

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE
RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN EL
APRENDIZAJE DE ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS
DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA CON LA
MEDIACIÓN DE GEOGEBRA

Alejandro Palacios Cortés

17 de octubre de 2024

Universidad del Valle



Departamento de Matemáticas

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE DE ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA

Alejandro Palacios Cortés

Director

Heber Mesa

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle

Codirector

Jorge Enrique Fiallo

Departamento de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander

17 de octubre de 2024

Alejandro Palacios Cortés

*CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE
DE ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA CON LA MEDIACIÓN
DE GEOGEBRA*

Director: Heber Mesa

Codirector: Jorge Enrique Fiallo

17 de octubre de 2024

Universidad del Valle

Departamento de Matemáticas

Santiago de Cali

Meléndez - 760042

Resumen

En este trabajo se presenta un planteamiento del modelo de Van Hiele para el aprendizaje y enseñanza de la geometría euclidiana, adaptado para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría hiperbólica usando el modelo del disco de Poincaré. Se implementan las características que clasifican a cada estudiante en un nivel determinado del modelo, a través de la experiencia que tienen un grupo de estudiantes del programa de matemáticas de la Universidad del Valle; además una de las ayudas importantes para este aprendizaje es el uso del software GeoGebra que brinda una visualización y facilita el entendimiento de los objetos matemáticos en este modelo.

Palabras claves: Geometría hiperbólica, teoría de Van Hiele, GeoGebra, Caracterización de los niveles de Van Hiele.

Abstract

This work presents an approach to the Van Hiele model for the learning and teaching of Euclidean geometry, adapted for the teaching and learning of hyperbolic geometry using the Poincaré disk model. The characteristics that classify each student at a certain level of the model are implemented through the experience of a group of students from the mathematics program at the Universidad del Valle; In addition, one of the important aids for this learning is the use of the GeoGebra software that provides a visualization and facilitates the understanding of the mathematical objects in this model.

Keywords: Hyperbolic geometry, Van Hiele theory, GeoGebra, Characterization of Van Hiele levels.

Agradecimientos

Hoy quiero agradecer primeramente a Dios por todo lo que me brinda cada día, el entendimiento y sabiduría para cada una de las cosas que realizo, a mis padres Marco Tulio Palacios y Luceneth Cortés, a mis hermanas Mariana Palacios Cortés y Angélica Palacios Cortés, y en general a todos mis familiares y amigos; a los profesores que me dirigieron en los cursos desarrollados durante mi proceso de aprendizaje desde primaria hasta la universidad, a los profesores del departamento de Matemáticas y en especial a mi Director Heber Mesa Palomino quien me dirigió en varios cursos del pregrado y en el trabajo final de la carrera, el cual fue un eje fundamental para que este fuera posible; a mi codirector Jorge Enrique Fiallo quien me guió en la parte pedagógica de mi trabajo. Además dar un enorme agradecimiento a los estudiantes de matemáticas que me colaboraron con su disposición y entrega para el desarrollo de este trabajo, e igualmente al profesor Jovanny Muñoz quien me permitió el espacio dentro de su curso de geometría, finalmente al profesor Luis Recalde por ser parte de este proceso como evaluador. Aquí, no terminan mis agradecimientos de todo lo vivido durante este proceso, porque resalto cada persona que me encontré y conocí durante cada instante de mi pregrado, que aportó demasiadas cosas para mi crecimiento personal y profesional como lo es la estrategia ASES y el campus melendez.

...

Índice general

1	Introducción	1
2	Preliminares	7
2.1	Variedades riemannianas	7
2.2	El plano hiperbólico	11
2.3	Modelo de Van Hiele	12
2.3.1	Niveles de Van Hiele	14
2.3.2	Fases de aprendizaje de Van Hiele	15
3	Geometría hiperbólica con geogebra	17
3.1	Geogebra	17
3.2	Elaboración de herramientas Hiperbólicas	19
3.2.1	Recta hiperbólica que pasa por dos puntos dados	19
3.2.2	Semirrecta hiperbólica que pasa por dos puntos dados	20
3.2.3	Punto medio entre dos puntos con la métrica hiperbólica	21
3.2.4	Segmento hiperbólico entre dos puntos	22
3.2.5	Recta perpendicular	22
3.2.6	Circunferencia hiperbólica	22
3.2.7	Distancia hiperbólica entre dos puntos.	24
3.2.8	Circunferencia hiperbólica dados su centro y su radio.	25
3.2.9	Ángulo	26
4	Actividades diseñadas siguiendo el modelo de Van Hiele	29
4.1	Actividades diseñadas siguiendo el modelo de Van Hiele	29
5	Aplicación del modelo de Van Hiele	43
5.1	Clasificación en las actividades de acuerdo al modelo de Van Hiele	43
5.2	Materiales y lo que se espera en cada actividad por parte del profesor	58
6	Resultados y conclusiones	65
7	Apendice	87
7.1	Formato de autorización de tratamiento protección de datos personales	87
7.2	Fotografías	89
7.2.1	Fotografías día 1 y 2	89

7.2.2	Fotografías día 3	90
7.2.3	Fotografías día 4	90
Bibliografía		93

Introducción

” *Razonar en geometría es razonar con figuras mal hechas.*

— David Hilbert

La geometría euclidiana, tal y como la conocemos hoy en día, tuvo una fundamentación teórica a través del tratado matemático escrito por Euclides cerca del 300 a.c en Alejandría. Esta obra es conocida como *Los Elementos de Euclides*. En el primer libro, Euclides establece los elementos que determinan la base de la geometría (punto, línea, superficie, entre otros), cinco nociones comunes del razonamiento y cinco postulados geométricos en los cuales reposa todo el sistema axiomático [Sim+74]. A continuación presentamos algunos de estos elementos.

Definiciones

Punto: Es lo que no tiene partes.

Línea: Es una longitud sin anchura.

Extremos de la línea: Son puntos.

Línea recta: Es la que se extiende igualmente entre sus puntos.

Superficie: Es lo que solamente tiene longitud y latitud.

Nociones

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.
3. Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Postulados

1. Por dos puntos distintos pasa una recta.

2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado.

Desde la antigüedad se realizaron esfuerzos por deducir el quinto postulado a partir de los otros cuatro, algunas equivalencias a este quinto postulado son las siguientes,

- *si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*
- *Por un punto exterior a una recta dada solo cabe trazar una paralela [Ack02].*
- *Existe un par de triángulos no congruentes, pero semejantes (Saccheri).*
- *La suma de [las medidas de] los ángulos de cualquier triángulo es igual a [la suma de las medidas de] dos ángulos rectos.*
- *En todo cuadrilátero que contenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto. (Clairaut, 1741).*

Uno de los intentos más amplios y ambiciosos por demostrar el quinto postulado de Euclides fue el de Giovanni Gerolamo Saccheri en el siglo XVIII, quien contradictoriamente creó lo que podríamos considerar como modelo incipiente de la geometría hiperbólica. Sin embargo, Saccheri creyó que no era consistente y no llegó a formalizar todos los aspectos de su trabajo. También Johann Heinrich Lambert encontró algunas fórmulas interesantes referentes a lo que hoy llamaríamos triángulos de la geometría hiperbólica [Mar12], probando que la suma de los ángulos internos en cualquiera de estos triángulos es siempre menor que 180° (o π radianes), la fórmula de Lambert establece que:

$$(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) = CA_{\alpha\beta\gamma},$$

donde:

- $\alpha + \beta + \gamma$ es la suma de los ángulos internos del triángulo (expresada en radianes).
- $A_{\alpha\beta\gamma}$, es el área total del triángulo.
- C es una constante de proporcionalidad positiva relacionada con la curvatura constante del espacio hiperbólico en que se halla inmerso el triángulo.

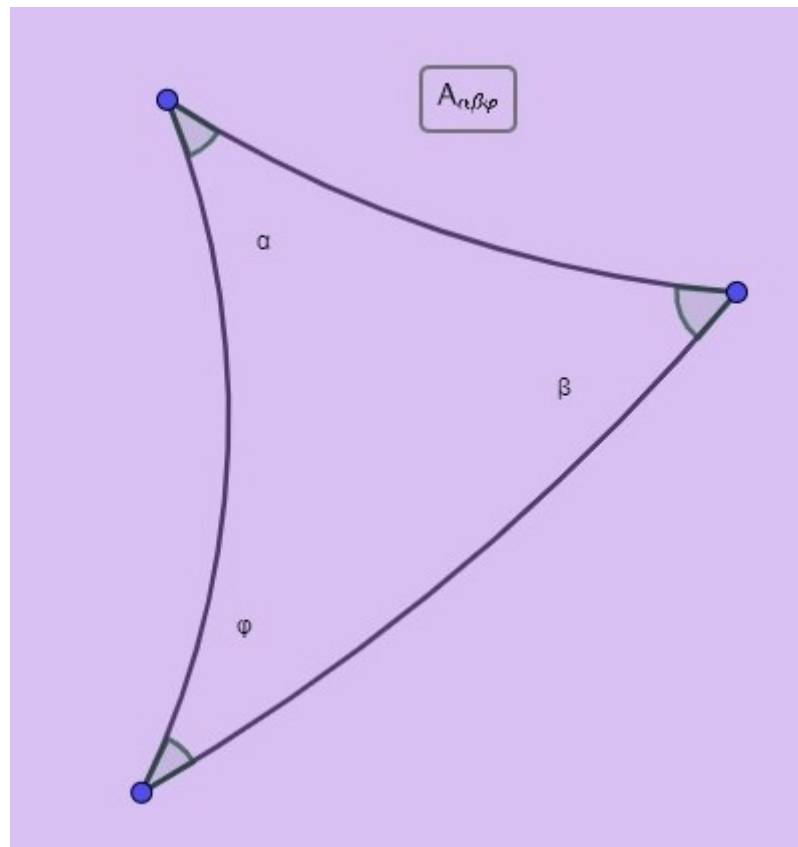


Fig. 1.1: Triángulo en la geometría hiperbólica con sus ángulos internos

Más adelante Carl Friedrich Gauss trabajó en un modelo similar pero no publicó sus resultados. En 1820, dos jóvenes matemáticos que trabajaban de modo independiente, János Bolyai [Gra06] y Nikolai Ivanovich Lobachevsky, publicaron sus modelos por los cuales establecían la posibilidad de un tipo de geometría alternativa totalmente consistente, el cuál conocemos hoy en día como geometría hiperbólica.

La geometría hiperbólica (o lobachevskiana) es un modelo de geometría que satisface solo los cuatro primeros postulados de la geometría euclidiana. Aunque es similar

en muchos aspectos y muchos de los teoremas de la geometría euclidiana siguen siendo válidos en geometría hiperbólica, no se satisface el quinto postulado de Euclides [Smo78]. Al igual que la geometría euclidiana, la geometría hiperbólica es un modelo de espacio con curvatura constante, en este caso curvatura negativa [Gál00].

Hay varios modelos importantes del espacio hiperbólico entre ellos el *modelo de Klein*, el *modelo del hiperboloide*, el *modelo bola de Poincaré*, y el *modelo del semiespacio*. Todos ellos modelan la misma geometría en el sentido de que dos de ellos pueden relacionarse mediante una isometría, es decir, una transformación que conserva todas las propiedades geométricas de cada espacio, en otras palabras, todos los modelos son isométricos entre sí, aunque no con respecto a la métrica euclidiana. En este trabajo se visualizarán el *modelo bola de Poincaré* y el *modelo del hiperboloide* [Jos14].

Inicialmente, abordaremos el espacio hiperbólico desde una perspectiva diferencial, es decir, como una variedad diferencial dotada de una métrica riemanniana, la cual será nuestro soporte teórico para analizar los modelos y realizar construcciones geométricas a partir de Geogebra, el cual es un software de geometría (euclidiana) dinámica.

La geometría riemanniana se basa en el estudio de variedades diferenciales dotadas de métricas de Riemann, la cual es una aplicación que a cada punto de la variedad asigna, en su espacio tangente, una forma cuadrática definida positiva; aplicación que varía suavemente de un punto a otro [Car88]. La métrica riemanniana permite definir ángulo, longitud de curvas, y volumen en conjuntos mucho mas abstractos que el plano o la esfera. Este tipo de geometría fue planteada por primera vez por Bernhard Riemann en el siglo XIX, permitiendo describir una amplia gama de geometrías cuyas propiedades métricas varían de un punto a otro, incluyendo los tipos estándar de geometría no euclidiana. Uno de los teoremas clásicos en esta geometría es el teorema de Gauss-Bonnet, el cual establece una conexión entre la geometría de una superficie (curvatura) y su topología (característica de Euler) [CSS02].

Sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

A lo largo de los años se ha evidenciado que el aprendizaje de la geometría y las matemáticas en general ha sido todo un reto lleno de grandes dificultades,

según algunos autores como M. Barrantes, L. Blanco y R. Goncalves, esta situación podría cambiar favorablemente a través de profesores que generen nuevos métodos dinámicos o herramientas lúdicas para facilitar el aprendizaje y la enseñanza de estas, y evolucionando sus propias experiencias y la forma en la cual ellos aprendieron en su formación universitaria [VA13a]. Actualmente la geometría tiene diversos paradigmas, por ejemplo que es muy difícil, aburrida, y en ciertos momentos no útil para nuestra vida. Por todo esto se han generado diversas teorías educativas y modelos pedagógicos que facilitan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular algunas de ellas se enfocan en la geometría, como lo es la teoría de Van Hiele, diseñado por el matrimonio holandés Van Hiele. Este modelo tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda. La teoría se enmarca dentro de la didáctica de la matemática y específicamente en la didáctica de la geometría. El eje central de esta teoría plantea que el aprendizaje de la geometría se construye pasando por cinco niveles de pensamiento: visualización o reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal, y rigor. Según este modelo, se requiere una adecuada instrucción para que los alumnos puedan pasar a través de los distintos niveles. En relación a esto, los doctores Van Hiele proponen cinco fases secuenciales de aprendizaje: información, orientación guiada o dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Ellos afirman que al desarrollar la instrucción de acuerdo a esta secuencia, se puede promover al alumno al nivel siguiente del que se encuentra [BS86a].

El propósito principal de este trabajo consiste en implementar la teoría de Van Hiele en el aprendizaje de algunas nociones propias de la geometría hiperbólica con un grupo selecto de estudiantes de cuarto semestre del programa académico de Matemáticas de la Universidad del Valle; cabe resaltar que este grupo de estudiantes ha tenido, a lo largo de su desarrollo académico, experiencia con la geometría euclidiana en su formación media y profesional. Se espera que estos estudiantes adquieran la capacidad de reconocer aspectos básicos de la geometría hiperbólica a través del modelo de la bola de Poincaré y compararlos con algunos resultados conocidos de la geometría euclidiana. Adicionalmente se caracterizarán los dos primeros niveles de la teoría de Van Hiele, analizando cuáles son las experiencias que resaltan en cada uno de los participantes al momento de superar cada paso y nivel donde se encuentran. Para apoyar el acercamiento y exploración del espacio hiperbólico, y facilitar su entendimiento, se realizarán herramientas de ilustración dinámica con el software GeoGebra, las cuales brindarán un mejor manejo de las construcciones geométricas en el espacio hiperbólico.

Preliminares

” *La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal.*

— Henri Poincaré

En este capítulo se introducirán algunos conceptos básicos de la geometría riemanniana necesarios para construir los modelos de la geometría hiperbólica desde un punto de vista diferencial. Estas construcciones serán la base para la implementación del modelo de la bola de Poincaré en el software de geometría dinámica Geogebra. En particular, se realizará caracterización de las geodésicas de esta variedad riemanniana a través de elementos euclidianos (rectas y círculos); esta caracterización se obtiene por medio de un difeomorfismo entre el disco unitario y un hiperboloide, donde estos conjuntos están dotados de ciertas métricas riemannianas que hacen que los espacios tengan curvatura constante negativa y el difeomorfismo sea una isometría. Se omitirán algunas demostraciones de los resultados presentados aquí, sin embargo estas serán referenciadas para aquellos lectores que deseen seguir con todo detalle esta teoría.

2.1 Variedades riemannianas

Variedad riemanniana es un concepto fundamental en la geometría diferencial. Se trata de una estructura geométrica que combina una variedad diferenciable (una variedad topológica equipada con una estructura diferenciable) con una forma bilineal asociada a los espacios tangentes de la variedad, la cual es llamada métrica riemanniana. A continuación se define que es una variedad diferenciable.

Definición 2.1.1. Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones inyectivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tales que,

1. $\cup_\alpha x(U_\alpha) = M$.

2. Para cualquier pareja α, β satisfaciendo $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, se tiene que los conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ son diferenciables.
3. La familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es maximal respecto a las dos condiciones anteriores.

Cada pareja (U_α, x_α) tal que $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, es llamada una *parametrización sistema de coordenadas* o *carta coordenada*, de M en p . El conjunto $x_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una *vecindad coordenada* en p . Adicionalmente, una familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfaga las condiciones 1), 2) y 3) es llamada una *estructura diferenciable* sobre M .

Ejemplo 2.1.1. La esfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad 2 dimensional. Para argumentar este hecho, se hará uso de la proyección estereográfica. Geométricamente, la proyección estereográfica se describe como sigue, sea un punto $P(\infty)$, que llamaremos centro de proyección en la superficie de una esfera, y sea un plano, que llamaremos plano de proyección, paralela al plano tangente a la esfera en $P(\infty)$.

La proyección estereográfica hace corresponder a cada punto α de la esfera, distinto de $P(\infty)$, el punto A , que es intersección de la recta que une $P(\infty)$ y α con el plano. Recíprocamente, a cada punto A del plano, le corresponde el único punto α distinto de $P(\infty)$, que es la intersección de la esfera, con la recta que une $P(\infty)$ y A .

Las funciones inversas de las proyecciones estereográficas de la esfera respecto al polo norte $N = (0, 0, 1)$ y polo sur $S = (0, 0, -1)$, determinan una familia de parametrizaciones que satisfacen las condiciones 1) y 2) de la definición anterior. En la figura 2.1 se representa la parametrización obtenida como función inversa de la proyección estereográfica desde el polo norte de la esfera. Explícitamente,

$$X_N : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z} \right)$$

Claramente la proyección estereográfica es una función inyectiva sobre el plano $Z = -1$, con inversa la función

$$X_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$$

$$(u, v) \rightarrow \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{u^2 + v^2 - 4}{u^2 + v^2 + 4} \right)$$

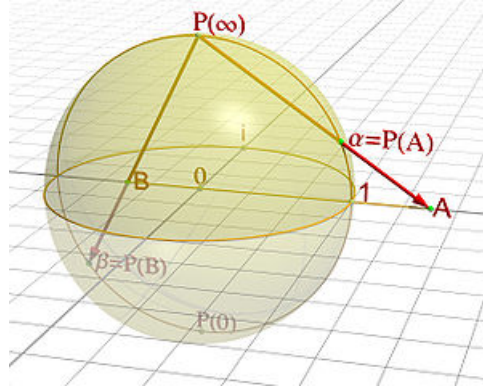


Fig. 2.1: Función inversa de la proyección estereográfica de la esfera.[Gau23]

Definición 2.1.2. Una métrica riemanniana g en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno $g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$, en el espacio tangente $T_p M$, esto es, una forma bilineal simétrica y definida positiva en $T_p M$ que varía diferencialmente en el sentido siguiente, si $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas locales entorno de $p \in x(U)$ y para $q = x(x_1, \dots, x_n) \in x(U)$, si $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ es una función diferenciable en U .

Es importante observar que, la variación diferenciable de la métrica riemanniana en la definición anterior, no depende del sistema de coordenadas escogido [Car88].

Una variedad riemanniana es la pareja (M, g) donde M es una variedad diferenciable y g una métrica riemanniana. A partir de este punto, a lo largo del documento, M será una variedad riemanniana.

Definición 2.1.3. Sean M y N variedades riemannianas, un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ es llamado una isometría si, y solo si, $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, para todo $p \in M$ y $u, v \in T_p M$. Si para cada $p \in M$ existen $q \in N$, $U \subset M$ y $V \subset N$ vecindades isométricas de p y q respectivamente, entonces decimos que M es localmente isométrica a N .

Definición 2.1.4. Una aplicación diferenciable $c : I \rightarrow M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ sobre M es llamada una curva (parametrizada).

Definición 2.1.5. Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica en t_0 si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ en el punto t_0 ; si γ es una geodésica en t para todo $t \in I$, diremos que γ es geodésica. Si $[a, b] \subset I$ y γ es una geodésica, la restricción de γ a $[a, b]$ es llamado un segmento geodésico uniendo los puntos $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Donde $\frac{D}{dt}$, denota la derivada covariante en M .

Las definiciones anteriores las podemos encontrar en [Car88].

Ejemplo 2.1.2. El plano y el cilindro son dos superficies tal que cada una de ellas es localmente isométrica a la otra, aunque éstas no son variedades isométricas [Err19]. En la Figura 2.2 se representa como las rectas del plano son enviadas en las geodésicas del cilindro a través de una isometría local.

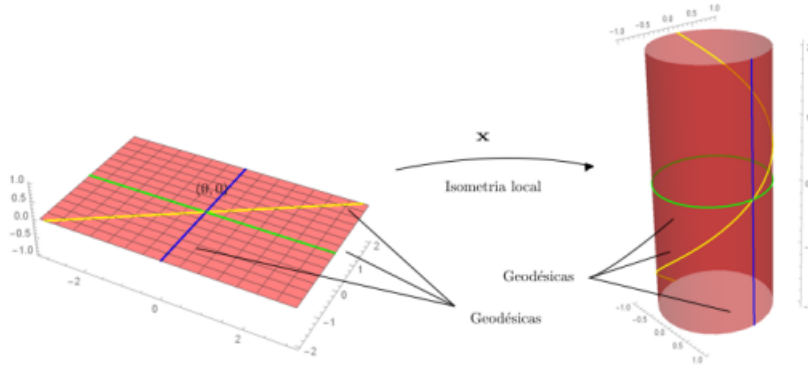


Fig. 2.2: Isometría local entre el plano y el cilindro.

Gauss prueba en 1827 en el artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, que el exceso sobre π de la suma de los ángulos interiores α, β, γ de un triángulo geodésico Δ en una superficie regular, es igual a la integral de la curvatura gaussiana K sobre Δ [Día+15], Específicamente,

Teorema 2.1.1 (Gauss-Bonnet). Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ una región regular de una superficie orientada. Supongamos que cada una de sus componentes esta orientada positivamente y sea $\theta_1, \dots, \theta_n$ los ángulos exteriores de todas ellas.

Entonces,

$$\int \int_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi \chi(\mathcal{R})$$

Donde κ_g es la curvatura geodésica de ∂D , s denota la longitud de arco de ∂D y $\chi(\mathcal{R})$ es la característica de Euler de $\mathcal{R}$.

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\Delta} K dA.$$

De esta fórmula se deduce:

- Si K es idénticamente nula, entonces $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (como se conoce en la geometría euclidiana).
- Si $K > 0$, entonces $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Esta situación se tiene, por ejemplo, en la esfera $\mathbb{S}^2(r)$ de radio $r > 0$, cuya curvatura gaussiana es constante $K = \frac{1}{r^2}$. Se sigue entonces que el exceso sobre π de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico Δ en $\mathbb{S}^2(r)$ depende exclusivamente de su área y viene dado por

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{1}{r^2} \text{área}(\Delta).$$

- Si $K < 0$, entonces $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Este es el caso del plano hiperbólico el cual será tratado en este trabajo. Dado que el espacio hiperbólico tiene curvatura constante -1 , se sigue entonces que el exceso sobre π de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico Δ es equivalente a su área, así, por

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \text{área}(\Delta).$$

2.2 El plano hiperbólico

Sea el conjunto $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1 \wedge z > 0\}$ llamado hiperbóloide, el cual corresponde a una de las hojas de la superficie del mismo nombre, y el conjunto $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ el disco unitario euclidiano; es claro que ambos conjuntos son variedades diferenciables. Se utilizará un tipo de proyección estereográfica sobre $\mathcal{H}$, para demostrar que $\mathcal{H}$ y $\mathbb{D}$ son difeomorfos y dotando a cada conjunto de una métrica riemanniana adecuada, se llega a que estas variedades son isométricas con curvatura seccional constante -1 [Enc+].

La proyección estereográfica, en este caso, esta dada por,

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{D} \\ (x, y, z) &\rightarrow \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \end{aligned}$$

Notese que si $(x, y, z) \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\frac{x}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+z)^2}, \\ &= \frac{1+z^2}{(1+z)^2} = 1 - \frac{2z}{(1+z)^2} < 1, \end{aligned}$$

luego $\pi(x, y, z) \in \mathbb{D}$. Su función inversa es,

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{D} &\rightarrow \mathcal{H} \\ (u, v) &\rightarrow \left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2} \right). \end{aligned}$$

Las métricas de $\mathcal{H}$ y $\mathbb{D}$ están dadas como $h_{\mathcal{H}} = i^*g$, la cual llamaremos pull-back de la métrica, donde $i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión y g es la métrica Lorentziana definida como $g(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$ para todo $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$; y $h_{\mathbb{D}} = 4 \frac{(du)^2 + (dv)^2}{[1-(u^2+v^2)]^2}$ para todo $(u, v) \in \mathbb{D}$. Con estas métricas en cada modelo se tiene que las variedades $(\mathcal{H}; h_{\mathcal{H}})$ y $(\mathbb{D}; h_{\mathbb{D}})$ son isométricas.

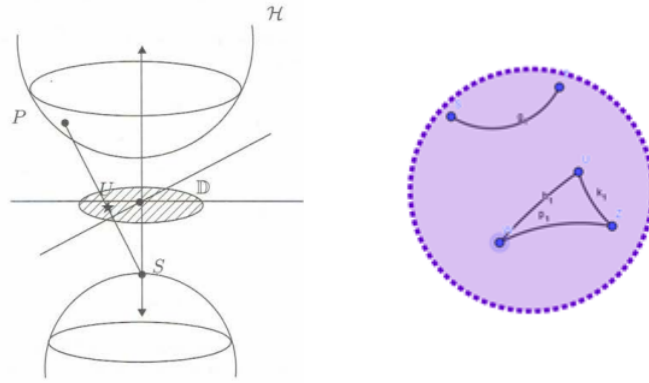


Fig. 2.3: Proyección estereográfica $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{D}$ y el modelo de la bola de Poincaré. [Jos14]

2.3 Modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele es un modelo didáctico producto de una representación en el que están involucrados el desarrollo y descripción del razonamiento geométrico, y la propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Este modelo ayuda a explicar cómo, en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre a través de una serie de niveles. Para dominar el nivel en que se encuentra y así poder pasar al nivel inmediatamente superior, el estudiante debe cumplir ciertos procesos de logro y aprendizaje. Este modelo distribuye el conocimiento escalonadamente en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Dentro de cada nivel, se propone una serie de fases

de aprendizaje que el estudiante debe cumplir para avanzar de un nivel a otro, lo que constituye la parte instructiva del modelo. Ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno: el individuo debe pasar y dominar un nivel para subir al siguiente. Cabe resaltar que en este modelo emergen algunos aspectos esenciales dentro de todo su desarrollo, primero su esencia esta dada por lo descriptivo, ya que permite reconocer la variedad de formas en las que el alumno razona y realiza ejercicios de abstracción sobre un objeto geométrico, además de servir como un soporte instructivo en el quehacer del profesor, pues sistematiza la ruta que debe de seguir en su practica pedagógica para potenciar el progreso de los alumnos en el aprendizaje de la geometría. Ahora bien, para acercarse a la intencionalidad que pretende el modelo de los Van Hiele, se requiere exponer las principales características de esta teoría, las cuales son de nivel secuencial, progresivo, intrínseco-extrínseco, lingüística y de emparejamiento, como se describen a continuación.

- **Secuencial:** Se requiere avanzar linealmente a través de cada uno de los niveles, para no generar rupturas en el desarrollo del razonamiento geométrico.
- **Progresivo:** Para avanzar de un nivel de razonamiento a otro, es necesario alcanzar las competencias definidas en el nivel anterior.
- **Intrínseco-Extrínseco:** Las competencias y conocimientos alcanzados en determinado nivel de razonamiento, orientaran el desarrollo del siguiente nivel.
- **Lingüística:** Cada nivel de razonamiento se caracteriza por su unicidad en el lenguaje geométrico empleado y la significación en los diferentes niveles.
- **Emparejamiento:** Para abordar determinado nivel de razonamiento, es necesario reconocer el nivel inicial de los alumnos, donde se considera fundamental incorporar las fases de aprendizaje para ese nivel.

Al respecto, Fouz afirma que al subir de nivel se hacen explícitos en el estudiante los conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior, lo cual indica que va aumentando de esta manera el grado de comprensión y dominio del conocimiento [FD05]. Esto hace que los objetos de trabajo de este nivel superior sean extensiones de aquellos del nivel anterior. Por su parte Vargas y Gamboa manifiestan que el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico [VA13b].

2.3.1 Niveles de Van Hiele

Según el modelo de Van Hiele se deben seguir los siguientes niveles para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría:

Nivel 0 (Visualización o reconocimiento): En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares. Este nivel se refiere a las aproximaciones iniciales que tienen los alumnos en relación a las figuras y objetos geométricos, donde tienden a comprenderse de una manera general, la cual se enfoca en establecer semejanzas y diferencias entre ellos y elementos más comunes, en lugar de preocuparse por atender y comprender las relaciones matemáticas (definiciones, propiedades, etc.) que emergen en ese momento.

Ejemplo 2.3.1. *Identifica paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.*

Nivel 1 (Análisis): Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras. Este nivel permite tener un acercamiento a la esencia de las figuras, es decir, iniciar a reconocer elementos y relaciones que poseen las figuras por medio de una observación y experimentación coherente.

Ejemplo 2.3.2. *Un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales. El estudiante identifica una figura por su apariencia, como un todo, pero no se establecen relaciones entre los elementos que la determinan. Por ejemplo, sabe decir qué figura es un cuadrado pero no es capaz de verbalizar que en el caso del cuadrado los lados son iguales y no es así en el rectángulo.*

Nivel 2 (Ordenación o clasificación): Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen cómo algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias. Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales. Este nivel tiene la intención de otorgar un significado a las interpretaciones e inferencias que se realizan sobre las figuras y objetos geométricos, reconociendo la incidencia que tienen en el origen de las mismas. Para ello describen los objetos geométricos y figuras de manera formal.

Ejemplo 2.3.3. *En un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.*

Nivel 3 (Deducción formal): En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática. Este nivel permite el acto de utilizar un lenguaje lógico y formal para explicar los diferentes fenómenos que surgen, por lo cual se realizan deducciones y demostraciones, entendiendo las propiedades de las figuras y objetos geométricos, a partir de bases axiomáticas.

Ejemplo 2.3.4. *Demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

Nivel 4 (Rigor): Se trabaja la geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar. Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido. Este nivel centra sus esfuerzos en poder reflexionar, analizar y conjeturar sobre aspectos relacionados al fundamento de la axiomática de la geometría, principalmente (nociones, definiciones, axiomas, postulados, propiedades, teoremas, etc).

Estos niveles se logran a través de una intervención planeada del docente en los cinco pasos siguientes: información, orientación guiada o dirigida, explicitación, orientación libre e integración [BS86b].

2.3.2 Fases de aprendizaje de Van Hiele

- **Fase 1. Información:** En esta primera fase el rol del profesor es acercarse a todos los saberes cognitivos que los alumnos poseen, producto de enseñanzas anteriores en el aula o las prácticas y construcciones sociales que han desarrollado respecto al objeto de estudio de forma empírica.
- **Fase 2. Orientación dirigida:** Esta fase muestra la regulación que subyace entre las diferentes situaciones que se plantean en el aula y las intervenciones que el profesor realiza para direccionar de forma adecuada a su respectivo desarrollo.
- **Fase 3. Explicitación:** Aquí se pone de manifiesto la idea de generar ambientes de discusión y reflexión entre el profesor y los alumnos en función de todo lo

que se comprende y se dificulta en la interpretación de la esencia del contenido matemático estudiado.

- **Fase 4. Orientación libre:** Esta fase se encamina al hecho de que los alumnos estén en capacidad de determinar la aplicabilidad e influencia que tiene el objeto de estudio en diferentes contextos y del mismo modo que ellos estén en la capacidad de manipularlos para abordar alguna situación en particular.
- **Fase 5. Integración:** En esta última fase propone que el profesor en su quehacer pedagógico logre diseñar una ruta en la cual le permita a los alumnos recopilar todo lo aprendido a través de las otras fases y cuente con un punto de vista más amplio, coherente y estructurado respecto al objeto de estudio abordado.

Con todo lo descrito anteriormente, se hace explícita la importancia que tiene incorporar el modelo de los Van Hiele en el desarrollo de esta investigación, puesto que permite llevar al aula algunas actividades que privilegian desarrollar y fortalecer en una población específica contenidos propios de la geometría euclidiana e hiperbólica, específicamente, objetos matemáticos como (punto, recta, segmento, ángulo y triángulo) en la geometría hiperbólica a través del modelo del disco de Poincaré. Cabe aclarar que los alumnos deben haber tenido alguna experiencia con la geometría euclidiana, ya que se espera que los alumnos logren fortalecer bases de dicha geometría a través del tratamiento y manipulación de contenidos matemáticos escolares de mayor grado de complejidad, en términos de su nivel de abstracción.

Geometría hiperbólica con geogebra

” *La geometría existe en todas partes. Pero se necesitan ojos para verlo, inteligencia para comprenderlo y alma para admirarlo.*

— Johannes Kepler

Ahora que contamos con toda la estructura teórica que sustenta la parte matemática necesaria para realizar este trabajo, estamos listos para la implementación de un software que facilita construir conceptos matemáticos complejos en herramientas que permitan el aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes. Aquí se muestra como se construye el disco de Poincaré a partir de la proyección estereográfica de la hoja superior de un hiperboloide. Además como a través de este software se realizan construcciones de herramientas, que nos permiten visualizar los puntos, rectas, segmentos y algunas figuras en el plano hiperbólico a través del modelo del disco de Poincaré.

3.1 Geogebra

Este trabajo esta dirigido al estudio del espacio hiperbólico a través del modelo del disco de Poincaré, para ello realizaremos una descripción de la proyección de objetos geométricos del hiperboloide de dos hojas en el disco.

Sea $\mathcal{H}$ la hoja superior del hiperboloide de dos hojas, cuya ecuación esta dada por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}. \quad (3.1)$$

Las rectas o geodésicas, de este modelo se caracterizan como intersecciones de la hoja superior del hiperboloide con planos que contienen el origen de coordenadas, dicha intersección es una rama de hipérbola. Dos puntos cualesquiera de la superficie en cuestión nunca están alineados con el origen de coordenadas, por lo tanto, estos

puntos con el origen determinan un plano cuya intersección con $\mathcal{H}$, determina una recta del modelo. Se verifica entonces, el primer axioma de Euclides: “por dos puntos distintos pasa una recta”.

Como se presenta en el capítulo 2, se puede obtener el disco de Poincaré a partir de la hoja superior del hiperboloide por medio de una proyección estereográfica sobre el plano $z = 0$ desde el punto $(0, 0, -1)$, como se puede apreciar en la figura 3.1.

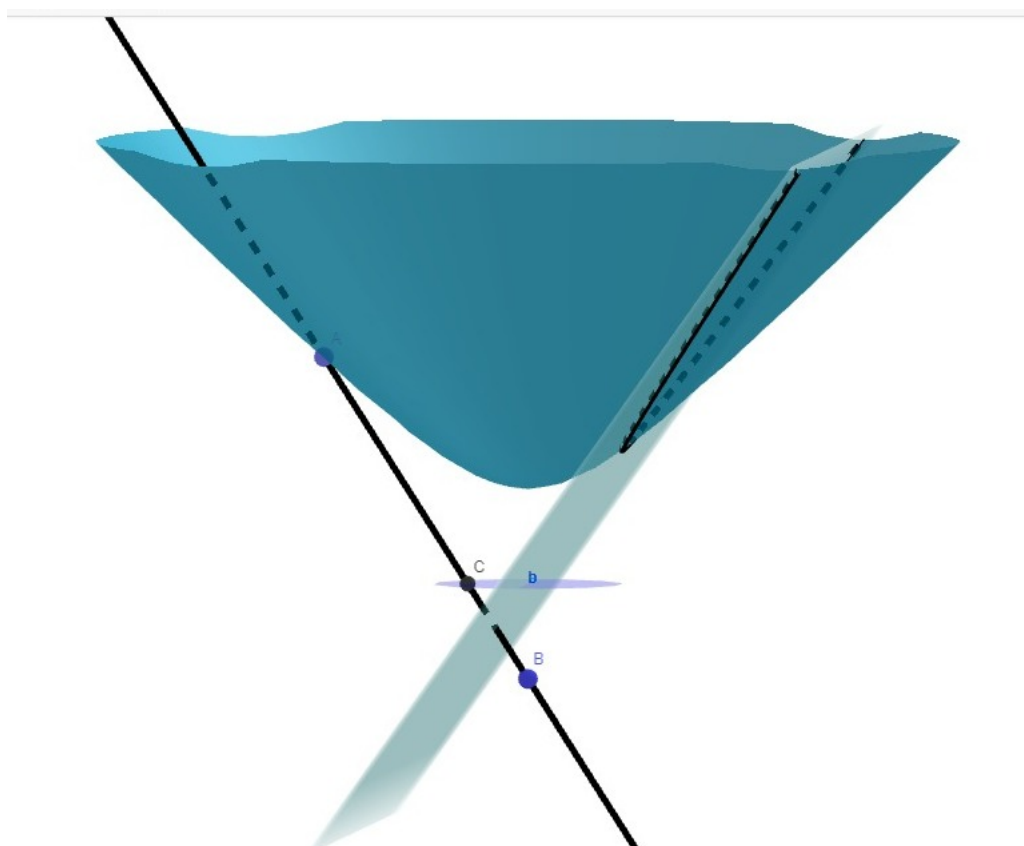


Fig. 3.1: Curva generada por la intersección de la hoja superior del hiperboloide y un plano que pasa por el origen.

Cada recta, o geodésica, en el modelo de la bola de Poincaré, se determina proyectando la intersección de planos que pasan por el origen con $\mathcal{H}$ en el disco unitario. Estas proyecciones coinciden con arcos de circunferencia del interior del disco unidad, ortogonales a la circunferencia frontera de dicho disco.

Mediante la proyección $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}$ se logra modelar en GeoGebra el plano hiperbólico, a través, de la construcción de herramientas, creando así una aplicación dinámica en GeoGebra que hemos llamado **geogebra hiperbólico** visualizadas a través del modelo del disco de Poincaré. Estas herramientas se desarrollan gracias a una teoría implícita en cada una de ellas, por lo tanto, debemos de conocer lo siguiente.

GeoGebra permite crear herramientas basadas en una construcción preexistente. En primer lugar, es preciso elaborar la construcción que la herramienta debe poder trazar a posteriori. En el menú **Herramientas**, basta un clic sobre creación de herramienta nueva para abrir la correspondiente caja de dialogo. Ahora se precisa completar los datos en las tres pestañas: **objetos de salida**, **objetos de entrada** y **nombre e icono**, para crear efectivamente la herramienta. De este modo tan sencillo podemos ir construyendo herramientas similares a las que ofrece el software GeoGebra de geometría euclídea, para el modelo del disco de Poincaré de geometría hiperbólica.

3.2 Elaboración de herramientas Hiperbólicas

Veremos a continuación el proceso de elaboración de algunas de las herramientas del modelo del disco de Poincaré del plano hiperbólico.

3.2.1 Recta hiperbólica que pasa por dos puntos dados

Datos: los puntos A y B y la circunferencia unitaria. 1. Dados los puntos A y B del

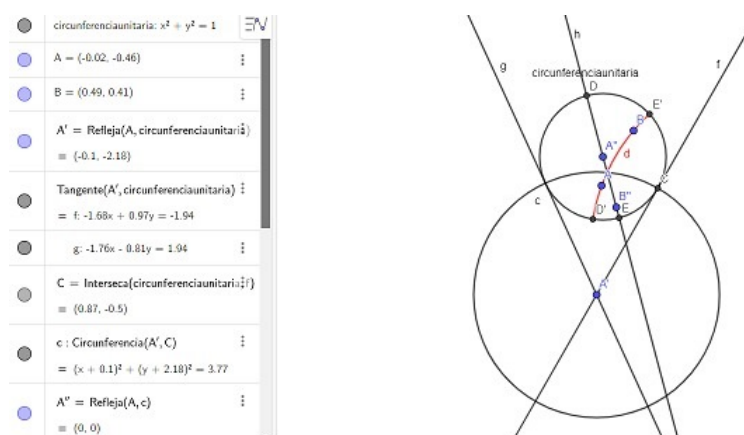


Fig. 3.2: Recta hiperbólica que pasa por dos puntos.

interior de *circunferenciaunitaria*, podemos asumir que $A \neq (0, 0)$, se construye el punto A' mediante la reflexión de A en *circunferenciaunitaria*.

2. Desde A' se trazan las rectas tangentes a *circunferenciaunitaria*, f y g .
3. El punto C es el punto de intersección de f con *circunferenciaunitaria*.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A' y que pasa por el punto C .
5. Los puntos A'' y B'' son los reflejados de A y B en la circunferencia c .
6. Construimos la recta h que pasa por A'' y B'' .
7. D y E son los puntos de intersección de h con *circunferenciaunitaria*.

8. D' y E' son los puntos reflejados de D y E en c .

9. **Objeto de salida:** el arco d que pasa por los puntos D' , A y E' , es la recta hiperbólica buscada.

3.2.2 Semirrecta hiperbólica que pasa por dos puntos dados

Datos: los puntos A y B y la circunferencia unitaria.

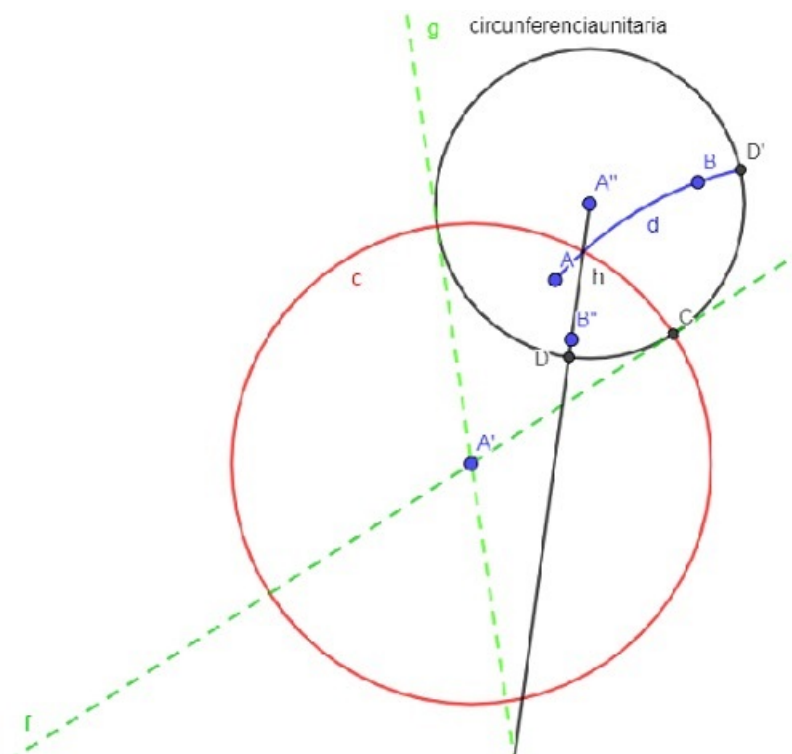


Fig. 3.3: Semirrecta hiperbólica por dos puntos.

1. Dados los puntos A y B del interior de *circunferencia unitaria*, podemos asumir que $A \neq (0,0)$, se construye el punto A' mediante la reflexión de A en *circunferencia unitaria*. Si fuera $A = (0,0)$ la semirrecta hiperbólica sería directamente la semirrecta euclídea por A y B .
2. Desde A' se trazan las rectas tangentes a *circunferencia unitaria*, f y g .
3. El punto C es el punto de intersección de f con *circunferencia unitaria*.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A' y que pasa por el punto C .
5. Los puntos A'' y B'' son los reflejados de A y B en la circunferencia c .
6. Construimos la semirrecta h con origen en A'' y pasa por B'' .
7. D es el punto de intersección de h con *circunferencia unitaria*.
8. El punto D' es el reflejado de D en c .
9. **objeto de salida:** el arco d que pasa por los puntos A , B y D' , es la semirrecta hiperbólica buscada.

3.2.3 Punto medio entre dos puntos con la metrica hiperbólica

Datos: los puntos A y B y la circunferencia unitaria.

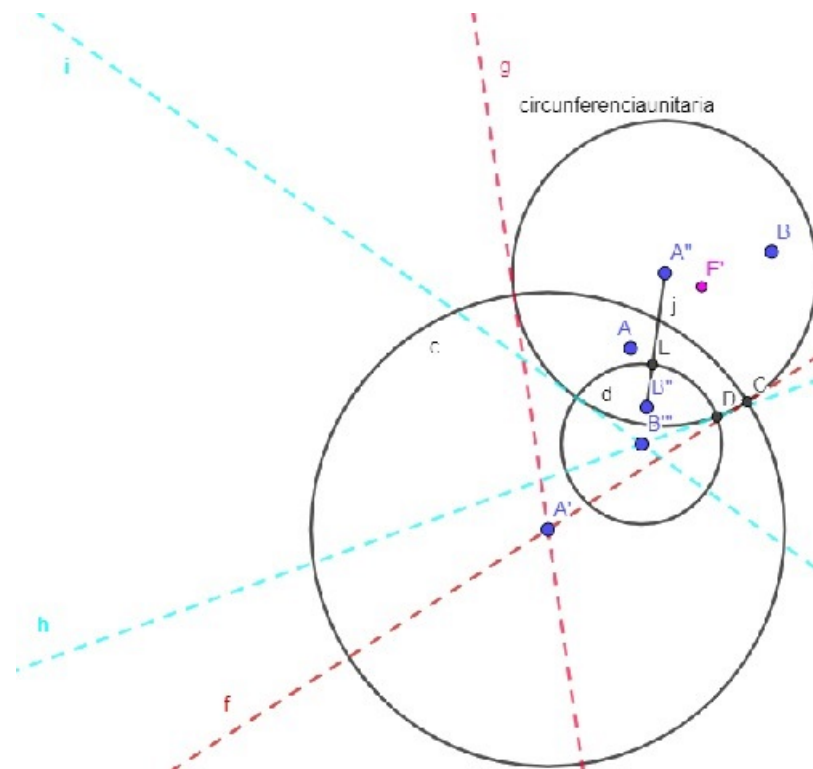


Fig. 3.4: Punto medio entre dos puntos.

1. Dados los puntos A y B del interior de *circunferencia unitaria*, podemos asumir que $A \neq (0,0)$, se construye el punto A' mediante la reflexión de A en *circunferencia unitaria*.
2. Desde A' se trazan las rectas tangentes a *circunferencia unitaria*, f y g .
3. El punto C es el punto de intersección de f con *circunferencia unitaria*.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A' y que pasa por el punto C .
5. Los puntos A'' y B'' son los reflejados de A y B en la circunferencia c .
6. Construimos el punto B''' mediante la reflexión en *circunferencia unitaria* de B'' .
7. Desde B''' trazamos las rectas tangentes a *circunferencia unitaria*, i y h .
8. El punto D es el punto de intersección de h con la *circunferencia unitaria*.
9. Se construye la circunferencia d con centro en B''' y que pasa por D .
10. Se construye el segmento j que une a A'' y B'' .
11. El punto E es el punto de intersección de el segmento j con la circunferencia d .
12. El punto E' , reflejado de E en c , es el punto buscado.

3.2.4 Segmento hiperbólico entre dos puntos

Datos: los puntos A y B y la circunferencia unitaria.

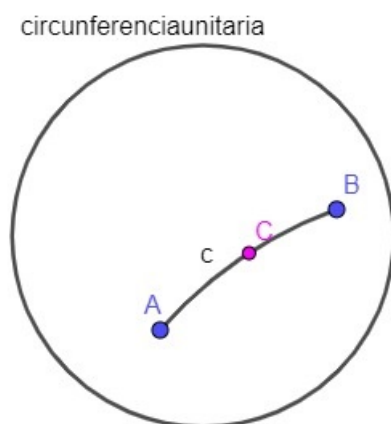


Fig. 3.5: Segmento hiperbólico entre dos puntos.

1. Con la ayuda de la herramienta anterior se construye C , el punto medio hiperbólico entre A y B .
2. El arco c que pasa por los puntos A , C y B , es el segmento hiperbólico buscado.

3.2.5 Recta perpendicular

Recta hiperbólica perpendicular a una recta hiperbólica dada desde un punto exterior a la misma. **Datos:** Dos puntos de la recta A y B , un punto exterior C y *circunferenciaunitaria*.

1. Se construye la recta hiperbólica que pasa por A y B , y se fija un punto exterior C a esta.
2. Se construye el punto C' , reflejado de C en la recta hiperbólica que define A y B .
3. La recta hiperbólica d que pasa por C y C' es la recta perpendicular buscada.

3.2.6 Circunferencia hiperbólica

Circunferencia dados su centro y un punto por donde pasa. **Datos:** El centro de la circunferencia A y un punto por donde pasa la circunferencia B , y la *circunferenciaunitaria*.

1. Dados los puntos A y B del interior de *circunferenciaunitaria*, podemos asumir que $A \neq (0,0)$, se construye el punto A' mediante la reflexión de A en *circunferenciaunitaria*. Si $A = (0,0)$ la circunferencia hiperbólica sería directamente la circunferencia euclídea con centro en A y que pasa por B .

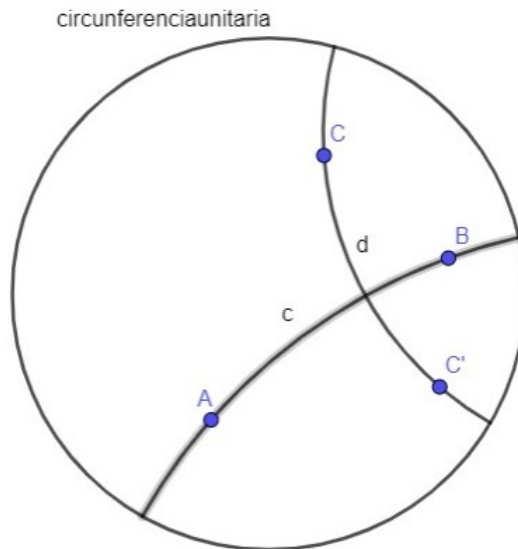


Fig. 3.6: Recta perpendicular a otra recta dada y que pase por un punto exterior a esta.

2. Desde A' se trazan las rectas tangentes a *circunferencia unitaria*, f y g .
3. El punto C es el punto de intersección de f con *circunferencia unitaria*.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A' y que pasa por el punto C .
5. Los puntos A'' y B'' son los reflejados de A y B en la circunferencia c .
6. Se construye la circunferencia d con centro en A'' y que pasa por B'' .
7. Se construye la circunferencia e con centro en A' y que pasa por A'' .
8. D y E son los puntos de intersección de las circunferencias d y e .
9. Se construye D' y E' , reflejando D y E en la circunferencia c .
10. La circunferencia h que pasa por los puntos B , D' y E' , es la circunferencia buscada.

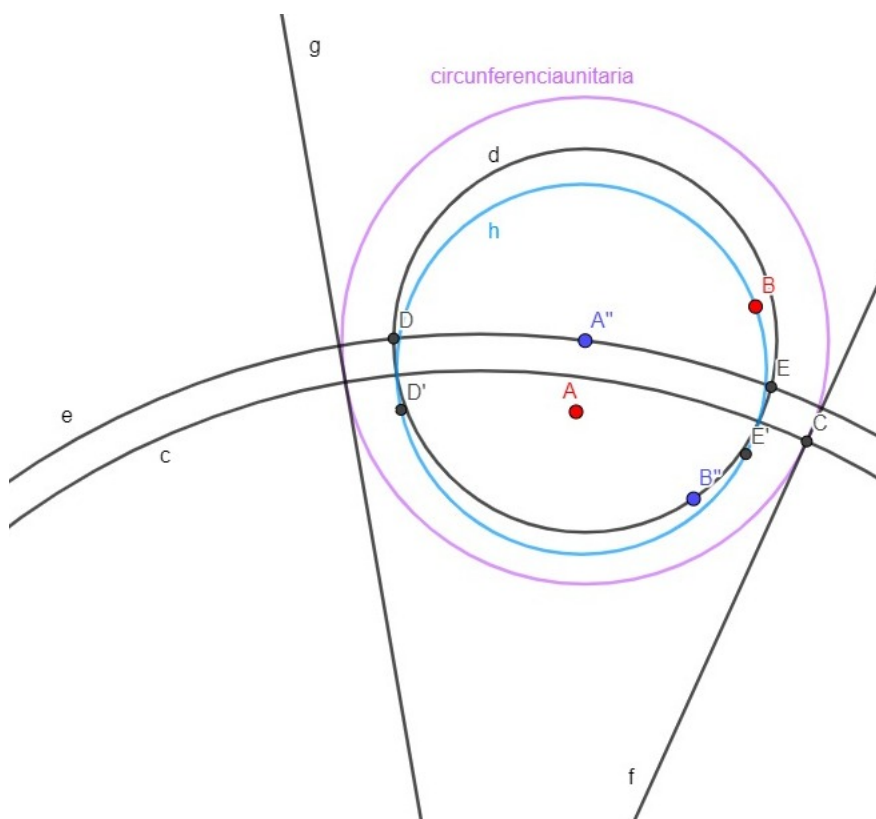


Fig. 3.7: Circunferencia Hiperbólica dados su centro y un punto por donde pasa.

3.2.7 Distancia hiperbólica entre dos puntos.

Datos: Los puntos A y B , y la *circunferencia unitaria*.

1. Dados los puntos A y B del interior de *circunferencia unitaria*, podemos asumir que $A \neq (0,0)$, se construye el punto A' mediante la reflexión de A en *circunferencia unitaria*.
2. Desde A' se trazan las rectas tangentes a *circunferencia unitaria*, f y g .
3. El punto C es el punto de intersección de f con *circunferencia unitaria*.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A' y que pasa por el punto C .
5. Los puntos A'' y B'' son los reflejados de A y B en la circunferencia c .
6. Construimos el segmento d con origen en A'' y longitud 1.
7. Construimos la circunferencia e con centro en A'' y que pasa por B'' .
8. Se construye el punto E que es la intersección del segmento d con la circunferencia e .
9. La distancia entre los puntos A'' y E es $distancia A''E$, por tanto tenemos que la distancia hiperbólica entre A y B , que es la misma que la distancia hiperbólica entre A'' y B'' y por tanto la misma que la distancia hiperbólica entre A'' y E , viene dada por la formula: $atanh(distancia A''E)$.

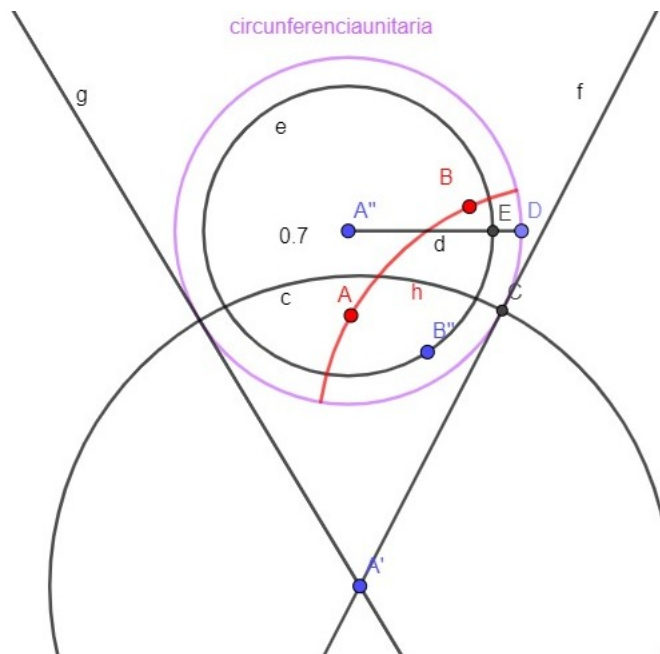


Fig. 3.8: Distancia hiperbólica entre dos puntos dados.

3.2.8 Circunferencia hiperbólica dados su centro y su radio.

Datos: El centro de la circunferencia A la distancia hiperbólica n y la *circunferencia unitaria*.

1. Dados el punto A del interior de *circunferencia unitaria*, podemos asumir que $A \neq (0, 0)$, se construye el punto A' mediante la reflexión de A en *circunferencia unitaria*.
2. Desde A' se trazan las rectas tangentes a *circunferencia unitaria*, f y g .
3. El punto C es el punto de intersección de f con *circunferencia unitaria*.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A' y que pasa por el punto C .
5. El punto A'' es el punto reflejado de A con la circunferencia c .
6. Se construye la circunferencia d con centro en A'' y radio $\tanh(n)$.
7. Se traza la recta h que pasa por los puntos A' y A'' .
8. Los puntos B y D son los puntos de intersección de la recta h con la circunferencia d .
9. Los puntos B' y D' son los reflejados de B y D en la circunferencia c .
10. El punto E es el punto medio (euclídeo), entre los puntos B' y D' .
11. La circunferencia (euclídea) e , con centro en E y que pasa por B' es la circunferencia hiperbólica buscada.

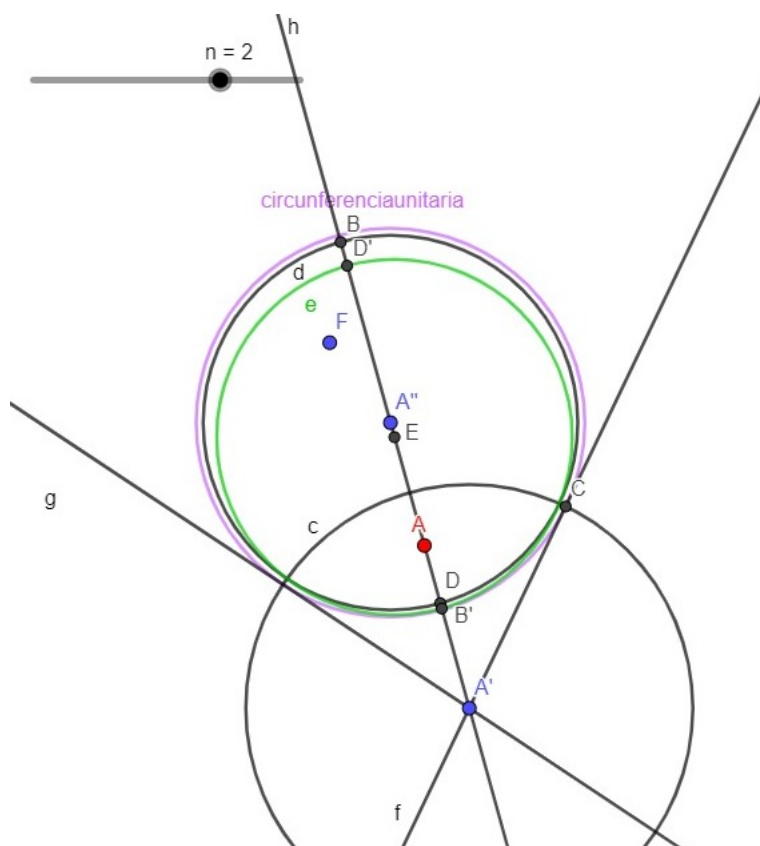


Fig. 3.9: Circunferencia hiperbólica dados su centro y radio.

3.2.9 Ángulo

Calcula la medida de un ángulo determinado por tres puntos en el plano hiperbólico.

Datos: Tres puntos A, B, C (el segundo de ellos será el vértice del ángulo) y la *circunferencia unitaria*.

1. Dados los puntos A, B, C , se construyen las rectas hiperbólicas $c = AB$ y $d = BC$.
2. Con la herramienta 'recta polar o conjugado' se trazan las rectas f y g tangentes en B a c y d respectivamente.
3. Se hallan A' y C' , reflejados de A y C en las rectas f y g respectivamente.
4. Se construyen los puntos D y E , puntos medios de A y A' y de C y C' respectivamente.
5. El ángulo α determinado por D, B, E , es el ángulo buscado.

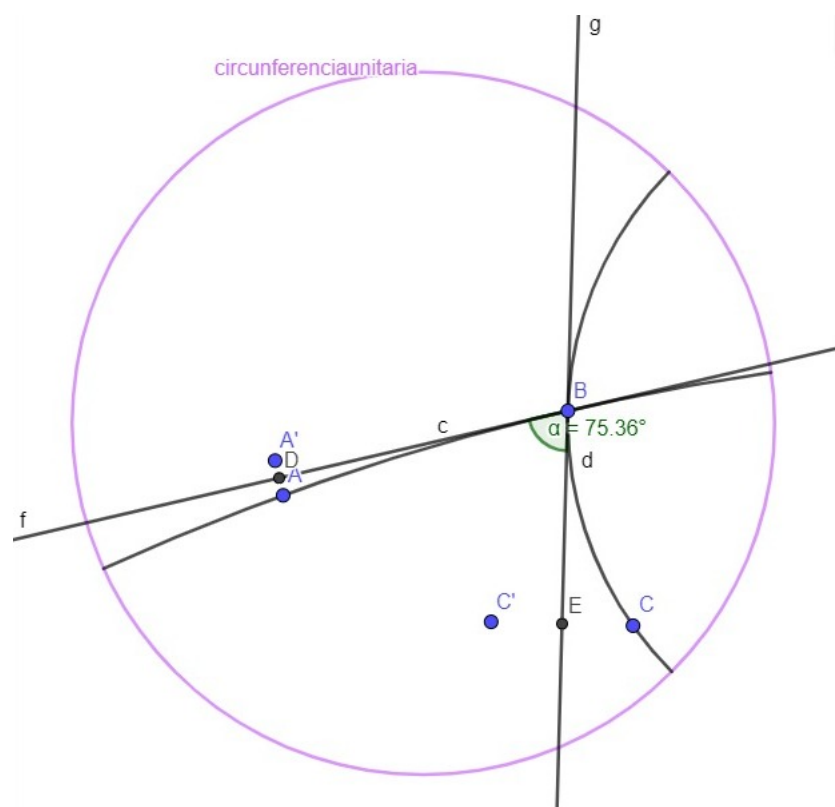


Fig. 3.10: Ángulo hiperbólico generado por tres puntos.

Actividades diseñadas siguiendo el modelo de Van Hiele

” *Estoy cada vez más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada por el intelecto humano.*

— Carl Friedrich Gauss

El modelo de Van Hiele se aplicará en las siguientes actividades diseñadas, siguiendo cada de uno de sus parámetros para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría hiperbólica.

4.1 Actividades diseñadas siguiendo el modelo de Van Hiele

Las actividades se diseñaron para aplicarse durante cuatro días, en los cuales los estudiantes recibían algunas orientaciones y se les asignaba el material y actividades para trabajar cada día.

Las actividades fueron diseñadas en tres grupos, actividades día 1 y 2, actividades día 3 y actividades día 4. En el primer bloque se desea reconocer los saberes previos que tienen los estudiantes sobre los elementos base y postulados de la geometría euclidiana. Este primer grupo de actividades realizadas en los días 1 y 2, se dividen en cuatro tipos: iniciación, reconocimiento, demostrativa y de pensamiento. Las actividades de tipo iniciación, están encaminadas a tener un diagnóstico sobre los saberes previos del estudiante respecto de algunos elementos de la geometría euclidiana como punto, segmento, recta, ángulo y triángulo, ayudándonos a clasificar a cada estudiante según Van Hiele en los primeros dos niveles de esta teoría. Las actividades de tipo reconocimiento están diseñadas para tener información de si el estudiante reconoce y visualiza estos elementos descritos anteriormente en la geometría euclidiana, no solo de manera individual sino también dentro de otros ambientes y espacios que cumplen la descripción de cada uno de ellos. El desarrollo

de estas actividades, ayudan a clasificar al estudiante dentro de los niveles 1,2 o 3 según Van Hiele. Las actividades de tipo demostrativa, están diseñadas para guiar al estudiante y analizar cómo él realiza una demostración de una afirmación o utiliza los saberes previos para tener una conclusión sobre lo propuesto; estas actividades ayudan a clasificar al estudiante en los niveles 2,3 o 4 según la teoría de Van Hiele. Las actividades de tipo pensamiento están diseñadas para identificar si el estudiante esta en capacidad de reconocer una misma definición a través de diferentes enunciados o contextos, además de lograr manipular un lenguaje lógico y formal para llegar a una conclusión; este tipo de actividad ayuda a clasificar al estudiante en nivel 3 o 4 según Van Hiele.

Los dos siguientes grupos de actividades, proponen la exploración de una nueva geometría, donde los conceptos como recta, ángulo, triángulo, son extrapolados a la luz de los primeros cuatro postulados de la geometría euclidiana.

La exploración de los conceptos de punto y recta en un nuevo universo geométrico, basado en el modelo de la bola de Poincaré para la geometría hiperbólica, es el punto de partida por el cual se diseñan estas actividades, que finaliza con la manipulación de las herramientas construidas en GeoGebra para la construcción de objetos geométricos hiperbólicos.

Actividades día 1

En las siguientes actividades abordaremos algunos conceptos y resultados de la geometría euclidiana, y realizaremos algunas actividades tanto de forma individual como grupal. En cada ítem se indicará cual es el paso a seguir y el tiempo brindado para su realización.

I. Actividad de iniciación

1. Esta actividad se realizará de forma individual y se cuenta con un tiempo máximo de 30 minutos.

Diligencie el siguiente cuadro de acuerdo a la experiencia que tenga en cada uno de los conceptos.

OBJETO MATEMÁTICO	Realice una breve descripción	¿En que objetos de la cotidianidad se visualiza?	Realice un bosquejo grafico
Punto			
Segmento			
Recta			
Ángulo			
Triángulo			
Lineas o rectas paralelas			
Lineas o rectas perpendiculares			
Recta tangente a una circunferencia			

Fig. 4.1: Tabla de actividad de iniciación

2. Esta actividad se desarrollará individualmente y se cuenta con un tiempo máximo de 10 minutos.

Unir los puntos con segmentos de recta de tal forma que se dibuje un triángulo.

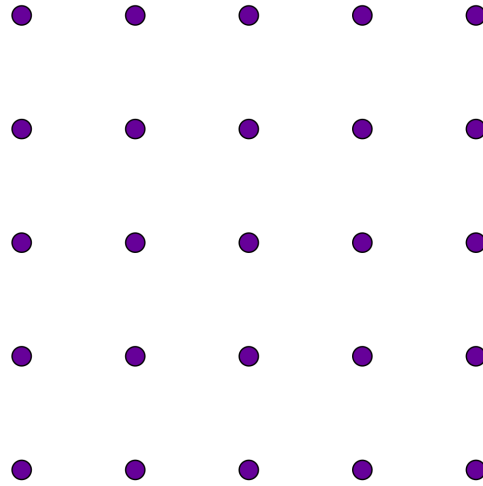


Fig. 4.2: Triángulo a partir de puntos

- ¿Cuántos segmentos como mínimo pueden formar un triángulo?
- ¿cuántos puntos como mínimo se utilizan para formar el triángulo?
- ¿Siempre debe de quedar un ángulo recto?

3. Esta actividad se desarrollará de forma individual y se cuenta con un tiempo de 10 minutos.

En la siguiente actividad debes de unir los 9 puntos con 4 segmentos de recta sin levantar el lápiz del papel.

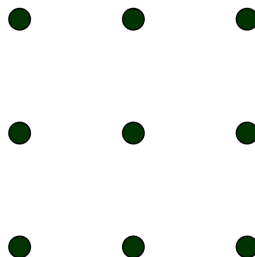


Fig. 4.3: 9 puntos

- ¿Es posible hacerlo?
- Si lo pudo hacer, ¿qué metodología utilizó para realizarlo?

4. Esta actividad se desarrollará en parejas y se cuenta con un tiempo de 15 minutos. Intercambiar con su pareja la hoja del cuadro de la primera actividad y valide las apreciaciones del compañero.

- ¿Se entiende?
- ¿Está de acuerdo?
- ¿Tiene alguna observación para su compañero?

II. Actividad de reconocimiento

1. Esta actividad se desarrollará de forma individual y se cuenta con un tiempo máximo de 10 minutos.

Identificar cuales figuras son triángulo y cuales no, y de acuerdo a eso responder.

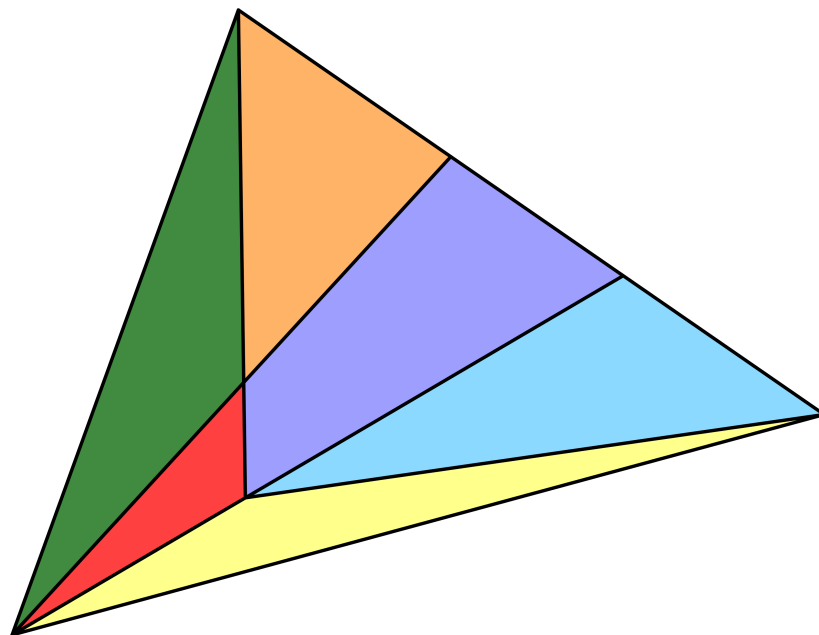


Fig. 4.4: Reconocimiento de triángulos

- ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

- ¿Qué metodología utilizó para determinar el número total de triángulos en la figura?

2. Esta actividad se desarrollará de manera individual y cuenta con un tiempo de 5 minutos.

Tenemos dos segmentos de recta, los cuales son llamados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y cuyas medidas son 5cm y 2cm respectivamente.

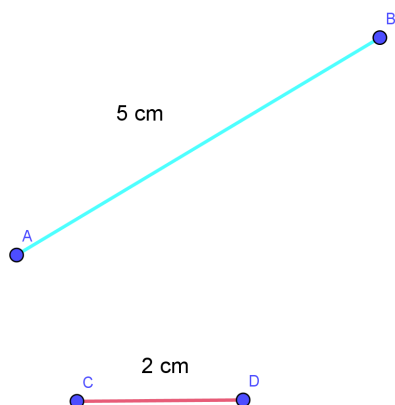


Fig. 4.5: Puntos en segmentos

- Indica cuantos puntos hay en los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
- Con respecto a la respuesta anterior, ¿en que segmento hay más puntos?
- ¿Qué puedes concluir de esto?

3. Esta actividad se desarrollará de forma individual y se cuenta con un tiempo de 10 minutos.

Colorear con un mismo color las rectas o segmentos que son paralelos entre sí, con otro color las que son perpendiculares entre sí, y similarmente las que son tangentes a una circunferencia.

- ¿Puede alguna recta tener dos o mas características de las mencionadas (paralela a otra, perpendicular, tangente...)?
- ¿Un segmento de una figura puede cumplir alguna de estas condiciones respecto a otra recta o segmento?

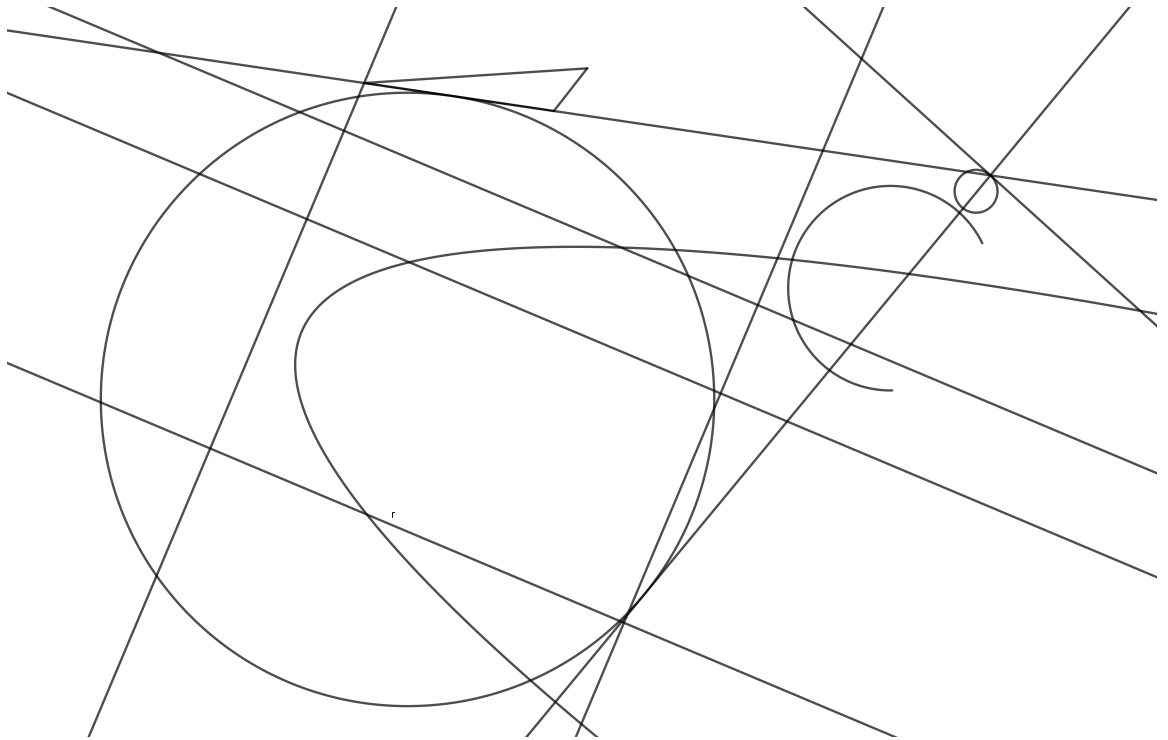


Fig. 4.6: Reconocimiento de rectas

Actividades día 2

III. Actividad demostrativa

1. Esta actividad se desarrollará individualmente y se cuenta con un tiempo de 25 minutos.

Recibirá un triángulo y el cual debe de recortar en 3 partes, de tal forma que en cada parte recortada, tenga uno de los ángulos del triángulo. A continuación se muestra un ejemplo de como hacerlo (no necesariamente deben de hacerlo similar a la figura).

Luego estos tres pedazos que se obtienen, unirlos de forma que uno de ellos se deja fijo en su lugar, y los otros dos se ubican a ambos lados de este fijo de tal manera que uno de los segmentos que los forman queden adyacentes entre sí y los ángulos compartan el mismo vértice.

De acuerdo a lo obtenido, responda lo siguiente:

- ¿Qué observa al momento de unir los tres ángulos?



Fig. 4.7: Recorte de triángulos

- ¿Qué conclusiones puede sacar del segmento que era opuesto al ángulo fijo cuando se encontraba sin recortar, con respecto al segmento que forman estos tres ángulos unidos?
- Describa un resultado o (teorema) que generaliza lo obtenido en la construcción anterior.
- ¿Qué resultado, o resultados validan la construcción anterior?

2. Para esta actividad cuenta con un tiempo de 5 minutos.

De acuerdo a la gráfica, dibuje las posibles rectas que pasan por el punto *A* y son paralelas a la recta dada.

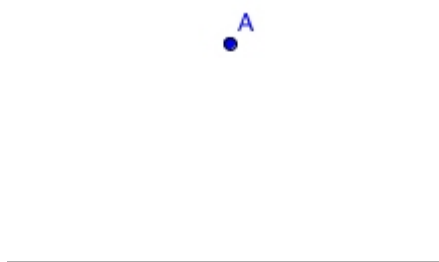


Fig. 4.8: Dibujo de rectas

- ¿Cuántas rectas fueron posibles trazar?
- ¿Qué conclusión saca de esto?
- ¿Qué relación hay con el llamado *quinto postulado de Euclides* ?

IV. Actividad de pensamiento

1. Esta actividad se desarrollará de manera individual y se cuenta con un tiempo de 10 minutos.

Analiza las siguientes proposiciones:

-Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.

-Si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas hace que los ángulos interiores del mismo lado tomados juntos sean menores que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, si se producen indefinidamente, se encuentran en el lado en el que la suma de los ángulos es menor que dos ángulos rectos.

- ¿Qué relación tiene una con la otra?
- ¿Qué puedes concluir comparando ambas?

2. Esta actividad se desarrollará de manera individual y se cuenta con un tiempo máximo de 20 minutos.

Dados los siguientes segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, los cuales se bisecan entre sí en el punto M . Si Además $\overline{AC} \cong \overline{DB}$, demuestre que $\triangle AMC \cong \triangle BMD$.

Actividades día 3

En las siguientes actividades trabajaremos sobre un modelo que permite visualizar como funcionan algunas cosas y los conceptos de punto, segmento, recta, ángulo y triángulo en el espacio hiperbólico, el cual es el modelo de la bola de Poincaré.

A continuación se dan los 5 postulados de euclides, los cuales serán de gran utilidad para la actividad.

- I. Por dos puntos distintos pasa una recta
- II. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
- III. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre si.
- V. Por un punto exterior a una recta, pasa una única paralela.

Actividad de práctica

Esta actividad se realizará de forma grupal con todos los integrantes del grupo y se cuenta con un tiempo máximo de 90 minutos repartidos en varios puntos.

Tendrá a disposición un disco como el de color azul que se muestra en la figura, el cual será el disco central y este representará el disco de Poincaré, además contarán con otros discos de diferente tamaño y color, los cuales representan las 'reglas' en este modelo y a continuación se describe el proceso a realizar.

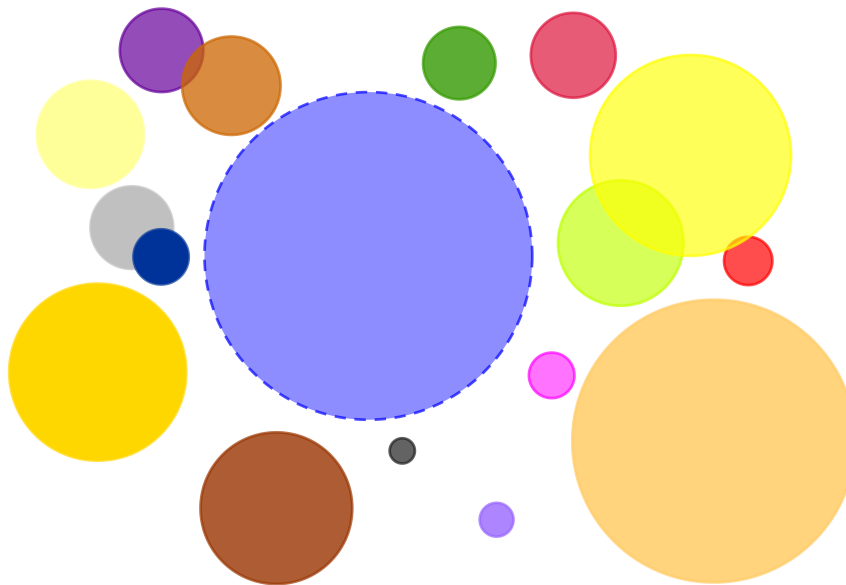


Fig. 4.9: Bolas de Poincaré con reglas del modelo.

1. En el disco central tendrá dos puntos dibujados y cada persona estará con una de las reglas de este modelo; luego verificará si ese círculo-regla le sirve para unir los dos puntos.

- ¿Cuántas reglas cumplieron con esta instrucción?
- ¿Será que es posible trazar otra circunferencia que une estos dos puntos?

2. Verificar con los círculos que se tienen como regla, si la familia de círculos que están totalmente inscritos dentro del disco de Poincaré cumplen con los postulados (I, II y IV) de Euclides.

- ¿Se cumplen todos los postulados?
- Si no se cumplen algunos o todos los postulados, ¿Porqué no se cumplen?

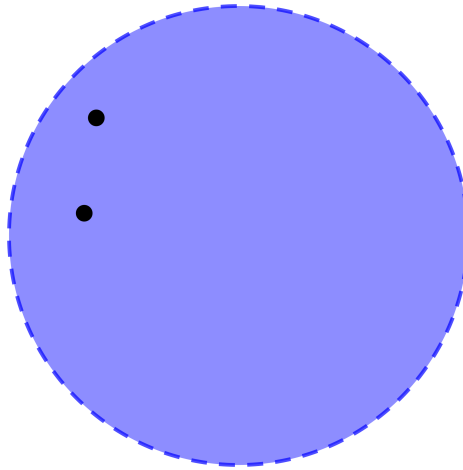


Fig. 4.10: Unir puntos con reglas del modelo del disco

3. Verificar si la familia de semicírculos donde sus extremos se encuentran totalmente inscritos en el disco de Poincaré cumplen con los postulados (I, II y IV) de euclides.

- ¿Se cumplen todos los postulados?
- Si no se cumplen algunos o todos los postulados, ¿Porqué no se cumplen?
- ¿Será que los semicírculos que tienen sus extremos sobre la circunferencia (o borde), del disco de Poincaré, cumple con ello?

4. Verificar si la familia de círculos que están totalmente inscritos y son tangentes al borde del disco de Poincaré cumplen con los postulados (I, II y IV) de euclides.

- ¿Se cumplen todos los postulados?
- Si no se cumplen algunos o todos los postulados, ¿Porqué no se cumplen?

5. Si alguna de las familias antes mencionadas no cumple por lo menos con los postulados (I, II y IV) de euclides, proponga una familia de círculos que si cumplan o cree que cumplan con ello.

Actividades día 4

Esta actividad será desarrollada a través de un sistema de espacio hiperbólico donde se modela el disco de Poincaré, que se ha desarrollado en el programa de geometría dinámica GeoGebra.

A continuación se dan los 5 postulados de euclides, los cuales serán de gran utilidad para la actividad.

- I. Por dos puntos distintos pasa una recta
- II. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
- III. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre si.
- V. Por un punto exterior a una recta, pasa una única paralela.

Esta actividad se desarrollará de manera individual y se contará con un tiempo de 90 minutos.

Tendrá a su disposición un computador con el modelo del disco de Poincaré y deberá realizar las siguientes actividades:

1. Verifique si este modelo cumple con los primeros cuatro postulados de euclides
 - Si no cumple alguno de los postulados, ¿porqué no lo cumple?
 - ¿Cuántas rectas paralelas pasan por un punto exterior a una recta fija?
 - ¿Qué puede concluir sobre el quinto postulado de euclides en este modelo?
2. Si el modelo fue consistente respecto a los primeros cuatro postulados de euclides,
 - ¿Qué observa en la forma como se intersectan las rectas con el borde del disco de Poincaré?
 - ¿Como caracteriza estas rectas que cumplen con ello?
3. Realice un triángulo y sume sus ángulos

- ¿Qué resultado obtuvo?
- Si realiza esto en cualquier triángulo, ¿qué se puede concluir de la suma de sus ángulos?
- Tiene alguna relación la pregunta anterior con algún resultado conocido de la geometría euclidiana?

4. Verifique si el teorema de pitagóricas se cumple en este modelo:

- ¿Se cumple?
- Si no se cumple, ¿porqué cree que no se da?

5. Realice puntos, segmentos, rectas, ángulos y triángulos y responda lo siguiente:

- Que visualiza con estos objetos matemáticos cuando se encuentran cerca al centro del disco de poincaré y cerca al borde de este?
- ¿Cambia la estructura del objeto dependiendo de la ubicación en el modelo?

6. Realice círculos y responda

- ¿Que conclusiones visuales puede sacar de ello?

Aplicación del modelo de Van Hiele

Este capítulo se divide en dos partes, la primera indica los ítems y parámetros utilizados para determinar el nivel del modelo de Van Hiele en que se logra ubicar a cada estudiante, en concordancia con las actividades planteadas. La segunda, expone los materiales necesarios para cada actividad, lo que se espera logren realizar los estudiantes en cada actividad, y las dificultades que podrían presentarse al indagar en este nuevo campo para ellos, como lo es geometría hiperbólica.

5.1 Clasificación en las actividades de acuerdo al modelo de Van Hiele

Las actividades se han diseñado en base a cada nivel y las fases que se deben de dar para pasar de un nivel al siguiente. Todos estos niveles se contextualizarán en cinco conceptos “básicos” de la geometría, los cuales son: punto, segmento, recta, ángulo y triángulo. Las actividades son planeadas con el fin de seguir el modelo de Van Hiele y así identificar el nivel en que se encuentran los estudiantes con respecto a estos conceptos. Cabe resaltar que no todas las actividades tienen las cinco fases delimitadas una a una, sino que estas pueden ser implícitas unas en otras, dependiendo de la actividad.

A continuación se colocará el número de la actividad, la fase o fases que se trabajan en esta, y la descripción de los aspectos que clasifican a cada estudiante en los diferentes niveles. Para una mayor facilidad se tiene el siguiente cuadro donde se codifica cada actividad.

DÍA	TIPO DE ACTIVIDAD	NÚMERO	CÓDIGO PARA REFERIR
1	ACTIVIDAD DE INICIACIÓN	1	D1-In1
		2	D1-In2
		3	D1-In3
		4	D1-In4
	ACTIVIDAD DE RECONOCIMIENTO	1	D1-Re1
		2	D1-Re2
		3	D1-Re3
2	ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA	1	D2-De1
		2	D2-De2
	ACTIVIDAD DE PENSAMIENTO	1	D2-Pe1
		2	D2-Pe2
3	PRACTICA HIPERBÓLICA	1	D3-PH1
		2	D3-PH2
		3	D3-PH3
		4	D3-PH4
		5	D3-PH5
4	VISUALIZACIÓN HIPERBÓLICA	1	D4-VH1
		2	D4-VH2
		3	D4-VH3
		4	D4-VH4
		5	D4-VH5
		6	D4-VH6

Fig. 5.1: Tabla de codificación de las actividades.

Actividades Nivel 0.

Aquí se describen las actividades que se clasifican o tienen parte del nivel 0 de *Visualización o reconocimiento* para la geometría euclidiana, llevando a cabo algunas de las fases para ayudar en cada nivel. Se describen cuales son los requisitos en cada una de las actividades para que una persona se encuentre en este nivel.

Para aplicar el modelo de Van Hiele se tienen en cuenta las cinco fases descritas anteriormente para ayudar en el proceso de transición de un nivel a otro, las cuales son: *información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración*, las cuales se describen como son aplicadas implícitamente en cada una de las actividades propuestas.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en la actividad D1-In1 para reconocer los saberes previos del estudiante, en el cual se les propone un cuadro donde se encuentran algunos 'objetos matemáticos' que ellos conocen y definiciones "básicas" en la geometría euclidiana, esto con el fin de tener un esquema sobre la información que tienen de cada uno de estos objetos, además para que visualicen cada uno de estos en la vida cotidiana; en la actividad D1-Re3 se tiene en cuenta la idea y concepto que tiene el estudiante sobre rectas paralelas, rectas perpendiculares y figuras tangentes para desarrollar la actividad; en D2-De2 el estudiante entiende el concepto de ser paralelo a una recta y que pase por un punto dado; en D2-Pe1 el estudiante conoce e interpreta el lenguaje natural que se brinda en la primera proposición y lo puede visualizar ; y en D2-Pe2 conoce el término de bisecar.

NIVEL 0	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D1-In1	El estudiante es capaz de diligenciar este cuadro de conceptos en base a su experiencia, diferencia entre un punto, segmento, recta, ángulo y triángulo y tiene una idea gráfica de cada uno de estos conceptos
D1-In2	El estudiante es capaz de seguir los pasos para formar un triángulo, teniendo en cuenta su experiencia de lo visto en la cotidianidad en forma de un triángulo.
D1-In3	El estudiante reconoce que son puntos y segmentos y puede asociarlos para seguir la actividad.
D1-In4	El estudiante puede construir un diálogo referente a sus ideas sobre punto, segmento, recta, ángulo y triángulo y dar a entender su concepción sobre estos.
D1-Re1	El estudiante reconoce gráficamente que es un triángulo y que no lo es.
D1-Re2	El estudiante reconoce que los dos gráficos que se dan, son segmentos sin importar su ubicación ni dirección.
D1-Re3	El estudiante identifica que es una recta perpendicular/ paralela a otra, también que son dos figuras tangentes. Además, analiza que el gráfico esta compuesto no solamente por rectas y segmentos, sino también por triángulos, circunferencias, entre otras figuras.
D2-De1	El estudiante recorta el triángulo y logra unir estos pedazos como se pide en el ejercicio.
D2-De2	El estudiante identifica con respecto al dibujo que el punto que se da, no esta en el segmento o recta; además, conoce la idea de paralelo a esta recta y que pase por el punto dado, mostrandolo por medio de un dibujo de una recta que cumpla con estas condiciones.
D2-Pe1	El estudiante interpreta lo que se le esta dando, por lo menos en la primera proposición y lo puede imaginar gráficamente. Además, explica esta proposición con el ejercicio inmediatamente anterior que es una muestra de ello
D2-Pe2	El estudiante entiende que es bisecar un punto de bisección, y logra interpretar ello graficamente.

Fig. 5.2: Criterios de clasificación Nivel 0 día 1 y 2.

Fase II (Orientación dirigida): Esta fase es aplicada en la actividad D1-In2 al tener las indicaciones para que el estudiante realice un triángulo, teniendo en cuenta su experiencia con esta figura; en la actividad D2-De1 al tener las instrucciones para que el estudiante pueda recortar el triángulo y lo organice en la manera como lo solicita la actividad propuesta.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en la actividad D1-In4 al tener que generar un diálogo y explicación sobre los diferentes conceptos que tiene de los objetos matemáticos en discusión, aplicando su experiencia y sus diferentes puntos de vista; y en la actividad D2-Pe1 al poder explicar la proposición con algún ejercicio de su experiencia e incluso con el inmediatamente anterior que es una visualización de ello.

Fase IV (Orientación libre): Es aplicada en la actividad D1-In3 para poder llegar al objetivo de unir los puntos, utilizando las diferentes concepciones que tiene de como unir dos o mas puntos y generando cualquier circuito conectado sin restricción alguna, todo esto teniendo siempre la idea de segmento recto; en D1-Re2 Identificando que los dos objetos que se dan son segmentos, teniendo en cuenta que no se deben de limitar por su dirección, sentido u otros para poder desarrollar lo que se pide; en

D1-Re3 el estudiante lo interpreta de la manera que mejor le parezca para poder relacionar las líneas, figuras u objetos que cumplen con alguna de las condiciones dadas; en D2-De2 el estudiante gracias a su experiencia en la parte gráfica de dos líneas paralelas, escoge una metodología para dibujar una o mas líneas paralelas a la recta dada y que pase por el punto dado, esto lo hace gracias a su experiencia

Fase V (Integración): Esta aplicada en la actividad D1-Re1 al proponer una figura que contiene diferentes tipos de figuras y formas, para que el estudiante en base a su experiencia y definición gráfica de un triángulo, sea capaz de reconocer la cantidad de triángulos diferentes que se forman dentro de la figura.

Actividades Nivel 1

En estas actividades se trabajarán los mismos conceptos que en la anterior pero analizando los requisitos del nivel 1 Análisis, siguiendo algunas fases de la teoría de Van Hiele.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en la actividad D1-In1 teniendo en cuenta que estos conceptos no son solo teóricos, sino que los puede visualizar en la cotidianidad y gracias a su experiencia los puede representar; en D1-In3 donde el estudiante tiene claro que un segmento puede tener diferentes longitudes, dirección o sentido; en D1-In4 entendiendo la definición de un objeto matemático por algunas características que resaltan en cada uno; en D1-Re1 teniendo en cuenta que un triángulo cumple las condiciones sin importar su tamaño, color o posición; en D1-Re2 complementando el concepto de cada uno de los 'objetos matemáticos' con su experiencia, lo compartido por el compañero y lo relatado en el punto D1-In1; en D2-De1 teniendo claro la definición de un ángulo llano y opuesto a un lado u otro ángulo dado; en D2-Re2 conoce la idea de paralelismo y lo aplica para trazar rectas paralelas a una dada y pasando por un punto exterior a esta ultima; en D2-Pe1 entiende el concepto de unicidad; en D2-Pe2 conoce el concepto de congruencia.

Fase II (Orientación dirigida): Esta fase es aplicada en D1-Re3 relacionando las rectas paralelas y perpendiculares entre si y las tangentes a una circunferencia.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D1-In1 construyendo un dialogo sobre los diferentes conceptos de los "objetos matemáticos" en consideración, para dar su punto de vista a su compañero.

NIVEL 1	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D1-In1	Representa en diferentes formas y tamaños cada uno de estos objetos y conceptos matemáticos. Identifica cada uno de los conceptos en cosas de nuestra cotidianidad, sin importar su tamaño, color, entre otros. Todo esto lo puede hacer, ya que no ve las cosas como un todo sino que las relaciona por los elementos que componen la figura.
D1-In2	El estudiante es capaz de seguir las indicaciones y formar un triángulo, sin importar que sea rectángulo, equilátero, etc; porque sabe que no se colocan restricciones para ello. Identifica las propiedades de un triángulo como que tiene tres puntos que son sus vértices y tres segmentos que son sus lados, además analiza que no necesariamente un triángulo debe de tener un ángulo recto.
D1-In3	El estudiante tiene claro que un segmento puede tener cualquier longitud, sentido o dirección. El estudiante es capaz de unir los puntos utilizando el hecho de que se puede salir del recuadro, no se queda enfocado o limitado a este sino que va mas allá. Es comprensible a la hora de leer lo que se pide y sabe que no se tiene ninguna limitación.
D1-In4	Entiende la definición de los objetos por algunas características importantes que lo definen. Construye un dialogo referente a sus ideas sobre punto, segmento, recta, ángulo y triángulo y dar a entender su concepción de estos a su compañero. Comprende que no solo hay una manera de definir cada uno de estos conceptos sino que para cada persona puede haber una manera distinta de interpretarlos. Asocia estos objetos matemáticos para formar nuevas cosas sencillas, no las toma por si solas.
D1-Re1	Reconoce cualquier triángulo, independiente de su tamaño, color, entre otros. Elabora una metodología para ir contando cada uno de los triángulos, de tal forma que no repita alguno. Por ejemplo empezar a contar los triángulos que comparten un mismo vértice como el superior e ir bajando por cada uno de estos vértices. Identifica que la unión de algunos triángulos forman otro triángulo. Concluye que hay 13 triángulos.
D1-Re2	Entiende lo que es un segmento, por lo que le dice el profesor, lo comprendido desde las concepciones del compañero y lo redactado en el primer ejercicio. Identifica que hay infinitos puntos en ambos segmentos analizando esto de diferentes maneras
D1-Re3	Asocia las paralelas y perpendiculares entre sí, y las tangentes a una circunferencia. Utiliza una metodología para ir coloreando cada una de las que cumplen la misma característica, como ir de arriba hacia abajo o viceversa y así no dejar a un lado alguna característica que cada una de estas tenga con respecto a otras. Identifica que si una recta es perpendicular a otra, entonces también lo es para otra que sea paralela a la anterior.
D2-De1	Reconoce que es un ángulo llano y que es un lado opuesto a un ángulo u otro lado. Forma con los tres pedazos recortados un ángulo, y reconoce que es un ángulo llano. Determina que el segmento formado por estos tres pedazos al unirse, es paralelo al segmento opuesto al ángulo que se dejó fijo.
D2-De2	Reconoce que es una recta paralela a otra y que pase por un punto fijo que es exterior a una de ellas. Traza rectas, semi rectas y segmentos paralelos al segmento dado y que pasen por el punto fijo, sin embargo llega a la conclusión que son lo mismo, por lo que se visualiza solo una recta. Define todas las rectas trazadas paralelas como una misma recta. Concluye que solo pasa una recta por ese punto y es paralela a la inicial.
D2-Pe1	Entiende el concepto de unicidad. Comprende que esta primera proposición describe lo hecho en el punto anterior de la actividad, además identifica que no solo se puede expresar esto de una sola manera sino de varias y por eso queda a la expectativa que la segunda proposición sea una descripción de lo mismo.
D2-Pe2	Comprende el significado de congruencia de segmentos y triángulos, y puede mostrarlo mediante el dibujo de lo dado en la hipótesis. Transforma lo teórico a lo visual y reconoce por medio del dibujo a donde se debe de llegar.

Fig. 5.3: Criterios de clasificación Nivel 1 día 1 y 2.

Fase IV (Orientación libre): Esta fase es aplicada en D1-In1 identificando cada uno de estos objetos en lo relacionado con la cotidianidad; en D1-In2 siguiendo las instrucciones de la actividad propuesta para la construcción de un triángulo de acuerdo a sus características; en D1-In3 siguiendo las indicaciones de unir los puntos pero sin limitaciones dadas, sino con su experiencia o imaginación para llegar a lo que le solicita la actividad; en D1-In4 comprendiendo que no solo hay una manera de definir cada uno de los conceptos sino que se pueden brindar varios puntos de vista; en D1-Re1 reconociendo gráficamente cuantos triángulos hay en la figura dada y generando una metodología o proceso para llegar al resultado final sin que ocurran errores como contar dos o mas veces una misma figura; en D1-Re2 identificando que hay infinitos puntos en cada segmento, llegando a esto gracias a diferentes maneras como resultados de su experiencia, postulados, resultados, entre otros; en D1-Re3 coloreando de diferente manera las figuras que cumplen con cierta

condición respecto a otra y teniendo un mecanismo para saber si alguna tiene dos o mas condiciones, en D2-De1 siguiendo uniendo los pedazos recortados para llegar a lo que se pide en la actividad y sacar sus conclusiones; en D2-De2 trazando de diferentes maneras retas, semirectas o segmentos paralelas al dado en la actividad, y que pasen por el punto fijo exterior a esta.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D1-In2 para que el estudiante con su experiencia y definición que tiene de triángulo, pueda realizar uno en la actividad propuesta, integrando cada uno de los conceptos y no limitándose a tener que dibujar un triángulo rectángulo o una dirección para el triángulo, sino saliéndose de las limitaciones que se pueden crear a la hora de realizar un triángulo; en D1-In4 no se queda solo con la idea de cada uno de estos objetos por si solos, sino que los puede visualizar y relacionar en objetos mas complejos que los contiene; en D1-Re1 analizando que uno o mas triángulos o figuras pueden formar otro triángulo; en D1-Re2 formando la idea o concepción de segmento para poder llegar a compararlos en la actividad; en D1-Re3 visualizando que una figura no solo cumple con una condición, sino que puede cumplir con dos o mas al mismo tiempo; en D2-De1 al tener el resultado de las indicaciones y obtener diferentes conclusiones sobre la recta formada por la unión de los tres pedazos recortados; en D2-De1 al relacionar todas las rectas o segmentos trazados, concluyendo que son las mismas, en D2-Pe1 interpretando la primera proposición como la visualización del ejercicio anterior y relacionándola con la segunda para analizar que interpretan lo mismo; en D2-Pe2 llevando a una gráfica lo brindado en el ejercicio, aplicando cada una de las hipótesis para llegar al resultado final de la actividad.

Actividades Nivel 2

Aquí se tendrán los requisitos de las actividades para decidir si el estudiante se encuentra en el nivel 2 de deducción informal, ordenación o clasificación, siguiendo algunas fases de la teoria de Van Hiele en las actividades.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en D1-In1 donde el estudiante no solo tiene un concepto superficial, sino mas formal de cada 'objeto matemático' y así puede tener una mayor identificación de cada uno; en D2-Pe1 donde el estudiante comprende la idea de cada proposición y las puede relacionar o comparar, en D2-Pe2 identificando y diferenciando, cual es la hipótesis y tesis del problema propuesto.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D2-De1 donde el estudiante explica lo obtenido en el proceso realizado de la actividad propuesta y de estas explica-

NIVEL 2	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D1-In1	No solo describe los objetos con palabras simples sino que tiene un concepto mas formal de cada uno de ellos y los puede relacionar entre si.
D1-In2	Realiza un triángulo de cualquier tamaño y desde cualquier punto, porque reconoce las características de un triángulo, teniendo en cuenta que no es necesario tener un triángulo rectángulo para lo que se le pide.
D1-In3	Realiza el ejercicio y reconoce que no solo tiene una forma de realizarlo sino de varias que al final son la misma si a una de ellas se le aplican rotaciones.
D1-In4	Entiende lo que dice su compañero ya sea con palabras cotidianas o mas formales y puede decidir si esta correcto o no lo descrito por este.
D1-Re1	Realiza una metodología un poco estructurada y organizada que le permite llegar al resultado correcto y tiene la claridad de que si empieza a fijar una característica de estos triángulos como por ejemplo un vértice, así se le hará mas fácil la tarea.
D1-Re2	Concluye que los dos segmentos tienen la misma cantidad de puntos, esto lo pueden asociar con las funciones biyectivas, teoría de conjuntos, entre otras ramas de la matemática.
D1-Re3	No le incomoda que los segmentos o rectas se encuentren de manera independiente porque puede identificar en estas el paralelismo, perpendicularidad y tangencia. Por ejemplo que un segmento de un triángulo puede ser paralelo o perpendicular a una recta fuera de este, o tangente a una circunferencia.
D2-De1	Concluye que la suma de los tres ángulos recortados que une es 180° . Recopila toda esta información y llega a la conclusión de que la recta que forman los tres ángulos pegados es paralela al segmento opuesto del ángulo que se dejó fijo y que era en principio un lado del triángulo. Relaciona este hecho con los teoremas de congruencia sobre ángulos entre paralelas.
D2-De2	Concluye que sólo hay una recta que pasa por el punto A y es paralela a la recta dada. Además lo relaciona con el quinto postulado de euclides al dar a conocer que este postulado describe lo que sucede en este ejercicio.
D2-Pe1	Relaciona las dos proposiciones. Concluye que las dos proposiciones son equivalentes, además podría dar otra proposición equivalente a estas.
D2-Pe2	Identificar cual es la hipótesis y tesis del problema. Explica con sus palabras cuales son los pasos a seguir, y con la hipótesis saca algunos resultados que le ayudan a avanzar en el proceso. Es capaz de llegar a la tesis de una manera informal, no utilizando la parte axiomática.

Fig. 5.4: Criterios de clasificación Nivel 2 día 1 y 2.

ciones saca conclusiones; en D2-Pe2 dando explicaciones de como cada una de las hipótesis, le permiten llegar a un resultado y obtener la tesis, de manera informal.

Fase IV (Orientación libre): Esta fase es aplicada en D1-In2 realizando un triángulo de cualquier tamaño y desde cualquier punto, porque reconoce que esto no cambia sus propiedades y así no se limita en el ejercicio propuesto.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D1-In2 haciendo participes muchas de las propiedades y características que tiene un triángulo, para poder realizarlo en el ejercicio; en D1-In3 realizando el ejercicio de manera correcta, teniendo en cuenta que al solicitar lo pedido, no se tienen restricciones sobre el espacio o el largo de los segmentos formados; en D1-In4 entendiendo lo que dice o le comparte su compañero con sus propias palabras y/o asocia con su pensamiento subjetivo para comparar cada una de las definiciones y también decidir con su experiencia, si es correcto o no; en D1-Re1 teniendo en cuenta las diferentes maneras en las que se pueden presentar un triángulo, independientemente de su tamaño o color, y así llegando al resultado correcto del número de triángulos en la figura propuesta; en D1-Re2 relacionando los dos segmentos con las características que comparten e integrando esto con resultados conocidos de manera informal como funciones biyectivas; en D1-Re3 teniendo en cuenta las diferentes presentaciones que tienen las rectas que cumplen con algunas de las condiciones, ya sea de paralelismo, perpendicularidad o

tangencia, y conectando cada uno de estos conceptos con el otro, no viéndolos de forma independiente; en D2-De1 relacionando el resultado obtenido con teoremas conocidos como la suma de los ángulos internos de un triángulo o congruencia de ángulos entre paralelas; en D2-De2 generando una conclusión informal de que solo puede pasar una paralela a la recta dada por el punto exterior y relacionándolo con el quinto postulado de euclides; en D2- Pe1 comprendiendo ambas proposiciones e interpretando que ambas van en el mismo sentido, incluso proponiendo una nueva versión equivalente de manera informal; en D2-Pe2 integrando todo lo visto a través de su experiencia para ir sacando conclusiones de cada una de las hipótesis o pasos que se van desarrollando en la demostración.

Actividades Nivel 3.

En esta sección tenemos los alcances que debe de tener un estudiante para encontrarse en el nivel de deducción formal, siguiendo algunas fases de la teoría de Van Hiele.

NIVEL 3	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D2-De2	Argumenta porque solo hay una recta paralela a la dada que pasa por el punto A y se apoya de lo visto en su formación académica, además lo relaciona con el quinto postulado de euclides.
D2-Pe1	Interpreta lo que dice cada proposición y las relaciona con un mismo sentido.
D2-Pe2	Demuestra el resultado de una manera formal, apoyándose en resultados anteriores y las hipótesis dadas.

Fig. 5.5: Criterios de clasificación Nivel 3 día 1 y 2.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en D2-Pe1 al entender las proposiciones dadas y comprender cada uno de los conceptos que allí se utilizan.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D2-De2 donde el estudiante explica porque solo es posible que pase una recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto fijo indicado, esto lo puede argumentar con base en su experiencia académica; en D2-Pe2 explicando cada paso que se da en la demostración y de donde se saca cada paso para avanzar en la misma. **III.2.** En el segundo día en la actividad 4.8 se llevará a cabo la fase de explicación e integración.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D2-De2 relacionando este hecho con el quinto postulado de euclides; en D2-Pe1 integrando las dos proposiciones y concluyendo que ambas quieren indicar lo mismo; en D2-Pe2 haciendo uso de todas

las herramientas dadas en el problema y de cada uno de los resultados que se van obteniendo paso a paso para la solución.

Actividades Nivel 4.

En esta sección tenemos las características que debe de tener un estudiante para encontrarse en el nivel de rigor, siguiendo algunas de las fases de la teoría de Van Hiele.

NIVEL 4	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D2-Pe2	Comprende lo que se le da en la hipótesis y puede llevar esto a un dibujo. Aplica o aprendido en el curso de geometría básica y concluye que el resultado se obtiene a partir de la congruencia de triángulos LLL.

Fig. 5.6: Criterios de clasificación Nivel 4 día 1 y 2.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en la actividad D2-Pe2 donde el estudiante comprende lo dado en la hipótesis y lo plasma en un dibujo.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D2-Pe2 explicando por medio de la bisetriz que M es el punto medio de los segmentos dados, además puede dar un paso a paso de lo que se puede concluir de las hipótesis.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D2-Pe2 aplicando todo lo aprendido en el curso de geometría básica hasta el momento y llegar a la conclusión de que $\triangle AMC \cong \triangle BMD$ y anunciar que lo que se utilizó fue el postulado de LLL.

Actividades día 3

En estas actividades solo se describen los parámetros de clasificación en el nivel 0, 1 y 2.

Actividades Nivel 0.

Estas actividades están diseñadas para saber si el estudiante cumple con algunos mínimos para poder clasificarse en este nivel, el cual es el de visualización o reconocimiento introduciendo a los estudiantes en la geometría hiperbólica, llevando a cabo

algunas de las fases para ayudar en cada nivel. Aquí describiremos que condiciones debe de cumplir un estudiante para clasificarse en este.

NIVEL 0	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D3-PH1	Une los dos puntos fijos con una regla diseñada para ese espacio y concluye que hay dos o mas de diferentes tamaños que cumplen esta condición.
D3-PH2	Verifica que el primer postulado con esta familia de círculos totalmente inscritos no se cumple, esto lo puede hacer a simple vista, basta con encontrar dos reglas dadas que una dos puntos que él fije, además visualiza que una recta no puede ser prolongada indefinidamente ya que es un círculo cerrado cada uno de los representantes de esta familia.
D3-PH3	Verifica los postulados pedidos con la familia de semicírculos totalmente inscritos y con la familia de los que tienen sus extremos en el borde. En el postulado I con los semicírculos que tienen sus extremos totalmente inscritos, es capaz de concluir que no se cumple ya que basta con tomar su complemento del otro semicírculo y este también unirá los puntos extremos, además pueden fácilmente ver que el postulado II tampoco se cumple porque se alcanza un punto inicial y otro final. Con la familia de semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco, son capaces de encontrar dos semicírculos que unan dos puntos fijos, los cuales pueden ser el punto donde se se intersecta el extremo del semicírculo con el borde, y otro que esta sobre la semicircunferencia. Todo esto gracias a la visualización de las reglas dadas para este modelo.
D3-PH4	Verifica los postulados pedidos con esta familia de reglas y encuentra que no se cumple el I y II postulado, ya que, encuentra por lo menos dos reglas que pasan por dos puntos dados y no se puede extender indefinidamente las rectas.

Fig. 5.7: Criterios de clasificación Nivel 0 día 3.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en la actividad D3-PH1 introduciéndoles al espacio hiperbólico con una pequeña información para que en base a esto, el estudiante sea capaz de encontrar la familia de rectas de este espacio, además entregándoles las diferentes reglas diseñadas para este modelo e indicándoles como se desarrolla este ítem para que puedan unir los puntos dados; en D3-PH2 teniendo claro que es un círculo totalmente inscrito en el disco; en D3-PH3 teniendo conocimiento de que es un semicírculo con sus extremos totalmente inscritos en el disco y también un semicírculo con sus extremos en el borde del disco; en D3-PH4 Se le explica al estudiante la idea de un círculo totalmente inscrito en y tangente a otro y se le informa como se hará la actividad practica.

Fase II (Orientación dirigida): Esta fase es aplicada en D3-PH1 donde el estudiante sigue las instrucciones y une los dos puntos con cualquiera de las reglas diseñadas para este espacio; en D3-PH2 escogiendo varias de las reglas del modelo para ir verificando cada uno de los postulados pedidos; en D3-PH3 verificando con los semicírculos que tienen sus extremos totalmente inscritos que el postulado I no se cumplen porque su complemento del otro semicírculo también unirá los puntos extremos, y el postulado II tampoco porque se alcanza un punto inicial y otro final. Con la familia de semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco, encontraran dos semicírculos que unan dos puntos fijos, los cuales pueden ser el

punto donde se intersecta el extremo del semicírculo con el borde, y otro que esta sobre la semicircunferencia; en D3-PH4 el estudiante va utilizando las reglas del modelo para verificar los postulados.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D3-PH2 gracias a que es una actividad grupal, cada estudiante es capaz de explicarles a sus compañeros como podrían verificar los postulados I y II, y cual metodología utiliza para realizarlo, y con esto concluir si cumple o no cada postulado esta familia indicada; en D3-PH3 donde el estudiante explica a sus compañeros como podrían verificar los postulados y cual metodología utiliza para realizarlo, y con esto concluir si cumple o no cada postulado esta familia indicada, aquí el estudiante es capaz de generar una diferencia entre los semicírculos totalmente inscritos, a los que tienen sus extremos en el borde del disco, porque con una familia puede ser mas fácil la verificación que con otra.

Fase IV (Orientación libre): Esta fase es aplicada en D3-PH2 donde el estudiante con cualquier dos puntos puede realizar este ejercicio y verificar los postulados de la manera que mejor le parezca;

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D3-PH2 siendo capaces de integrar todo lo recolectado entre sus compañeros y lo visualizado en el papel para definir que esta familia de rectas no cumple con algunos de los primeros cuatro postulados de euclides; en D3-PH3 integrando todo lo recolectado entre sus compañeros y lo visualizado en el papel para definir que esta familia de rectas no cumple alguno de los postulados de euclides; en D3-PH4 con lo visto a través de la practica pueden concluir si se cumple o no cada postulado con esta familia.

Actividades Nivel 1.

Estas actividades están diseñadas para plantear cuales son los requisitos que debe de cumplir un estudiante para clasificarse en el nivel 1 Análisis del modelo del disco de Poincaré en la geometría hiperbólica, siguiendo algunas fases de la teoría de Van Hiele.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en D3-PH2 donde el estudiante sabe y reconoce que y cual es un ángulo recto. Además comprende como medir ángulos entre dos curvas; en D3-PH3 el estudiante reconoce y diferencia los semicírculos totalmente inscritos en el disco de Poincaré y los que tienen sus extremos en el borde de este. Es capaz de ver mas allá que un simple semicírculo, por ejemplo visualiza que el borde del disco nunca se alcanza, así que un semicírculo de este tipo se puede

NIVEL 1	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D3-PH1	Explica a sus compañeros y al profesor, que si hubieran mas reglas podrían verificar que hay muchísimas de estas que unen los puntos, incluso puede deducir que hay infinitas reglas que cumplen con esta condición y por lo tanto no satisfacen todos los postulados.
D3-PH2	Verifica que en esta familia de reglas que se encuentran totalmente inscritas en el disco, no se cumplen los postulados I y II pero si el IV.
D3-PH3	Verifica que en los semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco de Poincaré si se cumple el II postulado ya que haciendo el análisis, este borde nunca se alcanza. Además analiza que esta familia no cumple con todos los postulados.
D3-PH4	Comprueba los postulados (I, II y IV) y decide si se cumplen o no con esta familia, analizando que existen dos o mas círculos que pasan por dos puntos fijos cuales quiera, también que una recta de esta familia no se puede extender indefinidamente, por lo tanto concluye que no se cumplen los postulados I y II.

Fig. 5.8: Criterios de clasificación Nivel 1 día 3.

extender indeterminadamente; en D3-PH4 se tiene claro cual es y cual no es un círculo totalmente inscrito y tangente al disco de Poincaré.

Fase II (Orientación dirigida): Esta fase es aplicada en D3-PH2 donde realiza ángulos rectos con esta familia y verificar que el IV postulado de euclides si se cumple, al analizar que los ángulos rectos son congruentes entre sí; en D3-PH3 con la familia de semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco de Poincaré es capaz de analizar que se cumple el II postulado ya que nunca se alcanza el borde del disco y por lo tanto se extiende indefinidamente una de estas rectas, mientras que con los semicírculos que tienen sus extremos dentro del disco de Poincaré no se cumple. Además puede verificar el IV postulado con ambas familias y visualizar la forma que tienen dependiendo de donde o como se tomen los semicírculos. Es capaz de encontrar una manera de organizar las reglas para afirmar que en ninguna de las dos familias se cumple el I postulado; en D3-PH4 analiza que existen dos o mas círculos que pasan por dos puntos fijos cuales quiera, también que una recta de esta familia no se puede extender indefinidamente.

Fase III (Explicitación): Esta fase se aplica en D3-PH1 donde el estudiante es capaz de explicar a sus compañeros y al profesor, que si hubieran más reglas podrían verificar que hay muchísimas de estas que unen los puntos, en D3-PH2 el estudiante es capaz de explicarles a sus compañeros como podrían verificar el IV postulado y cual metodología utiliza para realizarlo, y con esto concluir si cumple o no cada postulado esta familia indicada; en D3-PH3 explica como verificar los postulados y cual metodología utiliza para realizarlo, y con esto concluir si cumple o no cada postulado esta familia indicada, aquí el estudiante es capaz de generar una diferencia entre los semicírculos totalmente inscritos, a los que tienen sus extremos en el borde del disco, en cuanto a la verificación del postulado II y la visualización que se tiene al

comparar los ángulos rectos ya que siguen con las mismas características pero no se visualiza de la misma manera, esto sucede por la métrica que tiene este modelo; por eso con la familia que tiene sus extremos en el borde se va a visualizar de diferente manera que algunos que están totalmente inscritos.

Fase IV (Orientación libre): Esta fase es aplicada en D3-PH2 donde el estudiante es capaz de relacionar la medida de ángulos entre dos curvas, con lo visto en asignaturas como cálculo y recordar el concepto de la derivada de una función.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D3-PH1 analizando lo que realiza en la práctica y deduciendo que hay infinitas reglas que unen los puntos; en D3-PH2 integra todo lo recolectado entre sus compañeros y lo visualizado en el papel para definir que esta familia de rectas no cumple alguno de los primeros cuatro postulados de Euclides; en D3-PH3 integra todo lo aprendido y reconocer que con alguna condición que se le cambie o añada a una familia de rectas, esto puede causar un gran cambio en el cumplimiento o no de los postulados, aquí se puede notar una gran diferencia con solo un pequeño cambio de los extremos en los semicírculos.

Actividades Nivel 2.

Estas actividades están diseñadas para plantear cuáles son los requisitos que debe de cumplir un estudiante para clasificarse en el nivel 2 Ordenación o clasificación en la práctica hiperbólica, siguiendo algunas fases de la teoría de Van Hiele.

NIVEL 2	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D3-PH5	Elimina las características que hacen que una familia de rectas no permiten cumplir con algún postulado y propone una nueva familia con nuevas características que si cumplan con los postulados requeridos en los anteriores ejercicios.

Fig. 5.9: Criterios de clasificación Nivel 2 día 3.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en D3-PH5 donde el estudiante Tiene claro cuáles de las anteriores características no se pueden utilizar porque no cumplen con los postulados.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D3-PH5 donde se explica que característica definitivamente no puede tener la familia propuesta porque declina el cumplimiento de algún postulado.

Fase IV (Orientación libre: Esta fase es aplicada en D3-PH5 donde el estudiante añade condiciones a algunas familias dadas para ir probando si se cumplen o no los postulados.

Fase V (Integración: Esta fase es aplicada en D3-PH5 por todo lo visto y presentado, puede intuir y dar una familia que cumpla con los tres postulados propuestos sin necesidad de un formalismo.

Actividades día 4

Actividades Nivel 0.

Aquí se describen las actividades que se clasifican o tienen parte del nivel 0 de Visualización o reconocimiento para la geometría hiperbólica en el modelo de la bola de Poincaré, llevando a cabo algunas de las fases para ayudar en cada nivel. Se describen cuales son los requisitos en cada una de las actividades para que una persona se encuentre en este nivel.

NIVEL 0	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D4-VH1	Confirma que este espacio cumple con los primeros cuatro postulados y no el quinto, por medio de la visualización en el software.
D4-VH2	Describe que las rectas y el borde del disco de Poincaré, al aplicar zoom en este y visualizar su comportamiento, se van formando ángulos rectos.
D4-VH3	Realiza un triángulo con sus ángulos y hace uso de las herramientas de GeoGebra para concluir que al sumar sus ángulos internos, la suma es menor de 180° , así mismo realiza diferentes triángulos y concluye que en todos los que hizo la suma de los ángulos internos la suma es siempre menor que 180° .
D4-VH4	Encuentra un triángulo rectángulo y realiza la fórmula para verificar la suma de los cuadrados de los catetos, concluyendo que no se cumple el teorema de Pitágoras.
D4-VH5	Explica que cuando los objetos se encuentran cerca al centro del disco de Poincaré, estos son similares a la visualización en la geometría euclidiana, pero cuando estos objetos se colocan cerca al borde del disco, estos tienden a deformarse en comparación de como se conoce en la geometría euclidiana.
D4-VH6	Explica que en los círculos que están cerca al centro del disco de Poincaré, su centro se visualiza en el centro que se tiene visualizado en la geometría euclidiana; pero cuando los círculos se hacen cerca al borde del disco, su centro se traslada visualmente.

Fig. 5.10: Criterios de clasificación Nivel 0 día 4.

Fase I (Información): Esta fase es aplicada en D4-VH1 donde el estudiante entiende como manejar el programa GeoGebra hiperbólico y seguir las instrucciones; en D4-VH4 el estudiante tiene claro como funciona el teorema de Pitágoras en la geometría euclidiana; en D4-VH5 conoce los objetos matemáticos que se piden dibujar.

Fase II (Orientación dirigida): Esta fase es aplicada en D4-VH3 aquí el estudiante realiza un triángulo con sus ángulos con las herramientas de GeoGebra y utiliza

la herramienta de medida de ángulos, para que al sumar sus ángulos internos deduzca algunos resultados; en D4-VH4 encuentra un triángulo rectángulo y realiza la fórmula para verificar la suma de los cuadrados de los catetos.

Fase III (Explicitación): Esta fase es aplicada en D4-VH2 donde el estudiante visualiza un comportamiento en la forma de como se intersecan las rectas y el borde del disco de Poincaré al aplicar zoom en este y puede dar una breve explicación de que se van formando ángulos rectos; en D4-VH3 a través de diferentes triángulos puede explicar que en todos los que hizo la suma de los ángulos internos la suma es siempre menor que 180° ; en D4-VH5 puede explicar que cuando los objetos se encuentran cerca al centro del disco de Poincaré, estos son similares a la visualización en la geometría euclidiana, pero cuando estos objetos se colocan cerca al borde del disco, estos tienden a deformarse en comparación de como se conoce en la geometría euclidiana; en D4-VH6 el estudiante puede explicar los diferentes comportamientos que tienen los círculos, dependiendo del lugar donde se ubiquen dentro del disco de Poincaré.

Fase IV (Orientación libre): Esta fase es aplicada en D4-VH1 donde el estudiante visualiza que cumple con los primeros cuatro postulados por medio de la visualización en el software, utilizando las herramientas deseadas para su verificación. Además puede ver que pasan muchas rectas paralelas por un punto exterior a una recta dada; en D4-VH5 dibuja todos los objetos en diferentes partes del modelo y de diferente tamaño.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D4-VH4 aplicando la fórmula en un triángulo rectángulo realizado y concluyendo a través de esta que no se cumple el teorema de Pitágoras.

Actividades Nivel 1.

Estas actividades están diseñadas para plantear cuales son los requisitos que debe de cumplir un estudiante para clasificarse en el nivel 1 Análisis en la geometría hiperbólica, siguiendo algunas fases de la teoría de Van Hiele.

Fase V (Integración): Esta fase es aplicada en D4-VH1 donde el estudiante con todo lo relacionado en la visualización puede concluir que pasan infinitas rectas a un punto exterior fijo dado a una recta inicial y por lo tanto no cumple el quinto postulado; en D4-VH2 el estudiante analiza lo visto entre las rectas y que borde del disco y puede caracterizar este tipo de rectas como ortogonales; en D4-VH3 con lo visto a través de varios ejemplos de triángulos, puede intuir la suma de los ángulos de cualquier

NIVEL 1	
ACTIVIDAD	PARÁMETROS DE CLASIFICACIÓN
D4-VH1	Concluye que pasan infinitas rectas a un punto exterior fijo dado a una recta inicial y por lo tanto no cumple el quinto postulado.
D4-VH2	Caracteriza cualquier recta con el borde del disco de Poincaré como ortogonales.
D4-VH3	Generaliza la suma de los ángulos de cualquier triángulo que se haga en este modelo y concluye que siempre es menor que 180° . Además asocia este resultado con el conocido en la geometría euclidiana sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .
D4-VH4	Argumenta porqué no se cumple el teorema de Pitágoras.
D4-VH5	Concluye que su estructura no varía a pesar de la visualización un poco distinta que en el geometría euclidiana.

Fig. 5.11: Criterios de clasificación Nivel 1 día 4.

triángulo que se haga en este modelo y conjeturar que siempre es menor que 180° y lo puede asociar con un resultado muy conocido en la geometría euclidiana sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° ; en D4-VH4 puede crear un argumento o una breve descripción del porqué no se cumple el teorema de pitágoras, por ejemplo por la metrica inducida en este modelo de la bola de Poincaré; en D4-VH5 analiza estos objetos en cuanto a su estructura, para decidir que no varía a pesar de la visualización un poco distinta que en el geometría euclidiana.

5.2 Materiales y lo que se espera en cada actividad por parte del profesor

En esta sección se describen cuales son los materiales necesarios para la realización de las actividades.

ACTIVIDAD	MATERIALES
D1-In1	Cuadro de conceptos impreso para diligenciar.
D1-Re3	Colores.
D2-De1	Triángulos de diferentes tamaños o colores y tijeras.
D2-De2	Regla.
D3	Círculos de diferentes tamaños, círculo grande que representará el disco de poincaré, incluyendo dos puntos representados dentro de este, reglas, escuadras y computador con el programa GeoGebra.
D4	Computador con el programa GeoGebra Hiperbólico.

Fig. 5.12: Materiales de cada actividad

Lo que se espera de la actividad

A continuación se dará un esquema de lo que se espera como profesor, que los estudiantes realicen dentro de cada actividad. Se indicara el número de la actividad y enseguida lo esperado.

D1-In1. Definir cada uno de los conceptos en base a su experiencia, lo aprendido en el bachillerato y la universidad, en particular el estudio en el curso de geometría básica. La definición de cada uno de estos conceptos no es para nada trivial, por lo que cada uno lo interpreta de acuerdo a una relación gráfica. Se debe de tener en cuenta que no hay una única definición universal para estos conceptos.

Algunas definiciones esperadas son las siguientes:

- *Punto*: Lo mas mínimo que existe, que no tiene medida, ni dimensión, ni tamaño. Le podemos asignar una posición con respecto a un plano o lugar de referencia.
- *Segmento*: Una línea compuesta de infinitos puntos que tiene un inicio y un fin.
- *Recta*: Una línea prolongada indefinidamente en dos direcciones compuesta de infinitos puntos.
- *Ángulo*: Abertura entre dos segmentos o rectas que hay en el punto de intersección de estas.
- *Triángulo*: Figura plana cerrada formada por tres puntos llamados vértices y tres segmentos llamados lados, que a su vez forman tres ángulos.

D1-In2. En esta actividad se espera que el estudiante no presente dificultad alguna por su nivel de formación. Los estudiantes tendrán triángulos de diferentes formas y tamaños formados en el tablero de puntos. Se espera que los estudiantes afirmen que solo basta con tres segmentos y tres puntos para formar un triángulo, además de no quedarse solo con la idea de formar un triángulo rectángulo sino que exploren con otro tipo de triángulos y así deducir que no necesariamente debe de haber un ángulo recto.

D1-In3. En esta actividad el estudiante es capaz de unir los puntos como se indica en la actividad y que no solo se quede con la restricción de que los segmentos deben de quedar dentro del cuadro sino que explore y amplíe su imaginación para poder llegar al resultado. Aquí se dará cuenta que se debe de salir del recuadro para hacerlo posible.

D1-In4. La expectativa que se tiene es que el estudiante con su compañero pueda compartir sus saberes previos y tenga una comunicación asertiva para darse a entender por medio de sus palabras.

D1-Re1. Lo que se espera es que el estudiante identifique cuales figuras son triángulos y cuales no, reconociendo que una figura que tiene mas de 3 lados ya no es un triángulo e identificando que pueden haber figuras que si se visualizan juntas, forman un nuevo triángulo. La respuesta esperada es 13 triángulos. Además tener en cuenta que los colores ni el tamaño influyen en la forma de la figura.

D1-Re2. Aquí se espera que el estudiante sea capaz de identificar que en cada segmento hay infinitos puntos e igual cantidad en el segmento $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

D1-Re3. En esta actividad la expectativa es que el estudiante identifique cuales rectas son paralelas, o perpendiculares entre sí, así mismo como las que son tangentes a una circunferencia; además que no solo se quede en ello sino que puedan ir un poco mas allá identificando que no solo una recta puede ser paralela a otra sino que al mismo tiempo es paralela a una y perpendicular a otra. También que las rectas de una figura como un triángulo, pueden cumplir con estas condiciones, no necesita estar solo el segmento o recta.

D2-De1. Se espera que el estudiante pueda seguir las instrucciones sin ningún problema y llegue a la idea de que al unir las tres partes donde se encuentran respectivamente cada uno de los ángulos, la unión de estos tres ángulos formen un ángulo llano, es decir, la suma es 180° . Además que puedan identificar que la recta que forman estas tres partes y la recta que estaba opuesta al ángulo que se dejó fijo, son paralelas; y pueden identificar que se satisface el resultado de congruencia entre los ángulos alternos internos, entre otras cosas.

D2-De2. Se espera que el estudiante con la practica identifique que solo hay una recta que pasa por el punto A y es paralela a la recta dada, esto lo harán con una regla, puesto que la idea de la recta se da como una línea que no se curva. Por otro lado, se tiene la expectativa de que reconozcan aquí el quinto postulado de Euclides y sean capaces de relacionarlo.

D2-Pe1. Se espera que el estudiante comprenda lo que dice cada enunciado e identifique que son equivalencias del quinto postulado de euclides, además que no note mucha diferencia entre un enunciado y otro sino que sea capaz de comprender lo mismo de diferente manera.

D2-Pe2. Se espera que el estudiante sea capaz de demostrar que $\triangle AMC \cong \triangle BMD$ con lo dado en las hipótesis, además que practique lo que ha visto en el curso

de geometría básica y que utilice los axiomas y postulados de euclides, como el postulado de *LLL* para la congruencia de triángulos.

Actividades día 3.1

Aquí se describe lo que se espera de cada actividad el día 3 de la practica hiperbólica de manera manual.

Lo que se espera de la actividad

Los estudiantes comprenden cada uno de los cinco postulados de euclides.

D3-PH1 Los estudiantes encuentran una regla-círculo del modelo para unir dos puntos dibujados en el disco de Poincaré. Deben observar que estos regla-circulo que tienen a disposición, no son únicas para unir dichos puntos, sino que varias de ellas permiten unir los puntos. Se espera además, que extrapolen esta experiencia que existen infinitas de estas reglas que cumplen con la condición.

D3-PH2 Los estudiantes entienden qué es un círculo inscrito, y pueden comprobar que no se cumplen todos los postulados de Euclides, incluso con el ejercicio anterior se dan cuenta que hay dos o mas círculos inscritos que unen dos puntos fijos cuales quiera.

D3-PH3 Los estudiantes saben que es un semicírculo y verifican que el primer postulado no se cumple simplemente con notar que un semicírculo y su complemento (el otro semicírculo), pasan por los dos puntos que los une, por lo tanto no hay solo uno de estos. Por otro lado, con los semicírculos que tienen sus extremos sobre la circunferencia (o borde) del disco de Poincaré, de primera vista creerían que se van cumpliendo los postulados, pero habrá unos casos donde hay dos puntos que tienen más de un semicírculo de esta forma que pasa por ellos.

D3-PH4 Los estudiantes tienen claro la idea de tangencia y saben visualizar gráficamente un círculo inscrito tangente al disco de Poincaré, con estos verificarán que algunos de los postulados no se cumplen.

D3-PH5 No les será fácil encontrar exactamente las características que tiene la familia de curvas de esta geometría en este plano, pero tendrán una idea de como

pueden ser, por los ejercicios de las anteriores actividades; por ejemplo, pueden intuir que la familia de curvas no pueden ser círculos totalmente inscritos.

Actividades día 3.2

Aquí se describe lo que se espera de cada actividad el día 3 de la practica hiperbólica con el apoyo del software GeoGebra.

Lo que se espera de la actividad

Los estudiantes tienen conocimiento de las herramientas básicas del programa GeoGebra, como realizar el círculo central que tendrá la labor de disco de Poincaré.

D3-PH1 Ubicarán dos puntos cualesquiera dentro del disco de Poincaré y se darán cuenta que habrá más de una regla-círculo que une estos puntos.

D3-PH2 Ubicaran circunferencias totalmente inscritas en el disco de Poincaré y visualizaran que no cumple con los postulados de Euclides, simplemente comprobando el primer postulado.

D3-PH3 Con los semicírculos comprobaran que tampoco cumplen con los postulados de Euclides. Se espera que el software facilite y agilice las diferentes conclusiones para las familias de “rectas” propuestas. En particular, con la familia de semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco de Poincaré, deberán deducir de manera mas eficaz que no se satisface el primer postulado de Euclides. Se espera que utilicen las opciones de acercamiento del software para detallar visualmente lo que sucede con esta familia de rectas en dos puntos fijos dentro del disco de Poincaré.

D3-PH4 Se espera un mejor manejo de la tangencia entre un círculo y el disco de poincaré, ya que GeoGebra brinda la posibilidad de esta herramienta, y con esto comprobarán que esta familia tampoco cumple con los postulados de Euclides.

Actividades día 4

Lo que se espera de la actividad

En esta actividad ya se les da a los participantes el programa de GeoGebra con el modelo del disco de Poincaré y con esto podrán concluir que la familia que se estaba buscando donde se cumplen los primeros cuatro postulados de Euclides, son los círculos que cortan al borde del disco de Poincaré ortogonalmente.

D4-VH1 Los estudiantes son capaces de verificar que si se cumplen los primeros 4 postulados de Euclides en este modelo. Además pueden graficar una recta del modelo y visualizar que si fijan un punto exterior a esta recta, pasaran infinitas rectas y aquí comprenderán porque no se cumple el quinto postulado de Euclides.

D4-VH2 El estudiante aprovecha las herramientas del software y se fija en un punto del borde del disco de Poincaré para analizar que sucede con una recta del modelo y el borde, por lo que es capaz de intuir por medio de la visualización que estas se intersecan ortogonalmente.

D4-VH3 El estudiante es capaz de utilizar la herramienta de ángulo y con esto sumar los tres ángulos internos de cualquier triángulo que forme en este modelo, realizando esto repetidamente y comprobando en varios triángulos, se dará cuenta que la suma de dichos ángulos es siempre menor que 180° . Además podrá visualizar que si el triángulo se hace mas cercano el borde del disco, los ángulos se ven de diferente manera que si se hace el triángulo cerca al centro del disco.

Por otro lado se espera que lo relacione con el resultado muy conocido de la geometría euclidiana, que es la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

D4-VH4 Los estudiantes son capaces de formar un triángulo con uno de sus ángulos de 90° , y así poder utilizar el teorema de Pitágoras, donde se darán cuenta que no se cumple dicho teorema como en la geometría euclidiana.

D4-VH5 Al realizar estas figuras y objetos matemáticos cerca al centro del disco de Poincaré, ellos tendrán la imagen muy similar a como lo tienen relacionado en la geometría euclidiana y al realizarlas cerca al borde del disco, podrán visualizar estos objetos de manera “distorsionada” con respecto a la idea que ellos en su experiencia tienen; pero esto no debe de generar discordia en cuanto a la estructura de la figura que se realice, ya que este es un espacio totalmente coherente con la idea que se tiene.

D4-VH6 Los estudiantes pueden concluir que cuando un círculo se encuentra cerca al centro del disco de Poincaré, el centro del círculo se mantiene visualmente en la “idea de centro” que se tiene, pero cuando se realizan círculos cerca al borde del disco, el centro del círculo visualmente se traslada, sin embargo la estructura del círculo no cambia.

Resultados y conclusiones

Teniendo en cuenta la teoría desarrollada en este documento en la cual se definen las características para la clasificación de un estudiante de acuerdo a cada nivel de aprendizaje, se va a presentar el número de estudiantes que se encuentran en cada nivel, mostrando un ejemplo de lo realizado por algún estudiante en cada actividad, además veremos las dificultades que se tuvieron durante el proceso y las enseñanzas que dejaron cada una de estas.

Actividades día 1 y 2

En la actividad D1-ln1 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Se les dificultó dar una definición formal para cada uno de estos objetos matemáticos; los estudiantes expresan que están acostumbrados a referirse a estos objetos de manera gráfica pero nunca se habían preguntado como lo definirían. Sin embargo fueron capaces de llevar la actividad a acabo y dar una descripción cercana a la descrita por Euclides en algunos de los objetos.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que los seis estudiantes cumplen las condiciones del nivel 0, 1 y 2 para el cual esta diseñada la actividad.

Evidencia:

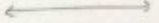
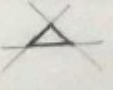
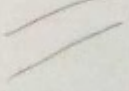
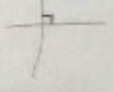
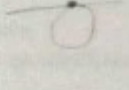
OBJETO MATEMÁTICO	Realice una breve descripción	¿En que objetos de la cotidianidad se visualiza?	Realice un bosquejo grafico
Punto	Nombre que se le da a un lugar particular del espacio	cuando se señala un objeto específico, el objeto sirve un punto en el espacio.	
Segmento	Unión de infinitos puntos una segunda de otro, con un inicio y un final que no cambia de dirección	tramo que se recorre en la misma dirección de un lugar a otro	
Recta	Lo mismo que es segmento pero sin estar limitado.	recorrido que hace la luz	
Ángulo	magnitud determinada por la intersección entre dos rectas	espacio formado entre los dedos cuando se extiende la mano	
Triángulo	Figura determinada por la intersección de tres rectas entre sí.	cuando se dobla una hoja cuadrada formando una esquina y uniéndola con su opuesta.	
Lineas o rectas paralelas	Rectas que nunca se intersectan	Las líneas dibujadas en los cordados de las carreteras.	
Lineas o rectas perpendiculares	Rectas que se intersectan formando un ángulo recto	Piso y pared vistos en 2D	
Recta tangente a una circunferencia	Recta que pasa por el exterior de una circunferencia y la toca en un solo punto	siendo el piso la recta y un balón la circunferencia, cuando está el balón sobre el piso.	

Fig. 6.1: Respuesta de estudiante de la actividad D1-In1.

En la actividad D1-In2 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: En lo que se evidenció, se analiza que no hay dificultad para realizar la actividad.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que los seis estudiantes cumplen las condiciones del nivel 0, 1 y 2 para el cual esta diseñada la actividad.

Evidencia:

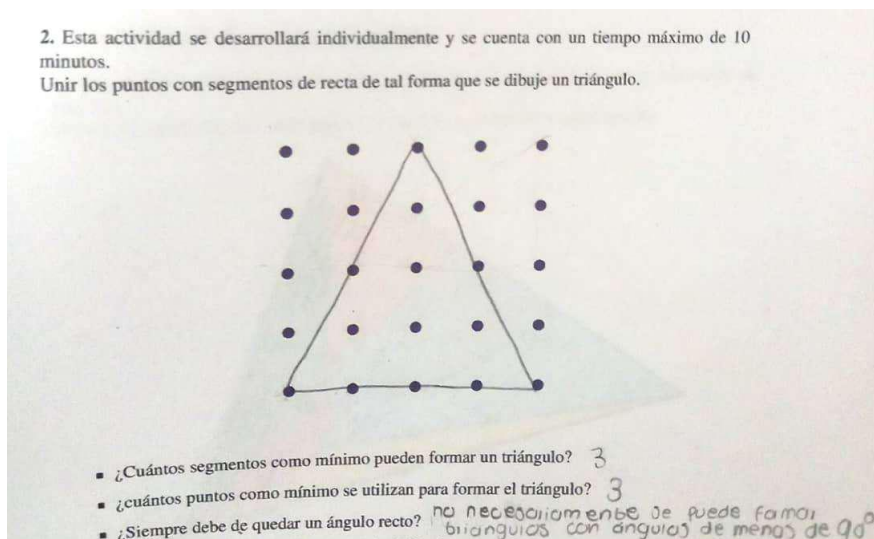


Fig. 6.2: Respuesta de estudiante de la actividad D1-ln2

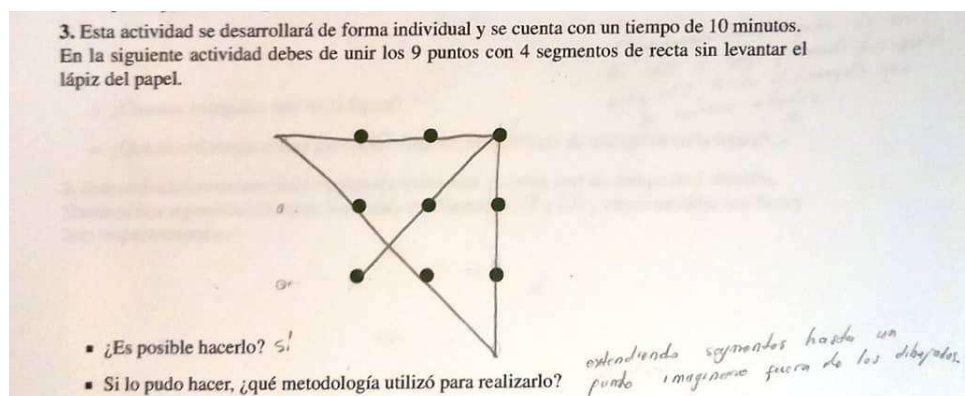


Fig. 6.3: Respuesta de estudiante a la actividad D1-ln3

En la actividad D1-ln3 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Los estudiantes se limitan al espacio acotado por los puntos de la gráfica, lo cual no les permite visualizar que tienen todo un espacio fuera de este en el cual pueden fijar puntos exteriores y así realizar la actividad.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que cuatro estudiantes se encuentran en nivel 0 y dos estudiantes cumplen con las condiciones de nivel 0, 1 y 2 para el cual esta diseñada la actividad. Por lo tanto el 33 % de los estudiantes superan el nivel 0.

Evidencia:

En la actividad D1-ln4 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: En esta actividad los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en comunicar sus respuestas, y en cambio se dieron cuenta las diferentes formas de definir estos objetos matemáticos, además ambas personas al compartir sus resultados, coincidían en que les fue muy difícil el dar una definición formal a cada uno de estos objetos. Se analizó mediante sus explicaciones verbales, que les era mas fácil explicar cada uno de estos objetos matemáticos, con ejemplos de la cotidianidad o de forma gráfica.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que los seis estudiantes se encuentran en nivel 0, 1 y 2 para el cual esta diseñada la actividad.

Evidencia:

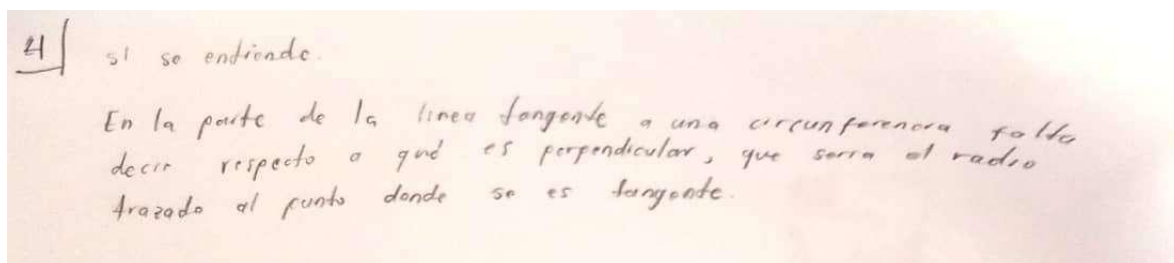


Fig. 6.4: Respuesta de estudiante a la actividad D1-ln4

En la actividad D1-Re1 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: En esta actividad todos los estudiantes no llegaron a una misma respuesta en el número de triángulos que había en la figura, les causo dificultad a la hora de contarlos, ya que cuando llevaban una cuenta de algunos triángulos, llegaban al siguiente y les causaba duda si ya lo habían contado o no, porque algunos lo hicieron de manera aleatoria, pero otros si utilizaron una metodología para no perderse en la cuenta, como la que vemos en la fotografía siguiente de la evidencia. Cabe resaltar que no llegaron a la respuesta correcta ningun estudiante.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que tres estudiantes llegaron a la respuesta de que hay 14 triángulos, dos estudiantes llegaron a la respuesta de 12 triángulos y un estudiantes llegó a la respuesta de 9 triángulos en la figura. En cuanto a una estructuración de un proceso informal, solo tres personas lo lograron diseñar, por lo que estas tres personas se ubican en un nivel 1 y las otras tres se ubican en un nivel 0. Así, el 50 % de los estudiantes no superan el nivel 0 y el otro 50 % no supera el nivel 1.

Evidencia:

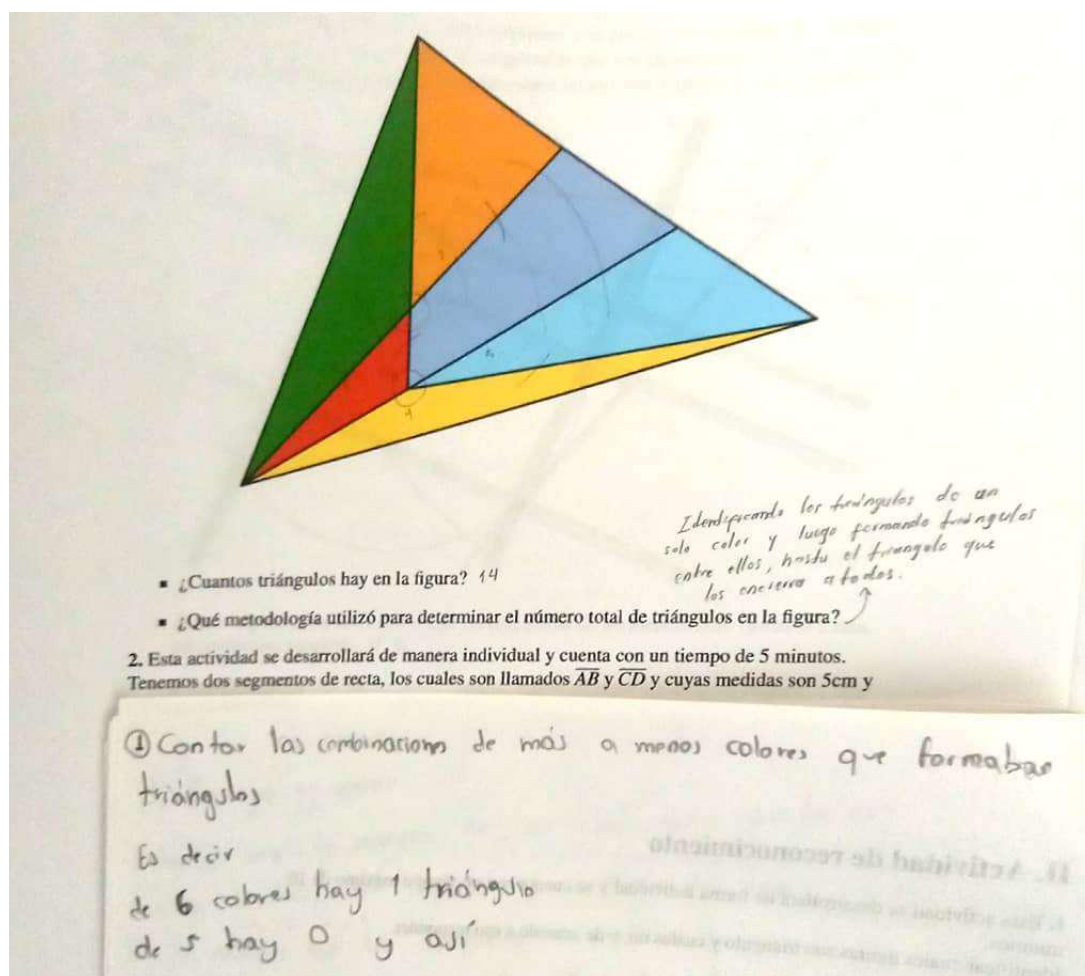


Fig. 6.5: Respuesta de estudiante a la actividad D1-Re1

En la actividad D1-Re2 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Algunos estudiantes tienen la idea de que si un segmento es más largo que otro, entonces hay mas puntos en este. Incluso hay un estudiante que no llegó a la respuesta de que son infinitos puntos en ambos segmentos

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que un estudiante se encuentra en nivel 0, ya que su respuesta es que en ambos segmentos hay finitos puntos y que el segmento $\overline{AB}$ tiene más puntos que el segmento $\overline{CD}$; dos estudiantes se encuentran en nivel 1, llegando a la respuesta de que los dos segmentos tienen infinitos puntos pero no saben en que segmentos hay mas puntos; y tres estudiantes se encuentran en nivel 2, porque llegan a la respuesta de que en ambos segmentos hay infinitos puntos, y tienen la misma cantidad, además tienen conclusiones un poco formales sobre la cantidad de puntos en un segmento.

Evidencia:

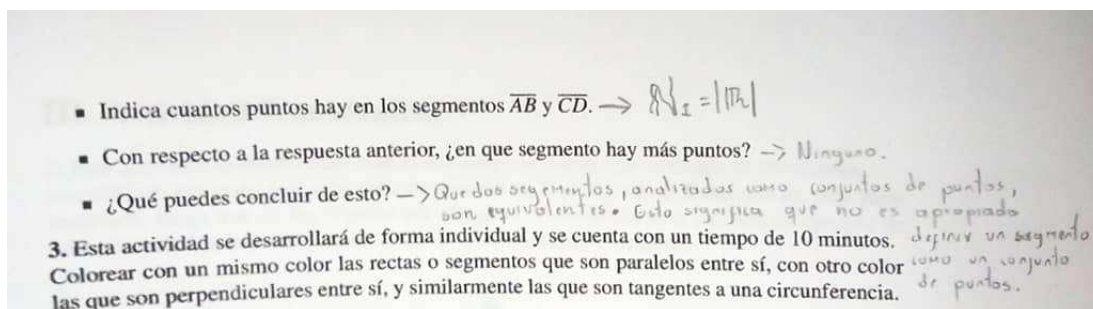


Fig. 6.6: Respuesta de estudiante a la actividad D1-Re2

En la actividad D1-Re3 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: En esta actividad no se tuvo ninguna dificultad, ya que todos los estudiantes diferenciaron las rectas que cumplen una característica, con otras rectas que cumplen otra característica, por medio de colores. Además se dan cuenta que una recta puede cumplir al mismo tiempo mas de una característica.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que los seis estudiantes se encuentran en nivel 2.

Evidencia:

En la actividad D2-De1 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: En esta actividad Se vio la dificultad en cuatro estudiantes de concluir que el segmento que se forma al unir las tres partes recortadas, es de igual longitud que el segmento opuesto al ángulo que se fija, y los otros tres indican que este segmento que se forma es mayor en longitud; por otro lado, ninguno fue capaz de relacionar estos dos segmentos como paralelos y por lo tanto no relacionaron este resultado con la congruencia de ángulos entre paralelas.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que cinco estudiantes se encuentran en un nivel 1 y un solo estudiante en un nivel 2, ya que los que se encuentran en el nivel 1, cumplen con algunas características del nivel 2 pero otras no las concluye de la manera correcta, por ejemplo, indican que el segmento que se forma al unir los tres pedazos recortados, es de igual longitud que el segmento opuesto al ángulo fijo y esto no es verdad, además algunos no integran este resultados con algunos teoremas conocidos como la suma de los ángulos internos de un triángulo, o la congruencia de ángulos entre paralelas.

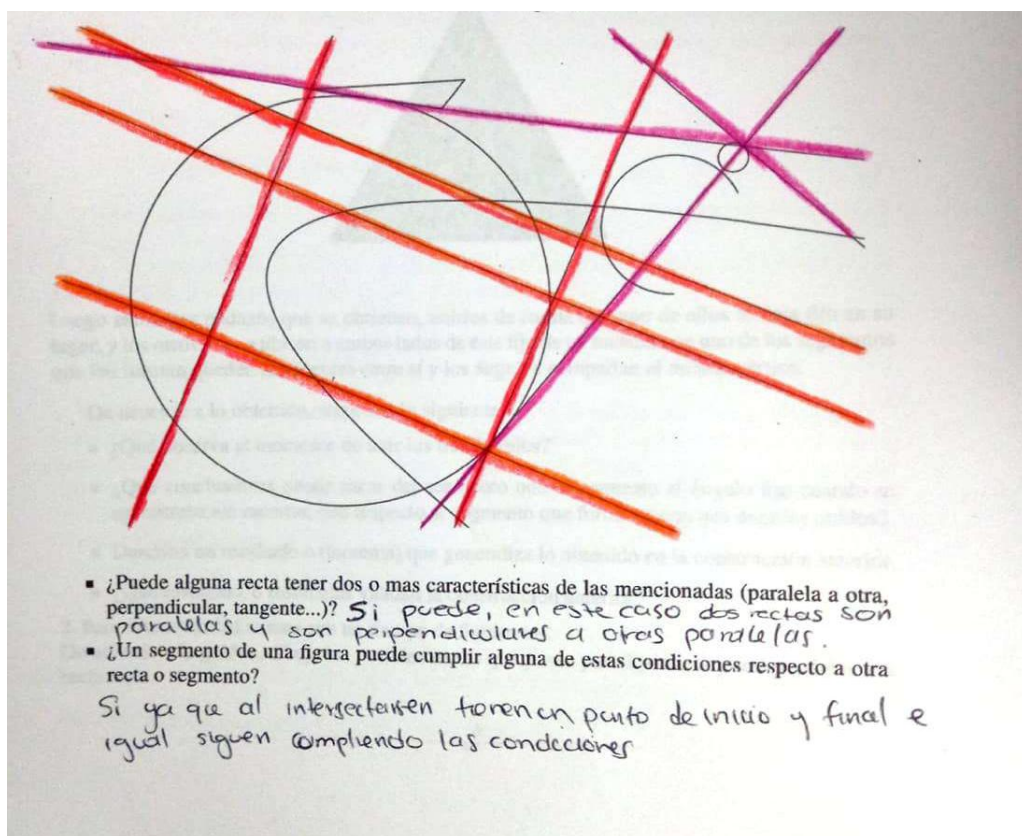


Fig. 6.7: Respuesta de estudiante a la actividad D1-Re3

Evidencia:

En la actividad D2-De2 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Los estudiantes tienen claro el concepto de paralelismo y por ello no se les dificulta el desarrollo de esta actividad, sin embargo no llevan este hecho a una mayor profundidad.

Número de estudiantes en cada nivel: Se analiza que dos estudiantes no presentaron esta actividad y los otros cuatro se encuentran en el nivel 2.

Evidencia:

En la actividad D2-Pe1 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Se les dificulta el entender el segundo enunciado, en los cuatro estudiantes se analiza que este enunciado siempre lo relacionan con la intersección de dos rectas, pero no visualizan el caso en que los ángulos formados en un mismo lado sean rectos para que estas rectas sean paralelas. Además no relacionan los dos enunciados como si fuesen en el mismo sentido, sino que lo ven como dos cosas

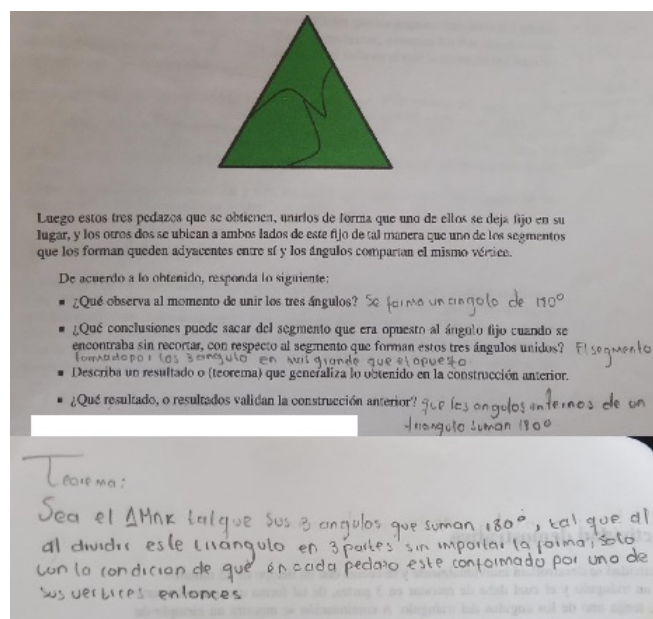


Fig. 6.8: Respuesta de estudiante a la actividad D2-De1

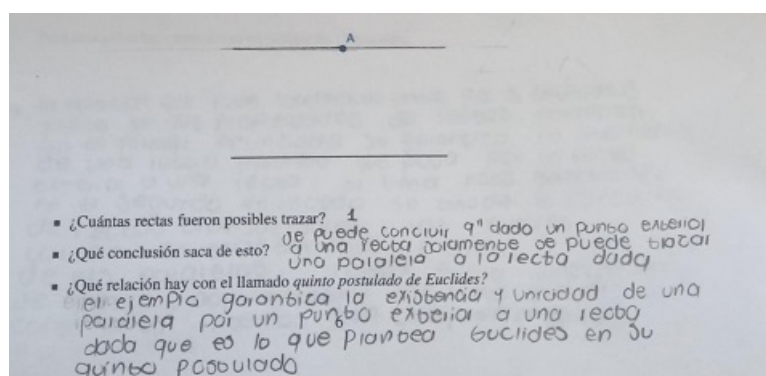


Fig. 6.9: Respuesta de estudiante a la actividad D2-De2

distintas. Por otro lado, no utilizan una buena redacción en la descripción de cada enunciado por que se les dificultad su explicación.

Número de estudiantes en cada nivel: Esta actividad solo la presentaron cuatro estudiantes los cuales se encuentran en el nivel 1.

Evidencia:

En la actividad D2-Pe2 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Los tres estudiantes que desarrollaron este punto, diferencian y tienen claro cual es la hipótesis y la tesis del problema, además van utilizando cada parte del problema sin ninguna dificultad para obtener nuevos resultados y finalizando con la parte axiomática y haciendo uso de teoremas de congruencias entre triángulos.

IV) * la relación que puede establecerse entre los 2 enunciados radica en las propiedades de rectas paralelas. En el primer enunciado se garantiza la unicidad de una recta paralela que pasa por un punto exterior a una recta, al tener esto garantizado en el segundo enunciado se añade el concepto de rectas transversales, las cuales cortan en exactamente 1 punto a cada una de las paralelas, luego entra el concepto de ángulo, por teorema se tiene que ángulos colaterales internos son complementarios.

luego al extenderse indefinidamente se encuentran en un punto donde se traza una transversal.

Fig. 6.10: Respuesta de estudiante a la actividad D2-Pe1

Número de estudiantes en cada nivel: Esta actividad solo la presentaron tres estudiantes los cuales se encuentran en el nivel 4, ya que todos utilizan la parte axiomática y van argumentando cada paso que dan en la demostración formal.

Evidencia:

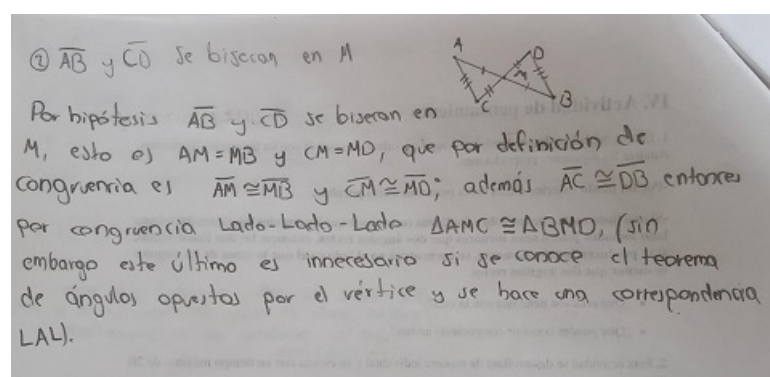


Fig. 6.11: Respuesta de estudiante a la actividad D2-Pe2

Evaluación de las actividades

En esta parte se evaluara cada día de las actividades para ver como se puede mejorar para una próxima ocasión y tener una referencia de lo realizado.

- ¿Qué le pareció la actividad?
Les interesó mucho ya que son conceptos que han visto pero no sabían como redactar una definición de cada uno, resaltaron que en ocasiones es muy fácil explicar esto con gráficos o ejemplos específicos pero a la hora de pasar a un concepto teórico se hace un poco difícil.
- ¿En que curso se aplicó?
Cuarto semestre de estudiantes del programa de Matemáticas.

- ¿Resultó apropiado para los estudiantes?
Es muy relevante para su formación como profesionales porque son conceptos que en muchas ocasiones se dan por entendido pero no nos detenemos un momento a pensarlos desde lo conceptual.
- ¿Qué dificultad tuvo el profesor para llevar a cabo la actividad?
Al tratar de explicarles como podrían dar una definición de punto, recta, ángulo y triángulo.
- ¿Como se sintió usted en el desarrollo de la actividad?
Súper interesante ver como cosas que uno cree "sencillas" para personas que se están formando en este ámbito, se torna un poco complejas. Además al ver diferentes puntos de vista, se aprenden muchas cosas nuevas que en principio de la actividad no se habían pensado.
- Si volviera a aplicarla, ¿qué le cambiaría a las actividades para mejorarla?.¿Qué cambiaría de su propio actuar?
- ¿Si la quisiera aplicar con alumnos mas pequeños o mas grandes que le cambiaría?
Si se aplica en alumnos mas pequeños se modificaría la manera en como se pregunta sobre la definición de punto, recta, ángulo y triángulo y solo bastaría con que los expliquen en la forma que ellos crean mejor, sin necesidad de un concepto teórico.

Actividades día 3

En la actividad D3-PH1 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: No hubo ninguna dificultad con los cuatro estudiantes que realizaron la actividad, ya que encontraron varias reglas que unieran los dos puntos dados y dedujeron que habían infinitas si el plano no tuviera limitaciones en el espacio como lo es en la practica.

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes que presentaron la actividad, se encuentran en el nivel 1.

Evidencia:

En la actividad D3-PH2 se evidenció lo siguiente:

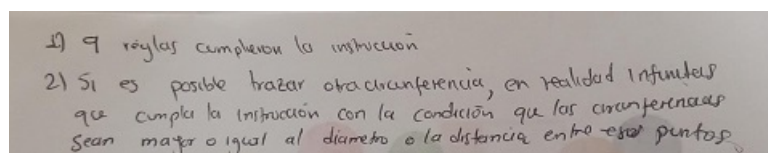


Fig. 6.12: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH1

Dificultades: Se les dificulta la manera de visualizar los ángulos rectos en esta familia de curvas ya que no recordaban como se tomaba un ángulo entre dos curvas y aquí se les recordó como medir ese ángulo y con ayuda de las escuadras tener las rectas tangentes a cada curva para este ángulo.

Número de estudiantes en cada nivel: Los cuatro estudiantes que realizaron esta actividad se encuentran en el nivel 1.

Evidencia:

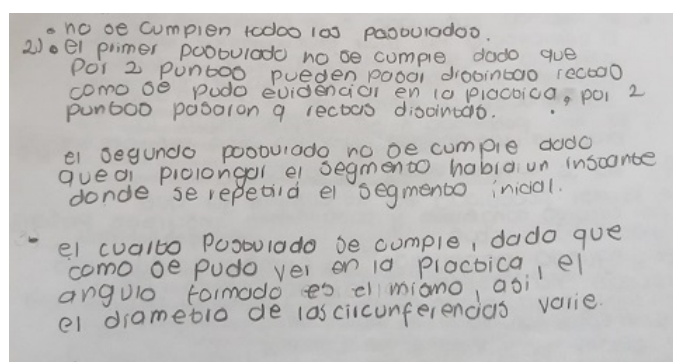


Fig. 6.13: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH2

En la actividad D3-PH3 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Con los semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco de Poincaré tuvieron dificultad a la hora de comprobar en la practica visual el primer postulado porque al colocar muchas de las reglas, círculo que se tienen disponibles, pareciera que no hay dos o mas que unen dos puntos fijos, sin embargo si las hay y eso reafirma que no se cumple el segundo postulado, la mayoría de los estudiantes al ver este comportamiento, concluyeron que si lo cumple.

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes que realizaron esta actividad se encuentran en el nivel 1.

Evidencia:

En la actividad D3-PH4 se evidenció lo siguiente:

b) el primer postulado no se cumple, dado que ocurre lo mismo que cuando tenemos círculos, es decir que rectas diferentes pasan por dos puntos distintos.

el segundo postulado no se cumple dado que el segmento no puede ser prolongado ya que se debería de tener un semicírculo que es la condición inicial que se plantea.

el cuarto postulado se cumple ya que el ángulo formado entre las tangentes de los 2 círculos siempre es un ángulo recto.

- Cuando el semicírculo tiene sus extremos sobre la circunferencia, el primer postulado no se cumple ya que necesariamente la recta debe pasar por los extremos de la circunferencia y además por los puntos distintos y según lo visualizado en la práctica esto no se cumple.
- el segundo postulado si se cumple ya que el semicírculo no toca exactamente los extremos de la circunferencia por lo cual podemos prolongar los segmentos en el infinito acercándose al borde de la circunferencia.
- el cuarto postulado si se cumple, según la práctica, los ángulos formados son rectos.

Fig. 6.14: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH3

Dificultades: Se encuentra el debate en si una recta de esta familia se puede extender indefinidamente ya que es tangente al disco de Poincaré pero por la introducción de este espacio, se sabe que el borde nunca se alcanza, por lo que tres estudiantes indican que si se puede extender indefinidamente y por lo tanto si cumple el postulado II, y el otro estudiante indica que no.

Número de estudiantes en cada nivel: Tres estudiantes se encuentran en el nivel 1 y un estudiante en el nivel 0.

Evidencia:

④ Corrección de la 1, No lo cumple, porque dos semicircunferencias pueden coincidir en 2 puntos, teniendo el borde en Poincaré. Superponiéndolas.

④ El primero no se cumple, por el argumento anterior.

- El segundo postulado se cumple porque si es tangente al borde del disco significa que ese punto se va a infinito y la prolongación puede ser infinita.
- El cuarto postulado si se cumple ya que las circunferencias al formar el ángulo recto de cualquier tamaño deja la misma figura.

Fig. 6.15: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH4

En la actividad D3-PH5 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: A pesar de que ven ciertas características de las familias en los ítem anteriores que cumplen ciertos postulados, no tienen claridad de que otra característica podrían añadir o eliminar para que se cumplan los primeros cuatro postulados. Sin embargo algunos se arriesgan a indicar una nueva característica que creen funciona.

Número de estudiantes en cada nivel: Ninguno de los cuatro estudiantes que realizan esta actividad logran llegar al nivel 3.

Evidencia:

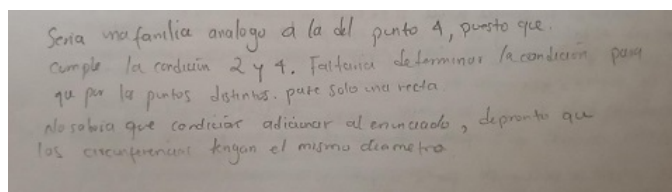


Fig. 6.16: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH5

Evaluación de las actividades

En esta parte se evaluara cada día de las actividades para ver como se puede mejorar para una próxima ocasión y tener una referencia de lo realizado.

- ¿Qué le pareció la actividad?
Muy dinámico e interesante para los estudiantes pasar de lo teórico a la practica, porque aquí pueden evidenciar resultados desde lo que ellos mismos viven y hacen, y así sacar unas conclusiones
- ¿Resultó apropiado para los estudiantes?
Si, ya que pudieron dar solución a las preguntas propuestas de manera mas explicita.
- ¿Qué dificultad tuvo el profesor para llevar a cabo la actividad?
Hubo una dificultad en conocimientos previos del grupo, como el no tener claro cual es el quinto postulado de euclides o como medir el ángulo entre dos curvas.
Al verificar los postulados con la familia de semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco de Poincaré, los estudiantes intuyen con lo hecho en el papel, que si se cumplen los postulados I, II y IV lo cual es falso ya que hay unos casos especiales donde se visualiza que el postulado I no se cumple, pero

tal vez no se dio así por la cantidad limitada de círculos “reglas” impresas. Por lo tanto esta metodología es un poco limitada para algunos resultados.

- ¿Como se sintió usted en el desarrollo de la clase?
Muy bien, porque esta actividad les permitió aclarar muchas dudas que tal vez en lo teórico no lo tenían muy claro y además fue un trampolín para que a partir de la verificación de los postulados en la primera familia indicada, pudieran deducir rápidamente cuales no se cumplen en las otras familias propuestas.
- Si volviera a aplicarla, ¿qué le cambiaría a las actividades para mejorarla?.
¿Qué cambiaría de su propio actuar?
Tener mas “reglas” de diferentes tamaños, para poder verificar mejor ciertos resultados.
- ¿Si la quisiera aplicar con alumnos mas pequeños o mas grandes que le cambiaría.
Si se realiza con personas mas pequeñas se podrían hacer muchos mas círculos y de diferentes colores para que sea mas llamativo.

Actividades día 3 con ayuda del software GeoGebra

Aquí se analizan los puntos de la actividad del día 3 pero con la ayuda del software GeoGebra, donde los estudiantes a través de la visualización y las herramientas de este programa, pueden reafirmar o retractar una conclusión hecho a través de la practica.

Esta actividad fue realizada en parejas para contestar desde la actividad D3-PH2 hasta la D3-PH5.

En la actividad D3-PH2 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Aquí los estudiantes tienen la facilidad de colocar cualquier regla de diferente tamaño de esta familia ya que el software les permite eso, comprobando que lo que se hizo en la practica y concluyeron, fue cierto. Además verificaron el tercer postulado y comprobaron que el quinto postulado no se cumple.

Número de estudiantes en cada nivel: Los cuatro estudiantes que realizaron esta actividad se encuentran en nivel 1.

Evidencia: Esta actividad se realizó en parejas y por lo tanto hubo dos grupos, donde una pareja concluyó que el tercer postulado es cierto y otra pareja que el cuarto postulado no se cumple.

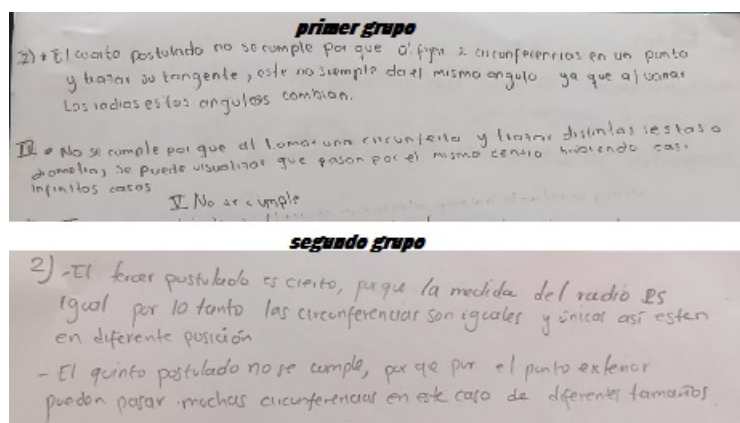


Fig. 6.17: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH2 con la ayuda de GeoGebra

En la actividad D3-PH3 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Hubo dos respuestas distintas en ambas parejas ya que unos concluyen que el tercer postulado se cumple y los otros dos argumentan que no. Sin embargo, coinciden en que el quinto postulado no se cumple en esta familia.

Número de estudiantes en cada nivel: Los cuatro estudiantes se encuentran en un nivel 1

Evidencia:

En la actividad D3-PH4 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Aquí un grupo indica que el tercer postulado si se cumple, el otro grupo indica con un argumento que no es el correcto respecto al cuarto postulado que este si se cumple, y finalmente los dos concluyen de manera correcta que el quinto postulado si se cumple.

Número de estudiantes en cada nivel:

Evidencia:

En la actividad D3-PH5 se evidenció lo siguiente:

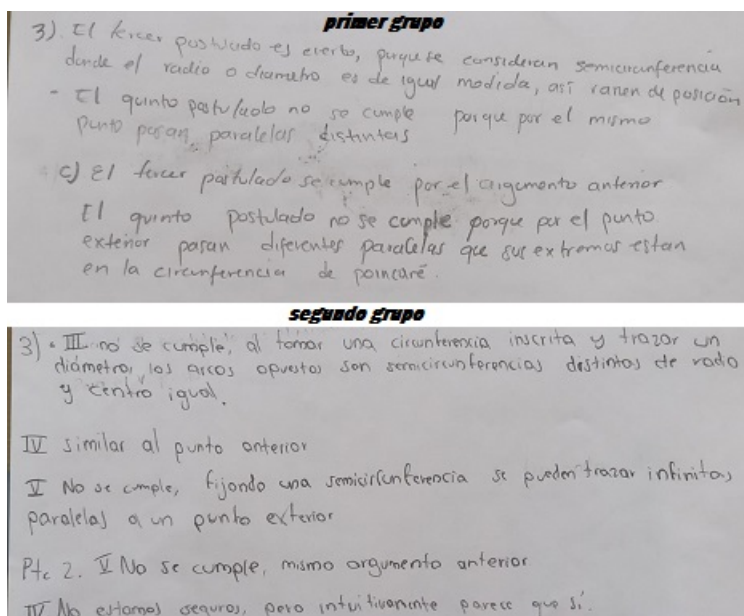


Fig. 6.18: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH3 con la ayuda de GeoGebra

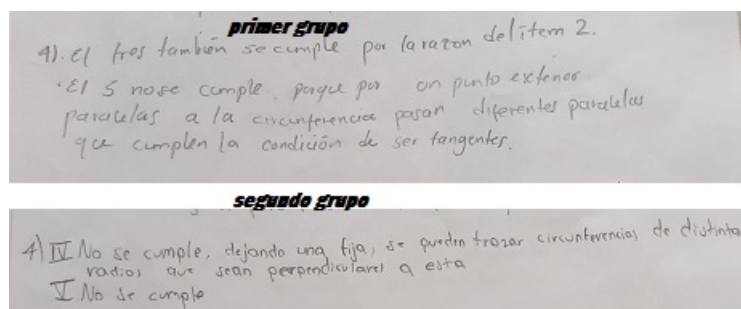


Fig. 6.19: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH4 con la ayuda de GeoGebra

Dificultades: Un grupo de estudiantes no se les ocurre como sería la familia de rectas que cumplan con los primeros cuatro postulados, aunque el segundo grupo no llegó a la respuesta correcta de esta familia que cumple las condiciones, lo intentó y dio algunas características que para ellos podrían ser muy útiles.

Evidencia:

Evaluación de las actividades

En esta parte se evaluará cada día de las actividades para ver como se puede mejorar para una próxima ocasión y tener una referencia de lo realizado.

- ¿Qué le pareció la actividad?

Vieron en esta actividad la oportunidad de conocer un poco más el programa

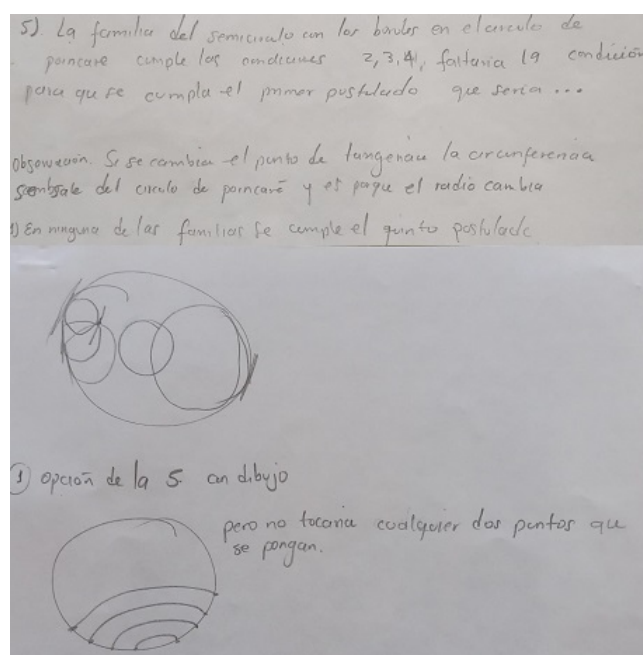


Fig. 6.20: Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH5 con la ayuda de GeoGebra

de GeoGebra, aunque lo habían escuchado no lo habían manejado a gran escala.

■ ¿Resultó apropiado para los estudiantes?

Muy favorable para ellos el tener que utilizar este software porque se dieron cuenta que tiene muchas herramientas que nos facilitan visualizar algunos resultados, además nos dará una mayor claridad sobre lo concluido en el día anterior. Aquí notaron que el día anterior habían unas conclusiones que no eran ciertas. En conclusión los estudiantes analizan que la familia de semicírculos que tienen sus extremos en el borde del disco de Poincaré es la que cumple con la mayoría de postulados y se inclinan a decir que otra familia que cumple con los cuatro postulados, debe ser una similar a esta pero con una condición adicional.

■ ¿Qué dificultad tuvo el profesor para llevar a cabo la actividad?.

Se tuvo una dificultad al responder sobre la verificación del tercer postulado de euclides.

■ ¿Como se sintió usted en el desarrollo de la clase?

Muy entusiasmado al ver el gran interés de los estudiantes por investigar y saber cual es la familia de rectas que cumplen con los primeros cuatro postulados de euclides, incluso habían comentarios que decían “ya probamos casi todas” y pensaban en que otras condiciones existían para armar nuevas familias.

- Si volviera a aplicarla, ¿qué le cambiaría a las actividades para mejorarla?.
¿Qué cambiaría de su propio actuar?
El dejar que ellos tengan esa curiosidad de saber que familia es, es súper interesante porque estamos dejando que el estudiante analice y vea que en realidad hay muchas cosas en las cuales creemos que se han agotado los recursos pero nos damos cuenta que apenas estamos siendo inmersos en un mundo nuevo.
- ¿Si la quisiera aplicar con alumnos mas pequeños o mas grandes que le cambiaría?
Les explicaría lo básico de manejar el software GeoGebra y aprovecharía para mostrarles esta gran herramienta.

Actividades día 4

Aquí se analizan los puntos de la actividad del día 4 en la visualización de los objetos en el programa de GeoGebra hiperbólico.

En la actividad D4-VH1 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Se les realizó una breve introducción a los estudiantes sobre el manejo de este software y se guió en cada uno de los pasos, por lo que no se les dificultó la verificación de los primeros cuatro postulados y la evidencia de que el quinto postulado no se cumple, indicando que este ultimo no se cumple por que pasan infinitas rectas de este espacio que son paralelas a una dada, por un punto exterior a esta, en consecuencia responden la segunda y tercer pregunta de esta actividad.

Número de estudiantes en cada nivel: Los cuatro estudiantes se encuentran en el nivel 1.

En la actividad D4-VH2 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Para dar respuesta a las preguntas de esta actividad, los estudiantes hicieron uso de la herramienta **aplicar zoom** y así visualizar y analizar que sucede con las rectas de este modelo y el borde del disco de Poincaré, por lo que concluyen que si lo acercan cada vez más, entonces se asemejan a rectas perpendiculares. Después de analizar esto, los estudiantes despejaron muchas dudas con respecto a las actividades del día 3, ya que no se imaginaban esta característica que debía de tener esta familia de rectas para que cumpliera con los cuatro primeros postulados de Euclides. Ningún estudiante se le dificultó el llegar a esta conclusión, cabe resaltar que ayudaron las fases de orientación dirigida para sus respectivas conclusiones.

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes se encuentran en el nivel 1.

En la actividad D4-VH3 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Todos los estudiantes realizaron un triángulo y utilizaron la herramienta **medida de ángulo** para sus tres respectivos ángulos, pero al momento de sumar estas medidas, se analizó que los estudiantes lo hacían de manera manual, ya fuera en la calculadora o con lápiz y papel, por lo que se les indicó que el software permite introducir la fórmula de suma, la cual facilita todo este proceso para cualquier triángulo que se realice en este espacio. Así, se dieron cuenta que solo con mover los vértices de cualquier triángulo y formar otro, obtienen el resultado de la suma de sus ángulos; por lo que aquí analizaron que la suma de dichos ángulos es siempre menos que 180° . Finalmente los cuatro estudiantes relacionaron este hecho con el teorema de la geometría euclidiana ya conocido como lo es la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes se encuentran en el nivel 1.

En la actividad D4-VH4 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Al pedirles la verificación del teorema de Pitágoras, los estudiantes de una expresaron que debían de realizar un triángulo con un ángulo de 90° , sin embargo al tratar de realizar dicho triángulo, se les dificultó a todos ya que utilizando el mouse del computador, cada vez que lo movían no les daba una medida exacta en 90° , sino un poco más o menos; por lo que se les enseñó a dar un valor fijo a un ángulo y solo mover los otros, en consecuencia a ello realizan la verificación del teorema de Pitágoras haciendo uso de la herramienta **medida de segmento** y concluyendo que este teorema en este espacio no es cierto e indican que posiblemente no se da por la curvatura de las rectas o la manera en como están diseñadas.

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes se encuentran en el nivel 0, ya que no dan un argumento del porqué no se cumple el teorema de Pitágoras en este modelo.

En la actividad D4-VH5 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Los estudiantes al realizar estos objetos matemáticos pedidos, se asombran al ver como cambia su forma en la manera “tradicional” de su visualización en la geometría euclidiana; al tener estas figuras cerca del centro del disco de Poincaré ellos afirman que se parece visualmente a la forma ya conocida en lo

euclidiano, pero al no estar cerca del centro, estas figuras se distorsionan y no están acostumbrados a verlas de esta manera, pero expresan que son “muy cheveres”. Además, concluyen que su estructura no cambia porque por ejemplo el triángulo sigue teniendo tres lados, tres vértices y tres ángulos.

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes se encuentran en el nivel 1.

En la actividad D4-VH6 se evidenció lo siguiente:

Dificultades: Los estudiantes analizan y describen que cuando el círculo se hace cerca al centro del disco de Poincaré, este se visualiza de manera ya conocida, pero al trasladar el círculo a otra parte cercana al borde del disco, el centro de este círculo también se traslada y visualmente no es el mismo círculo conocido en la geometría euclidiana.

Número de estudiantes en cada nivel: los cuatro estudiantes se encuentran en el nivel 0.

Evaluación de las actividades

En esta parte se evaluara cada día de las actividades para ver como se puede mejorar para una próxima ocasión y tener una referencia de lo realizado.

- ¿Qué le pareció la actividad?
Excelente al saber que los estudiantes están incursionando en un mundo nuevo y donde se dan cuenta que muchas cosas de las que se conocen ya no se cumplen en otros espacios y otras que si se mantienen. Además el ver que se pueden generar nuevas cosas desde GeoGebra y que les permite aprender mas sobre este Software.
- ¿Resultó apropiado para los estudiantes?
Apropiado para seguir con toda la secuencia de actividades en las que se venían desarrollando y en el cual a través del GeoGebra hiperbólico descubrieron por medio de las indicaciones e ítems de la actividad, cual era la familia que cumple con los cuatro primeros postulados de euclides.
- ¿Qué dificultad tuvo el profesor para llevar a cabo la actividad?
Ninguna ya que se contaba con los equipos para que cada estudiante tuviera un computador y así facilitar la realización de la actividad en el GeoGebra hiperbólico.

- ¿Como se sintió usted en el desarrollo de la clase?
Muy bien al ver la cara de sorprendidos de los estudiantes al darse cuenta cuál era la familia de rectas indicada. Además el asombro que les genera la visualización de las figuras ya conocidas en este espacio.
- ¿Si la quisiera aplicar con alumnos mas pequeños o mas grandes que le cambiaría?
Les compartiría una clase introductoria al software para que los estudiantes aprovechen todas las herramientas de este y no tengan que hacerlo en el papel.

En el siguiente cuadro se muestra las características que cumplen los estudiantes para clasificarse en el nivel 0 o el nivel 1 en base a los objetos básicos en la geometría hiperbólica en comparación con la geometría euclidiana.

CLASIFICACIÓN DE LOS ESTUDIANTES RESPECTO A LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA		
PUNTO	NIVEL 0	Los cuatro estudiantes superan este nivel, ya que, son capaces de visualizar como es un punto en esta geometría y no notan una mayor diferencia a la visualización de este objeto en la geometría euclidiana.
	NIVEL 1	Los cuatro estudiantes se encuentran en este nivel, porque analizan su estructura y se dan cuenta que su estructura no cambia a pesar de que se este trabajando en otro tipo de geometría.
RECTA	NIVEL 0	Los cuatro estudiantes son capaces de visualizar las rectas de esta geometría, cambiando la manera "tradicional" de visualizar este objeto como si fuera solamente algo lineal, y eliminando esa idea limitada que se tiene de esta.
	NIVEL 1	Los cuatro estudiantes son capaces de caracterizar las rectas de este modelo, indicando que estas son ortogonales con el borde del disco de Poincaré. Al principio esto se les dificultó, pero con la ayuda del software de geometría dinámica esto se evidenció.
ÁNGULO	NIVEL 0	Los cuatro estudiantes tienen una idea clara de visualización de este objeto y no notan mayor diferencia de este en la geometría euclidiana con la hiperbólica.
	NIVEL 1	Los cuatro estudiantes analizan la forma y manera en que se tienen los ángulos en la geometría hiperbólica y son capaces de indicar que la estructura de estos no cambian a pesar que se formen con rectas que en su visualización ya no son lineales sino curvas, comprendiendo que estas son las rectas del espacio en que se esta trabajando.
TRIÁNGULO	NIVEL 0	Los cuatro estudiantes son capaces de formar un triángulo en la geometría hiperbólica y visualizarlo para entender que esa imagen que se tiene en la geometría euclidiana, no es la misma siempre.
	NIVEL 1	Los cuatro estudiantes analizan las diferentes formas que puede tener el triángulo en la geometría hiperbólica, dependiendo de que tan cerca o lejos se encuentre este del centro del disco de Poincaré, además con la ayuda del software GeoGebra pueden verificar distintos teoremas conocidos en la geometría euclidiana como lo son la suma de los ángulos internos del triángulo y el teorema de Pitágoras.
CÍRCULO	NIVEL 0	Los cuatro estudiantes son capaces de visualizar un círculo en la geometría hiperbólica y eliminar la idea de que visualmente el centro del círculo queda en el "centro", ya que esto no sucede en esta geometría pero si en la euclidiana.
	NIVEL 1	Los cuatro estudiantes analizan que la estructura de un círculo en la geometría hiperbólica es la misma que en la geometría euclidiana, sino que estas visualizaciones "distorsionadas" se dan a causas de la métrica en este espacio.

Fig. 6.21: Cuadro de características para clasificarse en el nivel 0 o 1 con respecto a los objetos básicos de la geometría hiperbólica en comparación a la geometría euclidiana.

En conclusión de este trabajo, se enfatizan tres cosas que resaltan dentro de todo el proceso, las cuales son, en primer lugar, la enseñanza de una nueva geometría a los estudiantes del programa de matemáticas la cual no esta dentro de su plan de área o su malla curricular y es la geometría hiperbólica, aprendiendo que no solo existe la geometría que en general se enseña que es la euclidiana, sino que hay más geometrías, algunas que cumplen resultados ya conocidos en la geometría

euclidiana y otras que no, eliminando esa barrera que muchos de ellos tienen sobre los objetos básicos de la geometría en cuanto a su visualización o definición de cada uno respectivamente. Además, generando interés por la investigación de nuevos aprendizajes y crecimiento en lo académico y profesional. En segundo lugar, la aplicación de la teoría de Van Hiele en el aprendizaje de una nueva geometría como lo es la geometría hiperbólica, esta teoría es muy conocida y comúnmente utilizada en la geometría euclidiana, pero aquí se muestra que no solo se puede utilizar en esta geometría, sino, aplicarla a nuevas áreas para los estudiantes, además fue muy útil al momento de enseñar nuevos conceptos o visualizaciones de estos objetos “básicos” en la geometría hiperbólica para los estudiantes, ya que cada fase permite avanzar en cada uno de estos aprendizajes y saber en que nivel se encuentra cada estudiante. Por último, la utilidad del software de geometría dinámica GeoGebra y la adaptación de este en la geometría hiperbólica, mostrando que no solo es de gran utilidad en la geometría euclidiana, sino también, en la geometría hiperbólica, extrapolando cada uno de estos objetos y herramientas al disco de Poincaré, utilizando la nueva métrica de este espacio y generando la visualización de cada uno de estos objetos, de manera que sea de gran utilidad al introducirse en una nueva geometría como lo es para los estudiantes lo cual es la geometría hiperbólica, cabe destacar que sin esta herramienta, a los estudiantes se les habría dificultado o tal vez no hubieran llegado a entender cada uno de estos objetos “básicos” en la geometría hiperbólica, y no superar el nivel 0 de aprendizaje de la teoría de Van Hiele, pero gracias a esta visualización y el programa diseñado en este modelo, los estudiantes aprendieron cuales son las características de las rectas de este espacio, y las visualizaciones que se dan de los diferentes objetos, en adición a ello se acercaron más al software, conociendo muchas de sus herramientas y explorándolo para el apoyo en sus actividades académicas.

Apendice

En este apartado están ubicados los materiales extras utilizados en el desarrollo del proceso de investigación, además se encuentran algunas fotografías que evidencian el proceso de enseñanza y aprendizaje.

7.1 Formato de autorización de tratamiento protección de datos personales

Dando cumplimiento a lo dispuesto en la ley 1581 de 2012, "por el cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales" de conformidad con lo señalado en el decreto 1377 de 2013, con la firma de este documento manifiesto que he sido informado de lo siguiente:

1. Alejandro Palacios Cortés identificado con cédula 1144107511 actuará como responsable del tratamiento de datos personales de los cuales soy titular y que, conjunta o separadamente podrá recolectar, usar y tratar mis datos personales conforme la política de tratamiento de datos personales.
2. Que me ha sido informada la(s) finalidad(es) de la recolección de los datos personales, la cual consiste en: actividades realizadas con el fin de complementar el trabajo de grado de Alejandro Palacios Cortés, el cual se realiza entorno a la geometría hiperbólica, realizando una comparación de algunos resultados y conceptos con la geometría euclidiana, siguiendo la teoría de Van Hiele.
3. Es de carácter facultativo o voluntario responder preguntas que versen sobre datos sensibles o sobre menores de edad.
4. Mis derechos como titular de los datos son los previstos en la constitución y la ley, especialmente el derecho a conocer, actualizar, rectificar y suprimir mi información personal, así como el derecho a revocar el consentimiento otorgado para el tratamiento de datos personales.

5. Mediante el correo alejandro.palacios.cortes@correounivalle.edu.co podré radicar cualquier tipo de requerimiento relacionado con el tratamiento de mis datos personales.
6. Alejandro Palacios Cortés garantizará la confidencialidad, libertad, seguridad, veracidad, transparencia, acceso y circulación restringida de mis datos y se reservara el derecho de modificar su política de tratamiento de datos personales en cualquier momento.
7. Teniendo en cuenta lo anterior, autorizo de manera voluntaria, previa, explícita, informada e inequívoca a Alejandro Palacios Cortés para tratar mis datos personales, fotografías y vídeos, de acuerdo con su política de tratamiento de datos personales para los fines relacionados con su objeto.
8. La información obtenida para el tratamiento de mis datos personales la he suministrado de forma voluntaria y es verídica. Se firma en la ciudad de _____, a los _____ días del mes de _____ del año _____.

Firma:

Nombre:

Identificación:

7.2 Fotografías

7.2.1 Fotografías día 1 y 2



Fig. 7.1: Orientando a los estudiantes en las primeras actividades.



Fig. 7.2: Analizando cada pregunta con respecto a lo que ellos han dicho.

7.2.2 Fotografías día 3



Fig. 7.3: Interactuando con las reglas en el modelo del disco de poincaré en físico.



Fig. 7.4: Midiendo ángulos de las rectas que representan las reglas.

7.2.3 Fotografías día 4

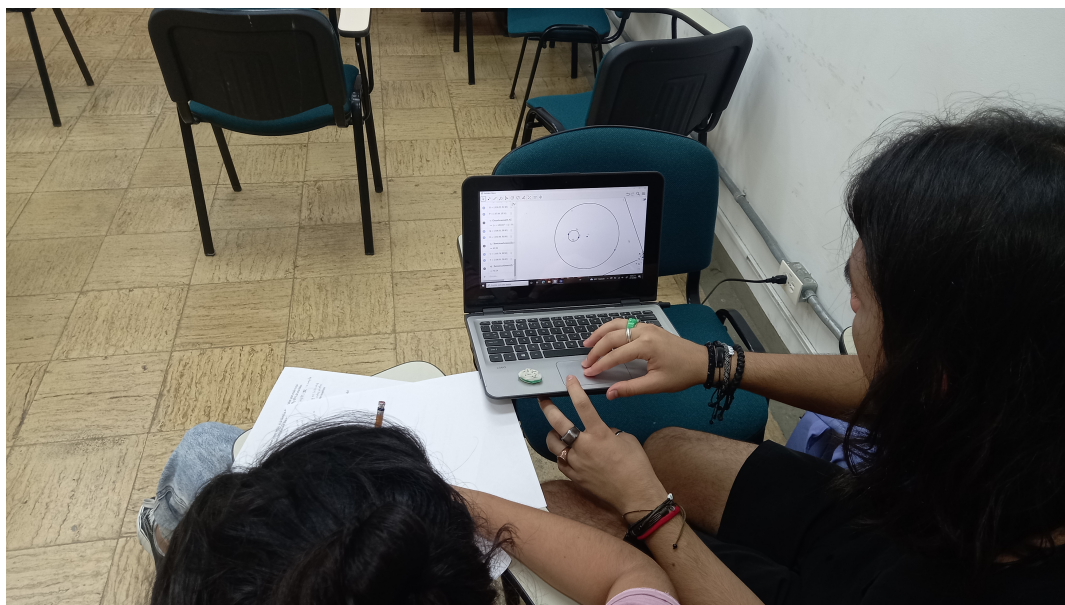


Fig. 7.5: Estudiantes creando el modelo de Van Hiele en el software GeoGebra.

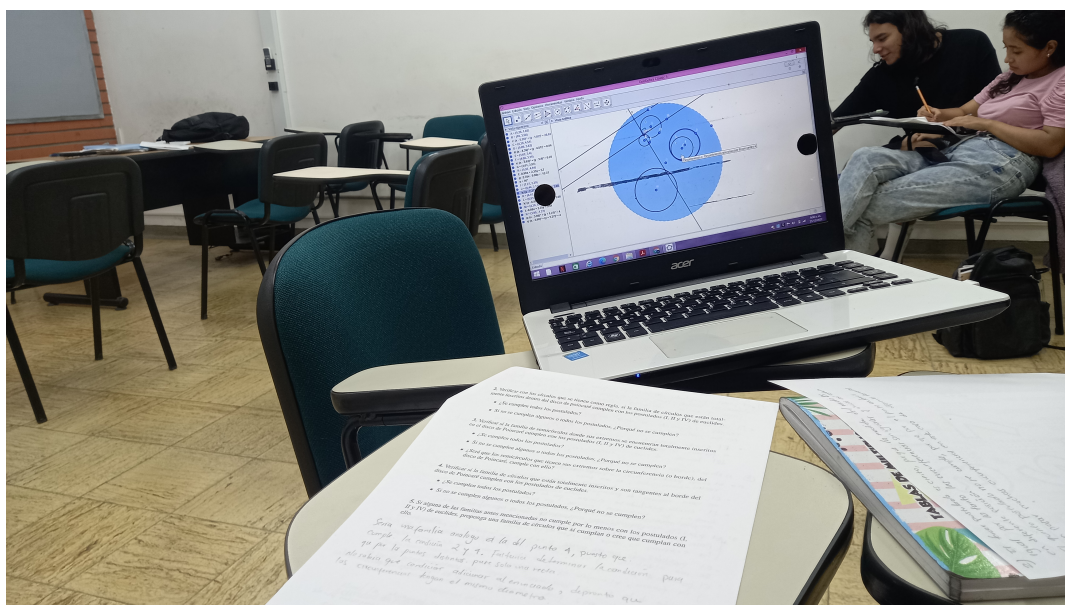


Fig. 7.6: Visualización de lo que hacen para verificar los postulados con algunas familias.

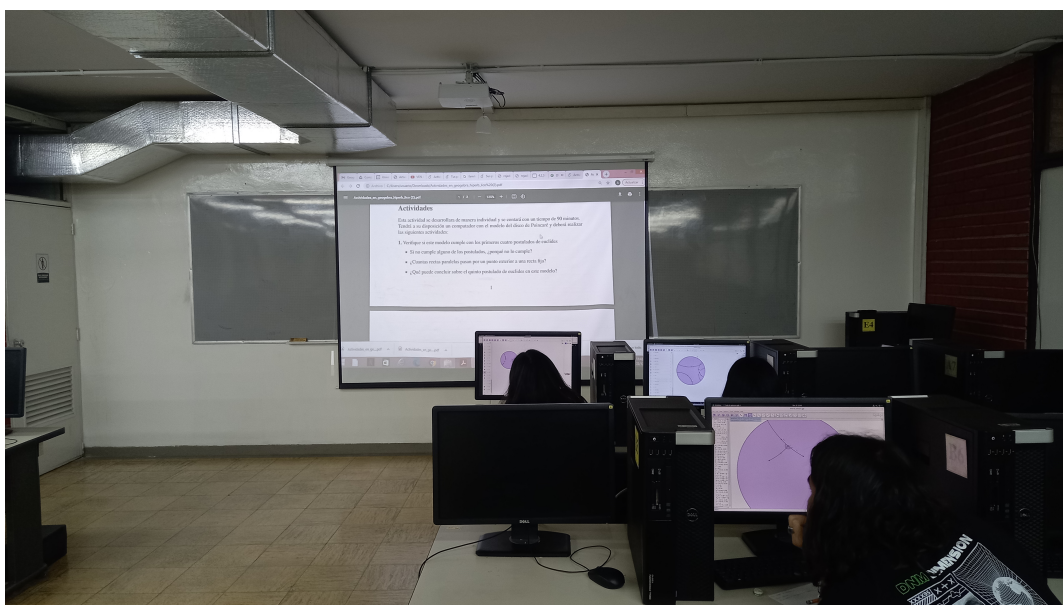


Fig. 7.7: Estudiantes con el GeoGebra hiperbólico en el computador, trabajando en el disco de Poincaré.



Fig. 7.8: Estudiantes asombrados de como se visualizan los objetos matematicos en el disco de Poincaré.

Bibliografía

- [Ack02] Amy Ackerberg-Hastings. „Analysis and synthesis in John Playfair’s Elements of Geometry“. En: *The British Journal for the History of Science* 35.1 (2002), págs. 43-72 (vid. pág. 2).
- [BS86a] William F Burger y J Michael Shaughnessy. „Characterizing the van Hiele levels of development in geometry“. En: *Journal for research in mathematics education* 17.1 (1986), págs. 31-48 (vid. pág. 5).
- [BS86b] William F Burger y J Michael Shaughnessy. „Characterizing the van Hiele levels of development in geometry“. En: *Journal for research in mathematics education* 17.1 (1986), págs. 31-48 (vid. pág. 15).
- [Car88] Manfredo Perdigão do Carmo. „Geometria Riemanniana“. En: (*No Title*) (1988) (vid. págs. 4, 9, 10).
- [CSS02] María Belén Celis, José Abel Semitiel y Natalia Fátima Sgreccia. „El Teorema de Gauss–Bonnet“. En: *Universidad Nacional de Rosario* (2002) (vid. pág. 4).
- [Día+15] Lorena Díaz Morales et al. „El Teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones“. En: (2015) (vid. pág. 10).
- [Enc+] Josué Aguirre Enciso, Rodolfo Gálvez Perez, Luis Nuñez Ramirez, Humberto Galvez Perez y Alex Cruz Huallpara. „Tres diferentes modelos del espacio hiperbólico isometrico y de igual curvatura seccional“. En: *Pesquimat* 16.1 () (vid. pág. 11).
- [Err19] Erroxe Etxabarri Alberdi. *Geodesicas en superficies*. 2019 (vid. pág. 10).
- [FD05] Fernando Fouz y Berritzegune De Donosti. „Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría“. En: *Un paseo por la geometría* 16 (2005), págs. 67-81 (vid. pág. 13).
- [Gál00] José Antonio Gálvez López. „Superficies de curvatura constante“. En: (2000) (vid. pág. 4).
- [Gau23] Gaussianos. <https://www.gaussianos.com/la-proyeccion-estereografica/>, 22 de Agosto de 2013. 2023 (vid. pág. 9).
- [Gra06] Jeremy Gray. „Gauss and non-Euclidean geometry“. En: *Non-Euclidean geometries: János Bolyai memorial volume*. Springer, 2006, págs. 61-80 (vid. pág. 3).
- [Jos14] Josue Aguirre, Rodolfo Galvez, Luis Nuñez, Humberto Galvez. *Tres diferentes modelos del espacio hiperbolico, isometricos y de igual curvatura seccional*. Revista universidad Nacional Mayor de San Marcos. 2014 (vid. págs. 4, 12).

- [Mar12] José Erinaldo Martins. „Modelos para geometría hiperbólica.“ En: (2012) (vid. pág. 2).
- [Sim+74] Robert Simson et al. *Los seis primeros libros, y el undecimo, y duodecimo de los elementos de Euclides*. Por D. Joachin Ibarra, 1774 (vid. pág. 1).
- [Smo78] AS Smogorzhevski. „Acerca de la Geometría de Lobachevski: Editorial MIR“. En: *Moscú, traducción del ruso de Virgilio Llanos Mas, preparado por Patricio Barros* (1978) (vid. pág. 4).
- [VA13a] Gilberto Vargas Vargas y Ronny Gamboa Araya. „El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría“. En: *Uniciencia* 27.1 (2013), págs. 74-94 (vid. pág. 5).
- [VA13b] Gilberto Vargas Vargas y Ronny Gamboa Araya. „El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría“. En: *Uniciencia* 27.1 (2013), págs. 74-94 (vid. pág. 13).

Índice de figuras

1.1	Triángulo en la geometría hiperbólica con sus ángulos internos	3
2.1	Función inversa de la proyección estereográfica de la esfera.[Gau23]	9
2.2	Isometría local entre el plano y el cilindro.	10
2.3	Proyección estereográfica $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{D}$ y el modelo de la bola de Poincaré. [Jos14]	12
3.1	Curva generada por la intersección de la hoja superior del hiperboloide y un plano que pasa por el origen.	18
3.2	Recta hiperbólica que pasa por dos puntos.	19
3.3	Semirrecta hiperbólica por dos puntos.	20
3.4	Punto medio entre dos puntos.	21
3.5	Segmento hiperbólico entre dos puntos.	22
3.6	Recta perpendicular a otra recta dada y que pase por un punto exterior a esta.	23
3.7	Circunferencia Hiperbólica dados su centro y un punto por donde pasa.	24
3.8	Distancia hiperbólica entre dos puntos dados.	25
3.9	Circunferencia hiperbólica dados su centro y radio.	26
3.10	Ángulo hiperbólico generado por tres puntos.	27
4.1	Tabla de actividad de iniciación	31
4.2	Triángulo a partir de puntos	32
4.3	9 puntos	32
4.4	Reconocimiento de triángulos	33
4.5	Puntos en segmentos	34
4.6	Reconocimiento de rectas	35
4.7	Recorte de triángulos	36
4.8	Dibujo de rectas	36
4.9	Bolas de Poincaré con reglas del modelo.	38
4.10	Unir puntos con reglas del modelo del disco	39
5.1	Tabla de codificación de las actividades.	44
5.2	Criterios de clasificación Nivel 0 día 1 y 2.	45
5.3	Criterios de clasificación Nivel 1 día 1 y 2.	47
5.4	Criterios de clasificación Nivel 2 día 1 y 2.	49

5.5	Criterios de clasificación Nivel 3 día 1 y 2.	50
5.6	Criterios de clasificación Nivel 4 día 1 y 2.	51
5.7	Criterios de clasificación Nivel 0 día 3.	52
5.8	Criterios de clasificación Nivel 1 día 3.	54
5.9	Criterios de clasificación Nivel 2 día 3.	55
5.10	Criterios de clasificación Nivel 0 día 4.	56
5.11	Criterios de clasificación Nivel 1 día 4.	58
5.12	Materiales de cada actividad	58
6.1	Repuesta de estudiante de la actividad D1-ln1.	66
6.2	Respuesta de estudiante de la actividad D1-ln2	67
6.3	Respuesta de estudiante a la actividad D1-ln3	67
6.4	Respuesta de estudiante a la actividad D1-ln4	68
6.5	Respuesta de estudiante a la actividad D1-Re1	69
6.6	Respuesta de estudiante a la actividad D1-Re2	70
6.7	Respuesta de estudiante a la actividad D1-Re3	71
6.8	Respuesta de estudiante a la actividad D2-De1	72
6.9	Respuesta de estudiante a la actividad D2-De2	72
6.10	Respuesta de estudiante a la actividad D2-Pe1	73
6.11	Respuesta de estudiante a la actividad D2-Pe2	73
6.12	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH1	75
6.13	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH2	75
6.14	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH3	76
6.15	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH4	76
6.16	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH5	77
6.17	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH2 con la ayuda de GeoGebra	79
6.18	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH3 con la ayuda de GeoGebra	80
6.19	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH4 con la ayuda de GeoGebra	80
6.20	Respuesta de estudiante a la actividad D3-PH5 con la ayuda de GeoGebra	81
6.21	Cuadro de características para clasificarse en el nivel 0 o 1 con respecto a los objetos básicos de la geometría hiperbólica en comparación a la geometría euclidiana.	85
7.1	Orientando a los estudiantes en las primeras actividades.	89
7.2	Analizando cada pregunta con respecto a lo que ellos han dicho.	89
7.3	Interactuando con las reglas en el modelo del disco de Poincaré en físico.	90
7.4	Midiendo ángulos de las rectas que representan las reglas.	90
7.5	Estudiantes creando el modelo de Van Hiele en el software GeoGebra.	91
7.6	Visualización de lo que hacen para verificar los postulados con algunas familias.	91
7.7	Estudiantes con el GeoGebra hiperbólico en el computador, trabajando en el disco de Poincaré.	92

7.8	Estudiantes asombrados de como se visualizan los objetos matematicos en el disco de Poincaré.	92
-----	--	----