

$2\text{sen}(35,42^\circ) = 1,1586$. El valor del área es $A = 1.5706$ valor muy aproximado a $\frac{\pi}{2}$

Referencias

- [1] J. B. Thomas. *Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Addison - Wesley Iberoamericana.
- [2] E. Kreysig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Editorial Trillas

Solución al Problema 7-99(Vol. VII, Nº 2 (1999))

(Propuesto por un estudiante de la Universidad Nacional, Bogotá, y comunicado por el profesor Yu Takeuchi)

Un estudiante preguntó a varios profesores de cálculo la integral impropia $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ que al parecer surgió al resolver un problema de astronomía. Nadie logró calcular la integral. El profesor Edgar Rincón, aficionado a la computación, introdujo la integral en su computador dotado del programa MATHEMATICA, y la máquina, al cabo de 50 segundos, dió el resultado:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \quad (1)$$

Todos estaban esperando que el computador diera un valor numérico aproximado de la integral. Sorprendidos por el resultado comenzaron a discutir si $\frac{\pi^4}{15}$ era un valor aproximado o no, y cómo se podría demostrar la igualdad (1) en caso de que ésta fuera una fórmula matemáticamente exacta. Un profesor del curso de variable compleja sugirió que posiblemente no sería tan difícil demostrar la fórmula (1) aplicando el teorema de los residuos. Me enteré de estas conversaciones de los profesores de cálculo y me asusté de la capacidad del computador de hoy, aparentemente muy superior a la habilidad humana. En seguida traté de demostrar la igualdad (1) como sugirió mi colega de variable compleja, pero no lo logré. Sin embargo, al observar detalladamente la integral propuesta noté que se podía evaluarla por métodos comunes y corrientes con ciertos conocimientos del análisis real. (Ver [1]).

Problema: Demostrar la fórmula (1).

Solución con algunas digresiones y reflexiones acerca del computador y la enseñanza de las matemáticas en el año 2000 y en los años venideros por el profesor Yu Takeuchi.

- Antes de trabajar en un problema complicado siempre es conveniente investigar otro más sencillo pero parecido al original. En nuestro caso primero intentaremos a evaluar la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx. \quad (2)$$

Haciendo un cambio de variables, el método de integración más común, con

$$e^x = t \quad (dx = \frac{1}{t} dt),$$

la integral dada en (2) se transforma en

$$\int_1^{\infty} \frac{\log t}{t \cdot (t - 1)} dt.$$

Usando la identidad

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t^2(1-\frac{1}{t})} = \frac{1}{t^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \quad (\text{para } t > 1),$$

se tiene (Nota 1):

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_1^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log t}{t^{k+2}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{\log t}{t^{k+2}} dt. \quad (3)$$

Una integración por partes da

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\log t}{t^{k+2}} dt &= -\frac{\log t}{(k+1) \cdot t^{k+1}} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{(k+1) \cdot t^{k+2}} dt \\ &= 0 - \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{1}{t^{k+1}} \Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto de (3) se obtiene el valor de la integral (2) propuesta (Nota 2):

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (4)$$

Nota 1. Para la suma parcial de $k = 1$ hasta $k = n$ de la serie que aparece dentro de la integral en (3) se tiene

$$\frac{\log t}{t^2} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{t}\right)^k = \frac{\log t}{t^3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{t}} \leq \frac{\log t}{t^2(t-1)} \leq \frac{1}{t^2} \quad (\text{parat} \geq 1),$$

ya que $\log t = \log(1 + (t-1)) \leq t-1$ parat ≥ 1 .

Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1 < +\infty$, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue (ver [1], Teorema 10-27, pp.330, 331) la serie y la integral son *intercambiables*.

Nota 2. En [1] (Capítulo 8, página 234) o en [2] (Capítulo XIII, página 256), la *función zeta de Riemann*, $\zeta(x)$ está definida por la serie

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \quad (x > 1).$$

En [1] (Capítulo 11 (Series de Fourier), Ejercicios 11.9, 11.6) aparecen algunos valores de $\zeta(x)$ cuando x es un número *natural par* como una aplicación de la igualdad de Parseval:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

- Utilizando el mismo método desarrollado anteriormente se puede calcular la siguiente integral impropia más general que la que se había propuesto en (1):

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx \quad (p \text{ es un número natural, } p \geq 1). \quad (5)$$

Haciendo el cambio de variables $e^x = t$ ($dx = \frac{1}{t} dt$) la integral (5) se transforma en

$$I = \int_1^{\infty} \frac{(\log t)^p}{t(t-1)} dt.$$

En forma semejante a (3), se obtiene (Nota 3)

$$I = \int_1^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(\log t)^p}{t^{k+2}} dt = \sum_{k=0}^\infty \int_1^\infty \frac{(\log t)^p}{t^{k+2}} dt. \quad (6)$$

Por otra parte, aplicando la integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{(\log t)^n}{t^{k+2}} dt &= -\frac{1}{k+1} \cdot \frac{(\log t)^n}{t^{k+1}} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{n}{k+1} \cdot \frac{(\log t)^{n-1}}{t^{k+1}} dt \\ &= \frac{n}{k+1} \cdot \int_1^\infty \frac{(\log t)^{n-1}}{t^{k+2}} dt. \end{aligned}$$

Tomando $n = p, p-1, \dots, 1$ y multiplicando miembro a miembro las p igualdades obtenidas se obtiene

$$\int_1^\infty \frac{(\log t)^p}{t^{k+2}} dt = \frac{p!}{(k+1)^p} \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t^{k+2}} dt = \frac{p!}{(k+1)^{p+1}} \quad (7)$$

Por lo tanto, de (6) se obtiene el valor de la integral (5) como

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{e^x - 1} dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{p!}{(k+1)^{p+1}} = p! \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{p+1}} = p! \cdot \zeta(p+1). \quad (8)$$

En particular, tomando $p = 3$ se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 3! \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = 3! \cdot \zeta(4) = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15},$$

Comprobando así la formula (1) obtenida por el computador.

Nota 3. Para garantizar el intercambio de la serie y la integral basta observar la desigualdad

$$\int_1^\infty \frac{(\log t)^p}{t^2(t-1)} dt < \infty \quad \text{para } p > 0.$$

- Sabemos muy bien que el concepto de *factorial* se puede generalizar mediante la *función gamma* Γ definida por (ver [2])

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p \cdot e^{-t} dt \quad (= p! \text{ cuando } p \text{ es un número natural}).$$

Entonces la formula (8) se puede expresar como

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx = \Gamma(p+1) \cdot \zeta(p+1). \quad (9)$$

Ahora, surge de manera natural la pregunta:

¿Es válida la fórmula (9) para cualquier *número real* p mayor que cero?

La respuesta es afirmativa. En realidad basta demostrar la igualdad (7) en términos de la función *gamma*, para esto haciendo el cambio de variables $\log t = \frac{x}{k+1}$, $dt = \frac{t}{k+1} \cdot dx$ en la integral dada en (7) se obtiene

$$\int_1^{\infty} \frac{(\log t)^p}{t^{k+2}} dt = \frac{1}{(k+1)^{p+1}} \cdot \int_0^{\infty} x^p \cdot e^{-x} dx = \Gamma(p+1) \cdot \frac{1}{(k+1)^{p+1}}.$$

Por ejemplo, si $p = 1.5$ se obtiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1.5}}{e^x - 1} dx = \Gamma(2.5) \cdot \zeta(2.5) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right).$$

- Me dió gran pánico al saber que un computador podía calcular las integrales complicadas en forma matemáticamente exacta como el caso de (1). Pero ahora tuve la oportunidad de poner a prueba el alcance de la inteligencia de la máquina. Ordené al computador del profesor Edgar Rincón evaluar la integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{1.5}}{e^x - 1} dx$, y la pobre máquina trabajó durante 200 segundos y se rindió. Me indicó que no se podía calcular. Bien contento, conté lo ocurrido al profesor Mario Zuluaga, mi colega afiebrado a la computación. El escribió la integral en la pantalla de su computador dotado de SCIENTIFIC WORK PLACE y le ordenó evaluarla por el programa MAPLE, y en la pantalla apareció instantáneamente la respuesta $\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$. Humillado completamente, quería saber si la máquina podía obtener la fórmula general (9) incluyendo p como un parámetro suelto. El profesor Zuluaga escribió en la pantalla la integral $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx$ y ordenó evaluarla. Me dió otro golpe fuerte. En la pantalla apareció un interrogante: ¿Cuál es el signo de p ?

La integral en cuestión converge cuando p es positivo, y diverge cuando p es negativo o cero. Mi gran omisión fue no indicar el signo de p . Esta vez, el profesor Zuluaga escribió en la pantalla la integral con el parámetro $|p|$ (el valor absoluto de p) en lugar de p con el fin de evitar una confusión para la máquina y ordenó a evaluarla, y la máquina se quedó calladita, no pudo dar el resultado. El día

siguiente, el profesor Zuluaga comprobó que su computador dió el resultado correcto de la integral $\int_0^\infty \frac{x^p}{e^x - 1} dx$ cuando reemplazaba p por un número racional (por ejemplo, $p = 1.5$, $p = 2.5$, $p = \frac{2}{3}$, etc.), pero la máquina no pudo dar resultado cuando reemplazaba p por un número irracional (por ejemplo, $p = \sqrt{2}$, $p = \pi$, etc.). Sentí un gran alivio al conocer que el computador de hoy aún no es todopoderoso, y todavía existe un pequeñísimo espacio dejado para la habilidad humana para resolver los problemas de la integración. Sin embargo, con el *programa mejorado* de MAPLE o de MATHEMATICA en el futuro, tal vez antes de un año, muy seguramente la máquina podría ofrecer el resultado impecable del problema planteado aquí (Nota 4):

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{e^x - 1} dx = \begin{cases} \text{diverge si} & p \leq 0, \\ \Gamma(p+1) \cdot \zeta(p+1) \text{ si} & p > 0. \end{cases}$$

Nota 4. En [2] aparece una fórmula más general que la tratada en la presente nota.

- Yo quería probar la capacidad intelectual del computador acerca de otros tipos del problema del cálculo. Escribimos en la pantalla del profesor Zuluaga las siguientes series y ordenamos a evaluar la suma total, y su resultado fue lo siguiente.

1. $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (la máquina respondió inmediatamente.)

Ejemplo más elemental de la serie telescópica:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1,$$

así la respuesta es también inmediata para los matemáticos.

2. $\sum_2^\infty \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$ (la máquina respondió inmediatamente).

Este es un caso de la serie telescópica con un poco de la maña:

$$\begin{aligned} \sum_2^\infty \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_2^\infty \left\{ \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\infty} \right\} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

así la respuesta también es inmediata para las personas con experiencia.

3. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (la máquina respondió inmediatamente)

Serie armónica conocida para todo el mundo, la respuesta debe ser inmediata para cualquier persona.

4. $\sum_1^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right)$ (la máquina no pudo dar resultado.)

Recientemente, un profesor me preguntó esta serie que es un ejemplo típico de la serie alternada divergente. La serie es la suma de dos series: $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ la primera converge condicionalmente y la segunda diverge a ∞ , por lo tanto la serie diverge a ∞ . No sé por qué el programa de MAPLE no incluye el pequeño razonamiento acostumbrado al estudio de las series. Sin embargo es muy probable que en el futuro cercano la máquina pueda ofrecer instantáneamente la respuesta correcta ∞ .

De los experimentos anteriores tenemos que reconocer que si los ingenieros, astrónomos, físicos, etc. encuentran algunos problemas de matemáticas en el camino de desarrollar sus trabajos científicos o técnicos no deben perder el tiempo consultándolos a los matemáticos sino que deben hacer las preguntas inmediatamente al computador. La máquina les dará instantáneamente la respuestas. Se habla de la importancia de la matemática por su utilidad en otras ciencias o tecnologías, pero hoy en día este argumento ya perdió su piso. La educación matemática para el año 2000 y los años venideros debe ser muy distinta de la educación de hoy. Tenemos que reflexionar muchas cosas, entre otros, en puntos como los siguientes:

- (i) La enseñanza del cálculo debe ser modificada inmediatamente. Es muy urgente pensar en *qué hay que enseñar en el cálculo y cómo*.
- (ii) Tenemos que determinar *qué deben saber los profesores* de matemáticas a nivel universitario. Es necesario capacitar a todos los profesores de matemáticas de acuerdo al enfoque establecido para la enseñanza universitaria.
- (iii) Es conveniente revisar los planes de estudios para la formación de los futuros matemáticos y docentes en matemáticas.

Sin embargo, creo que la matemática seguirá siendo muy importante como parte de la *cultura básica* de la humanidad y como instrumento de *formación intelectual* de todos los hombres. Por esta razón la educación matemática a nivel primario y secundario no será modificada tan drámaticamente.

Referencias

- [1] Apostol T. *Análisis Matemático*. 2ª Edición, 1976. Editorial Reverté, México.
- [2] Whittaker, E. T, Watson, G. N, *Modern Analysis*. Fourth Edition, 1935. Cambridge University Press.

Otra solución del Problema 7-99 por Augusto Silva

Empezamos por recordar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Este es un resultado bien conocido obtenido por métodos de la teoría de series de Fourier. Se puede consultar en libros de análisis matemático como el de T. M. Apostol.

Procedemos ahora al cálculo de la integral

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x(1 - e^{-x})} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-x}} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}} \right) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^{(n+1)x}} \right) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{e^{nx}} \right) dx \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{nx}} dx
 \end{aligned}$$

El intercambio entre serie e integral que permite obtener la última igualdad se justifica mediante un teorema tal como el Teorema de Lebesgue de la Convergencia Monótona.

Haciendo el cambio de variable $u = nx$ en ésta última integral obtenemos