



**RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO
DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES DE TULUÁ: UNA
PROPUESTA DE AULA QUE INVOLUCRA EL USO DEL GEOGEBRA**

**IVÁN EDUARDO GÁLVEZ GIRALDO
DIANA MARCELA TAMAYO GONZÁLEZ**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES
Tuluá, Valle del Cauca, 2017**



**RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO
DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES DE TULUÁ: UNA
PROPUESTA DE AULA QUE INVOLUCRA EL USO DEL GEOGEBRA**

IVÁN EDUARDO GÁLVEZ GIRALDO

Código: 1505385

DIANA MARCELA TAMAYO GONZÁLEZ

Código: 1505384

Informe final de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en
Educación, énfasis en Educación Matemática y Ciencias Experimentales

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO:

CRISTIAN ANDRÉS HURTADO MORENO, MG

PROFESOR DEL INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

**MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES**

Tuluá, Valle del Cauca, 2017

*A Dios por Su Gracia constante
En cada sueño emprendido
E inmenso amor, no entendido,
Por siempre perseverante.
Queremos en este instante
Besar su mano extendida
Y a su entrega desmedida
Que a nuestro hogar da sentido;
Gracias Dios por lo vivido
Y cada meta cumplida.*

*A los hijos por la espera
En estos años de esfuerzos
Y aunque hemos estando inmersos
No en un proyecto cualquiera
Son la prioridad primera
Motores de la existencia.
Nuestros padres con paciencia
Aportaron a este sueño,
Pusieron todo el empeño
Referentes de excelencia*

*También a nuestro tutor
Y a nuestros evaluadores;
Hoy honramos sus labores
Hechas con todo el vigor.
Por la Educación, su amor
Ha sido un hecho evidente,
Quedarán en nuestras mentes,
Esa es hoy nuestra promesa
Más trabajar con firmeza
Por un país floreciente.*

Iván Eduardo y Diana Marcela

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por el regalo de la vida y las oportunidades de crecer que en ella nos ha dado mostrándonos permanentemente el camino.

A nuestro director del trabajo de grado, profesor Cristian Andrés Hurtado Moreno, por su compromiso, acompañamiento permanente y orientación con las cuales aportó a nuestra formación académica y profesional.

A los profesores Evelio Bedoya Moreno y Edwin García Arteaga, por creer en nosotros, por su liderazgo y gestión para que este programa de Maestría pudiese llevarse a cabo.

A los nuestros profesores por su compromiso con el desarrollo de la maestría y generosidad en el compartir de sus conocimientos.

A nuestros evaluadores, los profesores Evelio Bedoya Moreno y Rodolfo Vergel Causado quienes aceptaron evaluar este trabajo y aportaron con sus observaciones y sugerencias grandemente a nuestra formación.

A nuestros estudiantes participantes de esta investigación por su disposición y apertura al desarrollo de la misma.

A John Jairo Peña por su tan valioso apoyo en el diseño de los archivos de Geogebra.

A las directivas de nuestra Institución por el apoyo durante todo el proceso.

A nuestros padres, hermanos y sobrina por su apoyo incondicional, sus voces de aliento y por el amor que nos han dado durante toda nuestra vida siendo soporte vital para nosotros. Los amamos...

Al momento en que nuestros caminos se cruzaron y empezó el compartir la vida juntos.

A nuestros hijos Samuel, Emmanuel y quien nos cuida desde el cielo: Tres grandes motivos para ser mejores cada día.

A Ligia Guzmán por su cariño y ayuda incondicional en nuestro hogar.

A todas las personas que en el transcurrir de la vida nos han brindado elementos para crecer y ser mejores seres humanos.

A todos, de corazón, Gracias...

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	1
Capítulo 1: Contextualización y delimitación del campo de estudio	3
1.1 Marco contextual	4
1.2 Antecedentes.....	6
1.3 Delimitación de la problemática de estudio	12
1.4 Objetivos.....	17
1.4.1 Objetivo general.....	17
1.4.2 Objetivos específicos	17
1.5 Justificación	18
Capítulo 2: Referentes curricular y conceptual	22
2.1 Referente Curricular	23
2.1.1 El pensamiento variacional en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas	24
2.1.2 Estándares Básicos de Competencias	28
2.2 Referentes didácticos.....	31
2.2.1 Razonamiento covariacional.....	31
2.2.2 Geogebra en el estudio de situaciones dinámicas	38
Capítulo 3: Metodología de investigación y análisis de los resultados	41
3.1 Diseño metodológico.....	42
3.1.1 El enfoque de investigación.....	42
3.1.2 Fases del proceso de investigación.	42
3.2 Diseño y contexto de la situación	43
3.2.1 Sobre las tareas propuestas	46
3.3 Sobre la implementación de la situación	73

3.3.1 Participantes de la investigación.....	73
3.3.2 Metodología de la implementación e instrumentos de recolección de la información	74
3.4 Análisis de resultados	74
3.4.1 Análisis de los resultados de la Tarea 1. Comprendiendo la situación	76
3.4.2 Análisis de los resultados de la Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes	78
3.4.3 Análisis de los resultados de la Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes.....	88
3.4.4 Análisis de los resultados de la Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables.....	96
3.4.5 Análisis de los resultados de la Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes.....	112
Capítulo 4: Conclusiones y reflexiones.....	121
4.1 Conclusiones.....	122
4.2 Reflexiones	129
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132
ANEXOS	140
ANEXO 1: Cómic (diseño realizado por los investigadores)	141
ANEXO 2: Tareas de la situación	147
ANEXO 3: Ejemplo de las producciones escritas de uno de los estudiantes	153

Índice de tablas

Tabla 1. Distribución poblacional de la I.E.JMC de Tuluá	5
Tabla 2. Especialidades en la media técnica en la I.E.JMC	6
Tabla 3. Componente por tipo de pensamiento matemático, prueba saber 5, año 2014	15
Tabla 4. Acciones mentales en la covariación (Tomado de Carlson, et al., 2003, p. 128)	33
Tabla 5. Niveles de Razonamiento Covariacional (Tomado del marco conceptual para los niveles de covariación, Carlson, et al., 2003, p.129)	34
Tabla 6. Relaciones funcionales en las tablas asociadas a la covariación.....	37
Tabla 7. Estructura general de la situación de variación y cambio, en el marco conceptual del Razonamiento Covariacional, Carlson et al., (2003).	72
Tabla 8. Categorías y criterios de análisis.....	75
Tabla 9. Tipos de respuestas en el ítem 1 Tarea 1.....	78
Tabla 10. Tipos de respuestas en el ítem 2 Tarea 2.....	80
Tabla 11. Tipos de respuestas en los Ítems 3 y 4 Tarea 2	82
Tabla 12. Tipos de respuestas en el Ítem 4 Tarea 2	84
Tabla 13. Tipos de respuestas en el Ítem 6 Tarea 2	86
Tabla 14. Tipos de respuestas en el Ítems 1 y 2 Tarea 3	88
Tabla 15. Tipos de respuestas en el Ítem 3 Tarea 3	91
Tabla 16. Tipos de respuestas en el Ítem 4 Tarea 3	93
Tabla 17. Tipos de respuestas en el Ítem 5 Tarea 3	94
Tabla 18. Tipos de respuestas al ítem 1 Tarea 4	96
Tabla 19. Tipos de respuestas a los ítems 2 y 6 Tarea 4	97
Tabla 20. Tipos de respuestas a los ítems 3 y 7 Tarea 4	98
Tabla 21. Tipos de respuesta a los Ítems 4 y 8, Tarea 4.....	101
Tabla 22. Tipos de respuestas a los ítems 5 y 9 Tarea 4	105
Tabla 23. Tipos de respuestas al ítem 10 Tarea 4	108
Tabla 24. Tipos de respuestas al ítem 11 Tarea 4	110
Tabla 25. Tipos de respuestas al ítem 1 Tarea 5	113
Tabla 26. Tipos de respuestas al ítem 2 Tarea 5	118

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Relaciones del pensamiento variacional con los demás tipos de pensamiento matemático, tomado de Valoyes y Malagón, (2006), p.118.....	27
Ilustración 2: Coherencias vertical y horizontal para los estándares seleccionados en el diseño e implementación de la situación de aula.	30
Ilustración 3. Comprendiendo la situación, vista diapositivas.	46
Ilustración 4. Muestra en diapositivas preguntas Tarea 1, primera parte	47
Ilustración 5. Muestra en diapositivas preguntas Tarea 1, segunda parte	47
Ilustración 6. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 1.	49
Ilustración 7. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 2.	49
Ilustración 8. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 3.	50
Ilustración 9. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 4.	51
Ilustración 10. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 5.	51
Ilustración 11. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 6.	52
Ilustración 12. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 1.	53
Ilustración 13. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 2.	54
Ilustración 14. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 3.	55
Ilustración 15. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 4.	55
Ilustración 16. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 5.	56
Ilustración 17. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 1. .	58
Ilustración 18. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 2. .	58
Ilustración 19. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 2.	
Mensaje ¡Inténtalo de nuevo!	59
Ilustración 20. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 3. .	60
Ilustración 21. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 4. ..	61
Ilustración 22. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 5. .	62
Ilustración 23. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 6. ..	63
Ilustración 24. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 7. ..	64
Ilustración 25. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 8. ..	65
Ilustración 26. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 9. .	66
Ilustración 27. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 10.	67

Ilustración 28. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 11.	68
Ilustración 29. Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes.	
Pregunta 1.....	69
Ilustración 30. Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes.	
Pregunta 2.....	71
Ilustración 31. Respuesta al Ítem3, Tarea 1, E2	77
Ilustración 32. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E3	79
Ilustración 33. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E4	79
Ilustración 34. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E5	79
Ilustración 35. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E1	80
Ilustración 36. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E6	80
Ilustración 37. Respuesta al Ítem 2, Tarea 2, E7	81
Ilustración 38. Respuesta al Ítem 2, Tarea 2, E4	81
Ilustración 39. Ilustración 39. Respuestas al Ítem 2, Tarea 2, E9	82
Ilustración 40. Respuesta al Ítem 2, Tarea 2, E2	82
Ilustración 41. Respuestas a los Ítems 3 y 4, Tarea 2, E7.....	83
Ilustración 42. Respuestas a los Ítems 3 y 4 Tarea 2 E1.....	83
Ilustración 43. Respuestas a los Ítems 3 y 4 Tarea 2 E4.....	83
Ilustración 44. Respuestas a los Ítems 3 y 4, Tarea 2, E2.....	83
Ilustración 45. Respuesta al Ítem 5, Tarea 2, E7	84
Ilustración 46. Respuesta al Ítem 5, Tarea 2, E10	85
Ilustración 47. Respuesta al Ítem 5, Tarea 2, E6	85
Ilustración 48. Respuesta al Ítem 6, Tarea 2, E3	86
Ilustración 49. Respuesta al Ítem 6, Tarea 2, E11	86
Ilustración 50. Verbalización respecto al Ítem 6 E4.....	87
Ilustración 51. Respuestas a los Ítems 1 y 2, Tarea 3, E12.....	88
Ilustración 52. Respuestas a los Ítem 1 y 2, Tarea 3, E4	89
Ilustración 53. Respuestas a los ítems 1 y 2, Tarea 3, E2	89
Ilustración 54. Ítem 2, Tarea 3, E10	90
Ilustración 55. Respuesta al Ítem 3, Tarea 3, E4	91
Ilustración 56. Respuesta al Ítem 3, Tarea 3, E14	91

Ilustración 57. Respuesta al Ítem 3, Tarea 3, E9	92
Ilustración 58. Ítem 3 Tarea 3 E8	92
Ilustración 59. Respuesta a Ítem 4, Tarea 3, E2	93
Ilustración 60. Respuesta a Ítem 4, Tarea 3, E11	93
Ilustración 61. Ítem 4, Tarea 3, E8	94
Ilustración 62. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E9	95
Ilustración 63. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E14	95
Ilustración 64. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E4	95
Ilustración 65. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E6	95
Ilustración 66. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E8	96
Ilustración 67. Respuesta al Ítem 1, Tarea 4, E2	97
Ilustración 68. Respuestas a los Ítems 2 y 6, Tarea 4, E14.....	98
Ilustración 69. Respuesta al Ítem 3, Tarea 4, E14	99
Ilustración 70. Respuesta al Ítem 7, Tarea 4, E7	99
Ilustración 71. Respuesta al Ítem 7, Tarea 4, E4	99
Ilustración 72. Respuesta al Ítem 3, Tarea 4, E11	99
Ilustración 73. Respuesta al Ítem 3, Tarea 4, E2	100
Ilustración 74. Respuesta al Ítem 7, Tarea 4, E10	100
Ilustración 75. Respuesta al ítem 4, Tarea 4, E3	102
Ilustración 76. Respuesta al Ítem 8, Tarea 4, E3	102
Ilustración 77. E3 durante el desarrollo del Ítem 4, Tarea 4.....	103
Ilustración 78. Respuesta al ítem 4, Tarea 4, E8	104
Ilustración 79. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E2	105
Ilustración 80. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E15	106
Ilustración 81. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E9	106
Ilustración 82. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E5	107
Ilustración 83. Respuesta al Ítem 9, Tarea 4, E5	107
Ilustración 84. Ítem 5, Tarea 4, E8	107
Ilustración 85. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E4	108
Ilustración 86. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E11	109
Ilustración 87. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E2	109

<i>Ilustración 88.</i>	<i>Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E12</i>	<i>110</i>
<i>Ilustración 89.</i>	<i>Respuesta al Ítem 11, Tarea 4, E12</i>	<i>112</i>
<i>Ilustración 90.</i>	<i>Respuesta al Ítem 11, Tarea 4, E9</i>	<i>112</i>
<i>Ilustración 91.</i>	<i>Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E2</i>	<i>114</i>
<i>Ilustración 92.</i>	<i>Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E9</i>	<i>115</i>
<i>Ilustración 93.</i>	<i>Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E5</i>	<i>116</i>
<i>Ilustración 94.</i>	<i>Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E3</i>	<i>117</i>
<i>Ilustración 95.</i>	<i>Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E11</i>	<i>118</i>
<i>Ilustración 96.</i>	<i>Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E13</i>	<i>119</i>
<i>Ilustración 97.</i>	<i>Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E1</i>	<i>119</i>
<i>Ilustración 98.</i>	<i>Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E2</i>	<i>119</i>
<i>Ilustración 99.</i>	<i>Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E7</i>	<i>120</i>

RESUMEN

El presente trabajo centra su atención en las características del razonamiento covariacional que se presentan en estudiantes de un grupo de quinto grado de la educación básica colombiana, Institución Educativa Juan María Céspedes, I.E.JMC, del municipio de Tuluá, Valle del Cauca. Para ello se tuvo como marco conceptual al estudio realizado por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003), en el cual se brinda una caracterización de este tipo de razonamiento. Con esta intención se diseñó una situación de variación y cambio mediada por el software Geogebra¹ la cual se contextualiza en la historia de Julio Verne presentada en “La vuelta al mundo en 80 días” (1872), adaptados mediante un comic. La situación, que está configurada por 5 tareas, pone en juego la presencia plausible de las 4 primeras acciones mentales del referente conceptual adoptado. Lo anterior con el ánimo de aportar a la consolidación del razonamiento covariacional en los estudiantes objeto de estudio y con ello también a su pensamiento variacional dado el llamado que el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) en el cual propone su desarrollo desde los primeros años de escolaridad como elemento esencial en la construcción de pensamiento matemático tanto en la educación básica y media.

Después de la implementación de la situación de aula se caracterizaron los comportamientos de los estudiantes de acuerdo a los niveles de covariación que iban evidenciando en el desarrollo de las diferentes tareas, lo que permitió constatar que la totalidad de los estudiantes se movilizaron las 2 primeras acciones mentales del referente conceptual adoptado pero no todos lograron dar cuenta de la cuantificación del cambio de las magnitudes involucradas. Los análisis realizados a las respuestas ofrecidas por los estudiantes a las diferentes tareas propuestas permitieron algunas conclusiones generales y reflexiones que se proponen para tenerse en cuenta en futuras investigaciones.

Términos clave: razonamiento covariacional, variación, covariación, correlación, Geogebra.

¹ **Geogebra** es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continuó en la Universidad de Atlantic, Florida, luego en la Universidad Estatal de Florida y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria.

ABSTRACT

The present study focuses on the characteristics of covariational reasoning that are present in students of a fifth grade group of Colombian basic education, Juan María Céspedes Educational Institution, I.E.JMC, of the municipality of Tuluá, Valle del Cauca. For this, the study was carried out by Carlson, Jacobs, Coe, Larsen and Hsu (2003), in which a characterization of this type of reasoning is provided. With this intention, a situation of variation and change mediated by Geogebra software was designed, which is contextualized in the history of Jules Verne presented in "Around the world in 80 days" (1872), adapted by a comic. The situation, which is shaped by 5 tasks, puts into play the plausible presence of the first 4 mental actions of the conceptual referent adopted. The above with the aim of contributing to the consolidation of covariational reasoning in the students studied and with it also to their variational thinking given the call that the Ministry of National Education (MEN, 2006) in which it proposes its development from the earliest Years of schooling as an essential element in the construction of mathematical thinking in both basic and secondary education.

After the implementation of the classroom situation, students' behaviors were characterized according to the levels of covariation that were evidenced in the development of the different tasks, which allowed to verify that all the students mobilized the first 2 actions Mental aspects of the conceptual reference adopted but not all managed to account for the quantification of the change in the magnitudes involved. The analyzes made to the answers offered by the students to the different tasks proposed allowed some general conclusions and reflections that are proposed to be taken into account in future investigations.

Key terms: Covariate reasoning, variation, covariation, correlation, Geogebra.

INTRODUCCIÓN

Desde finales de la década de los noventa, a partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), el desarrollo del pensamiento variacional se ha propuesto como uno de los focos a trabajar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en Colombia, posicionándose como uno de los pensamientos cuyo desarrollo no solamente debe favorecerse desde los inicios de la actividad escolar sino también articularse con los otros modos de pensamiento matemático (numérico, métrico, espacial y aleatorio) gracias a que centra su atención en la dinamicidad de fenómenos y, por tanto, en las magnitudes presentes en ellos. Este reconocimiento ha hecho que buena parte de la investigación nacional e internacional hayan despertado su interés en este campo.

Sin embargo, en el contexto de la I.E.JMC, donde laboran los investigadores, se evidencia falta de inclusión de tareas de variación y cambio que puedan aportar al desarrollo del pensamiento variacional; por lo general se deja su abordaje para grados posteriores, usualmente octavo y noveno, donde el énfasis se pone en el tratamiento de expresiones de tipo algebraico, por lo general, desvinculadas de los fenómenos de la naturaleza.

Dichos fenómenos deben ser tenidos en cuenta en la Escuela debido a que permiten además la aparición de las magnitudes como maneras de medir tales cambios, de tal forma que el pensamiento variacional cobre su real importancia al permitir la comprensión y análisis de dichas situaciones. Por tal motivo, este trabajo presenta una propuesta de aula que involucra una situación de variación y cambio en torno al razonamiento covariacional, validada con estudiantes, con la intención de analizar y describir características de este tipo de razonamiento. Para ello se desarrolla en 4 capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el **primer capítulo** se hace una descripción del contexto institucional donde se caracteriza la I.E.JMC donde se implementó la propuesta de aula; asimismo la delimitación de la problemática de estudio, en la cual se comparten las posiciones de diferentes autores en torno a la transición de la aritmética al álgebra y cómo favorecer el desarrollo de pensamiento variacional mediante situaciones del mundo real en las cuales éste cobre sentido. Además de lo anterior, se presentan los objetivos orientadores de la propuesta, la justificación donde se invita a dinamizar las

matemáticas escolares movilizando el pensamiento variacional desde edades tempranas como una de las formas de aproximación a los que posteriormente será el álgebra, teniendo en cuenta tanto las posturas del MEN como estudios de Kaput (1998), Godino y Font (2003) y Garriga (2011) entre otros. Contiene además este capítulo algunas investigaciones y documentos tanto nacionales como internacionales, desarrollados alrededor del pensamiento variacional y que fueron aportes importantes para consolidar esta propuesta.

En el **segundo capítulo** se presentan como referentes contextual y conceptual, en su orden, los documentos oficiales del MEN (1998, 2006) para fundamentar cómo se entiende el pensamiento variacional en esta propuesta, seguidos del estudio realizado por Carlson et al., (2003) que permitió determinar las características del razonamiento covariacional en los estudiantes que enfrentaron la situación de variación y cambio, previamente diseñada. Además, se hace referencia a los tipos de análisis de la covariación en situaciones de proporcionalidad directa simple como lo son, el escalar y el funcional, tomados de Vergnaud (1991) y Zapata (2006) para, finalmente, referirse al uso de Geogebra como medio en la construcción de conocimiento matemático, esto fundamentado en el estudio de Villa (2010).

En el **tercer capítulo** se desarrolla la propuesta metodológica que vertebró el trabajo. Es así como se presentan el diseño de la situación, las 5 tareas que hacen parte de esta propuesta de aula para analizar y describir las características del razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado y se describen los detalles de la implementación de la situación de variación y cambio. Posteriormente se exponen los análisis de resultados donde, en detalle, se evaluaron en las respuestas de los estudiantes los diferentes comportamientos en torno al razonamiento covariacional, fundamentados en el referente conceptual Carlson et al., (2003).

En el **cuarto capítulo** se presentan las conclusiones y reflexiones que tuvieron origen en los resultados de la implementación, contrastadas permanentemente con los objetivos propuestos al inicio de la investigación seguidas de la bibliografía en donde se reúnen los diferentes referentes tenidos en cuenta para fundamentar el diseño, implementación y análisis de resultados de esta propuesta; adicionalmente se encuentran los anexos los cuales contienen el comic con el cual se adapta un aparte de la obra literaria “La vuelta al mundo en 80 días”, escrita por Julio Verne en 1872 seguido de las tareas que componen esta propuesta de aula.

Capítulo 1: Contextualización y delimitación del campo de estudio

En este capítulo se presentan los aspectos generales que dirigen el desarrollo de este trabajo, a saber: la descripción del contexto institucional en el cual se encuentra inserta la investigación, algunos antecedentes que aportan elementos importantes tanto para el diseño de la actividad de aula que se realiza como para los análisis de los resultados fruto de su implementación, la problemática de interés que da origen a la propuesta, centrada en las dificultades encontradas alrededor del desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros años de escolaridad y cómo su falta de desarrollo dificulta la transición de la aritmética al álgebra, tanto desde una perspectiva general como particular en la I.E.JMC de la ciudad de Tuluá. A partir de lo anterior se plantean entonces los objetivos que marcan el derrotero en la búsqueda de soluciones a la problemática encontrada, así como algunos elementos que justifican la pertinencia de la presente investigación. Finalmente se presenta la justificación en la cual se argumenta la importancia de abordar el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros grados de escolaridad para mejorar a largo plazo el aprendizaje de las matemáticas.

1.1 Marco contextual

Este proyecto de investigación en profundización se constituye como una propuesta que debe impactar a la I.E.JMC, de la ciudad de Tuluá, de manera efectiva y eficiente para el fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es por esta razón que se hace necesario construir una contextualización a partir de la caracterización e identificación de este Establecimiento Educativo para lo cual se toma como referencia el Proyecto Educativo Institucional - PEI.

La I.E.JMC antes La Graciela (creada mediante el decreto 1843 de septiembre 5 de 2002) está geográficamente ubicada en la zona urbana al nor-occidente de la ciudad de Tuluá, departamento del Valle del cauca, distribuida en seis sedes (4 de básica primaria y 2 de secundaria, una de ellas en media técnica), con sede principal sobre la calle 14 N° 15-00 Barrio la Campiña. Las demás sedes abarcan los cinco barrios restantes, entre estratos 1 y 2.

Esta Institución Educativa del sector oficial, mixta y de calendario A, cuenta con cuatro jornadas: mañana, tarde, única y sabatina, con los niveles de escolaridad: preescolar, educación básica (Primaria y Secundaria) y atendiendo una población de 2683 estudiantes, desde preescolar hasta grado undécimo, incluido el programa de educación sabatino por ciclos. Los estudiantes están distribuidos en 80 grupos con el acompañamiento de 92 docentes, 1 rectora y 5 coordinadores.

En la Tabla 1 se exponen las seis sedes que conforman la I.E.JMC, con la intención de dar cuenta de manera más específica su población, organización por grupos y ubicación, tal como están mencionadas en el PEI.

Nombre de la sede	Dirección	Grados	Grupos
Sede Central	Carrera 15 Calle 14 esquina Barrio La Campiña	Décimo y Undécimo	10 grupos en jornada única (5 décimos y 5 undécimos).
Sede La Graciela	Carrera 25ª No. 15-00 Barrio La Graciela	Sexto, Séptimo, Octavo y Noveno.	23 grupos (6 sextos, 5 séptimos, 6 octavos, 6 novenos)
		Programa sabatino.	Ciclo 3 (1 grupo), ciclo 4 (1 grupo), ciclo 5 (2 grupos)
Sede “John F. Kennedy”	Carrera 23 No. 16-00 Barrio Maracaibo	Transición a Quinto de Educación Básica Primaria.	12 grupos jornada mañana y tarde. (2 transiciones, 2 primeros, 2 segundos, 2 terceros, 2 cuartos, 2 quintos).
Sede “Jorge Eliécer Gaitán”	Calle 4B No. 18-15 Barrio Jorge Eliécer Gaitán	Transición a Quinto de Básica Primaria.	12 grupos jornada mañana y tarde (2 transiciones, 2 primeros, 2 segundos, 2 tercero, 2 cuarto, 2 quintos)
Sede Monseñor “Miguel Ángel Zúñiga”	Carrera 23 No. 3A-02 Barrio El Palmar	Transición a Quinto de Educación Básica Primaria.	13 grupos jornada mañana y tarde (1 aceleración, 2 transiciones, 2 primeros, 2 segundos, 2 terceros, 2 cuartos, 2 quintos).
Sede “fray Martín de Porres	Carrera 21 Calle 15 esquina Barrio La Quinta	Transición a Quinto de Educación Básica Primaria.	6 grupos jornada mañana (1 transición, 1 primero, 1 segundo, 1 tercero, 1 cuarto, 1 quinto).

Tabla 1. Distribución poblacional de la I.E.JMC de Tuluá

Esta propuesta considera oportuno exponer las características de las sedes que conforman la Institución ya que, como se nombra anteriormente, las cuatro sedes de primaria están en diferentes barrios y los estudiantes que se atienden en ellas convergen a las sedes de secundaria. Esta organización física no es el único cambio al que los estudiante provenientes de las sedes de básica primaria se deben enfrentar. Además se ven en la tarea de conocer una nueva metodología de enseñanza, ya que en la primaria es un solo docente por grupo, mientras que en Básica secundaria y Media técnica se enfrenta a docente por área. Es importante mencionar que estas tensiones invitan a pensar la planeación y el desarrollo de actividades de formación que tengan en cuenta estas situaciones para así atender a los estudiantes, no solo como participantes de un proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos, sino también en su integralidad y desde todas sus dimensiones (cognitivas, personales y sociales).

La I.E.JMC cuenta con 3 especialidades técnicas con la finalidad de responder a la solicitud de las mesas sectoriales, estas son presentadas a continuación, tomadas del PEI:

Especialidades	Subdivisión de las especialidades técnicas
Turismo	Técnico en Operación de Eventos
	Técnico en Operación de Reservas
Gestión Ambiental	Bachiller Técnico Manejo Ambiental
Salud y Seguridad en el Trabajo	Bachiller Técnico en Seguridad Ocupacional

Tabla 2. Especialidades en la media técnica en la I.E.JMC

En el marco del desarrollo de esta propuesta, se ha seleccionado la sede John F. Kennedy, JFK, centrada en el grado 5-2, compuesto por 36 estudiantes, en edades entre 9 y 11 años. Se encuentra ubicada en el barrio Maracaibo (estrato 2), y tiene en su haber una sala de sistemas dotada con 29 computadores portátiles en buen estado, para una relación aproximada de 1.24 estudiantes por computador; estos equipos soportan el software educativo Geogebra, de manera ágil, con la finalidad de potenciar el pensamiento matemático. Aunque no cuenta con internet Wifi, sí con un espacio aprovechable en actividades que requieran del uso de equipos computacionales gracias al mobiliario con el cual cuenta.

1.2 Antecedentes

A continuación se relacionan y estudian algunas investigaciones y documentos que en las últimas décadas han centrado su trabajo en el desarrollo de pensamiento variacional desde primeros años de la vida escolar hasta la educación media, de tal manera que coinciden en algunos puntos con el tema central de la presente investigación, aportando desde diferentes ángulos a la algebrización del currículo y la didáctica algebraica. Para esto se reportan en su mayoría a nivel nacional y otros internacionales. Dentro de la revisión bibliográfica realizada se han encontrado abundantes y diferentes aportes realizados desde tesis de grado doctorales, de maestrías y revistas especializadas en la didáctica de las matemáticas.

Aké (2014) se inquieta en el tipo de acciones formativas implementables en programas de formación inicial de maestros de primaria. Centra su investigación en distinguir las prácticas de índole algebraico de las que no lo son, como forma alternativa de definir los rasgos característicos

del razonamiento algebraico elemental. Para ello hace hincapié sobre la importancia de incluir contenidos algebraicos desde el inicio de la vida escolar como elemento facilitador de la transición de la aritmética al álgebra y del fortalecimiento de la actividad matemática. Así mismo clarifica la naturaleza del álgebra escolar y lo trascendental que es la cualificación del docente respecto al entendimiento del álgebra de una manera nueva para su posterior enseñanza; para ello investiga sobre qué conocimientos, incluidas comprensión y competencia, tienen los maestros acerca del Razonamiento Algebraico Elemental. Asimismo, sobre qué tipo de acciones formativas se pueden implementar en la formación inicial de maestros de primaria para desarrollar en ellos dicho razonamiento.

Dicha investigación advirtió que los futuros maestros presentan dificultades en dos aspectos: Epistémico (conocimientos común, especializado y avanzado) e Instruccional (asociado a la enseñanza), situación manifiesta en propuestas de aprendizaje y argumentaciones escuetas de los conocimientos de tipo algebraico involucrados.

Rivera (2013) en su investigación aporta elementos conceptuales y procedimentales en torno al inicio del álgebra escolar mediante el análisis del diseño y posterior implementación para grado tercero de educación básica primaria, involucrando la generalización de patrones numéricos a partir de estructuras multiplicativas, movilizand así contenidos matemáticos que potencien el desarrollo de pensamiento variacional desde la educación básica primaria.

Su investigación pudo establecer que los estudiantes que reconocen con facilidad patrones de tipo numérico, son ágiles a la hora de encontrar la variación, estableciéndose en los patrones numéricos un elemento facilitador del desarrollo del pensamiento variacional desde la primaria.

Vergel (2014) en su tesis doctoral tuvo como propósito identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria. Para ello explora la generalización de patrones gráficos y numéricos, incluyendo en este proceso a los sentidos como parte integral de los alumnos. En estos patrones tiene en cuenta diferentes acciones de los estudiantes como lo son los déicticos, llegando a concluir que las regularidades y los patrones son esenciales para el desarrollo de pensamiento algebraico.

En su propuesta destaca que los estudiantes deben reconocer las generalidades encontradas y expresarlas de otras maneras como parte de su interacción con ellas. Para ello aborda documentos

curriculares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Norteamérica (NCTM) y los propuestos por el MEN resaltando la ubicación del álgebra temprana y las opciones de incluirla desde primeros años de vida escolar. En dicha revisión encuentra que el NTCM recomienda desde la Educación Básica Primaria el diseño e implementación de actividades orientadas a la búsqueda de patrones, experiencias significativas con números y sus propiedades que faciliten el posterior abordaje y comprensión del álgebra.

Su investigación aporta conocimiento alrededor de habilidades de estudiantes de cuarto y quinto grados cuando se enfrentan a problemas de generalización de patrones y las características del pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes, invitando a seguir reflexionando en torno a la relación dialéctica de los procesos de generalización algebraica y el pensamiento algebraico, con el ánimo de enriquecer el currículo con elementos didácticos y metodológicos, evidenciada en diversas formas de abordaje de las matemáticas en el aula de clase.

Santos (2008), con el ánimo de contribuir al desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Indígena Técnica Agropecuaria en Sampués, Sucre, propone en su investigación la implementación de un proyecto pedagógico que involucre los estándares curriculares propuestos por el MEN. Es así como diseña actividades fundamentadas en situaciones cotidianas que involucren en concepto de Función Cuadrática como elemento facilitador en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Esta investigación evidenció un incremento en la motivación de los estudiantes cuando los conceptos matemáticos se asocian a resolución de situaciones problema, siempre y cuando se haga un diseño adecuado de las mismas, de manera que sirvan como puente en la construcción de conceptos matemáticos que, en el caso de la función cuadrática, permitió una progresiva apropiación del concepto acompañado de un mejoramiento en la capacidad de representar y analizar situaciones que favorecieron el desarrollo de pensamiento variacional.

Martínez (2013) en su investigación diseñó módulos didácticos e interactivos con la ayuda del software Geogebra como alternativa para el mejoramiento del proceso Enseñanza-Aprendizaje, de manera concreta en la apropiación del concepto de Función. Dicho módulo didáctico permitió tabular, graficar, tratar de forma algebraica, diferentes funciones lineales con estudiantes de grado noveno de Básica Secundaria.

Para medir la eficacia del proceso, diseñó un instrumento de evaluación para la valoración del proceso Enseñanza-Aprendizaje con la estrategia didáctica propuesta, concluyendo que debe darse mayor importancia a la enseñanza del concepto de Función, viendo ésta como representación de una ley de variación. En este proceso, encontró además que Geogebra facilita la generación de Aprendizajes Significativos gracias al sinnúmero de recursos interactivos que están al alcance de los docentes.

Cardona (2007) se propone en su investigación explorar las habilidades de pensamiento algebraico que desarrollan los alumnos de octavo grado de Educación Básica del Centro de Investigación e Innovación Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán a través de la Resolución de Problemas para determinar qué habilidades de Pensamiento Algebraico logra desarrollar.

Este estudio determinó que la resolución de problemas permitió en los estudiantes la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico para con éste expresar relaciones numéricas, describiendo y generalizando patrones numéricos pudiendo incluso construir sucesiones a partir de una regla dada.

Rincón (2015) propuso una estrategia metodológica basada en la actividad lúdica para el desarrollo de pensamiento variacional en estudiantes de Octavo grado de la Institución Educativa San Joaquín, municipio de Santa María, Huila, esto para dar respuesta a las necesidades manifestadas en la falta de habilidades algebraicas en aspectos asociados a la factorización, manejo de expresiones algebraicas, productos notables y contenidos subyacentes a estos ejes temáticos como el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor. Estas actividades lúdicas consistieron en Juegos Prácticos, Juegos Simbólicos, Juegos de Reglas.

Concluyó que los estudiantes tienen pre saberes valiosos que les permiten traducir del lenguaje natural al algebraico. Sin embargo, persisten dificultades en el tratamiento de signos y la inclusión de elementos matemáticos que no han sido resignificados.

Tavera (2013) hizo una revisión inicial de libros de texto de matemáticas regionales, nacionales e internacionales estudiando en detalle la apropiación de los Estándares Básicos de Competencias Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) presentes en sus contenidos, concretamente en el estudio de la variación en la trigonometría plana,

esto para libros de educación media y universitarios. Fue así como encontró en estos escritos la escasa presencia de actividades que aporten al desarrollo de pensamiento variacional y, en cambio, con una marcada importancia en el tratamiento de símbolos y el proceso operativo.

Resalta en su investigación la importancia de la visualización debido a su incidencia en la generalización y abstracción de patrones, por lo cual propone el uso del Geogebra como alternativa para la comprensión de algunos de los contenidos de la trigonometría plana, gracias a los fenómenos de cambio en él expuestos.

Gómez (2015) en su tesis, dirigida por Rodolfo Vergel, muestra su interés en profundizar en el análisis de producciones escritas y verbales realizadas por estudiantes de grado noveno cuando se enfrentan a tareas que involucran el pensamiento variacional. Para tal fin, realiza una revisión de la literatura nacional e internacional sobre las características de este pensamiento.

Poniendo el énfasis en el reconocimiento de qué es lo que cambia, cómo cambia y cuánto cambia, se realizó una adaptación tres tareas seleccionadas de la literatura nacional en el contexto de la variación y el cambio. Por ello referencia la definición de pensamiento variacional realizada por la política nacional en educación matemática en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), seguida de una descripción de la evolución del pensamiento variacional en la historia y haciendo una caracterización del mismo.

Continúa con el estudio de la variación desde el razonamiento covariacional, teniendo para este último como principal referente el trabajo realizado por Carlson et al. (2003), concluyendo que este marco conceptual permitió describir y analizar las características del razonamiento covariacional presentes en las producciones verbales y escritas. Concluye entonces que el uso de tareas y las simulaciones permitieron un desarrollo del pensamiento variacional, sustentado en las diferentes acciones mentales y niveles de razonamiento, propias del marco conceptual utilizado.

Villa y Vahos (2010) estudiaron cómo por medio de la interacción de un colectivo de investigadores con el software Geogebra, se generaron diversas estrategias en torno al desarrollo de pensamiento variacional. Esta investigación permitió la creación de herramientas del software para el estudio y la demostración de algunas conjeturas alrededor de algunos conceptos matemáticos.

Para tal fin, se fundamentaron en estudios previos de Borba y Villareal (2005), evidenciando que el conocimiento matemático es el resultado de una construcción colectiva pensante, con la ayuda de los medios para tal fin. Afirma también este estudio que la tecnología debe ser vista en interacción con los seres humanos, de la cual finalmente dependerán las formas en las cuales el conocimiento es producido.

Llama la atención en esta investigación, que el trabajo con Geogebra sugirió la igualdad entre la función tasa de variación y la derivada de funciones lineales y cuadráticas prescindiendo de la noción de límite; gracias a lo anterior se logró establecer una interpretación dinámica de la tasa de variación.

El trabajo de Villa y Vahos (2010) afirma que:

En el diseño de situaciones se presentaron diferentes momentos que parecen involucrarse en el desarrollo del pensamiento variacional a través del uso de un software como el Geogebra, a saber: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas. (p. 525)

Molina (2006) indaga en el proceso Enseñanza-Aprendizaje en lo referente al signo igual y las sentencias numéricas en el conjunto de los números naturales y con las operaciones suma y resta. Para esto se centró en la discusión de estrategias y respuestas que los alumnos al interior del aula daban en la resolución de igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas verdaderas o falsas con fundamento en propiedades aritméticas, para después pasar a la creación de sentencias aritméticas verdaderas o falsas por parte de los alumnos.

Lo anterior le permitió conocer diferentes maneras como los estudiantes afrontan los retos matemáticos en el aula, los diferentes tipos de comprensión los tipos de pensamiento empleados y los aprendizajes obtenidos. Es por esto que aborda el uso y desarrollo de pensamiento relacional en conjunto con los significados del signo igual que los estudiantes ponen de manifiesto.

Este estudio fue realizado con un grupo de alumnos cuyas edades oscilaron entre 8 y 9 años partiendo de la comprensión operacional del signo igual, pasando por las dificultades encontradas en el proceso y continuando con momentos posteriores a su comprensión.

Henao (2012), tesis dirigida por Villa, Universidad Nacional seccional Medellín, evalúa el nivel de razonamiento covariacional conforme a la propuesta de Carlson (2003), en estudiantes de grado

quinto de la Institución Educativa República de Uruguay, donde las clases de matemáticas predominantes eran de tipo expositivo.

Para este estudio se recurrió a las regletas de Cuisenaire con la intencionalidad de mostrar que, aunque sean un material estático, pueden ser mediadoras en el trabajo variacional por medio del reconocimiento de sus longitudes, las comparaciones y la construcción de relaciones, esto con el acompañamiento de preguntas que inviten a la realización de conjeturas que permitan la detección de secuencias, patrones o regularidades que aparezcan de manera constante.

Se encuentra como punto en común entre los diferentes investigadores en Educación Matemática, fuera y dentro del país, que debe aportarse al currículo, atendiendo la invitación del MEN a no hacer la enseñanza del álgebra exclusiva de un grado en particular. Es así como estas investigaciones reportadas dejan ver la importancia de contribuir el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros años de vida escolar, no limitando éste al tratamiento de expresiones matemáticas y/o símbolos, sino en la búsqueda de nuevas formas de llevar las matemáticas al aula.

En este sentido, Geogebra permite establecer conexiones entre los diferentes sistemas de representación gráficos, numéricos, tabulares y simbólicos de maneras muy enriquecedoras para la construcción del conocimiento matemático, de manera particular para el pensamiento variacional gracias a la dinamicidad que puede explorarse en este software cuando se proponen a los estudiantes situaciones de variación y cambio.

1.3 Delimitación de la problemática de estudio

En el campo de la educación matemática ha venido siendo objeto de estudio en las últimas décadas la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Es así como se encuentran diversas investigaciones realizadas por Kieran y Yagüe (1989), Kaput (1998), Cantoral (2001), Vasco (2006), Valoyes y Malagón (2006), Castro Molina (2007), Villa y Vahos (2010), Socas (2011), Godino (2012), Aké (2014), Gómez, Orozco, Realpe, Benavides, Navarro, Guacaneme (2012) y Vergel (2014), entre otros, que expresan diferentes obstáculos encontrados en el álgebra como objeto de enseñanza y donde entran en juego tanto profesores como estudiantes. Muchas de estas investigaciones hacen foco en la transición de la aritmética al álgebra, donde si bien hay un cúmulo

de obstáculos y errores, también se encuentran grandes oportunidades de potenciar el aprendizaje de esta última.

Kieran (1989, 1992), citado por Godino (2012) afirma que las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra están asociadas con los acentos puestos en el significado de las letras y el cambio de convenciones entre la aritmética y el álgebra donde se pone lo sintáctico por encima de lo semántico, quedando el álgebra restringida al lenguaje simbólico y a la resolución de ecuaciones, priorizando en la obtención de un resultado numérico y descuidando en ocasiones sus aspectos conceptuales y conexiones con otras áreas del conocimiento. En este sentido, García (2013) hace referencia a que la matemática escolar se hace de una manera masiva, descontextualizada y algoritmizada, situación que no necesariamente está ligada al desarrollo de pensamiento matemático. Así mismo, Cantoral (2001) afirma que en la enseñanza de las matemáticas no se tienen en cuenta elementos como la motivación, la imaginación, la afectividad, el lenguaje y la capacidad de representación.

La enseñanza de las matemáticas desde lo fundamentalmente operacional, conocida por la comunidad académica como *aritmética generalizada* es caracterizada por Valoyes y Malagón (2006) como una manera de continuar la aritmética donde la función de la fórmula algebraica se limita a la realización de un cálculo dejando de lado la representación de objetos matemáticos. Junto a lo anterior, las situaciones planteadas a los estudiantes están pensadas únicamente para el campo numérico, generándose distanciamiento con dichos objetos.

En este sentido, ha habido de manera recurrente un interés especial en el tratamiento de símbolos sin un sentido claro para los estudiantes quienes terminan manipulando de la misma forma a los objetos algebraicos que aparecerán más adelante. En este aspecto, la concepción unidireccional del signo igual en la básica primaria tiende a continuarse en el trabajo con ecuaciones dentro del álgebra, donde permanece la tendencia a buscar un resultado, por lo general al lado derecho de la ecuación.

La manipulación mecánica de símbolos tanto para la aritmética como para el álgebra, podría contribuir a lo encontrado por Doorman y Gravemeijer (citado por Villa, 2010), quienes afirman que un gran número de dificultades que presentan los estudiantes en los cursos de cálculo tienen

sus génesis en la escasa familiarización con la construcción de modelos, propósitos, convenciones, formas de representación en las situaciones representadas y problemas a resolver.

La experiencia docente en la I.E.JMC muestra cómo tradicionalmente el estudio del álgebra se deja para unos años en particular, por lo general para grado octavo, trabajándose muy poco el desarrollo de pensamiento variacional debido a que en primaria la enseñanza se centra en la aritmética, en el aprendizaje de los algoritmos, operaciones básicas y propiedades y construcción del concepto de número y donde, por lo general, la experiencia del docente de educación básica primaria con el álgebra se limita a aquella que tuvieron como estudiantes de la educación básica secundaria y media. En este sentido, Aké (2014) afirma que los docentes de primaria han conceptualizado el álgebra como un conjunto de elementos para factorizar, simplificar expresiones, resolver ecuaciones, entre otros usos, sin una apropiación de un sentido y significado más amplio, lo cual les propone grandes dificultades para movilizar formas asociadas al pensamiento algebraico desde edades tempranas. Esta mecanización podría generar que continúen siendo centro de atención las técnicas de despeje de una variable y el tratamiento de expresiones dentro del sistema de representación simbólico-algebraico. De esta manera se desconoce el papel fundamental del álgebra como actividad de modelación de fenómenos de variación y cambio.

El MEN, mediante los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) propone el inicio del desarrollo del pensamiento variacional como un logro para alcanzar en la educación básica primaria, desde los primeros grados de escolaridad, lo que implica, entre otras cuestiones, dejar de lado la enseñanza por contenidos para pasar a una matemática escolar que permita analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de variación y cambio en diversos contextos, lo cual permita que el estudiante vaya construyendo poco a poco una visión amplia de la variación y de la idea de variable como una forma de representar dicha variación.

En sintonía con el MEN al proponer el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros años de escolaridad, las pruebas externas que presentan los estudiantes colombianos apuntan a evaluar sus desempeños, entre otros aspectos, en este asunto. Lo anterior se logra apreciar en cierto modo en la Tabla 3, en donde se presentan las 11 primeras preguntas de índole numérico variacional que se propusieron en las pruebas Saber 5 del año 2014.

POSICIÓN	COMPONENTE	COMPETENCIA	AFIRMACIÓN	CLAVE
1	GEOMÉTRICO	RAZONAMIENTO	Identificar y justificar relaciones de semejanza y congruencia entre figuras.	D
2	ALEATORIO	RESOLUCIÓN	Resolver problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando diferentes representaciones	D
3	NUMÉRICO-VARIACIONAL	COMUNICACIÓN	Reconocer significados del mundo en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros)	B
4	NUMÉRICO-VARIACIONAL	RESOLUCIÓN	Resolver y formular problemas aditivos de transformación, comparación, combinación e igualación	A
5	GEOMÉTRICO	RAZONAMIENTO	Construir y descomponer figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas	A
6	ALEATORIO	COMUNICACIÓN	Clasificar y organizar la presentación de datos	A
7	NUMÉRICO-VARIACIONAL	COMUNICACIÓN	Describir e interpretar propiedades y relaciones de los números y sus operaciones	D
8	NUMÉRICO-VARIACIONAL	RESOLUCIÓN	Resolver y formular problemas de proporcionalidad directa e inversa	D
9	NUMÉRICO-VARIACIONAL	COMUNICACIÓN	Reconocer significados del mundo en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros)	B
10	ALEATORIO	RAZONAMIENTO	Comparar datos presentados en diferentes representaciones	B
11	NUMÉRICO-VARIACIONAL	RAZONAMIENTO	Justificar el valor posicional en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades	C

Tabla 3. Componente por tipo de pensamiento matemático, prueba saber 5, año 2014

Nótese en la Tabla 3 cómo 6 de las 11 primeras preguntas (negritas puestas por los investigadores) evalúan el componente numérico variacional. Esto muestra de manera evidente que es el pensamiento variacional debe promoverse desde la educación básica primaria, por lo que en la planeación de clase de los maestros se deben incluir intervenciones que permitan su desarrollo.

Aunque esta propuesta de investigación no tiene como finalidad el mejoramiento en los resultados de las pruebas saber, se considera que favorecer el desarrollo de pensamiento variacional podría repercutir positivamente en los resultados en pruebas externas. Para ello se considera importante intervenir buscando alternativas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas, no solo desde lo curricular, sino también desde la práctica misma, involucrando la tecnología desarrollada para tales fines.

En este sentido, el MEN propone incorporar las nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas en la Escuela como parte de una nueva cultura informática y reconociendo su potencial formativo. Es así como Vasco (2003) afirma que las reinterpretaciones dinámicas de representaciones gráficas y tabulares por medio de pantallas computacionales, es una de las maneras como puede desarrollarse el pensamiento variacional. Esto implica entonces, cambios metodológicos que, a diferencia de estilos tradicionales, permitan una interacción directa de los estudiantes con las herramientas tecnológicas.

Desde esta perspectiva, este trabajo tiene la intención de dar respuesta a la invitación del MEN y ser activa y propositiva mediante una propuesta metodológica consistente en el diseño de una situación de aprendizaje aprovechando los desarrollos en las maneras como los estudiantes aprenden las matemáticas como es el caso de tecnologías computacionales como el software Geogebra, de tal forma que pueda servir como puente desde la aritmética hacia la actividad algebraica.

Para Cantoral (2013):

La enseñanza no recurre a las estrategias de visualización como una actividad con verdadero “status matemático” y los conceptos se manejan de una manera más bien formal. El conocimiento matemático, entonces, se presenta en forma abstracta, sin base empírica, lo que produce en los alumnos una serie de dificultades que inhiben el aprendizaje. (p. 17)

Adicionalmente, afirma:

La expresión cambio se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo variación la entendemos como cuantificación de dicho cambio. No obstante, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos. (p. 45)

Conforme a lo anterior, la visualización podría ser un elemento potente a la hora de dotar de sentido y significado a las diferentes situaciones matemáticas propuestas en el aula, permitiendo un diálogo del estudiante con las representaciones visuales que las herramientas tecnológicas permiten representar y comunicar la variación, uno de ellos, el gráfico.

Con la intención de analizar el pensamiento variacional y, específicamente, cómo los estudiantes enfrentan situaciones de variación y cambio de tal manera que la predicción sea una herramienta para la construcción de conceptos matemáticos, en este trabajo de investigación se busca identificar algunos rasgos del razonamiento covariacional que presentan un grupo específico de estudiantes de quinto grado de la educación básica, para lo cual se genera una propuesta de aula en la que interviene el software Geogebra de tal modo que el dinamismo en la situación sea un aspecto central. A partir de estas consideraciones surge la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las características del razonamiento covariacional que se presentan en un grupo de estudiantes de quinto grado de la IE Juan María Céspedes de Tuluá cuando enfrentan una situación de variación y cambio mediada por Geogebra?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Describir y analizar las características de razonamiento covariacional que se presentan en un grupo de estudiantes de quinto grado de la IE Juan María Céspedes de Tuluá cuando enfrentan una situación de variación y cambio mediada por Geogebra.

1.4.2 Objetivos específicos

- Documentar desde los referentes curricular y didáctico propuestas conceptuales y metodológicas para el desarrollo de razonamiento covariacional desde los primeros grados de escolaridad.
- Articular los referentes estudiados, en el diseño de una situación que tome en consideración la variación y el cambio para estudiantes de quinto grado de la Institución Juan María Céspedes de la ciudad de Tuluá.

- Identificar algunas características asociadas al razonamiento covariacional que se presentan en un grupo de estudiantes de quinto grado de la I.E.JMC cuando enfrentan una situación mediada por Geogebra que implique el estudio de la variación y el cambio.

1.5 Justificación

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), la formación matemática escolar debe otorgarle a los estudiantes herramientas fundamentales para la comprensión de mundo en el cual se encuentran. Es por ello que la formación en esta área de conocimiento debe involucrar decididamente la apropiación de conceptos y habilidades matemáticas que, junto con la maduración del lenguaje propiamente matemático, redunden en la resolución y planteamiento de problemas en diferentes contextos, el razonamiento, la modelación, comunicación, entre otros; de tal modo que paulatinamente se vaya madurando las formas en cómo los estudiantes van actuando y entendiendo el mundo que los rodea.

Desde esta perspectiva, el MEN (1998, 2006) invita a dinamizar el ejercicio docente hacia el desarrollo de formas de pensar matemáticamente, para lo cual es necesario avanzar en el desarrollo de los pensamientos numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional, siendo este último transversal a los demás, pues el estudio de fenómenos de variación y cambio, fundamental para el desarrollo de este pensamiento, se puede abordar, tal y como lo señala Vasco (2006), en relación mutua con cualquiera de los otros cuatro pensamientos.

Sin embargo, esta articulación entre el pensamiento variacional y los demás modos de pensamientos matemáticos es, con gran frecuencia, un escenario poco explorado por los maestros, incluso, su mismo desarrollo es relegado del trabajo de aula en los primeros grados de escolaridad, puesto que por lo general su estudio suele ser considerado en los cursos finales de la Educación Básica (finales de séptimo grado e inicios de octavo grado); tal situación puede deberse quizá a la falta de formación de los docentes de la educación básica primaria que los faculte con elementos para promover este pensamiento desde los primeros ciclos de escolaridad, o por las condiciones propias del currículo escolar. Desde esta perspectiva cobra sentido el llamado que Kaput (1998) hace para trabajar en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental desde niveles iniciales en la escuela, para, de esta manera, construir alternativas diversas de aproximarse paulatinamente

al aprendizaje con sentido del tratamiento algebraico y el cálculo diferencial en la educación básica secundaria y media.

Diversos investigadores en educación matemática han acentuado en la importancia del desarrollo de pensamiento variacional y sistemas algebraicos desde primeros estadios de la educación básica. Entre ellos Godino y Font (2003) son claros en que no se trata de implementar el álgebra desde la educación básica primaria pero sí de favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. Por su parte, Garriga (2011) presupone que la enseñanza del álgebra alcanza notables rendimientos de conocimiento de tipo procedimental, seguramente porque es al que más tiempo se le dedica en la escuela. De allí la importancia de incursionar en el plano del Pensamiento Variacional, más allá del adiestramiento en la manipulación sintáctica.

Es por esta razón que desde los primeros años de escolaridad hay que trabajar en el desarrollo de modos de pensar y actuar conforme a las situaciones del mundo real donde predomina la dinamicidad, en las cuales el pensamiento variacional comienza a cobrar sentido. Esto implica centrar la atención en la variación y el cambio en contextos de diferente índole, como las ciencias naturales, la experimentación, las ciencias sociales y las matemáticas. En estas últimas, se encuentra una estrecha relación con los otros pensamientos como el métrico, el numérico, el estocástico y el espacial, todos ellos dando herramientas para la cuantificación de la variación.

Respecto a la variación, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) sugieren:

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica (...) (p. 73)

Debido a que este es un trabajo que no recoge frutos de manera espontánea, debe hacerse de una manera procesual donde el docente genere escenarios en los cuales el estudiante pueda pensar dichas situaciones, de tal forma que surja la necesidad de representar aquello que cambia. Por ello la necesidad de generar propuestas de aula que centren su atención en el desarrollo de pensamiento variacional desde la educación primaria, algunas de ellas aprovechando los recursos tecnológicos con los que cuenta la Escuela, que le permita trabajar en esta nueva visión del trabajo algebraico y así generar actividades, situaciones, preguntas en función del pensamiento variacional que se piensa desarrollar.

En este proceso de creación de nuevas formas de entender el mundo cambiante, en la básica primaria se pueden madurar la variación y la covariación con la ayuda de los ambientes gráficos dinámicos que brinda la tecnología actual por medio de software o calculadoras gráficas que facilitarían, para etapas posteriores de la vida escolar, los procesos de visualización, la dinamicidad de los fenómenos para su estudio y la emergencia del sistema simbólico, para así representar y comunicar esas cantidades cambiantes, cobrando sentido el álgebra y en ella, el pensamiento algebraico.

En esta integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) el maestro debe hacer un esfuerzo de adaptación importante al contexto actual donde interprete su nuevo rol de facilitador del conocimiento por encima de la instrucción del mismo. Ello implica ver la presencia permanente de la tecnología como una oportunidad de aprender y enseñar las matemáticas de forma novedosa, enlazando distintos modelos y representaciones matemáticas.

Sin desconocer el alto valor formativo de la geometría de lápiz y papel, las nuevas tecnologías con las que hoy cuenta la Escuela pueden ayudar a potenciar los diferentes tipos de pensamiento matemático para lo cual el docente en su propuesta de enseñanza puede aprovechar un recurso digital e interactivo como el software educativo Geogebra, que permitiría planear y desarrollar actividades que resalten la importancia de los aspectos dinámicos de la matemática y el papel del software en la reproducción de esta dinamicidad. Por consiguiente, pueden estudiarse de nuevas maneras los fenómenos de variación y cambio y las relaciones variacionales existentes entre diferentes objetos matemáticos. Al respecto, Villa (2010) afirma:

Hemos observado en nuestras investigaciones cómo en el desarrollo del pensamiento variacional se involucran procesos de experimentación con software, a partir de los cuales, tanto estudiantes como investigadores, visualizan, generalizan y abstraen relaciones y propiedades de los objetos matemáticos estudiados. (p. 3)

Por lo anterior, involucrar las nuevas tecnologías en el aula de clase puede contribuir la apropiación de conocimientos matemáticos, que por su abstracción, no son accesibles en el aula tradicional; esta interacción con la tecnología permite desarrollar un diálogo del estudiante con el Geogebra a través del lenguaje matemático, situación que permite en el estudiante un diálogo permanente con la variación y el cambio.

Debido a que el Geogebra es un software orientado a la enseñanza y resolución de problemas matemáticos mediante gráficos interactivos, se posibilita el desarrollo del razonamiento covariacional gracias a la dinamicidad brindada por los deslizadores, herramienta del software que permite modificar los parámetros de la variable independiente para ver de manera instantánea la variación generada en la variable dependiente. Estas variaciones simultáneas podrían repercutir de manera positiva en el desarrollo del razonamiento covariacional apuntando a la construcción del pensamiento variacional desde los primeros años de la vida escolar.

Sin embargo, como la finalidad no es el uso del recurso en sí mismo sino contribuir el razonamiento covariacional, es importante, tal como lo dice Vasco (2003):

Que la actitud del docente no sea la del deslumbramiento y la exageración, sino la de la apropiación laboriosa y creativa, la investigación cognitiva, socio-afectiva y evaluativa seria y permanente y la de la reserva crítica que acompañe el entusiasmo y la diversión que permite el uso de estas tecnologías, especialmente en el desarrollo de pensamiento variacional y de las capacidades de modelación matemática por parte de los estudiantes de todos los grados escolares. (p. 13)

Teniendo en cuenta que la variación es un componente esencial del pensamiento variacional, potenciando la apropiación de elementos conceptuales que lleven a la generalización y la modelación, este trabajo aprovecha la manipulación y la visualización en un ambiente dinámico, propios de Geogebra, para el desarrollo de pensamiento variacional mediante el ejercicio pensado y reflexionado de la actividad docente. De esta manera se espera que los resultados arrojados por esta propuesta de investigación afecten el currículo, dando mayor importancia al pensamiento variacional desde primeros años de la vida escolar.

Capítulo 2: Referentes curricular y conceptual

Este capítulo se presenta el referente conceptual en el estudio del razonamiento covariacional que sirve de soporte a esta situación de variación y cambio mediada por Geogebra. Se inicia con una contextualización curricular, teniendo como referencia documentos del MEN y en relación con el pensamiento variacional abordado en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Seguidamente se referencia la propuesta trabajada conjuntamente por Carlson et al.,(2003) donde se desarrolla lo que se entiende como razonamiento covariacional y se propone un marco conceptual para describir las acciones mentales que se ponen en juego en el estudio de eventos dinámicos. Finalmente, se expone el papel de Geogebra en la modelación de situaciones de variación y cambio, para lo cual se toman los aportes de Villa (2010) y Vitabar (2016).

2.1 Referente Curricular

Al emprender esta propuesta de investigación como una forma de contribuir al desarrollo pensamiento matemático en los estudiantes desde el ámbito escolar, se hace necesario presentar los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos en Competencias (MEN, 2006), a partir de su sentido pedagógico, no solo como una propuesta del MEN, sino como una referencia que fundamenta y da sentido a la práctica del docente de matemáticas de la educación básica y media.

Dentro de la organización curricular, se hace necesario definir el concepto de Currículo en el ámbito educativo. Para Rico (2014), el currículo debe ser considerado como una herramienta profesional que brinda estructura conceptual de naturaleza dinámica. En él se planifican las propuestas educativas insertas en un contexto para su implementación y permanente evaluación.

La anterior definición toma fuerza en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los cuales se presentan como un referente para orientar a las instituciones educativas en el diseño y desarrollo curricular dentro de su PEI, reflexionando sobre la naturaleza del área y sus implicaciones pedagógicas, así como en nuevas formas de ver el conocimiento matemático escolar y las diversas maneras de organizar el currículo y la evaluación.

La propuesta curricular presenta, en cuanto a la formación matemática básica, un énfasis en potenciar el pensamiento matemático mediante la apropiación conceptual asociada a ciertos sistemas matemáticos que apunten al desarrollo de diferentes tipos de pensamiento. En este sentido, Sistema (MEN, 1998), corresponde a la riqueza conceptual acompañando el desarrollo de las matemáticas, en las cuales el estudiante interactúa con sistemas y no como conjuntos. Para ello se deben enseñar con un enfoque sistémico de las diferentes regiones de las matemáticas como los números, las medidas, la estadística, la geometría y la lógica y conjuntos. Estos sistemas son fundamentalmente de tres tipos: simbólicos (escribir, pintar, hablar), conceptuales (construido mentalmente) y concretos (Vasco, 1985).

Se entenderá el conocimiento matemático, conforme a la política educativa nacional, como una actividad social que brinda múltiples respuestas a los diferentes intereses que emergen en el mundo

cambiante, y en el cual su importancia se encuentra en el sentido al quehacer cotidiano donde las matemáticas sean una herramienta intelectual potente.

De esta manera, con la ayuda de un lenguaje común, los diferentes contenidos matemáticos de la educación básica y media fueron unificados como manera de contribuir a la enseñanza de las matemáticas en el aula y donde se evidencia la importancia de desarrollar el pensamiento variacional a través de la identificación de patrones para una posterior generalización, interés presente en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), en particular, para grado quinto de Educación Básica Primaria, donde se desarrolla esta propuesta.

2.1.1 El pensamiento variacional en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas consideran tres elementos organizadores del currículo:

- *Los Conocimientos Básicos*, entendidos como procesos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, procesos específicos relacionados con el desarrollo de los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio o probabilístico y el variacional.
- *Los Cinco Procesos Generales*, asociados al aprendizaje, como son el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- *El Contexto*, elemento del currículo que está relacionado con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Comprende variables como las condiciones sociales y culturales, tanto locales como internacionales, tipos de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, las condiciones concretas del grupo social en que se concreta el acto educativo. Lo anterior, como elementos que deben tenerse en cuenta en el diseño y posterior ejecución de experiencias didácticas.

Respecto a la organización del currículo, este se propone por medio de procesos generales de pensamiento cuyo desarrollo puede favorecerse desde la actividad matemática en la escuela con los conocimientos básicos que sirven de soporte disciplinar para su desarrollo (MEN, 1998). De esta manera los conocimientos básicos se presentan involucrando cinco tipos de pensamiento con sus respectivos sistemas matemáticos.

- Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.
- Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.
- Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas.
- Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos.
- Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.

Los Lineamientos Curriculares colombianos, dentro del campo conceptual, posicionan el pensamiento variacional teniendo en cuenta conceptos y procedimientos en contextos donde la variación es determinante. Lo anterior establece relaciones con elementos organizativos del currículo, fomentando el desarrollo de pensamiento variacional desde los primeros grados de escolaridad cuando en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) se afirma:

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucre conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (p. 49)

En este acercamiento inicial se hace un abordaje de los núcleos conceptuales matemáticos en los que interviene la variación, como son: El continuo numérico, la función como dependencia y modelos de función, las magnitudes, el álgebra en su sentido simbólico y los modelos matemáticos de tipos de variación.

De esta manera, el aprendizaje de las estructuras conceptuales del pensamiento variacional se desarrolla en el tiempo de manera paulatina aumentando su nivel de complejidad donde, con

nuevas situaciones problemáticas, se pueda enriquecer lo aprendido hasta llegar a nuevas conceptualizaciones de las matemáticas.

Durante esta evolución del pensamiento variacional van apareciendo los diferentes sistemas de representación como los enunciados verbales, las tablas, las gráficas cartesianas y sagitales, las representaciones pictóricas o icónicas hasta llegar a las fórmulas y expresiones analíticas.

Debido a que el desarrollo de pensamiento variacional es un proceso que se da en el tiempo de manera lenta y compleja debe ser iniciado de manera temprana en el currículo de las matemáticas, conforme a los Lineamientos, con la ayuda de escenarios donde aparezcan situaciones problemáticas que involucren fenómenos de variación y cambio que se presenten en la cotidianidad.

Respecto al inicio en el desarrollo de este pensamiento, la organización de la información en tablas puede permitir la identificación de patrones, y en ellos, de la variación, permitiendo la descripción verbal de la relación existente entre las dos cantidades. Esto debe llevarse a cabo con los niveles de profundidad en la aritmética propios del nivel en que se estudia; la ayuda de herramientas tecnológicas como software matemáticos diseñados para tales fines o las calculadoras numéricas, permitirán la visualización gráfica, lo que se hará solo para el primer cuadrante debido al conjunto numérico propio del grado escolar en el cual se desarrolla esta propuesta.

A continuación se presenta la interacción del pensamiento variacional con los demás tipos de pensamiento matemático:

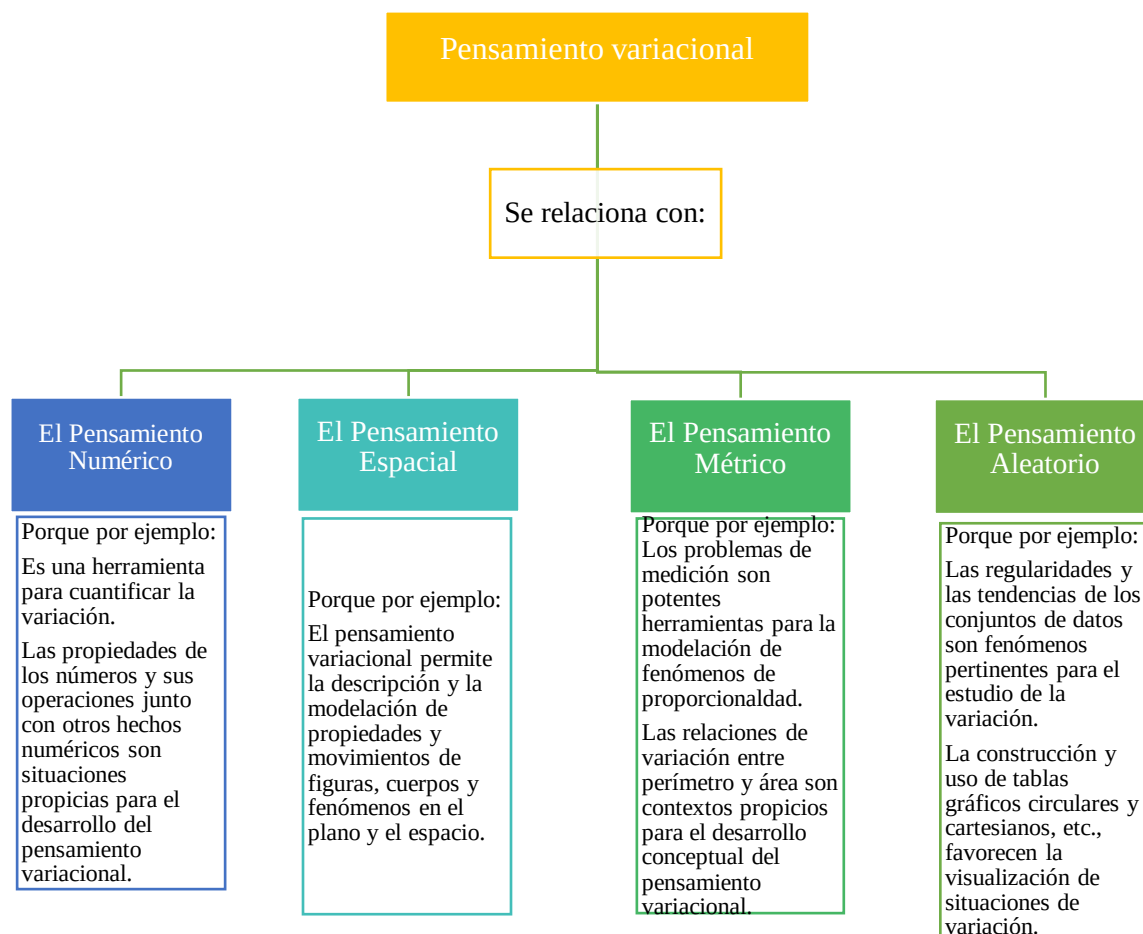


Ilustración 1. Relaciones del pensamiento variacional con los demás tipos de pensamiento matemático, tomado de Valoyes y Malagón, (2006), p.118.

La figura anterior presenta las relaciones entre el pensamiento variacional y los demás tipos de pensamiento, propuestos por los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998). Se evidencia que el desarrollo del pensamiento variacional desde la Básica Primaria, integrando los tipos de pensamiento y procesos matemáticos, tiene una movilización intencional que lo favorezca desde diferentes contextos como el numérico, el métrico, el espacial y el aleatorio.

En ellos se le apuesta a la articulación del quehacer matemático escolar, su enseñanza y cuáles procesos favorecen su aprendizaje. Además, cómo vincular lo anterior con la cotidianidad y las diferentes disciplinas y culturas teniendo la intencionalidad de que las matemáticas escolares sean socialmente útiles.

2.1.2 Estándares Básicos de Competencias

Este documento se articula íntimamente con la propuesta curricular antes planteada en los Lineamientos Curriculares pero además, incluyendo un marco metodológico que haga las veces de soporte para propuestas curriculares del área de matemáticas, con la inclusión de niveles de calidad. Se reta al educador a ser creativo y conocedor de las realidades de sus estudiantes y un diseñador de estrategias pedagógicas apuntando hacia los siguientes procesos generales:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas,
- Utilizar diferentes registros de representación,
- Argumentación y justificación y
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos

Lo anterior, posiblemente como una reformulación de los procesos matemáticos contemplados en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998).

Este documento reafirma la trascendencia del pensamiento variacional en el estudio de la variación y el cambio involucrándola en diferentes contextos donde se analice cualitativa y cuantitativamente en procesos de modelación, generalización de patrones y relaciones y resolución de problemas.

Es importante dentro de los estándares el estatus que recibe el pensamiento variacional, situación manifiesta en la relación con los otros tipos de pensamiento matemático en torno a la construcción del concepto de función, en la cual el pensamiento numérico permite evaluar la variación y el cambio.

En este sentido, los sistemas algebraicos, propuestos en los estándares, llevan a ver el potencial del álgebra en la descripción de la variación y el cambio. Debido a que los sistemas de representación permiten destacar las particularidades de una situación matemática, contribuyen a la construcción y comprensión del concepto de variación.

Es así como aparecen los patrones y las regularidades como herramientas conceptuales desde el grado cuarto con el apoyo de herramientas didácticas que permitan al estudiante la apropiación

de fenómenos de variación y cambio, para de esta manera llegar o aproximarse a la predicción de situaciones.

En la propuesta de favorecer el desarrollo del pensamiento variacional desde la básica primaria, los Estándares Básicos en Competencias (MEN, 2006), presentan la importancia de atender a una propuesta de enseñanza que tenga en cuenta los grados de complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas. Es por esta razón que se aprovecha la oportunidad de atender a la coherencia vertical, entendida como aquella relación existente entre los estándares del mismo pensamiento para los diferentes conjuntos de grados, y a la coherencia horizontal que se refiere a la relación de los estándares en diferentes tipos de pensamientos para un mismo conjunto de grado.

Conforme a lo anterior esta investigación pretende contribuir no solamente el aprendizaje de las matemáticas para grado quinto sino posibilitar, gracias al desarrollo de pensamiento variacional, aprendizajes posteriores relacionados con el álgebra y los sistemas algebraicos, conforme a las coherencias vertical y horizontal expuestas anteriormente.

Respecto a la propuesta de aula, diseñada para quinto grado de educación básica primaria, se contemplan tres estándares de pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos propios del ciclo cuarto a quinto, como punto de referencia para el diseño e implementación de la propuesta de aula. Estos estándares son:

- Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos.
- Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.

Teniendo en cuenta que el aumento en la complejidad conceptual está relacionado con el avance en el recorrido escolar, tanto en los aspectos formales de la disciplina como en los procesos generales de la actividad matemática, se presentan los estándares escogidos para el desarrollo de esta propuesta, teniendo en cuenta las coherencias vertical y horizontal por medio del siguiente esquema:

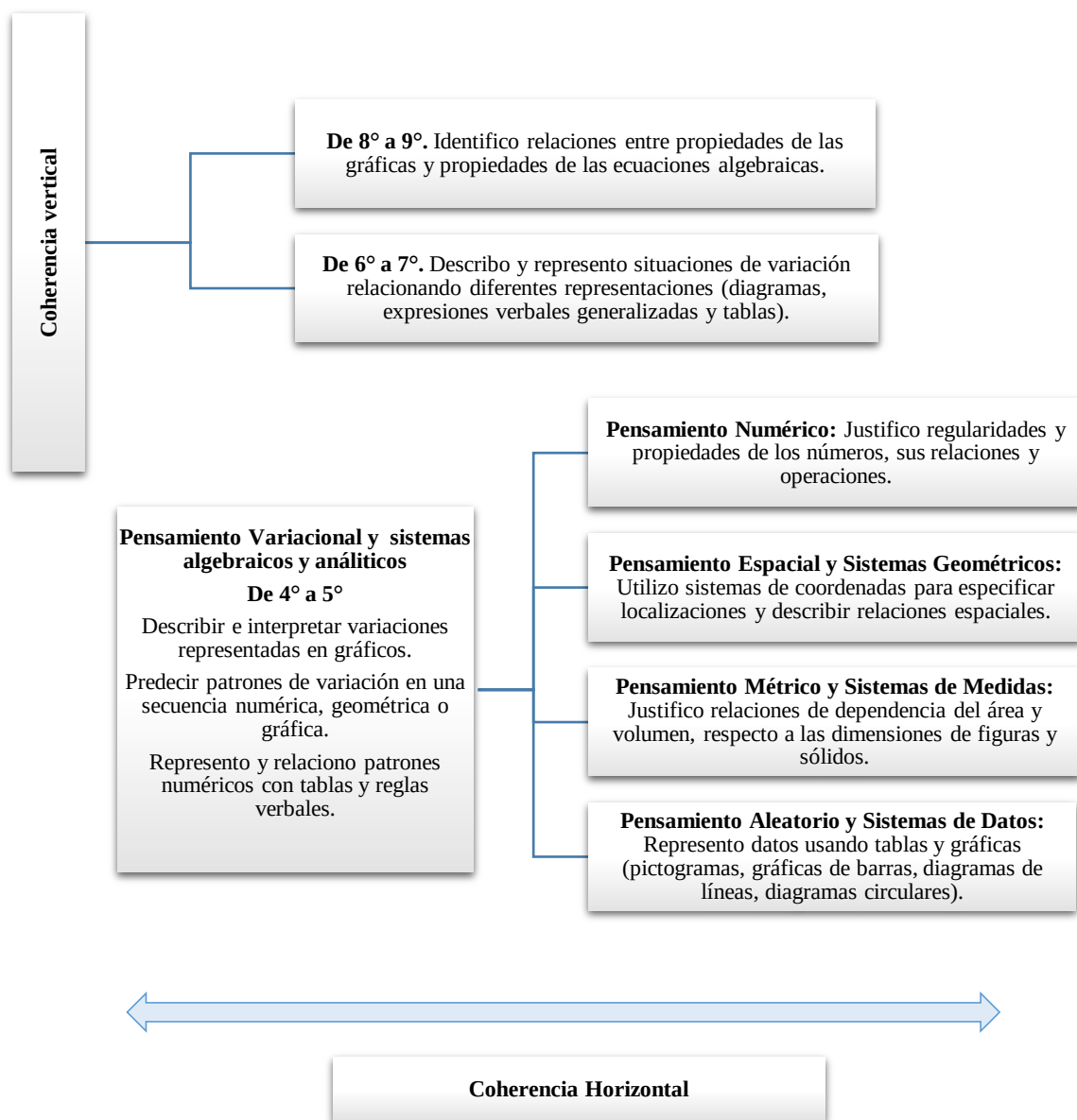


Ilustración 2: Coherencias vertical y horizontal para los estándares seleccionados en el diseño e implementación de la situación de aula.

Puede apreciarse en el anterior esquema que el pensamiento variacional, dentro de la coherencia horizontal, se encuentra relacionado con otros pensamientos como el numérico, el métrico, el espacial y aleatorio mediante el uso e interpretación de tablas, en las cuales puede darse la identificación de patrones para así favorecer inicio y posterior desarrollo del pensamiento algebraico.

Los estándares seleccionados aportan al diseño debido a que pueden representarse de manera dinámica por medio del Geogebra, el cual podría ayudar a determinar cómo los estudiantes se desenvuelven en situaciones de variación y cambio, entrando en acción de manera simultánea las tablas y los gráficos. Lo anterior direccionado hacia la identificación de patrones con la ayuda de las tablas, para así hacer una aproximación a la construcción del concepto de función y dentro de ella el de magnitud.

2.2 Referentes didácticos

2.2.1 Razonamiento covariacional

Con la intención de identificar las características del razonamiento covariacional que presentan estudiantes de un grupo de grado quinto cuando se enfrentan a una situación de variación y cambio mediada por Geogebra, se presenta el trabajo de Carlson et al.,(2003), donde dicho razonamiento se aplica a la modelación, desarrollando la noción de razonamiento covariacional; en él se propone además un marco conceptual que describe las acciones mentales involucradas al aplicar dicho razonamiento en eventos dinámicos.

Este trabajo presenta unas tareas enmarcadas en una situación de covariación que permitan identificar los comportamientos² de los estudiantes cuando se enfrentan a actividades de covariación. Por tal motivo es necesario definir qué se entiende por razonamiento covariacional desde el referente didáctico de esta propuesta.

Carlson et al.,(2003) definen el razonamiento covariacional como *“las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra”*. En este referente se tienen en cuenta cinco acciones mentales con sus comportamientos asociados y niveles de desarrollo del razonamiento covariacional, en el cual se requiere de la construcción de imágenes³ de dos variables, que para

² Los comportamientos aquí mencionados, citados por Carlson et al., (2003) fueron identificados por Carlson (1998) en un trabajo anterior realizado con estudiantes de pregrado cuando enfrentaban tareas de interpretación y representación de funciones asociadas a situaciones dinámicas.

³ De acuerdo con Thompson (1994), citado por Carlson et al., (2003), una imagen madura de razón involucra lo siguiente: la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades. En esta teoría, las imágenes de

esta propuesta son el tiempo y la distancia recorrida en dicho tiempo, de manera que el estudiante identifique los cambios simultáneos en ellas caminando hacia la construcción de una nueva magnitud.

Para estudiar didácticamente el razonamiento covariacional e identificar sus características en los estudiantes que involucra esta propuesta, se tendrá en cuenta el referente didáctico, que propone un marco conceptual asociados a acciones mentales y comportamientos en conjunto con los niveles de razonamiento covariacional, para una situación en particular de tipo covariacional.

A continuación se presenta las acciones mentales inscritas en el marco de la covariación y que permiten la identificación de las habilidades de los estudiantes en este tipo de razonamiento al enfrentarse a la tarea propuesta.

2.2.1.1 Las acciones mentales dentro del marco conceptual de la covariación

Como imágenes de covariación, proveen un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de covariación. El análisis de este conjunto de acciones mentales y comportamientos permite determinar la habilidad de razonamiento covariacional de un estudiante para una tarea en particular. Para describir las acciones mentales y sus respectivos comportamientos, se presenta la siguiente tabla:

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

covariación se consideran como algo que se desarrolla y tal desarrollo pasa de la coordinación de dos cantidades a las imágenes de la coordinación continua de ambas cantidades para un lapso determinado.

AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla 4. Acciones mentales en la covariación (Tomado de Carlson, et al., 2003, p. 128)

Conforme a la tabla anterior, un estudiante se encuentra en un nivel determinado cuando sustenta las acciones mentales asociadas a ese nivel, dando cuenta también de las anteriores en el contexto de la tarea.

A partir de la Acción Mental 1 (AM1), donde se identifica de manera verbal lo que está cambiando, las acciones mentales van incrementando su nivel de complejidad hasta llegar a la Acción Mental 5 (AM5), en la cual hay un reconocimiento de los cambios instantáneos estableciendo cambios de concavidad y puntos de inflexión, si los hay.

2.2.1.2 Niveles de razonamiento covariacional dentro del marco conceptual de la covariación.

Para describir la evolución del razonamiento covariacional y clasificar a las acciones mentales que se manifiestan en un estudiante frente a una tarea de carácter covariacional, Carlson et al.,(2003) propone en su estudio los cinco niveles que se relacionan en la siguiente tabla:

Niveles del razonamiento covariacional	
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.	
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tabla 5. Niveles de Razonamiento Covariacional (Tomado del marco conceptual para los niveles de covariación, Carlson, et al., 2003, p.129)

Con la evolución de la imagen de covariación, esta sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado. Es así como dentro de una tarea particular, si un estudiante se clasifica en el nivel 4 (N4) de razonamiento covariacional, está en la capacidad de razonar en dicha acción mental, en conjunto con los razonamientos de la AM1 a la AM3. Por consiguiente, el estudiante está en la capacidad de coordinar la razón de cambio promedio de una función con los cambios uniformes en los valores de entrada de la variable.

Sin embargo, el trabajo de Carlson et al.,(2003) pone de manifiesto que en el caso que un estudiante esté comprometido con una acción mental en particular sin una evidencia que sustente tal comportamiento asociado a dicha acción mental, tal comportamiento se considerará como pseudo-analítico. Pudiéndose describir la acción mental que generó el comportamiento como acción mental pseudo-analítica.

Dicha propuesta permite determinar las características de razonamiento covariacional de los estudiantes al enfrentar una situación de covariación, donde el reconocer que el valor de la coordenada dependiente cambia con los cambios en el valor de la coordenada de la variable independiente, pueden facilitar la transición de la aritmética al álgebra, favoreciendo a futuro la comprensión del concepto de función. De esta manera se atiende a la invitación de aproximarse a la función desde estadios tempranos de la instrucción (Kaput, 1994) citado por Carlson et al.,(2003).

2.2.1.3 Sobre la variación

El concepto de variación tiene una vinculación muy estrecha con el término variacional, entendiéndose a la variación como la cuantificación del cambio (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Esto implica que el estudio de la variación es tan trascendental que, al estar ligada a cuerpos en movimiento y un sinnúmero de situaciones cotidianas, dio origen al cálculo diferencial.

En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) se presenta a la variación como el sustrato para analizar, organizar y modelar matemáticamente realidades propias del comportamiento humano, las ciencias y las matemáticas mismas. Esto indica que el estudio de la variación tiene la intención de cuantificar los cambios por medio de cantidades y magnitudes.

Conforme a lo anteriormente expresado, la variación se encuentra inmersa en escenarios cotidianos y científicos donde una misma cantidad varía. Es así como los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) sugieren que su estudio sea iniciado tempranamente mediante situaciones problemáticas referidas a fenómenos de variación y cambio. En este aspecto, los Lineamientos proponen el sistema de representación tabular para, organizando en ellas la variación, dar inicio al desarrollo del pensamiento variacional.

2.2.1.4 Sobre la covariación y los tipos de análisis para su estudio en situaciones de proporcionalidad directa simple

Carlson et al.,(2003) para describir la covariación, cita el trabajo de Saldanha y Thompson (1998), quienes se refieren a la covariación como “Mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)” (p. 298). Esto implica, una actividad mental en la cual se compromete la coordinación de las dos cantidades, teniendo presente que para cada valor de una cantidad, la otra cantidad también tiene un valor en cada instante. Sin embargo, las imágenes de covariación no son estáticas sino que dicha coordinación de dos cantidades evolucionan; en este sentido Saldanha y Thompson afirman que si bien en un inicio se piensan en los valores de las cantidades por separado, posteriormente las imágenes de covariación tienden a permanecer de manera simultánea en el tiempo, presentes de las operaciones mentales que realiza el estudiante.

Panorkou, Maloney (2015), establecen un marco referencial integrando situaciones contextuales buscando una aproximación a la enseñanza de las funciones, dando entrada a la covariación, centrando la atención en el análisis de cómo dos cantidades varían simultáneamente, en donde los cambios de una cantidad afectan la otra cantidad.

En este sentido, para Zapata (2006) el análisis de la covariación debe incluirse en la relación entre multiplicación y proporcionalidad e integrando el estudio de las magnitudes, de tal manera que no se produzca una desvinculación entre la proporcionalidad y las funciones; este hecho invita a visualizar la relación directa entre la multiplicación y proporcionalidad directa simple, esto es, los casos en los que la correlación entre las magnitudes se relacionan mediante un modelo lineal, como una forma de razonamiento matemático que tiene en cuenta la covariación, en esta última, desarrollando la habilidad de almacenar y procesar mentalmente la información.

En el caso de la relación entre dos magnitudes M_1 y M_2 , la cual se puede significar en el sistema de representación tabular, la multiplicación de M_1 por la constante de proporcionalidad determinará, en este sistema de representación, los valores que ocuparán la respectiva fila en la otra columna (M_2), siendo esta una situación de variación simultánea de dos espacios de medida⁴.

⁴ Entiéndase como espacio de medida a un conjunto para el que se ha definido una σ -álgebra (léase sigma álgebra) de conjuntos medibles y una función medida concreta que asigna un valor real o medida a cada elemento de la σ -

Una manera de estudiar el comportamiento de estos espacios de medida es por medio de un análisis escalar⁵ en donde se relaciona la variación para uno de los espacios (M1) respecto a la variación en el otro espacio de medida (M2). Esto es, los cambios en un espacio de medida generan cambios simétricos en el otro espacio de medida. A continuación se presenta en la tabla 6 un ejemplo que intenta ilustrar cómo surge el análisis escalar:

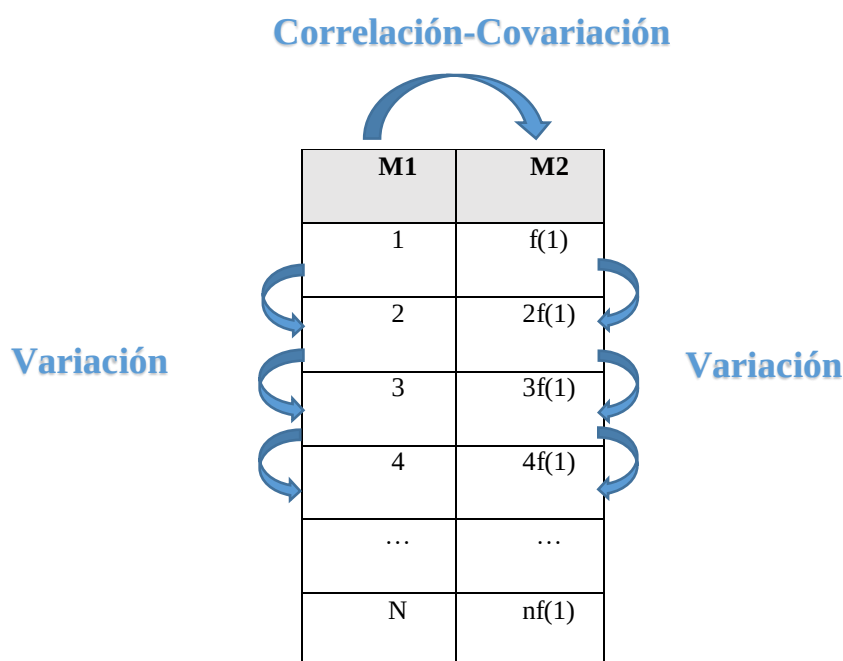


Tabla 6. Relaciones funcionales en las tablas asociadas a la covariación

Nótese en la Tabla 6 cómo la variación en la columna correspondiente a M1 determina los valores posibles en la columna correspondiente a M2, análisis llamado de tipo escalar cuya característica es que en él se relacionan las variaciones en uno de los espacios de medida con respecto a las variaciones en el otro espacio de medida, dando cuenta de que los cambios simétricos en un espacio de medida genera cambios, también simétricos, en el otro espacio de medida. De esta forma, al intentar preguntar por “n” (ver última fila, tabla 6), se hace necesario establecer las relaciones simétricas entre un espacio de medida y el otro, mediante un análisis escalar que permita

álgebra. Una función entre dos espacios medibles se denomina *medible* si la preimagen de todo conjunto medible es también medible

⁵ Para Vergnaud (1991), el análisis escalar o vertical se centra en la noción operador-escalar (sin dimensión) que hace pasar de una línea a otra en la misma categoría de medidas.

determinar cómo las variaciones simétricas en un espacio de medida (M1) genera variaciones análogas en el otro espacio de medida (M2).

Otra manera de poder encontrar el valor de “n” en la tabla anterior (tabla 6) es mediante una correspondencia entre los dos espacios de medida M1 y M2, a lo cual Vergnaud (1991) y Obando (2006) llaman análisis de tipo “funcional⁶”. En este análisis es necesario que se reconozca que $f(1)$ es la constante de proporcionalidad, denominada operador-función la cual surge de establecer las distintas relaciones: $\frac{1f(1)}{1}, \frac{2f(1)}{2}, \frac{3f(1)}{3}, \dots, \frac{nf(1)}{n} = f(1)$, es decir, este operador-función hace posible pasar de un espacio de medida al otro espacio de medida.

Con lo anterior se muestra cómo las tablas pueden ser una potente herramienta para la descripción de relaciones de covariación y correspondencia entre dos magnitudes, M1 y M2. Dichas relaciones pueden ser descritas de diferentes formas como son la verbalización, la comparación de representaciones y el empleo de variables.

Sin embargo, otra alternativa para el llenado de las tablas, pero sin establecer relaciones entre los espacios de medida, son las sumas iteradas las cuales consisten en sumas de sumandos iguales que pueden ser abreviados mediante la multiplicación. En el caso de la representación tabular, para cada espacio de medida se suma repetidamente el patrón de incremento previamente establecido, escondiendo la proporcionalidad existente entre las magnitudes y por consiguiente de las relaciones existentes entre ellas.

2.2.2 Geogebra en el estudio de situaciones dinámicas

La incidencia de las tecnologías en la sociedad actual continúa penetrando en los diferentes ámbitos de la vida humana, uno de ellos el educativo. De ahí la importancia de repensar las formas en las cuales se aprende y se construye el conocimiento. En particular, Geogebra como mediador⁷

⁶ Para Vergnaud (1991), el análisis funcional u horizontal se fundamenta en la noción de operador-función, que hace pasar de una categoría de medidas a otra.

⁷ “Cuando el profesor prepara su clase, organiza un medio –que incluye reglas que definen el éxito o el fracaso– llamado “*Medio Material*” (aun si no hay objetos concretos). Debe considerar también las interacciones de un sujeto con este medio. A este sujeto simbólico se le llama *Actor Objetivo*. Este par medio-actor constituye la *Situación Objetiva* que se propone efectivamente al alumno y con la que debe interactuar”. (Brousseau, 2007, p.54)

no solo permite las construcciones matemáticas de manera eficiente y precisa, sino que también permite dinamizarlas dando protagonismo al movimiento, dejando de lado el estatismo generado por el tablero y el papel. En este sentido, Vitabar (2016), afirma:

Geogebra se comunica con el usuario a través de un lenguaje matemático. Los menús, los cuadros de diálogo, la ayuda...todo habla en el idioma de la matemática. El alumno se ve inmerso en un mundo que lo acerca a la lógica matemática. (Revista Uno, 71, p.8).

Igualmente, hace referencia a cómo una de las mayores fortalezas didácticas de Geogebra consiste en la posibilidad de realizar varias representaciones simultáneas de un mismo objeto matemático, en forma dinámica.

Villa (2010) citando el trabajo de Borba y Villareal (2006), afirma que la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interacción con los seres humanos, ya que de este vínculo dependen las maneras como el conocimiento es producido. Para Villa (2010), si bien no se omiten el uso de lápiz y papel, para el análisis y la demostración formal de conjeturas es importante el soporte visual brindado por el software. Esto permitió poner a dialogar algunos procesos algebraicos, al lápiz y al papel con la visualización, la cual puede aportar a la maduración del pensamiento variacional.

Esta propuesta, al poner en escena archivos previamente diseñados, no pretende poner como objeto de estudio a este software, sino más bien aprovechar las herramientas y diferentes sistemas de representación en él presentes con la intencionalidad de apostar al desarrollo de razonamiento covariacional de los estudiantes, tanto individual como colectivamente. Sin embargo, no se desconoce que este artefacto tiene incidencias notorias en la actividad matemática propuesta (plano epistemológico), lo que termina influyendo en las formas de pensar y de actuar de los estudiantes (plano cognitivo), y naturalmente en las disposiciones de la clase (plano didáctico). En este trabajo se toma en consideración a Geogebra como un artefacto en el sentido amplio que propone Radford (2012), esto es, como un objeto creado por el ser humano con un interés social o histórico que permite realizar alguna acción que el individuo por sí mismo no puede llevar a cabo. En este sentido, el software funge como mediador de la actividad de los estudiantes ayudando a cambiar, mediante su soporte visual, el paisaje cognitivo manifiesto en la dinamicidad de la situación presente en las diferentes tareas que se les propone.

Desde una perspectiva epistemológica, Radford (2012) menciona que los cambios en los artefactos generan cambios en las maneras de conocer, dándose la conjugación sujeto + artefacto + objeto de conocimiento, donde los artefactos encarnan formas particulares de cognición y comunicación de manera que el pensamiento surge no de los patrones de acciones con artefactos sino en la actividad conjunta entre estos tres elementos. Desde una perspectiva cognitiva, en atención a la epistemológica, se reconoce que los artefactos modifican las formas de pensar de los sujetos y con ello sus formas de actuar. Ahora bien, es importante tener presente que las acciones con artefactos llevan consigo significados sociales e históricos. En consecuencia, el conocimiento se logra no solo a través de acciones modeladas invariantes con signos y artefactos sino también en interacción con otros individuos en el contexto histórico y cultural involucrando modos de pensar y comunicarse.

Por lo anterior, el artefacto (Geogebra en este caso) se considera parte de la matemática como práctica material en la cual se fusiona con las voces de estudiante y el profesor, trabajando conjuntamente, tal como lo expresa Radford (2012), es decir, Geogebra se convierte en parte constitutiva en la fabricación de las matemáticas.

Capítulo 3: Metodología de investigación y análisis de los resultados

En este capítulo se desarrolla la propuesta metodológica que rige este trabajo en el diseño de la situación de variación y cambio mediada por Geogebra y que permite realizar un análisis y descripción de las características del razonamiento covariacional que se presentan en esta relación estudiante-situación-software. Se presentan entonces, el enfoque metodológico con las diferentes fases de la investigación, el diseño de la situación, explicando la intencionalidad presente en las diferentes tareas que la configuran, todas ellas en sintonía con el referente de Carlson et al.,(2003) y los documentos ministeriales en educación. Finalmente se termina este capítulo con los resultados y análisis fruto de la implementación de la situación

3.1 Diseño metodológico

3.1.1 El enfoque de investigación

Esta propuesta de trabajo se inscribe dentro de enfoque de investigación cualitativa de tipo descriptivo – interpretativo, como lo mencionan en libro: “Los Métodos de Investigación Educativa Louis (1990)” debido a que permite que se realice observación a individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación.

La investigación cualitativa de tipo descriptivo – interpretativo, permite desarrollar procesos en términos de acciones y lenguajes que están situados en un contexto escolar. Por lo tanto, en este trabajo se tuvieron en cuenta el lenguaje de los sujetos investigados y del sujeto investigador como una oportunidad de registrar los resultados y describir las características de los acontecimientos realizados en la ejecución de actividades para el desarrollo del razonamiento covariacional a partir de la propuesta de aula diseñada.

3.1.2 Fases del proceso de investigación

La metodología presente en este trabajo de investigación propone desarrollar registros de descripción y análisis de la participación en el desarrollo de actividades para un grupo de estudiantes de grado quinto de básica primaria de la sede John F. Kennedy de la Institución Educativa Juan María Céspedes de la ciudad de Tuluá, tal como lo mencionan los objetivos, con la posibilidad de describir y analizar las características del razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado cuando se enfrentan a una situación de variación y cambio mediada por Geogebra. De este modo, el desarrollo de este trabajo se plantea en cuatro fases:

Fase 1: Caracterización de la problemática en la cual pretende responder este trabajo de investigación. Dentro de esta fase se consideran algunas investigaciones realizadas en torno al favorecimiento del desarrollo del razonamiento covariacional desde los primeros grados de

escolaridad, dando origen a la pregunta de investigación y la cual nos permite dar cuenta de los objetivos y la justificación.

Fase 2: Corresponde a la búsqueda de elementos teóricos para el diseño de una situación de variación y cambio mediada por Geogebra, que permita identificar las características de razonamiento covariacional que se presentan en estudiantes de un grupo de grado quinto de la I.E.JMC. Estos elementos teóricos se ubican en las perspectivas curricular, matemática, y didáctica.

Fase 3: En esta fase se realiza el diseño y la aplicación de cuatro archivos en Geogebra sobre razonamiento covariacional por medio de patrones de longitud y su incidencia en la variación de las distancias recorridas de manera dinámica, que permita la asociación de respuestas con las acciones mentales descritas por Carlson et al.,(2003). Las prácticas permitirán visibilizar diferentes características del razonamiento covariacional en los estudiantes de quinto grado, apostándole a expresiones de covariación entre patrones y su acción mental en diferentes momentos de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten, que serán afinados mediante modelos mentales manifestados por los estudiantes los cuales pueden ser perfeccionados o suprimidos en la búsqueda de la resolución de los problemas planteados.

Fase 4: El análisis de trabajo, el cual se realiza por medio de la técnica de observación directa en la participación de las tareas sobre una situación de variación y cambio mediada por Geogebra. Esta observación directa se realiza a los estudiantes del grado quinto con el propósito de determinar las acciones mentales alcanzadas en la implementación de la situación diseñada en la fase anterior. A partir de la interpretación y reflexión de los resultados se realizan las conclusiones, de acuerdo con los objetivos propuestos en el trabajo.

3.2 Diseño y contexto de la situación

Esta fase presenta el diseño y aplicación de una situación que recrea y adapta apartes de la obra literaria “la vuelta al mundo en 80 días” escrita por Julio Verne en 1872. Para ello se utiliza al software Geogebra como mediador, movilizand o diferentes aspectos estudiados en el campo del razonamiento covariacional e involucrando variaciones de distancia y tiempo asociadas a velocidades constantes en un inicio y con velocidad variable en una última tarea.

Con lo anterior se pretende visibilizar la evolución del razonamiento covariacional en los estudiantes de quinto grado, conforme a la propuesta de Carlson et al.,(2003) asociando las expresiones de covariación elaboradas por los estudiantes con las acciones mentales propias de este referente didáctico, esto para diferentes momentos de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante.

Para el diseño de la situación se tienen en cuenta los referentes curriculares propuestos en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y el referente didáctico propuesto por Carlson et al.,(2003) junto a propuestas que invitan a la inclusión de Geogebra en el aula de clase, en este caso como mediador.

Tomando los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), esta propuesta tiene en cuenta el estudio de regularidades y a los criterios que dentro de ellas permiten la identificación de patrones, su periodicidad y cómo la repetición de las regularidades da origen a los patrones. Es así como en esta situación didáctica aparecen las velocidades constantes en las cuales los personajes recorren distancias iguales en tiempos iguales.

Se puede apreciar la relación existente entre los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y el referente didáctico Carlson et al.,(2003) cuando invitan a la realización de actividades en las cuales se analiza qué cambia, en qué forma cambia, en qué dirección cambia (aumenta o disminuye) el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras. En este sentido, los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) aseveran que esta es una forma muy apropiada de preparar la comprensión de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico desde los inicios de la básica primaria.

Adicionalmente, los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) afirman:

El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones. El estudio de las relaciones funcionales que pueden detectarse en la vida cotidiana, como las relaciones entre edad y altura de un niño (o entre edad y masa o peso corporal), entre la temperatura a lo largo de un día y la hora que marca un reloj, etc., permite coordinar cambios de una magnitud Y con cambios de una magnitud X. Esta primera aproximación a la noción la función es la de dependencia funcional entre magnitudes variables. (p. 67)

El diseño de la situación plantea cinco tareas que involucran conceptos mencionados en los estándares y en el referente didáctico como constante, variable, razón de cambio, dependencia e independencia de variables y patrón, permitiendo el inicio en la caracterización de los aspectos de la variación, el campo de variación de las magnitudes que intervienen y las posibles relaciones entre ellas.

Adicionalmente se recurre en una de las tareas (Tarea 4) a la representación tabular debido a que es una de las representaciones matemáticas que debe estar presente en las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de pensamiento variacional, siendo una oportunidad adicional para la formulación, puesta a prueba, generalización y argumentación de conjeturas y la identificación de patrones, Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006).

La situación se presenta dinamizada por medio de archivos en Geogebra, con el apoyo de un comic, adaptación del libro “la vuelta al mundo en 80 días” de Julio Verne (1872), el cual recrea diferentes aventuras de los protagonistas, quienes dan la vuelta al mundo empleando diferentes medios de transporte, uno de los cuales sirve de contexto para estudiar el razonamiento covariacional en este trabajo de investigación.

Se escogen al autor por el fundamento científico que le imprime a sus obras dentro del género literario ciencia ficción, atrayente para estas edades escolares y, al libro, por las diferentes aventuras que en él se desarrollan, donde los diferentes medios de transporte utilizados en el viaje permiten identificar situaciones de variación y cambio.

Las tareas propuestas se construyen a partir de la observación y manipulación de archivos diseñados en Geogebra que permiten representar de manera dinámica una persecución donde los medios de transporte son dos elefantes. El elefante 1, en el cual se desplaza el persecutor (Inspector Fix) y el elefante 2, sobre el cual viaja el perseguido (señor Phileas Fogg) quienes inicialmente se encuentran separados una distancia de 12 km. Esta persecución representada en Geogebra permite, por medio de los deslizadores, dinamizar el tiempo en el cual las dos velocidades, diferentes y constantes para cada personaje, permiten realizar recorridos que dan origen a una serie de preguntas distribuidas en tareas que se presentan más adelante.

En la medida en que las actividades planteadas se complejizan, se hace necesario utilizar representaciones verbales, registros de gráficas y tablas, las cuales se van construyendo en el

avance de las tareas propuestas y que permitan dar cuenta de los comportamientos de los estudiantes frente a la situación planteada, los cuales estuvieron fundamentados en las acciones mentales propuestas por Carlson et al.,(2003), identificando las acciones metales alcanzadas por los estudiantes en el desarrollo de esta situación.

Por lo anterior, reconocer que un viaje invita a pensar en situaciones de variación y cambio, como por ejemplo de distancias, tiempos y velocidades, permite la planeación de esta situación que genera posibilidades para analizar y caracterizar el razonamiento covariacional.

3.2.1 Sobre las tareas propuestas

A continuación se presentan y describen cada una de las tareas que hacen parte de la situación:

3.2.1.1 Tarea 1: Comprendiendo la situación

Esta tarea inicia con la lectura del comic “La vuelta al mundo en 80 días” adaptado del libro homónimo escrito por Julio Verne (1872). Después la lectura continúa una serie de preguntas sobre aspectos generales del comic que permitan establecer una relación y apropiación del mismo como preámbulo para la indagación en las acciones mentales propuestas por el referente didáctico Carlson et al.,(2003).

La primera tarea se lleva a cabo mediante una presentación de diapositivas al final de las cuales irán las preguntas de indagación.



Ilustración 3. Comprendiendo la situación, vista diapositivas.

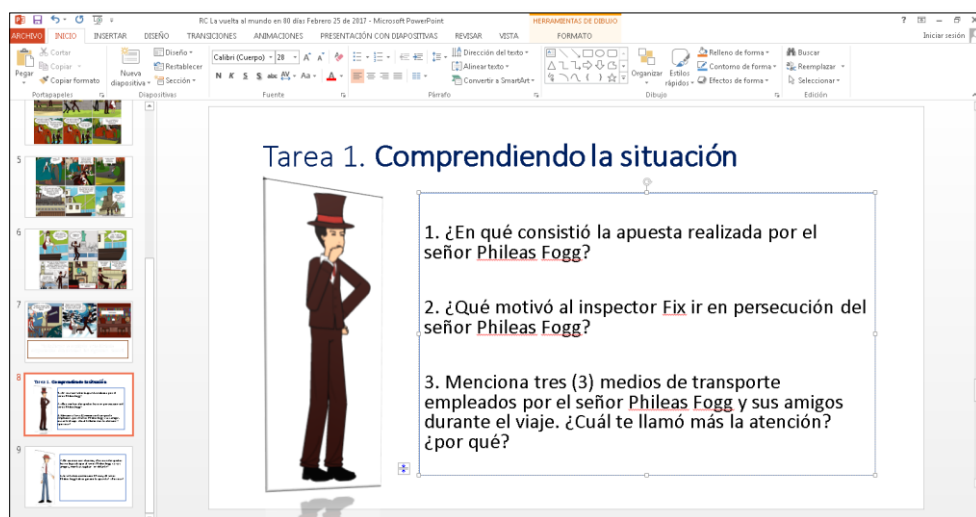


Ilustración 4. Muestra en diapositivas preguntas Tarea 1, primera parte

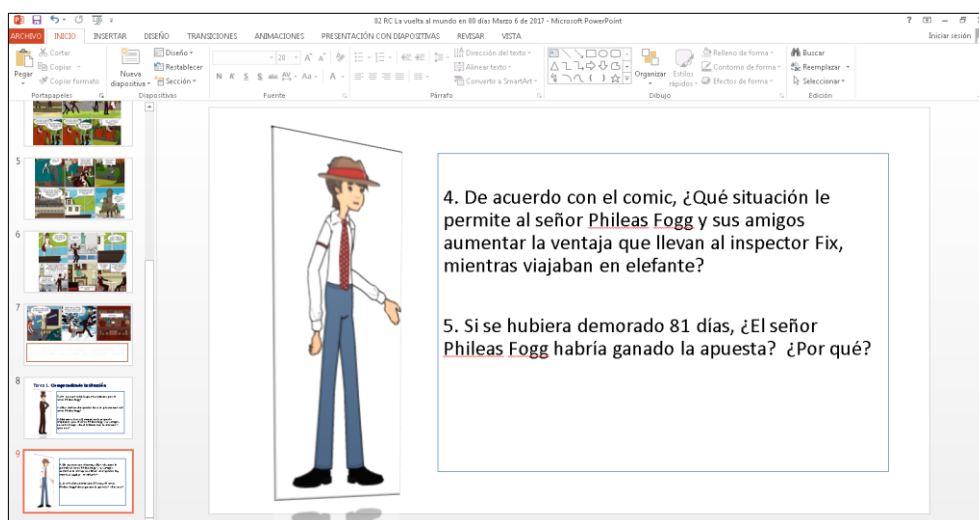


Ilustración 5. Muestra en diapositivas preguntas Tarea 1, segunda parte

Como puede apreciarse en la ilustración 4, la pregunta 1 indaga sobre el motivo que dio origen a la situación, es decir, el por qué el señor Phileas Fogg se animó a dar la vuelta al mundo en 80 días, en este caso, la apuesta entre amigos de los medios de transporte de aquella época según la cual el señor Phileas Fogg no podría cumplir con tal objetivo.

Para la pregunta 2, se indaga sobre el por qué el inspector Fix se da a la persecución del Señor Phileas Fogg. El estudiante debería comprender que la coincidencia del robo del banco de

Inglaterra y la partida del señor Phileas Fogg a dar la vuelta al mundo, genera la sospecha que origina tal persecución.

En la pregunta 3, se centra la atención en los medios de transporte empleados en el recorrido a la vuelta al mundo. En el comic se mencionan, conforme a la obra original, el ferrocarril, el buque, el barco a vapor, el trineo y el elefante, siendo este último el medio empleado para la situación.

La pregunta 4 inquiriere sobre una situación particular que muestra el comic, en la cual el inspector Fix cae del elefante mientras perseguía al señor Phileas Fogg, hecho que le permite aumentar su ventaja en dicha persecución

3.2.1.2 Tarea 2: Reconociendo relaciones entre magnitudes (AM1)

En esta tarea el estudiante interactúa con el archivo de Geogebra para identificar cuáles elementos de la situación cambian y cuáles permanecen constantes mediante indicaciones verbales de coordinación de las dos variables. Para ello se omitirán en pantalla valores numéricos que puedan servir de referencia de tal manera que las respuestas sean verbales, netamente de tipo cualitativo. El estudiante tendrá la opción de manipular el deslizador⁸ asignado a la magnitud tiempo. En este archivo de Geogebra intervienen además del tiempo, también sin valores numéricos, los desplazamientos de cada personaje y sus respectivas velocidades, estas últimas permaneciendo constantes. Conforme al referente didáctico, esta tarea pretende establecer la coordinación del valor de una magnitud con los cambios en la otra.

⁸ En Geogebra, un “**deslizador**” no es sino la representación gráfica de un número libre o ángulo libre. Puede crearse desde cualquier número libre o ángulo existente, sencillamente, exponiendo tal objeto en la Vista Gráfica.



Ilustración 6. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 1.

En esta primera pregunta el estudiante podrá manipular el deslizador o poner en funcionamiento automático el archivo mientras observa las características de la persecución del inspector Fix al señor Phileas Fogg. Se busca con la pregunta que el estudiante verbalice lo que ve, mediante una descripción.



Ilustración 7. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 2.

Para esta pregunta, al poner a funcionar el deslizador (correspondiente al tiempo) puede apreciarse cómo en la medida que el tiempo cambia o transcurre se generan cambios en las posiciones de los personajes y cambios en la distancia que los separa. Se pretende indagar si el estudiante identifica ese tipo de cambios.



Ilustración 8. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 3.

Centrada en el señor Phileas Fogg, esta pregunta pretende analizar si el estudiante es consciente del cambio de posición del personaje a medida que cambia el tiempo. Se espera que observe que cada instante transcurrido implica una posición diferente del señor Phileas Fogg, de manera que verbalice que cambian tanto el tiempo como su posición, en lo que corresponde a AM1, coordinando los cambios de una magnitud con los cambios en la otra.



Ilustración 9. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 4.

Centrada en el inspector Fix, esta pregunta pretende analizar si el estudiante es consciente del cambio de posición del personaje a medida que cambia el tiempo. Se espera que observe que cada instante transcurrido implica una posición diferente del inspector Fix, de manera que verbalice que cambian tanto el tiempo como su posición, en lo que corresponde a AM1, coordinando los cambios de una magnitud con los cambios en la otra.



Ilustración 10. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 5.

En esta pregunta, puntualiza en la dependencia de la posición del tiempo. Se pretende identificar si hay afianzamiento en el estudiante de que las posiciones de los personajes dependen del tiempo transcurrido, es decir, cómo la variación del tiempo genera cambios en las posiciones de los personajes.



Ilustración 11. Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes, Pregunta 6.

En esta pregunta se centra la atención en la relación entre el tiempo y la distancia que separa a los personajes (inspector Fix y Phileas Fogg). Al manipular el deslizador (que corresponde al cambio del tiempo) se genera una disminución en la distancia que separa a los personajes, hecho que debería permitir la predicción sobre si Fix alcanza a Fogg.

Dentro de esta misma AM1, las preguntas de esta tarea pretenden determinar el nivel de coordinación del cambio de una magnitud con los cambios en la otra; para esta pregunta en particular, cómo hay una correlación negativa en la cual a mayor tiempo transcurrido, menor distancia entre los personajes

3.2.1.3 Tarea 3: Reconociendo cómo cambian las magnitudes, AM2

En esta tarea el estudiante continúa interactuando con Geogebra para identificar la dirección del cambio. Al igual que en la tarea 2, se omitirán en pantalla valores numéricos que puedan servir

de referencia de tal manera que las respuestas sean netamente de tipo cualitativo y verbales. Para ello el estudiante tendrá la opción de manipular el deslizador asignado a la variable tiempo. En este archivo de Geogebra intervienen además del tiempo, también sin valores numéricos, los desplazamientos de cada personaje y sus respectivas velocidades, estas últimas permaneciendo constantes. Conforme al referente didáctico, esta tarea pretende determinar la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Las preguntas presentadas en esta tarea están relacionadas con los comportamientos ascendente, descendente o constante de las variables que intervienen en la situación.



Ilustración 12. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 1.

Esta pregunta tiene la intencionalidad de analizar si el estudiante, después de manipular el deslizador correspondiente al tiempo, ha identificado la relación existente entre el tiempo y la distancia recorrida por el inspector Fix. En este caso, para velocidad constante, se presenta una proporcionalidad directa simple entre el tiempo y la distancia recorrida, es decir, a mayor tiempo transcurrido, mayor distancia recorrida por el señor inspector Fix.



Ilustración 13. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 2.

En sintonía con la pregunta anterior, en esta se analiza si el estudiante, después de manipular el deslizador correspondiente al tiempo, ha identificado la relación existente entre el tiempo y la distancia recorrida, en este caso por el señor Phileas Fogg. Al igual que en el punto anterior, para velocidad constante, se presenta una proporcionalidad directa simple entre el tiempo y la distancia recorrida, es decir, a mayor tiempo transcurrido, mayor distancia recorrida por el señor Phileas Fogg.



Ilustración 14. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 3.

En esta pregunta se evalúa, al igual que en las dos anteriores, el comportamiento de la distancia recorrida en la medida que el tiempo transcurre. Tanto para el inspector Fix como para el señor Phileas Fogg, la distancia recorrida aumenta en la medida en que el tiempo avanza. Sin embargo, al ser mayor la velocidad del persecutor (Inspector Fix), para un mismo tiempo “ t ”, recorrerá una mayor distancia que el señor Phileas Fogg, situación que se espera sea verbalizada por el estudiante.



Ilustración 15. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 4.

Retomando la pregunta anterior, puede apreciarse que a mayor tiempo mayor distancia recorrida, hecho que para velocidades constantes implica una proporcionalidad directa simple para los dos personajes en acción (Phileas Fogg y el inspector Fix). Sin embargo, como el persecutor (Inspector Fix) se desplaza con mayor velocidad que el señor Phileas Fogg, el primero recorrerá mayores distancias para un mismo tiempo “t”, por lo cual la distancia que los separa será cada vez menor. Debido a que la velocidad relativa entre los dos personajes será el resultado de restar a la velocidad mayor la velocidad menor ($V_{\text{Fix}} - V_{\text{Fogg}}$), se presenta un caso de proporcionalidad inversa entre el tiempo y la distancia que los separa, es decir, a mayor tiempo transcurrido, menor distancia entre los personajes.

Se espera que el estudiante establezca de manera verbal la dirección del cambio (conforme a AM2) de la distancia que separa los personajes respecto al tiempo transcurrido



Ilustración 16. Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes, Pregunta 5.

Continuando con AM2, esta pregunta busca analizar mediante la verbalización del estudiante la dirección del cambio de la distancia que separa a los personajes en la medida en que transcurre el tiempo. Respecto a la pregunta anterior, se espera que confirme la relación de proporcionalidad inversa, en este caso particular, entre la distancia que separa a los personajes y el tiempo transcurrido.

3.2.1.4 Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables (AM3)

Esta tarea se centra, conforme al referente conceptual, en la coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud. El estudiante que se encuentre en este nivel (N3) verbalizará la consciencia de la cantidad de cambio de la magnitud de salida (Distancia recorrida) mientras se consideran los cambios en la magnitud de entrada (Tiempo).

A diferencia de las dos tareas anteriores, aparecen por primera vez valores numéricos tanto para el tiempo (de hora en hora) como para las distancias recorridas para cada hora transcurrida (en kilómetros). Para la magnitud tiempo, esta tarea cuenta con un deslizador que al avanzar, de hora en hora, irá generando la tabla correspondiente a cada uno de los personajes (Phileas Fogg y el inspector Fix); dicha tabla tendrá escondidos ciertos valores tanto para la magnitud tiempo (magnitud de entrada) como para la magnitud distancia (magnitud de salida) de manera que el estudiante, después de haber identificado las regularidades, deberá completar en una ventana de diálogo. Tanto para el inspector Fix como para el señor Phileas Fogg el tiempo cambiará mediante el deslizador de hora en hora, pero las distancias recorridas para esa misma hora serán diferentes. Es así como cada hora transcurrida el Inspector Fix y el señor Phileas Fogg recorrerán 5 km y 4 km, respectivamente, hecho que podrá evidenciarse tanto en la medida que se va llenando la tabla (al mover el deslizador) como sobre la recta horizontal donde pueden visualizarse los diferentes kilómetros recorridos.

En esta tarea cambian las magnitudes tiempo, distancias recorridas (por el inspector Fix y por el señor Phileas Fogg) y la distancia que separa ambos personajes, tal como puede apreciarse en la medida que el tiempo (deslizador) cambia.



Ilustración 17. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 1.

Debido a que en el evento de que el inspector Fix alcance al señor Phileas Fogg los elefantes quedarán en la misma posición, se tomaron como referencia sus trompas. Por lo anterior, antes de dar inicio a la persecución y con ello a la evolución de la tabla correspondiente al inspector Fix, los personajes se encuentran separados una distancia de 12 kilómetros (mídase de trompa a trompa), justamente cuando el tiempo está en cero (Obsérvese que el deslizador no ha iniciado su desplazamiento). Esta distancia, se espera sea identificada por los estudiantes.



Ilustración 18. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 2.

Al ritmo del deslizador, la tabla se irá llenando dejando unos valores sin información numérica que el estudiante, con la ayuda de una ventana de diálogo, podrá alimentar. Se espera que el estudiante identifique el comportamiento de las dos magnitudes en juego (tiempo y distancia) conforme a sus razonamientos o estrategias.

En el caso que el estudiante digite en la casilla un valor errado, aparecerá el mensaje: “Inténtalo de nuevo” (ver ilustración 19), quedando abierta la invitación a seguir identificando el comportamiento de la tabla hasta encontrar los patrones, bien sea mediante un análisis escalar o el análisis funcional mencionados anteriormente.

The screenshot shows a software window titled 'Tarea 4' with a 'Reinicia' button and a slider ranging from 1 to 7. A table displays time and distance data:

Tiempo(Horas)	Distancia(Kilometros)
1	5
2	10
3	15
4	12
5	0
?	30
7	87

Below the table is a text input field labeled 'Hora 7' containing the value '87'. A red text overlay '¡INTÉNTALO DE NUEVO!' is positioned over the table. The interface also includes a map with a path marked from 0km to 60km and a 'Reinicia' button.

Ilustración 19. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 2. Mensaje ¡Inténtalo de nuevo!

Posterior al mensaje de error, el estudiante podrá continuar intentando hasta identificar las maneras como cambian ambas magnitudes.

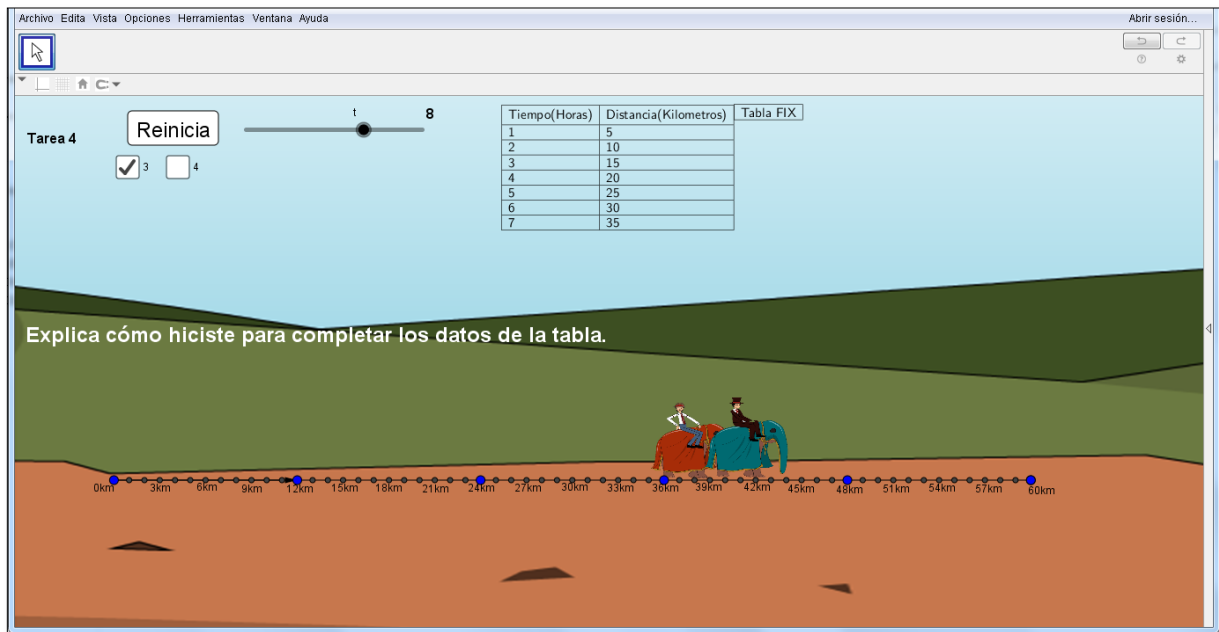


Ilustración 20. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 3.

Conforme a Vergnaud (1991), el estudiante podrá realizar un análisis vertical o escalar y analizar cómo cambian las magnitudes “tiempo” y “distancia”. Para la primera, de hora en hora y para la segunda, de 5 kilómetros en 5 kilómetros. Otra manera, según este mismo autor, puede ser el análisis funcional u horizontal, caso en el cual el estudiante establecerá que para una misma fila o pareja ordenada, el resultado de la magnitud de salida, en este caso distancia, será el resultado de multiplicar la magnitud de entrada (tiempo) por 5 kilómetros ($f(1)$), que en esta situación de proporcionalidad directa simple corresponde a la constante de proporcionalidad.

La intención de esta pregunta es indagar los diferentes tipos de análisis individuales realizados por los estudiantes en lo referente a la cuantificación del cambio de la magnitud de salida (distancia) cuando se consideran cambios en la magnitud de entrada (tiempo), comportamiento propio de AM3 dentro del referente conceptual, Carlson et al.,(2003).

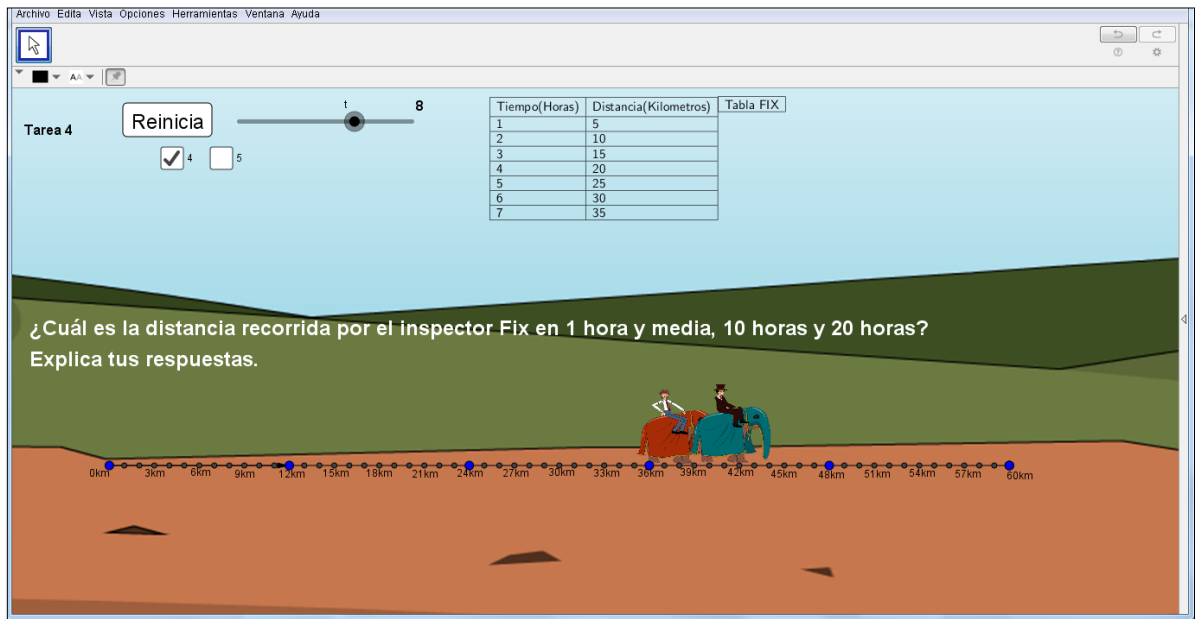


Ilustración 21. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 4.

Para esta pregunta, se solicitan distancias recorridas correspondientes a tiempos que no están en la tabla, por lo cual se espera que el estudiante realice los análisis bien sean de tipo escalar o funcional, en este caso, para el inspector Fix.

Teniendo en cuenta que para AM3 se presenta una coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud (distancia) con los cambios en la otra (tiempo), un análisis funcional permitirá determinar la distancia recorrida por medio de la multiplicación de la magnitud tiempo por la constante de proporcionalidad $f(1)$, para cualquier tiempo sin la necesidad de continuar el llenado de la tabla hasta las 20 horas, conforme a la solicitud de la pregunta. Sin embargo, teniendo en cuenta que la magnitud tiempo varía de hora en hora y que la magnitud distancia lo hace de 5 kilómetros en 5 kilómetros, un análisis de tipo vertical o escalar permitirá obtener respuestas correctas aunque el proceso se extienda un poco más.

Para ambos casos, la pregunta pretende indagar si el estudiante tiene claridad sobre el efecto de los cambios en la magnitud de entrada (tiempo) sobre los cambios en la magnitud de salida (distancia).

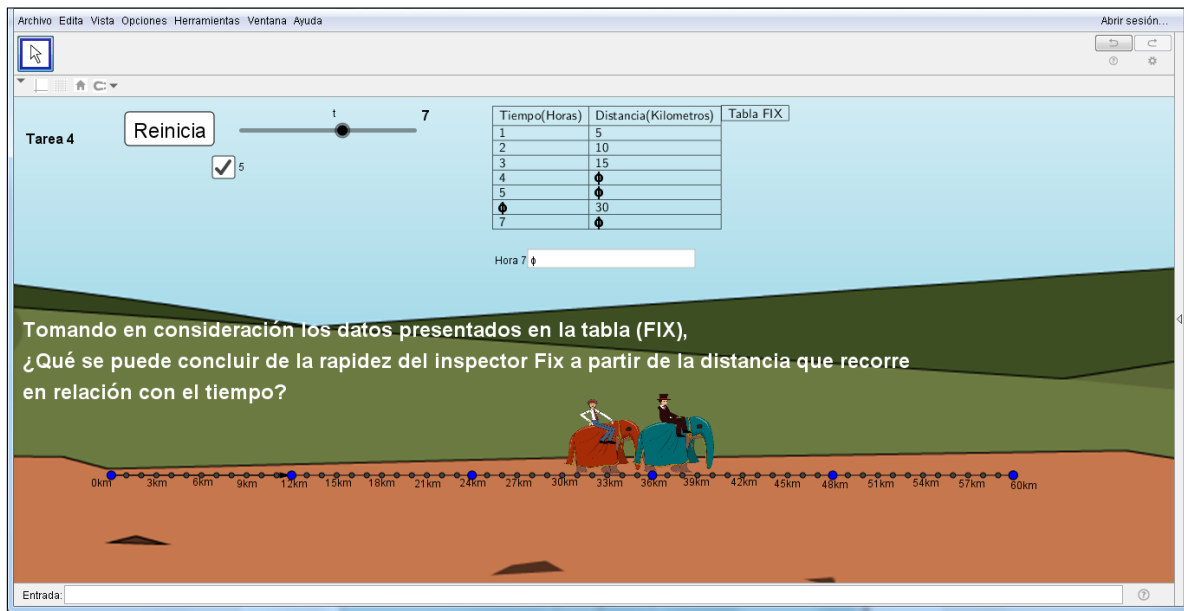


Ilustración 22. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 5.

Después de diligenciada la tabla en el punto 2 (Para el inspector Fix), la pregunta 5 se centra en la identificación del cambio constante para la distancia por cada hora transcurrida. En el caso de cumplir el objetivo de llenar la tabla de manera correcta, se espera que el estudiante identifique el crecimiento de manera constante que presenta la distancia recorrida cuando de manera, también constante, aumenta el tiempo. Es así como se puede establecer que el inspector Fix se desplaza 5 kilómetros por cada hora recorrida, siendo este un caso de proporcionalidad directa simple.



Ilustración 23. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 6.

Al ritmo del deslizador, la tabla correspondiente al señor Phileas Fogg se irá llenando dejando unos valores sin información numérica que el estudiante, con la ayuda de una ventana de diálogo, podrá alimentar. Se espera que el estudiante identifique el comportamiento de las dos magnitudes en juego para este personaje (tiempo y distancia) conforme a sus razonamientos o estrategias.

En el caso que el estudiante digite en la casilla un valor errado, aparecerá el mensaje: “Inténtalo de nuevo” tal como aparece para la tabla del inspector Fix, quedando abierta la invitación a seguir identificando el comportamiento de la tabla hasta encontrar los patrones, bien sea mediante un análisis escalar o el análisis funcional, Vergnaud (1991).

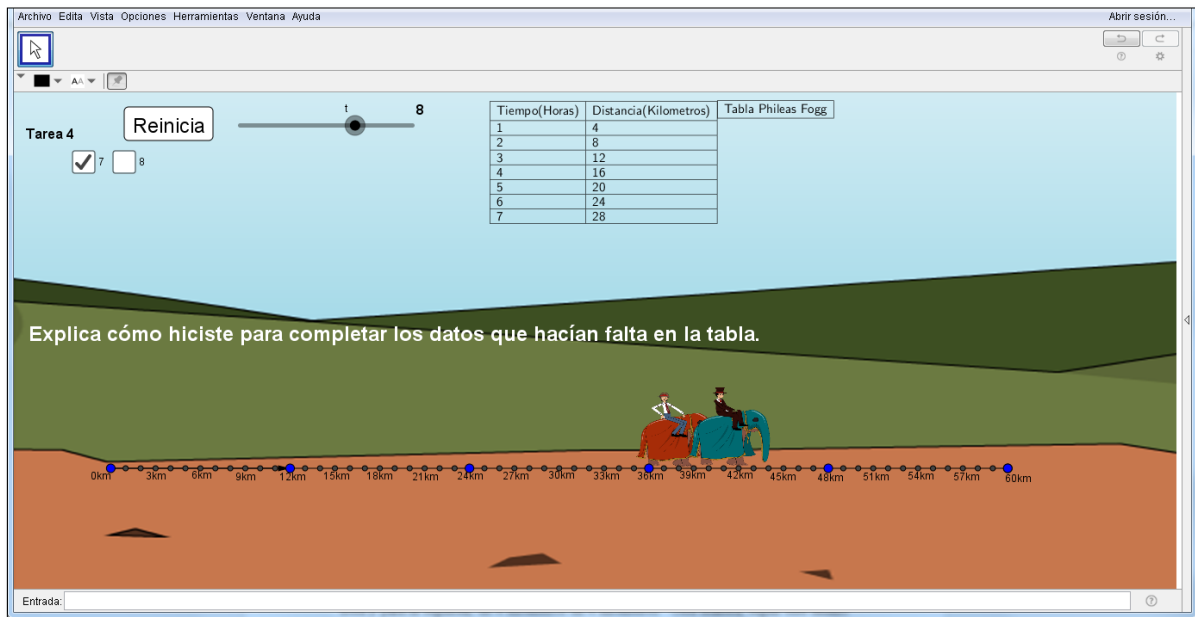


Ilustración 24. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 7.

Conforme a Vergnaud (1991), el estudiante podrá realizar un análisis vertical o escalar y analizar cómo cambian las magnitudes “tiempo” y “distancia”. Para la primera, de hora en hora y para la segunda, de 4 kilómetros en 4 kilómetros. Otra manera, según este mismo autor, puede ser el análisis funcional u horizontal, caso en el cual el estudiante establecerá que para una misma fila o pareja ordenada, el resultado de la magnitud de salida, en este caso distancia, será el resultado de multiplicar la magnitud de entrada (tiempo) por 4 kilómetros ($f(1)$), que en esta situación de proporcionalidad directa simple corresponde a la constante de proporcionalidad.

La intención de esta pregunta es confirmar los diferentes tipos de análisis individuales realizados por los estudiantes en lo referente a la cuantificación del cambio de la magnitud de salida (distancia) cuando se consideran cambios en la magnitud de entrada (tiempo), en los cuales puede apreciar cómo para un mismo tiempo ambos personajes recorren distancias diferentes, comportamiento propio de AM3 dentro del referente conceptual, Carlson et al.,(2003).

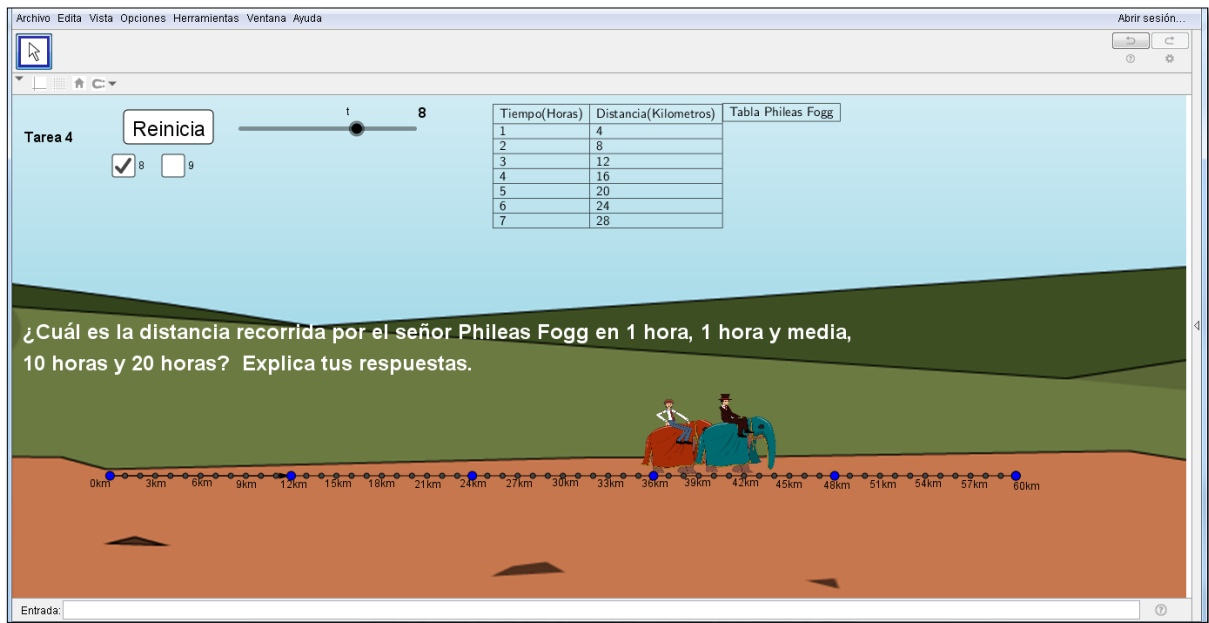


Ilustración 25. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 8.

Para esta pregunta, se solicitan distancias recorridas correspondientes a tiempos que no están en la tabla, por lo cual se espera que el estudiante realice los análisis bien sean de tipo escalar o funcional, en este caso, para el señor Phileas Fogg.

Teniendo en cuenta que para AM3 se presenta una coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud (distancia) con los cambios en la otra (tiempo), un análisis funcional permitirá determinar la distancia recorrida por medio de la multiplicación de la magnitud tiempo por la constante de proporcionalidad $f(1)$, para cualquier tiempo sin la necesidad de continuar el llenado de la tabla hasta las 20 horas, conforme a la solicitud de la pregunta. Sin embargo, teniendo en cuenta que la magnitud tiempo varía de hora en hora y que la magnitud distancia lo hace de 4 kilómetros en 4 kilómetros, un análisis de tipo vertical o escalar permitirá obtener respuestas correctas aunque el proceso se extienda un poco más.

Para ambos casos, la pregunta pretende indagar si el estudiante tiene claridad sobre el efecto de los cambios en la magnitud de entrada (tiempo) sobre los cambios en la magnitud de salida (distancia), donde puede apreciarse que para un mismo tiempo el señor Phileas Fogg recorre una menor distancia que el inspector Fix.

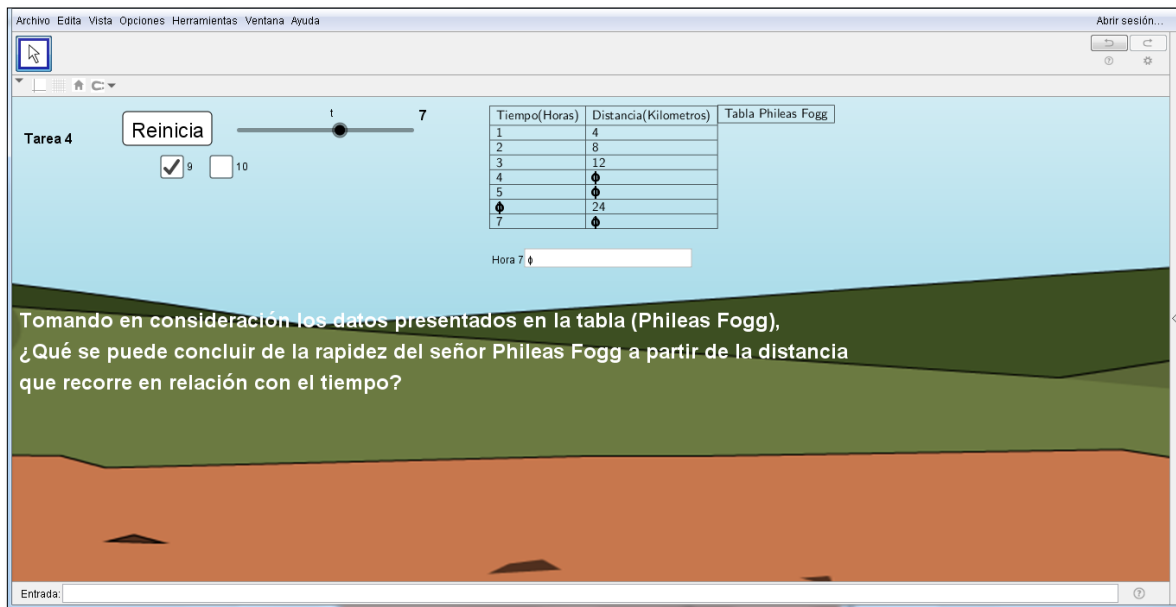


Ilustración 26. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 9.

Después de diligenciada la tabla en el punto 6 (señor Phileas Fogg), la pregunta 9 se centra en la identificación del cambio constante para la distancia por cada hora transcurrida. En el caso de cumplir el objetivo de llenar la tabla de manera correcta, se espera que el estudiante identifique el crecimiento de manera constante que presenta la distancia recorrida cuando de manera, también constante, aumenta el tiempo. Es así como se puede establecer que el señor Phileas Fogg se desplaza 4 kilómetros por cada hora recorrida, siendo este un caso de proporcionalidad directa simple.



Ilustración 27. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 10.

Para esta pregunta, el estudiante previamente ha tenido la oportunidad de establecer las distancias recorridas por ambos personajes a las 10 horas de recorrido. Al solicitarse la comparación de tales distancias, se pretende indagar si el estudiante ha comprendido que para cambios uniformes en la magnitud de entrada (tiempo) el inspector Fix recorre una distancia mayor.

Conforme a AM3, esta tarea indaga sobre la coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud, de manera que se espera por parte del estudiante una verbalización de la cantidad de las magnitudes de salida (distancias recorridas por el inspector Fix y el señor Phileas Fogg) mientras se consideran los cambios en la magnitud de entrada (tiempo), que será igual para los dos personajes.



Ilustración 28. Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables. Pregunta 11.

Dentro de AM3, si el estudiante ha coordinado de manera correcta la cantidad de cambio de la magnitud de salida (distancia) con los cambios en la magnitud de entrada (tiempo) tanto para el inspector Fix como para el señor Phileas Fogg, tendrá establecido que para incrementos iguales de tiempo (1 hora), la distancia recorrida por el persecutor (inspector Fix) aumenta en 5 kilómetros, mientras para el perseguido (señor Phileas Fogg) aumenta en 4 kilómetros.

Teniendo en cuenta que la distancia inicial entre las trompas de los elefantes (tomada como referencia para el alcance) es de 12 kilómetros, para que el inspector Fix alcance al señor Phileas Fogg tendrá que recorrer una distancia adicional. En el caso de realizar un análisis de tipo escalar o vertical, el estudiante podrá, en sus hojas de trabajo, continuar las tablas hasta el momento en que el inspector Fix recorra 12 kilómetros más que el señor Phileas, punto en el cual ambos personajes estarán en la misma posición correspondiente a 60 Kilómetros, punto en el cual coinciden las trompas de los elefantes y por tanto los personajes del comic.

Si en cambio, el análisis es de tipo funcional u horizontal, el estudiante habrá coordinado que para cada hora transcurrida el inspector Fix avanza 1 kilómetro más que el señor Phileas Fogg. Por tal motivo, será suficiente determinar para 1 Kilómetro adicional por cada hora, cuántas horas serían necesarias para recorrer 12 Kilómetros; para ambos tipos de análisis, el tiempo necesario para el alcance es de 12 horas.

Con lo anterior, el estudiante que se encuentre en N3 verbalizará la consciencia de la cantidad del cambio de la magnitud de salida (distancia recorrida) mientras considera los cambios de la magnitud de entrada (tiempo), bien sea mediante análisis funcional o análisis escalar.

3.2.1.5 Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes (AM4)

Esta tarea se centra, conforme al referente conceptual, en la coordinación de la razón de cambio promedio de la magnitud de salida (distancia recorrida) con los incrementos uniformes del cambio en la magnitud de entrada (tiempo). El estudiante que se encuentre en este nivel (N4) verbalizará la consciencia de la razón de cambio de la magnitud de salida (distancia recorrida) con respecto a la magnitud de entrada (tiempo) mientras se consideran incrementos uniformes de esta magnitud de entrada.

Debido a los cambios uniformes en la magnitud de entrada (tiempo), ésta se encuentra fragmentada en cinco momentos cada uno de una hora, controlados por un deslizador el cual genera de manera gráfica diferentes distancias recorridas correspondientes para cada hora. En esta tarea cambian las magnitudes tiempo y distancias recorridas por el señor Phileas Fogg cuando se percata de que será alcanzado.

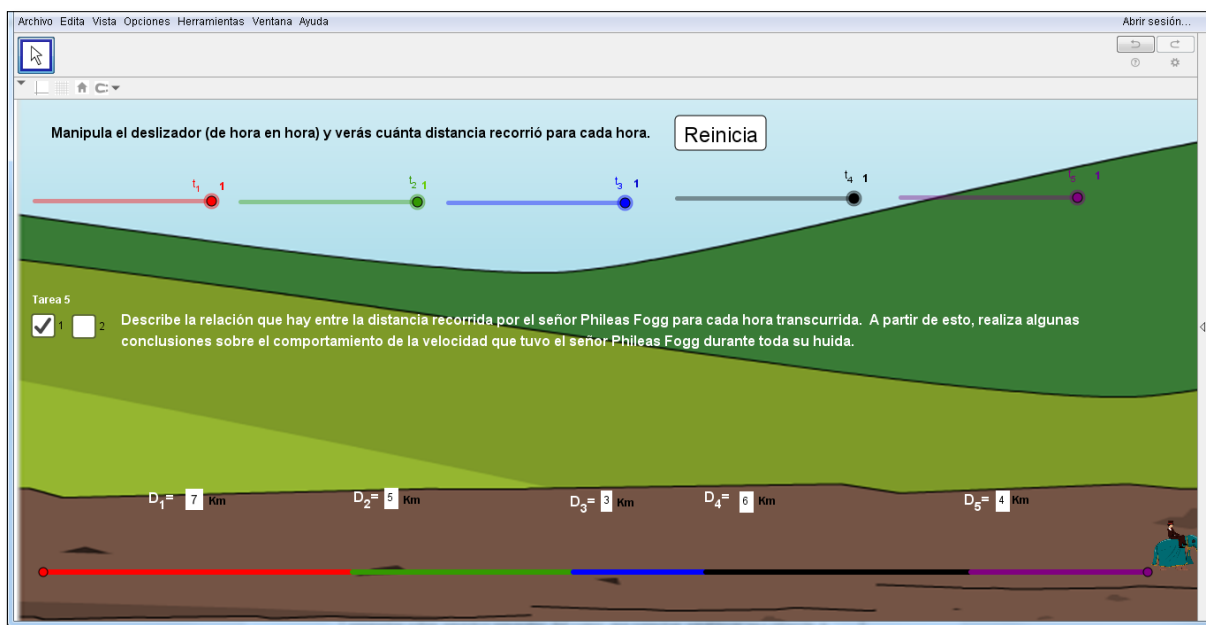


Ilustración 29. Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes. Pregunta 1.

En esta pregunta, después de manipularse los deslizadores, puede evidenciarse que las longitudes de los recorridos no fueron constantes para los incrementos uniformes del tiempo (ver deslizadores) por lo cual se espera que el estudiante establezca una relación entre la magnitud de salida (distancia) y la magnitud de entrada (tiempo).

Como razón de cambio promedio de la distancia total recorrida respecto al tiempo total transcurrido, el estudiante que esté en N4 deberá sustentar todas las acciones mentales anteriores, incluyendo AM4. En particular para esta pregunta, podrá sumar las distancias parciales (7 Km + 5 Km + 3 Km + 6 Km + 3 Km = 25) respecto al tiempo total (5 horas), de tal manera que relacione la magnitud de salida (distancia) respecto a la magnitud de entrada (tiempo), construyendo la velocidad media del señor Phileas Fogg durante la huida, obteniendo $\frac{25 \text{ km}}{5 \text{ h}} = \frac{5 \text{ km}}{\text{h}}$

Esta razón de cambio podrá consolidarse si el estudiante discrimina las velocidades parciales en cada hora teniendo en cuenta que los incrementos de la magnitud tiempo son uniformes, de una hora, y que es respecto a él que se establece la razón de cambio de la distancia recorrida. Por consiguiente, se facilita establecer que los recorridos para un mismo tiempo “t” están estrechamente relacionados con la velocidad, es decir, que a mayor velocidad, mayor distancia recorrida. Se espera entonces que el estudiante que esté en N4 manifieste que a mayor velocidad, mayor distancia recorrida, siendo este un caso de proporcionalidad directa simple.

La razón de cambio se presentará también cuando el estudiante puntualice, dando entrada a la nueva magnitud velocidad, que si en el primer tramo recorrió una distancia de 7 kilómetros en un tiempo de 1 hora, entonces el señor Phileas se desplazó a una velocidad de $\frac{7 \text{ km}}{\text{h}}$, y así para las siguientes cuatro distancias.

Por lo anterior, obteniendo las diferentes velocidades desarrolladas en esta tarea, el estudiante dará razón de los diferentes comportamientos que tuvo la velocidad en los diferentes intervalos de una hora de duración.

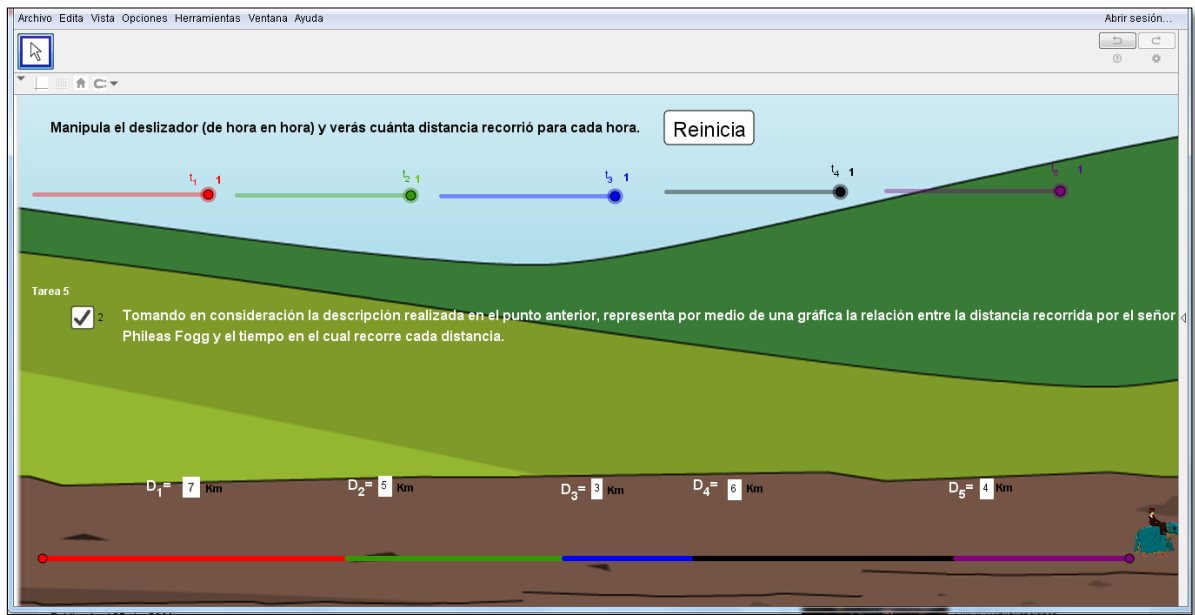


Ilustración 30. Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes. Pregunta 2.

Después de la descripción anterior, esta pregunta permite al estudiante, de manera libre, expresar mediante algún tipo de gráfico el comportamiento de la velocidad, entendida esta como la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo.

Luego de realizar la presentación y descripción de las tareas, en la tabla siguiente se describen las características y propósitos de cada una de estas tareas.

SITUACIÓN DE VARIACIÓN Y CAMBIO MEDIADA POR GEOGEBRA					
Tarea	Propósito	# De Preguntas.	Elementos conceptuales movilizados en la situación.	Estándares básicos de competencia de matemática Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	Acciones mentales
1 Comprendiendo la situación	Contextualizar la situación por medio del comic “La vuelta al mundo en 80 días” adaptado del libro homónimo escrito por Julio Verne (1872).	5	Contextualización literaria	Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos. Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	No aplica
2 Reconociendo relaciones entre magnitudes	Identificar la coordinación del cambio de una magnitud con los cambios en la otra, utilizando a Geogebra como mediador.	6	- Variación. - Covariación. - Verbalización del cambio. - Coordinación del cambio.		AM 1
3 Reconociendo cómo cambian las magnitudes	Identificar la coordinación de la dirección del cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud, utilizando a Geogebra como mediador.	5	- Variación. - Covariación. - Verbalización de la dirección del cambio. - Coordinación de la dirección cambio.		AM 2
4 Cuantificando los cambios de magnitudes variables	Identificar la coordinación de la cantidad del cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud, en los sistemas de representación gráfico y tabular, utilizando a Geogebra como mediador.	11	- Variación. - Covariación. - Verbalización de la cuantificación del cambio. - Coordinación de la cuantificación del cambio		AM 3
5 Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes.	Determinar la coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la magnitud de entrada, en los sistemas de representación gráfico y tabular, mediando Geogebra.	2	- Variación. - Covariación. - Razón de cambio promedio.		AM 4

Tabla 7. Estructura general de la situación de variación y cambio, en el marco conceptual del Razonamiento Covariacional, Carlson et al., (2003).

3.3 Sobre la implementación de la situación

La implementación de la situación se realizó en una sola jornada de cuatro horas y media con un descanso intermedio de media hora. Las primeras dos tareas se desarrollaron con tiempos de media hora para cada una y las tres últimas con tiempos de una hora, incluidas las plenarias en la parte final de cada tarea. En este punto, se realizaron por parte de los investigadores preguntas direccionadas a indagar las diferentes formas como los estudiantes abordaron las preguntas de una tarea específica. En estas preguntas los estudiantes, después de pedir la palabra, manifestaban sus posiciones para cada una de las preguntas hechas por los investigadores alrededor de una acción mental específica propia de cada tarea, en sintonía con el referente conceptual. Se contó con el apoyo de 5 representantes del semillero Geogebra de la Institución en lo referente a la logística y la filmación.

La respuesta a las tareas se llevó a cabo en la sala de sistemas de la sede central de la I.E.JMC con computador por estudiante, en cada uno de los cuales estaban los archivos de las tareas; éstas no podían abrirse sin la autorización de los investigadores.

Momento 1. Lectura del comic en medio digital y respuestas a las preguntas sobre la comprensión del texto. Este momento corresponde al desarrollo de la tarea 1, la cual se centra en la comprensión del comic que da origen a la situación

Momento 2. Trabajo con el archivo Geogebra de manera individual (Un estudiante por computador) y entrega de material en medio físico para las respuestas de las cinco tareas.

Al finalizar cada tarea se realizó una plenaria orientada por los autores de la investigación, en la cual los estudiantes socializaron sus respuestas con el grupo para profundizar en la relación entre los conocimientos y las formas de razonamiento evidenciados al enfrentar la situación de variación y cambio, mediada por Geogebra.

3.3.1 Participantes de la investigación

Para el desarrollo de esta propuesta de investigación se realizó la aplicación de la situación con 15 estudiantes de grado quinto de básica primaria de la sede John F. Kennedy, I.E.JMC de la ciudad

de Tuluá con el fin de poder analizar sus comportamientos, conforme al marco conceptual de referencia Carlson et al.,(2003), frente a la situación diseñada.

Los estudiantes seleccionados para la aplicación de la situación son escogidos con desempeños académicos heterogéneos en el área de matemática, con edades que oscilan entre 11 y 12 años, todos de estrato socioeconómico 1 y 2.

3.3.2 Metodología de la implementación e instrumentos de recolección de la información

Esta propuesta de investigación presenta un enfoque cualitativo de tipo descriptivo–interpretativo, el cual que tiene como método la observación directa en la aplicación de la situación y por lo tanto permite la relación y coherencia entre la teoría y la práctica.

La interpretación y la descripción en la metodología de la implementación, tal como lo plantea la investigación cualitativa⁹, no buscan estandarizar desde los resultados obtenidos, sino que realiza una descripción de los análisis de manera individualizada.

Los materiales utilizados para la aplicación de la situación son importantes para la recolección de la información, de los cuales se han seleccionado tres fuentes documentales: las producciones escritas de los estudiantes, grabaciones de audio y video y anotaciones de los investigadores.

- Las producciones escritas de los estudiantes o el trabajo de lápiz y papel, corresponden a las tareas propuestas en la situación.
- Las grabaciones de audio y video permiten la transcripción específica de las acciones y las verbalizaciones realizadas por los estudiantes al enfrentar las tareas de la situación.
- Las anotaciones de los investigadores se toman como fuente de las observaciones realizadas durante la implementación de las tareas.

3.4 Análisis de resultados

Este trabajo, desarrollado en el marco de la Maestría en modalidad de profundización centra su atención en las producciones de estudiantes de quinto grado de la I.E.JMC cuando desarrollan las 5 tareas propuestas de la situación, la primera de ellas en diapositivas correspondientes a la

⁹ Los principales tipos de investigación amparadas en este paradigma son las investigaciones cualitativas interpretativas (no buscan explicaciones sino interpretaciones).

presentación de un comic que contextualiza la situación, seguida de cuatro tareas compuestas por cuatro archivos diseñados en Geogebra acompañados de su respectiva hoja de trabajo.

Ya con las respuestas de los estudiantes, estas se clasificaron conforme a qué tan lejos o cerca se encontraban de las respuestas esperadas en el contexto de cada acción mental del referente conceptual. Es así como las respuestas quedaron tipificadas en conjuntos de respuestas llamadas R1, R2, R3..., en cada uno de las cuales se ubicaron las respuestas afines encontradas, es decir, con elementos comunes. Esta clasificación permitió que los tipos de respuestas que ofrecieron los estudiantes se presentaran en tablas en las cuales se exponen frecuencias absolutas y porcentuales.

A partir del marco conceptual de referencia se establecieron categorías de análisis para los tipos de respuestas dadas por los estudiantes, cada una con sus correspondientes criterios, tal como se muestra en la Tabla 8:

Categorías		Criterios
1	Razonamiento Covariacional. Carlson et al.,(2003)	• Comportamientos asociados a una acción mental. • Niveles de razonamiento covariacional. • Existencia comportamiento pseudoanalítico.
2	Análisis escalar y análisis funcional. Sumas iteradas.	• Debido a que en la situación se recrea un comportamiento directamente proporcional entre las magnitudes que se consideran (tiempo y distancia recorrida), con el apoyo del sistema de representación tabular, las respuestas de los estudiantes se analizan a partir del uso de análisis vertical u horizontal o sumas iteradas para completar las tablas.
3	Propósitos de las tareas 2, 3, 4 y 5.	• Analizar si las respuestas de los estudiantes se acercan a los propósitos de las tareas, cada una asociada a una acción mental específica del marco de referencia conceptual.

Tabla 8. Categorías y criterios de análisis

En particular, para la Tarea 1 se realizó un análisis muy general debido a que su propósito fue ubicar a los estudiantes en el contexto de la situación y por lo tanto no evalúa características del razonamiento covariacional, sino la comprensión del comic de manera que se facilite el abordaje de las tareas 2, 3, 4 y 5.

Para el análisis de las diferentes tareas se acude principalmente a las producciones escritas de los estudiantes en sus hojas de trabajo, complementadas con las hojas de registro de los investigadores y segmentos de las grabaciones de video para tener una mayor claridad de sus

actuaciones frente a una pregunta específica. Para el uso de estas últimas se presentan cuadros de diálogo entre el estudiante y el investigador con el empleo de las siguientes convenciones:

I: Investigador

E1, E2, E3,... $E_{(n-1)}$, E_n : Estudiante 1, Estudiante 2, Estudiante 3,..., teniendo en cuenta que las convenciones estarán asociadas a un estudiante en particular, y cuando se emplee dicha convención se estará haciendo referencia específicamente al estudiante al que representa.

3.4.1 Análisis de los resultados de la Tarea 1. Comprendiendo la situación



Se dio inicio a la primera tarea con la lectura del comic mediante diapositivas en cada computador. En ellas se adaptó y recreó apartes del libro “La vuelta al mundo en 80 días” haciendo énfasis en una persecución en elefante llevada a cabo en Bombay, India.

Los estudiantes fueron muy receptivos, evidenciándose en la primera plenaria por medio de preguntas intencionadas que hubo apropiación por parte de ellos de la historia. Todas las preguntas estuvieron relacionadas con aspectos del comic como personajes, origen de la apuesta, características de la apuesta, origen de la persecución, medios de transporte utilizados, el por qué de la ventaja inicial entre los personajes. En términos generales los estudiantes mostraron una lectura comprensiva del comic debido a que sus respuestas estaban en correspondencia con el propósito de esta primera tarea, haciendo énfasis en los momentos previos y durante la persecución.

Dentro de las respuestas a esta primera tarea 12 de los 15 estudiantes (80%) coincidieron en que el señor Phileas Fogg debía dar la vuelta al mundo en 80 días o menos si quería ganar la apuesta. Igualmente identificaron que el robo del banco de Inglaterra coincidió con la partida de Phileas Fogg, situación que motiva al inspector Fix para ir tras él, tal como se muestra en el siguiente diálogo:

L1. I: Al inicio del comic vemos que ellos (Phileas Fogg y su amigo) están reunidos tomándose un café ¿Qué estaban haciendo?

L2. E1: Estaban haciendo la apuesta de si podían recorrer el mundo en 81 días.

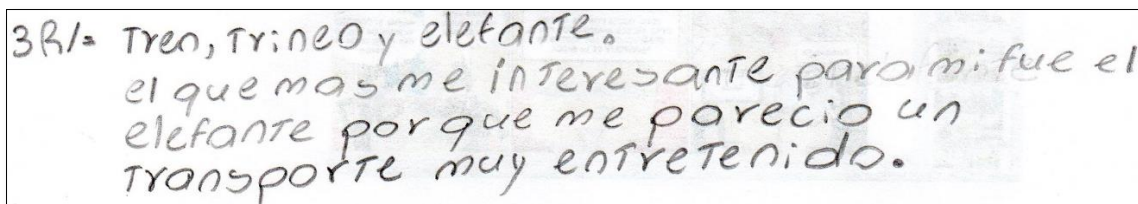
L3. I: ¿80 u 81 días?

L4. E1: 80.

Cuando E1 menciona que el recorrido se puede hacer en 81 días (en el desarrollo de la plenaria 1) casi al unísono, los compañeros hacen la corrección diciendo que deben ser 80 para ganar la apuesta. Se evidencia entonces con esto que se logra el propósito para el cual fue diseñada esta primera pregunta pues los estudiantes reconocieron el reto que tenía el señor Phileas de dar la vuelta al mundo en 80 días o menos para ganar la apuesta.

En la pregunta 2 se indaga sobre el por qué el inspector Fix se da a la persecución de Phileas Fogg. Ante ella 10 de los 15 estudiantes (66.7 %) identificaron que Phileas Fogg era sospechoso en ese momento del robo del banco de Inglaterra. Las otras respuestas fueron dispersas mencionando la aventura, la pasión por los medios de transporte y la apuesta misma.

En la pregunta 3 se indaga sobre el medio de transporte más llamativo entre todos los presentados en el comic. En este punto 11 de los 15 estudiantes (73.3 %) manifestaron que es el elefante el que más les llamó la atención. Los demás se inclinaron por el trineo, el tren, el ferrocarril y el barco. Un ejemplo de la respuesta con mayor tendencia se muestra en la Ilustración 31.



3R1= Tren, Trineo y elefante.
el que mas me interesante para mi fue el
elefante porque me parecio un
transporte muy entretenido.

Ilustración 31. Respuesta al Ítem3, Tarea 1, E2

La pregunta 4 inquiriere sobre la situación particular que muestra el comic, en la cual el inspector Fix cae del elefante. Ante esto, 6 de los 15 estudiantes (40 %) identificaron la caída del inspector Fix como aquello que le posibilitó al señor Phileas Fogg aumentar su ventaja sobre él durante la persecución. El resto de estudiantes dan diversos argumentos como por ejemplo el cansancio del persecutor, que iban en sentido contrario (posiblemente guiados por uno de los gráficos del comic), entre otros.

En general, con la plenaria de cierre para esta primera tarea se evidenció que los estudiantes comprendieron el contexto de la situación.

3.4.2 Análisis de los resultados de la Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes

En el I1 de esta tarea, cada estudiante manipuló el deslizador y posterior a ello se realizó una descripción de lo observado mediante producciones escritas y verbales, encontrándose principalmente tres tipos de respuestas.

Ítem 1 (I1) T2: Manipula el deslizador, el cual representa el tiempo, y realiza una descripción a partir de lo que observas en situación presentada.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que centran su atención en las magnitudes que cambian. Describen el movimiento de los personajes (Inspector Fix y el señor Phileas Fogg).	12	80%
R2	Estudiantes que describen los elementos del paisaje, los árboles, la carretera, los colores de los elefantes y, en general, lo que se ve en el fondo de pantalla del archivo.	1	6.7%
R3	Estudiantes que describen la situación de la huida de Phileas haciendo relación a la situación presentada en el comic.	2	13.3%

Tabla 9. Tipos de respuestas en el ítem 1 Tarea 1

De acuerdo con la tabla 9, el 80% de los estudiantes lograron captar que en la medida en que se manipula el deslizador la posición de los personajes cambia. Esto se hace evidente en sus producciones escritas, tal como se muestra a modo de ejemplo en la ilustración 32.

1. Cuando Mani pule el deslizador puedo ver como el Señor Phileas y el detective fix se van caminando encima del elefante (el elefante anda y ellos van encima de el animal).

Ilustración 32. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E3

Conforme a lo anterior, se evidencia que los estudiantes logran vislumbrar la posición de los personajes como algo que cambia con el movimiento del deslizador (el cual representa el tiempo). De acuerdo con lo anterior es posible afirmar que el estudiante, así como los demás que dieron este tipo de respuesta, evidencia una coordinación de las magnitudes distancia y tiempo, comportamiento propio de AM1.

Se encontró que algunos estudiantes, además de describir los cambios que se dan en algunas magnitudes de la situación, también centraron su atención hacia dónde es el desplazamiento de los personajes, tal y como se aprecia en la ilustración 33 en donde el estudiante indica que ambos personajes van en el mismo camino y dirección.

© El Primer Elefante Es rojo El segundo Es azul, Cada persona va en una posición diferente, se muestra que van en el mismo camino y dirección

Ilustración 33. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E4

Un estudiante (6.7%) se inclinó por hacer sus descripciones en torno a los elementos que configuran el paisaje que sirve de fondo de pantalla en el archivo, mencionando la presencia de árboles, el césped verde, los elefantes y sus colores y el camino pavimentado por donde transitan. Esto puede apreciarse a continuación en la ilustración 34.

7B/ hay 2 arguato uno grande y otro pequeño
hay 2 elefantes hay 2 arboles hay cesped
verde los elefantes son uno rojo y otro
azul hay un camino pavimentado

Ilustración 34. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E5

De acuerdo con la descripción que hace este estudiante, es posible afirmar que no considera el efecto que tiene la manipulación del deslizador sobre la situación presentada como elemento dinamizador de algunas magnitudes presentes en ella.

Por su parte, dos estudiantes (13.3%) parecen basar sus respuestas en la lectura previa del comic más que en lo que sucede en la situación al mover el deslizador, refiriéndose a características de la historia como el escape o huida del señor Phileas Fogg, tal y como se observa en las ilustraciones 35 y 36:

Ilustración 35. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E1

Ilustración 36. Respuesta al Ítem 1, Tarea 2, E6

Nótese cómo estos estudiantes no centran su atención en las magnitudes que cambian, sino en los elementos del comic.

A continuación se presentan los tipos de respuestas al ítem 2 de la Tarea 2:

Ítem 2 (I2) T2: ¿Qué está variando o cambiando en la situación?			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican un cambio de posición de los personajes (Inspector Fix y el señor Phileas Fogg), indicando que avanzan o se desplazan.	6	40 %
R2	Estudiantes que centran su atención en que el inspector Fix se acerca al señor Phileas Fogg a medida que el tiempo transcurre.	6	40 %
R3	Estudiantes que contemplan simultáneamente la variación de la posición los personajes (Inspector Fix y el señor Phileas Fogg) y de la distancia que los separa.	1	6.7 %
R4	Estudiantes que centran su atención en la variación de la velocidad de los personajes dependiendo de la manera en que se manipule el deslizador.	2	13.3 %

Tabla 10. Tipos de respuestas en el ítem 2 Tarea 2

De acuerdo con la tabla 10 se identifica que los 15 estudiantes logran identificar aspectos que cambian en la situación. Sin embargo, no todos centran la atención en los mismos tipos de elementos, pues 6 de ellos solamente identifican que lo que varía es la posición, tal y como se deja ver en la ilustración 37:

Ilustración 37. Respuesta al Ítem 2, Tarea 2, E7

Otros 6 estudiantes centran su atención únicamente en que lo que cambia es la distancia que separa un personaje del otro, reconociendo que esa distancia tiene una tendencia a ser cada vez menor en la medida en que se manipula el deslizador, tal como se aprecia en la siguiente producción verbal de uno de los estudiantes:

L1. I: ¿Qué ves en la situación?

L2. E8: En la situación veo que cuando ellos empiezan están bien separados y cuando los voy corriendo (mientras mueve el deslizador) el inspector Fix cada vez más se acerca al señor Phileas y la distancia entre ellos se va achicando más. Yo manipulé mucho el deslizador y me di cuenta de lo que le acabé de decir.

Obsérvese en el anterior cuadro de diálogo se aprecian imágenes de covariación que pueden sustentar la AM1 al coordinar la magnitud tiempo con los cambios en la magnitud distancia entre los personajes.

En la ilustración 38 se muestra la respuesta de un estudiante a este ítem en la cual identificó que tanto la posición de los personajes como la distancia entre ellos son elementos que varían en la situación en la medida en que la magnitud de entrada tiempo (presente en el deslizador) cambia.

Ilustración 38. Respuesta al Ítem 2, Tarea 2, E4

Otros dos estudiantes observan que lo que cambia es la velocidad de acuerdo a la manera en como se mueva el deslizador, tal como lo muestran las ilustraciones 39 y 40:

(C) lo que vemos entre esta es que al manipular esto podemos causar el movimiento de los elefantes si si utilizamos el Inicio tenemos una velocidad determinada que tenemos, y si manipulamos el deslizador podemos manipular la velocidad, ya sea causar de la velocidad o el transcurrir del tiempo los elefantes se acercan más.

Ilustración 39. Ilustración 39. Respuestas al Ítem 2, Tarea 2, E9

2 R1 = que al unir el boton iniciarse mueve a un tiempo determinado y al manejar la barra puedes decidir la velocidad que quieres.

Ilustración 40. Respuesta al Ítem 2, Tarea 2, E2

Nótese cómo los estudiantes reconocen que cuando el archivo funciona en modo automático (por medio del botón Inicio) la velocidad de los personajes es constante pero cuando se manipula abruptamente el Tiempo (presente en el deslizador) esto tiene repercusiones en la velocidad de los personajes, de manera que entre más rápido se manipule el Tiempo, mayores las velocidades de los personajes. Igualmente entre más lento sea el movimiento del deslizador, menores serán sus velocidades.

A continuación se presentan los tipos de respuestas encontradas a los ítems 3 y 4 de la Tarea 2:

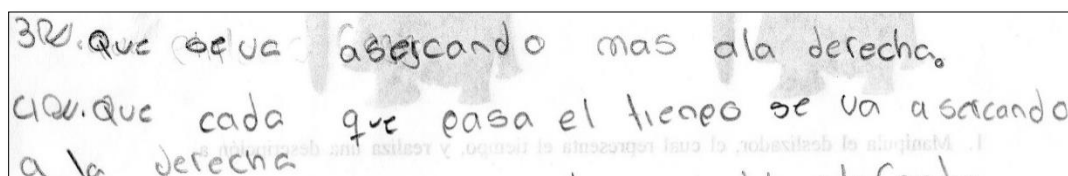
Ítems 3 y 4 (I3, I4) T2: I3: ¿Qué sucede con la posición del señor Phileas Fogg en la medida que transcurre el tiempo? I4: ¿Qué sucede con la posición del Detective Fix en la medida que pasa el tiempo?			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican un cambio de posición de los personajes (Inspector Fix y el señor Phileas Fogg), indicando que avanzan o se desplazan hacia la derecha.	4	26.7 %
R2	Estudiantes que identifican simultáneamente que los personajes se desplazan hacia la derecha y que la distancia entre los dos es menor a medida que el tiempo transcurre.	3	20 %
R3	Estudiantes que centran su atención únicamente en la distancia entre los dos personajes (el Inspector Fix está cada vez más cerca del señor Phileas Fogg).	8	53.3 %

Tabla 11. Tipos de respuestas en los Ítems 3 y 4 Tarea 2

De acuerdo con la tabla 11 y la intención del ítem 3 se esperaba que los estudiantes consideraran los desplazamientos de los personajes en la medida que el tiempo transcurre y el comportamiento de la distancia entre ellos. En este sentido, el 100% de los estudiantes relacionó que cambios en

la magnitud de entrada Tiempo (deslizador) generan cambios en las magnitudes de salida, bien sean los desplazamientos individuales de los personajes o la distancia que los separa.

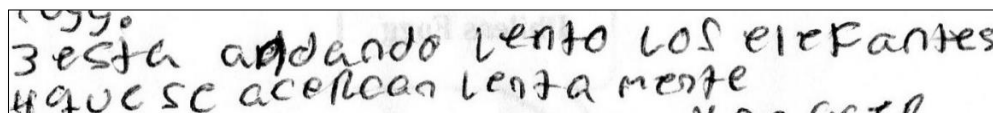
De este modo, 4 estudiantes identifican que cambios en la magnitud de entrada Tiempo (deslizador) generan cambios en la magnitud de salida (distancias recorridas por los personajes), lo cual en pantalla es visualizado en nuevas posiciones de los personajes, lo cual puede verse en la ilustración 41:



3R. que se va acercando mas a la derecha.
4R. que cada que pasa el tiempo se va acercando a la derecha

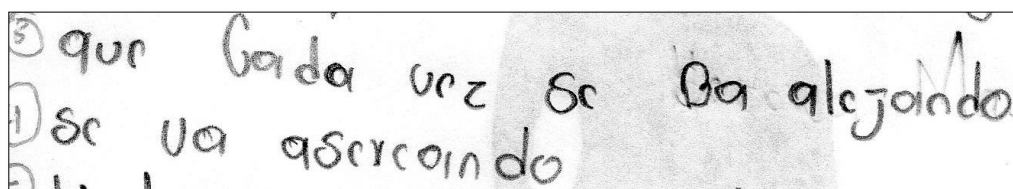
Ilustración 41. Respuestas a los Ítems 3 y 4, Tarea 2, E7

Otro grupo de 3 estudiantes reconocen lo anterior pero adicionalmente tienen en cuenta la disminución en la distancia que separa los personajes ante los cambios en la magnitud de entrada Tiempo (deslizador). Esto puede verse en las ilustraciones 42 y 43 que se muestran a continuación:



3 esta acercando lento los elefantes
4 que se acercan lentamente

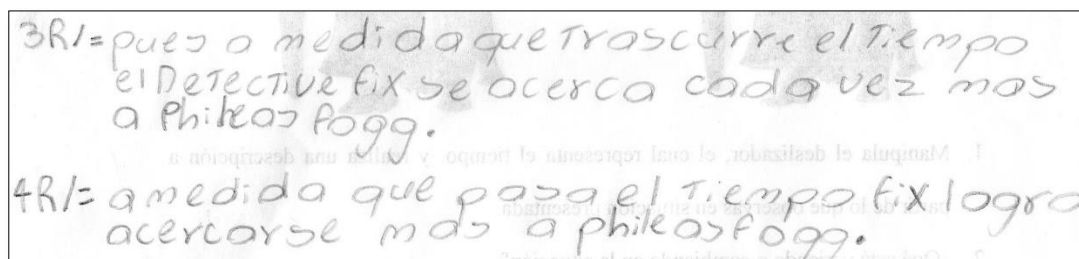
Ilustración 42. Respuestas a los Ítems 3 y 4 Tarea 2 E1



3 que cada vez se va alejando
4 se va acercando

Ilustración 43. Respuestas a los Ítems 3 y 4 Tarea 2 E4

Finalmente los restantes 8 estudiantes centran su atención únicamente en la distancia entre los personajes Fix y Fogg.



3R/= pues a medida que transcurre el tiempo el Detective fix se acerca cada vez mas a Phileas Fogg.
4R/= a medida que pasa el tiempo fix logra acercarse mas a phileas fogg.

Ilustración 44. Respuestas a los Ítems 3 y 4, Tarea 2, E2

Conforme a las ilustraciones anteriores (41 a la 44), se evidencia AM1 en las producciones escritas donde se aprecia coordinación de dos magnitudes, en este caso los desplazamientos de los personajes y/o la distancia que los separa con los cambios en el tiempo. Estos comportamientos sustentaron entonces la acción mental de coordinar el cambio en una magnitud con los cambios en la otra magnitud, AM1.

A continuación se presentan los tipos de respuestas encontradas al ítem 5 de la Tarea 2:

Ítem 5 (I5) T2: ¿De qué dependen las posiciones del inspector Fix y del señor Phileas Fogg?			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican que entre mayor sea el tiempo transcurrido, mayor es el desplazamiento de los personajes (Inspector Fix y el señor Phileas Fogg), indicando que avanzan o se desplazan hacia la derecha. Indican que las posiciones dependen del tiempo.	8	53.3 %
R2	Estudiantes que afirman que las posiciones del Inspector Fix y el señor Phileas Fogg dependen de la velocidad o del elefante sobre el cual viajan.	3	20 %
R3	Estudiantes que afirman que las posiciones dependen tanto del tiempo como de la velocidad con que se desplazan	1	6.7 %
R4	Estudiantes en cuyas respuestas no hay claridad o no corresponden a la pregunta planteada.	3	20 %

Tabla 12. Tipos de respuestas en el Ítem 4 Tarea 2

Las respuestas que presenta la tabla 12 muestran que el 80% (R1 + R2 + R3) manifiestan que la posición de los personajes depende del tiempo, de la velocidad o de ambas. Aunque el propósito de este ítem era que los estudiantes identificaran que las posiciones de los personajes dependen del Tiempo (presente en el deslizador), se encontraron además respuestas que tuvieron en cuenta la magnitud velocidad.

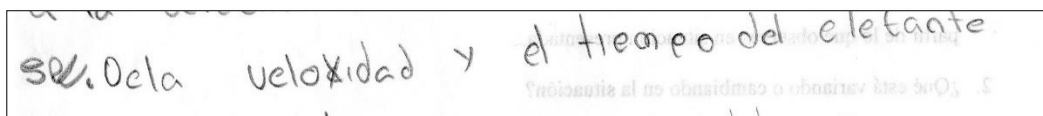


Ilustración 45. Respuesta al Ítem 5, Tarea 2, E7

Estas respuestas se consideraron válidas porque, aunque intuitivamente, hay reconocimiento de una nueva magnitud, la velocidad, coexistiendo con la distancia y el tiempo.

SW= de q hay una poca distancia y al ir avanzando hacia otro lado se van uniendo poco a poco y a medida de q el tiempo va pasando se van juntando poco a poco y queda con poca distancia de adelantamiento.

Ilustración 46. Respuesta al Ítem 5, Tarea 2, E10

Obsérvese en la ilustración 46 cómo el estudiante se refiere a que la posición de los personajes depende del tiempo, pero además contempla las repercusiones de los cambios de posición de los personajes como el desplazamiento (cuando afirma que están avanzando) y la disminución en la distancia entre los personajes (cuando hace referencia de que se van acercando poco a poco). Con lo anterior puede afirmarse que su comportamiento corresponde a AM1 debido a que denota una coordinación en la cual la posición de los personajes y la distancia entre ellos cambian con los cambios de la magnitud de entrada Tiempo, presente en la manipulación del deslizador.

3 estudiantes (20%) sobresalen por tener respuestas confusas que no parecen movilizarse en AM1. Por ejemplo, ante la pregunta “¿de qué dependen las posiciones del inspector Fix y del señor Phileas Fogg?”, encontramos la siguiente respuesta:

Se de que el puede estar en la misma posición de Phileas Fogg poco poder alcanzarlo

Ilustración 47. Respuesta al Ítem 5, Tarea 2, E6

Se aprecia en la ilustración 47 que en la producción escrita que no hay una coordinación entre la magnitud de entrada Tiempo y la posición por lo cual no sustenta la acción mental de los cambios en la posición con los cambios en el Tiempo o en la Velocidad (AM1).

A continuación se presentan los tipos de respuestas encontradas al ítem 6 de la Tarea 2:

Ítem 6 (I6) T2: De acuerdo con lo que estás observando, ¿será posible que el detective Fix alcance a al señor Phileas Fogg? Justifica tu respuesta.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que afirman que sí es posible debido a que la distancia entre los dos personajes (Inspector Fix y Phileas Fogg) es cada vez menor.	11	73.3 %
R2	Estudiantes que afirman que no es posible porque la longitud de la pantalla no es suficiente.	1	6.7 %

R3	Estudiantes que afirman que no es posible el alcance pero además no reconocen las magnitudes que varían.	3	20 %
-----------	--	---	------

Tabla 13. Tipos de respuestas en el Ítem 6 Tarea 2

Debido a que en esta pregunta se centra la atención en la relación entre el tiempo y la distancia entre los personajes (inspector Fix y Phileas Fogg), en la tabla 13 puede observarse cómo 11 estudiantes (73.3%) después de manipular el deslizador (correspondiente al tiempo) encontraron una correlación negativa al coordinar una disminución en distancia que separa los personajes cuando el Tiempo aumenta. Esto puede verse con mayor detalle en la siguiente producción escrita (ver ilustración 48):

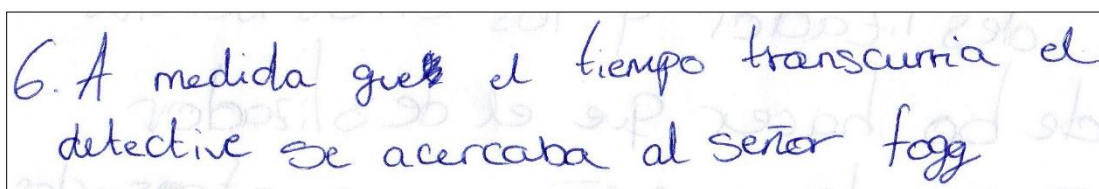


Ilustración 48. Respuesta al Ítem 6, Tarea 2, E3

Obsérvese en la ilustración 48 la coordinación presente entre el tiempo (deslizador) y la distancia entre los personajes donde se presenta una correlación negativa.

En la siguiente producción escrita un estudiante (ver ilustración 49) involucró intuitivamente la magnitud velocidad como protagonista en la disminución de la distancia entre Fix y Fogg:

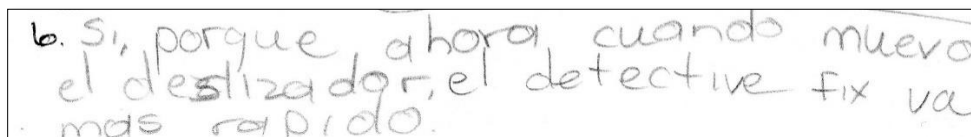


Ilustración 49. Respuesta al Ítem 6, Tarea 2, E11

Para la ilustración 49 debe tenerse en cuenta que al mover el deslizador (tiempo) en el archivo se generaba un movimiento simultáneo de los dos personajes en la misma dirección, donde parece que el estudiante logra identificar que el persecutor lleva una velocidad mayor la cual le permitirá un posterior alcance.

Otro estudiante, aunque afirma que no se produce el alcance, reconoce que la distancia entre los personajes disminuye a medida que el tiempo transcurre e incluye un nuevo elemento afirmando que se requiere de una mayor longitud de camino para el encuentro. Podría pensarse que comprende que la diferencia de velocidades entre los personajes no es suficiente para un alcance en pantalla, motivo por el cual se requiere de una distancia adicional (fuera de pantalla)

para cumplir tal objetivo. Del video de la plenaria correspondiente a la Tarea 2 se presenta el siguiente segmento del diálogo con el estudiante:

L1. I: ¿Crees que hay posibilidad de que el inspector Fix alcance al señor Phileas Fogg?

L2. E4: No porque en el comic se cae, pero si miro la respuesta acá (archivo de Geogebra) tiene posibilidad.

L3. I: ¿Y por qué crees que tiene posibilidad de alcanzarlo?

L4. E4: Porque cada vez que se mueve el tiempo (deslizador) se va acortando el camino (juntando las dos palmas de sus manos) aunque en el video (archivo de Geogebra) no lo muestre que se queden juntos, pero se podría decir que fuera siguiendo tendría posibilidades de alcanzarlo, que ahí no lo muestra pero sí hay posibilidades.



Ilustración 50. Verbalización respecto al Ítem 6 E4

En la ilustración 50 se observa a E4 mientras participa en la plenaria de la tarea 2 indicando que a medida que el tiempo transcurre se va acortando la distancia entre los personajes (mientras acerca las palmas de sus manos). Esto implica una verbalización de la consciencia de la coordinación de las magnitudes Tiempo (magnitud de entrada presente en el deslizador) y la distancia que separa a los personajes (magnitud de salida), donde se evidencia que los cambios en la segunda magnitud están determinados por los cambios en la primera, comportamiento propio de AM1. Incluso brinda elementos característicos de la acción mental siguiente.

3.4.3 Análisis de los resultados de la Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes

En esta tarea los estudiantes interactuaron con un archivo de Geogebra para identificar la dirección del cambio en la situación planteada.

A continuación se presentan los tipos de respuestas encontradas a los ítems 1 y 2 de la Tarea 3:

Ítem 1 (I1) T3: A medida que el tiempo transcurre, ¿qué sucede con la distancia recorrida por el inspector Fix? Justifica tu respuesta.			
Ítem 2 (I2) T3: A medida que el tiempo transcurre, ¿qué sucede con la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg? Justifica tu respuesta.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican que a mayor tiempo transcurrido mayor distancia recorrida por los personajes.	3	20 %
R2	Estudiantes que identifican que a mayor tiempo transcurrido menor distancia entre los personajes	12	80 %

Tabla 14. Tipos de respuestas en el Ítems 1 y 2 Tarea 3

De acuerdo con los resultados mostrados en la tabla 14 se puede afirmar que 3 estudiantes (20%) captan la correlación positiva existente entre el tiempo y la distancia recorrida por los dos personajes, afirmando que a mayor tiempo transcurrido mayor distancia recorrida por ellos. Esto se evidencia en las ilustraciones 51 y 52:

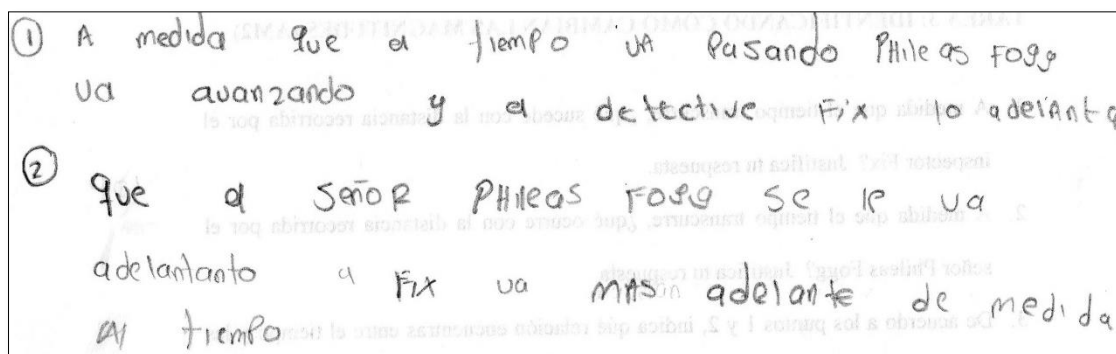
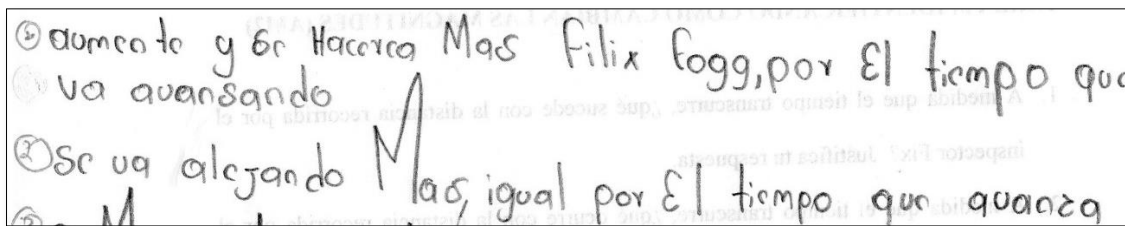


Ilustración 51. Respuestas a los Ítems 1 y 2, Tarea 3, E12

Cuando el estudiante afirma (Refiriéndose al inspector Fix) “a medida que el tiempo va pasando” puede notarse que se refiere a un incremento de esta magnitud, al igual que la expresión “va avanzando” se refiere al incremento en la distancia recorrida. De aquí puede interpretarse que incrementos en la magnitud de entrada (tiempo) generan incrementos en la magnitud de salida

(distancia recorrida). Otro ejemplo en donde este reconocimiento se hace se presenta a continuación en una producción de uno de los estudiantes

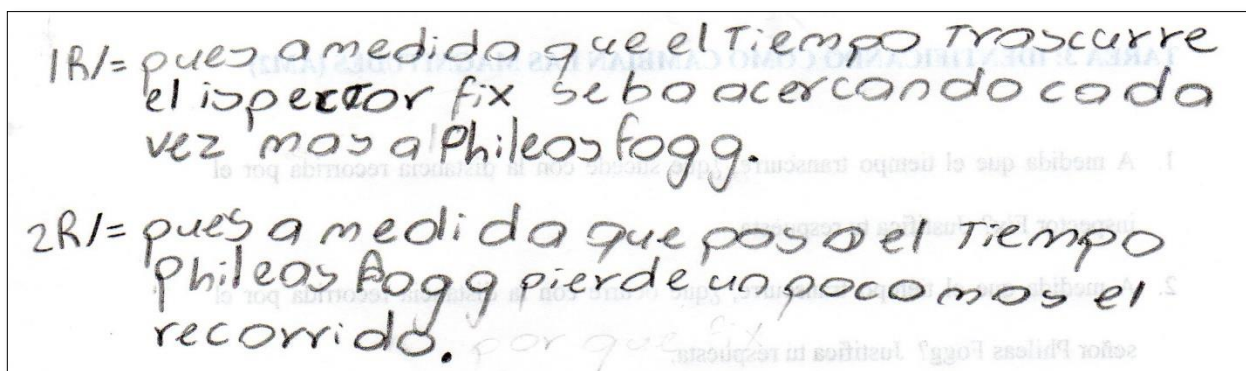


① aumento y se acerca Mas Filix Fogg, por El tiempo que
va avanzando
② Se va alejando Mas, igual por El tiempo que avanza

Ilustración 52. Respuestas a los Ítem 1 y 2, Tarea 3, E4

En la ilustración 52, de manera afín al caso anterior (ilustración 51), se puede apreciar que el estudiante identifica una correlación directa entre las magnitudes tiempo (magnitud de entrada) y la distancia recorrida por cada personaje (magnitud de salida) al expresar, respecto al inspector Fix, que su distancia recorrida aumenta cuando el tiempo va avanzando, y asimismo que Phileas Fogg se va alejando mientras el tiempo avanza. Por consiguiente, en las ilustraciones 51 y 52 puede apreciarse la verbalización de la consciencia de la dirección del cambio de la magnitud de salida (distancia recorrida) mientras se consideran cambios en la magnitud de entrada (tiempo), comportamiento propio de AM2.

Los 12 estudiantes restantes (80%) centraron su atención en la disminución de la distancia que separa los personajes (inspector Fix y Phileas Fogg) a medida que transcurre el tiempo, lo cual podría interpretarse como la identificación de una correlación inversa entre la magnitud entrada Tiempo (representada con el deslizador) y la magnitud de salida (distancia que separa a los personajes), es decir, que a mayor tiempo, menor es la distancia entre el inspector Fix y el señor Phileas Fogg. Esto se evidencia a modo de ejemplo en la ilustración 53:



1R/= pues a medida que el Tiempo transcurre
el inspector fix se va acercando cada
vez mas a Phileas fogg.
2R/= pues a medida que pasa el Tiempo
Phileas Fogg pierde un poco mas el
recorrido. por que fix

Ilustración 53. Respuestas a los ítems 1 y 2, Tarea 3, E2

Uno de los estudiantes de este grupo (R2) además de reconocer que la distancia cambia, parece identificar una diferencia en las velocidades de los personajes, cuando se refiere a que el señor Phileas Fogg va más despacio. Este estudiante logra reconocer que para incrementos de tiempo iguales el persecutor (Inspector Fix) recorre distancias mayores que el perseguido (señor Phileas Fogg), tal como se aprecia en su producción escrita:

20=10 y pasa con la distancia recorrida del señor Phileas Fogg es q poco a poco se va yendo pero va mas despacio por lo tanto el inspector fix lo alcanza

Ilustración 54. Ítem 2, Tarea 3, E10

Obsérvese en la ilustración 54 la expresión “poco a poco” para referirse al tiempo que transcurre, hecho que parece indicar la consciencia de la dirección del cambio de la magnitud de salida (distancia entre los personajes) mientras se consideran los cambios en la magnitud de entrada (Tiempo) representada con en el deslizador, comportamiento propio de AM2.

Se presenta a continuación un segmento sobre la verbalización de dos estudiantes durante la tercera plenaria respecto a los ítems 1 y 2:

- L1. I:** *A medida que el tiempo transcurre, ¿Qué pasa con la distancia recorrida por el inspector Fix?*
- L2. E4:** *Es más larga*
- L3. I:** *¿Y para el señor Phileas Fogg?*
- L4. E4:** *Es menos la distancia que recorre.*
- L5. I:** *En términos generales, entre mayor sea el tiempo... (interviene estudiante)*
- L6. E13:** *Mayor distancia.*
- L7. I:** *¿Mayor distancia... qué?*
- L8. E13:** *Recorrida.*
- L9. I:** *¿Alguien piensa diferente?*
- L10. E4:** *Con más mayor tiempo que transcurre menos es la distancia (juntando las palmas) entre Filix... (piensa un momento) Fix y Phileas Fogg.*

En el anterior segmento de la plenaria 3 se observa, respecto al incremento del tiempo, cómo E4 y E13 relacionan las magnitudes de salida “distancia recorrida” y “distancia entre los personajes”, respectivamente. Es decir, mientras E4 centra la atención en que para incrementos

iguales de tiempo las distancias el inspector Fix recorre una distancia mayor que Phileas Fogg, por lo cual la distancia entre ellos tiende a disminuir, tal como se aprecia en L10.

De acuerdo con lo anterior, es posible afirmar que todos los estudiantes verbalizan la conciencia de la dirección del cambio de las magnitudes de salida (distancia recorrida para E4 y distancia entre los personajes para E13) mientras se consideran cambios en la magnitud de entrada Tiempo (presente en el deslizador), comportamiento propio de AM2.

A continuación se presentan las respuestas dadas por los estudiantes al ítem 3 de la Tarea 3:

Ítem 3 (I3) T3: De acuerdo a los puntos 1 y 2, indica qué relación encuentras entre el tiempo y las distancias recorridas por el Señor Phileas Fogg y el inspector Fix.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que centran su atención en que la velocidad del inspector Fix es mayor que la del señor Phileas Fogg.	2	13.3 %
R2	Estudiantes que centran la atención en la disminución de la distancia entre los personajes a medida que el tiempo transcurre.	9	60 %
R3	Estudiantes que relacionan que a mayor tiempo, mayor distancia recorrida por los personajes.	4	26.7 %

Tabla 15. Tipos de respuestas en el Ítem 3 Tarea 3

Con esta pregunta pretende determinar si los estudiantes identifican la correlación directa existente entre el tiempo y la distancia recorrida por cada uno de los personajes. En este sentido, 4 estudiantes (26.7%) logran el reconocimiento de esta relación, tal como se muestra a modo de ejemplo en las ilustraciones 55 y 56:

Handwritten student response: "3 a Mayor tiempo Mayor distancia recorrida". The text is written in blue ink on a white background.

Ilustración 55. Respuesta al Ítem 3, Tarea 3, E4

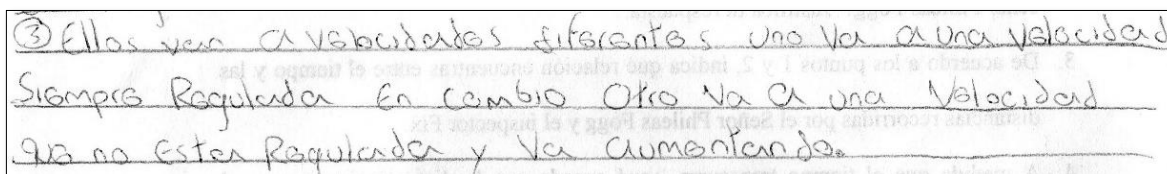
Handwritten student response: "3 cuando el tiempo transcurre ellos transcurren y cuando el tiempo para ellos para tambien". The text is written in blue ink on a white background.

Ilustración 56. Respuesta al Ítem 3, Tarea 3, E14

Obsérvese en las ilustraciones 55 y 56 cómo los estudiantes dejan ver en sus producciones escritas una verbalización de la conciencia de la dirección del cambio de la magnitud de salida

(distancia recorrida) mientras se consideran los cambios en la magnitud de entrada (Tiempo presente en el deslizador), comportamientos característicos de AM2.

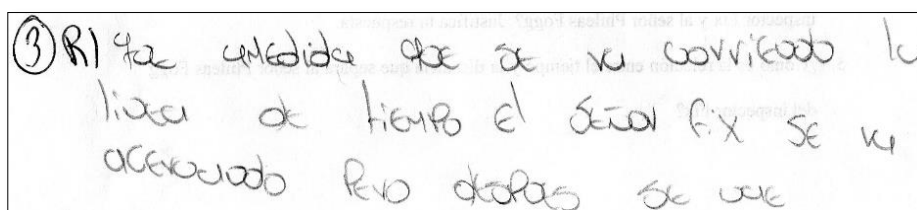
Otro grupo de 2 estudiantes (13.3%) centran su atención en las diferencias de las velocidades de los personajes pero sin referirse a ninguna de las dos magnitudes sobre las que se indaga en la pregunta. Esto dificulta establecer de manera clara si los estudiantes reconocen o no una coordinación de la dirección del cambio entre magnitudes. A modo de ejemplo se muestra continuación en la ilustración 57 una de estas producciones escritas.



③ Ellos van a velocidades diferentes uno va a una velocidad
Siempre Regular en cambio Otro va a una Velocidad
que no esta Regular y va aumentando.

Ilustración 57. Respuesta al Ítem 3, Tarea 3, E9

Los otros 9 estudiantes (60 %) continuaron centrando su atención en la correlación inversa entre la magnitud de entrada Tiempo (presente en el deslizador) y la magnitud de salida (distancia entre los personajes), que si bien implica coordinar la dirección del cambio entre las magnitudes mencionadas, no responden de manera explícita a la pregunta planteada. A continuación se presenta una producción escrita en donde respondiendo a este ítem evidencia lo anterior:



③ R) La cantidad que se va recorriendo la
línea de tiempo el señor fix se va
acercando pero después se va

Ilustración 58. Ítem 3 Tarea 3 E8

Aunque en la ilustración 58 se puede observar que el estudiante retoma la caída del inspector Fix que se presentó durante la narración del comic (desarrollo de la Tarea 1), cuando se refiere al cambio del tiempo (representada con el deslizador) con respecto a la distancia que separa al inspector Fix de Phileas Fogg deja ver la identificación de la correlación inversa mencionada. Esto puede vincularse directamente al comportamiento de verbalización de la consciencia de la dirección del cambio de la magnitud de salida (distancia entre los personajes) mientras se consideran los cambios en la magnitud de entrada Tiempo (presente en la manipulación del deslizador), propia de AM2.

A continuación se exponen en la tabla 16 los tipos de respuestas dados por los estudiantes al ítem 4 de esta tarea.

Ítem 4 (I4) T3: A medida que el tiempo transcurre, ¿qué sucede con la distancia que separa al inspector Fix y al señor Phileas Fogg? Justifica tu respuesta.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican que la distancia entre los personajes en menor con el transcurrir del tiempo	14	93.3 %
R2	Estudiantes que para responder, no consideran lo que se presenta en el archivo de Geogebra sino que retoman un momento del comic.	1	6.7 %

Tabla 16. Tipos de respuestas en el Ítem 4 Tarea 3

Para este ítem se esperaba que los estudiantes identificaran la disminución de la distancia entre los personajes con el transcurrir del tiempo. Conforme a esta intención, en las producciones escritas de 14 estudiantes (93.3%) se deja ver que identifican que a mayor tiempo menor es la distancia que separa los personajes. Estas respuestas guardan relación con las ofrecidas por la mayoría de los estudiantes en los ítems anteriores de esta tarea, donde ya se identificaba que reconocían la forma en que se relacionaban estas magnitudes. En este orden de idea, es posible afirmar que la mayoría de los estudiantes muestran la consciencia de la dirección del cambio de la magnitud de salida mientras se consideran cambios en la magnitud de entrada, comportamiento propio de AM2.

Para evidenciar lo anterior, se presenta las ilustraciones 59 y 60:

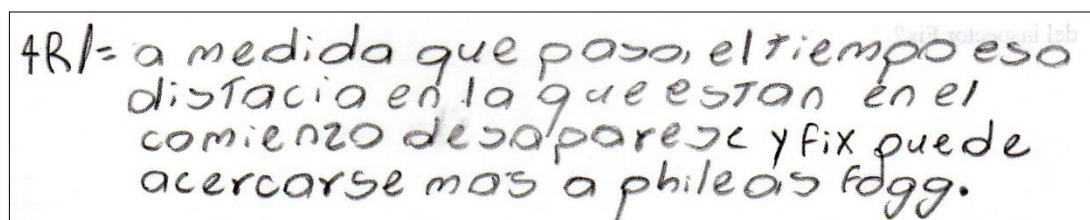


Ilustración 59. Respuesta a Ítem 4, Tarea 3, E2

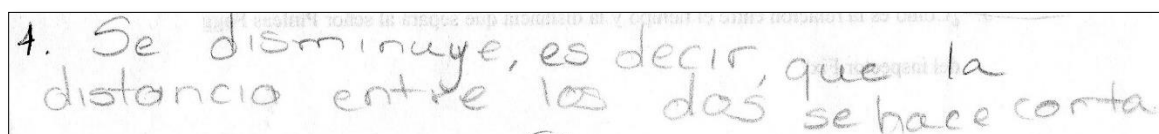


Ilustración 60. Respuesta a Ítem 4, Tarea 3, E11

En la ilustración 60 el estudiante explicita la coexistencia de las magnitudes tiempo y distancia entre los personajes haciendo una coordinación correcta de la dirección del cambio de la distancia entre los personajes con los cambios en el tiempo (deslizador). Esto se deja ver cuando expresa: “a medida que pasa el tiempo...la distancia desaparece”.

La coordinación anterior también se hace visible en la ilustración 61 cuando ante incrementos de la magnitud de entrada (tiempo) el estudiante emplea la expresión “disminuye” refiriéndose a la magnitud de salida (distancia entre los personajes).

Por otro lado, 1 estudiante (6.7%) responde a este ítem dejando de lado lo que se presenta en el archivo de Geogebra y lo que se puede observar en él al manipular el deslizador, el cual representa el tiempo y retomando el contexto presentado en el comic, en particular el evento en el cual el persecutor se cae, ofrece su respuesta. En la ilustración 61 se puede apreciar lo anterior:

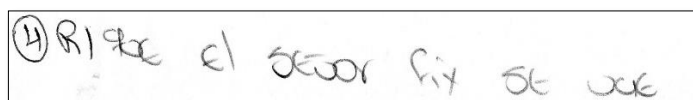


Ilustración 61. Ítem 4, Tarea 3, E8

Nótese en la anterior producción escrita que el estudiante no tiene en cuenta para su respuesta la interacción con el archivo de Geogebra ni las magnitudes sobre las cuales se le pide que centre su atención, sino que retoma un evento particular del comic. Por consiguiente, no se puede identificar en el estudiante algún tipo de coordinación de dirección del cambio de magnitudes.

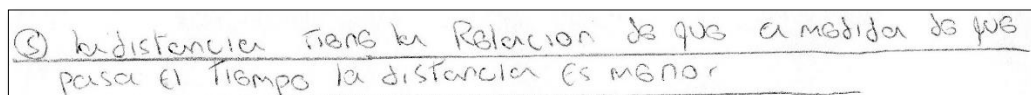
A continuación se exponen en la tabla 17 los tipos de respuestas dados por los estudiantes al ítem 5 de esta tarea.

Ítem 5 (I5) T3: ¿Cómo es la relación entre el tiempo y la distancia que separa al señor Phileas Fogg del inspector Fix?			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican que a mayor tiempo, menor distancia entre los personajes.	13	86.7 %
R2	Estudiantes que no sitúan la pregunta en el archivo en curso y en su respuesta citan un momento del comic.	2	13.3 %

Tabla 17. Tipos de respuestas en el Ítem 5 Tarea 3

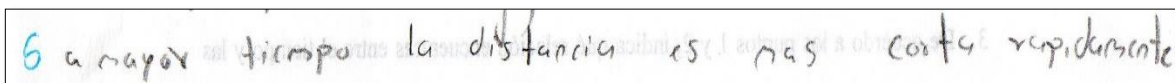
Estrechamente relacionado con las respuestas dadas por los estudiantes ante el ítem anterior, en este se logra percibir que la mayoría de ellos (9 estudiantes, 60 %) evidencian la consciencia de la

dirección del cambio de la distancia entre los personajes mientras se consideran cambios en el tiempo, AM2, manifestándolo como relación de 2 magnitudes. Esto se muestra en las siguientes producciones escritas (ver ilustraciones 62, 63 y 64):



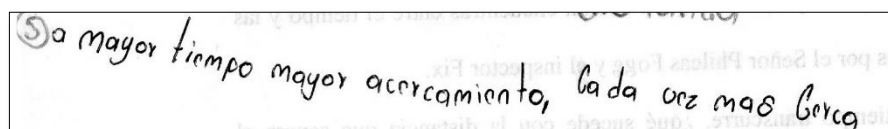
⑤ la distancia tiene la Relación de que a medida de que pasa el tiempo la distancia es menor

Ilustración 62. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E9



6 a mayor tiempo la distancia es mas corta rapidamente

Ilustración 63. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E14

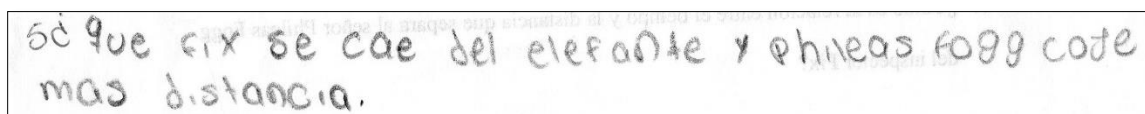


⑤ a mayor tiempo mayor acercamiento, cada vez mas cerca

Ilustración 64. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E4

Las anteriores producciones escritas de los estudiantes permiten dar cuenta, conforme al referente conceptual Carlson et al., (2003), de coordinación de la dirección del cambio de la distancia entre los personajes con los cambios en el tiempo, manifestada como relación, AM2.

Ahora bien, 2 estudiantes (13.3%) no tienen en cuenta la interacción con el archivo de Geogebra propio de la tarea y sus respuestas a este ítem están fundamentadas en el contexto de la situación presentado en el comic (Tarea 1) sin una correspondencia con lo que sucede al manipular el deslizador (tiempo) tal como lo indican las siguientes producciones escritas (ver ilustraciones 65 y 66):



es que si se cae del elefante y phineas fogg corre mas distancia.

Ilustración 65. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E6

5) R1 por el señor Fix va muy variado +
se que esa fue la ventaja del
señor Phileas

Ilustración 66. Respuesta al Ítem 5, Tarea 3, E8

Nótese cómo las producciones de estos dos estudiantes están tensionadas por la situación descrita en el comic, abandonando por completo la interacción con lo presentado en el archivo de Geogebra.

3.4.4 Análisis de los resultados de la Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables

En esta tarea aparecen por primera vez valores numéricos en pantalla, algunos de los cuales describen el tiempo y otros las distancias recorridas por cada uno de los personajes siendo ambas cantidades son variables y dándose entre ellas una covariación. Se intenta con esta tarea que los estudiantes den cuenta de la cuantificación de esos cambios y de la forma cómo covarían dichas cantidades.

A continuación, en la tabla 18, se presentan los tipos de respuesta dadas por los estudiantes para el ítem 1 de la Tarea 4:

Ítem 1 (I1) T4: A partir de lo que observas en la situación, indica cuál es la distancia inicial que separa al inspector Fix y al señor Phileas Fogg.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican que la distancia inicial entre los personajes es de 12 Kilómetros.	15	100 %

Tabla 18. Tipos de respuestas al ítem 1 Tarea 4

Como se aprecia en la tabla anterior, el 100% de los estudiantes identificaron la distancia inicial que separa los personajes a partir de la posición que ocupa cada uno ellos. Dicha distancia se toma en consideración de trompa a trompa de cada elefante. En la ilustración 67 se evidencia a modo de ejemplo una de las respuestas dadas a este ítem:

LR1= la distancia inicial que los separa es 12 Km

Ilustración 67. Respuesta al Ítem 1, Tarea 4, E2

A continuación se presentan los tipos de respuestas expuestos por los estudiantes para los ítems 2 y 6 de la Tarea 4. Estos ítems se trabajan conjuntamente dada la naturaleza similar de ellos, en la cual indagan por lo mismo.

Ítems 2 y 6 (I2, I6), T4: I2: En la siguiente tabla se presentan las distancias recorridas (en kilómetros) por el inspector Fix en relación con el tiempo (en horas) transcurrido. Completa la tabla a partir de la información suministrada en ella. I6: En la siguiente tabla se presentan las distancias recorridas (en kilómetros) por el señor Phileas Fogg en relación con el tiempo (en horas) transcurrido. Completa la tabla a partir de la información suministrada en ella.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que completan las tablas propuestas correctamente	15	100 %

Tabla 19. Tipos de respuestas a los ítems 2 y 6 Tarea 4

Como puede verse en la tabla 19, los 15 estudiantes (100%) identificaron el patrón de aumento para cada una de las cantidades en ambas magnitudes: para las distancias recorridas (de 4 en 4 para Phileas Fogg y de 5 en 5 para el inspector Fix) y para los tiempos transcurridos (de hora en hora), hecho que facilitó el adecuado llenado de las tablas propuestas en estos ítems. A manera de ejemplo se presenta en la ilustración 68 una de las tablas diligenciadas por los estudiantes:

TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA (KM)	TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA (KM)
1	5	1	4
2	10	2	8
3	15	3	12
4	20	4	16
5	25	5	20
6	30	6	24
7	35	7	28

Ilustración 68. Respuestas a los Ítems 2 y 6, Tarea 4, E14

Se observa en la ilustración anterior que la estudiante identificó los patrones de aumento para ambas magnitudes, tiempo y distancia.

A continuación se presentan los tipos de respuestas expuestos por los estudiantes para los ítems 3 y 7 de la Tarea 4. Estos ítems se trabajan conjuntamente dada la naturaleza similar de ellos, en la cual indagan por lo mismo.

Ítems 3 y 7 (I3, I7), T4: Explica cómo hiciste para completar los datos de la tabla (Inspector Fix y Phileas Fogg, respectivamente).			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que completan las tablas mediante sumas iteradas previo reconocimiento del patrón en cada una de las magnitudes.	11	73.3 %
R2	Estudiantes que llenan las tablas mediante un análisis horizontal o funcional.	2	13.3 %
R3	Estudiantes que llenan las tablas mediante un análisis vertical o escalar.	2	13.3 %

Tabla 20. Tipos de respuestas a los ítems 3 y 7 Tarea 4

La tabla 20 muestra cómo 11 estudiantes (73.3%) para completar las tablas de los ítems 2 y 6, emplearon las sumas iteradas previo reconocimiento del patrón para la magnitud distancia, esto es, sumando de 5 en 5 para el caso del inspector Fix (quien persigue) y de 4 en 4 para el del señor Phileas Fogg. En sus respuestas escritas estos estudiantes no dan cuenta de la variación del tiempo y solamente se refieren a la variación presente en las distancias de ambos personajes, tal como se ilustra a modo de ejemplo en las ilustraciones 69, 70 y 71:

Ilustración 69. Respuesta al Ítem 3, Tarea 4, E14

Ilustración 70. Respuesta al Ítem 7, Tarea 4, E7

Ilustración 71. Respuesta al Ítem 7, Tarea 4, E4

Sin embargo es importante resaltar que estos estudiantes sí identifican la variación presente en el tiempo dado que, como ya se indicó, ellos completan las tablas correctamente. Adicionalmente, se muestra en la ilustración 71, a manera de ejemplo, cómo los estudiantes identifican previamente, en este caso cuando se afirma “se ve que van de 4 en 4”, antes de realizar las sumas iteradas, lo que se aprecia cuando expresa “al número que está atrás se le suma 4”.

2 estudiantes (13.3%), dieron cuenta de un análisis horizontal o funcional para completar las tablas, tal y como se ejemplifica en la ilustración 72, donde el estudiante está indicando cómo completó la tabla para el caso del inspector Fix.

Ilustración 72. Respuesta al Ítem 3, Tarea 4, E11

A partir de esta ilustración se puede observar que este estudiante encontró el patrón que guardan las variaciones de las distancias, el cual emplea como un factor para encontrar la distancia recorrida para cualquier cantidad de tiempo. En este sentido, se puede afirmar que estos 3 estudiantes identifican el valor de $f(1)$ como el operador función que permite establecer la relación entre los

dos espacios de medida (tiempo y distancia recorrida). De esta manera, las cantidades encontradas en la columna correspondiente a la distancia recorrida se obtienen mediante el producto de cada unidad de tiempo y el valor correspondiente a $f(1)$ que para el caso del inspector Fix es 5 km.

A continuación se presenta un fragmento de la plenaria correspondiente a la Tarea 4 en la cual se hace visible este tipo de análisis horizontal o funcional efectuado por los estudiantes:

L1. I: ¿Alguna otra estrategia?

L2. E3: Yo hice entonces, el de kilómetros que va de cinco en cinco y en el otro, en el de las horas tenemos el uno, el dos y así. Yo hice cinco por dos que da diez, cinco por tres quince, cinco por cuatro veinte, cinco por cinco veinticinco.

2 estudiantes (13.3%) realizaron el llenado de las tablas mediante análisis vertical o escalar, en el cual establecieron variaciones constantes tanto en el tiempo como en la distancia recorrida. Esto se evidencia en las ilustraciones 73 y 74:

Handwritten text: 3R/= pues lo que se fue inspeccionar la Tabla y me di cuenta que por cada hora adelanta 5km

Ilustración 73. Respuesta al Ítem 3, Tarea 4, E2

Handwritten text: 3R= lo q se puede concluir q cada hora recorria 4 km

Ilustración 74. Respuesta al Ítem 7, Tarea 4, E10

Se observa en las ilustraciones anteriores que los estudiantes han establecido que mientras el tiempo cambia de 1 en 1 las distancias cambian de 5 km en 5 km para el inspector Fix (ilustración 73) y de 4 km en 4 km para el señor Phileas Fogg (ilustración 74), es decir, cambios en el espacio de medida “tiempo” determinan cambios simétricos en el espacio de medida “distancia recorrida”, siendo entonces un análisis de tipo escalar.

Obsérvese cómo estos dos 2 estudiantes (ilustraciones 73 y 74) establecen la razón entre las distancias recorridas y el tiempo identificando en el primer caso, que por cada unidad de tiempo hay un incremento de 5 unidades en la distancia ($\frac{\text{Adelanta 5 kilómetros}}{\text{Por cada hora}}$) y para el segundo caso que por cada unidad de tiempo hay un aumento de 4 unidades en la distancia recorrida ($\frac{\text{Adelanta 4 kilómetros}}{\text{Por cada hora}}$). Por consiguiente estos 2 estudiantes logran identificar la covariación que

se presenta entre las cantidades de ambas magnitudes (tiempo y distancia recorrida), es decir, que por cada hora transcurrida hay unos incrementos específicos en las distancias recorridas por cada personaje.

Debido a que el emplear los análisis escalar y funcional al completar las tablas, se hace necesario reconocer que cambios en un espacio de medida (Tiempo) generan cambios en el otro espacio de medida (Distancia recorrida) y cuantificarlos, esto implica una coordinación de la cantidad de cambio de la magnitud de salida cuando se consideran los cambios en la magnitud de entrada. Conforme a lo anterior, 4 estudiantes (26.7%) podrían asociarse a comportamientos propios de AM3. Los 11 estudiantes restantes (73.3%) al solo manifestar cambios en una de las magnitudes sin evidenciar la correspondencia que guardan estos cambios con los generados en la otra magnitud, no evidenciando así comportamientos asociados a la covariación, es decir, una imagen sostenida de dos magnitudes que varían simultáneamente.

A continuación se presentan los tipos de respuestas expuestos por los estudiantes para los ítems 4 y 8 de la Tarea 4. Estos ítems se trabajan conjuntamente dada la naturaleza similar de ellos, en la cual indagan por lo mismo.

Ítems 4 y 8 (I4, I8), T4: I4: ¿Cuál es la distancia recorrida por el inspector Fix en 1 hora y media, 10 horas y 20 horas? Explica tus respuestas. I8: ¿Cuál es la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg en 1 hora, 1 hora y media, 10 horas y 20 horas? Explica tus respuestas.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que responden y justifican empleando un análisis vertical o escalar	9	60 %
R2	Estudiantes que no responden a los ítems planteados	6	40 %

Tabla 21. Tipos de respuesta a los Ítems 4 y 8, Tarea 4

En la tabla 21 se muestra que el 9 estudiantes (60%) de los estudiantes presentan producciones escritas que evidencian la covariación de dos cantidades, mediante análisis escalar. En este sentido, en las ilustraciones 75 y 76 puede apreciarse cómo el estudiante contempla de manera simultánea las magnitudes tiempo y distancia, encontrando que cambios en los en el tiempo generaron cambios simétricos en la distancia recorrida por cada personaje.

4. Hora $\frac{1}{2}$ = Distancia 7.5 = 5 + 2.5 =
 10 horas = 50 km. 7 + 3 = 10h serian 50 km.
 20 horas = 100 km. 10 + 10 = 20
 50 km & 50 km = 100 km.

Ilustración 75. Respuesta al ítem 4, Tarea 4, E3

Observe en la ilustración 75 (donde se subraya el 4 para indicar que corresponde al número del ítem analizado) que el estudiante identifica que la distancia recorrida en $1\frac{1}{2}$ horas es igual a la sumatoria de las distancias recorridas en 1 hora y en $\frac{1}{2}$ hora, dado el comportamiento proporcional que guardan las cantidades de ambas magnitudes. Esto lleva a la estudiante a identificar que se producen cambios simétricos en las cantidades de ambas magnitudes o espacios de medida.

Lo anterior se ratifica nuevamente en la ilustración 76:

8. 1 hora = 4 km. 1 hora y media = 6 km.
 10 horas = 40 km. una hora + media hora = 6
 20 horas = 80 km.
 10 + 10 = 20 & cada 10 horas estan compuestas por 40 km.

Ilustración 76. Respuesta al Ítem 8, Tarea 4, E3

Nótese cómo estos 9 estudiantes logran cuantificar los cambios producidos en las distancias recorridas por cada uno de los personajes a partir de establecer la covariación que hay entre las cantidades de ambos espacios de medida. De acuerdo con esto, es posible indicar que ellos presentan un comportamiento propio de AM3 debido a que evidencian la coordinación de la cantidad de cambio de la magnitud de salida (distancia) con los cambios en la magnitud de entrada (tiempo).

En la ilustración 78, respecto a Phileas Fogg, que para $1\frac{1}{2}$ horas el estudiante tiene claridad que si recorre 4 kilómetros por cada hora, en la mitad de 1 hora recorrerá la mitad de 4 kilómetros, motivo por el cual en $1\frac{1}{2}$ horas (1 hora + $\frac{1}{2}$ hora) Phileas Fogg recorre 6 kilómetros (4 km + 2

kilómetros), es decir, relaciona las variaciones en el espacio de medida tiempo con respecto a las variaciones en el otro (distancia recorrida), comportamiento propio de AM3.

A continuación se presenta la ilustración y un segmento de diálogo con el estudiante de las ilustraciones 77 y 78:

L1. E3: *Profe, entonces si es 10 horas, ¿serían 50 kilómetros?*

L2. I: *¿Por qué crees que para 10 horas serían 50 kilómetros?*

L3. E3: *Porque en la tabla dice que 7 son 35 kilómetros.*

L4. I: *Muéstranos tu tabla.*

L5. E3: *Entonces 7 más 3 es 10. Entonces si yo tengo 3 serían (mientras cuenta con los dedos) 40, 45, 50, o sea que 10 horas sería 50 kilómetros*

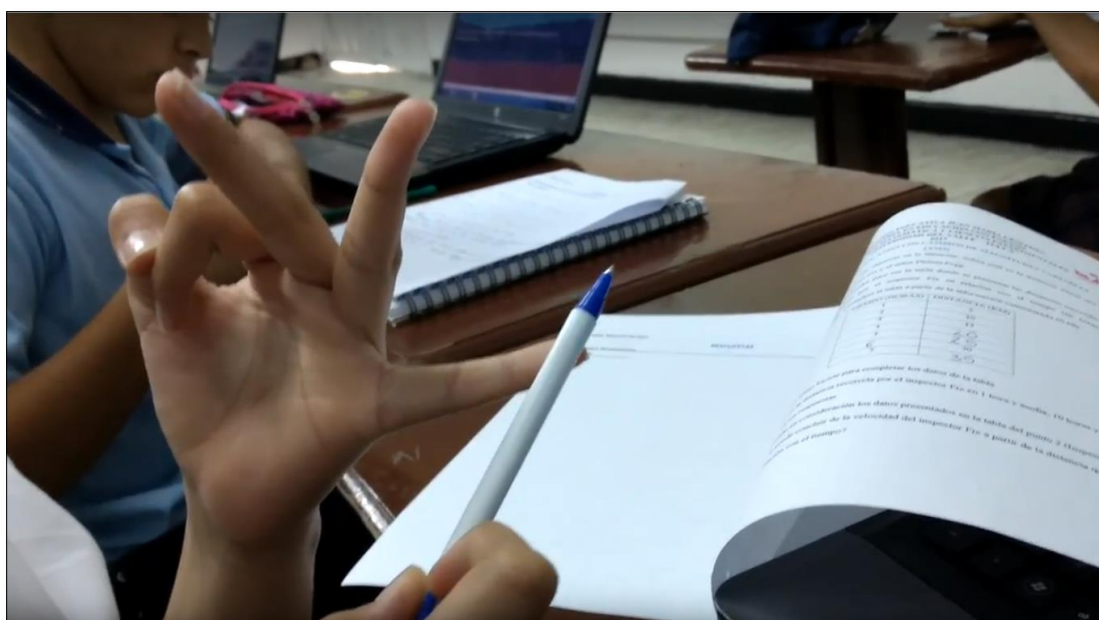


Ilustración 77. E3 durante el desarrollo del Ítem 4, Tarea 4

Se observa en L3 que E3 toma como punto de partida la última fila de la tabla, en la cual para 7 horas corresponde una distancia recorrida de 35 kilómetros. Posterior a ello, establece que para 10 horas, el tiempo se ha incrementado en 3 horas y sosteniendo este valor y con la ayuda de sus dedos (ver ilustración 79) establece cambios simétricos para la distancia recorrida que fueron: 40, 45 y finalmente 50, correspondiente a la distancia recorrida en 10 horas. Esto confirma para E3 que el análisis fue de tipo vertical o escalar debido a que se puso en relación las variaciones en el espacio de medida “tiempo” con respecto a las variaciones en el espacio de medida “distancia recorrida”.

Para 6 estudiantes (40%) fue más complejo encontrar rasgos de AM3 en estos ítems 4 y 8 debido a que en sus producciones escritas no se encontraron cuantificaciones correctas de los cambios en las distancias recorridas con los cambios en el tiempo. Es así como sus respuestas no evidenciaron verbalizaciones de la consciencia de la cantidad de cambio de la magnitud de salida (distancia recorrida) cuando se propusieron cambios en la magnitud de entrada (tiempo), comportamiento característico de AM3.

A manera de ejemplo, en la ilustración 78 se presenta una de las producciones escritas perteneciente a uno de estos 6 estudiantes:

4R) los kms recorridos por el inspector fix fue de 31 kms x media

Ilustración 78. Respuesta al ítem 4, Tarea 4, E8

Nótese en la ilustración anterior que la estudiante no coordina de manera correcta los cambios en las distancias recorridas por el inspector Fix para ninguno de los tiempos propuestos en este ítem.

A continuación se presentan los tipos de respuestas expuestos por los estudiantes para los ítems 5 y 9 de la Tarea 4. Estos ítems se trabajan conjuntamente dada la naturaleza similar de ellos, en la cual indagan por lo mismo.

Ítems 5 y 9 (I5, I9), T4: I5: Tomando en consideración los datos presentados en la tabla del punto 2, ¿Qué se puede concluir de la velocidad del inspector Fix a partir de la distancia que recorre en relación con el tiempo? I9: Tomando en consideración los datos presentados en la tabla del punto 6, ¿Qué se puede concluir de la velocidad del señor Phileas Fogg a partir de la distancia que recorre en relación con el tiempo?			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que dan su respuesta como razón de la distancia recorrida respecto al tiempo, siendo numérica y dimensionalmente correctas.	9	60 %
R2	Estudiantes que dan su respuesta correcta desde lo numérico pero las unidades no corresponden a la velocidad.	1	6.7 %

R3	Estudiantes que responden de manera muy escueta sin comprometerse con un valor numérico ni con unidades propias de la velocidad para la situación presentada.	5	33.3 %
-----------	---	---	--------

Tabla 22. Tipos de respuestas a los ítems 5 y 9 Tarea 4

La intención de este ítem fue la de indagar sobre la coordinación de la razón de cambio promedio de la magnitud de salida (distancia recorrida) con los incrementos uniformes del cambio en la magnitud de entrada (tiempo). Estos cambios uniformes en la magnitud de entrada fueron de 1 hora en 1 hora, tal como se pueden observar en los anexos (Tarea 4).

Conforme a la tabla 22, 9 estudiantes (60%) presentaron en sus producciones escritas respuestas en las cuales se puede ver que establecen que por cada hora el inspector Fix recorría 5 kilómetros y Phileas Fogg 4 kilómetros, además con el empleo adecuado de las unidades (kilómetros para distancia recorrida y horas para el tiempo).

La siguiente producción escrita manifiesta la identificación de la razón de cambio, cuando se ponen en juego variaciones de una magnitud respecto a la otra, en particular, de la distancia respecto al tiempo.

SR1 = que el inspector fix avanza 5 km cada hora

Ilustración 79. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E2

De este modo, 10 estudiantes (66.7%) logran identificar la razón que se presenta entre las dos magnitudes a partir de la comparación de ellas. Es así como se observa en la ilustración 80 que la expresión “Avanza 5 kilómetros por cada hora” está relacionando las magnitudes distancia y tiempo, de manera que parece haber captado la variación general de la primera respecto a la segunda, es decir, la estudiante parece estudiar primeramente el comportamiento de tiempo para luego relacionarlo con la distancia recorrida. Aunque en ningún momento se mencione la velocidad, este razonamiento indica que reconoce la presencia de la razón de cambio en la situación presentada cuando usa la palabra “cada” como vínculo entre ambas magnitudes (distancia y tiempo), lo cual permite ver la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida con los incrementos uniformes del tiempo, AM4.

Otras producciones escritas emplean las unidades propias de la velocidad que evidencian un acercamiento a la construcción de esta nueva magnitud.

$$R/5 = 05 \text{ km por hora}$$

Ilustración 80. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E15

Como se aprecia en la ilustración 80, el estudiante deja ver el reconocimiento de la razón de cambio debido a que parece estarla interpretando como el cociente de las magnitudes distancia y tiempo.

Otro estudiante evidenció la comparación de las velocidades para los personajes, estableciendo que quien va más lento es aquel cuya velocidad tenga un menor valor numérico, lo cual puede apreciarse en la ilustración 81.

5 va que vamos Philaous Fogg va mas lento, Por ejemplo fix va 5 km por hora y Fogg va a 4 km por hora

Ilustración 81. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E9

El mismo estudiante deja ver su razonamiento en la plenaria propia de la tarea 4, de la cual se extrae el siguiente segmento de diálogo.

L1. I: ¿Quién se quiere aventurar a dar la velocidad? (E9 levanta la mano).

L2. E9: 4 kilómetros por hora.

L3. I: ¿Por qué 4 kilómetros por hora?

L4. E9: Porque profesor, vea...allá (señalando hacia la proyección del archivo) donde dice Tiempo-Hora nos dan el número 1 y donde dice distancia en kilómetros nos dan el número 4. Entonces, si son 4 kilómetros en una hora, se toma la conclusión de que son 4 kilómetros por hora. Cada hora que él anda son 4 kilómetros.

La comparación realizada por el estudiante tanto en la ilustración 81 como en el cuadro de diálogo (ver L4) da cuenta del reconocimiento de la covariación entre las magnitudes tiempo y distancia recorrida al referirse a ellas conjuntamente y no por separado. Por lo tanto, podría indicar que el estudiante concibe un cambio simultáneo del tiempo y la distancia para cada uno de los personajes, siendo este un acercamiento a la construcción de la velocidad como razón de cambio. En otros términos, el estudiante evidencia estar en proceso de construcción de la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida con los incrementos uniformes del tiempo, AM4.

Para el segundo grupo de respuestas (R2), un estudiante, aunque desde lo netamente numérico presenta respuestas correctas, no evidencia la construcción de la razón de cambio porque solo contempla la unidad empleada para la distancia recorrida, que para esta situación fue el kilómetro. Sin embargo, diligenció adecuadamente las tablas para cada personaje e identificando los patrones presentes en ellas.

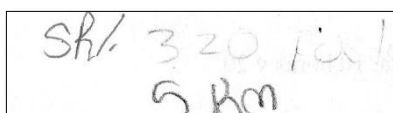


Ilustración 82. Respuesta al Ítem 5, Tarea 4, E5

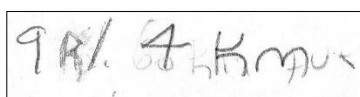


Ilustración 83. Respuesta al Ítem 9, Tarea 4, E5

Finalmente, en el tercer grupo de respuestas (R3), 5 estudiantes (33.3%) dieron respuestas en las cuales no se logra percibir si realmente construyen la velocidad como razón de cambio de la distancia respecto al tiempo debido a que en sus respuestas a este ítem no se evidencia la covariación entre dichas magnitudes dada en términos de un comportamiento propio de AM4 en el cual se verbalice la consciencia de la razón de cambio de la distancia recorrida cuando se consideran incrementos uniformes del tiempo. Fue así como dieron respuestas muy generales, tal como se muestra a manera de ejemplo en la ilustración 84:

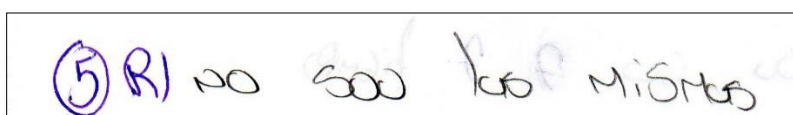


Ilustración 84. Ítem 5, Tarea 4, E8

Nótese en la ilustración anterior cómo la producción escrita de la estudiante no da cuenta de cuáles magnitudes está comparando. Por consiguiente no es visible la construcción de la velocidad como razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo.

A continuación se presenta los tipos de respuesta encontrados para el ítem 10 de la Tarea 4:

Ítem 10 (I10) T4: I10: Al cabo de 10 horas de la partida del Inspector Fix y el señor Phileas, compara las distancias recorridas por ambos e indica si son o no las mismas. Justifica tu respuesta.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que cuantifican las distancias recorridas por cada personaje para 10 horas y establecen que no son iguales.	9	60 %
R2	Estudiantes que identifican que las distancias recorridas no son las mismas a través de la comparación de las razones de cambio para cada uno de los personajes.	2	13.3 %
R3	Estudiantes que responden de manera muy escueta sin comprometerse con un valor numérico o sin responder a la consigna planteada.	4	26.7 %

Tabla 23. Tipos de respuestas al ítem 10 Tarea 4

La intención de este ítem se hizo para que el estudiante pudiera reconocer que al cabo de un tiempo determinado el inspector Fix recorrió una mayor distancia que el señor Phileas Fogg dado que por cada unidad de tiempo transcurrida el primero se desplazaba una unidad más que el segundo, es decir, que la velocidad del primer personaje es mayor que la velocidad del segundo personaje.

Dentro de la tipificación de las respuestas, se encontró que 9 estudiantes (60%) identificaron que para un tiempo de 10 horas las distancias recorridas eran diferentes, realizando una posterior comparación de esas distancias recorridas por los personajes.

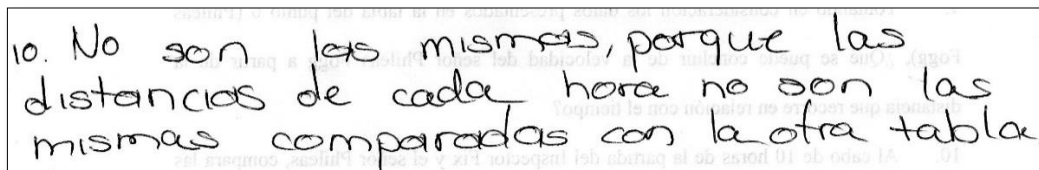
A manera de ejemplo, la ilustración 85 muestra la producción escrita de un estudiante contemplado en R1, en la cual reconoce que para un tiempo de 10 horas, los personajes recorren diferentes distancias:

El inspector Fix en 10 horas recorre 50 km mientras que el señor Phileas recorre 40 km en 10 horas.
No son iguales.

Ilustración 85. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E4

Se observa en la anterior ilustración que el estudiante no establece una comparación cuantitativa de las razones, por lo cual no puede considerarse que se esté movilizándolo en AM4, pues solo se evidencia en su producción escrita la cuantificación de los cambios en las distancias recorridas para después comparar dichas cantidades.

Del segundo grupo (R2), un estudiante también identificó que para las 10 horas los personajes recorrieron distancias diferentes, recurriendo como ayuda a la representación tabular, tal como lo muestra la ilustración 86:

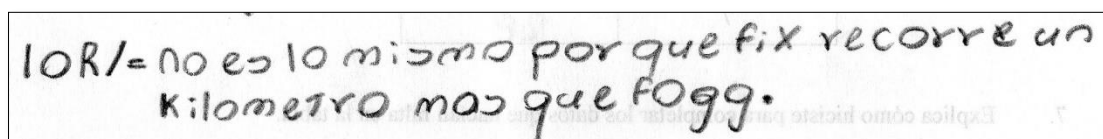


10. No son las mismas, porque las distancias de cada hora no son las mismas comparadas con la otra tabla.

Ilustración 86. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E11

Se observa en la ilustración anterior cómo el estudiante confirma la relación existente entre el tiempo (magnitud de entrada) y las distancias recorridas (magnitud de salida) cuando emplea el término “cada” como vínculo de las mismas. Por lo anterior puede afirmarse que está comparando las razones de distancias recorridas por cada hora, es decir, parece estar en proceso de construcción de la velocidad como razón de cambio promedio.

En este mismo grupo, otra estudiante también realiza una comparación a través de las razones, es decir, se centra en comparar razones de cambio. Se muestra a manera de ejemplo su producción escrita en la ilustración 87.



10R/= no es lo mismo porque fix recorre un kilometro mas que fogg.

Ilustración 87. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E2

Se observa en la ilustración anterior que el estudiante reconoce que el inspector Fix recorre un kilómetro más que el señor Phileas Fogg por cada unidad de tiempo, es decir, está comparando 2 razones. Llama la atención en ambos estudiantes de (ilustraciones 86 y 87) que en sus producciones escritas no cuantifican la distancia solicitada para el tiempo propuesto, sino que basan sus respuestas en el hecho de que como las razones de cambio no son iguales para una hora, tampoco serán iguales para las 10 horas. Por consiguiente, estos 2 estudiantes dan cuenta de la construcción de la razón, es decir, se están movilizando en AM4 al verbalizar la consciencia de la razón de cambio de las distancias recorridas por los personajes cuando se consideran incrementos uniformes en el tiempo.

Finalmente, 5 estudiantes (33.3%) no compararon en este ítem ni distancias recorridas ni razones de cambio, tal como, a manera de ejemplo, se muestra uno de estos casos en la ilustración 88.

10 Si son 19 vales porque llegan juntos

Ilustración 88. Respuesta al Ítem 10, Tarea 4, E12

Puede observarse en la anterior ilustración que la estudiante no evidencia coordinaciones de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida respecto al tiempo y que tampoco cuantifica los cambios que se presentan en la distancia recorrida a partir de los cambios en el tiempo. Esto permite afirmar que los estudiantes con las respuestas tipificadas en R3 no están movilizándose en AM4, al dar respuestas alejadas del objetivo de la pregunta.

A continuación se presentan los tipos de respuesta encontrados para el ítem 11 de la Tarea 4:

Ítem 11 (I11) T4: I11: Con base en la información suministrada en las tablas de los puntos 2 y 6, indica al cabo de cuánto tiempo el inspector Fix alcanza al señor Phileas Fogg. Justifica tu respuesta.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que establecen correctamente el tiempo de encuentro entre los personajes	3	20 %
R2	Estudiantes que establecen incorrectamente el tiempo de encuentro entre los personajes, dando 7 horas como respuesta	6	40 %
R3	Estudiantes que no responden a la pregunta planteada	6	40 %

Tabla 24. Tipos de respuestas al ítem 11 Tarea 4

El ítem 11 se propuso para que los estudiantes identificaran cuándo el inspector Fix alcanzaba al señor Phileas Fogg a partir de la comparación de las razones de cambio establecidas entre las distancias recorridas por los personajes y los tiempos empleados (presentes en las tablas de la Tarea 4) eran utilizadas por ellos para establecer en qué momento sus posiciones eran iguales. Debido a que las velocidades tanto del persecutor como del perseguido eran constantes en el archivo Geogebra de esta tarea ($5 \frac{Km}{h}$ para el inspector Fix y $4 \frac{Km}{h}$ para Phileas Fogg, respectivamente) y al estar separados inicialmente una distancia de 12 kilómetros (de lo cual se daba cuenta en el ítem 1, tarea 4), el primero descuenta 1 kilómetro de distancia por cada hora, alcanzando al segundo 12 horas después de haberse iniciado la marcha.

Se encontró para este ítem que 3 estudiantes respondieron acertadamente, llegando a la respuesta mediante sumas iteradas de 5 en 5 para después emplear un análisis funcional, tal como lo muestra el siguiente segmento de la plenaria correspondiente a esta tarea:

L1. I: *¿Por qué 12 horas?*

L2. E13: *Por lo que recorren en 60 kilómetros en 12 horas.*

L3. I: *¿cómo descubriste que para los 60 kilómetros estaban en el mismo sitio en 12 horas?*

L4. E13: *Pues multiplicando la...en base a multiplicar la tabla o sumarle, por ejemplo, en la tabla de Fix, me aparece que de 5 en 5 y suman 5, 10,15, 20 y así hasta llegar a 60 que son 12 por 5 igual a 60.*

En L4, si bien el estudiante parece estar empleando sumas iteradas con las distancias recorridas por unidad de tiempo por el inspector Fix (cuando dice: 5,10, 15, 20 y así hasta llegar a 60 donde coinciden las trompas de los elefantes), posteriormente realiza un análisis de tipo funcional en el cual toma el operador función ($5 \frac{Km}{h}$) y lo multiplica por las 12 horas.

Esta respuesta deja ver que el estudiante establece una relación entre los dos espacios de medida (tiempo en horas, distancia recorrida en kilómetros) reconociendo que multiplicar cualquier tiempo por el operador función, permite obtener la distancia recorrida. Esto se evidencia cuando el estudiante dice “12 por 5 igual a 60”. Por lo anterior, puede afirmarse que hay una coordinación de la cantidad de cambio en la magnitud de salida (distancia recorrida) con los cambios en la magnitud de entrada (tiempo), AM3.

6 estudiantes llaman la atención porque sus respuestas, aunque incorrectas, son coincidentes; es así como manifiestan que el encuentro se produce a las 7 horas sin justificar el por qué. Este valor podría fundamentarse en que el máximo valor para el tiempo presentado en las tablas es de 7 horas, lo que evidencia dificultades al momento de darles continuidad e involucrar la covariación de los dos espacios de medida presentes. Parece ser que las tablas fueron un apoyo indispensable para identificar la forma en que se correlacionan las cantidades de ambas magnitudes y a falta de esa tabla los estudiantes de este grupo (R2) terminan no haciendo las cuantificaciones de forma correcta. Esto es, las tablas son una representación que ayudó a los estudiantes a establecer la covariación, en este caso, entre la distancia recorrida y el tiempo.

A manera de ejemplo se presenta una de estas respuestas en la ilustración 89:

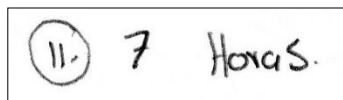


Ilustración 89. Respuesta al Ítem 11, Tarea 4, E12

Los otros 6 estudiantes (40%) no lograron cumplir con el objetivo de la pregunta, tal como a manera de ejemplo se muestra en la ilustración 90:

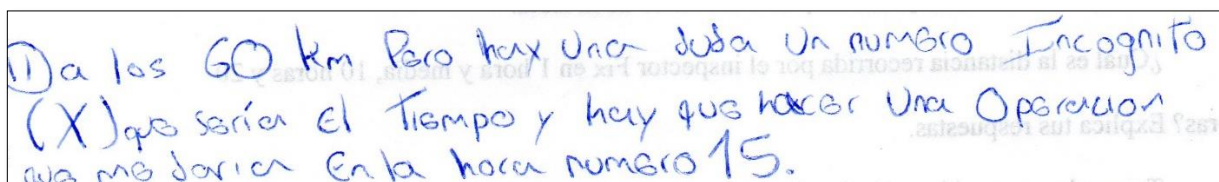


Ilustración 90. Respuesta al Ítem 11, Tarea 4, E9

Se puede apreciar en la ilustración 90 que el estudiante reconoce que la pregunta hace referencia a la magnitud tiempo. Sin embargo, no se evidencia la covariación debido a que muestra como alternativa de solución un proceso algoritmizado donde no deja verse la relación entre el tiempo y la distancia, tal como se venía presentando en las tablas hasta la séptima hora.

3.4.5 Análisis de los resultados de la Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes.

Esta tarea se centra, conforme al referente conceptual, en la coordinación de la razón de cambio promedio de la magnitud de salida (distancia recorrida) con los incrementos uniformes del cambio en la magnitud de entrada (tiempo).

A continuación se presentan los tipos de respuesta ofrecidos por los estudiantes para el ítem 1 de la Tarea 5:

Ítem 1 (I1) T5: I1: Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida. A partir de esto, realiza algunas conclusiones sobre el comportamiento de la velocidad que tuvo el señor Phileas Fogg durante toda su huida.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que identifican las diferentes distancias recorridas por Phileas Fogg para una misma unidad de tiempo (una hora) y asocian estos cambios con el cansancio y la falta o ganancia de energía de los elefantes.	4	26.7 %
R2	Estudiantes que establecen relaciones entre las distancias recorridas por Phileas Fogg y el tiempo para cada unidad de este, pero no comparan estas	4	26.7 %

	relaciones a fin de identificar que en algunos momentos la velocidad del personaje era mayor que en otros.		
R3	Estudiantes que dan como respuestas las distancias recorridas mostradas en pantalla después del movimiento de los deslizadores, sin una reflexión sobre lo sucedido.	7	46.7 %

Tabla 25. Tipos de respuestas al ítem 1 Tarea 5

La intencionalidad del ítem 1, Tarea 5 era indagar sobre la consolidación de la relación entre la distancia recorrida y el tiempo, cuya aproximación se había venido trabajando desde las tareas previas.

Teniendo en cuenta que la magnitud velocidad corresponde a la razón de cambio de la distancia recorrida respecto al tiempo y que, en particular, la velocidad media puede expresarse de la forma $Velocidad\ Media = \frac{Distancia\ Recorrida}{Tiempo\ empleado\ para\ tal\ recorrido}$, se esperaba que los estudiantes establecieran la relación entre las distancias recorridas por Phileas Fogg para cada intervalo de una hora y pudieran así acercarse a la relación que guardan estas magnitudes con la velocidad. En esta tarea las distintas velocidades del señor Phileas Fogg para cada hora en su respectivo orden fueron:

- $7 \frac{Km}{h}$ Primera hora
- $5 \frac{Km}{h}$ Segunda hora
- $3 \frac{Km}{h}$ Tercera hora
- $6 \frac{Km}{h}$ Cuarta hora
- $4 \frac{Km}{h}$ Quinta hora

Fue así como en un primer grupo de respuestas de los estudiantes (R1) se logra apreciar que 3 de ellos identifican que las distancias recorridas por el personaje son distintas para cada unidad de tiempo y parecieran tener una noción intuitiva de la velocidad cuando asocian los cambios de las distancias recorridas a elementos como el cansancio o la energía de los elefantes, tal como se muestra a manera de ejemplo en la ilustración 91:

R1 = al principio en la distancia 1 recorre 7km en la distancia 2 recorre 5km en la distancia 3 3km en la distancia 4 6km y en la distancia 5 4km lo que quiere decir que al principio no estaba cansado pero poco a poco el cansancio iba cayendo sobre él pero a partir de la D4 comenzó a recuperar energía y siguió su camino.

Ilustración 91. Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E2

Puede observarse en esta ilustración que, conforme a los cambios de las distancias generados al manipular el deslizador (que representa el tiempo), la producción escrita de este estudiante deja ver una interpretación de lo que sucede al interactuar con el archivo de Geogebra, según la cual si se recorre una mayor distancia en una misma unidad de tiempo es porque el elefante tiene mayor energía mientras que mientras que si se recorre una menor distancia para la misma unidad de tiempo es porque el elefante perdió energía o estaba cansado. Es así como para la primera velocidad ($7 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$), el estudiante emplea la expresión “*Al principio no estaba cansado*”, para la tercera velocidad ($3 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$) se refiere diciendo “*poco a poco el cansancio iba cayendo sobre él*” y cuando la velocidad aumenta ($4 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$) expresa: “*pero a partir de D4 (distancia 4) comenzó a recuperar energía y siguió su camino*”. Estas expresiones dejan ver cómo el estudiante al comparar las distancias recorridas para las unidades de tiempo, intuitivamente se asocia con el hecho de que se vaya más lento o más rápido, lo cual está asociado a su vez con los cambios en el estado de los elefantes. Sin embargo, no se evidencia la construcción de la velocidad como razón de cambio promedio al no explicitar la coexistencia de las magnitudes velocidad, distancia y tiempo y la relación que ellas guardan.

Algo similar sucede con otro estudiante de este grupo (R1), con la diferencia que este sí se refiere, en algún momento de su producción escrita, a la magnitud velocidad. Esto se muestra en la ilustración 92:

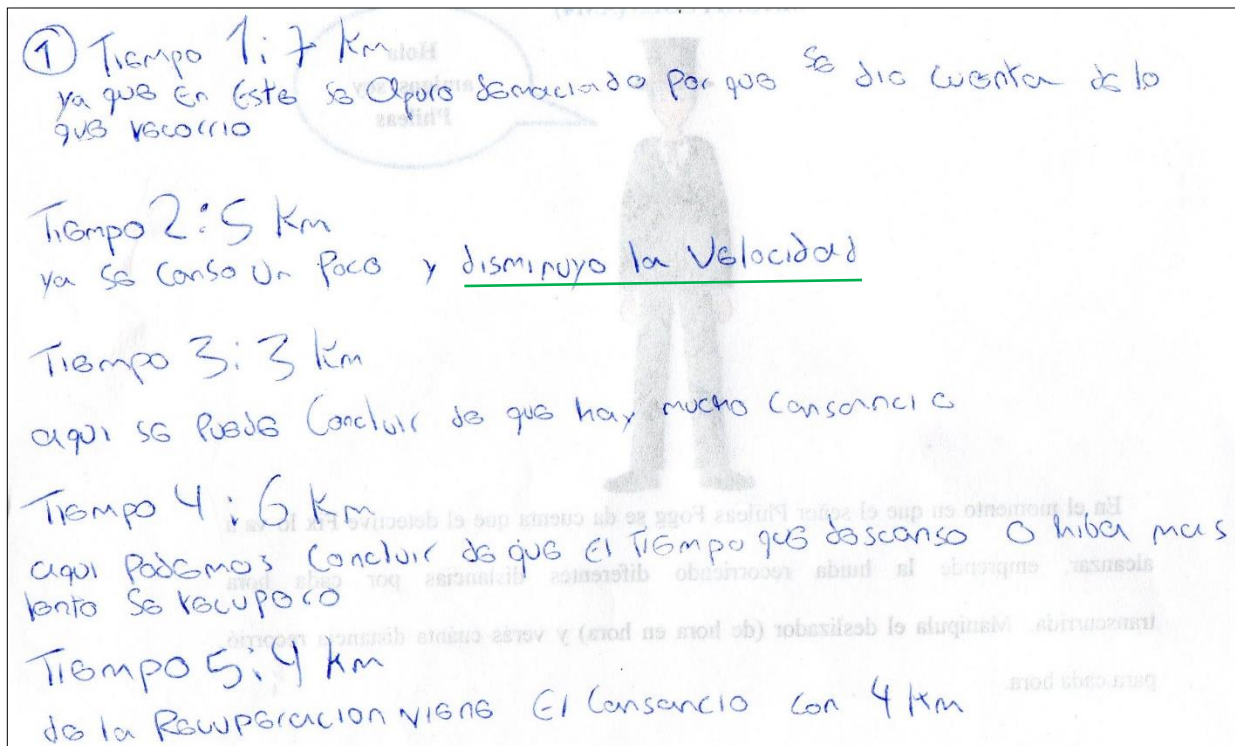


Ilustración 92. Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E9

Se aprecia entonces en esta ilustración que el estudiante logra asociar de forma explícita los cambios de velocidad con el estado de los elefantes. Más allá de esto, es posible afirmar que este estudiante establece una relación entre las 3 magnitudes que coexisten, a saber, la distancia, el tiempo y la velocidad. Sin embargo, el reconocimiento de la velocidad se consolida a partir de las comparaciones realizadas entre la distancia y el tiempo, lo que no permite asegurar que dicha magnitud (la velocidad) sea reconocida como una magnitud autónoma, es decir, con “vida propia”.

Otro de los estudiantes manifestó, tanto en su producción escrita como en sus verbalizaciones durante la plenaria correspondiente a la Tarea 5, claridad respecto a la correlación directa que se presenta (para intervalos iguales de tiempo) entre la distancia recorrida y la velocidad. Esto se muestra en el siguiente segmento, tomado de la plenaria correspondiente a esta tarea.

- L1. I:** Para un mismo tiempo, entre mayor sea la distancia recorrida ¿Qué pasará con la velocidad?
- L2. E13:** Sube la velocidad.
- L3. I:** ¿A mayor velocidad yo recorreré al mismo tiempo menor distancia?
- L4. E13:** No, a mayor velocidad mayor distancia.

Se puede observar tanto en L2 como en L4 que el estudiante reconoce la relación que hay entre la velocidad y la distancia recorrida, esto es que a mayor velocidad mayor distancia recorrida. Este tipo de razonamientos sustentados en AM2 muestra un claro reconocimiento de la dirección del cambio de la magnitud de salida (distancia recorrida) cuando se consideran cambios en la magnitud de entrada (tiempo).

En general, estos 3 estudiantes se acercan de forma intuitiva a reconocer cambios en las velocidades a partir de los estados del elefante pero dicho reconocimiento se hace desde la comparación de las 2 magnitudes (distancia y tiempo) y no se construye de forma global la magnitud velocidad como una nueva magnitud autónoma. Esto permite afirmar que los estudiantes no alcanzan a sustentar AM4, dado que no se construye la velocidad como razón de cambio de las otras 2.

Otro grupo de 4 estudiantes (26.7%) relacionaron las distancias recorridas con el tiempo (representado en el deslizador) pensando en estas 2 magnitudes por separado, tal como puede apreciarse, a manera de ejemplo, en la ilustración 93.

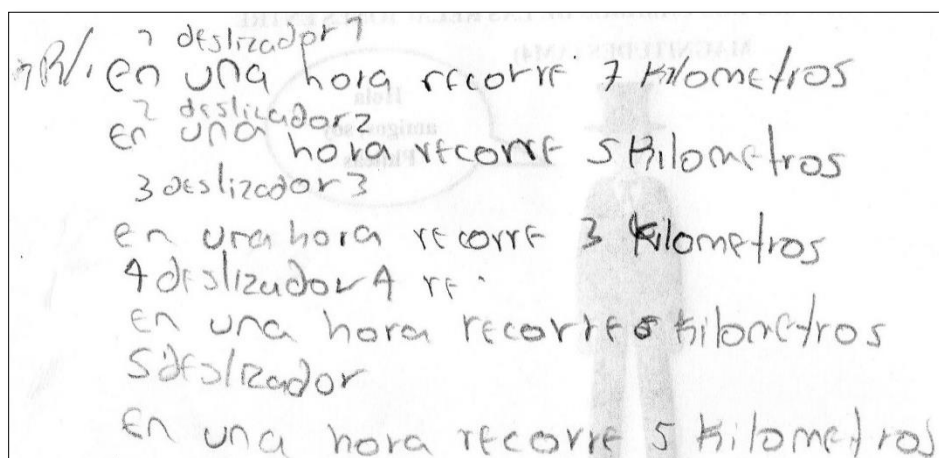


Ilustración 93. Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E5

Como se aprecia en la anterior ilustración, E5 transcribe lo que ve en la pantalla después de manipular el deslizador (que representa el tiempo) pensando en ambas magnitudes (tiempo y distancia recorrida) por separado sin comparar cuantitativamente las diferentes distancias recorridas por cada unidad de tiempo (hora), por lo cual no llega a establecer razones de cambio que lo lleven a determinar en qué intervalos recorrió mayores o menores distancias. Por lo tanto, no llega a reconocer que para ciertas unidades de tiempo sus velocidades son mayores o menores,

motivo por el cual este grupo de estudiantes (R2) no evidenció AM4 al no estar presente la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida con los incrementos uniformes del tiempo (representado por el deslizador).

En el tercer grupo de 7 estudiantes (26.7%), (R3), reprodujeron en sus hojas de respuestas lo que el archivo de Geogebra mostró en pantalla después de la manipulación del deslizador, sin una asociación entre las magnitudes tiempo y distancia recorrida, tal como puede apreciarse, a manera de ejemplo, en la ilustración 94.

$D1 = 7 \text{ km}$ (Distancia)	$D2 = 5 \text{ km}$ (Distancia)	$D3 = 3 \text{ km}$ (Distancia)
$D4 = 6 \text{ km}$ (Distancia)	$D5 = 4 \text{ km}$ (Distancia)	

Ilustración 94. Respuesta al ítem 1, Tarea 5, E3

Como se aprecia en la anterior ilustración, el estudiante transcribe lo que ve en la pantalla después de manipular el deslizador (que representa el tiempo) sin establecer una relación entre las magnitudes tiempo y distancia recorrida. Por tal motivo, este grupo de estudiantes (R3) tampoco evidenciaron AM4 al no estar presente la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida con los incrementos uniformes del tiempo (representado por el deslizador).

A continuación se presentan los tipos de respuesta ofrecidos por los estudiantes para el ítem 2 de la Tarea 5:

Ítem 2 (I2) T5: Tomando en consideración la descripción realizada en el punto anterior, representa por medio de una gráfica la relación entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg y el tiempo en el cual recorre cada distancia.			
Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia porcentual
R1	Estudiantes que realizan una gráfica de barras verticales cuyas alturas corresponden a las distancias parciales recorridas en cada hora.	8	53.3 %
R2	Estudiantes que realizan representaciones horizontales (segmentos de línea o barras) para cada distancia parcial recorrida.	6	40 %
R3	Estudiantes que no responden ni realizan ningún tipo de gráfico.	1	6.7 %

Tabla 26. Tipos de respuestas al ítem 2 Tarea 5

En este ítem se esperaba que los estudiantes hicieran una gráfica de cualquier tipo que permitiera comunicar la idea de que las velocidades eran distintas, es decir, que el personaje durante todo el recorrido tuvo distintas velocidades.

Como se aprecia en la Tabla 26, 8 estudiantes (53.3%) dieron a la distancia recorrida un tratamiento de magnitud cualitativa o discreta presentándolas en diagramas de barras verticales, en los cuales solamente se contempla esta magnitud pero no el tiempo. De este modo se presentan diagramas de barras en los que no se establece ninguna relación entre estas 2 magnitudes (distancia recorrida y tiempo). A manera de ejemplo se muestra en las ilustraciones 95 y 96:

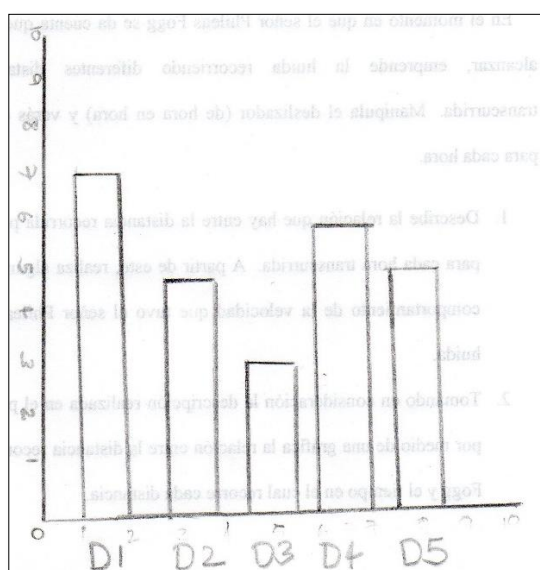


Ilustración 95. Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E11

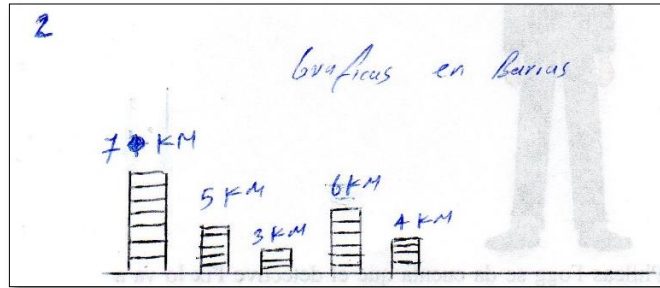


Ilustración 96. Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E13

Tal como se aprecia en las ilustraciones anteriores, la magnitud de entrada tiempo no es tenida en cuenta por los estudiantes, sino que solamente centran su atención en las distintas distancias recorridas. El hecho de que los estudiantes no establezcan la relación entre estas 2 magnitudes (tiempo y distancia recorrida), implica que tampoco se contemple la existencia de una tercera magnitud dada por la razón de cambio de ellas, lo que hace posible afirmar que este grupo de estudiantes no sustenta AM4.

Otro grupo de 6 estudiantes (40%) realizaron representaciones horizontales en las que pretenden comunicar cada distancia parcial recorrida por Phileas Fogg. Dentro de este grupo, se encontraron 2 estudiantes cuyas representaciones contienen segmentos que intentan establecer cierta correspondencia con las distancias recorridas por el personaje, tal y como se presenta a manera de ejemplo en las ilustraciones 97 y 98.

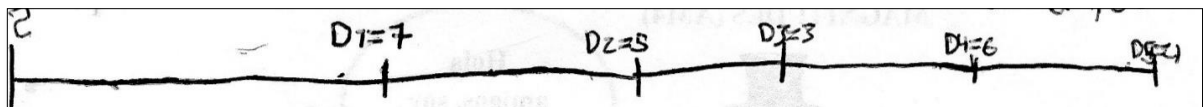


Ilustración 97. Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E1

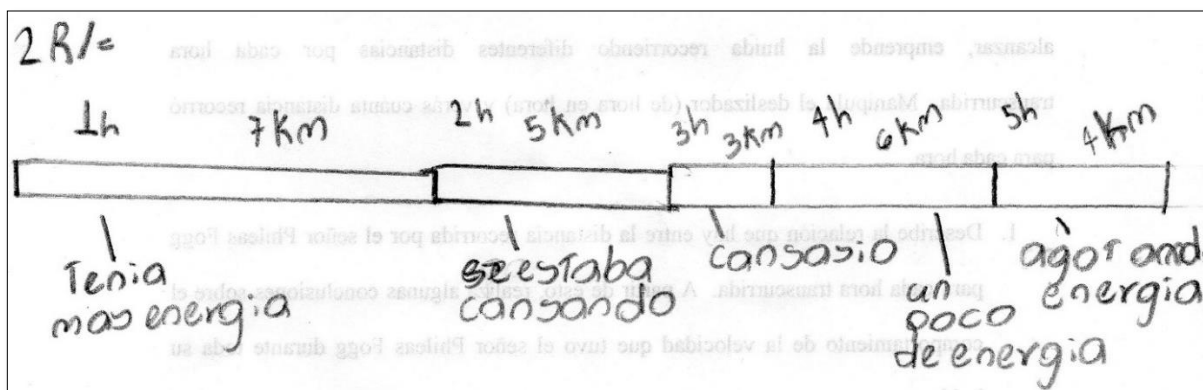


Ilustración 98. Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E2

Obsérvese en las 2 ilustraciones anteriores (97 y 98) que los estudiantes plasman gráficas en las intentan tener una coherencia entre las distancias parciales recorridas y la longitud del segmento que representa a cada una de ellas. Es así como el primer segmento que proponen, correspondiente a la primera distancia recorrida (7 Km), tiene mayor longitud que el tercer segmento, que representa a la tercera distancia recorrida (3 Km).

Los otros 4 estudiantes de este mismo grupo (R2), no presentaron una correspondencia entre la longitud del segmento que está representando la distancia parcial recorrida y la cantidad de dicha distancia, tal como se muestra, a manera de ejemplo, en la ilustración 99.

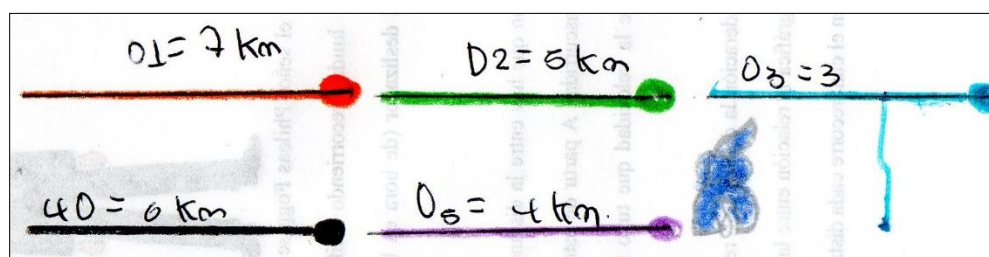


Ilustración 99. Respuesta al Ítem 2, Tarea 5, E7

Nótese en la ilustración anterior que, aunque las distancias recorridas por el personaje fueron distintas, los segmentos propuestos por el estudiante para representar cada distancia recorrida son de igual longitud.

En general, las 6 gráficas de este grupo son muy parecidas a las presentadas en el archivo propio de la tarea, es decir, el formato dado en el archivo parece haber tensionado las respuestas de estos estudiantes. Finalmente, un estudiante no presentó ningún tipo de gráfico o respuesta a este ítem quedando ubicado en R3.

Teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes ya presentadas y el propósito de esta tarea, es posible afirmar que ninguno de los 15 estudiantes logra dar una representación gráfica en la que se haga explícita la variación de la velocidad con la cual el personaje se desplazó. Además, debido a que esta tarea pretendía indagar sobre AM4, puede aseverarse que ninguno de los estudiantes se movilizó dentro de esta acción mental al no darse una coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida (magnitud de salida) con los incrementos uniformes del cambio en el tiempo (magnitud de entrada).

Capítulo 4: Conclusiones y reflexiones

En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo a la luz de los objetivos trazados en esta investigación para lo cual se consideran los resultados, fruto de la implementación de la situación llevada a cabo con los estudiantes. Estas conclusiones se presentan no solamente de acuerdo con lo señalado sino también en relación con la importancia de Geogebra dentro de este trabajo y con el marco conceptual que se adoptó para este estudio. Además se incluyen algunas reflexiones didácticas que se derivan del trabajo desarrollado.

4.1 Conclusiones

Para este trabajo se planteó como objetivo general describir y analizar las características del razonamiento covariacional que se presentan en estudiantes de quinto grado de la I.E. JMC de Tuluá cuando enfrentan una situación de variación y cambio mediada por Geogebra. En sintonía con el objetivo planteado se realizaron los análisis de las producciones escritas y verbales de los estudiantes con los cuales se realizó la implementación de la situación, los cuales permitieron la descripción de características presentadas en ellos vinculadas al razonamiento covariacional.

Para el análisis de resultados, a partir de la Tarea 2, se contrastó cada una de las respuestas, que ofrecían los estudiantes a las tareas, con las acciones mentales propuestas en el estudio de Carlson et al., (2003) de la siguiente manera: Tarea 2 (AM1), Tarea 3 (AM2), Tarea 4 (AM3), Tarea 5 (AM4); lo anterior con la finalidad de describir las características del razonamiento covariacional que se iban presentando en los estudiantes conforme a lo descrito en el capítulo 2, tal y como ya se señaló. De esta manera se pudieron ver las características de este razonamiento manifestadas en los estudiantes de este estudio al enfrentarse a la situación propuesta.

Para responder al objetivo general se trazaron en esta investigación 3 objetivos específicos y por tanto las conclusiones que a continuación se presentan estarán referidas en relación con estos objetivos trazados.

En relación con el primer objetivo específico:

- Se encontró en esta investigación que el marco conceptual adoptado, Carlson et al., (2003) brindó unas categorías teóricas que permitieron a los investigadores de este trabajo, en mayor detalle, entrar a caracterizar los desempeños puestos en juego por los estudiantes cuando enfrentan fenómenos de variación y cambio. Lo anterior con el ánimo de identificar en los educandos diferentes maneras de razonar que indiquen el tipo de estrategias que deben desarrollarse encaminadas a potenciar su razonamiento covariacional y continuar avanzando hacia niveles progresivos de éste. Por consiguiente, este marco conceptual fue una potente herramienta tanto para el diseño de la situación de variación y cambio como

para el análisis de las actuaciones de los estudiantes cuando enfrentaron las tareas de covariación.

En relación con el segundo objetivo específico se concluye que:

- La incorporación del comic en la contextualización de la situación junto a las interacciones con los archivos de Geogebra propiciaron una actitud receptiva en los estudiantes hacia la implementación de las tareas, facilitándose la indagación en las características del razonamiento covariacional. Esta articulación de la literatura, las matemáticas, la tecnología e incluso las ciencias (al darse la construcción intuitiva de una nueva magnitud como la velocidad) contribuyó al desarrollo de este razonamiento. Sin embargo, algunos estudiantes continuaron teniendo el comic como referencia al momento de responder preguntas que resultaban de la interacción con los archivos de Geogebra (tareas 2 a la 5) y que no necesariamente estaban relacionadas con el comic.
- Teniendo en cuenta que la situación propuesta para el desarrollo de este trabajo recrea una persecución en la que participaron 2 personajes (Phileas Fogg y el inspector Fix) y en la cual debían hacerse manifiestos sus distintos desplazamientos y tiempos (estos últimos representados por el deslizador), Geogebra permitió a los estudiantes tener cierto control sobre lo que sucedía y así ver con mayor detalle cuáles magnitudes cambiaban y cuáles permanecían constantes en el transcurso de las diferentes tareas que contaron con este tipo de archivos (Tarea 2 a la 5), lo que no hubiera sido posible solo con lápiz y papel. Por lo tanto, para este trabajo, la dinamicidad que provee el software fue potente en la identificación de qué, cómo, y cuánto cambiaron las magnitudes involucradas, así como las relaciones dadas entre ellas.
- La mediación de Geogebra generó interacciones permanentes con los estudiantes en las cuales enfrentaron el ensayo y error, el planteamiento de conjeturas, la exploración y la validación de sus respuestas por parte del software. En general, en las tareas 2 a la 5, donde la variación y el cambio fueron el escenario para la identificación de las características del razonamiento covariacional de los estudiantes de esta investigación, fue potente el papel

de la herramienta “deslizador” del Geogebra, el cual fue asignado siempre a la magnitud de entrada “tiempo”. Esto permitió que los estudiantes, de manera individual, se comunicaran con los archivos encontrando en ellos retroalimentación y, en algunos casos como para la tarea 4, validación de sus procedimientos o cálculos, todo esto apuntando a la consolidación de su razonamiento covariacional.

- Se evidenció que Geogebra no es neutro pues generó tensiones en las formas como los estudiantes razonaron covariacionalmente. Al dinamizar la situación, también fue determinante en la actividad misma desde la planeación y posterior desarrollo debido a que, en el caso de este trabajo, los estudiantes no tuvieron que imaginar la variación sino que pudieron interactuar con ella y dialogar con el software en las tareas 2 a la 5. Por tal razón la presencia de Geogebra parece marcar una impronta en las maneras como los estudiantes van apropiando el conocimiento pues actuó no solo facilitador del mismo sino además como parte constitutiva del pensar y llegar a conocer.
- La presencia de Geogebra otorgó un matiz particular a la actividad realizada y a las formas como los estudiantes desplegaron su razonamiento covariacional en las diferentes tareas. Fue así como en este trabajo la presencia del software implicó acercamientos diferentes al conocimiento diferentes a las del lápiz y el papel debido a que modificó las dinámicas de aprendizaje de los estudiantes y de las tareas en sí mismas al permitir observar la dinamicidad propia de la situación propuesta.
- Aunque los estudiantes tuvieron autonomía en la exploración de las cuatro tareas diseñadas en Geogebra (Tarea 2 a la 5) sin requerir permanentemente las indicaciones del docente, fue notorio en las plenarias cómo el conjunto de características del razonamiento covariacional, evidenciadas en los estudiantes cuando interactuaban individualmente con el software, se enriquecía al escuchar preguntas orientadoras establecidas por el docente, pero especialmente los argumentos dados por sus compañeros. Se encontró, por ejemplo, que algunos estudiantes empezaban a reconsiderar sus respuestas e incluso, a asumir nuevas posiciones no alcanzadas inicialmente al enfrentar las tareas de forma individual. Desde esta perspectiva, la interacción con los demás participantes fue fundamental para avanzar hacia la maduración del razonamiento covariacional.

- La vinculación entre el deslizador y la generación de las tablas permitió a los estudiantes la identificación de patrones y relacionar la simulación con la representación tabular (tiempo y distancia recorrida) para cada uno de los personajes. Ese hecho aportó al reconocimiento de la variación de las magnitudes en todos los estudiantes y, en algunos casos, la forma en como dichas magnitudes covariaban, hecho que les permitió diligenciar la información faltante en las tablas de manera correcta. Por tal razón, la representación tabular posibilitó el reconocimiento de la variación de cada una de las magnitudes y en algunos casos de la covariación dada entre ellas. En este sentido pudo verificarse lo que propone el MEN (2006) cuando reconoce la importancia de usar tablas y gráficas como formas de acercamiento temprano al desarrollo de pensamiento variacional desde la Educación Básica Primaria sin tener que pasar necesariamente por la construcción de representaciones simbólicas o algebraicas.
- En sintonía con la conclusión anterior, el análisis de las producciones de los estudiantes puso en evidencia el papel protagónico que tuvo la representación tabular en la identificación de patrones de aumento de ambas magnitudes e incluso para la comparación de cantidades derivadas de las tablas. Por consiguiente, el proponer la prolongación de tablas donde existen patrones preestablecidos en sus espacios de medida parece ser un ejercicio potente para analizar en los estudiantes características de su razonamiento covariacional y madurar en ellos las relaciones que van estableciendo entre las magnitudes involucradas.

En relación con el tercer objetivo específico y con el general se concluye que:

- En el desarrollo de la Tarea 2 la totalidad de los estudiantes participantes evidenciaron la coordinación del valor de una magnitud con los cambios en la otra magnitud mediante producciones escritas y verbales con expresiones como: *“A medida que el tiempo transcurría el detective se acercaba al señor Fogg”*, o también, *“Cuando manipulo el deslizador puedo ver a Phileas Fogg con su elefante y al detective Fix caminando con sus elefantes al mismo tiempo...”* lo cual evidencia un reconocimiento de las magnitudes que variaban en la presentación de la situación, como eran: las distancias recorridas por los

personajes, la distancia entre ellos y el tiempo transcurrido. Es importante anotar que de estas 3 magnitudes que variaban en la situación (tiempo, distancia recorrida por los personajes, distancia que separa los personajes) la mayoría de los estudiantes tuvo la inclinación solamente hacia reconocer la variación de la distancia entre los personajes con respecto al tiempo. Esta proclividad de los estudiantes hacia centrar su atención en la variación de la distancia que separaba los personajes posiblemente estuvo tensionada por el contexto del comic, en el cual se presentó la persecución del inspector Fix al señor Phileas Fogg.

- A partir del desarrollo de la Tarea 3 se pudo constatar que la totalidad de los estudiantes logró establecer la dirección del cambio de las magnitudes variables que lograron reconocer en el marco de la situación dado que ellos enunciaban cuestiones como: “*A mayor tiempo, mayor distancia recorrida*”, o también: “*Cada vez que va corriendo el tiempo, Fix se va acercando más a Phileas Fogg*”. Esto permitió identificar, dentro de las características del razonamiento covariacional presentadas en los estudiantes al enfrentar esta tarea, la coordinación de la dirección del cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud.
- En relación con el desarrollo de la Tarea 4, en donde se centraba la atención en la coordinación de cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud, fue posible percibir que la totalidad de los estudiantes logró reconocer patrones para ambos espacios de medida y posterior a ello hicieron un adecuado llenado de las tablas para ambas magnitudes (tiempo y distancia recorrida). Sin embargo, cuando se les solicitó información que requería la prolongación de las tablas dadas, a partir de cantidades grandes que no se presentaban en ellas, se pudo constatar que un poco menos de la mitad de los estudiantes no lograron reconocer la covariación entre las magnitudes, esto manifestado en resultados que no correspondían a los objetivos de la tarea. Dicho de otra forma, aunque identificaron los patrones de aumento para la magnitud tiempo (de hora en hora) y para la distancia recorrida (de 5 kilómetros en 5 kilómetros para el inspector Fix y de 4 kilómetros en 4 kilómetros para Phileas Fogg), no lograron establecer la coordinación del cambio entre ambas magnitudes por lo cual no llegan hasta un tercer nivel de razonamiento

covariacional, N3. Los 9 estudiantes restantes (60%) no solamente completaron correctamente las tablas mediante algún análisis de tipo vertical u horizontal, previa identificación de patrones de incremento en las magnitudes consideradas, sino que también establecieron correctamente las distancias recorridas para valores de tiempo no enteros ($1\frac{1}{2}$ horas) y para otros mayores (10 horas, 20 horas). Además, dieron expresiones como “*El inspector Fix avanza 5 kilómetros cada hora*”, o también: “*ya que vemos que Phileas Fogg va más lento, por ejemplo, Fix va a 5 kilómetros por hora y Fogg va a 4 kilómetros por hora*”. Estas coordinaciones correctas de la cuantificación del cambio permiten afirmar que estos 9 estudiantes (60%) tuvieron comportamientos propios de N3 al verbalizarse la consciencia de la cantidad de cambio de la magnitud de salida (distancia recorrida) mientras se consideran los cambios en la magnitud de entrada (tiempo).

- En cuanto al tipo de operaciones realizadas en las tablas de la Tarea 4, se pudo establecer que 6 estudiantes de esta investigación (40%) emplearon las sumas iteradas para completarlas sin establecer la covariación entre las magnitudes involucradas. Esto implica que deben fortalecerse en la escuela los vínculos entre espacios de medida, es decir, la incidencia de una magnitud de entrada sobre la magnitud de salida de tal manera que se promueva el razonamiento covariacional como forma de apuntarle a una futura comprensión del concepto de función como objeto matemático.
- Respecto a la coordinación de la razón de cambio promedio de la magnitud de salida con los incrementos uniformes en la magnitud de entrada, propio de AM4 e indagada en la Tarea 5 que para esta propuesta se aplicó a la construcción de la magnitud velocidad como razón de cambio de la distancia recorrida por unidad de tiempo, se presentaron acercamientos visibles en expresiones como lento, cansado (para justificar una disminución de la velocidad) y, rápido, recuperó energía (para referirse a un aumento en la velocidad). Sin embargo, los estudiantes establecieron por separado los cambios en las magnitudes tiempo y distancia recorrida más que desde la elaboración de un cociente entre las cantidades, no evidenciándose el reconocimiento de la coexistencia de estas tres magnitudes (velocidad, distancia y tiempo). Por tal motivo, al indagar en la comprensión de la velocidad de los elefantes ésta no fue construida como el cociente de la distancia (en

kilómetros) y el tiempo (en horas), con su correspondiente unidad ($\frac{Km}{h}$). Esto pudo apreciarse en expresiones como: “*El inspector Fix avanza 5 Km cada hora*” (ver ilustración 79) donde no parece consolidarse de manera global la velocidad para el personaje, como $5 \frac{Km}{h}$. Es decir, el acercamiento que los estudiantes tuvieron a la razón de cambio se vio más a través de la comparación de las 2 magnitudes consideradas (distancia y tiempo) que como una nueva magnitud autónoma o con “vida propia”.

- Para esta misma tarea, centrada en AM4, si bien no se esperaba una gráfica en particular, sí estaba presente la intención que se comunicara en ella la idea de que Phileas Fogg se movía a distintas velocidades, es decir, indagar sobre la construcción de una nueva magnitud, la velocidad, pero además de que ésta era variable. En este ítem, 2 estudiantes usaron representaciones horizontales de longitudes menores asociándolas al cansancio del elefante y representaciones horizontales de mayor longitud asociadas a la recuperación de energía, lo que podría significar que los estudiantes se acercan de manera intuitiva a reconocer los cambios de las velocidades dadas. Sin embargo, esta idea intuitiva no corrobora, tal y como se indicó en la conclusión anterior, la construcción de esta magnitud como la razón de cambio promedio, por lo cual estos 2 estudiantes parecen estar en una zona de transición entre N3 y N4.
- Conforme a las conclusiones anteriores, las producciones escritas y verbalizaciones de los estudiantes dejaron ver la presencia de características relacionadas con el pensamiento variacional evidenciadas en el reconocimiento, la percepción, la identificación y caracterización de la variación y el cambio, así como del razonamiento covariacional enmarcado en esta propuesta, presentes en qué cambia, cómo cambia y cuánto cambia, no alcanzando el reconocimiento de las razones de cambio promedio e instantánea (esta última no evaluada en ninguna de las tareas debido al grado de escolaridad de los participantes). Si bien, conforme al marco conceptual adoptado (Carlson et al., 2003) los estudiantes de esta investigación no llegaron a un nivel 4 de razonamiento covariacional, se pudo constatar que todos pasaron por N1 y N2 de este razonamiento, sustentados por AM1 y AM2, esto es, la coordinación del valor de una magnitud con los cambios en la otra y la coordinación de la dirección del cambio de una magnitud con los cambios en la otra

magnitud, respectivamente. Asimismo, 9 estudiantes presentaron características asociadas a N3, sustentadas por AM1, AM2 y AM3, siendo esta última la coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud. De estos 9 estudiantes, 2 tuvieron un acercamiento intuitivo a la velocidad por medio de la comparación de las 2 magnitudes que aparecían en escena, pero sin llevar a cabo la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida (magnitud de salida) con los incrementos uniformes del tiempo (magnitud de entrada), es decir, sin una verdadera construcción de esta nueva magnitud (la velocidad).

4.2 Reflexiones

- Teniendo en cuenta que Geogebra no había sido explorado al interior de la I.E.JMC de Tuluá, esta investigación deja como resultado adicional una familiarización de la comunidad con este software gracias a los espacios en los cuales los investigadores han realizado socializaciones con los estudiantes y docentes del área de las matemáticas quienes, hasta la fecha, continúan interesados en aprovechar los beneficios que el software ofrece. En este orden de ideas se puede decir que, fruto del desarrollo de este trabajo, se ha ganado en la comunidad educativa en donde este impacta, un acercamiento por parte de docentes y estudiantes hacia nuevas formas de hacer actividad matemática en donde Geogebra cobra mayor relevancia.
- Si bien las simulaciones propuestas en este trabajo de investigación permitieron caracterizar las formas de razonar covariacionalmente de estos estudiantes, queda abierta la posibilidad de seguir repensando este tipo de tareas, afinarlas o completarlas de ser necesario, para continuar en el estudio del razonamiento covariacional conforme al referente conceptual asumido, tanto consolidando AM3 como movilizándolo los estudiantes hacia acciones mentales superiores, conforme a los niveles de escolaridad indagados. En este sentido, para futuras investigaciones podrían obviarse preguntas con el mismo objetivo ya que se encontraron respuestas reiterativas, es decir, los estudiantes podían dar cuenta de una acción mental específica respondiendo a una sola pregunta.

- De igual forma, esta propuesta podría tener aplicabilidad en el estudio de la cinemática, bien sea para velocidades constantes o variables. Esto significa que es posible pensar en abordar estos conocimientos de las ciencias naturales antes de llegar a la educación media, debido a que las respuestas encontradas en estudiantes de quinto grado invitan a, desde el razonamiento covariacional, apropiar conocimientos de la física y otras ciencias.
- Aunque no era una finalidad de esta investigación, se encontraron estudiantes que hicieron uso de razonamientos proporcionales, hecho evidenciado principalmente en el llenado de las tablas (Tarea 4). Por tal motivo, esta propuesta se puede potenciar para incursionar a futuro tanto el desarrollo de este tipo de razonamiento como en conceptos propios de la proporcionalidad, tales como la proporción y la razón.
- El desarrollo de esta propuesta permitió dos miradas: desde la básica primaria y desde la educación media, niveles educativos en los cuales los investigadores se desempeñan al interior de la I.E.JMC de Tuluá. Estas perspectivas permitieron confirmar que deben diseñarse propuestas que apunten al desarrollo del pensamiento variacional desde el inicio y durante la vida escolar de manera que se pueda consolidar la maduración de este pensamiento. Lo anterior para preparar paulatinamente al estudiante a la comprensión de objetos matemáticos de mayor abstracción como la Razón de Cambio y la Función, entre otros.
- Durante el desarrollo de esta investigación fue evidente que diseñar propuestas de aula de forma responsable es una actividad compleja que implica estudiar referentes de la Didáctica de las Matemáticas que nutran las prácticas en el aula no solo para obtener mejores desempeños sino también para lograr en los estudiantes una mejor disposición hacia la actividad matemática. Para ello se hace la invitación a que dichas propuestas se piensen en colectivo al interior de las instituciones educativas, buscando espacios donde los docentes reflexionen sobre nuevas formas de enseñar las matemáticas y así potenciar en los estudiantes su comprensión y el deseo de ahondar en ellas.
- Por último, la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática y Ciencias Experimentales con Universidad del Valle, inserta en programa de Becas para la

Excelencia Docente del MEN, ha sido para los investigadores un espacio de reflexión profunda sobre el quehacer docente gracias al proyecto de investigación desarrollado y a los demás elementos constitutivos de este programa de formación. En particular, ha fortalecido una conciencia sobre la responsabilidad que debe tener el docente, como sujeto político, al ponerse los lentes de la educación en los sentidos social, cultural y científico y, como consecuencia, de la importancia de planeaciones contextualizadas, fundamentadas en las diferentes investigaciones aportantes al desarrollo de pensamiento matemático. Se inicia entonces una nueva ruta, de trabajo arduo, pero alimentada por las diferentes voces que polifónicamente quieren armonizar la matemática escolar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké, L. P. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. Mathematics Education Library, (39) (Vo. Springer Science & Business Media). Berlin, Germany.
- Bouzas, P. G. (2011). *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el aprendizaje cooperativo?* Investigación en la Escuela, (73), 95-108. Universidad de Alcalá de Henares. Barcelona, España.
- Brousseau, G. (2000). *Educación y didáctica de las matemáticas*. En: Educación Matemática (en prensa), 12(1), 5-38. México.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study*. Revista Educación Comunicación Tecnología, (7), 9. Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia.
- Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública, subsecretaría de Educación media superior, México, distrito federal. <http://www.sems.gob.mx>.
- Cantoral, R., e Farfán, R. M. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Épsilon (42), 353-369.
- Cantoral, R. (2001). *Enseñanza de la matemática en la educación superior*. Revista Electrónica Sinéctica, (19), 3-27, Instituto Tecnológico de Estudios Superiores, Jalisco, México.

- Cardona, N. (2007). *Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de resolución de problemas* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Colonia El Dorado, Honduras.
<http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcjm2x1>
- Carlson, M. (1998). *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. Research in American Mathematical Society, 3, 114-62. Arizona University, Arizona, EE.UU.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.
- Castro, E., & Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica*. Revista Educación Matemática, Vol. 19, Núm.2, 67-94.
- Córdoba, J. J. M., Vingues, G. G., Cárdenas, C. M., Martínez, F. O., Obando, G., Posada, F.,... & Sepúlveda, J. M. (2002). *Herramientas computacionales en el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación en la clase de matemáticas*. In Ministerio de Educación, Memorias del congreso internacional: Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas. Bogotá, Colombia.
- García, J. Á. (2009). *La Calculadora científica y la obtención de la respuesta correcta en el ciclo diversificado*. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 9(2), 1-19.
- García, J. Á. (2013). *La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Educación, 37, Núm 1, 29-42.
- Garriga, J. J. (2011). *El lenguaje algebraico: un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria*. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.

Gimeno, J. (1998). *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

Godino, J. & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros, director: Juan D. Godino. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). *Naturaleza del razonamiento algebraico elemental*. Boletim de Educação Matemática-BOLEMA, 26, 483-511.

Gómez, J., Orozco, J., Realpe, G., Benavides, G., Navarro, N., Guacaneme & Edgar A. (2012). *El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela*. En Obando, Gilberto (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 914-921, Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Gómez, O. M. (2015). *Desarrollo Del Pensamiento Variacional En Estudiantes De Grado Noveno*. (Tesis de Maestría), Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Grueso, R. A., & González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. (Tesis de Maestría), Colombia: Universidad del Valle, Cali.

Guttenberg, E. W. (1991). *La calculadora en la enseñanza de la matemática*. Suma, (7), 65-68.

Guzmán, N. A. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada*. Tesis de Maestría, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Henao, M. E., Marín, W. B., Montoya, D. F., & Restrepo, J. S. (2012). *Razonamiento covariacional en estudiantes de grado quinto*. (Tesis pregrado), Colombia: Universidad de Antioquia, Medellín.

- Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). National Research Council, National Academy Press Washington, DC.
- Kieran, C., & Yagüe, E. F. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7(3), 229-240.
- Llopis, T. Q., & Zabala, J. G. (2016). *Uso de Geogebra para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, (71), 4-6.
- Louis, C., & Lawrence, M. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, La muralla.
- Mancilla, E. A. M., Sarmiento, G. J. P., & Barriosnuevo, S. J. C. (2012). *Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5 grado de educación básica primaria*. Escenarios, 10(1), 7-16.
- Marmolejo, D. (2014). *Desarrollo de la competencia matemática de razonamiento en el pensamiento variacional*. (Tesis pregrado), Colombia: Universidad de Antioquia, Apartadó.
- Martínez, J. N. (2013). *Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra* (Tesis maestría), Colombia: Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Martínez, E. C. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. In Investigación en educación matemática XVI (pp. 75-94). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Serie Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN

- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo Igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. (Tesis doctoral), Universidad de Granada. Granada, España.
- Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria*. PNA, 3(3), 135-156.
- Panorkou, N., & Maloney, A. P. (2015). Early Algebra: *Expressing Covariation and Correspondence*. Teaching Children Mathematics, 23(2), 90-99.
- Panorkou, N., Maloney, A. P., & Confrey, J. *Expressing Covariation and Correspondence relationships in elementary schooling*.
- Radford, L. (2012). Reaction to Part III On the Cognitive, Epistemic, and Ontological Roles of Artifacts. *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, 7, 283.
- Radford, L. (2010). The anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics*, 10, 103-120.
- Revueltas, C. C., Jaramillo, C. C., & Arboleda, E. J. (2011). *El enfoque de sistemas como estrategia para la enseñanza de la matemática en la educación básica*. Colombia: Universidad de Antioquia, Medellín.
- Rincón, L., & Gustavo, W. (2015). *Estrategia metodológica basada en la actividad lúdica para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de 8º grado que cursan la*

- asignatura matemática en la institución educativa rural San Joaquín del municipio de Santa María-Huila.* (Tesis maestría), Colombia: Universidad del Tolima, Ibagué.
- Rivera, E., & Sánchez, L. F. (2013). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos [recurso electrónico]* (Tesis pregrado), Colombia: Universidad del Valle, Cali.
- Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, C., Castillo, E., & Mora, O. (1997). *La Transición aritmética-álgebra.*
- Romero, L. R., & Gómez, J. L. L. (2014). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Universidad de Granada. Granada, España. Alianza Editorial.
- Sánchez, L. F. (2016). *Desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por geogebra* (Tesis Maestría), Colombia: Universidad del Valle, Cali.
- Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). *Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation.* In North Carolina State University. (1), 298-304.
- Santos, H., Manuel, W., & Márquez Lobo, Z. T. (2008). *La función cuadrática como marco referencial para el desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia con estudiantes del 9o grado.* (Tesis pregrado). Colombia: Universidad de Sucre, Sincelejo.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, 5-34.
- Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. Focus on Learning Problems in mathematics*, 12(3), 49-63.

- Tavera, F., & Villa, J. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas*. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. República Dominicana. (1), 1-11.
- Universidad de Antioquia; Antioquia (Colombia). Gobernación. *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico: modulo 2*. Universidad de Antioquia, 2006.
- Valoyes, L., & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Cali: Universidad del Valle.
- Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vasco, C. E. (1985). *El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas*. Revista de la Universidad Nacional (1944-1992), 1(2), 45-51.
- Vasco, C. E. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9).
- Vasco, C. E. (2003). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Congreso Internacional sobre Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. 68-77.
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. (Tesis Doctoral), Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, la matemática y la realidad: Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria*. México, Trillas.

Verne, J., & Dios, M. F. (1999). *La vuelta al mundo en 80 días* (Vol. 2). Edaf.

Villa, J. A., & Vahos, M. R. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales*. *Educação matematica pesquisa*, 12(3).

Villa, J (2010). *Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas*. *Tecné, Episteme y Didaxis*. 31, 9-25

Vinner, S. (1997). *The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning*. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 97-129.

Vitabar, F. (2016). *GeoGebra: un extraño en el aula*. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (71), 7-12.

Zapata, G. O., Vasco, M. D. V., Lasprilla, N. L. V., Universidad de Antioquia, & Antioquia (Colombia). Gobernación. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos: módulo 1*. Universidad de Antioquia.

ANEXOS

ANEXO 1: Cómic (diseño realizado por los investigadores)¹⁰



¹⁰ Las imágenes que se presentan en este comic fueron tomadas del portal web: <https://www.pixton.com/mx/>



Y se pone así en marcha la apuesta...
y su viaje con los diferentes medios de
transporte



Nuestro primer
destino ¡Paris!

Genial!



Atención, atención, El Banco de
Inglaterra ha sido robado!!!

... y justo cuando Phileas y su Mayordomo se
escapan



Phileas y su mayordomo
Passepartout son los
responsables del robo al
banco... ¡Detengan el tren!



Debemos tomar el
barco a Bombay... no
perdamos más tiempo

No se si eso sea
posible, el detective
Fix nos persigue...



Será posible
que fix nos
alcance?

Eso sería desafortunado.
pues no llegaríamos a
tiempo y perderíamos la
apuesta.









Te invitamos a continuar esta historia compartiendo con nosotros las siguientes tareas!

ANEXO 2: Tareas de la situación



INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES UNIVERSIDAD DEL VALLE – TULUÁ

2017



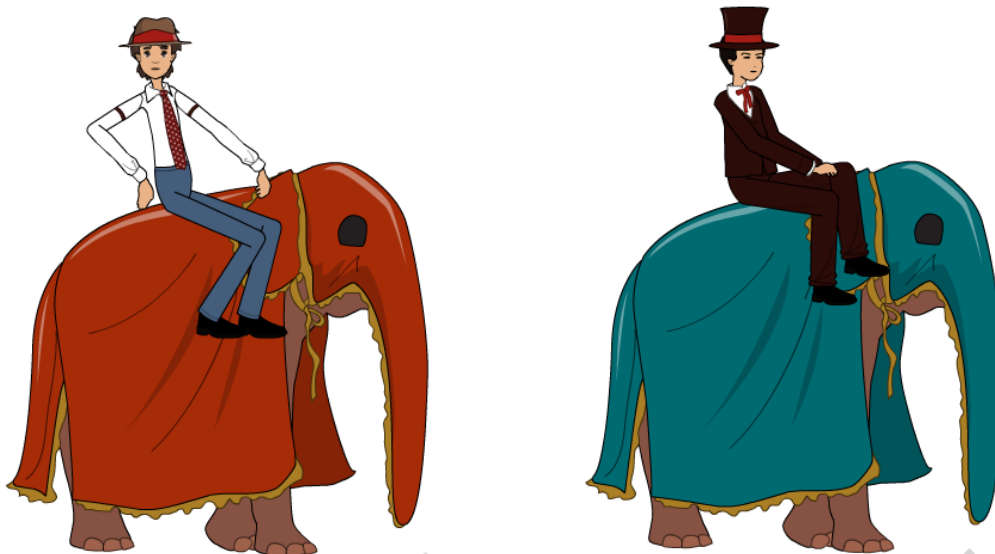
Tarea 1: Comprendiendo la situación



A partir de la lectura del comic, responde las preguntas que se presentan en las diapositivas

1. ¿En qué consistió la apuesta realizada por el señor Phileas Fogg?
2. ¿Qué motivó al inspector Fix a ir en persecución del señor Phileas Fogg?
3. Menciona tres (3) medios de transporte empleados por el señor Phileas Fogg y sus amigos durante el viaje. ¿Cuál te llamó más la atención? ¿por qué?
4. De acuerdo con el comic, ¿qué situación le permite al señor Phileas Fogg y a sus amigos aumentar la ventaja que llevan sobre inspector Fix, mientras viajaban en elefante?
5. Si el señor Phileas Fogg se hubiera demorado 81 días en dar la vuelta al mundo, ¿habría ganado la apuesta? ¿por qué?

Tarea 2: Reconociendo relaciones entre magnitudes (AM1)



1. Manipula el deslizador, el cual representa el tiempo, y realiza una descripción a partir de lo que observas en situación presentada.
2. ¿Qué está variando o cambiando en la situación?
3. ¿Qué sucede con la posición del señor Phileas Fogg en la medida que transcurre el tiempo?
4. ¿Qué sucede con la posición del inspector Fix en la medida que pasa el tiempo?
5. ¿De qué dependen las posiciones del inspector Fix y del señor Phileas Fogg?
6. De acuerdo con lo que estás observando, ¿será posible que el detective Fix alcance a al señor Phileas Fogg? Justifica tu respuesta.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES
UNIVERSIDAD DEL VALLE – TULUÁ
2017



Tarea 3: Identificando cómo cambian las magnitudes (AM2)

1. A medida que el tiempo transcurre, ¿qué sucede con la distancia recorrida por el inspector Fix? Justifica tu respuesta.
2. A medida que el tiempo transcurre, ¿qué ocurre con la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg? Justifica tu respuesta.
3. De acuerdo a los puntos 1 y 2, indica qué relación encuentras entre el tiempo y las distancias recorridas por el Señor Phileas Fogg y el inspector Fix.
4. A medida que el tiempo transcurre, ¿qué sucede con la distancia que separa al inspector Fix y al señor Phileas Fogg? Justifica tu respuesta.
5. ¿Cómo es la relación entre el tiempo y la distancia que separa al señor Phileas Fogg del inspector Fix?



INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES
UNIVERSIDAD DEL VALLE – TULUÁ
2017



Tarea 4: Cuantificando los cambios de magnitudes variables (AM3)

1. A partir de lo que observas en la situación, indica cuál es la distancia inicial que separa al inspector Fix y al señor Phileas Fogg.
2. En la siguiente tabla se presentan las distancias recorridas (en kilómetros) por el inspector Fix en relación con el tiempo (en horas) transcurrido. Completa la tabla a partir de la información suministrada en ella.

TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA (KM)
1	5
2	10
3	15
4	
5	
	30
7	

3. Explica cómo hiciste para completar los datos de la tabla.
4. ¿Cuál es la distancia recorrida por el inspector Fix en 1 hora y media, 10 horas y 20 horas? Explica tus respuestas.
5. Tomando en consideración los datos presentados en la tabla del punto 2, ¿Qué se puede concluir de la velocidad del inspector Fix a partir de la distancia que recorre en relación con el tiempo?
6. En la siguiente tabla se presentan las distancias recorridas (en kilómetros) por el señor Phileas Fogg en relación con el tiempo (en horas) transcurrido. Completa la tabla a partir de la información suministrada en ella.

TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA (KM)
1	4
2	8
3	12
4	
5	
	24
7	

7. Explica cómo hiciste para completar los datos que hacían falta en la tabla.
8. ¿Cuál es la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg en 1 hora, 1 hora y media, 10 horas y 20 horas? Explica tus respuestas.
9. Tomando en consideración los datos presentados en la tabla del punto 6, ¿Qué se puede concluir de la velocidad del señor Phileas Fogg a partir de la distancia que recorre en relación con el tiempo?
10. Al cabo de 10 horas de la partida del Inspector Fix y el señor Phileas, compara las distancias recorridas por ambos e indica si son o no las mismas. Justifica tu respuesta.
11. Con base en la información suministrada en las tablas de los puntos 2 y 6, indica al cabo de cuánto tiempo el inspector Fix alcanza al señor Phileas Fogg. Justifica tu respuesta.

Tarea 5: Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes (AM4)



En el momento en que el señor Phileas Fogg se da cuenta que el detective Fix lo va a alcanzar, emprende la huida recorriendo diferentes distancias por cada hora transcurrida. Manipula el deslizador (de hora en hora) y verás cuánta distancia recorrió para cada hora.

1. Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida. A partir de esto, realiza algunas conclusiones sobre el comportamiento de la velocidad que tuvo el señor Phileas Fogg durante toda su huida.
2. Tomando en consideración la descripción realizada en el punto anterior, representa por medio de una gráfica la relación entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg y el tiempo en el cual recorre cada distancia.

ANEXO 3: Ejemplo de las producciones escritas de uno de los estudiantes

Tuluá, Marzo 27 de 2017.

RESPUESTAS

Nombre del estudiante: Juliana Sanchez Bedoya

Tarea # 1

1 R/= que podría darle una vuelta al mundo en tan solo 80 días.

2 R/= pues el Detective fix creio que phileas y su mayoralomo habion robado el banco de inglaterra.

3 R/= Tren, Trineo y elefante.
el que mas me interesante para mi fue el elefante porque me parecio un transporte muy entretenido.

4 R/= que el isperior fix se cayo del elefante y eso les deo un poco de ventaja para correr y tomar un tren

5 R/= si se ubiera demorado 81 dias no abriagana la apuesta porque la apuesta es solo de 80 dias y si llega un dia despues yano es valida

Tuluá, Marzo 27 de 2017.

RESPUESTAS

Nombre del estudiante:

Johiana Sanchez Bedoya

Tarea #

2

- 1R/ Al undir inciar o al deslizar la barra los elefantes se desplazan a la velocidad deseada.
- 2R/ que al undir el boton iniciarse mueve a un tiempo determinado y al manejar la barra puedes decidir la velocidad que quieres.
- 3R/ pues a medida que transcurre el tiempo el Detective fix se acerca cada vez mas a Phileas Fogg.
- 4R/ a medida que pasa el tiempo fix logra acercarse mas a phileas fogg.
- 5R/ que se ban acercando poco a poco gracias al tiempo
- 6R/ si puede alcanzarlo a este paso pero como vemos en el comic el investigador se cae del elefante y le da ventaja.

Tuluá, Marzo 27 de 2017.

RESPUESTAS

Nombre del estudiante: Juliana Sanchez Bedoya

Tarea # 3

1R/= pues a medida que el tiempo transcurre el inspector fix se va acercando cada vez mas a Phileas Fogg.

2R/= pues a medida que pasa el tiempo Phileas Fogg pierde un poco mas el recorrido.

3R/= pues estos 2 personajes comienzan con mayor distancia y termina con una menor distancia por lo que el inspector fix puede acercarse mas a Phileas Fogg.

4R/= a medida que pasa el tiempo esa distancia en la que estan en el comienzo desaparece y fix puede acercarse mas a Phileas Fogg.

5R/= comienzan con una gran diferencia de tiempo y una larga distancia pero al final fix puede alcanzar a Phileas Fogg.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES
UNIVERSIDAD DEL VALLE – TULUÁ



2017

TAREA 4: CUANTIFICANDO LOS CAMBIOS DE MAGNITUDES VARIABLES

(AM3)

1. A partir de lo que observas en la situación, indica cuál es la distancia inicial que separa al inspector Fix y al señor Phileas Fogg.
2. Mueve el deslizador para ver la tabla donde se presentan las distancias recorridas (en kilómetros) por el inspector Fix en relación con el tiempo (en horas) transcurrido. Completa la tabla a partir de la información suministrada en ella.

TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA (KM)
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35

3. Explica cómo hiciste para completar los datos de la tabla.
4. ¿Cuál es la distancia recorrida por el inspector Fix en 1 hora y media, 10 horas y 20 horas? Explica tus respuestas.
5. Tomando en consideración los datos presentados en la tabla del punto 2 (Inspector Fix), ¿Qué se puede concluir de la velocidad del inspector Fix a partir de la distancia que recorre en relación con el tiempo?

Tuluá, Marzo 27 de 2017.

RESPUESTAS

Nombre del estudiante: Juliana Sanchez Bedoya

Tarea # 4

1R/ = la distancia inicial que los separa es 12 Km

3R/ = pues lo que se fue inspeccionar la Tabla y me di cuenta que por cada hora adelanta 5 Km

4R/ = en 1 hora y media Recorre 7,5 Km
en 10 horas recorre 50 Km
en 20 horas recorre 100 Km ✓

5R/ = que el inspector fix avanza 5 Km cada hora



INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN MARÍA CÉSPEDES
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES
UNIVERSIDAD DEL VALLE – TULUÁ



2017

6. Mueve el deslizador para ver la tabla donde se presentan las distancias recorridas (en kilómetros) por el señor Phileas Fogg en relación con el tiempo (en horas) transcurrido. Completa la tabla a partir de la información suministrada en ella.

TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA (KM)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
7	28

7. Explica cómo hiciste para completar los datos que hacían falta en la tabla.
8. ¿Cuál es la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg en 1 hora, 1 hora y media, 10 horas y 20 horas? Explica tus respuestas.
9. Tomando en consideración los datos presentados en la tabla del punto 6 (Phileas Fogg), ¿Qué se puede concluir de la velocidad del señor Phileas Fogg a partir de la distancia que recorre en relación con el tiempo?
10. Al cabo de 10 horas de la partida del Inspector Fix y el señor Phileas, compara las distancias recorridas por ambos e indica si son o no las mismas. Justifica tu respuesta.
11. Con base en la información suministrada en las tablas en las tablas de los puntos 2 y 6 (Inspector Fix y señor Phileas Fogg), indica al cabo de cuánto tiempo el inspector Fix alcanza al señor Phileas Fogg Justifica tu respuesta.

Tuluá, Marzo 27 de 2017.

RESPUESTAS

Nombre del estudiante:

JULIANA SANCHEZ BEDOYA

Tarea #

4

7R/ observe la Tabla y deduci los multiplos que estaban en ella.

8R/ en 1 hora recorre 4 km ✓

en 1 hora y media recorre 6 km ✓

en 10 horas recorre 40 km ✓

en 20 horas recorre 80 km ✓

9R/ Phileas fogg recorre 1 km menos que fix, y esa es la razon por la que fix alcanza a fogg.

10R/ no es lo mismo porque fix recorre un kilometro mas que fogg.

11R/ como puede alcanzarlo, es por que al final phileas fogg recorre en 10 horas 40 km y fix recorre en 10 horas 50 km.

Tuluá, Marzo 27 de 2017.

RESPUESTAS

Nombre del estudiante:

Juliano Sanchez Bedoya

Tarea #

5

1R/= al principio en la distancia 1 recorre 7km en la distancia 2 recorre 5km en la distancia 3 3km en la distancia 4 6km y en la distancia 5 4km lo que quiere decir que al principio no estaba cansado pero poco a poco el cansancio iba cayendo sobre el pero a partir de la D4 comenzo a recuperar energia y siguió su camino.

2R/=

