Vol. XVII, № 2, Diciembre (2009)
Educación e Historia: 101–121

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Los axiomas de la cantidad de Hölder y la fundamentación del continuo lineal

Luis Cornelio Recalde
Universidad del Valle

Recibido Ene. 19, 2009 Aceptado Sept. 8, 2009

Abstract

In this article we consider some consequences of German mathematician Otto Hölder's approach to the foundations of mathematics. At a time when mathematicians were looking for a foundation of mathematics in set theory, Hölder proposed a theory of quantities. According to Hölder the axioms for the continuum proposed by Cantor and Dedekind to stablish a connection between the geometric and the arithmetic continuus are based on a notion of quantity. Nowadays set theory is considered to be an appropiate ground to set up a foundation for mathematics, while Hölder's theory of quantities has become a mathematical tool for some measurements in psychology.

Keywords: numbers real, continuous aristotelian, continuous geometric, continuous arithmetic, axioms of quantity.

MSC(2000): 03A05, 01A60

Resumen

En este artículo se analizan algunas consecuencias derivadas de los planteamientos teóricos del matemático alemán Otto Hölder respecto a las bases conceptuales de las matemáticas. En un periodo en el que se buscaba fundamentar la matemática a través de la teoría de conjuntos, Hölder desarrolla una teoría de las cantidades. Según Hölder los axiomas del continuo, establecidos por Cantor y Dedekind, para conectar el continuo geométrico y el aritmético, se soportaban sobre la noción de cantidad; en este sentido establece un circuito entre el continuo geométrico, el continuo aritmético y los axiomas de la cantidad. Aunque en la actualidad la teoría de conjuntos se considera el vehículo idóneo de fundamentación de las matemáticas, algunas aplicaciones en mediciones en psicología ha encontrado en la teoría de cantidades de Hölder una herramienta matemática importante.

Palabras y frases claves: números reales, continuo aristotélico, continuo geométrico, continuo aritmético, axiomas de la cantidad.

1 Introducción

Históricamente, uno de los aspectos más polémicos tiene que ver con la necesidad de establecer una definición del continuo matemático sin involucrar los argumentos metafísicos aristotélicos o explicaciones intuitivas que caracterizan lo continuo como aquello que "carece de huecos". Las construcciones de $\mathbb{R}$ por parte de Cantor y Dedekind permiten responder al problema de la caracterización de un conjunto numérico desde la matemática misma, bajo la presunción de que el conjunto de los números reales constituye la versión aritmética del continuo geométrico. Para Cantor y Dedekind, los racionales conforman el punto de partida en la construcción de la totalidad del conjunto de los números reales.

Teniendo en cuenta que los racionales se podían definir rigurosamente a partir de los naturales, la dificultad provenía de los irracionales. El método de Cantor y Dedekind fue generalizar el proceso de aproximación de algunos irracionales típicos a partir de los racionales. Después de la construcción de los reales, a partir de sucesiones fundamentales en Cantor y cortaduras en Dedekind, los dos se vieron en la necesidad de establecer un puente de contacto entre lo aritmético y lo geométrico. Para ello tuvieron que romper la tradición aristotélica del continuo. Cantor y Dedekind parten del hecho que la recta, prototipo de continuo, no es más que un agregado de infinitos puntos distribuidos de una forma especial, los cuales no se agotan cuando se representan los elementos del dominio $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Una vez definidos los números reales, Cantor y Dedekind deben mostrar que sus construcciones corresponden a la versión aritmética del continuo geométrico. Para ello se ven en la necesidad de recurrir a dos principios básicos.

Principio de continuidad de Cantor: A cada número real le corresponde un punto en la línea recta, cuya coordenada es igual al número.

Principio de continuidad de Dedekind: Si todos los puntos de una línea recta son de dos clases, de manera que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y únicamente uno que ocasiona la partición de todos los puntos en dos clases, separando la recta en dos porciones.

En 1901, el matemático alemán Otto Hölder critica el uso de estos dos principios al observar que la relación entre lo geométrico y lo aritmético corresponde a la conexión entre los procesos de medir y contar. Para Hölder el problema fundamental de los planteamientos de Cantor y Dedekind es el desconocimiento de una noción que empalma las actividades de medir y contar, como lo es la noción de cantidad. Hölder plantea que el telón de fondo, tanto de lo aritmético como de lo geométrico, lo constituye la teoría de las cantidades. En este sentido, enlaza las construcciones de $\mathbb{R}$ y el continuo geométrico a través de una axiomática de las cantidades.

El concepto de cantidad atraviesa toda la historia de las matemáticas sin una definición formal. Desde la antigüedad griega se planteó la discusión sobre la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas a partir de las cuales Newton y Leibniz resolvieron el problema de la cuadratura del círculo a finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII. Precisamente, el uso de cantidades infinitamente pequeñas da lugar a las críticas de falta de rigor en matemáticas por parte del obispo Barkeley. La búsqueda de fundar el análisis sobre unas bases firmes, en general, desemboca en un enfoque conjuntista abstracto de la matemática hacia finales del siglo XX.

La teoría de conjuntos se revela, entonces como la herramienta idónea para resolver algunos problemas milenarios de las matemáticas. No es difícil demostrar, por ejemplo, que hay un tratamiento conjuntista en las construcciones de $\mathbb{R}$, desarrolladas por Cantor y Dedekind, como bien lo ha documentado Ferreirós en [13]. A partir de la teoría de conjuntos Lebesgue desarrolla una teoría de la medida abstracta que le permite definir la integral en su forma más general. Es en este auge conjuntista que Hölder desarrolla su axiomática de las cantidades.

Aunque la tradición conjuntista ha terminado por imponerse, en este documento mostraremos la pertinencia del enfoque de Hölder, el cual armoniza con el sentido primigenio de las matemáticas como ciencia de las cantidades.

2 Las cantidades en el contexto histórico de las matemáticas

El desarrollo histórico de las matemáticas se puede entender a partir de la diferentes facetas de la noción de *cantidad*: la cantidad de magnitudes objetivadas en la geometría, la forma abstracta de la cantidad inscrita en el álgebra y la forma de la cantidad variable propia del análisis.

2.1 La noción de cantidad en Aristóteles

En su *Metafísica* Aristóteles desarrolla la idea de que la matemática es la ciencia de la cantidad, pues a diferencia de la física y la metafísica, el objeto de la matemática es estudiar cuantitativamente todo ser inmóvil y divisible. [1]

En el capítulo decimotercero del libro V de la *Metafísica* Aristóteles define cantidad:

> Se llama cantidad a lo que es divisible en elementos constitutivos, de los cuales cada uno o por lo menos uno, es naturalmente apto para poseer una existencia propia. La pluralidad, por tanto, es una cantidad si se puede contar, y una magnitud lo es si puede ser medida. Se llama pluralidad al conjunto de seres que es divisible en potencia en seres discontinuos, y magnitud a lo que es divisible en partes continuas. Una magnitud continua en un solo sentido se llama longitud; la que lo es en dos sentidos, latitud, y la que lo es en tres profundidad. Una multitud finita es el número, una longitud finita es la línea, una latitud determinada es la superficie, una profundidad limitada es un cuerpo.
>
> ([1], p. 969).

Aristóteles considera dos clases de cantidades: los *números* y las *magnitudes*. Las magnitudes son continuas, mientras los números son discretos. Las magnitudes corresponden a la geometría y los números a la aritmética. Los números son infinitos por adición y las magnitudes son infinitas por divisibilidad; pero se trata

[1] En el libro V de la *Metafísica* Aristóteles establece tres tipos de ciencias especulativas: la *física*, la *matemática* y la *teología*. La teología tiene por objeto el ser en cuanto ser. La física estudia los seres atendiendo a su movimiento, sin importar su esencia ni sus accidentes. La matemática da cuenta de los aspectos cuantitativos del ser sin atender a su movimiento.

de un *infinito potencial*, de ninguna manera de un *infinito actual*. Para Aristóteles no tiene sentido hablar de cantidades actualmente infinitas.[2]

Para Aristóteles las cantidades se dinamizan en el proceso de medir.

> La medida es, en efecto, aquello por medio de lo cual se conoce la cantidad. Y la cantidad, en tanto que cantidad, se conoce, o bien como unidad o bien como número. Y todo número, a su vez, es conocido por medio de la unidad. De donde se sigue, finalmente, que la unidad es el principio del número en tanto que número. ([1], p. 1021).

De esta forma, para Aristóteles, la actividad de medir consistiría en el proceso mediante el cual se detemina la cantidad.

2.2 La noción de cantidad en Euclides

El programa euclidiano de las cantidades se inscribe en el marco teórico de la filosofía aristotélica. Euclides establece dos teorías paralelas de la cantidad en los *Elementos*: en el libro V desarrolla la teoría de magnitudes y en libro VII la teoría de números.

Para desarrollar su teoría de cantidades, Euclides establece unos instrumentos teóricos denominados *nociones comunes*, la cuales corresponden a propiedades que se cumplen al operar las magnitudes o los números. Según Garcia Bacca las *nociones comunes* se pueden traducir por "dignidades", en el sentido de que se trata de proposiciones tan fundamentales que dominan sobre varias o todas las ciencias y son dignas, por tanto, de denominarse regentes, príncipes, "dignidades en la ciudad de la ciencia".[3]

No hay un consenso en cuanto al número de *nociones comunes* que efectivamente utilizó Euclides. En la versión de Francisco Vera, se presentan las siguientes nueve nociones comunes:[4]

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. (Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los totales son desiguales).
5. (Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí).
6. (Las cosas mitades de una misma cosa son iguales entre sí).

[2] Para Aristóteles, una cantidad es infinita si es de tal manera que siempre podemos tomar una parte afuera de lo que ya ha sido tomado; de ninguna forma se puede tomar una cantidad infinita en un sólo acto

[3] [14], p. LXXXII.

[4] [12], p. 705

7. Las cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí.

8. El todo es mayor que la parte.

9. (Dos rectas no comprenden espacio).

Las *nociones comunes* aparecen en la filosofía aristotélica como axiomas, que deben cumplir las cantidades; Por ejemplo en el capítulo XIII de la *Metafísica* hace alusión explícita a la noción común 3.

> El axioma de que si a cantidades iguales se les quitan cantidades iguales serán iguales los restos es un principio común a todas las cantidades. [1], p. 1037

Aunque Euclides no aclara lo que quiere expresar con el uso del vocablo "cosa", evidentemente es algo que se puede operar y comparar. Desde la perspectiva aristotélica corresponde a cantidades; justamente el mismo sentido que le dará Hölder en sus planteamientos de 1910.

Para Hölder, las cantidades son entidades que se pueden operar y sobre las cuales se define una relación de orden. En este sentido Hölder suscribe las nociones comunes 1, 2, 3, 4 y 8 las cuales establecen propiedades de la operación y de la relación de orden. Las nociones comunes 5 y 6 se pueden deducir de las anteriores, mientras las nociones 7 y 9 corresponden al ámbito de la geometría.

Euclides desarrolla en el libro V de los *Elementos* una teoría de magnitudes; es decir, de segmentos, figuras planas, figuras volumétricas y ángulos. La suma sólo se define de manera explícita para los segmentos. Una primera consideración importantes, es que la suma permite incorporar la noción de multiplicidad. Así, dada una una magnitud A podemos considerar múltiplos de A sumando A consigo misma. Tal como lo interpreta Hölder, tomaremos la expresión nA como:

$$\underbrace{A + A + \ldots + A}_{n \text{ veces}}.$$

En su forma primigenia, el proceso de medir dos magnitudes consiste en compararlas cuantitativamente; esto es: una magnitud A mide a otra magnitud B, si $A = nB$, para algún número n.

Para Euclides es claro que no es posible definir una teoría en la cual todas las magnitudes sean conmensurables, pues desde los antiguos pitagóricos se sabe que existen magnitudes inconmensurables. La conmensurabilidad de dos magnitudes supone la existencia de una medida común, tal como lo precisará el mismo Euclides en la definición X.1 de los *Elementos*.

Aunque en el libro V, Euclides no específica estos aspectos, es claro que los adopta como elementos referenciales para desarrollar su teoría de magnitudes, la cual van a ser reinterpretada por Hölder en su teoría de cantidades.

Definición 2.1 (V.1). *Se dice que una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.*

Definición 2.2 (V.2). *Se dice que una magnitud es múltiplo de otra menor cuando es medida por ella.*

En términos modernos, la Definición V.1 establece que A es una parte de B, si existe un número natural n tal que $B = nA$, lo cual significa que n copias de A constituyen B; en este caso, la Definición V.2 establece que B es múltiplo de A.

Definición 2.3 (V.3). *Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad.*

La palabra "razón" proviene de la griega $\lambda o\gamma o\varsigma$, que literalmente traduce "logos". El concepto de "razón" corresponde a la respuesta griega al problema de la inconmensurabilidad. Dada la imposibilidad de dar salida al problema de la medida de magnitudes a través de la igualdad entre múltiplos, como en el caso de la diagonal y el lado de un cuadrado, los griegos sintetizaron el proceso de comparación de dos magnitudes, respecto a la cantidad, en la palabra "razón".

La "razón" se presenta, entonces, como un proceso fundamental de la inteligencia y constituye una sutil metaforización de la comparación cuantitativa de dos cosas. Proceso que antropólogos e historiadores no han dudado en ubicar en las bases del entendimiento conceptual. La simbolización $a : b$ es un paso adelante, que prefigura nuestro cociente $a \div b$ o $\dfrac{a}{b}$, el cual posee un status ontológico diferente a las "razones". Más concretamente, la "razón" es un proceso de comparación entre magnitudes (segmentos, por ejemplo); pero no se constituye en sí misma como algo acabado. En contraste con esto, a pesar que consideramos la división como un proceso, sabemos que el cociente $\dfrac{a}{b}$ es a su vez un número. Hölder representa la razón entre las magnitude A y B como el par ordenado (A, B), aludiendo al carácter nominal de la definición.

Definición 2.4 (V.4). *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.*

Esta definición exige que todos las magnitudes cumplan la propiedad arquimediana. De la definición se puede colegir, que en la teoría de magnitudes euclidiana no tienen cabida las magnitudes infinitamente pequeñas ni las infinitamente grandes, ni tampoco una magnitud de cantidad cero.

Definición 2.5 (V.5). *Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.*

Es la definición esencial del libro V, porque iguala relaciones cuantitativas de una manera operativa. Varios aspectos se desprenden de esta definición. En primer lugar parece indicar la existencia de un universo de segmentos el cual se va generando por adiciones sucesivas. En este universo se ha definido una relación de orden total, lo cual significa que se cumple la tricotomía; esto es, dadas dos magnitudes E y F, se da uno sólo de los siguientes casos:

1. $E = F$
2. $E < F$
3. $E > F$

La anterior aclaración nos permite interpretar la definición V.5 de la siguiente manera: Sean 4 magnitudes A, B, C y D; se dice que A y B están en la misma razón que C y D, simbólicamente $A : B = C : D$, cuando para todo entero n y m se tienen las implicaciones siguientes, según los tres únicos casos posibles:

1. Si $nA = mB$ entonces, $nC = mD$
2. Si $nA > mB$ entonces, $nC > mD$
3. Si $nA < mB$ entonces, $nC < mD$

Si ahora interpretamos lo anterior en términos modernos, vemos que la variación de m y n en los naturales, nos produce el universo de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$, de tal forma que podemos escribir las condiciones anteriores como:

1. Si $A = \frac{m}{n}B$, entonces $C = \frac{m}{n}D$
2. Si $A > \frac{m}{n}B$, entonces $C > \frac{m}{n}D$
3. Si $A < \frac{m}{n}B$, entonces $C < \frac{m}{n}D$

Observemos que con estas condiciones, si tomamos como referencia la razón $A : B$, el universo de los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ quedará fragmentado en dos o tres clases dependiendo si A y B son conmensurables o no. Está fragmentación de $\mathbb{Q}^+$ es lo que se denomina una cortadura de $\mathbb{Q}^+$. Si A y B son conmensurables se formará la clase I de racionales que producen el numeral 1 (en realidad esta clase está formada por un solo elemento). La clase II de los racionales positivos que producen el numeral 2 y la clase III de los racionales positivos que producen el numeral 3. Si las magnitudes son inconmensurables tenemos que el conjunto de los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ quedará fragmentado sólo en las clases II y III. Observemos que existen cortaduras de que son producidas por magnitudes conmensurables y cortaduras que son producidas por magnitudes inconmensurables.

Estos aspectos fueron establecidos por Dedekind para la construcción de los números reales. Más adelante Hölder retoma estas cuestiones para conectar el continuo geométrico con el continuo aritmético a través de la noción de cortadura.

Definición 2.6 (V.6). *Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales.*

Definición nominal que involucra el término proporción, como igualdad entre razones.

En la definición V.7 Euclides define la relación de orden entre razones.

Definición 2.7 (V.7). *Si entre magnitudes igualmente multiplicadas el múltiplo de la primera supera al de la segunda, pero el de la tercera no supera al de la cuarta, se dice que la razón de la primera a la segunda es mayor que la de la tercera a la cuarta.*

Es decir, $A : B > C : D$ si para dos enteros n y m se tiene que $nA > mB$ y nC no es mayor que mD, se dice que la razón de A con B es mayor que la razón de C con D. Nótese que esta definición establece en efecto, un orden sobre las razones. Además, si se tiene en cuenta la definición 5, vemos que el orden es total, puesto que dadas dos razones $A : B$ y $C : D$, verificamos que sólo una de las siguientes opciones se satisface:

$$A : B > C : D; A : B = C : D; A : B < C : D.$$

A continuación Euclides incorpora 10 definiciones más y desarrolla su teoría de magnitudes y razones entre magnitudes.

En el libro VII de los *Elementos* Euclides establece algunas definiciones y proposiciones enunciadas para las magnitudes a los números. Euclides inicia su teoría de números precisando la noción de número:

Definición 2.8 (VII.1). *Unidad, es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno. La unidad en los Elementos juega a veces el rol del número 1.*

Los números se generan a partir de la adición de unidades.

Definición 2.9 (VII.2). *Número, es una pluralidad compuesta de unidades.*

El termino pluralidad se refiere a la operación de adicionar unidades, tal como lo planteara Aristóteles. En términos modernos, el universo numérico euclidiano se reduce a los números naturales excepto el cero y el uno. No se cuenta con los números racionales; menos aún con los irracionales. Sin embargo, más allá de estos aspectos que sólo aparecen de manera implícita en los libros V y VII de los *Elementos*, Euclides establece un puente de contacto entre número y magnitud en el libro X, en el cual formaliza las nociones de magnitudes conmensurables e inconmensurables.

Definición 2.10 (X.1). *Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas que no es posible que haya una medida común.*

En la proposición 1, establece la imposibilidad de tener un segmento unidad generador, menor que cualquier otro segmento, que posea las características del uno en los números.

En la proposición X.5 establece el primer acercamiento formal entre número y magnitud.

Proposición 2.11 (X.3)**.** *Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.*

Para la demostración, Euclides identifica los dos procesos de medir que antes había especificado por aparte para magnitudes y para números. Pero la proposición sólo permite un acercamiento entre las magnitudes conmensurables y los números. La construcción del puente de contacto general entre estos dos universos de cantidades duró más de veinticinco siglos y constituye lo que históricamente se conoce como la constitución del continuo como objeto matemático. Este proceso se va dando en la medida en que la razón entre cantidades se toma en sí misma como una cantidad.

Los primeros avances en esta dirección provienen de la antigüedad griega misma. Por ejemplo, en la definición V.4 de los *Elementos*, Euclides establece una clase de equivalencia de todas las razones iguales. En la definición V.6 incorpora una relación de orden entre razones.

A diferencia de Euclides, los matemáticos del periodo alejandrino, Arquímedes, Herón y Nicómaco emplearon algunas razones específicas como fracciones. Aunque éstas no se tomaban como números, se les daba un tratamiento de cantidades. Ese es el sentido que le da Arquímedes a la razón entre las áreas de dos círculos arbitrarios establecida por Euclides en la proposición XII.2, al demostrar en la *Medida del círculo* que

> La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro más una parte de este, la cual es menor que la séptima parte y mayor quer los diez setenta y un avos del diámetro mismo ([4], p. 96).

2.3 La noción de cantidad y el desarrollo del álgebra

En este periodo la geometría y la trigonometría empiezan a tener un tratamiento cuantitativo, la aritmética empieza a extenderse más allá de los naturales y el álgebra empieza a emerger como disciplina matemática.

El pensamiento propiamente algebraico se inicia con Diofanto, al menos en lo que concierne a la teoría de números. En su *Aritmética*, Diofanto define número como colección de unidades, pero admite soluciones racionales positivas. Aunque no establece un método general para operar con fracciones, lo hace en casos particulares, utilizando la regla de los signos, que incorpora al inicio de su obra sin dar una argumentación lógica o intuitiva.

> El producto de lo deficiente por lo deficiente es positivo, el de lo deficiente por lo positivo es positivo. [10], p. 1035

Cuando Diofanto habla de lo deficiente se refiere a lo negativo; pero él no puede permitirse el lujo de interpretar un número precedido de un menos como otro número. Para Diofanto, las raíces imaginarias o irracionales, incluso las fracciones, corresponden a cantidades, las cuales, al igual que los números, pueden operarse.

La interpretación de una razón geométrica como número tiene relación con el desarrollo del álgebra. El origen del álgebra como disciplina matemática, diferente a la geometría y la aritmética, lo podemos ubicar en la cultura árabe a partir de la introducción del concepto de ecuación. En el siglo XIX d. C. el matemático árabe Mohammed ibn Musa Al-Khowarizmi, publica su obra *Al-jabr wa'l muqãbalah*. En este libro se plantean una serie de ejercicios matemáticos en forma de ecuaciones de segundo grado, en las cuales se pueden diferenciar dos clases de conceptos primitivos insdispensables para el cálculo: los álgebraicos puros y los aritméticos. Los primeros corresponden a la incognita simple, designada por "raíz" o "cosa", y el cuadrado de la incognita que se designa como "tesoro". Los aritméticos corresponden a los números racionales positivos, en los cuales se definen la igualdad y las operaciones suma, resta producto, cociente y radicación. En la solución de las ecuaciones, Al-Khowarizmi despliega una operatividad tanto en los elementos aritméticos como en los algebraicos puros, obteniendo soluciones racionales e irracionales. En los procesos operativos la incógnita no necesariamente corresponde a un número como tal, sino a cantidades en general, ya sean relacionadas con cuestiones pecuniarias o propiedades. Esto llevó a que los árabes pudieran interpretar los resultados del libro X de los *Elementos*, -en el cual Euclides desarrollaba una clasificación de magnitudes irracionales con base en abstrusas construcciones geométricas-, de un modo operatorio efectuando cálculos aproximados de raíces utilizando expansiones decimales numéricas.

La tradición algebraica árabe empezó a difundirse en Europa, a partir del siglo XII, a través del *Libro sobre el ábaco* de Fibonnacci. En este tratado Fibonacci incorpora la representación decimal indo-arábiga que facilita cálculos y procedimientos. Los avances se fueron dando en la medida en que se configuraba un simbolismo algebraico y aritmético que permitió integrar procesos operativos. En esta dirección se desarrollaron los trabajos de los algebristas italianos Tartaglia, Bombelli y Cardano, quienes desarrollaron técnicas de resolución de ecuaciones.

En el siglo XVI, aunque se hacían cálculos con algunas cantidades no racionales, aún se dudaba si deberían ser consideradas como números. Algunos usaban las raíces inexactas de acuerdo la tradición hindú y árabe de una manera libre, y al igual que el cero, las incorporaban en la resolución de ecuaciones. No había un consenso sobre la ontología de los números ni sobre sus soportes lógicos. Ante la carencia de una fundamentación efectiva, la noción de cantidad aparece como un comodín operatorio.

2.4 La noción de cantidad a partir de Descartes

Con la *Geometría* de Descartes se establece un cambio decisivo en las consideraciones numéricas. Descartes utiliza el álgebra como vehículo para resolver problemas geométricos al transformar una curva en una ecuación. Para ello instaura una relación directa entre números y magnitudes lineales. Partiendo de un segmento unidad, establece relaciones cuantitativas que le permiten incorporar operaciones entre segmentos de tal suerte que ellos conformarían lo que actualmente se denomina un campo numérico, que toma como base para la resolución de ecuaciones. En la tercera parte de la *Geometría*, Descartes muestra que una ecuación de la forma $Pn(x) = 0$, donde $Pn(x)$ es un polinomio de grado n tiene n soluciones o raíces del polinomio. Descartes no sólo acepta las soluciones negativas, sino que les asocia una representación geométrica adecuada que prefigura la noción de segmento dirigido. Para las raíces que no eran reales incorporó el apelativo de imaginarias, las cuales, a pesar de que se podían operar, no eran más que meros intermediarios formales en los cálculos. Descartes les da el reconocimiento de cantidades. El trasfondo conceptual que desarrolla Descartes en la *Geometría* se soporta sobre la utilización de coordenadas, las cuales, a su vez, involucran la idea de magnitud variable, que al tomarse como cantidad variable va delineando la noción de función y, por ende, el desarrollo del análisis como rama de las matemáticas, con las contribuciones de Wallis, Newton, Leibniz, Euler y Cauchy, principalmente.

En la *Aritmética Universal*, Newton adopta una noción de número que ignora los prejuicios formales de la época. Aunque no desarrolla una construcción de los números irracionales establece una definición de número que se aleja de la tradición euclidiana.

> Por número enteremos, no tanto el conjunto de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud del mismo género, tomada como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquel que se mide con unidades; el número fraccionario con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad.

En su *Aritmética Universal*, Euler generaliza las reglas de resolución de problemas aritméticos, desarrollando un instrumento simbólico-literal que incluye operaciones con radicales, complejos y logaritmos.

En los preliminares del *Curso de Análisis*, Cauchy establece diferencias entre número y cantidad. Para Cauchy los números son los referentes de la medida absoluta de las magnitudes. Las cantidades corresponden a los números precedidos de signos, es decir reales positivas o negativas. En seguida define el concepto de cantidad variable, el cual le servirá de base para incorporar las nociones de función y límite.

> Una cantidad variable es aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros ([6]).

Una de las consecuencias del análisis de Cauchy es la necesidad de establecer una teoría rigurosa de los números reales como prototipo del continuo lineal. Las construcciones de los reales, por parte de Cantor y Dedekind, corresponden a esta línea de desarrollo, que busca establecer el puente de contacto entre los números y las magnitudes.

3 La teoría de las cantidades de Hölder

En este documento se han tomado como referencia los artículos [16] y [17] de Joel Michell y Catherine Ernest de la Universidad de Sydney, en los cuales aparece un estudio preliminar y luego la traducción al inglés del documento: Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Mathematische-Physicke Klasse, 53, 1-64.

3.1 Los presupuestos de Hölder

Para Hölder, una teoría matemática, verbigracia la aritmética, puede establecerse ya sea desde la perspectiva "lógico-axiomática" (tipo axiomática de Peano) o desde el enfoque de una "axiomática de las cantidades".

Hölder llama la atención en el hecho que, desde la perspectiva "lógico-axiomática", la suma se basa en la fórmula,

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1,$$

donde $m+1$ corresponde al "sucesor " de m, es decir el número siguiente. De este modo, $(n + m) + 1$ será el siguiente número a $m + n$ en la sucesión de números naturales. En general, La existencia de $n+t$ queda determinada por la aceptación de la secuencia creciente: $n + 1, n + 2, \ldots, n + t$, la cual existe porque aceptamos la existencia de la secuencia $1, 2, \ldots, t$. Para Hölder, esto indica que la fórmula $n + (m + 1) = (n + m) + 1$ correspondería más a una definición que a un axioma propiamente dicho.

Nos enfrentamos entonces al problema de presuponer que el proceso de adición puede ejecutarse de manera indefinida; esto, para Hölder corresponde a una experiencia diferente a la experiencia sensorial. Se trata de un proceso mental que produce elementos "puramente lógicos". Para Hölder esto significa que el axioma de la adición no corresponde propiamente a un axioma, sino a un procedimiento lógico. Igual pasaría con los enteros, los racionales y los reales, en general, puesto que su operatividad se desprende de la operatividad de los naturales.

En contraste con el caso anterior, un cuerpo teórico geométrico se establece de acuerdo a experiencias sensoriales es decir, con base a la manera en que operamos con magnitudes concretas como el tiempo, la masa, los segmentos de línea y el área.

A partir de estas operaciones, Hölder, logra extraer principios generales de operatividad y orden que denomina "axiomas de las magnitudes" o "axiomas de las cantidades", los cuales al regir tanto las cantidades numéricas como las geométricas, van a permitir construir un puente entre el continuo aritmético y el geométrico. Hölder utiliza como sinónimos los términos cantidad y magnitud.

3.2 Los axiomas de la cantidad de Hölder

Se supone que las letras mayúsculas representan cantidades. Sobre estas cantidades se ha definido una relación de orden ($<$) o ($>$) y la operación suma ($+$). Para Hölder, una teoría de la medida de estas cantidades se soporta en los siguientes axiomas.

Axioma 1: $\forall A, B(A = B \vee (A > B \wedge B < A) \vee (A < B \wedge B > A)$

Axioma 2: $\forall A \exists B(B < A)$

Axioma 3: Para cada par ordenado, no necesariamente diferente, de magnitudes A y B, la suma $A + B$ es bien definida.

Axioma 4: $\forall A, B(A < B \longrightarrow (A < A + B \wedge B < A + B)$

Axioma 5: $\forall A, B(A < B \longrightarrow (\exists X(A + X = B) \wedge \exists Y(Y + A = B))$

Axioma 6: $\forall A, B, C((A + B) + C = A + (B + C))$

Axioma 7: Todas las magnitudes son divididas en dos clases tales que cada magnitud pertenece a una y sólo una clase, ninguna clase es vacía y toda magnitud de la primera clase es menor que cada magnitud en la segunda clase, entonces existe una magnitud A tal que cada $B < A$ pertenece a la primera clase y cada $C > A$ pertenece a la segunda clase. La magnitud A puede pertenecer a cualquiera de las dos clases.

A partir de estos axiomas se deducen las siguientes propiedades.

P.1 Transitividad: Si $A < B$ y $B < C$, se tiene que $A < C$.

P.2 Sean $A < B$ y X tal que $B + X = A$, entonces $C + (B + X) = C + A$ y $(C + B) + X = C + A$

P.3 Densidad: Si $A < B$, existe una magnitud una magnitud mayor que A y menor que B.

P.4 Infinitas en crecimiento: Dada una magnitud A existe una magnitud mayor que ella, en particular, $A + A > A$.

P.5 La magnitud X del axioma 5 es única es decir, sí $A + X = B$ y $A + Y = B$, entonces $X = Y$.

Basado en el Axioma VI, se definen los múltiplos de una magnitud de manera recursiva. Si A es una magnitud y m, n números enteros positivos, se tendrá:

$$2A = A + A, 3A = (A + A) + A = 2A + A, \ldots, nA = (n - 1)A + A$$

Por el axioma III, tenemos que los múltiplos de magnitudes son a su vez magnitudes. Se cumplen, entonces las siguientes propiedades:

1. $mA <=> nB$ si y sólo si $m <=> n$.

2. $mA <=> nB$ si y sólo si $A <=> A$.

3. $mA + nA = (m + n)A$

4. $m(nA) = (mn)A$

5. Para toda magnitud A y todo entero positivo n, existe B tal que $nB > A$.

6. Principio de Arquímedes: Sean A y B magnitudes. si $A < B$, entonces existe un entero positivo n tal que $nA > B$.

7. Para A, B magnitudes y n entero positivo, se tiene que $m(A + B) = mA + mB$.

8. Sea A una magnitud y n un número entero positivo, entonces existe una magnitud B tal que $nB = A$.

3.3 Teoría de proporciones en Hölder

Según Hölder, en el devenir histórico de las matemáticas, la teoría de magnitudes ha sido tratada de dos maneras: La euclidiana y la moderna. La teoría de magnitudes euclidiana se ha presentado en la sección 2.2. La teoría moderna de proporciones se basa en el proceso de medición, de acuerdo a las siguientes definiciones:

1. **Razón:** La razón de una magnitud a en otra magnitud b, de la misma naturaleza, corresponde a un número real positivo determinado, el cual Hölder designa como $a : b$, es decir dos magnitudes tomadas en un orden específico.

2. **Proporción:** Dadas cuatro magnitudes a, b, c y d, se dice que $a : b = c : d$ cuando a medido por b da el mismo número que c medido por d.

Teniendo en cuenta que la teoría moderna de proporciones no ha sido suficientemente formalizada, Hölder se propone hacerlo a partir de su propuesta axiomática.

3.4 Números racionales e irracionales en Hölder

Hölder toma como punto de partida los números racionales positivos a partir de las razones entre naturales. Sea $\frac{n}{m}, m, n \in \mathbb{Z}^+$, una fracción. Si tomamos la razón $n : m$, como la pareja ordenada (n, m), se define la relación de equivalencia: Sean n, m, p y q números enteros, tales que m y q son diferentes de cero, decimos que la pareja (n, m) está relacionada con la pareja (p, q) si $n \cdot q = m \cdot p$. De esta forma, el número racional $\frac{s}{t}, s, t \in \mathbb{Z}^+$, corresponde a la clase de equivalencia de todas las fracciones $\frac{m}{n}$ relacionadas con $\frac{s}{t}$.

La suma y el orden en $\mathbb{Q}^+$ se definen con base a la suma y el orden de $\mathbb{Z}^+$.

Teniendo en cuenta que Weierstrass, Cantor y Dedekind han establecido una teoría de magnitudes numéricas irracionales de una manera puramente aritmética a partir de $\mathbb{Q}^+$, Hölder toma como referencia la construcción de los irracionales vía cortaduras de Dedekind.

La relación entre número y magnitud se establece a partir de las desigualdades entre múltiplos de magnitudes y enteros.

1. Si para dos enteros m y n se tiene que $na > mb$, entonces $\frac{m}{n}$ es llamada una *fracción inferior* relacionada con la razón $a : b$.

2. Cuando $na \leq mb$, entonces $\frac{m}{n}$ es llamada una *fracción superior* relacionada con la razón $a : b$.

A partir de estas definiciones se tendrá que:

1. Si $\frac{m}{n}$ es inferior y $\frac{p}{q}$ una fracción superior relacionadas a la misma razón, entonces $\frac{m}{n}$ es menor que $\frac{p}{q}$.

2. Si $\frac{m}{n}$ es una fracción inferior, relacionada a una razón α y $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, entonces $\frac{p}{q}$ es también una fracción inferior relacionada con la razón α.

3. Si $\frac{m}{n}$ es una fracción superior relacionada a una razón β y $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, entonces $\frac{p}{q}$ es también una fracción superior relacionada con la razón β.

Lo anterior significa que cada razón $a : b$ está asociada a una cortadura.

> Para cada razón de magnitudes $a : b$, existe una cortadura bien definida (A_1, A_2), es decir un número positivo diferente de cero que la representa. Este número se denotará por $[a : b]$. ([16], p. 242)

Hölder designa bajo el nombre número-medida al número $[a : b]$, el cual es obtenido cuando la magnitud a es medida por la magnitud b, en este caso b actúa como unidad. En particular $[a : a] = 1$.

Observemos que el número medida $[a : b]$ corresponde a la clase de equivalencia de todas las razones $c : d$ tales que $a : b = c : d$

Ahora bien si las magnitudes a y b son conmensurables tenemos que: $na = mb$ si y solo si, la cortadura (A_1, A_2) correspondiente a la razón $a : b$, tiene un mínimo número superior llamado el número racional $\frac{m}{n}$. Parece natural escribir $[a : b] = \frac{m}{n}$.

En definitiva la definición de cortadura dada por Dedekind permite entre otras consecuencias, definir un sistema densamente ordenado sobre el cual se satisfacen las leyes del álgebra elemental.

De los aspectos anteriores se obtienen las siguientes consecuencias:

1. El hecho de reducir la teoría de proporciones euclidiana a leyes de la aritmética, permite desvanecer el referente geométrico implementado desde la antigüedad.

2. Para cada número real, el cual se deriva de la cortadura (A_1, A_2), existe un número medida $[a : b]$ correspondiente a dos magnitudes a y b.

Lo anterior significa que si se considera el conjunto formado por todas las cortaduras de los racionales, es decir, el conjunto constituido por todos los racionales e irracionales, cada cortadura está determinada por uno y sólo un número-medida.

3.5 Hölder y la descripción axiomática de la recta

Para describir de manera axiomática el continuo lineal, Hölder parte de objetos llamados puntos e intervalos en la recta. Se supone que los puntos pertenecen a la línea recta. Dos puntos dados en un determinado orden se denomina un intervalo. La línea recta se caracterizas por los siguientes axiomas:

1. Sobre la línea recta existen al menos dos puntos diferentes.

2. Los intervalos de una línea recta son de dos clases, tal que cada intervalo pertenece a una sola clase. Intervalos de una misma clase se denominan "intervalos de la misma dirección" y a los intervalos de diferente dirección, se denominan "intervalos de dirección opuesta". Dados dos puntos A y B, los intervalos AB y BA son de dirección opuesta. Si AB es un intervalo de primera dirección se simboliza como $A \subset B$ ó $B \subset A$.

3. Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

4. Si $A \subset B$, entonces existe al menos un punto C tal que $A \subset C$ y $C \subset B$. En este caso se dice que C está "entre " A y B.

5. Si $A \subset B$ y $C \subset D$ los intervalos AB y CD son comparables, ellos son iguales o desiguales. Si los intervalos son iguales, se escribe $AB = CD$ (o también $CD = AB$).

6. Sean $A \subset B, C \subset D, E \subset F$. Si $AB = CD$ y $CD = EF$, entonces $AB = EF$.

7. Sean $A \subset B, B \subset C, E \subset F, F \subset G$. Si $AB = EF$ y $BC = FG$, entonces $AC = EG$.

8. Si $A \subset B$ y C un punto arbitrario, entonces existe un único un punto E tal que $AB = CE$ y un único punto F tal que $FC = AB$.

9. Si $A \subset B \subset C \subset D$, entonces nunca se cumplirá que $AD = BC$.

10. Si la línea recta se divide en dos clases no vacías, de tal manera que cada punto pertenezca sólo a una de estas clases, y para cada punto X de la primera clase y cada punto Y de la segunda clase $X \subset Y$, entonces existe un punto Z tal que cada punto $A \subset Z$ perteneces a la primera clase y cada punto B, tal que $B \subset Z$, entonces B pertenece a la segunda clase.

Para Hölder, estos axiomas describen las propiedades de la línea recta.

A partir del axioma 6 se puede definir una relación de equivalencia en los intervalos de la siguiente manera: dos intervalos de la primera dirección pertenecen a la misma clase de equivalencia si ellos son iguales. Esta relación de equivalencia permite introducir el concepto de distancia de la primera dirección. Hölder aclara que el vocablo "distancia de la primera dirección" permite visualizar la línea recta en términos de magnitudes, puesto que las distancias de primera dirección son magnitudes en el sentido de los axiomas de la cantidad.

A continuación, Hölder muestra que las distancias de primera dirección, son magnitudes en sentido de los axiomas de cantidad [5].

4 Las bases conceptuales de la propuesta de Hölder

En la sección anterior se han presentado los tres aspectos teóricos mediante los cuales Hölder relaciona el continuo aritmético y el continuo geométrico. Por un lado se presenta un grupo de axiomas, *los axiomas de la cantidad*, los cuales, según Hölder, corresponden a preceptos generales que gobiernan las operaciones y el orden de entidades que poseen cantidad. A continuación se muestra que el conjunto de los números reales, con el orden y las suma canónicos, de acuerdo a la construcción de Dedekind, satisfacen los axiomas de la cantidad. Al final se presenta la caracterización axiomática que hace Hölder del continuo lineal. Define la distancia, asignándole a cada intervalo su respectiva distancia. Como hemos comentado, Hölder demuestra que las distancias de primera dirección son magnitudes en sentido de sus axiomas de cantidad.

De esta manera queda establecido el circuito entre los axiomas de la cantidad, los axiomas para el continuo lineal y el conjunto de los números reales.

Es importante observar que los dos artículos que se han tomado como referencia han sido publicados en una revista de psicología matemática. Esto no es

[5] No se desarrollan los detalles debido a problemas de extensión. Sin embargo pueden seguirse en [17]

fortuito, pues a partir del siglo XX los psicólogos se vieron en la necesidad de pasar de análisis tipo cualitativo a estudios cuantitativos. Para ello tuvieron que establecer una teoría de la medida que les permitiera utilizar números para cuantificar atributos. Los desarrollos en este sentido han sido tan fructíferos que en 1989, Jáñez L. expresaba que “la Psicología ha realizado con la teoría de la medida la máxima contribución posible al progreso del conocimiento”.

Las bases conceptuales de la teoría de la medida en psicología pueden localizarse fundamentalmente en los planteamientos de Hölder. Los psicólogos descubrieron que al establecer un puente entre el continuo geométrico y el continuo aritmético, Hölder relacionaba cantidad y cualidad.

Como se ha precisado antes, al estudiar de la naturaleza formal de ciertos atributos físicos básicos, como la masa y la longitud, Hölder encontró que tenían una estructura similar a la de los números reales positivos con adición ($+$) y orden natural ($\leq$). Como lo observan Narens y Luce, “entre un conjunto de objetos podemos observar una relación natural empírica de orden, $\leq$, donde el orden refleja cualitativamente el grado o cantidad del atributo a medir que es mostrado por los objetos” ([18], p. 166). El ejemplo típico es el de las dos varillas: Si x y y son dos varillas metálicas, se puede determinar si son iguales ($x \sim y$) o si x es más corta que y ($x < y$); también se puede colocar la varilla y “a continuación ” de la varilla x obteniendo otra varilla. Se ha realizado, entonces una operación empírica “$\circ$ ”, de tal forma que la varilla resultante será $x \circ y$. Según Narens y Luce, el conjunto de todos los objetos bajo consideración (X), la relación de orden observada entre ellos ($\leq$), y todas las combinaciones que puede formarse mediante $\circ$, constituyen una estructura cualitativa [$\chi = (X, \leq, \circ)$], mientras que una estructura como $(\mathbb{R}^+, \leq, +)$ que puede utilizarse para representar a χ recibe el nombre de estructura numérica o de representación [6]. Helmholtz en 1887, estableció que la condición sobre χ para que “la medición” puede llevarse es existencia de un homeomorfismo h, de X en los números reales positivos tal que para cada x y y en X, $x \leq y$ si y sólo si $h(x) \leq h(y)$ y $h(x + y) = h(x) + h(y)$. Esos homomorfismos de χ en $(\mathbb{R}^+, \leq, +)$ son denominados por Narens y Luce, *representaciones aditivas.*

Hölder materializó su propuesta de la teoría de las cantidades con base en los planteamientos antes anotados.

5 La pertinencia histórica de una teoría de cantidades

El problema histórico de la objetivación del continuo matemático corresponde al esclarecimiento de la relación entre dos tipos de cantidades: números y magnitudes.

A través de todo el texto se ha mostrado que la noción de cantidad atraviesa el desarrollo histórico de las matemáticas, pues constituye uno de los elementos centrales de las actividades de medir, contar y ordenar, y, por lo tanto, ha servido

[6] Ver [18]

de catalizador en la conformación histórica de la geometría, el álgebra y el análisis como disciplinas matemáticas.

En la primera sección se mostró que, en la perspectiva de dar respuesta al problema antiguo de establecer una teoría de la medida y siguiendo los preceptos de la filosofía aristotélica, Euclides hace un tratamiento de dos tipos de cantidades: las magnitudes y los números. Para ello establece dos teoría independientes de *razones y proporciones.* Dado que una "razón" corresponde a una relación entre cantidades, se plantea el problema de concebir las razones de cantidades como una cantidad. Todo esto en la perspectiva de encontrar un formalismo conveniente que permitiera darle ciudadanía numérica a las fracciones y las raíces inexactas. En el fondo de esta concepción reposa la noción de clase de equivalencia. De hecho, como lo hemos mostrado, la definición de proporción esboza una clase de equivalencia en el universo de las razones.

En uno de los parágrafos anteriores se mostró que la noción de cantidad tiene gran importancia en el desarrollo del álgebra, fundamentalmente en la solución de ecuaciones, como se visualiza en los desarrollos algebraicos de Descartes. Para Descartes, el álgebra trata de la cantidad en general y precede a la geometría y a la aritmética.

La noción de cantidad variable, implícita en la geometría analítica cartesiana, sirvió de base en la constitución del Análisis, como disciplina matemática. Para ello, y en el marco de la solución del problema histórico de las cuadraturas, Newton y Leibniz debieron incorporar la noción de cantidades infinitamente pequeñas sin ningún soporte conceptual.

Esto trajo como consecuencia la necesidad de buscar una estructura sólida para el cuerpo teórico del análisis. El primer paso fue entender que se precisaba de una teoría rigurosa de los números reales, $\mathbb{R}$, que si bien guardara el espíritu de la teoría de magnitudes evadiera los supuestos tácitos implícitos en su tratamiento.

En 1872, Cantor y Dedekind establecieron sus construcciones de $\mathbb{R}$, partir de sucesiones fundamentales y cortaduras, respectivamente con insumos conjuntistas. En esta dirección se vieron en la necesidad de establecer una teoría abstracta de conjuntos de puntos, la cual sirvió de fundamento al sistema de los números naturales $\mathbb{N}$ y, por ende, a la totalidad de los números reales.

La teoría de conjuntos infinitos de Cantor fue aprovechada por los analistas franceses con el propósito de establecer una definición sólida de integral. En esta dirección, a principios del siglo XX, Borel y Lebesgue transformaron el problema de la medida de magnitudes en el problema de la medida de conjuntos. En su tesis doctoral *Integral, longitud,área* ([15]), Lebesgue puntualiza que el problema de la medida consiste en asignarle a cada conjunto acotado un número real mayor o igual a cero. Más concretamente, se trata de definir una función m, llamada función medida,

$$m : \{\text{conjuntos acotados}\} \to \mathbb{R}_0^+,$$

que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $m(E) = 0$, para algún E.
2. $m(E) = m(E + a)$.
3. $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$

Para Lebesgue, estas tres propiedades sintetizan el desarrollo histórico de la actividad de medir cantidades en matemáticas. Esto significa que que el problema de la medida se resuelva bajo dos condiciones fundamentales:

1. La existencia de $\mathbb{R}$, como reglilla numérica
2. Que el evento a medir se pueda modelar conjuntistamente

Observemos que si todo evento cuantificable se puede modelar de manera conjuntista, la huella de las cantidades parece diluirse completamente. Sin embargo esto no se cumple en general. Tal como lo indican investigaciones de más de 50 años, la teoría de la medida de sensaciones en psicología abren nuevamente el espectro de las cantidades. Para ello, los psicólogos se ubicaron en la linea de las investigaciones de Hölder. Esto muestra la imposibilidad de fundar las matemáticas sobre una sola perspectiva, verbigracia la teoría de conjuntos, y abre un abanico de posibilidades en la investigación matemática.

Agradecimientos Artículo elaborado en el marco de la investigación "La construcción histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes", realizada con apoyo de COLCIENCIAS, proyecto 1106-11-17688.

Referencias

[1] Aristóteles, Obras Completas, Madrid, Aguilar S. A. Ediciones, segunda edición, 1977.

[2] Aristóteles, Física, Editorial Gredos.S.A.,1995.

[3] Aristóteles, Metafísica, Editorial Gredos. S. A., (1994), 1967.

[4] Arquímedes, Medida del círculo. En: Científicos Griegos. Recopilación de Francisco Vera, Aguilar, Madrid, 1970.

[5] Bernabé, A. (traductor), De Tales a Demócrito. Filósofos Presocráticos, Ediciones Atalaya S. A., Barcelona, 1996.

[6] Cauchy, A. (1821) Curso de Análisis. Colección Mathema, UNAM. México.

[7] Caveing, M .L. (1998). Irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide, Presses Universitaires du Septentrion, Paris.

[8] Dedekind, R. ¿Qué son y para qué sirven los números? Alianza editorial, Madrid.

[9] Dhombres, J.(1980). Nombre, mesure et continu épistémologie et histoire. CEDIC/Fernand Nathan, Paris.

[10] Diofanto, Aritmética. En: Científicos Griegos. Recopilación de Francisco Vera, Aguilar, Madrid, 1970.

[11] Euclides. Elementos. En: Científicos Griegos. Recopilación de Francisco Vera, Aguilar, Madrid, 1970.

[12] Euclides. Elementos. Madrid, Editorial Planeta-DeAgostini, S. A. (De la Biblioteca clásica Gredos), 1999.

[13] Ferreirós, J. (1991). El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

[14] Garcia, J. D. (1944). Euclides. Elementos de Geometría. México, Universidad Autónoma Nacional de México, (Segund edición 1992).

[15] Lebesgue, H. (1902). Intégrale, Longueur, Aire. Tesis doctoral. Ann Mat, (3), Pp.231-359, 1902.

[16] Michell, J and Ernest, C. (1996) The axioms of Quantity and the Theory of Measurement: Traslate from part I of Otto Hölder's German Text "Die Axioma der Quantität und die Lehre vom Mass". Journal of mathematical psychology,40, 235-252.

[17] Michell, J and Ernest, C. (1997) The axioms of Quantity and the Theory of Measurement: Traslate from part II of Otto Hölder's German Text "Die Axioma der Quantität und die Lehre vom Mass". Journal of mathematical psychology,41, 345-356.

[18] Narens, L. and Luce, R.D. (1986). Measurement: The theory of numerical assignments, Psychological Bulletin, 99, 166-180.

Dirección del autor
Luis Cornelio Recalde — Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia
e-mail: `lurecal@yahoo.com`