \\
&= \frac{1}{2} [f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - (\partial_0 h^{ij} + \Gamma_{0l}^i h^{lj} + \Gamma_{0l}^j h^{il}) \\
&\quad + g^{ij} (\partial_l h^{0l} + \Gamma_{lm}^0 h^{ml} + \Gamma_{l0}^l h^{00}) - g^{il} (\partial_l h^{0j} + \Gamma_{lm}^0 h^{mj} + \Gamma_{l0}^j h^{00})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - \partial_0 h^{ij} - \frac{\dot{f}}{f} \delta_l^i h^{lj} - \delta_l^j \frac{\dot{f}}{f} h^{il} + g^{ij} \partial_l h^{0l} + g^{ij} f \dot{f} \delta_{lm} h^{ml} \right. \\
&\quad \left. + g^{ij} \left(3 \frac{\dot{f}}{f} h^{00} \right) - g^{il} \partial_l h^{0j} - g^{il} f \dot{f} \delta_{lm} h^{mj} - g^{il} \frac{\dot{f}}{f} \delta_l^j h^{00} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - \partial_0 h^{ij} - 2 \frac{\dot{f}}{f} h^{ij} + g^{ij} \partial_l h^{0l} + \frac{\dot{f}}{f} \delta^{ij} \delta_{lm} h^{lm} + 2 \delta^{ij} \frac{\dot{f}}{f^3} h^{00} \right. \\
&\quad \left. - g^{il} \partial_l h^{0j} - \frac{\dot{f}}{f} \delta^{il} \delta_{lm} h^{mj} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - \partial_0 h^{ij} + g^{ij} \partial_l h^{0l} - g^{il} \partial_l h^{0j} - 2 \frac{\dot{f}}{f} h^{ij} - \frac{\dot{f}}{f} \delta_m^i h^{mj} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{f}}{f} \delta^{ij} \delta_{lm} h^{lm} + 2 \delta^{ij} \frac{\dot{f}}{f^3} h^{00} \right] \\
&\Rightarrow \nabla_\beta (K^{0ij\beta}) = \frac{1}{2} \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - \partial_0 h^{ij} + g^{ij} \partial_l h^{0l} - g^{il} \partial_l h^{0j} - 3 \frac{\dot{f}}{f} h^{ij} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{f}}{f} \delta^{ij} \delta_{lm} h^{lm} + 2 \delta^{ij} \frac{\dot{f}}{f^3} h^{00} \right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (A.53),

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \nabla_\beta (K^{0i\nu\beta}) \xi_\nu &= \frac{1}{2} \left[-\delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} + \partial_j h^{ij} + 2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} h^{0i} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x_j \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) - \partial_0 h^{ij} + g^{ij} \partial_l h^{0l} - g^{il} \partial_l h^{0j} - 3 \frac{\dot{f}}{f} h^{ij} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{f}}{f} \delta^{ij} \delta_{lm} h^{lm} + 2 \delta^{ij} \frac{\dot{f}}{f^3} h^{00} \right] \quad (*)
\end{aligned}$$

• $K^{0j\nu i} \nabla_j \bar{\xi}_\nu \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
K^{0j\nu i} \nabla_j \xi_\nu &= K^{0j\nu i} \nabla_j (g_{\alpha\nu} \xi^\alpha) \\
&= K^{0j\nu i} g_{\alpha\nu} \nabla_j \xi^\alpha \\
&= K^{0j\nu i} g_{\alpha\nu} \left[\partial_j \xi^\alpha + \bar{\Gamma}^\alpha_{j\beta} \xi^\beta \right] \\
&= K^{0j\nu i} g_{0\nu} \left[\partial_i \xi^0 + \Gamma^0_{j\beta} \xi^\beta \right] + K^{0j\nu i} g_{l\nu} \left(\partial_j \xi^l + \Gamma^l_{j\beta} \xi^\beta \right) \\
&= K^{0j\nu i} g_{0\nu} \left[\partial_j (-1) + \Gamma^0_{jl} \xi^l \right] + K^{0j\nu i} g_{l\nu} \left[\partial_j \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^l \right) + \Gamma^l_{j0} \xi^0 \right] \\
&= K^{0j0i} g_{00} f \dot{f} \delta_{jl} \xi^l + K^{0jki} g_{lk} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_j^l - \frac{\dot{f}}{f} \delta_j^l \right) \\
&= -K^{0j0i} f \dot{f} \delta_{jl} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^l \right) + K^{0jki} g_{kl} \delta_j^l \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{f}}{f} \right) \\
&= -K^{0j0i} f \dot{f} \delta_{jl} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^l \right),
\end{aligned}$$

dado que $f = \exp \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) \rightarrow \dot{f} = f \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \frac{\dot{f}}{f} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$, $f \dot{f} = f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$, es posible sustituir y reducir la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
K^{0j\nu i} \nabla_j \xi_\nu &= -K^{0j0i} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f \dot{f} x^l \delta_{jl} \\
&= -K^{0j0i} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{jl} x^l \\
&= -K^{0j0i} \frac{\Lambda}{3} (f^2 \delta_{jl}) x^l \\
&= -K^{0j0i} \frac{\Lambda}{3} (g_{jl} x^l) = -\frac{\Lambda}{3} x_j (K^{0j0i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K^{0ivi}\nabla_j\xi_\nu &= -\frac{\Lambda}{3}x_j\frac{1}{2}\left[g^{0i}H^{0j}+g^{0j}H^{0i}-g^{00}H^{ij}-g^{ij}H^{00}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[H^{ij}-g^{ij}H^{00}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[h^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}h-\frac{1}{2}g^{ij}\left(h^{00}-\frac{1}{2}g^{00}h\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[h^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}h-\frac{1}{2}g^{ij}h^{00}+\frac{1}{2}g^{ij}g^{00}h\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[h^{ij}-g^{ij}h^{00}-\frac{1}{2}g^{ij}h-\frac{1}{2}g^{ij}h\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[h^{ij}-g^{ij}h^{00}-g^{ij}g_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[h^{ij}-g^{ij}h^{00}-g^{ij}g_{00}h^{00}-g^{ij}g_{kl}h^{kl}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}x_j\left[h^{ij}-g^{ij}h^{00}+g^{ij}h^{00}-\delta^{ij}\delta_{kl}h^{kl}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}\left[h^{ij}x_j-\delta^{ij}\delta_{kl}x_jh^{kl}\right] \\
&\Rightarrow K^{0ivi}\nabla_j\xi_\nu = -\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}\left[h^{ij}x_j-\delta^{ij}\delta_{kl}x_jh^{kl}\right]. \tag{**}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (*) y (**) se calcula (A.52), como sigue,

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta K^{0i\nu\beta}\xi_\nu - K^{0j\nu i}\nabla_j\xi_\nu &= \frac{1}{2}\left[-\delta^{ij}\delta_{kl}\partial_jh^{kl}+\partial_jh^{ij}+2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}h^{0i}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x_j\left[f^{-2}\delta^{ij}\delta_{kl}\partial_0\left(f^2h^{kl}\right)-\partial_0h^{ij}+g^{ij}\partial_lh^{0l}-g^{il}\partial_lh^{0j}\right. \\
&\quad \left.-3\frac{\dot{f}}{f}h^{ij}+\frac{\dot{f}}{f}\delta^{ij}\delta_{lm}h^{lm}+2\delta^{ij}\frac{\dot{f}}{f^3}h^{00}\right]+\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}\left[h^{ij}x_j-\delta^{ij}\delta_{kl}x_jh^{kl}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\delta^{ij}\delta_{kl}\partial_jh^{kl}+\partial_jh^{ij}+2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}h^{0i}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x_j\left[f^{-2}\delta^{ij}\delta_{kl}\partial_0\left(f^2h^{kl}\right)+f^{-2}\left(\delta^{ij}\partial_lh^{0l}-\delta^{il}\partial_lh^{0j}\right)-\partial_0h^{ij}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x_j\left[-3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}h^{ij}+\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\delta^{ij}\delta_{lm}h^{lm}+2g^{ij}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}h^{00}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}\left[h^{ij}x_j-\delta^{ij}\delta_{kl}x_jh^{kl}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\delta^{ij}\delta_{kl}\partial_jh^{kl}+\partial_jh^{ij}+2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}h^{0i}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x_j\left[f^{-2}\delta^{ij}\delta_{kl}\partial_0\left(f^2h^{kl}\right)+f^{-2}\left(\delta^{ij}\partial_lh^{0l}-\delta^{il}\partial_lh^{0j}\right)-\partial_0h^{ij}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{3}\left[-3h^{ij}x_j+\delta^{ij}x_j\delta_{lm}h^{lm}+2x^ih^{00}+h^{ij}x_j-\delta^{ij}x_j\delta_{lm}h^{lm}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \nabla_\beta K^{0i\nu\beta} \xi_\nu - K^{0j\nu i} \nabla_j \xi_\nu &= \frac{1}{2} \left[-\delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} + \partial_j h^{ij} + 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} h^{0i} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x_j \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) + f^{-2} (\delta^{ij} \partial_l h^{0l} - \delta^{il} \partial_l h^{0j}) - \partial_0 h^{ij} \right] \\
&+ \frac{\Lambda}{3} [x^i h^{00} - h^{ij} x_{ij}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad conservada $E(\xi)$ resulta:

$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i \left\{ \frac{1}{2} \left[-\delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j h^{kl} + \partial_j h^{ij} + 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} h^{0i} \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x_j \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_0 (f^2 h^{kl}) + f^{-2} (\delta^{ij} \partial_l h^{0l} - \delta^{il} \partial_l h^{0j}) - \partial_0 h^{ij} \right] \\
&\left. + \frac{\Lambda}{3} [x^i h^{00} - h^{ij} x_{ij}] \right\}
\end{aligned}$$

A.5 Sustitución de la perturbación en la expresión de la energía Killing

Iniciando con la ecuación (3.29) sin los términos diagonales nulos de $h^{\mu\nu}$,

$$E(\bar{\xi}) = \frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_j h^{ij} - \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_i h^{kl} \right) + \frac{1}{2} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{jk} x^k \left[f^{-2} \delta^{ij} \delta_{ml} \partial_0 (f^2 h^{ml}) - \partial_0 h^{ij} \right] \right. \\ \left. + \frac{\Lambda}{3} \left(h^{00} x^i - f^2 \delta_{jk} h^{ij} x^k \right) \right\} \quad (\text{A.54})$$

Renombrando $h^{ij} = 4f^{-3} \delta^{ij} \left(\frac{r_0}{r} \right) = A \delta^{ij}$ y $h^{00} = 4f^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) = B$, se desarrollan cada uno de los términos de la anterior expresión,

$$\begin{aligned} \bullet \partial_j h^{ij} - \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_i h^{kl} &= \partial_j (A \delta^{ij}) - \delta^{ij} \delta_{kl} \partial_j (A \delta^{kl}) \\ &= \delta^{ij} \partial_j A - \delta^{ij} \delta_{kl} \delta^{kl} \partial_j A \\ &= \delta^{ij} \partial_j A - \delta^{ij} \delta^k_k \partial_j A \\ &= \delta^{ij} \partial_j A - 3 \delta^{ij} \partial_j A \\ &\Rightarrow -2 \delta^{ij} \partial_j A \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

calculando primero,

$$\begin{aligned} \partial_0 (f^2 h^{ml}) &= (\partial_0 f^2) h^{ml} + f^2 \partial_0 h^{ml} \\ &= 2f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} h^{ml} + f^2 \partial_0 h^{ml} \\ &= 2f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} A \delta^{ml} + f^2 \partial_0 (A \delta^{ml}) \\ &\Rightarrow 2f^2 \delta^{ml} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} A + \delta^{ml} f^2 \partial_0 A \end{aligned}$$

sustituyendo,

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{jk} x^k \delta^{ij} \delta_{ml} \partial_0 (f^2 h^{ml}) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^k \delta_{jk} \delta^{ij} \delta_{ml} \left[2f^2 \delta^{ml} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} A + \delta^{ml} f^2 \partial_0 A \right] \\ &= \frac{\Lambda}{3} x^k \delta^i_k \delta^m_m f^2 A + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^k \delta^i_k \delta^m_m f^2 \partial_0 A \\ &= 3 \left[\frac{\Lambda}{3} x^k \delta^i_k f^2 A \right] + 3 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^k \delta^i_k f^2 \partial_0 A \right] \\ &\Rightarrow 3 \left[\frac{1}{3} x^i f^2 A \right] + 3 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} x^i f^2 \partial_0 A \right] \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

considerando que,

$$\begin{aligned}
-\partial_0 h^{ij} &= -\partial_0 (A \delta^{ij}) = -\delta^{ij} \partial_0 A \\
&\bullet \frac{1}{2} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \delta_{jk} x^k (-\partial_0 h^{ij}) \\
&= -\frac{1}{2} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^k \delta_{jk} \delta^{ij} \partial_0 A \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i \partial_0 A
\end{aligned} \tag{A.57}$$

$$\bullet \frac{\Lambda}{3} h^{00} x^i = \frac{\Lambda}{3} B x^i \tag{A.58}$$

desarrollando,

$$\begin{aligned}
-f^2 \delta_{jk} x^k h^{ij} &= -f^2 \delta_{jk} x^k A \delta^{ij} = -f^2 x^k \delta^i_k A \\
&\bullet \frac{\Lambda}{3} (-f^2 h^{ij} \delta_{jk} x^k) = -\frac{\Lambda}{3} f^2 x^i A
\end{aligned} \tag{A.59}$$

y se reduce la expresión interior de la energía Killing al sustituir los resultados desde (A.55) hasta (A.59), como sigue:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [-2\delta^{ij} \partial_j A] + 3 \left[\frac{\Lambda}{3} x^i f^2 A \right] + 3 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i f^2 \partial_0 A \right] - \frac{1}{2} f^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i \partial_0 A - \frac{\Lambda}{3} f^2 x^i A + \frac{1}{3} B x^i \\
&= -\delta^i \partial_j A + 2 \left[\frac{\Lambda}{3} x^i f^2 A \right] + 2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i f^2 \partial_0 A \right] + \frac{\Lambda}{3} B x^i \\
&= -\delta^i \partial_j A + 2 \frac{\Lambda}{3} x^i f^2 A + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^i f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} B x^i = -\partial_j A \delta^{ij} + x^i \left[2 \frac{\Lambda}{3} f^2 A + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} B \right] \\
&\Rightarrow -\partial_j A \delta^{ij} + x^i \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} (2f^2 A + B) \right]
\end{aligned}$$

Por lo que (A.54) se reduce a

$$E(\bar{\xi}) = \frac{f^3}{8\pi G} \oint dS_i \left\{ -\partial_j A \delta^{ij} + x^i \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} f^2 \partial_0 A + \frac{\Lambda}{3} (2f^2 A + B) \right] \right\} \tag{A.60}$$

A.6 Cálculo de la corriente ADT

Considerando las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (\text{A.61})$$

y además, tomando la siguientes identidades y convenciones,

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] \xi^\mu = R_{\rho\lambda\nu}^\mu \xi^\rho, \quad R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = R_{\mu\nu} \quad (\text{A.62})$$

se calcula la corriente de Killing $\mathcal{K}_G^\mu$ utilizando las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas (3.4) contraídas con un campo Killing,

$$\mathcal{K}_G^\mu \equiv \xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} \quad (\text{A.63})$$

donde $\delta \mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu}^L$, $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$, $\delta g^{\mu\nu} \equiv -h^{\mu\nu}$ y $h \equiv g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, así que, al sustituir las cantidades geométricas linealizadas en $h_{\mu\nu}$ dentro de $\delta \mathcal{G}_{\mu\nu}$, y tomando $2\xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu}$, siguiendo a [BC07], se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_G^\mu &= \xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} = \xi_\nu \delta \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{G}_{\alpha\beta} \right) = \xi_\nu \left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta \mathcal{G}_{\alpha\beta} + \mathcal{G}_{\alpha\beta} \left(\delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + \delta g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} \right) \right] \\ &= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta R g_{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad + R_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} g^{\nu\beta} \delta g^{\mu\alpha} + \Lambda g_{\alpha\beta} g^{\nu\beta} \delta g^{\mu\alpha} \\ &\quad + R_{\alpha\beta} \delta g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} \left. \right\} \\ &= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta R g_{\alpha\beta} \right] + \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} R - \Lambda \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad + R_{\alpha}^{\nu} \delta g^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} R \delta_{\alpha}^{\nu} \delta g^{\mu\alpha} + \Lambda \delta_{\alpha}^{\nu} \delta g^{\mu\alpha} \\ &\quad + R_{\alpha}^{\mu} \delta g^{\nu\alpha} - \frac{1}{2} R \delta_{\beta}^{\mu} \delta g^{\nu\beta} + \Lambda \delta_{\beta}^{\mu} \delta g^{\nu\beta} \left. \right\} \\ &= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta R g_{\alpha\beta} \right] + \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} R - \Lambda \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad + 2R_{\alpha}^{(\mu} \delta g^{\nu)\alpha} - R \delta g^{\mu\nu} + 2\Lambda \delta g^{\mu\nu} \left. \right\} \\ &= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta R g_{\alpha\beta} \right] + \frac{1}{2} \left[4R_{\alpha}^{(\mu} \delta g^{\nu)\alpha} + (2\Lambda - R) \delta g^{\mu\nu} \right] \right\} \\ &= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(-\nabla^\lambda \nabla_\lambda h + \nabla^\alpha \nabla^\rho h_{\alpha\rho} - \Lambda h \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[4R_{\alpha}^{(\mu} \delta g^{\nu)\alpha} + (2\Lambda - R) \delta g^{\mu\nu} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla_\lambda h - \nabla^\alpha \nabla^\rho h_{\alpha\rho}) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Lambda g_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [4R_\alpha^{(\mu} \delta g^{\nu)\alpha} + (2\Lambda - R) \delta g^{\mu\nu}] \right\} \\
&= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla_\lambda h - \nabla^\alpha \nabla^\rho h_{\alpha\rho}) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [4R_\alpha^{(\mu} \delta g^{\nu)\alpha} + (2\Lambda - R) \delta g^{\mu\nu}] \right\} \\
&= \xi_\nu \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla_\lambda h - \nabla^\alpha \nabla^\rho h_{\alpha\rho}) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [-4R_\alpha^{(\mu} h^{\nu)\alpha} + (R - 2\Lambda) h^{\mu\nu}] \right\} \\
\Rightarrow 2\mathcal{K}_G^\mu &= \xi_\nu \left(\nabla_\lambda \nabla^\nu h^{\lambda\mu} + \nabla_\lambda \nabla^\mu h^{\lambda\nu} - \nabla^\lambda \nabla_\lambda h^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu h \right) \\
&\quad + \xi^\mu \left(\nabla_\lambda \nabla^\lambda h - \nabla_\lambda \nabla_\nu h^{\lambda\nu} \right) + \xi_\nu \left(-4R^{(\mu\lambda} h_{\lambda}^{\nu)} + (R - 2\Lambda) h^{\mu\nu} \right) \\
&\quad + \xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho}
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Usando sucesivamente integración por partes, en los términos rojos, se obtiene para cada uno:²

(i)

$$\xi^\nu \nabla_\lambda \nabla_\nu h^{\lambda\mu} = -\nabla_\nu \xi^\nu \nabla_\lambda h^{\lambda\mu} + \nabla_\nu (\xi^\nu \nabla_\lambda h^{\lambda\mu}) + \xi_\nu R_{\alpha\lambda}^{\nu} h^{\alpha\mu} + \xi_\nu R_{\alpha\lambda}^{\mu} h^{\nu\lambda\alpha}$$

(ii)

$$\xi_\nu \nabla_\lambda \nabla^\mu h^{\lambda\nu} = \nabla_\lambda (\xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu}) - \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu}$$

(iii)

$$-\xi_\nu \nabla_\lambda \nabla^\mu h^{\mu\nu} = -\nabla_\lambda (\xi_\nu \nabla^\nu h^{\mu\nu}) + \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu}$$

(iv)

$$-\xi_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu h = -\nabla^\nu (\xi_\nu \nabla^\mu h) + \nabla^\nu \xi_\nu \nabla^\mu h$$

(v)

$$\xi^\mu \nabla_\lambda \nabla^\lambda h = \nabla_\lambda (\xi^\mu \nabla^\lambda h) - \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla^\lambda h$$

(vi)

$$-\xi^\mu \nabla_\lambda \nabla_\nu h^{\lambda\nu} = -\nabla_\lambda (\xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu}) + \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu}$$

²Para (i) es necesario usar $[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] h^{\lambda\mu} = R_{\alpha\lambda\nu}^{\lambda} h^{\alpha\mu} + R_{\alpha\lambda\nu}^{\mu} h^{\lambda\alpha} = \nabla_\lambda \nabla_\nu h^{\lambda\mu} - \nabla_\nu \nabla_\lambda h^{\lambda\mu}$

Sumando desde (i) hasta (vi), se puede factorizar ∇_λ para los términos en azul,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla_\lambda \left(\xi^\lambda \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} - \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \xi^\mu \nabla^\lambda h - \xi^\lambda \nabla^\mu h \right) \\ - \nabla^\nu \xi_\nu \nabla_\lambda h^{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} + \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \nabla^\nu \xi_\nu \nabla^\mu h - \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla^\lambda h + \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} \\ + \xi_\nu R^\lambda_{\alpha\lambda}{}^\nu h^{\alpha\mu} + \xi_\nu R^\mu_{\alpha\lambda}{}^\nu h^{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

los términos en amarillo son nulos, pues:

$$\begin{aligned} \bullet \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} &= \frac{1}{2} (\nabla_\lambda \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\lambda) \nabla^\mu h^{\lambda\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} + \nabla_\nu \xi_\lambda \nabla^\mu h^{\lambda\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_\lambda \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\lambda) \nabla^\mu h^{\lambda\nu} \\ &= \nabla_{(\lambda} \xi_{\nu)} \nabla^\mu h^{\lambda\nu} \quad \text{pero,} \quad \nabla_{(\lambda} \xi_{\nu)} = 0 \\ &\Rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \nabla^\nu \xi_\nu &= g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi_\nu \\ \rightarrow 0 &= g^{\alpha\nu} (\nabla_\alpha \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\alpha) \\ &= g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi_\nu + g^{\alpha\nu} \nabla_\nu \xi_\alpha \\ &= g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi_\nu + g^{\nu\alpha} \nabla_\nu \xi_\alpha \\ &= g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi_\nu + g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi_\nu = 2g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi_\nu = 2\nabla^\nu \xi_\nu \\ &\Rightarrow \nabla^\nu \xi_\nu = 0 \end{aligned}$$

Así, los términos en rojo quedan como:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla_\lambda \left(\xi^\lambda \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} - \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \xi^\mu \nabla^\lambda h - \xi^\lambda \nabla^\mu h \right) \\ + \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla^\lambda h + \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu R^\lambda_{\alpha\lambda}{}^\nu h^{\alpha\mu} + \xi_\nu R^\mu_{\alpha\lambda}{}^\nu h^{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

Uniendo esta expresión junto con los términos verdes en (A.64), se tiene,

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \left(\xi^\lambda \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} - \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \xi^\mu \nabla^\lambda h - \xi^\lambda \nabla^\mu h \right) \\ + \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla^\lambda h + \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu R^\lambda_{\alpha\lambda}{}^\nu h^{\alpha\mu} + \xi_\nu R^\mu_{\alpha\lambda}{}^\nu h^{\lambda\alpha} \\ + \xi_\nu \left[-2R^{\mu\lambda} h_{\lambda}{}^\nu - 2R^{\nu\lambda} h_{\lambda}{}^\mu + (R - 2\Lambda) h^{\mu\nu} \right] + \xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} \\ \Rightarrow \nabla_\lambda \left(\xi^\lambda \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} - \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \xi^\mu \nabla^\lambda h - \xi^\lambda \nabla^\mu h \right) \\ + \nabla_\lambda \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla^\lambda h + \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} \\ + \xi_\nu \left[-2R^{\mu\lambda} h_{\lambda}{}^\nu - R_{\nu\lambda} h^{\lambda\mu} + R^\mu_{\alpha\lambda\nu} h^{\lambda\alpha} + (R - 2\Lambda) h^{\mu\nu} \right] + \xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} \end{aligned}$$

tomando los términos subrayados en azul, se utiliza de manera sucesiva integración por partes sobre las tres cantidades que se encuentran en el segundo renglón, de tal manera que puedan ser introducidas en las del primer renglón bajo la factorización de ∇_λ :

$$\begin{aligned}
& \bullet \nabla_\nu \xi_\lambda \nabla^\nu h^{\mu\lambda} = -\nabla^\nu \left(\nabla_\lambda \xi_\nu h^{\mu\lambda} \right) + \nabla^\nu \nabla_\lambda \xi_\nu h^{\mu\lambda} \\
& \bullet \nabla_\lambda \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} = \nabla_\nu \left(\nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} \right) - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} \\
& \bullet -\nabla^\nu \xi^\mu \nabla_\nu h = \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h - \nabla_\nu \left(\nabla^\nu \xi^\mu h \right) \\
& \quad = \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h - \nabla_\nu \left(\nabla^\nu \xi^\mu h \right) + \nabla_\nu \left(\nabla^\mu \xi^\nu h \right) - \nabla_\nu \left(\nabla^\mu \xi^\nu h \right) \\
& \quad = \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h - \nabla_\nu \left(\nabla^\mu \xi^\nu h \right) + \nabla_\nu \left[\left(\nabla^\mu \xi^\nu - \nabla^\nu \xi^\mu \right) h \right] \\
& \quad = \nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\mu h + \nabla_\nu \left(\nabla^\nu \xi^\mu h \right) + 2\nabla_\nu \left(\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) \\
& \quad = \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h + \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h + \nabla^\nu \xi^\mu \nabla_\nu h + 2\nabla_\nu \left(\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) \\
& \rightarrow -2\nabla^\nu \xi^\mu \nabla_\nu h = 2\nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h + 2\nabla_\nu \left(\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) \\
& \rightarrow -\nabla^\nu \xi^\mu \nabla_\nu h = \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h + \nabla_\nu \left(\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) \\
& \quad \text{usando la identidad } \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu h = R^\rho{}_\nu{}^{\nu\mu} \xi_\rho h \\
& \quad \Rightarrow -R_\rho{}^\mu \xi^\rho h + \nabla_\nu \left(\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los términos subrayados en azul se reducen a:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \nabla_\lambda \left(\xi^\lambda \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \xi^\mu \nabla_\nu h^{\lambda\nu} + \xi_\nu \nabla^\mu h^{\lambda\nu} - \xi_\nu \nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \xi^\mu \nabla^\lambda h - \xi^\lambda \nabla^\mu h \right) \\
& - \nabla^\nu \left(\nabla_\lambda \xi_\nu h^{\mu\lambda} \right) + \nabla_\nu \left(\nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} \right) + \nabla_\nu \left(\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) + \nabla^\nu \nabla_\lambda \xi_\nu h^{\mu\lambda} - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} - R_\rho{}^\mu \xi^\rho h \\
& = \nabla_\nu \left(\xi^\nu \nabla_\lambda h^{\mu\lambda} - \xi^\mu \nabla_\lambda h^{\nu\lambda} + \xi_\lambda \nabla^\mu h^{\nu\lambda} - \xi_\lambda \nabla^\nu h^{\mu\lambda} + \xi^\mu \nabla^\nu h - \xi^\nu \nabla^\mu h - \nabla_\lambda \xi^\nu h^{\mu\lambda} \right. \\
& \left. + \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} + \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) + \nabla^\nu \nabla_\lambda \xi_\nu h^{\mu\lambda} - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} - R_\rho{}^\mu \xi^\rho h
\end{aligned}$$

De aquí se define el superpotencial de Einstein $\mathcal{F}_g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
2\nabla_\nu \mathcal{F}_g^{\mu\nu} &= \nabla_\nu \left(\xi^\nu \nabla_\lambda h^{\mu\lambda} - \xi^\mu \nabla_\lambda h^{\nu\lambda} + \xi_\lambda \nabla^\mu h^{\nu\lambda} - \xi_\lambda \nabla^\nu h^{\mu\lambda} + \xi^\mu \nabla^\nu h - \xi^\nu \nabla^\mu h - \nabla_\lambda \xi^\nu h^{\mu\lambda} \right. \\
& \quad \left. + \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} + \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h \right) \\
& \Rightarrow 2\mathcal{F}_g^{\mu\nu} = \xi^\nu \nabla_\lambda h^{\mu\lambda} - \xi^\mu \nabla_\lambda h^{\nu\lambda} + \xi_\lambda \nabla^\mu h^{\nu\lambda} - \xi_\lambda \nabla^\nu h^{\mu\lambda} + \xi^\mu \nabla^\nu h - \xi^\nu \nabla^\mu h - \nabla_\lambda \xi^\nu h^{\mu\lambda} \\
& \quad + \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} + \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} h
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Por otro lado, al tomar los términos subrayados de verde, se puede utilizar la identidad $\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho$ sobre las cantidades con dobles derivadas covariantes sobre campos

Killing, de tal modo que todo lo verde quede sólo en cantidades acompañadas de tensores de Riemann, como sigue,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \xi^\nu \left[-2R^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - R_{\nu\lambda} h^{\lambda\mu} + R^\mu_{\alpha\lambda\nu} h^{\lambda\alpha} + (R - 2\Lambda) h^\mu_\nu \right] + \xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} \\
&\quad + \nabla^\nu \nabla_\lambda \xi_\nu h^{\mu\lambda} - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} - R_\rho^\mu \xi^\rho h \\
&= \xi^\nu \left[-2R^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - R_{\nu\lambda} h^{\lambda\mu} + R^\mu_{\alpha\lambda\nu} h^{\lambda\alpha} + (R - 2\Lambda) h^\mu_\nu \right] + \xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} \\
&\quad + R_{\rho\lambda} \xi^\rho h^{\mu\lambda} - R^\gamma_{\nu\lambda} \xi_\gamma h^{\lambda\nu} - R_\rho^\mu \xi^\rho h \\
&= 2\xi^\nu R^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - R_\rho^\mu \xi^\rho h + (R - 2\Lambda) \xi^\nu h^\mu_\nu + \xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho}
\end{aligned}$$

para cada una de las anteriores cantidades resultantes, se busca su equivalencia en términos de las ecuaciones de campo de Einstein $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ con constante cosmológica definida en (A.61),

- $2\xi^\nu R^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} = -2\xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - (R - 2\Lambda) \xi^\nu h^\mu_\nu$
- $-\xi^\nu R_{\nu}^\mu h = -\xi^\nu \mathcal{G}_{\nu}^\mu h - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda) \xi^\nu g^\mu_\nu h = -\xi^\nu \mathcal{G}_{\nu}^\mu h - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda) \xi^\mu h$
- $(R - 2\Lambda) \xi^\nu h^\mu_\nu$
- $\xi^\mu R_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} = \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2}(R - 2\Lambda) \xi^\mu h$

por lo tanto, los términos que acompañan a la divergencia covariante del superpotencial de Einstein serán:

$$\Rightarrow -2\xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} + \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} - \xi^\nu \mathcal{G}_{\nu}^\mu h$$

De esta manera, la corriente Killing para la contribución del tensor de Einstein con constante cosmológica (A.64) resulta como:

$$\begin{aligned}
2\mathcal{K}_\mathcal{G}^\mu &= 2\nabla_\nu \mathcal{F}_\mathcal{G}^{\mu\nu} - 2\xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} + \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} - \xi^\nu \mathcal{G}_{\nu}^\mu h \\
\mathcal{K}_\mathcal{G}^\mu &= \nabla_\nu \mathcal{F}_\mathcal{G}^{\mu\nu} - \xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} - \frac{1}{2} \xi^\nu \mathcal{G}_{\nu}^\mu h
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $\mathcal{K}_\mathcal{G}^\mu \equiv \xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu}$, la contribución por parte del tensor de Einstein a la corriente ADT, viene dada por:

$$\mathcal{J}_\mathcal{G}^\mu \equiv \nabla_\nu \mathcal{F}_\mathcal{G}^{\mu\nu} = \xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} + \xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \xi^\nu \mathcal{G}_{\nu}^\mu h \quad (\text{A.66})$$

De la misma manera que se procedió con el tensor $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ se procede para el conjunto de tensores representados por $\mathcal{W}_{\mu\nu}$, de tal manera que para cada uno de ellos se tendrá un superpotencial asociado $\mathcal{F}_i^{\mu\nu}$, tal que $\sum_i \mathcal{F}_i^{\mu\nu} = \mathcal{F}_\mathcal{W}^{\mu\nu}$, es decir, cada tensor dentro de $\mathcal{W}_{\mu\nu}$ tendrá un superpotencial asociado distinto, mientras que la forma funcional para su aporte individual a la corriente ADT se mantiene idéntica a (A.66), es decir,

$$\mathcal{J}_\mathcal{W}^\mu \equiv \nabla_\nu \mathcal{F}_\mathcal{W}^{\mu\nu} = \sum_i \nabla_\nu \mathcal{F}_i^{\mu\nu} = \sum_i \left[\xi_\nu \delta (w^{\mu\nu})_i + \xi^\nu (w^{\mu\lambda})_i h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \xi^\mu (w_{\lambda\rho})_i h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \xi^\nu (w_\nu^\mu)_i h \right]$$

con $\mathcal{W}^{\mu\nu} = \sum_i (w^{\mu\nu})_i$, donde $w^{\mu\nu}$ será el conjunto de tensores que nace de variar las correcciones covariantes a la acción de Einstein-Hilbert. Finalmente, la expresión para la corriente ADT viene por la adición de $\mathcal{J}_G^\mu$ y $\mathcal{J}_W^\mu$, así,

$$\begin{aligned} J_{ADT}^\mu = \mathcal{J}_G^\mu + \mathcal{J}_W^\mu = & \xi_\nu \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} + \xi^\nu \mathcal{G}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{G}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \xi^\nu \mathcal{G}_\nu{}^\mu h \\ & + \xi_\nu \delta \mathcal{W}^{\mu\nu} + \xi^\nu \mathcal{W}^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{W}_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} \xi^\nu \mathcal{W}_\nu{}^\mu h \end{aligned}$$

luego, dado que las ecuaciones de movimiento son $\mathcal{E}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu} + \mathcal{W}_{\mu\nu}$, entonces la expresión final para la corriente de ADT en forma compacta será:

$$J_{ADT}^\mu = \delta \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu + \mathcal{E}^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \xi^\nu - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{E}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h \mathcal{E}^\mu{}_\nu \xi^\nu \quad (\text{A.67})$$

A.7 Ecuaciones de movimiento, término de borde, corriente y potencial de Noether en el método Cuasilocal

Considere la siguiente acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L [R, R^2, R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta\sigma\tau}] \quad (\text{A.68})$$

Al variarla considerando $g_{\mu\nu}$ y $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ como variables de dicha acción, se tiene:³

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x [\sqrt{-g} \delta L + L \delta(\sqrt{-g})] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta L - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

Ahora, trabajando con δL ,

$$\delta L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} \delta R + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^2} \delta (R^2) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta})} \delta (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (R^{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta\sigma\tau})} \delta (R^{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta\sigma\tau})$$

nombrando,

$$X_1 = R; X_2 = R^2; X_3 = R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}; X_4 = R^{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta\sigma\tau}$$

la expresión para la variación del lagrangiano se reduce a:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial X_1} \delta (X_1) + \frac{\partial L}{\partial X_2} \delta (X_2) + \frac{\partial L}{\partial X_3} \delta (X_3) + \frac{\partial L}{\partial X_4} \delta (X_4) \quad (\text{A.69})$$

³Recuerde que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$

Nótese que:

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta}^{\rho\lambda} \delta_{\sigma\tau}^{\theta\varphi} + \delta_{\alpha\beta}^{\theta\varphi} \delta_{\sigma\tau}^{\rho\lambda} \right); \text{ con } \delta_{\alpha\beta}^{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\lambda} - \delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\rho} \right) \quad (\text{A.70})$$

Dado que $X_1 = R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} R_{\lambda\alpha\gamma\beta}$ su derivada parcial con respecto al tensor de Riemann se puede calcular usando A.70, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} &= \frac{\partial \left(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} R_{\lambda\alpha\gamma\beta} \right)}{\partial (R_{\rho\sigma\theta\varphi})} = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} \frac{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} \\ \Rightarrow \frac{\partial X_1}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} &= g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\delta_{\lambda}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\sigma} - \delta_{\lambda}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \frac{1}{2} \left(\delta_{\gamma}^{\theta} \delta_{\beta}^{\varphi} - \delta_{\gamma}^{\varphi} \delta_{\beta}^{\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\delta_{\lambda}^{\theta} \delta_{\alpha}^{\varphi} - \delta_{\lambda}^{\varphi} \delta_{\alpha}^{\theta} \right) \frac{1}{2} \left(\delta_{\gamma}^{\rho} \delta_{\beta}^{\sigma} - \delta_{\gamma}^{\sigma} \delta_{\beta}^{\rho} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} \left(\delta_{\lambda}^{[\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma]} \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} + \delta_{\lambda}^{[\theta} \delta_{\alpha}^{\varphi]} \delta_{\gamma}^{[\rho} \delta_{\beta}^{\sigma]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} \delta_{\lambda}^{[\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma]} \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} + g^{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} \delta_{\lambda}^{[\theta} \delta_{\alpha}^{\varphi]} \delta_{\gamma}^{[\rho} \delta_{\beta}^{\sigma]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{\gamma\lambda} g^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}^{[\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma]} \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} + g^{\lambda\gamma} g^{\beta\alpha} \delta_{\gamma}^{[\rho} \delta_{\beta}^{\sigma]} \delta_{\lambda}^{[\theta} \delta_{\alpha}^{\varphi]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{\gamma\lambda} g^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}^{[\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma]} \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} + g^{\gamma\lambda} g^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}^{[\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma]} \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 g^{\gamma\lambda} g^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}^{[\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma]} \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} g^{\alpha\beta} \left(\delta_{\lambda}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma} - \delta_{\lambda}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\rho} \right) \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{\gamma\rho} g^{\sigma\beta} - g^{\gamma\sigma} g^{\rho\beta} \right) \delta_{\gamma}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} \\ &= \frac{1}{4} \left(g^{\gamma\rho} g^{\sigma\beta} - g^{\gamma\sigma} g^{\rho\beta} \right) \left(\delta_{\gamma}^{\theta} \delta_{\beta}^{\varphi} - \delta_{\gamma}^{\varphi} \delta_{\beta}^{\theta} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(g^{\theta\rho} g^{\sigma\varphi} - g^{\varphi\rho} g^{\sigma\theta} - g^{\theta\sigma} g^{\rho\varphi} + g^{\varphi\sigma} g^{\rho\theta} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(2 g^{\theta\rho} g^{\sigma\varphi} - 2 g^{\theta\sigma} g^{\rho\varphi} \right) \\ &= g^{\theta[\rho} g^{\sigma]\varphi} \\ \frac{\partial X_1}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} &= g^{\theta[\rho} g^{\sigma]\varphi} \quad (\text{A.71}) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\delta(X_1) &= \delta(g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) \\
&= g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + g^{\alpha\beta} R_{\lambda\alpha\gamma\beta} \delta g^{\lambda\gamma} + g^{\lambda\gamma} R_{\lambda\alpha\gamma\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\
&= g^{\lambda\gamma} g^{\beta\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\beta\gamma} \delta g^{\lambda\gamma} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\beta\gamma} \delta g^{\lambda\gamma} \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\beta\gamma} \delta g^{\lambda\gamma} \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g^{\alpha\beta} R_{\gamma\beta\lambda\alpha} \delta g^{\lambda\gamma} \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g^{\alpha\beta} \delta_\lambda^\sigma R_{\gamma\beta\sigma\alpha} \delta g^{\lambda\gamma} \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} g_{\lambda\tau} R_{\gamma\beta\sigma\alpha} \delta g^{\lambda\gamma} \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g^{\tau\sigma} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\tau} R_{\gamma\beta\sigma\alpha} \delta g^{\lambda\gamma} \\
\tau \rightarrow \lambda, \quad \sigma \rightarrow \gamma, \quad \alpha \rightarrow \beta, \quad \beta \rightarrow \alpha, \quad \lambda \rightarrow \mu, \quad \gamma \rightarrow \nu \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} \delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\
&= g^{\lambda[\gamma} g^{\beta]\alpha} [\delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}] \\
&= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} [\delta(R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}] \\
&= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[\delta(g_{\lambda\sigma} R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma) + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma + R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma \delta g_{\lambda\sigma} + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \\
&\text{usando } \delta g_{\lambda\sigma} = -g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma - R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma - g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \\
\delta(X_1) &= \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \tag{A.72}
\end{aligned}$$

Para el caso de X_2 , se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta(X_2) &= \delta(R^2) = 2R\delta R \\
&= \frac{\partial X_2}{\partial R} \delta R \\
&= \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \delta X_1 \\
&= \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} (g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma + g_{\mu\lambda} R_{\gamma\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}) \\
\delta(X_2) &= \frac{\partial X_2}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} (g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma + g_{\mu\lambda} R_{\gamma\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}) \tag{A.73}
\end{aligned}$$

Usando la misma metodología se puede calcular los términos asociados con X_3 y X_4 , con ayuda de A.70,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_3}{\partial (R_{\rho\sigma\theta\varphi})} &= \frac{\partial (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta})}{\partial (R_{\rho\sigma\theta\varphi})} \\
&= R^{\alpha\beta} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} + R^{\sigma\tau} \frac{\partial R_{\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} \\
&= 2g^{\gamma\tau} R^{\alpha\beta} \frac{\partial R_{\tau\alpha\gamma\beta}}{\partial R_{\rho\sigma\theta\varphi}} \\
&= \frac{1}{2} (\delta_\tau^\rho \delta_\alpha^\sigma - \delta_\tau^\sigma \delta_\alpha^\rho) \frac{1}{2} (g^{\tau\theta} R^{\varphi\alpha} - g^{\tau\varphi} R^{\theta\alpha}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\delta_\gamma^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\gamma^\sigma \delta_\beta^\rho) \frac{1}{2} (g^{\gamma\theta} R^{\varphi\beta} - g^{\gamma\varphi} R^{\theta\beta}) \\
&= 2\delta_\tau^{[\rho} \delta_\alpha^{\sigma]} g^{\tau[\theta} R^{\varphi]\alpha} \\
&= 2g^{[\rho][\theta} R^{\varphi][\sigma]} \\
\frac{\partial X_3}{\partial (R_{\rho\sigma\theta\varphi})} &= 2g^{[\rho][\theta} R^{\varphi][\sigma]} \tag{A.74}
\end{aligned}$$

luego δX_3 viene dado por,

$$\begin{aligned}
\delta (X_3) &= \delta (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \\
&= R^{\alpha\beta} \delta (R_{\alpha\beta}) + R_{\alpha\beta} \delta (R^{\alpha\beta}) \\
&= 2g^{\lambda\gamma} R^{\beta\alpha} \delta R_{\lambda\alpha\gamma\beta} + 2R^{\alpha\beta} R_{\lambda\alpha\gamma\beta} \delta g^{\gamma\lambda} + 2R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= 2g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} \delta (g_{\lambda\rho} R^\rho_{\alpha\gamma\beta}) + 2R^{\alpha\beta} R_{\lambda\alpha\gamma\beta} \delta g^{\gamma\lambda} + 2R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= 2g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} g_{\lambda\rho} \delta R^\rho_{\alpha\gamma\beta} - 2g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} R_{\nu\alpha\gamma\beta} g_{\lambda\mu} + 2R^{\alpha\beta} R_{\nu\alpha\mu\beta} \delta g^{\mu\nu} + 2R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
\text{se puede probar que } &R^{\alpha\beta} R_{\nu\alpha\mu\beta} \delta g^{\mu\nu} + R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu} = g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} R_{\nu\alpha\gamma\beta} g_{\lambda\mu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= 2g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} g_{\lambda\rho} \delta R^\rho_{\alpha\gamma\beta} - 2g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} R_{\nu\alpha\gamma\beta} g_{\lambda\mu} + 4g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} R_{\nu\alpha\gamma\beta} g_{\lambda\mu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= 2g^{[\lambda][\gamma} R^{\beta][\alpha]} (g_{\lambda\rho} \delta R^\rho_{\alpha\gamma\beta} + g_{\lambda\mu} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}) \\
&= \frac{\partial X_3}{\partial (R_{\lambda\alpha\gamma\beta})} (g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\lambda\mu} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu})
\end{aligned}$$

$$\delta (X_3) = \frac{\partial X_3}{\partial (R_{\lambda\alpha\gamma\beta})} (g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\lambda\mu} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}) \tag{A.75}$$

Para X_4 se tienen los siguientes resultados,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_4}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} &= \frac{\partial \left(R^{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta\sigma\tau} \right)}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} = R^{\alpha\beta\sigma\tau} \frac{\partial R_{\alpha\beta\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} \frac{\partial R^{\alpha\beta\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} \\
&= R^{\alpha\beta\sigma\tau} \frac{\partial R_{\alpha\beta\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} g^{\alpha\omega} g^{\beta\varepsilon} g^{\sigma\mu} g^{\tau\nu} \frac{\partial R_{\omega\varepsilon\mu\nu}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} \\
&= R^{\alpha\beta\sigma\tau} \frac{\partial R_{\alpha\beta\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\rho}} + R^{\omega\varepsilon\mu\nu} \frac{\partial R_{\omega\varepsilon\mu\nu}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} \\
&= 2R^{\alpha\beta\sigma\tau} \frac{\partial R_{\alpha\beta\sigma\tau}}{\partial R_{\rho\lambda\theta\rho}} \\
&= R^{\alpha\beta\sigma\tau} \left(\delta_{\alpha\beta}^{\beta\lambda} \delta_{\sigma\tau}^{\theta\varphi} + \delta_{\alpha\beta}^{\theta\varphi} \delta_{\sigma\tau}^{\beta\lambda} \right) \\
&= R^{\alpha\beta\sigma\tau} \left(\delta_{\alpha}^{[\beta} \delta_{\beta}^{\lambda]} \delta_{\sigma}^{[\theta} \delta_{\tau}^{\varphi]} + \delta_{\alpha}^{[\theta} \delta_{\beta}^{\varphi]} \delta_{\sigma}^{[\beta} \delta_{\tau}^{\lambda]} \right) \\
&= R^{\rho\lambda\theta\varphi} + R^{\theta\varphi\rho\lambda} = 2R^{\rho\lambda\theta\varphi} \\
\frac{\partial X_4}{\partial R_{\rho\lambda\theta\varphi}} &= 2R^{\rho\lambda\theta\varphi} \tag{A.76}
\end{aligned}$$

mientras la variación δX_4 , viene dada por,

$$\begin{aligned}
\delta(X_4) &= \delta \left(R^{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\alpha\beta\sigma\tau} \right) \\
&= R^{\alpha\beta\sigma\tau} \delta R_{\alpha\beta\sigma\tau} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} \delta \left(g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} g^{\sigma\theta} g^{\tau\varphi} R_{\rho\lambda\theta\varphi} \right) \\
&= 2R^{\alpha\beta\sigma\tau} \delta (R_{\alpha\beta\sigma\tau}) + R_{\tau\sigma\beta\alpha} R_{\varphi}^{\sigma\beta\alpha} \delta g^{\varphi\tau} + R_{\theta}^{\tau\alpha\beta} R_{\sigma\tau\alpha\beta} \delta g^{\sigma\theta} \\
&\quad + R_{\beta\alpha\sigma\tau} R_{\lambda}^{\alpha\sigma\tau} \delta g^{\lambda\beta} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\rho}^{\beta\sigma\tau} \delta g^{\beta\alpha} \\
&= 2R^{\lambda\alpha\gamma\beta} \delta (R_{\lambda\alpha\gamma\beta}) + 4g_{\mu\lambda} R^{\lambda\alpha\gamma\beta} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\
&= 2R^{\lambda\alpha\gamma\beta} (\delta R_{\lambda\alpha\gamma\beta} + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu}) \\
&= \frac{\partial X_4}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^{\sigma} - g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} + 2g_{\mu\lambda} R_{\nu\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \\
\delta X_4 &= \frac{\partial X_4}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left[g_{\lambda\sigma} \delta R_{\alpha\gamma\beta}^{\sigma} + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right] \tag{A.77}
\end{aligned}$$

Finalmente, con todos los anteriores resultados para X_i se puede retomar la expresión A.69 y sustituirlos,

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial X_1} \delta(X_1) + \frac{\partial L}{\partial X_2} \delta(X_2) + \frac{\partial L}{\partial X_3} \delta(X_3) + \frac{\partial L}{\partial X_4} \delta(X_4) \\ &= \frac{\partial L}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left(g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left(g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left(g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial X_4} \frac{\partial X_4}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \left(g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{dado que } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\lambda\alpha\sigma\beta}} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial L}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial R_{\lambda\alpha\gamma\beta}} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\lambda\alpha\sigma\beta}} \left(g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &= P^{\lambda\alpha\sigma\beta} g_{\lambda\sigma} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + P^{\lambda\alpha\sigma\beta} g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\ &= P_\sigma^{\alpha\gamma\beta} \delta R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} + P_\mu^{\alpha\gamma\beta} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\ &= P_\sigma^{\alpha\gamma\beta} 2\nabla_{[\gamma} \delta \Gamma^\sigma_{\beta]\alpha} + P_\mu^{\alpha\gamma\beta} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\ &= P_\sigma^{\alpha\gamma\beta} 2\nabla_\gamma \delta \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + P_\mu^{\alpha\gamma\beta} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\gamma \left(2P_\sigma^{\alpha\gamma\beta} \delta \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \right) - 2 \left(\nabla_\gamma P_\sigma^{\alpha\gamma\beta} \right) \delta \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + P_\mu^{\alpha\gamma\beta} R_{\nu\alpha\gamma\beta} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\gamma \left(2P^\gamma_{\sigma}{}^{\beta\alpha} \delta \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \right) - 2\nabla_\gamma \left(P^\alpha_{\sigma}{}^{\beta\gamma} \right) \delta \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} + P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\gamma \left[2P^\gamma_{\sigma}{}^{\beta\alpha} \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} + \nabla_\alpha \delta g_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\beta\alpha}) \right] \\ &- 2\nabla_\gamma \left(P^\alpha_{\sigma}{}^{\beta\gamma} \right) \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} + \nabla_\alpha \delta g_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\beta\alpha}) + P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu \left(P^{\mu\beta\lambda\alpha} \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} + P^{\mu\beta\lambda\alpha} \nabla_\alpha \delta g_{\beta\lambda} - P^{\mu\beta\lambda\alpha} \nabla_\lambda \delta g_{\beta\alpha} \right) \\ &- \nabla_\gamma \left(P^{\alpha\lambda\beta\gamma} \right) \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} - \nabla_\gamma \left(P^{\alpha\lambda\beta\gamma} \right) \nabla_\alpha \delta g_{\beta\lambda} \\ &+ \nabla_\gamma \left(P^{\alpha\lambda\beta\gamma} \right) \nabla_\lambda \delta g_{\beta\alpha} + P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu \left(P^{\mu\beta\lambda\alpha} \nabla_\alpha \delta g_{\beta\lambda} + P^{\mu\beta\alpha\lambda} \nabla_\lambda \delta g_{\beta\alpha} \right) - \nabla_\sigma \left(P^{\rho\lambda\beta\sigma} \right) \nabla_\rho \delta g_{\beta\lambda} - \nabla_\sigma \left(P^{\rho\alpha\beta\sigma} \right) \nabla_\rho \delta g_{\alpha\beta} \\ &+ P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu \left(2P^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} \right) - 2\nabla_\sigma \left(P^{\rho\alpha\beta\sigma} \right) \nabla_\rho \delta g_{\alpha\beta} + P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu \left(2P^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} \right) - \nabla_\rho \left(2\delta g_{\alpha\beta} \nabla_\sigma P^{\rho\alpha\beta\sigma} \right) + 2\nabla_\rho \nabla_\sigma \left(P^{\rho\alpha\beta\sigma} \right) \delta g_{\alpha\beta} \\ &+ P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ \text{usando } \delta g_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}, \\ &= \nabla_\mu \left(2P^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} \right) - \nabla_\mu \left(2\delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu\alpha\beta\gamma} \right) \\ &- 2\nabla_\rho \nabla_\sigma \left(P^{\rho\alpha\beta\sigma} \right) g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu} + P_\mu^{\alpha\beta\sigma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= P_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} - 2\nabla_\rho \nabla_\sigma \left(P^\rho_{\mu\nu}{}^\sigma \right) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu \left[2 \left(P^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu\alpha\beta\gamma} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta L = \left[P_{(\mu}^{\alpha\gamma} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} - 2\nabla^\rho \nabla^\sigma P_{\rho(\mu\nu)\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu \left[2 \left(P^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu\alpha\beta\gamma} \right) \right]$$

sustituyendo este resultado para la variación de la acción δS , se puede identificar los términos $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ y Π^μ para las ecuaciones de movimiento y para el término de borde respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left[P_{(\mu}^{\alpha\gamma} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} - 2\nabla^\rho \nabla^\sigma P_{\rho(\mu\nu)\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \nabla_\mu \left[2 \left(P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right) \right] \right\} \\ &= \int d^4x \left[\sqrt{-g} \mathcal{E}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \nabla_\mu a^\mu \right] \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu\nu} &= P_{(\mu}^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} - 2\nabla^\rho \nabla^\sigma P_{\rho(\mu\nu)\sigma} \\ a^\mu &= 2 \left(P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

recordando que $\sqrt{-g} \nabla_\mu a^\mu = \partial_\mu (\sqrt{-g} a^\mu) = \partial_\mu \Pi^\mu$, se obtiene el término de borde como:

$$\Pi^\mu = 2\sqrt{-g} \left(P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right) \quad (\text{A.79})$$

Considerando la expresión para la corriente de Noether $J^\mu = 2\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \theta_\nu + \sqrt{-g} \theta^\mu L - \Pi^\mu(g; \theta)$, se pueden sustituir las expresiones (A.78) y (A.79) en ella y obtener la corriente de Noether en términos de tensor $P^{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$J^\mu = 2\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \theta_\nu + \sqrt{-g} L \theta^\mu - 2\sqrt{-g} \left(P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right)$$

Además, ya que $J^\mu = \sqrt{-g} \mathcal{J}^\mu$, se procede sin tomar en cuenta la raíz cuadrada del determinante de la métrica y recordando que $\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 2\nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)}$, como sigue:

$$\mathcal{J}^\mu = 2 \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu + L \xi^\mu - 4 P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} + 4 \nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}$$

Desarrollando lo que está en rojo,

$$\begin{aligned} 4 \nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} &= 2 (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha) \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \\ &= 2 \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} + 2 \nabla_\beta \xi_\alpha \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \\ &= 2 \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} + 2 \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla_\gamma P^{\mu(\beta\alpha)\gamma} \\ &= 2 \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} + 2 \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \\ &= 4 \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \\ \alpha \rightarrow \rho, \quad \beta \rightarrow \sigma, \quad \gamma \rightarrow \nu \\ &= 4 \nabla_\rho \xi_\sigma \nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} \end{aligned}$$

luego desarrollando lo que está en azul,

$$\begin{aligned}
-4P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} &= -2P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}(\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\gamma\nabla_\beta\xi_\alpha) \\
&= -2P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta - 2P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\beta\xi_\alpha \\
&= -2P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta - 2P^{\mu(\beta\alpha)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= -2P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta - 2P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= -4P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= -2P^{\mu\alpha\beta\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
\text{recordando que } [\nabla_\gamma, \nabla_\alpha]\xi_\beta &= \nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta - \nabla_\alpha\nabla_\gamma\xi_\beta = R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma \\
\rightarrow \nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta &= \nabla_\alpha\nabla_\gamma\xi_\beta - R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma \\
&= -2P^{\mu\alpha\beta\gamma}(\nabla_\alpha\nabla_\gamma\xi_\beta - R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma) - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= -2P^{\mu\alpha\beta\gamma}\nabla_\alpha\nabla_\gamma\xi_\beta + 2P^{\mu\alpha\beta\gamma}R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
\text{cambiando } \alpha \rightarrow \nu, \quad \beta \rightarrow \sigma, \quad \gamma \rightarrow \rho \text{ en el primer término} \\
&= -2P^{\mu\nu\sigma\rho}\nabla_\nu\nabla_\rho\xi_\sigma + 2P^{\mu\alpha\beta\gamma}R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta \\
&= 2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\nu\nabla_\rho\xi_\sigma + 2P^{\mu\alpha\beta\gamma}R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta
\end{aligned}$$

sustituyendo estos términos en la expresión para $\mathcal{J}^\mu$,

$$\mathcal{J}^\mu = 4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\nu\nabla_\rho\xi_\sigma + 2P^{\mu\alpha\beta\gamma}R^\sigma_{\beta\gamma\alpha}\xi_\sigma - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\xi_\beta + 2\mathcal{E}^{\mu\nu}\xi_\nu + L\xi^\mu$$

desarrollando lo que está en morado,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}^{\mu\nu}\xi_\nu + L\xi^\mu &= 2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\mathcal{E}_{\alpha\beta}\xi_\nu + L\xi^\mu \\
&= 2g^{\mu\alpha}\xi^\beta \left[P_{(\alpha}{}^{\rho\sigma\tau}R_{\beta)\rho\sigma\tau} - 2\nabla^\rho\nabla^\sigma P_{\rho(\alpha\beta)\sigma} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L \right] + L\xi^\mu \\
&= 2g^{\mu\alpha}\xi^\beta P_{(\alpha}{}^{\rho\sigma\tau}R_{\beta)\rho\sigma\tau} - 4g^{\mu\alpha}\xi^\beta\nabla^\rho\nabla^\sigma P_{\rho(\alpha\beta)\sigma} - \delta^\mu_\beta\xi^\beta L + \xi^\mu L \\
&= g^{\mu\alpha}\xi^\beta P_\alpha{}^{\rho\sigma\tau}R_{\beta\rho\sigma\tau} + g^{\mu\alpha}\xi^\beta P_\beta{}^{\rho\sigma\tau}R_{\alpha\rho\sigma\tau} \\
&\quad - 2g^{\mu\alpha}\xi^\beta\nabla^\rho\nabla^\sigma P_{\rho\alpha\beta\sigma} - 2g^{\mu\alpha}\xi^\beta\nabla^\rho\nabla^\sigma P_{\rho\beta\alpha\sigma} \\
&= \xi^\beta P^{\mu\rho\sigma\tau}R_{\beta\rho\sigma\tau} + \xi^\beta P_\beta{}^{\rho\sigma\tau}R^\mu_{\rho\sigma\tau} \\
&\quad - 2\xi_\beta\nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\rho\mu\beta\sigma} - 2\xi_\beta\nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\rho\beta\mu\sigma} \\
&= \xi^\beta P^{\mu\rho\sigma\tau}R_{\beta\rho\sigma\tau} + \xi^\beta P_\beta{}^{\rho\sigma\tau}R^\mu_{\rho\sigma\tau} \\
&\quad - 2\xi_\beta\nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\mu\rho\sigma\beta} - 2\xi_\beta\nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\mu\sigma\rho\beta} \\
\text{recordando que } \nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\mu\sigma\rho\beta} &= \nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\mu\rho\sigma\beta} + [\nabla_\rho, \nabla_\sigma]P^{\mu\sigma\rho\beta} \\
&= \xi^\beta P^{\mu\rho\sigma\tau}R_{\beta\rho\sigma\tau} + \xi^\beta P_\beta{}^{\rho\sigma\tau}R^\mu_{\rho\sigma\tau} \\
&\quad - 2\xi_\beta\nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\mu\rho\sigma\beta} - 2\xi_\beta \left(\nabla_\rho\nabla_\sigma P^{\mu\rho\sigma\beta} + [\nabla_\rho, \nabla_\sigma]P^{\mu\sigma\rho\beta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi^\beta P^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\beta\rho\sigma\tau} + \xi^\beta P_\beta^{\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\mu \\
&\quad - 2\xi_\beta \nabla_\rho \nabla_\sigma P^{\mu\rho\sigma\beta} - 2\xi_\beta \nabla_\rho \nabla_\sigma P^{\mu\rho\sigma\beta} - 2\xi_\beta [\nabla_\rho, \nabla_\sigma] P^{\mu\sigma\rho\beta} \\
&\text{cambiando } \rho \rightarrow \nu, \quad \beta \rightarrow \sigma, \quad \sigma \rightarrow \rho \text{ en el tercer término,} \\
&= -4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} - 2\xi_\beta [\nabla_\rho \nabla_\sigma] P^{\mu\sigma\rho\beta} \\
&\quad + \xi^\beta P^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\beta\rho\sigma\tau} + \xi^\beta P_\beta^{\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\mu
\end{aligned}$$

sustituyendo esto en la expresión para $\mathcal{J}^\mu$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu &= 4\nabla_\rho \xi_\sigma \nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&\quad - 2\xi_\beta [\nabla_\rho, \nabla_\sigma] P^{\mu\sigma\rho\beta} + \xi^\beta P^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\beta\rho\sigma\tau} + \xi^\beta P_\beta^{\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\mu \\
&\quad + 2P^{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\beta\gamma\alpha}^\sigma \xi_\sigma - 2P^{\mu\beta\alpha\gamma} \nabla_\gamma \nabla_\alpha \xi_\beta
\end{aligned}$$

dado que $-2P^{\mu\beta\alpha\gamma} \nabla_\gamma \nabla_\alpha \xi_\beta = -P^{\mu\beta\gamma\alpha} R_{\beta\gamma\alpha}^\sigma \xi_\sigma$, esta expresión se reduce a,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu &= 4\nabla_\rho \xi_\sigma \nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&\quad - 2\xi_\beta [\nabla_\rho, \nabla_\sigma] P^{\mu\sigma\rho\beta} + \xi^\beta P_\beta^{\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\mu + 2P^{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\beta\gamma\alpha}^\sigma \xi_\sigma
\end{aligned}$$

además, tomando $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] P^{\mu\sigma\rho\beta} = R_{\gamma\rho\sigma}^\mu P^{\gamma\sigma\rho\beta} + R_{\gamma\rho\sigma}^\sigma P^{\mu\gamma\rho\beta} + R_{\gamma\rho\sigma}^\rho P^{\mu\sigma\gamma\beta} + R_{\gamma\rho\sigma}^\beta P^{\mu\sigma\rho\gamma}$, se reduce aún más la expresión a,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu &= 4\nabla_\rho \xi_\sigma \nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&\quad - 4P^{[\mu|\alpha\beta\gamma|} R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma]} \xi_\sigma
\end{aligned}$$

cuyo último término se analiza, primero, usando que $P^{[\mu|\alpha\beta\gamma|} R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma]} = \nabla_\beta \nabla_\gamma P^{\mu\sigma\beta\gamma}$, para probar que $P^{[\mu|\alpha\beta\gamma|} R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma]} \xi_\sigma = \nabla_\beta \nabla_\gamma (\xi_\sigma P^{\mu\sigma\beta\gamma}) - P^{\mu\sigma\beta\gamma} \nabla_\beta \nabla_\gamma \xi_\sigma$. Segundo, utilizando la identidad $\nabla_\beta \nabla_\gamma (P^{\mu\sigma\beta\gamma} \xi_\sigma) = \frac{1}{2} P^{\sigma\nu\beta\gamma} R_{\nu\beta\gamma}^\mu \xi_\sigma$ para el primer término, mientras para el segundo, se tiene en cuenta que $P^{\mu\sigma\beta\gamma} \nabla_\beta \nabla_\gamma \xi_\sigma = P^{\mu\sigma\beta\gamma} \nabla_{[\beta} \nabla_{\gamma]} \xi_\sigma = \frac{1}{2} P^{\mu\sigma\beta\gamma} [\nabla_\beta, \nabla_\gamma] \xi_\sigma = -\frac{1}{2} P^{\mu\nu\beta\gamma} R_{\nu\beta\gamma}^\sigma \xi_\sigma$.

Juntando todo, se muestra que $P^{[\mu|\alpha\beta\gamma|} R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma]} \xi_\sigma = \frac{1}{2} (P^{\sigma\nu\beta\gamma} R_{\nu\beta\gamma}^\mu \xi_\sigma + P^{\mu\nu\beta\gamma} R_{\nu\beta\gamma}^\sigma \xi_\sigma) = P^{(\mu|\alpha\beta\gamma|} R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma)} \xi_\sigma$, concluyendo que la parte antisimétrica de este tensor es equivalente a su parte simétrica, lo que implica que dicho tensor es nulo, es decir $P^{[\mu|\alpha\beta\gamma|} R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma]} \xi_\sigma = 0$. De esta manera, se obtiene finalmente la expresión para la corriente:

$$\mathcal{J}^\mu = 4\nabla_\rho \xi_\sigma \nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.80})$$

Utilizando la expresión para $\mathcal{J}^\mu$ es posible encontrar un potencial asociado a este al imponer las ecuaciones de movimiento y considerar las simetrías del tensor $P^{\alpha\beta\mu\nu}$,

$$\mathcal{J}^\mu = 4\nabla_\rho \xi_\sigma \nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} + 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet 2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\nu\nabla_\rho\xi_\sigma = 2\nabla_\nu(P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma) - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma \\
& \bullet -4\xi_\sigma\nabla_\nu\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} = -4\nabla_\nu(\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}) + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión para la corriente,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{J}^\mu &= 2\nabla_\nu(P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma) - 4\nabla_\nu(\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}) + 4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} \\
&\quad - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= \nabla_\nu[2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma - 4\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}] + 4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} \\
&\quad - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= \nabla_\nu\mathcal{K}^{\mu\nu} + 4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}$$

recordando que $\nabla_\alpha F^{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}F^{\mu\alpha})$,

$$\begin{aligned}
\rightarrow \mathcal{J}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}\mathcal{K}^{\mu\nu}) + 4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \\
\sqrt{-g}\mathcal{J}^\mu &= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left\{4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}\right\} \\
J^\mu &= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left\{\left[4\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}\right\}
\end{aligned}$$

tomando $\rho \leftrightarrow \nu$ en el último término

$$\begin{aligned}
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left\{\left[4\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma + 4\nabla_\rho\xi_\sigma\nabla_\nu P^{\mu\rho\nu\sigma}\right\} \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left[4\nabla_\nu P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2\nabla_\nu P^{\mu\nu\rho\sigma} + 4\nabla_\nu P^{\mu\rho\nu\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_\nu\left[4P^{\mu(\rho\sigma)\nu} - 2P^{\mu\nu\rho\sigma} + 4P^{\mu\rho\nu\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_\nu\left[2P^{\mu\rho\sigma\nu} + 2P^{\mu\sigma\rho\nu} - 2P^{\mu\nu\rho\sigma} + 4P^{\mu\rho\nu\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_\nu\left[2P^{\mu\rho\sigma\nu} - 4P^{\mu\rho\sigma\nu} + 2P^{\mu\sigma\rho\nu} - 2P^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_\nu\left[-2P^{\mu\rho\sigma\nu} + 2P^{\mu\sigma\rho\nu} - 2P^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + 2\sqrt{-g}\nabla_\nu\left[-P^{\mu\rho\sigma\nu} + P^{\mu\sigma\rho\nu} - P^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu} + 2\sqrt{-g}\nabla_\nu\left[P^{\mu\rho\nu\sigma} + P^{\mu\sigma\rho\nu} + P^{\mu\nu\sigma\rho}\right]\nabla_\rho\xi_\sigma \\
&\text{dado que } P^{\mu\rho\nu\sigma} + P^{\mu\sigma\rho\nu} + P^{\mu\nu\sigma\rho} = 0, \text{ ver (B.9)} \\
&= \partial_\nu K^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene el valor para el potencial de Noether como:

$$K^{\mu\nu} = \sqrt{-g}[2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma - 4\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}] \quad (\text{A.81})$$

Identidades útiles

En este apéndice se presentan algunas identidades y desarrollos útiles para comprender la esencia de algunos desarrollos en el cuerpo de la tesis.

B.1 Christoffel con índices contraídos

Dado $\Gamma^\mu_{\mu\sigma}$, se puede desarrollar este de manera explícita en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\mu\sigma} &= \frac{1}{2} \left[g^{\mu\beta} \partial_\mu g_{\beta\sigma} + g^{\mu\beta} \partial_\sigma g_{\mu\beta} - g^{\mu\beta} \partial_\beta g_{\mu\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \partial_\sigma g_{\mu\beta}\end{aligned}\tag{B.1}$$

Recordando la formula de Jacobi:

$$\frac{d}{dt} [\det(A(t))] = \det(A(t)) \text{Tr} \left[(A(t))^{-1} \frac{d}{dt} (A(t)) \right]\tag{B.2}$$

Entonces (B.1) se puede ver como

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\mu\sigma} &= \frac{1}{2} \left[\text{Tr} \left((\mathbf{g}^{-1})^{\mu\beta} \partial_\sigma (\mathbf{g})_{\mu\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial_\sigma (g)}{g} = \frac{1}{2} \partial_\sigma \ln |g| \\ \Rightarrow &= \frac{\partial_\sigma (\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}\end{aligned}\tag{B.3}$$

B.2 Dobles derivadas sobre vectores Killing

Comenzando con tres variantes de la ecuación de Killing

$$\left. \begin{aligned}\nabla_\alpha \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\alpha \nabla_\nu \xi_\mu &= 0 \\ \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\alpha + \nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu &= 0 \\ -\nabla_\mu \nabla_\alpha \xi_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\alpha &= 0\end{aligned}\right\}\tag{B.4}$$

sumando todas estas, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \nabla_\alpha \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\alpha \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\alpha + \nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\alpha \xi_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\alpha = 0 \\
& \Rightarrow [\nabla_\alpha, \nabla_\mu] \xi_\nu + [\nabla_\alpha, \nabla_\nu] \xi_\mu + \nabla_\alpha \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu = 0 \\
& [\nabla_\alpha, \nabla_\mu] \xi_\nu + [\nabla_\alpha, \nabla_\nu] \xi_\mu + [\nabla_\alpha, \nabla_\nu] \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu = 0 \\
& R^\lambda_{\nu\mu\alpha} \xi_\lambda + R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \xi_\lambda + R^\lambda_{\mu\nu\alpha} \xi_\lambda = -2\nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu \\
& \left[R^\lambda_{\nu\mu\alpha} + R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\mu\nu\alpha} \right] \xi_\lambda = -2\nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu \quad (B.5)
\end{aligned}$$

Recordando las identidades de Bianchi:

$$R_{\lambda\nu\mu\alpha} + R_{\lambda\mu\alpha\nu} + R_{\lambda\alpha\nu\mu} = 0 \Rightarrow R_{\lambda\nu\mu\alpha} = -R_{\lambda\mu\alpha\nu} - R_{\lambda\alpha\nu\mu} \quad (B.6)$$

Se puede reescribir la suma de Riemanns en (B.5), para sustituir la equivalencia dada en (B.6), como sigue

$$\begin{aligned}
& \left[R^\lambda_{\nu\mu\alpha} + R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\mu\nu\alpha} \right] \xi_\lambda = \left[R^\lambda_{\nu\mu\alpha} - R^\lambda_{\alpha\nu\mu} - R^\lambda_{\mu\alpha\nu} \right] \xi_\lambda = -2\nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu \\
& 2R^\lambda_{\nu\mu\alpha} \xi_\lambda = -2\nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu \\
& \Rightarrow R^\lambda_{\nu\alpha\mu} \xi_\lambda = \nabla_\nu \nabla_\alpha \xi_\mu \quad (B.7)
\end{aligned}$$

B.3 Diagonal de un 2-tensor antisimétrico

Dado un 2-tensor antisimétrico $F^{\mu\alpha}$, se tiene por definición que,

$$F^{\mu\alpha} = -F^{\alpha\mu}$$

Si se toma su diagonal $F^{\mu\mu}$ en la anterior expresión, se puede concluir que,

$$2F^{\mu\mu} = 0$$

esto es, todos los elementos de su diagonal serán nulos.

Además de esto, si se considera dejar fija la componente temporal en uno de sus índices, es decir, $\mu = 0$, y se calcula su divergencia covariante sobre el otro índice, en virtud de su antisimetría, se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \nabla_\alpha F^{0\alpha} = \nabla_0 F^{00} + \nabla_i F^{0i} \\
& \text{dado que } F^{00} = 0, \\
& \Rightarrow \nabla_\alpha F^{0\alpha} = \nabla_i F^{0i} \quad (B.8)
\end{aligned}$$

B.4 Primera identidad de Bianchi para el tensor **P**

Dadas las identidades de Bianchi para el tensor de Riemann,

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma} + R^\mu_{\beta\gamma\alpha} = 0$$

se puede multiplicar toda esta anterior expresión por $P^{\sigma\nu\alpha\beta}$, y mediante el uso de las simetrías de los índices que comparten ambos tensores, llegar a la primera identidad de Bianchi para el tensor **P**:

$$P^{\sigma\nu\alpha\beta} R^\mu_{\nu\alpha\beta} + P^{\sigma\nu\alpha\beta} R^\mu_{\alpha\beta\gamma} + P^{\sigma\nu\alpha\beta} R^\mu_{\beta\gamma\alpha} = 0$$

cambiando $\alpha \leftrightarrow \nu, \beta \leftrightarrow \alpha$ y $\nu \leftrightarrow \beta$ en el segundo término, y $\beta \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \alpha$ y $\alpha \rightarrow \beta$ en el tercero,

$$\begin{aligned} P^{\sigma\nu\alpha\beta} R^\mu_{\nu\alpha\beta} + P^{\sigma\beta\nu\alpha} R^\mu_{\nu\alpha\beta} + P^{\sigma\alpha\beta\nu} R^\mu_{\nu\alpha\beta} &= 0 \\ (P^{\sigma\nu\alpha\beta} + P^{\sigma\beta\nu\alpha} + P^{\sigma\alpha\beta\nu}) R^\mu_{\nu\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, ya que $P^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial R_{\alpha\beta\mu\nu}}$, entonces el tensor de Riemann debe satisfacer que $R_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$, y por ende se puede concluir que el tensor **P** satisface,

$$P^{\sigma\nu\alpha\beta} + P^{\sigma\alpha\beta\nu} + P^{\sigma\beta\nu\alpha} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Bibliography

- [AD82] Larry F Abbott and Stanley Deser. „Stability of gravity with a cosmological constant“. In: *Nuclear Physics B* 195.1 (1982), pp. 76–96 (cit. on p. 27).
- [ADM62] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. „Gravitation: an introduction to current research“. In: (1962) (cit. on p. 7).
- [Bar03] Glenn Barnich. „Boundary charges in gauge theories: Using Stokes theorem in the bulk“. In: *Classical and quantum gravity* 20.16 (2003), p. 3685 (cit. on pp. 41, 48).
- [BC05] Glenn Barnich and Geoffrey Compere. „Generalized Smarr relation for Kerr-AdS black holes from improved surface integrals“. In: *Physical Review D* 71.4 (2005), p. 044016 (cit. on p. 41).
- [BC07] Adel Bouchareb and Gérard Clément. „Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity“. In: *Classical and Quantum Gravity* 24.22 (2007), p. 5581 (cit. on p. 82).
- [Bla11] Matthias Blau. *Lecture notes on general relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern, 2011 (cit. on p. 34).
- [CN22] Alejandro Corichi and Dario Núñez. „Introduction to the ADM formalism“. In: *arXiv preprint arXiv:2210.10103* (2022) (cit. on pp. 8, 13).
- [DM20] Alessandro Danieli and Luca Guido Molinari. „ADM formalism: a Hamiltonian approach to General Relativity“. PhD thesis. Master’s thesis, Università degli Studi di Milano, 2020 (cit. on pp. 11, 15, 19, 21, 23).
- [DS11] Deniz Olgu Devecioğlu and Özgür Sarıoğlu. „Conserved Killing charges of quadratic curvature gravity theories in arbitrary backgrounds“. In: *Physical Review D* 83.2 (2011), p. 021503 (cit. on p. 49).
- [DT02] Stanley Deser and Bayram Tekin. „Gravitational energy in quadratic-curvature gravities“. In: *Physical review letters* 89.10 (2002), p. 101101 (cit. on pp. 27, 28).
- [DT03] Stanley Deser and Bayram Tekin. „Energy in generic higher curvature gravity theories“. In: *Physical Review D* 67.8 (2003), p. 084009 (cit. on pp. 27, 28).
- [GKY14] Yongwan Gim, Wontae Kim, and Sang-Heon Yi. „The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited“. In: *Journal of High Energy Physics* 2014.7 (2014), pp. 1–15 (cit. on pp. 51, 53).
- [GR17] Hanoch Gutfreund and Jürgen Renn. *El camino hacia la relatividad: el artículo de Einstein que camnió la ciencia*. Tusquets Editores, 2017 (cit. on p. 4).

- [HE23] Stephen W Hawking and George FR Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 2023 (cit. on p. 34).
- [HHH21] Alfredo Herrera-Aguilar, Jhony A Herrera-Mendoza, and Daniel F Higueta-Borja. „Rotating spacetimes generalizing Lifshitz black holes“. In: *The European Physical Journal C* 81.10 (2021), p. 874 (cit. on p. 48).
- [HP12] Stephen Hawking and Roger Penrose. *La naturaleza del espacio y el tiempo*. Debate, 2012 (cit. on p. 4).
- [Hyu+14] Seungjoon Hyun, Jaehoon Jeong, Sang-A Park, and Sang-Heon Yi. „Quasilocal conserved charges and holography“. In: *Physical Review D* 90.10 (2014), p. 104016 (cit. on p. 47).
- [KKY13] Wontae Kim, Shailesh Kulkarni, and Sang-Heon Yi. „Quasilocal conserved charges in a covariant theory of gravity“. In: *Physical review letters* 111.8 (2013), p. 081101 (cit. on p. 42).
- [KN81a] Masahiro Kihara and Hidekazu Nariai. „A cosmological version of flatness conditions in general relativity“. In: *Progress of Theoretical Physics* 66.4 (1981), pp. 1498–1499 (cit. on p. 35).
- [KN81b] Masahiro Kihara and Hidekazu Nariai. „On a Canonical Treatment of the Einstein Equations in an Expanding Universe: Isotropic Coordinate Conditions“. In: *Progress of Theoretical Physics* 65.5 (1981), pp. 1613–1620 (cit. on p. 35).
- [One83] Barrett O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983 (cit. on p. 34).
- [Por+15] Felipe Ignacio Portales Oliva et al. „Cantidades conservadas invariantes en teorías gravitacionales en presencia de campos externos“. In: (2015) (cit. on p. 49).
- [Rip13] AC Ripken. *Coordinate systems in De Sitter spacetime*. 2013 (cit. on pp. 35, 36).
- [RT10] Derek J Raine and Edwin George Thomas. *Black holes: an introduction*. Imperial College Press, 2010 (cit. on p. 4).
- [SA16] F Villegas Silva and Teófilo Vargas Auccalla. „Formulación ADM de la Relatividad General“. In: *Revista de investigación de física* 19.2 (2016) (cit. on pp. 8, 9).
- [Sus09] Leonard Susskind. *La guerra de los agujeros negros: una controversia científica sobre las leyes últimas de la naturaleza*. Grupo Planeta (GBS), 2009 (cit. on p. 4).
- [Tho95] Kip S Thorne. *Agujeros negros y tiempo curvo*. Critica, 1995 (cit. on p. 4).
- [TWM00] Kip S Thorne, John Archibald Wheeler, and Charles W Misner. *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000 (cit. on p. 30).
- [Wal10] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010 (cit. on p. 9).

List of Figures

2.1	Foliación por hipersuperficies de Cauchy, junto con las variables Lapse y Shift, formando el vector temporal que describe una trayectoria arbitraria.	9
2.2	Elemento de 4-volumen espaciotemporal $\mathcal{V}$, cuya frontera $\partial\mathcal{V}$ se compone de dos hipersuperficies de Cauchy Σ_{t_2} y Σ_{t_1} y una hipersuperficie tipo tiempo $\mathcal{T}$. El vector normal al 3-volumen $\partial\mathcal{V}$ corresponde a r_α , el cual da la orientación al elemento diferencial de 3-volumen $d\sigma_\alpha$. Las fronteras de las hipersuperficies de Cauchy $\partial\Sigma_t$ formarán una foliación para la hipersuperficie $\mathcal{T}$ y en tal caso se les denotará como S_t	16
3.1	Representación de la ecuación (3.2), en donde $g_{\mu\nu}$ representará la métrica de un agujero negro, $\bar{g}_{\mu\nu}$ será la métrica de fondo solución a las ecuaciones de campo sin presencia de materia, y $h_{\mu\nu}$ será la perturbación que decae rápidamente en el infinito espacial. En la figura se han considerado superficies con tiempo constante	28
3.2	Espaciotiempo dS^4 , visto como un hiperboloide de una rama, embebido en un espaciotiempo plano dS^2 . En esta figura se han dejado 2 dimensiones constantes para poder visualizar la forma geométrica para de Sitter. (i)Representa dS^4 descrito por las coordenadas globales (t, χ, θ, ϕ) , las cuales, como su nombre lo indica, cubren todo el hiperboloide, y generan 3-superficies de curvatura constante positiva (+1) para $t = \text{constante}$. (ii)Representa dS^4 descrito por las coordenadas "Flat slicing" $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, las cuales cubren sólo la mitad del hiperboloide, y generan 3-superficies planas para $\hat{t} = \text{constante}$. Extraído de [HE23, cap. 5]	34
4.1	Representación de un espaciotiempo 4-dimensional a tiempo constante. En él se pueden visualizar la superficies de codimensión 2 Σ en donde se medirán de manera cuasilocal las cantidades conservadas en su interior. Aquí R simboliza el radio de la superficie cuasilocal, la cual es independiente de éste. Es por eso que en la figura el vector negro sobresale de la superficie Σ indicando independencia a la hora de elegir Σ . Por otro lado, $\mathcal{H}$ representa el horizonte de eventos del agujero negro, el cual cumplirá que $\mathcal{H} < \Sigma$	52

5.1	Esta figura busca ilustrar el modo en el que los métodos para el calculo de cargas conservadas en espaciotiempos encajan entre sí: Como se observa, el método Cuasilocal contiene a los otros dos, pues este posibilita no solo el estudio de espaciotiempo provenientes de modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert como también lo hace el método ADT, sino que quita la restricción impuesta por este último de tener una solución de vacío para poder funcionar. Así mismo se puede ver cómo el método ADT contiene al método ADM pues el primero extiende la posibilidad de cómputo para cargas conservadas a espaciotiempos que no posibiliten una globalidad hiperbólica, y que tenga una tipología asintótica distinta a la plana.	56
-----	--	----

Colophon

This thesis was typeset with $\text{\LaTeX}$ 2_ε. It uses the *Clean Thesis* style developed by Ricardo Langner. The design of the *Clean Thesis* style is inspired by user guide documents from Apple Inc.

Download the *Clean Thesis* style at <http://cleanthesis.der-ric.de/>.

