



**DIFICULTADES Y ERRORES DE ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO EN
TORNO AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES RACIONALES**

ANDRÉS FELIPE CHOCÓ BONILLA

Código 201358784

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SEDE NORTE DEL CAUCA

2019



**DIFICULTADES Y ERRORES DE ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO EN
TORNO AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES RACIONALES**

ANDRÉS FELIPE CHOCÓ BONILLA

Código 201358784

Director:

MG. CRISTIAN ANDRÉS HURTADO

Profesor del Área de Educación Matemática en el Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SEDE NORTE DEL CAUCA

2019

Dedicatoria

Primariamente a DIOS por prestarme la vida

A mi madre Ana Judith Bonilla

A mi padre Javier Hernán Chocó V.

A mis abuelas Martha Fanny fory e Hilda Viafara.

A mis abuelos que me acompañan desde el cielo,

Eustorgio Chocó Grueso y Joel Bonilla

Agradecimientos

En primer lugar, quedo infinitamente agradecido con mi madre Ana Judith Bonilla, mi hermana Gina Constanza Choco Bonilla y abuela Martha Fanny fory, por su apoyo incondicional, inmensa paciencia y sabios consejos; siendo ellas algunos de los más importantes pilares en la consolidación de la persona que soy. Y al que orgullosamente le digo padre Javier Hernán Choco Viafara.

En segundo lugar, estoy gratamente agradecido con las familias Choco Viafara y Bonilla Vázquez, especialmente a mi abuela Hilda Viafara, quienes me han demostrado el verdadero significado de la palabra FAMILIA;

el señor Héctor Fabio Choco, María Lenis Bonilla, James Choco, Rubiela Choco, Melquiades Alegrías Yuri Alegrías Katherine Bonilla y demás familiares, los cuales sin importar las adversidades siempre están presentes en los momentos buenos y malos de la vida.

En tercer lugar, estoy gratamente agradecido con las personas que sin esperar nada a cambio estuvieron a mi lado cuando más las necesite; Lida Amparo Carabalí María Carolina González Juan David Choco Y María Julieth Campo

Por último, especial agradecimiento a MG. Cristian Andrés Hurtado y demás profesores por el acompañamiento dado a lo largo de todo mi proceso de formación y los consejos brindados, siendo uno de sus frutos la culminación de mi pregrado en la *Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas* de la Universidad del Valle sede norte del cauca.

¡Muchas Gracias!

Resumen

El presente trabajo de investigación se enmarca en el campo de la educación matemática, en el que se traza como objeto de análisis, la problematización del aprendizaje de las funciones racionales y se hace una exploración de las posibles dificultades presentes en los estudiantes de undécimo grado de la Institución Educativa Escipión Jaramillo del municipio de Caloto en el departamento del Cauca, para la cual, se optó por una fundamentación teórica desde tres referentes fundamentales: el Referente Matemático, el Referente Curricular y el Referente Didáctico.

El presente documento expone, como un trabajo exploratorio que pretende exponer y analizar las posibles las dificultades y errores que presentan los estudiantes de undécimo grado en torno a la interpretación y el análisis de funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica, por medio de la implementación de una prueba de aula compuesta por 17 preguntas en distintos formatos, distribuidas en cuatro categorías que tiene que ver con el reconocimiento de las funciones racionales y algunos aspectos característicos, como el dominio de las funciones, las asíntotas y sus transformaciones. Por último, se presenta una serie de categorías diferentes, en las que se agrupan las dificultades encontradas producto de los análisis de resultados realizados de la implementación de la prueba de aula con los estudiantes.

Palabras claves: funciones racionales; dificultades y errores; función; categoría de dificultades; simbólico-algebraica, tabular y gráfica; Caracterización de dificultades.

Índice general

Dedicatoria	3
Agradecimientos.....	IV
Índice general	7
Índice de figuras.....	7
Índice de tablas.....	8
Introducción	9
1 Capítulo 1. Aspectos generales de la propuesta	12
1.1 Antecedentes	14
1.2 Planteamiento del problema.....	20
1.3 Objetivos de la Investigación.....	28
1.3.1 Objetivo General.....	28
1.3.2 Objetivos Específicos.....	28
1.4 Justificación	29
2 Capítulo 2. Marco de Referencia Conceptual	38
2.1 Referente matemático	39
2.1.1 Relación	39
2.1.2 Polinomio.....	40
2.1.3 Definición de función	41
2.1.4 Tipos de funciones	42
2.1.5 Funciones racionales.....	43
2.1.6 Definición de asíntotas verticales y horizontales.....	47
2.1.7 Asíntotas Oblicuas	51
2.1.8 Límites	52
2.1.9 Transformaciones de funciones	54
2.2 Referente Curricular.....	59
2.2.1 Procesos generales	60
2.2.2 Conocimientos Básicos.....	62
2.3 Referente Didáctico	65
2.3.1 Sobre dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas	65
2.3.2 Dificultades en el aprendizaje de las funciones y funciones racionales	69
2.3.3 Sobre las representaciones en las matemáticas.....	71
3 Capítulo 3. Metodología de la investigación y análisis de resultados.....	77
3.1 Diseño metodológico	77
3.1.1 Enfoque metodológico.....	77
3.1.2 Proceso del estudio	79
3.1.3 Propuesta de trabajo.....	81
3.1.4 Población.....	83
3.1.5 Herramientas de recolección de datos.....	84

3.1.6 Descripción general de la prueba	85
3.2 Análisis de los resultados.....	89
4 Capítulo 4. Conclusiones y reflexiones didácticas.....	131
4.1 Conclusiones	131
4.2 Reflexiones didácticas	143
Referencias Bibliográficas.....	145

Índice de figuras

Figura 1 Representación Gráfica de la Función $f(x)=1/x$	46
Figura 2. Representación Gráfica, Asíntotas verticales.....	49
Figura 3 Representación Gráfica, Asíntotas Horizontales.....	51
Figura 4. Representación Gráfica, Asíntotas Oblicuas.....	52
Figura 5. $f(x)=1/x$. Representación Gráfica. Desplazamiento vertical.	55
Figura 6. $f(x)=1/x$. Representación Gráfica, Desplazamiento horizontal.....	56
Figura 7. $f(x)=1/x$. Representación Gráfica. Reflejo.	57
Figura 8. Representación Gráfica Alargamiento y contracción. $f(x)=1/x$	58
Figura 9. El proceso de la investigación cualitativa	78
Figura 10. Evidencia de E1 a pregunta 10.....	102
Figura 11. Evidencia de E1 a pregunta 11.....	114
Figura 12. Evidencia de E2 en pregunta 11.....	115
Figura 13. Evidencia de E3 a pregunta 11.....	116
Figura 14. Evidencia de E4 a pregunta 11.....	117
Figura 15. Evidencia de E1 a pregunta 1.....	136
Figura 16. Evidencia para errores de procedimientos.	138
Figura 17. Evidencia de E2 a pregunta 8.....	139
Figura 18. Evidencia de E2 a pregunta 9.....	139
Figura 19. Evidencia pregunta 16.....	141
Figura 20. Evidencia pregunta 16.....	141
Figura 21. Evidencia pregunta 15 de E2	142
Figura 22. Evidencia pregunta 14 de E4.	142
Figura 23. Evidencia pregunta 16 de E1	143

Índice de tablas

Tabla 1. Representación tabular de $f(x)=1/x$	44
Tabla 2. Representación Tabular de $f(x)=1/x$	45
Tabla 3. Representación tabular para $f(x)=1/x$	46
Tabla 4. Significado Verbal de la Simbología en $f(x)=1/x$	47
Tabla 5. Propuesta de trabajo. Tabla de actividades.....	82
Tabla 6. Tabla de análisis de resultados pregunta 1	90
Tabla 7. Tabla de análisis de resultados pregunta 2	93
Tabla 8. Tabla de análisis de resultados pregunta 3	95
Tabla 9. Tabla de análisis de resultados pregunta 4	97
Tabla 10. Tabla de análisis de resultados pregunta 5	99
Tabla 11. Tabla de análisis de resultados pregunta 6	101
Tabla 12. Tabla de análisis de resultados pregunta 7	103
Tabla 13. Tabla de análisis de resultados pregunta 8	106
Tabla 14. Tabla de análisis de resultados pregunta 9	108
Tabla 15. Tabla de análisis de resultados pregunta 10	111
Tabla 16. Tabla de análisis de resultados pregunta 11	113
Tabla 17. Tabla de análisis de resultados pregunta 12	118
Tabla 18. Tabla de análisis de resultados pregunta 13	120
Tabla 19. Tabla de análisis de resultados pregunta 14	121
Tabla 20. Tabla de análisis de resultados pregunta 15	123
Tabla 21. Tabla de análisis de resultados pregunta 16	126
Tabla 22. Tabla de análisis de resultados pregunta 17	128

Introducción

El concepto de función es uno de los temas dentro del área de la matemática, en los que se hace mayor énfasis dentro del ámbito escolar. No obstante, en muchas ocasiones se pretende comprimir su enseñanza haciendo un tratamiento inadecuado o incompleto del concepto, desconociendo la relevancia que podría tener el concepto de función, dentro de los procesos educativos de los estudiantes, posteriores al bachillerato (Álvarez y Delgado, 2005).

Sumado a lo anterior, uno de los mayores problemas que preocupa a los docentes universitarios, tiene que ver con los conocimientos en el área de matemáticas, con los que llegan los estudiantes recién egresados del bachillerato que quieren acceder a los estudios superiores, especialmente en carreras de ingeniería y ciencias; y esta preocupación se intensifica si se trata de conceptos como el de función, sobre los que recae gran importancia en campos de la matemática como el cálculo (Porrás, 2011).

El presente trabajo de investigación se enmarca en el campo de la educación matemática y se presenta como un proyecto de grado para optar por el título de licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas, en el que se traza como objeto de análisis, problematizar el aprendizaje de las funciones racionales y se hace una exploración de las posibles dificultades presentes en los estudiantes de undécimo grado. Siendo el presente, un trabajo exploratorio que pretende exponer y analizar las posibles las dificultades y errores que presenta un grupo de estudiantes de undécimo grado en torno a la interpretación y el

análisis de funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

Para ello, se propone el diseño de una prueba de aula, articulando elementos conceptuales de orden matemático, en los que se asume las propuestas por Azcárate, C. y Deulofeu, (1990), y Paul Rees, Charles Rees y Fred Spark (2006); de orden Curricular, guiada de acuerdo a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN); y de orden Didáctico, la perspectiva de Socas, M. (1997) y Rico, L. (1995) en cuanto a las dificultades y errores presentes en los estudiantes.

A partir de las actividades propuestas en la prueba, se pretende caracterizar las dificultades y tipificar los errores expuestos por los estudiantes al enfrentar la prueba, la cual centrará su atención en los principales aspectos del concepto como el dominio, el rango, las asíntotas, la congruencia en el cambio de representación, entre otras.

Capítulo 1.

Aspectos Generales de la Propuesta

1 Capítulo 1. Aspectos Generales de la Propuesta

Este capítulo se proponen los aspectos generales de esta investigación de indagación didáctica. Se inicia con el reporte de los antecedentes que enmarcan el presente trabajo de investigación, luego se procede a la articulación de algunos elementos problemáticos que fundamentan dentro del marco del concepto en cuestión el planteamiento del problema, la formulación de los objetivos que direccionan la investigación y, por último, se relaciona una justificación sobre el interés y la pertinencia de esta investigación.

Dentro del reporte de los antecedentes, se toma en consideración algunas investigaciones en las que los autores han centrado su intención en la problematización de algunos aspectos concernientes a los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función en general y particularmente el de función racional.

En la presentación de la problemática, se retoman algunos aspectos fundamentales dentro de la propuesta de diversos autores (Hurtado y Zuñiga, 2011; González y Grueso, 2016; Porras, 2011; Vega y Carvajal, 2014; Noreña, 2013; entre otras) en torno a dificultades y errores que presentan los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función y función racional.

Posteriormente se presentan se plasman las directrices de la investigación que diseccionan el trabajo hacia la caracterización de la dificultades y errores de un grupo de estudiantes de undécimo grado en torno al estudio e interpretación de las funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica, por medio de la implementación de una prueba de aula.

Por último, se encuentra la justificación de la investigación en la que se relacionan algunos aspectos que resaltan la importancia y la pertinencia del desarrollo de este trabajo.

1.1 Antecedentes

Diversos investigadores (Duval, 2004; Rico, 1995; Kaput, 1991; Sierpinska, 1992; Socas, 1997), han buscado a lo largo de la historia de las matemáticas lo relativo a la construcción del concepto de función, con la finalidad de lograr ideas que permitan superar algunas de las dificultades que se presentan en el proceso enseñanza-aprendizaje tales como, el establecer relaciones en los cambios de registro de representación, aludiendo a la teoría de Duval (2004), el reconocimiento del dominio, o con la identificación de características propias de algunas funciones como la discontinuidad, las asíntotas entre otras.

A continuación, se citan algunas investigaciones que han centrado su objetivo en el estudio de las funciones, en especial las racionales desde diferentes perspectivas, relevantes para el desarrollo de este trabajo.

Como primera medida se cita a Porras (2011); que, en su tesis de maestría realizada en la Universidad del Valle, aborda como problema la ausencia de un referente de formación matemática, relativa al concepto de función, deseable en estudiantes egresados del bachillerato que inician la universidad, que dé respuesta a las exigencias de los cursos de cálculo en carreras de ciencias e ingeniería.

El análisis que hace este autor se aborda desde tres frentes: un estudio histórico-crítico del concepto de función, un estudio del papel que juega el concepto de función en los cursos universitarios y el análisis de diversas investigaciones que han identificado problemas y dificultades notables en los procesos de apropiación del concepto de función.

Se concluye en esta tesis que la insuficiencia en las propuestas curriculares se condiciona, entre otras cosas, por la falta de un referente sobre la estructuración del

concepto de función. Y también muestra que la persistencia de situaciones de enseñanza que desconocen las dificultades inherentes a la complejidad del concepto, puede tener origen en que, pese a la abundante literatura respecto a las dificultades y obstáculos que comporta la enseñanza y aprendizaje del concepto de función.

Otras de las investigaciones que se toma como antecedentes es la de Villa y Posada (2006), en este reporte de investigación se presenta el diseño e implementación de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, donde se propone determinar características didácticas y conceptuales de la función, que permita a los estudiantes una aproximación a dicho concepto desde una perspectiva variacional, acorde con los Lineamientos y Estándares Curriculares de matemáticas. Para ello se toma como referentes conceptuales la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los registros semióticos de representación.

La propuesta se implementa con estudiantes de grado décimo del Instituto Tecnológico Metropolitano de la ciudad de Medellín. En su desarrollo se muestra como el concepto de función lineal puede interpretarse como un modelo matemático que atrapa la variación y el cambio de magnitudes a través de los registros de representación propuestos: gráfico, tabular, simbólico y lenguaje natural.

En esta investigación los autores resaltan como conclusión que las situaciones de variación y cambio son necesarias en la construcción del concepto de función y por tanto sugiere ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes a reconocer, en el

concepto de función, un modelo matemático que describe, sistematiza y organiza situaciones en contextos particulares donde intervienen fenómenos de variación y cambio.

Vega y Carvajal (2014), en esta investigación realizada en la universidad del valle, se caracteriza la forma como es presentado el concepto de función en libros de texto, tanto para la reforma actual como para la de las Matemáticas modernas. Se considera como concepto matemático a trabajar el concepto de función atendiendo a las dificultades que se observan desde una perspectiva teórica como práctica en la enseñanza del concepto. Se establecen unos elementos teóricos como lo es la fundamentación teórica del concepto de función desde un estudio histórico y epistemológico, una caracterización de la importancia e implementación de los libros de texto, los diferentes elementos involucrados en el desarrollo de la Reforma de las Matemáticas Modernas y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006), que sustentan los elementos involucrados en la investigación. Y finalmente se presenta una rejilla de valoración de textos escolares en matemáticas como aporte a la Educación Matemática, empleada como modelo de análisis para establecer las diferencias relevantes del concepto de función entre los libros de textos estudiados.

Chávez (2016); otra de las investigaciones que se tendrá en cuenta para el desarrollo de este trabajo, es la investigación realizada la Escuela Superior Politécnica De Chimborazo, En Riobamba Ecuador. La investigación está enfocada en la Incidencia de los Criterios Algebraicos para graficar Funciones Racionales de segundo grado, aplicado a 21 estudiantes de las escuelas de ingeniería en telecomunicaciones y redes y 37 de control y redes industriales, de la facultad de informática y electrónica. Para lograr la meta de graficar las Funciones Racionales, se utilizaron algunos criterios algebraicos como el

dominio y rango, los puntos fundamentales, entre otros, que se les organizó de manera específica.

Se aplica un test de dos preguntas evaluado sobre diez puntos, a estudiantes de primer semestre antes y después de conocer la nueva metodología y se obtuvo que los estudiantes de telecomunicaciones mejoran en un 58,33% y los de Control en un 50,73%, el nuevo método incide positivamente en el aprendizaje de los estudiantes; se sugiere socializar el método con los docentes de matemática de la Facultad de Informática y Electrónica.

Noreña (2013), este trabajo de grado presenta un análisis y propuesta de enseñanza de las Funciones Racionales, caracterizándose por medio de conceptos matemáticos como: dominio, comportamiento asintótico, equivalencia de funciones y la variable didáctica; con el fin de promover el desarrollo de pensamiento variacional al igual que un aprendizaje significativo del concepto de función racional en los estudiantes de grado noveno. Para lograrlo, propone una serie de actividades presentadas en cuatro bloques denominados situaciones; con las cuales se determina cómo pueden ser abordados algunos conceptos matemáticos seleccionados por medio del empleo de las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión en los registros de representación algebraico y gráfico de acuerdo con la teoría cognitiva propuesta por Raymond Duval (1999) e intenta además articular estas operaciones cognitivas con las exigencias curriculares del MEN (2006), identificando los procesos generales y contextos más significativos en pro de los fines trazados en su propuesta.

De esta manera, en pro de dar respuesta a la pregunta de investigación, el autor sugiere que se debe considerar y romper el esquema en el tipo de actividades que se proponen a los

estudiantes, de tal forma que estas no se limiten solo a la manipulación de los diferentes algoritmos matemáticos puestos en juego, sino que los algoritmos sean concebidos como un medio o herramienta para la solución de las situaciones y ejercicios planteados. Además, propone fomentar en las actividades propuestas la implementación pluri-registro respecto a los registros algebraico y gráfico, de modo que se promueva la objetivación de los objetos matemáticos en los estudiantes.

Cada una de estas investigaciones presentadas anteriormente tienen relevancia para el desarrollo de este trabajo, puesto que estos documentos, aportan elementos necesarios que apoyan, dan relevancia, y ayudan a encaminar su desarrollo. En cuanto al concepto y el planteamiento de problema, en algunos documentos se deja claro que existe una problemática respecto a las dificultades presentes en los estudiantes entorno al concepto de función, en general y el de función racional particularmente, que fundamentalmente tienen que ver con los siguientes aspectos:

Un estudio realizado en la Universidad del Valle muestra que muchos de los estudiantes que ingresan a esta universidad, tiene dificultades al establecer relaciones entre los distintos modos de representación del concepto de función.

Las dificultades que existen para visualizar o extraer cuál es su comportamiento o propiedades a través únicamente de su representación gráfica, por parte de los estudiantes.

El descuido o el poco uso que se le da, al concepto de función racional en los procesos de enseñanza de los estudiantes, por parte del profesor.

La necesidad de los estudiantes en hacer un cambio conceptual, en el que deben dejar de pensar en un dominio de todos los reales, para pensar en un dominio que discrimina valores reales, en conceptos como dominio, discontinuidad o asíntotas.

Además, de estos elementos dentro del desarrollo de la problemática, también se tienen en cuenta otros elementos que tienen que ver con el diseño y la estructuración de la prueba como el tipo de pregunta que se plantea, el objetivo de cada pregunta, y la forma en cómo se instruye al estudiante durante la actividad; además de la metodología que se expone para el desarrollo del trabajo.

A parte de los elementos expuestos anteriormente, cabe resaltar que estos trabajos dejan ver que si bien el concepto de función, en sus diversos modelos (lineal, cuadrática, exponencial) ha sido ampliamente estudiado por múltiples investigadores, el modelo de función racional lo ha sido en menor medida, y esto se puede constatar al realizar la búsqueda en los principales repositorios nacionales (Funes, Unal, Univalle, Udea, entre otros), investigaciones que enfoquen su estudio al trabajo con este tipo de funciones, por lo que esto expone la necesidad de hacer trabajos en este sentido.

1.2 Planteamiento del problema

Desde hace algún tiempo se viene reconociendo que el estudio de las funciones, y en especial el de las racionales, ha generado conflictos en cuanto a su enseñanza y aprendizaje por parte de los maestros y estudiantes, respectivamente. Diversas investigaciones (Hurtado y muñiga, 2011; González y Grueso, 2016; Porras, 2011; Vega y Carvajal, 2014; Noreña, 2013; entre otras) dejan ver problemáticas que atañen a estos asuntos, las cuales van desde el reconocimiento del dominio y el rango de las funciones, el comportamiento asintótico, hasta la resolución de problemas donde la función cobra un carácter de covariación. Dichos problemas, no solo se relacionan con los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sino que, tiene que ver con los métodos de enseñanza utilizados por los profesores en el aula, y con la complejidad del concepto mismo.

Es pertinente aclarar que las dificultades expuestas en este apartado, están centradas en los aspectos más relevantes concierne al estudio de las funciones racionales tal como la determinación del dominio y el rango, la interpretación de las asíntotas, entre otras. Tales problemáticas referentes a este concepto son expuestas a continuación.

Teniendo en cuenta los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), la actividad matemática que se trabaja en las aulas de clase, debe proponerse con el fin de promover o contribuir al desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes, cuya estructura se plantea, desde un enfoque de sistemas, a través de cinco pensamientos: numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional.

Aunque esta propuesta planteada por el MEN tiene más de diez años de vigencia, los resultados revelados por las pruebas estandarizadas a nivel internacional, muestran un

panorama no muy alentador sobre el desempeño en matemáticas de los estudiantes colombianos (Gómez, 2011). De acuerdo con los resultados, Colombia es uno de los países que ocupa los últimos lugares, debido a que, en la prueba PISA realizada en el año 2009 para 65 países, los estudiantes colombianos ocuparon el puesto 58 en matemáticas alcanzando un puntaje promedio de 381, donde se evidencia que los estudiantes de quince años que participaron en la prueba no alcanzaron a ubicarse ni el mínimo de competencia (Maquilón, 2017), además en año 2012, el puntaje de Colombia fue de 376 que entre 65 países participantes, ocupó el puesto 62, lo cual significa que comparativamente con PISA 2009, se desmejoró en cinco puntos y en cuatro puestos respectivamente (Maquilón, 2017) y en la prueba TIMSS realizada en el año 2007 entre 48 países, Colombia ocupó un no honroso puesto 40 (Barón, et al., 2013).

Por otra parte, al analizar los resultados de las pruebas nacionales que evalúan las competencias en matemáticas como las SABER (5º, 9º, 11º), el panorama no mejora (Maquilón, 2017). Se revela en dichos resultados que, en los últimos años sólo el 36% de los estudiantes alcanzó el nivel satisfactorio¹. Además, en departamentos como en el Cauca y Valle Del Cauca, aproximadamente el 19% de los estudiantes se ubica en este mismo nivel²; y solo el 3% de estos estudiantes alcanzando un nivel avanzado³ (López, 2013).

Lo anterior, deja ver que los estudiantes están presentando muchas dificultades al comprender los conceptos que se relacionan con el desarrollo del pensamiento matemático,

¹ Las pruebas SABER califican el nivel de desempeño de los estudiantes a partir de cuatro ítems: Insuficiente, Mínimo, Satisfactorio y Avanzado (López 2013)

² En este nivel los estudiantes utilizan las propiedades de potenciación, radicación y logaritmación para la solución de problemas; recurren a expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones simples de variación; analizan situaciones modeladas a través de funciones lineales o cuadráticas.

³ En este nivel los estudiantes pueden pasar de la representación algebraica a las propiedades de una función o sucesión y viceversa; establecer equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas.

específicamente el desarrollo del pensamiento variacional, hecho que resaltan Posada y Villa (2006) en su investigación al mencionar:

(...) A nivel del desempeño, el estudio muestra que los estudiantes colombianos tienen un rendimiento deficiente cuando requieren la identificación de patrones en arreglos numéricos, presentados en tablas, parejas ordenadas o situaciones problemas expresadas en forma verbal. Además, resuelven problemas si el modelo de representación de éste sugiere la solución, pero su rendimiento es deficiente si la resolución del problema implica tanto la expresión de la información en un modelo algebraico, como un método de solución de éste. (p. 22)

Ahora bien, las dificultades mencionadas anteriormente pueden provenir de numerosas fuentes y pueden tener diversas manifestaciones: la primera, surge tradicionalmente por parte del profesor, que deja para el final de una unidad o del programa, la modelación de situaciones problema que contribuyen al desarrollo de pensamiento matemático (siendo más afectado el concepto de función) o en muchas ocasiones suelen omitirse por falta de tiempo (MEN, 1998). La segunda, se presenta porque se aborda el concepto de manera muy general, centrándose solo en las funciones más tradicionales (lineal y cuadrática).

Diversas investigaciones (Porras, 2011; Villa y Posada, 2006; Arce y Ortega, 2013; Noreña, 2013), dejan en claro que una gran parte de los estudiantes, no están culminando sus estudios de bachillerato con los conocimientos necesarios sobre el concepto de función; en particular la investigación de Álvarez y Delgado (2005), muestra que porcentajes superiores al 58% de los estudiantes que ingresa a la Universidad del Valle, no reconoce como tal el concepto función y sus características, y que una gran mayoría tiene dificultades al establecer relaciones entre los distintos modos de representación, siendo este uno de los procesos más relevantes del concepto. Es importante que se promueva en los estudiantes la discusión acerca de las características del concepto de función y el uso de

diferentes representaciones, con el propósito de asegurar la identificación y apropiación del concepto mismo y de cada una de sus representaciones.

A los estudiantes se les debería dar la oportunidad para adquirir una cierta flexibilidad en el uso de estos modos de expresión, representación y en los procesos de transformación de la representaciones, dado que tradicionalmente en su etapa educativa escolar, solo se hace énfasis en un proceso unidireccional frente a los cambios de representación (Sierpinska, 1991), es decir, se favorece más, el paso de lo simbólico a lo gráfico pasando por lo tabular y poco se aborda el proceso en sentido opuesto. Razón por la cual presentan dificultades para establecer relaciones entre diferentes representaciones del concepto: fórmulas, gráficas, tablas, frases descriptivas de las variables y sus relaciones, diagramas e interpretación de gráficas (Sierpinska, 1991).

Por otro lado, una función puede determinarse completamente a través de su representación gráfica, pero existen dificultades, para visualizar o extraer cuál es su comportamiento o propiedades a través únicamente de su representación gráfica en papel. Estas dificultades pueden magnificar con un trazado poco preciso, y pueden convertirse en un obstáculo si el estudiante no tiene interiorizadas las propiedades de un tipo o modelo determinado de función en sus esquemas cognitivos, lo que le puede llevar, en ese caso, a deducir propiedades incorrectas al visualizar su representación gráfica (Arce y Ortega, 2013), o aumentar la dificultad de los estudiantes al comunicar cada una de las características y relaciones de este tipo de funciones con el simple análisis de la construcción gráfica.

Otra de las dificultades presentes en los estudiantes, tiene que ver con la variación y el cambio; usualmente, en la observación de los cambios los estudiantes tienen dificultad para identificar cuáles son los objetos que están cambiando o cuáles son los que permanecen

fijos (Sierpinska, 1991). Por tal razón, se sostiene que el planteamiento en el aula de situaciones que requieran el desarrollo de argumentos y estrategias variacionales, puede favorecer la comprensión significativa del concepto de función y colaborar al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes; este estudio implica la apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otras y da la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional (Vasco, 2003). De esta manera las nociones de variable y función constituyen la base de la matemática de la variación y el cambio.

De la misma manera, se hacen evidentes otras dificultades relacionadas al estudio de las funciones racionales, y de manera específica, las dificultades que tienen los estudiantes de articular conceptos como el dominio, discontinuidad, comportamiento asintótico, caracterizando las funciones racionales desde lo algebraico, lo tabular y lo gráfico. Los problemas presentes se dan en general, cuando este tipo de funciones son discontinuas, lo cual genera dificultades en los estudiantes, por un lado, por la experiencia que ellos han tenido previamente con el estudio de las funciones polinómicas, las cuales tienen como dominio el conjunto de los números reales, y además son continuas (Noreña, 2013), obligándolos a hacer un cambio conceptual, en el que deben desligarse de pensar en un dominio de todos los reales, para pensar en un dominio que discrimina valores reales.

Por otro lado, la dificultad se ubica en el tratamiento algebraico, puesto que encontrar el dominio de una función conlleva al estudiante a hacer uso de técnicas algebraicas complejas (como lo es la factorización, la resolución de ecuaciones, e inecuaciones algebraicas, entre otras), en las cuales, si el estudiante no posee buen dominio de ellas, estará expuesto a ciertas limitaciones en estos procesos.

La importancia del estudio de estas dificultades, radica en que el estudiante se ve obligado a dar un gran “salto” conceptual, encaminado a estudiar y profundizar sobre el concepto de dominio de las Funciones Racionales, debido a que:

- En las funciones racionales, el dominio de la función no siempre está dado por el conjunto de los números reales, a diferencia de las otras como las polinómicas, puesto que se está sujeto a discriminar aquellos valores de la variable independiente, en los cuales la expresión del denominador pasa a ser cero (Noreña, 2013).
- Otro aspecto relacionado con el dominio de las Funciones Racionales, da lugar al estudio del comportamiento asintótico, el cual es propio de estas funciones en aquellos valores de la variable independiente, donde el denominador de la expresión es cero, pero su numerador es distinto de cero, de tal forma que la recta en la gráfica formada por el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales el denominador de la función es cero, representa una asíntota vertical (Noreña, 2013).

Ahora, abarcando lo relacionado con las asíntotas, Arce y Ortega (2013) señalan que un 83% de los estudiantes encuestados en su investigación, no halla relación entre la expresión algebraica de la función con denominador cero, y la recta que se representa en la gráfica de la función, y de estos, el 21% no dibujan las asíntotas existentes en algunas de las representaciones gráficas, lo que provoca una dificultad para discernir el comportamiento de algunas ramas de la función a través de la visualización de la representación gráfica. Se concluye en esta investigación que un gran porcentaje de estudiantes no tiene claro el

concepto de asíntota y no relaciona la expresión algebraica de la función con denominador cero y la asíntota de su gráfica (Arce y Ortega, 2013).

Ahora bien, además de este tipo de asíntotas verticales, vale la pena destacar otros tipos de comportamientos asintóticos los cuales son propios de las Funciones Racionales y que son de suma importancia en la caracterización de estas funciones, como son las *asíntotas horizontales y oblicuas*, que a diferencia de las verticales, no se dan bajo la característica del dominio, sino bajo la relación entre los grados de las expresiones polinómicas que están en el numerador y denominador de la expresión racional (Noreña, 2013).

Para tratar de dar una aproximación de solución a las problemáticas propuestos anteriormente, se toma como punto de partida lo propuesto por el MEN (2006) en los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas, donde se afirma que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos. De tal forma que, para alcanzar estas metas, es importante que los estudiantes en el proceso de construcción y aprehensión de los conceptos algebraicos vayan reconociendo las diversas relaciones que existen entre estos conceptos, al igual que en sus sistemas de representación, donde estos registros no se deben convertir en medios aislados de representación.

Considerando lo presentado hasta ahora se plantean una pregunta la cual corresponde específicamente a la problemática citada en el presente trabajo y los objetivos con los cuales se pretende dar solución a dicha problemática.

¿Cómo se caracterizan posibles dificultades y errores que un grupo de estudiantes de grado undécimo presentan en torno al estudio de funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica?

1.3 Objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivo General

- Caracterizar las posibles dificultades y errores que un grupo de estudiantes de grado undécimo presentan en torno al estudio de las funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar algunos elementos conceptuales de orden Didáctico, Curricular y Matemático en torno a el estudio de las funciones racionales.
- Articular los elementos conceptuales estudiados en una prueba de aula, para su posterior implementación con un grupo de estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escipión Jaramillo del municipio de caloto, cauca.
- Proponer posibles categorías de dificultades y errores fruto de los análisis de resultados realizados de la implementación de la prueba de aula con los estudiantes.

1.4 Justificación

En la compleja tarea de la escuela de contribuir a la formación integral del ser humano, el aprendizaje de la matemática, especialmente en el estudio de las funciones, constituyen una temática que se vincula con diferentes actividades del quehacer humano, permitiendo al mismo tiempo el desarrollo individual y el avance progresivo de la sociedad desde un enfoque socio-constructivista. El concepto de función es uno de los referentes más importantes en las matemáticas, por ser una herramienta fundamental en la modelación de fenómenos de variación y cambio. Esto explica la realización en las últimas décadas de una gran variedad de investigaciones a propósito de su comprensión y desarrollo en el currículo escolar.

Pero, en contraste con lo mencionado anteriormente el concepto de función racional resulta ser uno de los conceptos al que menor tiempo se le dedica, sí de investigaciones se trata y en el ámbito escolar generalmente algunos profesores se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, haciendo un repaso general y limitado sobre las características de las funciones, generando una limitación en su comprensión por parte de los estudiantes (Hitt, 2003).

Este apartado tiene como propósito resaltar la importancia del estudio de las funciones racionales y dar elementos concretos que dejen ver la pertinencia del desarrollo de este trabajo. Dichos elementos están seccionados desde tres enfoques: *primero*, los elementos relacionados con el concepto mismo de función racional; *segundo*, los elementos relacionados con la modelación de fenómenos del mundo físico; y *tercero*, los elementos relacionado con la naturaleza de esta investigación. Es preciso resaltar que algunos

argumentos expuestos a continuación para la justificación de este trabajo, son relacionados más desde la experiencia personal que desde investigaciones realizadas apoyadas en algunos referentes teóricos en el proceso de desarrollo de este trabajo. A continuación, se desarrollan estos tres elementos:

Primero, *en relación con el concepto*: como se ha mencionado en repetidas ocasiones a lo largo de este trabajo, la discriminación del concepto de función racional se hace muy evidente dentro de las aulas de clase y es allí donde, radica la importancia de este concepto para esta investigación. Por lo general dentro de las aulas de clase se hace más énfasis en las funciones polinómicas de grado uno, dos y tres, las exponenciales, y algunas trascendentales (seno, coseno y tangente), pero las funciones racionales como muchas otras (logarítmicas, a trozos, entre otras), en algunas ocasiones, por parte del profesor se dejan en el mejor de los casos para el final de una unidad o para el final del programa, y suelen omitirse en muchas ocasiones por falta de tiempo (MEN, 2006).

Este hecho desafortunadamente trasciende hasta el sector investigativo de las universidades e incluso hasta comunidades matemáticas y se ve refleja cuando se realiza la búsqueda en repositorios universitarios trabajos sobre dicho tema. A pesar de que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se propone el desarrollo de actividades de modelación de situaciones problema que contribuyen al desarrollo de pensamiento variacional y matemático desde el grado noveno, resaltados en los ítems expuestos a continuación:

- *“Análisis de las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas, racionales y de sus derivadas” (MEN, 2006; 10º-11º).*
- *“Análisis en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas” (MEN, 2006; 8º-9º).*

Esta es una problemática bastante reportada a nivel nacional, algunos estudios revelan que una gran parte de los estudiantes que inician sus estudios universitarios, no hacen un uso provechoso de los primeros cursos de matemáticas, razón por la cual, estos cursos presentan mortalidades entre el 35% y el 70%, porcentajes que permanecen como lo confirman estadísticas citadas en el encuentro realizado en la Universidad ICESI en el año 2005 y 2008 (Porras, 2011). A pesar de que el MEN propone el trabajo con las funciones racionales en grados 9º, 10º, 11º e incluso en grados inferiores, esto deja claro que los estudiantes no están recibiendo un buen contenido referente a este tema y en muchos casos las universidades se ven obligadas a recurrir a programas de refuerzo para los estudiantes en los primeros niveles universitarios.

Segundo, *la modelación de fenómenos del mundo físico*: Según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), el concepto de función y específicamente el concepto de función racional permite la modelación de fenómenos de la vida cotidiana. Desde esta perspectiva las ecuaciones y las funciones racionales pueden ser herramientas útiles para la representación de situaciones y para encontrar respuestas a problemas cotidianos. En particular, son muy buenas para describir ecuaciones de distancia-velocidad-tiempo, y modelar problemas de trabajo multi-persona. Es decir, desde el MEN se propone

la enseñanza de este tipo de funciones dentro del aula de clases, porque se hacen necesarios para resolver muchas de las situaciones del quehacer humano, y para su desarrollo personal.

A continuación, se presentan algunos ejemplos reales en diferentes contextos como la física, la biología, la medicina, entre otros, de situaciones modeladas bajo los conceptos de ecuaciones y funciones racionales empleados en diferentes áreas del conocimiento:

En la medicina: *Concentración de medicamento.* Después que cierta droga se inyecta en un paciente, se vigila la concentración c de la droga en el torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) está dada por:

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

Ejercicios de aplicación en la medicina (Tomado de: Stewart, J; Redlin, L; Watson, S; 2012, p. 288)

En la física: *Resistencia eléctrica.* Cuando dos resistores con resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo, su resistencia combinada R está dada por la fórmula:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Ejercicios de aplicación en resistencia eléctrica (Tomado de: Stewart, J; Redlin, L; Watson, S; 2012, p. 288)

Suponga que un resistor fijo de 8 ohm está conectado en paralelo con un resistor variable. Si la resistencia del resistor variable está denotada por x , entonces la resistencia combinada R es una función de x . Grafique R , y dé una interpretación física de la gráfica.

En geografía: *Cantidad de precipitación pluvial.* El número total de pulgadas de lluvia, $R(t)$, durante una tempestad que dura t horas, se puede aproximar mediante la siguiente ecuación, con a y b como constantes positivas que dependen del lugar geográfico.

$$R(t) = \frac{at}{t + b}$$

Ejercicios de aplicación en geografía (Tomado de: Stewart, J; Redlin, L; Watson, S; 2012, p. 288)

Otro ejemplo dentro del ámbito de la geografía que se podría modelar en este caso bajo el concepto de ecuación racional se expone a continuación.

La intensidad I de la lluvia, en *pulg/h*, se define mediante

$$I = \frac{R(t)}{t}$$

Ejercicios de aplicación en geografía (Tomado de: Stewart, J; Redlin, L; Watson, S; 2012, p. 288)

los resultados muestran evidencia de, que este concepto es útil en muchas áreas del conocimiento y modelan situaciones reales en muy variados escenarios. De manera que, la omisión este tipo de conceptos dentro del proceso de enseñanza escolar, conlleva a la pérdida de elementos importantes de reflexión con los estudiantes, que son necesario para entender muchos fenómenos de la vida y de otras ciencias, tales como la física, la economía, o la medicina, y esto suele suceder cuando no se le da la importancia necesaria a este concepto dentro del proceso educativo de los estudiantes.

Tercero, *la naturaleza de esta investigación:* como se ha mencionado anteriormente, el concepto de función racional es uno de los conceptos menos estudiados dentro del campo

de las funciones, y en este caso, con este trabajo se pretende entre otras cosas, motivar a más estudios sobre este concepto, además de que el trabajo está direccionado al estudio y la exploración de las dificultades y los errores que presentan los estudiantes en torno a la interpretación y análisis de funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica, impulsando a nuevos investigadores a explorar posibles propuestas para hacerle frente a las dificultades presentadas, y también para proponer recomendaciones sobre otros aspectos que pueden ser abordados y así, aportar herramientas útiles a los maestros para abordar el trabajo con las funciones racionales y los aspectos en que se hace necesaria su profundización.

En el planteamiento del problema de esta investigación se exponen elementos que dejan claro la problemática que existe en torno al concepto de función racional, pero es claro que, para enfrentar dicha problemática no basta solo el saber de su existencia, es necesario conocer su génesis, sus características y sus manifestaciones. Tal como lo propone Rico, (citado por Engler et al., 2004) en sus cuatro líneas de investigación en torno a las dificultades y errores en matemáticas, dentro de las que se resaltan los estudios sobre el análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de las dificultades y errores de los estudiantes en matemáticas, así como los estudios relacionados a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos; son estudios sobre los que recae gran peso en la didáctica de las matemáticas, puesto que, proveen al profesor información y datos necesarios e imprescindibles para generar una enseñanza y un aprendizaje de calidad para los estudiantes.

Es allí donde radica la importancia de este trabajo, ya que este, está encaminado no solo a exponer las dificultades y errores de los estudiantes, sino que se direcciona también a exponer sus características, además, se pretende aportar una caracterización de estas

dificultades con el fin de profundizar dentro de la enseñanza, en aquellos aspectos problemáticos en los estudiantes, usando diferentes métodos y herramientas. Es evidente que los análisis encaminados en esta dirección sirven para ayudar al docente a organizar y a generar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades a los estudiantes, esto reduce la influencia de los errores y las dificultades dentro del aprendizaje de los diferentes contenidos y es imprescindible que los estudiantes los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje (Engler et al., 2004).

Por otro lado, es pertinente aclarar algunos aspectos en cuanto a las formas de representación que han seleccionado dentro de los intereses de esta investigación y sobre las que no. Hoy en día se ha hecho mucho énfasis en el uso de diferentes formas de representación y para nadie es un secreto que, en la misión de lograr un buen aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, el profesor además de tener un excelente dominio del tema, debe contar con diferentes formas para explicar los nuevos contenidos empleando diversas formas de representación en diferentes contextos. Autores como Noreña (2013) y Duval (2004) concuerdan en que la ruta ideal para promover en los estudiantes una aprehensión significativa de cualquier concepto, y para el caso las funciones racionales, es a partir del manejo de por lo menos dos sistemas de representación, además de Azcárate y Deulofeu (1990) y, Lacasta & Pascual (1998), los cuales resaltan la importancia del empleo de los registros de representación algebraico y gráfico en el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes (citados por Noreña, 2013), y Chávez (2016) quien enfatiza en la importancia que recae sobre la tabulación para pasar de una representación gráfica a una representación simbólica y viceversa convirtiéndose en un procedimiento indispensable. Por tales razones se considera que estos tres tipos de sistemas de

representación (el simbólico, el tabular y gráfico) son esenciales para el desarrollo de este trabajo.

Ahora bien, para los que respecta al lenguaje natural, aludiendo al planteamiento de problemas en el marco de las funciones racionales, dentro del desarrollo de este trabajo no se tendrá en cuenta puesto que, por un lado, el implementar este tipo de elementos dentro de esta propuesta de trabajo acarrearía vincular otro tipo de elementos de orden didáctico y curricular como la modelación matemática, el razonamiento, la investigación en resolución de problemas y con estos elementos se desbordara el trabajo, argumentando y relacionando autores e investigaciones fundamentadas en la resolución de problemas.

Por otro lado, si en reiteradas ocasiones se ha hecho referencia al descuido al que ha sido sujeto el concepto de función racional, la resolución de problemas referentes a este concepto sería un aspecto mucho más lejano para su trabajo en las aulas, puesto que según Allan Schoenfeld la resolución problemas en torno a un concepto matemático requiere de conceptos, fórmulas, algoritmos y todas las nociones que se consideren oportunas saber, para enfrentarse a un determinado problema, y tal razón por lo general es el último aspecto que se trabaja con los estudiantes dentro de los procesos educativos (citado por Barrantes 2006).

Capítulo 2

Marco de Referencia Conceptual

2 Capítulo 2. Marco de Referencia Conceptual

Este capítulo está dedicado a describir los elementos que conforman la fundamentación conceptual de esta investigación, fundamentación teórica que se realizará desde tres referente fundamentales: el Referente Matemático, el Referente Curricular y el Referente Didáctico; y para la cual se asumen como referente teórico en lo correspondiente a la dimensión de referencia matemática, el marco de teoría conceptual y definiciones propuestas por Azcárate, C. y Deulofeu, (1990), y Paul Rees, Charles Rees y Fred Spark (2006).

Se apoyará y estará guiada de acuerdo a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, para lo correspondiente al marco de referencia curricular y el referente didáctico se sustentará bajo dos aspectos. Por un lado, la perspectiva de Socas, (1997) y Rico, (1995) en cuanto al marco de las dificultades y los errores en las matemáticas y por otro lado sobre la propuesta de Rico, L. (2009) como referente principal, apoyado de Stepanenko, P. (2004), Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007) para la caracterización de las representaciones, en la didáctica de las matemáticas.

2.1 Referente matemático

Considerando la formalidad de las matemáticas para definir cada uno de los objetos matemáticos y de los conceptos o nociones relacionados, los cuales se hacen presentes en este trabajo, se tendrá en cuenta el marco teórico y definiciones propuestas por Azcárate, C. y Deulofeu (1990), y Paul Rees, Charles Rees y Fred Spark (2006) en su texto titulado Álgebra.

Antes de entrar a relacionar todo lo referente al concepto de función racional, es necesario previamente definir algunos otros conceptos relevantes dentro del marco estructural de este concepto, tales como la relación, polinomios, límite, discontinuidad, el concepto de función (reseñando algunas de sus características importantes), y los diferentes tipos de funciones (polinomiales, constante, lineales, cuadráticas, logarítmicas), aclarando que en estas últimas no se hará mucho énfasis, ya que, al igual que las funciones racionales, estas califican como un tipo específico de funciones y no tienen mucha relevancia en el desarrollo de este trabajo además de que algunos de estos conceptos han sido objeto de muchos estudios, y no se hace necesaria su profundización en este apartado.

2.1.1 Relación

Se define relación como un objeto matemático para describir conexiones entre los elementos de un conjunto A que es el conjunto de salida y un conjunto B de llegada. Una relación R en un conjunto A es un subconjunto no vacío del producto cartesiano $A \times A$. Para denotar que un elemento a está relacionado con otro b por la relación R escribimos $(a, b) \in R$ o también aRb (y su negación $(a, b) \notin R$).

Ejemplo.

En el conjunto $A = \{1,2,3\}$, $R1 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ es una relación que podríamos llamar la relación del orden habitual, ya que indica que el primer elemento del par precede al segundo, según el orden habitual de los números. Otra relación

$$R2 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\},$$

que podríamos llamar la relación de paridad, pues los elementos de cada pareja son ambos pares o ambos impares. En la dentición no se exige que todos los elementos del conjunto estén relacionados con algún otro, ni que todos reciban la relación de alguno.

2.1.2 Polinomio

Gran parte del estudio de funciones en el proceso de formación de los estudiantes se dedica a las funciones polinómicas, y a partir de ellas se definen las funciones racionales entre otras funciones, por tal motivo inicialmente se presenta la definición de polinomio de grado n , donde n es un número entero no negativo y otros aspectos importantes en el estudio de este concepto.

En matemáticas una **variable** es una letra utilizada para representar un elemento arbitrario de un conjunto, mientras que una **constante** es una letra empleada para representar un elemento específico de un conjunto. El resultado de aplicar una o más de las operaciones fundamentales (adición, multiplicación, sustracción o división excepto la división entre 0), a un grupo de constantes y variables recibe el nombre de **expresión algebraica**.

Ejemplos:

$$xy, \quad \frac{2x}{x+y}, \quad \frac{2m}{3} + \frac{3}{n}, \quad 2s^4 + 32s^3t^2 - 3.2s^2t^3 - st^5 + \frac{1}{2}t^6$$

Un **polinomio** es una expresión algebraica de la forma

$$a_i x^n + a_{i-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde a_i son números Reales (con $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$) y $a_i \neq 0$ donde n es un número entero no negativo. Los números acompañantes a las variables (a) se llaman *coeficientes de polinomio*, a_i es el *coeficiente principal* y a_0 es el *término independiente o constante*.

Cada una de las expresiones $a_i x^n$ se llama **término** del polinomio. Como variable se puede utilizar cualquiera otra letra en vez de x , aun cuando las que se emplean comúnmente son x, y, z . Si un polinomio sólo tiene un término se le denomina **monomio**, si tiene dos términos es un **binomio** y si tiene tres términos es un **trinomio**.

2.1.3 Definición de función

A lo largo la historia el concepto de función ha sido objeto de diferentes transformaciones en su definición formal, producto de su construcción en las etapas históricas y conforme al avance y construcción de las matemáticas mismas, algunas de estas definiciones se resumen a continuación:

Definición 1: Una función es simplemente un conjunto de parejas ordenadas, tal que en estas todas sus primeras componentes son distintas (Muñoz Quevedo, 2002).

Definición 2: Bernoulli conceptuó a la función cómo: Llamar función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes.

Definición 3: Euler define: Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera, que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes.

Definición 4: Una función es una relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente, es decir, f es una función, si y sólo si f es una relación y para todo x, y, z , si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$ entonces $y = z$.

Teniendo en cuenta que el concepto de función es uno de los conceptos más estudiados a lo largo de la historia por su importancia en las matemáticas y cada una de las definiciones anteriores, y abarcando los elementos centrales en cada una de ellas como la variación, relación, dependencia y la correspondencia, se optó por la definición propuesta por Azcárate y Deulofeu (1990) quienes afirman que *el concepto de función se concibe como una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables*; la cual recoge a en gran parte las definiciones mencionadas frente a la forma en como se ha presentado el concepto de función a lo largo de la historia, con las diferentes evoluciones de las matemáticas y del concepto mismo.

2.1.4 Tipos de funciones

Función polinomial: Las funciones polinomiales son básicas en el álgebra ya que se forman haciendo uso únicamente de las cuatro operaciones básicas aplicadas a las constantes o variables en una expresión algebraica. Este tipo de funciones son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Este tipo de funciones se caracterizan por ser continuas en todo el conjunto de los números reales, es decir que su dominio es R , y porque toda expresión polinómica es una función polinómica.

A parte de la función polinomial existen otro tipo de funciones tales como la función constante, función lineal, función cuadrática, las cuales no se relacionan profundamente con los objetivos de esta investigación y por tal razón no se abordarán con profundidad en este trabajo.

2.1.5 Funciones racionales

Una función racional tiene la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son función polinómicas cuya variable en este caso es x y $Q(x) \neq 0$, es decir:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \quad \text{y} \quad Q(x) \neq 0$$

Aunque las funciones racionales se construyen a partir de **polinomios**, sus gráficas se ven bastante diferentes de las gráficas de funciones polinomiales.

El dominio D_f se conforma por todos aquellos valores de R que dan de sentido a los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, excluyendo aquellos que hacen al denominador cero. Esta condición se da, por el hecho de considerar que el dominio de una función racional, es la intersección entre los dominios de las funciones polinómicas y excluyendo aquellos valores $c \in R$, tales que $Q(c) = 0$, ya que estas hacen al denominador cero y la división por cero no está definida en matemáticas.

$$D_f = D_{\frac{p}{q}} = \{x \in D_p \cap D_q \text{ tal que } q(x) \neq 0\}$$

Al graficar ese tipo de funciones, se debe poner atención especial al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores. A continuación, se presenta la gráfica de una Función Racional.

Ejemplo 1: Bosqueje una gráfica de la Función Racional $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución: La función f no está definida para $x = 0$. En las tablas siguientes se muestra con los límites laterales, que cuando x tiende a cero por el lado izquierdo, el valor de $f(x)$ tiende a menos infinito, y mientras x se aproxime más a cero por la derecha, el valor de $f(x)$ aumenta cada vez más, aproximándose al infinito.

Tabla 1
Representación tabular de $f(x)=1/x$

x	f(x)	X	f(x)
-0.1	-10	0.1	10
-0.01	-100	0.01	100
-0.001	-1 000	0.001	1 000
-0.0001	-10 000	0.0001	10 000
-0.000001	-1 000 000	0.000001	1 000 000
<i>Límites laterales para $f(x) = 1/x$</i>			

En la primera tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ disminuyen sin límite.

En símbolos,

$f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^-$ “y tiende a menos infinito cuando x tiende a 0 por la izquierda”

También se muestra que cuando x tiende a 0 por la derecha, los valores de $y = f(x)$ aumenta sin límite, es decir:

$f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ “y tiende a infinito cuando x tiende a 0 por la derecha”

En la tabla siguiente se muestra cómo cambia $f(x)$ cuando el valor de x se aleja cada vez más del origen.

Tabla 2.
Representación Tabular de $f(x)=1/x$

x	$f(x)$	X	$f(x)$
-10	-0.1	10	0.1
-100	-0.01	100	0.01
-1 000	-0.001	1 000	0.001
-10 000	-0.0001	10 000	0.0001
-1 000 000	-0.000001	1 000 000	0.000001
<i>Límites laterales para $f(x) = 1/x$</i>			

En estas tablas se muestra que cuando los valores de x aumenta, el valor de $f(x)$ se aproxima cada vez más a cero. Este comportamiento se describe simbólicamente de la siguiente forma.

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \text{ Y } f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

Usando la información de estas tablas y graficando algunos puntos más, se obtiene la gráfica mostrada en la Ilustración 1.

Tabla 3.
Representación tabular para $f(x)=1/x$

X	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

Tabla de valores para $f(x) = 1/x$

Teniendo en cuenta cada uno de los puntos expuestos en la tabla 3, a continuación, se prosigue con el bosquejo de la gráfica de $f(x) = 1/x$.

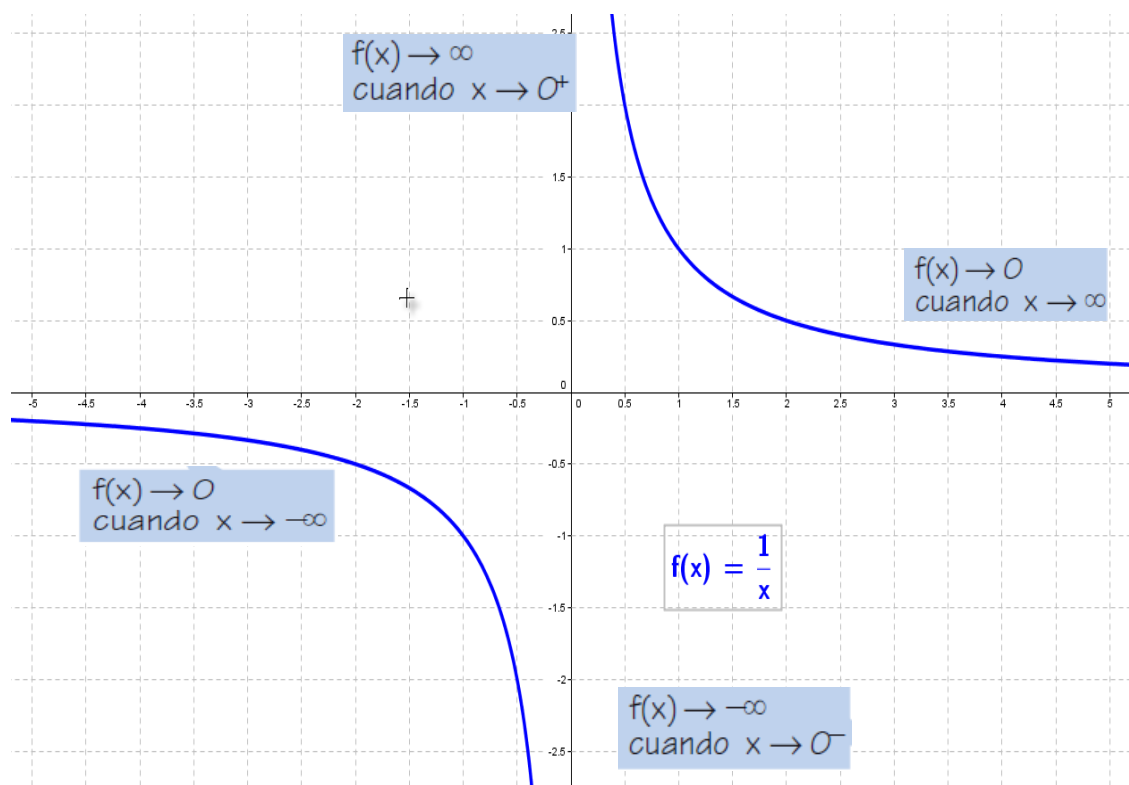


Figura 1 Representación Gráfica de la Función $f(x)=1/x$. (Diseño propio en geogebra)

A continuación, se expone en la tabla 4 la lectura adecuada de cada una de las expresiones simbólicas citadas en la figura 1.

Tabla 4.
Significado Verbal de la Simbología en $f(x)=1/x$

<i>Símbolo</i>	<i>Significado verbal de la simbología</i>
$x \rightarrow a^-$	x tiende a a por la izquierda
$x \rightarrow a^+$	x tiende a a por la derecha
$x \rightarrow -\infty$	x tiende a menos infinito; x disminuye sin cota
$x \rightarrow \infty$	x tiende a infinito; x se incrementa sin cota
<i>lectura adecuada de cada una de las expresiones simbólicas</i>	

La recta $x = 0$ se llama asíntota vertical de la gráfica de la figura 3, y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Una asíntota de una función es una línea a la que la gráfica de la función (en este caso $1/x$) se aproxima cada vez más cuando se va a lo largo de esta línea.

2.1.6 Definición de asíntotas verticales y horizontales

Una asíntota es una curva que se encuentra asociada a la gráfica de algunas curvas y se comporta como un límite gráfico hacia la cual, la gráfica se aproxima indefinidamente pero nunca la toca ni tampoco la intercepta. A medida que la variable independiente de la función tiende hacia un cierto valor, la correspondiente variable dependiente tiende a infinito, cualquiera que este sea.

Asíntotas Verticales. Como su nombre lo indica, son rectas verticales asociadas a gráfica de la función. Se encuentran presentes únicamente en funciones racionales de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

y se determinan encontrando las raíces del denominador $q(x)$ correspondiente. Tales valores reciben el nombre de Polos de la función. Entonces, el número de polos asociados a una función determinarán el número de asíntotas verticales que tiene tal función. Es decir, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si “ y ” tiende a más o menos infinito cuando x tiende a a por la derecha o izquierda.

$x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$ con $a \in R$.

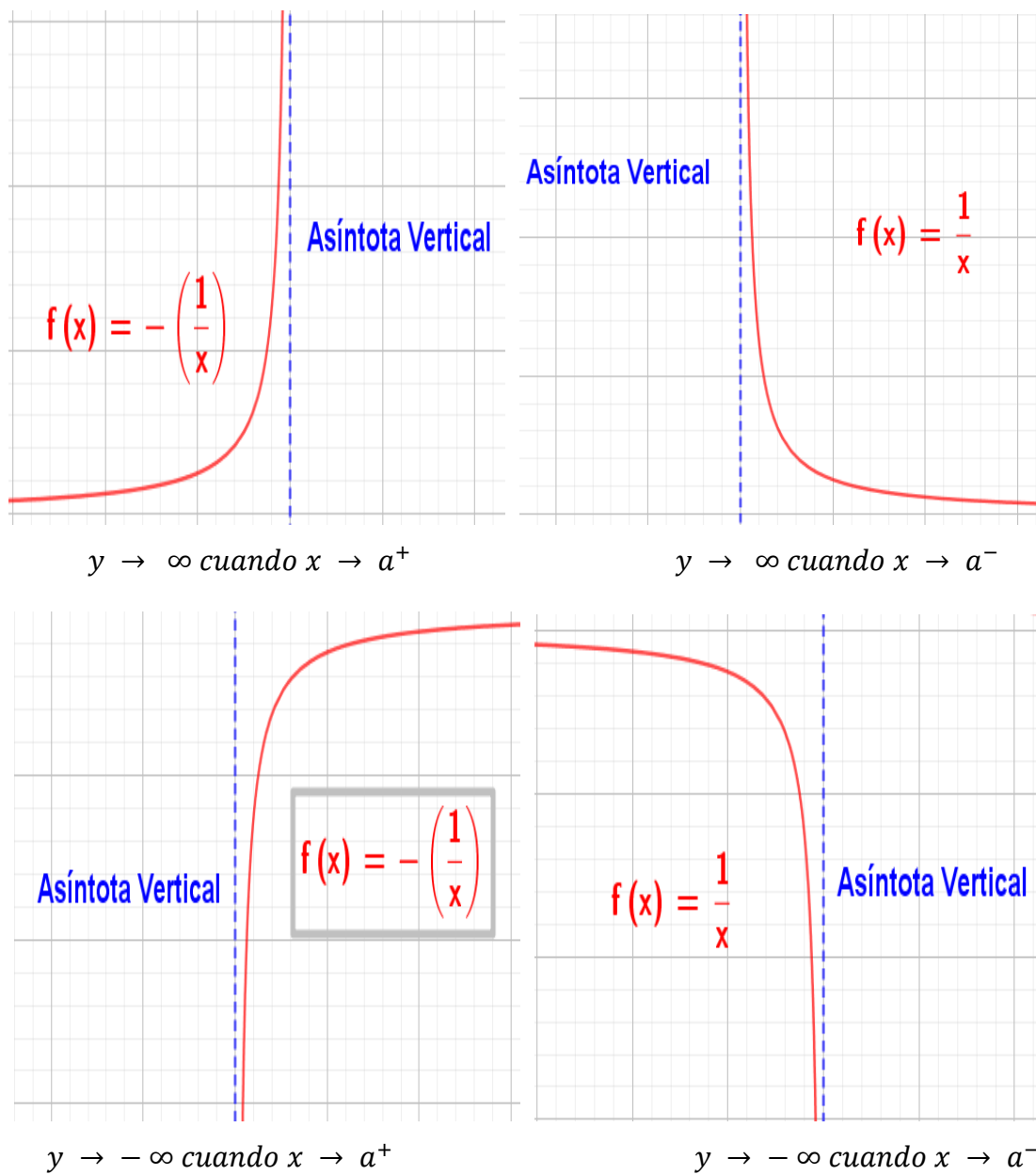


Figura 2. Representación Gráfica, Asíntotas verticales. (Diseño propio en geogebra)

Asíntotas horizontales: Como su nombre lo indica, son rectas horizontales asociadas a la gráfica de función. Se encuentran presentes únicamente en funciones racionales de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

y se determinan haciendo que la variable independiente “ x “, tienda al infinito lo que trae como consecuencia que la función cociente tienda a un valor determinado fijo, al que nunca va a tocar. Considérese el caso de una función racional cuyos términos son polinomios dados por:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Dependiendo de la evaluación entre los grados de los dos polinomios, tendremos los siguientes casos:

- El Polinomio $P(x)$ del Numerador y Polinomio $Q(x)$ del Denominador tienen el mismo grado la asíntota horizontal es la recta dada por el cociente de los coeficientes de grado mayor.
- El grado del Polinomio $Q(x)$ del Denominador es mayor que el grado del Polinomio $P(x)$ del numerador. En estos casos la asíntota es la recta $y = 0$
- El grado del Polinomio $Q(x)$ del Denominador es menor que el grado del Polinomio $P(x)$ del numerador. En este caso no hay asíntota horizontal

En resumen, la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función $f(x)$ si

$$f(x) \rightarrow b \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad \text{o si} \quad f(x) \rightarrow b \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

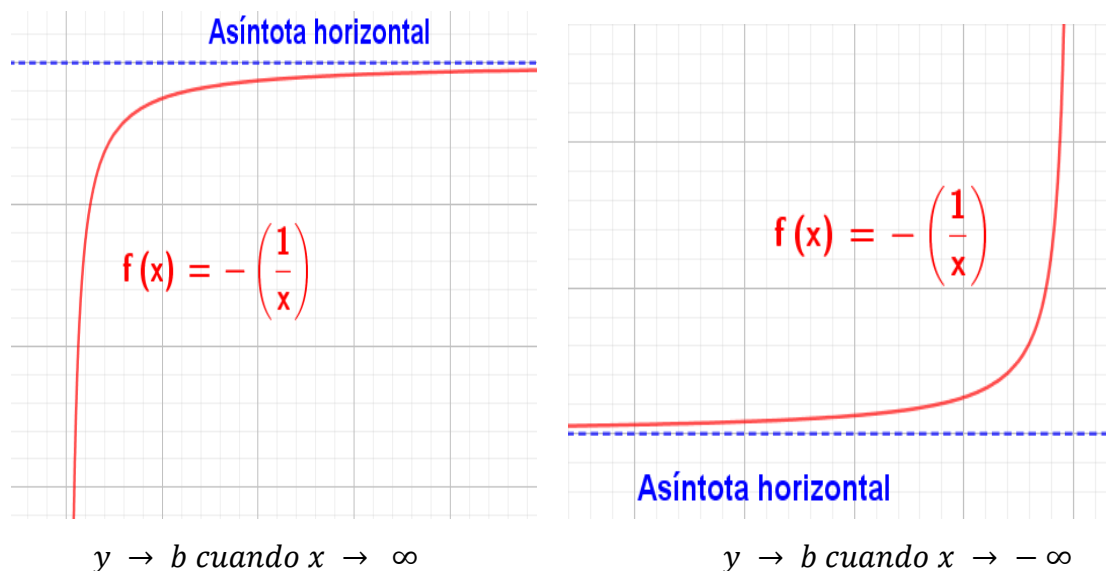


Figura 3 Representación Gráfica, Asíntotas Horizontales. (Diseño propio en geogebra)

2.1.7 Asíntotas Oblicuas

Asíntotas Oblicuas: Son rectas oblicuas, es decir, rectas de la forma $y = mx + b$. Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas (una por la izquierda de su gráfica y otra por la derecha de la misma). El cálculo de las mismas se realiza así:

Asíntota oblicua por la izquierda

- $m = \frac{f(x)}{x}$ Si m da un resultado distinto de 0 y $-\infty$ se procede con el cálculo de n de esta forma:

$$n = (f(x) - mx)$$

- Si n da como resultado un número real (es decir, ese límite no vale ni ∞ ni $-\infty$), entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua para $f(x)$ por la izquierda.

Asíntota oblicua por la derecha

- $m = \frac{f(x)}{x}$ Si m da un resultado distinto de 0 y $-\infty$ se procede con el cálculo de n de esta forma: $n = (f(x) - mx)$
- Si n da como resultado un número real (es decir, ese límite no vale ni ∞ ni $-\infty$), entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua para $f(x)$ por la derecha.

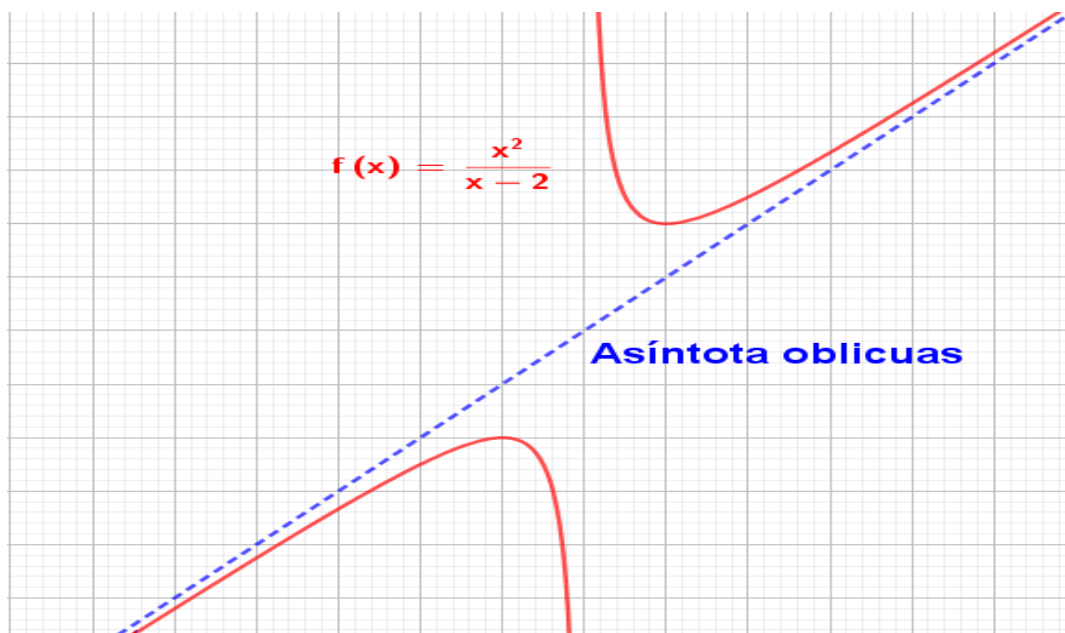


Figura 4. Representación Gráfica, Asíntotas Oblicuas. (Diseño propio en geogebra)

Puesto que una de las características del concepto de función racional, más concretamente cuando se habla de asíntotas, tiene que ver con el concepto de límite, como se ha expuesto anteriormente, a continuación, se presenta una breve definición de este concepto.

2.1.8 Límites

La idea de que la función f tiene un límite L en el punto c , consiste en que los valores de $f(x)$ están cerca de L cuando x está cerca (pero es diferente) de c . Sin embargo, es

necesario contar con una forma técnica de trabajar con la idea de “cerca de”, lo cual se consigue con la definición $\varepsilon - \delta$ que se presenta a continuación.

Para que la idea del límite de una función f en un punto c tenga sentido, es necesario que f esté definida en puntos cercanos a c (no necesita estar definida en el punto c pero debe estar definida en un número suficiente de puntos cerca de c .)

Definición de límite: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $c \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si para toda $\delta > 0$ existe al menos un punto $x \in A$, $x \neq c$ tal que $|x - c| < \delta$.

Esta definición se reformula en el lenguaje de la vecindad: un punto c es un punto de acumulación del conjunto A si toda vecindad $-\delta V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ de c contiene al menos un punto de A distinto de c .

El punto c puede o no puede ser miembro de A pero incluso si está en A , se ignora cuándo se decide si es o no un punto de acumulación de A , ya que se requiere específicamente que haya puntos en $V_\delta(c) \cap A$ distintos de c para que c sea un punto de acumulación de A .

Definición formal de límite: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de A para una función f en punto c es un punto de acumulación del conjunto $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que un número real L es el límite de f en c si, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$, y $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo: Aplicación de la definición de límite.

Usar la definición $\varepsilon - \delta$ del límite para mostrar que:

$$x^2 = 4$$

Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \text{ Siempre que } 0 < |x - 2| < \delta$$

Para encontrar un δ adecuado empezamos por escribir

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|$$

Para todo x en el intervalo $(1, 3)$ se sabe que $|x - 2| < 5$ de tal manera, se toma δ igual al mínimo entre $\varepsilon / 5$ y 1, resulta que, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que:

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)(5) = \varepsilon$$

Límites laterales: En este caso se hace referencia a un tipo diferente de límite llamado límite lateral, esto significa que cuando x se aproxima a c por valores superiores a c , se está hablando de **límite por la derecha** y se denota

$$f(x) = L$$

Del mismo modo, el **límite por la izquierda** significa que x se aproxima a c por valores inferiores a c y se denota

$$f(x) = L$$

Los **límites laterales** son útiles al calcular el límite de funciones que tiene raíces. Por

ejemplo, si n es un entero dado $\sqrt[n]{x} = 0$

A parte de los aspectos presentados anteriormente es importante también hacer énfasis en algunas transformaciones que se reflejan en las gráficas de las funciones, cuando en su representación algebraica, hace presencia una constante que deriva un cambio en la gráfica dependiendo de su papel en la expresión algebraica.

2.1.9 Transformaciones de funciones

Una función racional se puede graficar si se desplaza, alarga o refleja la gráfica de la original. Sumar una constante a una función desplaza verticalmente su gráfica; hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa. A continuación, se especifica, cada

una de las transformaciones de las funciones. Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$.

Desplazamiento vertical: La coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = f(x) + c$ está c unidades arriba de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por tanto, obtenemos la gráfica de $y = f(x) + c$ simplemente desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia arriba c unidades. Del mismo modo, obtenemos la gráfica de $y = f(x) - c$ desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia abajo c unidades.

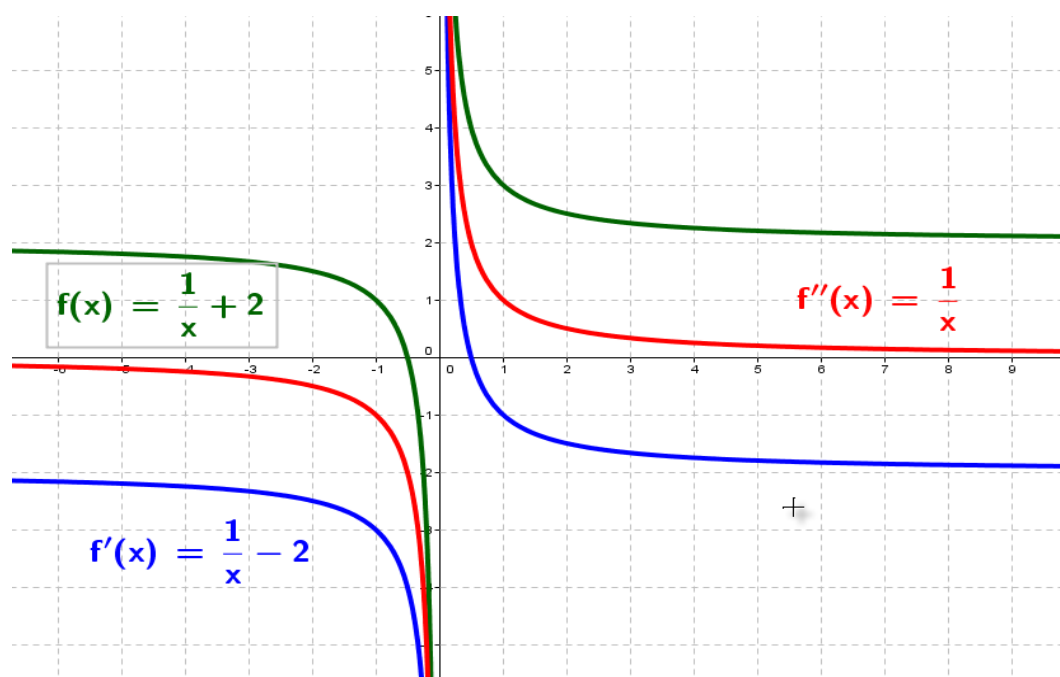


Figura 5. $f(x)=1/x$. Representación Gráfica. Desplazamiento vertical. (Diseño propio en geogebra)

Nótese como, la gráfica de color rojo que representa la función $f(x) = 1/x$ posee las mismas características de las funciones de color azul y verde, solo que la gráfica de color verde está desplazada dos unidades en el eje y hacia arriba del plano (por sumar dos unidades a la ecuación de la función), y la gráfica de color azul está desplazada dos unidades en el eje y hacia la parte de abajo del plano (por restar dos unidades a la ecuación de la función).

Desplazamiento horizontal: El valor de $f(x - c)$ en x es igual que el valor de $f(x)$ en $x - c$. Como $x - c$ está c unidades a la izquierda de x , se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$ es justo la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la derecha c unidades. Un razonamiento similar muestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la izquierda c unidades.

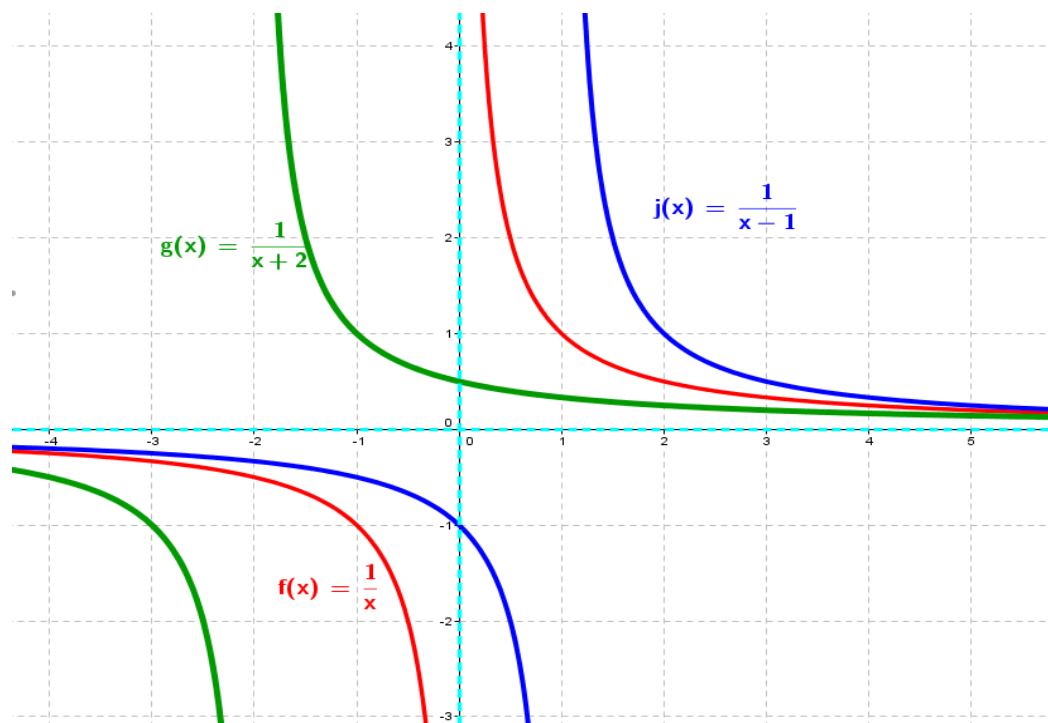


Figura 6. $f(x)=1/x$. Representación Gráfica, Desplazamiento horizontal. (Diseño propio en geogebra)

Para este caso el desplazamiento recae sobre el eje x , donde la gráfica de color rojo que representa la función $f(x) = 1/x$ también posee las mismas características de las funciones de color azul y verde, solo que la gráfica de color verde está desplazada dos unidades hacia la izquierda sobre el eje x del plano (por sumar dos unidades dentro de la ecuación de la función), y la gráfica de color azul está desplazada dos unidades hacia la derecha sobre el eje x del plano (por restar dos unidades dentro de la ecuación de la función).

Gráficas que se reflejan: La coordenada y de cada uno de los puntos en la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x . Por otra parte, el valor de $y = f(-x)$ en x es igual al valor de $y = f(x)$ en $-x$, por lo que la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y .

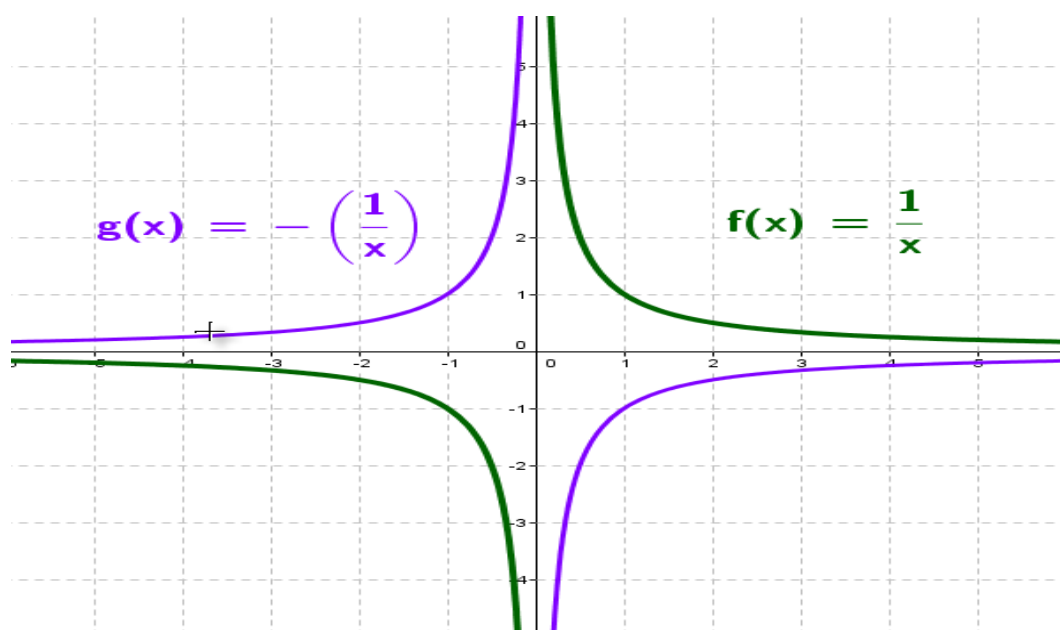


Figura 7. $f(x)=1/x$. Representación Gráfica. Reflejo. (Diseño propio en geogebra)

Para este caso, la gráfica no conserva todas sus características, nótese cómo la gráfica de color verde de cierta manera recibe un semi-giro sobre uno de los ejes del plano para corresponder a la gráfica de color violeta, de tal forma que la gráfica inicial que es decreciente (la gráfica de color verde), al reflejarse pasó a ser creciente (la gráfica de color violeta), esto solo dependiendo del signo que precede a la ecuación de la gráfica (si es positivo la función es decreciente, si es negativo la función es creciente).

Alargamiento y contracción, verticales y horizontales: La coordenada y de $y = cf(x)$ en x es igual que la coordenada y correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por c . Multiplicar las coordenadas por c tiene el efecto de alargar o contraer verticalmente la gráfica en un factor de c . Ahora consideramos la contracción y alargamiento horizontales de gráficas. Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, entonces la coordenada y de $y = f(cx)$ en x es la misma que la coordenada y de $y = f(x)$ en cx . Por lo tanto, las coordenadas x de la gráfica de $y = f(x)$ corresponden a las coordenadas x de la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicada por c . Viendo esto a la inversa, observamos que las coordenadas x de la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas x de la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, debemos contraer (o alargar) la gráfica horizontalmente en un factor de $1/c$.

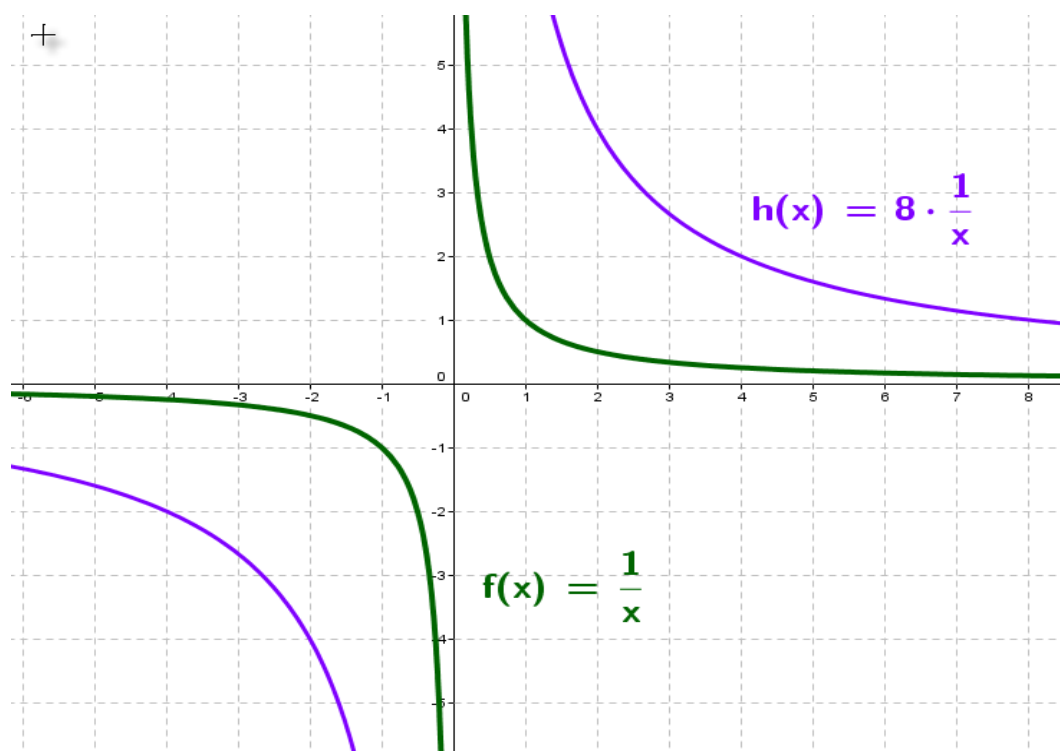


Figura 8. Representación Gráfica Alargamiento y contracción. $f(x)=1/x$. (Diseño propio en geogebra)

En la figura anterior, se puede notar que el cambio que sufre la gráfica inicial de la ecuación $f(x) = 1/x$ de color verde con respecto a la gráfica de color violeta a causa del escalar que multiplica a la ecuación de la gráfica, es una “reducción de la concavidad” de la gráfica.

2.2 Referente Curricular

En este apartado se tendrán como referente el Currículo Nacional Colombiano establecido legalmente en los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Para efectos del presente trabajo y teniendo en cuenta el concepto matemático, el cual es objeto de estudio en esta investigación, se hará énfasis principalmente en el pensamiento variacional, debido a que, este promueve la descripción de fenómenos de cambio, procedimientos asociados a la variación, entre otros.

Como primera medida, se tendrá en cuenta aspectos y planteamientos importantes propuestos en los Lineamientos Curriculares tales como:

El trabajo del alumno: donde se resalta la importancia que tiene el docente a la hora de formular buenas preguntas; tales preguntas que conlleven al estudiante a identificar que encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones. Cuando se proponen buenas actividades por parte del profesor, la buena reproducción por parte del estudiante de esa actividad científica, le exigiría actuar, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos y teorías, intercambiarlas con otros estudiantes, también reconocer las que le son útiles y tomarlas.

El trabajo del profesor: se tiene en cuenta puesto que la presencia del docente en cierta medida es sinónimo de conocimiento para el estudiante, es decir cada conocimiento debe

nacer de la adaptación a una situación específica (situación propuesta por el profesor), pues las probabilidades de que suceda, se crean dentro un contexto y en unas relaciones con el medio (MEN, 1998).

En los lineamientos curriculares se reconoce que la tarea de promover situaciones con el fin de fomentar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes, debe estar enfocada indispensable el empleo de elementos estructurales, los cuales aluden al uso de contextos, que incitan a que los estudiantes efectúen procesos de modelación y matematización, destacando los procesos generales que sean más eficientes para alcanzar dichas metas.

Por tal razón se alude a los elementos propuestos dentro de los procesos generales en el diseño de las actividades propuestas en este trabajo de grado con el fin de caracterizar posibles dificultades presentes en los estudiantes al enfrentarse a situaciones modeladas bajo el concepto de función racional y se hace fuerte hincapié en algunos procesos generales sobre los que recae un papel preponderante en el diseño de la prueba de aula.

2.2.1 Procesos generales

Los procesos generales tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la ejercitación de procedimientos; se hacen indispensable para que cada estudiante a través de las matemáticas aplique sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás.

A continuación, se explicitan algunos procesos generales que son importantes para el desarrollo de las actividades de la prueba de aula a realizar, y los conocimientos básicos más relevantes para su desarrollo, aclarando de antemano que se exponen solo los procesos

generales que se han considerado centrales en el diseño de la prueba; la no presencia de algunos procesos generales, no significa que no cumplan su papel dentro el diseño de la prueba.

El razonamiento: En el razonamiento matemático se entiende como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión y permite a los estudiantes habilidades como:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

La Comunicación: Permite a los estudiantes construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Ayuda para que ellos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. Los estudiantes desarrollan habilidades como:

- Seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas.

- Hacer informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.
- Frecuentemente están pasando del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas y al de la tecnología.

La Modelación: El proceso de modelación produce una imagen simplificada y también una imagen fiel de alguna parte de un proceso real existente. Se conoce como una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas.

Estos procesos expuestos anteriormente son de gran relevancia, los cuales serán tenidos en cuenta para que, en el momento del diseño de la prueba, se resalten las dificultades y errores de los estudiantes a partir de las actividades propuestas en la prueba de aula.

2.2.2 Conocimientos Básicos

Se relacionan con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

Dentro de los conocimientos básicos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se encuentran plasmados cinco pensamientos contribuyentes al desarrollo del pensamiento matemático para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los cuales son: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistema geométrico, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Para los intereses de este trabajo se tendrá en cuenta particularmente el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, puesto que, si del concepto de función se trata, este es uno de los pensamientos con mayor desarrollo en los estudiantes. En lo que respecta al pensamiento variacional, este está ligado con el estudio de patrones, estructuras y regularidades, donde los estudiantes puedan describirlos como relaciones o reglas generales y así explicar su razonamiento empleando justificaciones y demostraciones matemáticas.

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas, según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; MEN, 2006) proponer el desarrollo de pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter-estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas en la actividad práctica del hombre (MEN, 1998).

Este pensamiento es muy importante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales, sociales y las matemáticas mismas, a través del análisis de fenómenos de variación (por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes o el cambio de la temperatura durante el día o el flujo de vehículos frente a una institución durante una mañana). El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución

de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas.

2.3 Referente Didáctico

Para efectos de esta investigación, se hace necesario delimitar algunos aspectos que constituyen a su fundamentación didáctica. Estos aspectos pueden plantearse como dificultades y errores que presentan los estudiantes en el momento de interactuar con los conceptos matemáticos modelados en situaciones problema. Para ello, se tomarán como referencia las investigaciones realizadas por Socas, M. (1997), Rico L. (1995b) en cuanto a las dificultades y los errores en las matemáticas y la propuesta de Rico, L. (2009) para la definición y caracterización de las representaciones, en la didáctica de las matemáticas. Inicialmente se muestra un contraste sobre la clasificación de las dificultades y errores, *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas*: se centran diferentes conflictos asociados a la comprensión y la comunicación de los objetos matemáticos. Los principales problemas nacen con la ruptura de reglas gramaticales o falta de ortografía, esto debido a que, el lenguaje de las matemáticas es específico, sometido a reglas exactas que permite la interpretación exacta de sus signos. entre los documentos, Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas de Luis Rico (1995b) y Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria de Socas (1997). Y posteriormente se muestra agrupación de algunas dificultades, asociadas al concepto de función en general.

2.3.1 Sobre dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas

Desde la década de los setentas, el análisis de las dificultades y los errores se ha convertido en una prioridad para algunos autores como Azcárate et al. (1996); Rico, (1995b); Rico, (1995a); Villarreal (1990, 1992, 1996); Mulhern, (1989); Radatz (1980), entre otros. Esto debido a que el aprendizaje y el rendimiento académico de cada uno de los alumnos, depende significativamente del protagonismo que los docentes dejan recaer sobre las

dificultades y los errores de los estudiantes y la forma en que se trabaja con ellos (Engler et al., 2004).

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes se pueden ver enfrentados a una gran variedad de dificultades que pueden ser de distinta naturaleza, por la cual pueden ser abordadas desde distintas perspectivas. Estas dificultades se conectan y se refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculo y se manifiesta en los alumnos en forma de errores. Para esta situación, la labor del docente debe enfocarse en entender los errores específicos de sus alumnos como una fuente de información de las dificultades en las matemáticas que requieren un esfuerzo mayor para su superación, por ello, puede considerarse como una de las manifestaciones de los estudiantes que requiere mayor atención en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Según Rico L. (1995b), un error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas. Al exponer este tipo de afirmaciones, Rico (1995b), reconoce que el papel que cumple el error dentro de los procesos de aprendizaje es de gran importancia, tanto así que él los considera (los errores y dificultades en el aprendizaje) como organizadores del currículo. Ellos forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de matemática y constituyen datos objetivos que encontramos permanentemente a lo largo del proceso educativo (Engler et al., 2004).

Las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran señales de serias deficiencias e incluso fracaso en la enseñanza, teniendo esta, como un objetivo permanente, lograr un correcto aprendizaje en los estudiantes (Engler et al., 2004). No se puede desconocer que los errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables, es por eso, que los estudios encaminados

en esta dirección, generan gran interés, puesto que son fuente inagotable de conocimientos que podemos explotar para profundizar en el pensamiento matemático.

A continuación, se cita una reflexión de cada uno de los tópicos en los que se organizan las dificultades propuestos por Socas (1997), en el documento de Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, relacionándolo con la clasificación de los errores que se manifiestan en los alumnos propuesta por Raddatz (citado por Rico, 1995b) en el documento errores y dificultades en aprendizaje de las matemáticas.

Para este tipo de dificultades encontramos enmarcados algunos errores presentados en la clasificación realizada por Raddatz (citado por Rico, L. 1995)

- Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores en los estudiantes.
- Interpretación incorrecta del lenguaje, particularmente cuando se realiza un cambio de registro de representación se considera una posible causal de error en los estudiantes.

Dentro del concepto de función racional este tipo de dificultades suele manifestarse cuando los estudiantes practican el ejercicio de pasar de un modo de representación a otro y más cuando esto se hace de forma no tradicional, es decir, los errores son más evidentes cuando el estudiante quiere pasar de una representación gráfica a una representación tabular y posteriormente a una algebraica.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: en este tipo de dificultades, juega un papel preponderante el aspecto deductivo formal en la lógica de las

matemáticas y en las rupturas que se generan en relación con las formas de pensamiento matemático. Se responsabiliza a la exclusión de situaciones en las que se haga uso de las demostraciones formales, en los programas de matemáticas en la educación secundaria, de que los estudiantes no desarrollen la capacidad de completar una secuencia de un argumento lógico. Este tipo de dificultades pueden manifestarse con algunos errores, según la clasificación de Socas (1997).

Errores que tienen su origen en una ausencia de significado, los cuales organizan en tres grupos:

- Errores en el álgebra que tienen su origen en la aritmética, se presentan a la hora de llevar a cabo procesos algorítmicos
- Errores de procedimiento, las cuales se deben al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.
- Errores de álgebra debidos a las caracterizaciones propias del lenguaje algebraico.

Las Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático también son manifestadas en errores debidos a la asociación incorrecta o la rigidez del pensamiento, errores debidos a la aplicación de reglas y estrategias irrelevantes, o inferencias no válidas lógicamente, en este último se incluyen errores producidos por un mal razonamiento.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza: tienen que ver con la institución educativa, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza. La institución tiene la obligación de proporcionar un ambiente educativo que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de las matemáticas de acuerdo con los materiales curriculares, recursos y estilos de enseñanza.

Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: de acuerdo con lo que corresponde a este tipo de dificultades, se hace necesario conocer información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje, el desarrollo intelectual de los estudiantes por un modo característico de razonamiento y tareas específicas de matemática que ellos pueden hacer, puesto que dicha información, dota al docente de herramientas valiosas para el diseño de actividades y material de enseñanza.

Dentro de estas dificultades se incluyen los siguientes errores caracterizados por Raddatz y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky O. & Inbar S (citados por Rico, 1995).

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, es decir dificultades crear imágenes mentales de algunos contenidos matemáticos.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas: por lo general estas dificultades están asociadas a los sentimientos de miedo y tensión que padecen los estudiantes hacia las matemáticas, este sentimiento ocasiona bloqueos que afectan en la actividad matemática. Según Socas (1997) estas dificultades se relacionan a los errores que tienen su origen en actitudes afectivas hacia el álgebra, tales como: falta de concentración, bloqueos, olvidos, etc.

2.3.2 Dificultades en el aprendizaje de las funciones y funciones racionales

El concepto de función, se considera como una de las herramientas fundamentales, contribuyentes al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, por tal razón se promueve necesariamente su articulación en los procesos académicos de los estudiantes, y esto ocasionalmente revela algunos obstáculos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje

del concepto. A continuación, se relacionan una posible agrupación de algunas de las dificultades más concurrentes en la interacción de los estudiantes con el concepto.

Dificultades asociadas a las formas de representación y su pasaje entre ellas: autores como Artigue, M. (1995), Duval, R. (2000), entre otros, concuerdan en que una de las mayores dificultades de aprendizaje y apropiación del concepto de función por parte de los estudiantes, se visualiza en la ruptura de la congruencia cuando se pasa de una forma representación a otra, lo que Duval denomina cambios de registro de representación o conversión (citado por García, 2004). Se responsabiliza a los hábitos de la enseñanza tradicional por este tipo de dificultades, puesto que, el nivel de importancia que se le otorga a la representación algebraica, supera en muchas ocasiones a otros tipos de representación, impidiendo que el estudiante genere conexiones con las otras representaciones (García, 2004).

Ahora centrándose en este tipo de dificultades, pero específicamente en el concepto de función racional, las dificultades se manifiestan cuando el estudiante no reconoce una expresión algebraica racional con denominador cero y expone en su gráfica una exclusión de la asíntota de la gráfica (Arce y Ortega, 2013).

Dificultades relacionadas con las características de las funciones: este tipo de dificultades se generan por la mala caracterización de las funciones. Casos como el de “exclure” la importancia del infinito en una gráfica dibujada en el pizarrón o la aclaración del porqué no se presenta la gráfica completa y solo se expone la parte necesaria de la gráfica. Por otro lado, la no identificación y relación de los elementos de la relación funcional involucrada en la situación, los estudiantes presentan serias dificultades para identificar los elementos de una función, hecho que se visualiza al encontrar la dependencia de las magnitudes que se involucran en la situación (Gómez; Hernández; Chaucanés 2015).

Dificultades asociadas al uso de las representaciones gráficas: García (2004), menciona que la utilización que se le da a las formas de representaciones gráficas, suele ser de ilustración o de soporte. Hecho que genera deficiencias en los estudiantes para interpretar o extraer datos de las gráficas, mostrando por lo menos dos antecedentes responsables a este tipo de consecuencias: (1) la falta de práctica o de manipulación en el trabajo con gráficos; (2) la incapacidad de enfrentar situaciones poco habituales (García, 2004).

En este caso, las deficiencias en cuanto a las funciones racionales de este tipo se relacionan con el desconocimiento de las propiedades de las funciones como por ejemplo, el papel que cumplen las asíntotas dentro de las gráficas, lo que provoca una dificultad para discernir el comportamiento de la función.

2.3.3 Sobre las representaciones en las matemáticas

Diversas investigaciones (Hiebert y Carpenter, 1992; Duval, 2004; Janvier, 1987; Janvier, Girardon y Morand, 1993; Kaput, 1992; entre otros) se han centrado en el análisis del papel que tiene las representaciones en el aprendizaje de la matemática, así como el estudio de la influencia que posee el manejo de varias representaciones para lograr la aprehensión de un objeto matemático. Los trabajos desarrollados por Kaput (1991), Goldin y Kaput (1996), Duval (2000), han resaltado que la flexibilidad en el manejo de los diferentes sistemas de representación, posee un papel preponderante en cuestiones de la aprehensión de un concepto, aunque sus posiciones no coincidan en su totalidad. Razón por la cual, en el marco de esta investigación se hace necesaria la exposición de este tipo de argumentos, enmarcados en su importancia dentro de un concepto como el de función y particularmente en las funciones racionales.

Según la Real Academia Española de la Lengua (RAE, 2015) la palabra “representación” concuerda con una variedad de definiciones, según el plano en que se situé, para efectos de esta investigación, se le dará importancia a la definición correspondiente al área de las Matemáticas en el campo de la didáctica de las matemáticas, definición citada a continuación:

Representación: imagen o concepto en que se hace presente la conciencia de un sujeto exterior o interior (RAE, 2015).

Para Rico (2009), las representaciones se conocen como todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.

Las representaciones son reconocidas en dos grupos los cuales se diferencia con una característica en particular. Las representaciones internas en las que se engloba el mundo de las estructuras mentales y las conceptualizaciones de los objetos matemáticos a las que se refiere Duval. Y las representaciones externas en las que se engloban el mundo de las estructuras físicas y los sistemas de notación o sistemas semióticos.

Las representaciones físicas o externas: son de percepción física dentro de la cuales se distinguen cuatro grupos.

Las representaciones como enunciados verbales: la palabra es un complejo representativo e incluye la palabra oída, la palabra emitida, la palabra escrita y la palabra leída. De ahí que las representaciones verdaderas se puedan reducir a una imagen visual (Rico, 2009).

Las representaciones simbólicas: Entre estas se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009). Los sistemas de

representación simbólico-algebraicos cumplen un papel preponderante dentro de los sistemas de representación, puesto que en lo referente a la funciones racionales, permiten el manejo o la manipulación operatoria de las mismas, facilitando en los estudiantes un acercamiento a una variedad de aspectos que son propios de las funciones en general y particularmente de las funciones racionales, tales como el dominio, el rango, las asíntotas, entre otros, además de que para su tratamiento, le exigen al estudiante la aplicación de otros conceptos matemáticos como la factorización, la resolución de ecuaciones, e inecuaciones algebraicas, etc.

Las representaciones gráficas: recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación. (Castro y Castro, 1997; citados por Rico, 2009). Este tipo de representaciones permite visualizar más fácilmente el comportamiento de la función, da un acercamiento más específico que las representaciones simbólicas en aspectos como las asíntotas, dominio y rango, además de exponer características de las funciones como los puntos de corte, la concavidad, crecimiento o decrecimiento, entre otros.

Además de las representaciones citadas anteriormente, autores como Kaput (1991), indican que la representación tabular también es importante dentro de las matemáticas puesto que permite describir algunas características de la función desde la perspectiva de sus valores numéricos, además de que brinda con mayor facilidad el acercamiento a aspectos como la independencia y dependencia de las variables. Aunque es uno de los sistemas de representación más utilizados en las matemáticas escolares dentro de lo que corresponde al concepto de función, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional.

Cabe aclarar que para los intereses de esta investigación los sistemas de representación simbólico-algebraico, tabular y gráfico, cobran un papel protagónico en el diseño de la prueba de aula, puesto que este tipo de representaciones permite acceder al estudio del concepto de función racional.

Ahora bien, el papel que tiene las representaciones en el aprendizaje de la matemática, así como el manejo de diversos sistemas de representaciones es de gran importancia en el objetivo de lograr la aprehensión de un objeto matemático, y esto se justifica en los siguientes argumentos:

Primero, hay facetas y acciones ligadas a un concepto que se manifiestan con más claridad en un determinado sistema de representación que en otros (Romero y Rico, 1999). Esto es perceptible en las funciones racionales refiriéndose por ejemplo a las asíntotas, dentro de las representaciones simbólicas habría que recurrir en muchos casos a procedimientos matemáticos, para lograr su percepción, teniendo en cuenta que esta no es completa, mientras que en las representaciones gráficas se hace más fácil su percepción. Además, si cada sistema de representación ofrece una consideración parcial para un concepto, el cruce de representaciones relativas a ese concepto mejora la información sobre el mismo (Duval, 2004).

Segundo, el manejo de al menos dos sistemas de representación justifica la comprensión del objeto matemático, esta coordinación se visualiza por la rapidez y la naturalidad de la actividad cognitiva de traducción (Duval, 2004).

Duval, hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a su significado y funcionamiento y es esencial en la actividad matemática, poder movilizar varios sistemas de representación en el curso de una misma

acción, permite que los estudiantes adquieran cierta flexibilidad en cuanto al manejo y la comprensión de un concepto (citado por Romero y Rico, 1999).

Capítulo 3.

Metodología de la investigación y análisis de resultados

3 Capítulo 3. Metodología de la investigación y análisis de resultados

En este capítulo se presenta la metodología que permite el desarrollo del presente trabajo de investigación, el diseño de la prueba y su implementación, y el análisis de los resultados de la implementación. A continuación, se muestran aspectos como el tipo de metodología empleada, el desarrollo del estudio y el cronograma de trabajo, luego se hace una descripción de la prueba posteriormente se presenta el diseño de la prueba y algunos aspectos relevantes de su implementación, y por último el análisis de los resultados fruto de la implementación de la prueba de aula con estudiantes de grado undécimo.

3.1 Diseño metodológico

En este apartado, se muestran aspectos como el tipo de metodología empleada en este trabajo, el desarrollo del estudio y el cronograma de trabajo además de la descripción de la prueba y la presentación de su diseño.

3.1.1 Enfoque metodológico

En la presente investigación se plantea la metodología de tipo cualitativa propuesta por Monje (2011), puesto que este tipo de metodología es de corte descriptivo y tiene como propósito, el análisis del comportamiento en su ámbito natural y se propone la exploración de los conocimientos y valores que comparten los individuos en un determinado contexto. Además, en el corte descriptivo se procede con base en la información obtenida, a ordenar los rasgos, atributos o características de la realidad observada de acuerdo con el problema investigativo planteado (Monje, 2011).

La investigación cualitativa intenta hacer una aproximación global de las situaciones sociales para explorarlas, describirlas y comprenderlas de manera inductiva, explora y reconoce conceptos o contenidos, y además genera posturas o proyecciones teóricas.

Al adoptar este tipo de metodología en el presente trabajo, no solo se adopta su forma de entenderla sino también sus formas de proceder. A continuación, se exhibe una breve síntesis de esta metodología en la figura 9.



Figura 9. El proceso de la investigación cualitativa (tomado de Bonilla y Rodríguez, 1997, p. 76)

Este tipo de metodología se asemeja con los requerimientos de los propósitos generales de este a investigación, la cual se ha inspirado en la modalidad de la investigación exploratorio puesto que el propósito del trabajo se centra en la caracterización de algunas dificultades presentes en la interacción del estudiante con situaciones problemas modeladas bajo el concepto de función racional. Se tomó la decisión de seguir las pautas propuestas por monje (2011), para el desarrollo del actual estudio, ya que se pretende caracterizar, y analizar cada una de dichas dificultades y la exploración de los conocimientos y valores que comparten los estudiantes en un determinado contexto y con determinadas situaciones, son

características aportadas por monje (2011), en su descripción del modelo de investigación cualitativa, que servirán de “faro”, para el desarrollo del trabajo.

3.1.2 Proceso del estudio

La metodología propuesta por monje (2011), que se desarrollará para la ejecución de esta investigación, se encuentra discriminada en tres Fases: la primera es la definición de situación-problema, y esta, a su vez cuenta con dos etapas; la etapa reflexiva y la etapa de diseño. La segunda fase es el trabajo de campo, la cual cuenta con dos etapas; acceso al campo y la recolección de datos. Por último, la tercera es la identificación de patrones culturales, que se divide en tres etapas que son el análisis, la interpretación y conceptualización inductiva. A continuación, se describe cada una de ellas, enfocando cada una en las acciones a realizar para efectos de desarrollo de la investigación:

Fase 1, de definición de situación-problema: Esta primera fase, consta de dos etapas que son la exploración de la situación y el diseño. La primera etapa, permite establecer una fundamentación teórica con respecto a la problemática correspondiente y dirección del trabajo; es decir, en esta fase se establece el objeto de investigación, el campo de investigación, y las fuentes de información que permita formar una base teórica sólida alrededor del concepto de función racional, con elementos fundamentales para la creación de la prueba de aula. La segunda etapa permite un posible planteamiento del diseño de la investigación, es decir, se realiza el diseño de la prueba de aula articulando los referentes conceptuales estudiados previamente (matemático curricular y didáctico) en torno a la función racional.

Fase 2, trabajo de campo: Se entiende como un proceso por el que el investigador va accediendo progresivamente a la información fundamental para su estudio, es decir, el momento el cual el investigador implementa la prueba de aula.

Para esta fase se hace la selección de la población, la cual consta de 20 estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escipión Jaramillo del municipio de Caloto-Cauca, selección que se propone de forma aleatoria de los tres grupos puesto que la institución cuenta con tres cursos en este nivel. Es importante señalar que el proceso de selección de los estudiantes se hace teniendo en cuenta como único requisito, que los ellos ya tengan un conocimiento acerca de las funciones racionales y de los conceptos propios de este tipo de funciones. Y esta información se obtuvo del análisis del plan de aula del grado undécimo de la institución y se corrobora en entrevistas con los profesores de matemáticas de estos cursos.

Al igual que la primera fase, esta también se divide en dos etapas: La primera de ellas, tal y como se indicó anteriormente, es la implementación de la prueba, en la cual se recogen los datos por medio de diferentes sistemas de observación tales como grabaciones en vídeo, apuntes, observaciones no estructuradas, que son de soporte para la recopilación de información. La segunda etapa hace referencia a los procesos que se emplean para simplificar la recolecta de dato, es decir, la selección de la información de acuerdo con las necesidades teóricas del estudio planteadas en la fundamentación teórica, sobre las dificultades y errores de los estudiantes y las formas de representación utilizadas.

En esta etapa, se inicia un proceso de recogida de aquellos datos que realmente interesan al desarrollo de la investigación, como aquellas situaciones en las que los estudiantes presentan dificultades, de tal forma que se evite la recogida de informaciones innecesarias.

Fase 3, De identificación de patrones culturales: con esta fase, se hace la culminación del trabajo, realizando el análisis de los datos recogidos en la implementación de la prueba de aula. Esta fase consta de tres etapas: en la primera etapa se analizan las respuestas y acciones de los estudiantes producto de la interacción con las diferentes situaciones propuestas en la prueba de aula referentes al concepto de función racional y se contrastan con aquellos elementos propuesto en la fundamentación teórica y de los que surjan sobre el análisis mismo que se hace de los datos recogidos, que para en caso tendría que ver con la exposición de las posibles dificultades y errores presentes en los estudiantes al realizar cada una de las actividades. La segunda etapa se relaciona con la propuesta de las conclusiones. Y finalmente la tercera etapa, que establece la realización de algunas recomendaciones o reflexiones de orden didáctico, que para efectos de la investigación se propone establecer una clasificación de esas posibles dificultades y errores expuestas en torno a la interpretación y el análisis de funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

3.1.3 Propuesta de trabajo

A continuación, se presenta en la tabla 5, la propuesta de trabajo en el que se exhiben una serie de actividades que se emplean en cada fase del desarrollo de la metodología del presente trabajo para el cumplimiento de cada una de sus etapas y posteriormente de sus fases.

Tabla 5.
Propuesta de trabajo. Tabla de actividades

Fase	Etapas	Actividad
Fase 1; definición de situación problema	Etapa Reflexiva	- Realizar una investigación bibliográfica sobre elementos conceptuales de orden Didáctico entorno al estudio de las funciones racionales. - Realizar una investigación bibliográfica sobre elementos conceptuales de orden Matemático entorno al estudio de las funciones racionales. - Realizar una investigación bibliográfica sobre elementos conceptuales de orden Curricular entorno al estudio de las funciones racionales. - Realizar una rejilla que articule los aspectos importantes de orden matemático, didáctico y curricular en torno a las dificultades de los estudiantes para con el concepto de función racional.
	Etapa de Diseño	- Realizar una investigación documental sobre actividades modeladas bajo el concepto de función y función racional. - Realizar un contraste entre las actividades investigadas y realizar una clasificación de los elementos del más problemáticos para en la enseñanza del concepto. - Proponer un posible diseño de la prueba de aula, enfocada en aquellos elementos problemáticos del concepto de función racional. - Seleccionar los elementos conceptuales pertinentes para la elaboración de la prueba. - Clasificar dichos elementos y agruparlos con el fin de justificar cada una de las actividades de la prueba. - Diseñar actividades, justificando cada uno de los grupos de elementos conceptuales. - Articular cada una de las actividades consecutivamente en una prueba.
	Acceso al Campo	- Indagar en algunas instituciones educativas de Santander de Quilichao o de Caloto el plan de área de los grados décimo y undécimo con el objetivo de verificar la interacción de los estudiantes con el concepto de función racional. - Seleccionar las instituciones que cuentan con las condiciones necesarias para la aplicación de la prueba. - Realizar una consulta con los profesores de matemática de las instituciones con el fin de asegurar la interacción de los estudiantes con el concepto y la selección de la institución. - Seleccionar un grupo de estudiantes de la institución para aplicar la prueba.
Fase 2; trabajo de campo	La Recolección de Datos	Elaborar una rejilla de evaluación para la recolección de los resultados de la prueba.

Fase 3; de identificación de patrones culturales		• Agrupar y clasificar los datos recogidos.
	<i>Análisis</i>	• Analizar los resultados. • Contrastar los resultados con aquellos elementos propuesto en la fundamentación teórica.
	<i>La Interpretación</i>	• Proponer una serie de conclusiones de acuerdo con el análisis obtenido de los resultados
	<i>Conceptualización Inductiva</i>	• establecer una clasificación de las dificultades y errores expuestas por los estudiantes en la aplicación de la prueba.
<i>Propuesta de actividades para el desarrollo cada una de las fases</i>		

3.1.4 Población

La aplicación de la prueba de esta investigación tuvo lugar en la Institución Educativa Escipión Jaramillo del municipio de caloto en el departamento del cauca, se desarrolla con estudiantes de grado undécimo de media secundaria, con edades entre los 16-18 años.

El Institución Educativa Escipión Jaramillo es una institución educativa de carácter técnico y pública, ubicada en la carrera 5 no. 15-77 en el barrio la unión del municipio de caloto, Institución Oficial con Resolución:043 abril 26 de 2004 DANE:119142000471. La institución cuenta actualmente con una población estudiantil de aproximadamente 890 estudiantes que pertenecen en su mayoría a los estratos 1, 2 y 3 del municipio de caloto con sus veredas aledañas y algunos municipios vecinos, solo cuenta con la jornada de la mañana para los estudiantes de la básica secundaria y los estudiantes de los grados superiores tiene horario extendido para los procesos técnicos educativos de los estudiantes, que tiene que ver con las modalidades de ebanistería, electricidad electrónica, tecnología e informática, y contabilidad y finanzas. La población estudiantil está dividida 24 cursos, cada grado de escolaridad cuenta con 4 cursos identificados por números (6° - 1; 6° - 2; 6° - 3; 6° - 4).

Los estudiantes seleccionados para la aplicación de la prueba pertenecen al grado undécimo, con el único criterio de selección de que ya tuvieran conocimiento de las funciones racionales. Se hizo la selección al azar de 8 estudiantes entre tres de los cuatro cursos que cuenta el colegio de los cuales tres salieron de 11-1, tres salieron de 11-2 y 2 salieron de 11-4, cuatro hombres y cuatro mujeres, con edades entre los 16 y 18 años.

3.1.5 Herramientas de recolección de datos

Para el desarrollo de esta investigación, se utilizaron las herramientas para recolección de datos e información dentro de las que encontramos el cuestionario, en el cual estaban plasmadas todas las preguntas que los alumnos deberían contestar; una hoja en blanco, que sería utilizada por los estudiantes para realizar los procedimientos que permitiera encontrar la respuesta al cuestionario; una cámara fotográfica en la cual se hace el registro de imágenes de los ejercicios realizados por los estudiantes durante el proceso de la solución del cuestionario; lápiz y borrador los cuales son herramientas básicas para el desarrollo del cuestionario.

Adicionalmente se tiene marcado y tablero que sería utilizado por el investigador a cargo de la prueba para realizar aclaraciones de dudas grupales presentes en los estudiantes al momento de la ejecución del cuestionario, un computador y videobeam utilizados para socializar el cuestionario y proyectar los ítems que se iban realizando durante el desarrollo de la prueba.

3.1.6 Descripción general de la prueba

Como primera medida se aclara que la prueba corresponde a un diseño inédito, la cual fue realizada en consenso con el director de la investigación para el planteamiento de cada una de las preguntas al que apunta a un objetivo en específico, además, las gráficas al igual que las que aparecen a lo largo del trabajo fueron elaboradas con ayuda de un software de geometría dinámica (geogebra) con el fin de ser más precisos en su prestación.

El propósito de la prueba es indagar acerca las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las funciones racionales. Para su elaboración, se toman en cuenta los aspectos de orden matemático expuestos en el referente matemático en el capítulo dos de esta investigación, que fueron seleccionados con base a lo descrito en los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se toman en cuenta también aspectos propuesto por el MEN (1998), en el marco de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y, por último, como referencia algunas dificultades y errores arrojadas por investigaciones como las de Socas, M. (1997), y Rico L. (1995).

Los aspectos matemáticos fundamentales que se involucran en la prueba y son objeto de indagación, tienen que ver con la definición y el reconocimiento de las funciones racionales y algunos aspectos característicos, como el dominio de las funciones, las asíntotas y sus transformaciones, empleando las diferentes formas de representación propuestas (la simbólica, la tabular y la gráfica) en cada una de ellas.

Estructura de la prueba de álgebra: La prueba consta de 17 preguntas en distintos formatos, distribuidas en cuatro categorías y empleando cada uno de los sistemas de representación planteados, a continuación, se especifica cada una de las categorías:

La primera categoría, sobre el reconocimiento de funciones racionales, corresponde de la pregunta uno a la cuatro (1 - 4) en el que se plantea como objetivo, el indagar sobre la familiarización que tiene los estudiantes con algunas funciones racionales y los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de las funciones racionales, que se hace por medio de algunos de los sistemas de representación (simbólico y gráfico).

Dentro de esta categoría se encuentran 4 preguntas; la primera pregunta da cuenta del sistema de representación simbólico y es una pregunta de selección múltiple con múltiples respuestas, en donde las respuestas correctas corresponden a las opciones $g(x)$, $h(n)$ y $l(x)$, además le pide al estudiante que justifique la respuesta; la segunda pregunta hace alusión al sistema de representación gráfico y está diseñada con opción múltiple con múltiples respuestas y la justificación de las mismas, en donde las opciones correctas corresponden a las gráficas B y F; la tercera pregunta hace parte del sistema de representación gráfico y es diseñada con opción múltiple y múltiples respuestas, las opciones que se consideran correctas son A, C y E y al finalizar se solicita la justificación de la respuesta; la pregunta número 4 es una pregunta argumentativa, donde se le pide al estudiante que dé respuesta con sus conocimientos adquiridos.

La segunda categoría, sobre el dominio de las funciones racionales, corresponde de la pregunta cinco a la diez (5 - 10) en el que se plantea como objetivo, indagar sobre los conocimientos que tienen los estudiantes acerca del dominio de las funciones racionales, para esta categoría se utilizan los sistemas de representación planteados (simbólico, tabular y gráfico). La quinta pregunta pertenece al sistema de representación simbólico, diseñado

con opción múltiple de múltiples respuestas y justificación de la misma, las respuestas correctas corresponden a las opciones B y F; la sexta pregunta se encuentra incluida en el sistema de representación simbólico de opción múltiple con múltiple respuesta y justificación de la misma, las opciones consideradas las correctas son la respuesta C y E; la séptima pregunta corresponde al sistema de representación tabular diseñado con opción múltiple de múltiple respuesta, las repuestas correctas corresponden a las opciones $h(x)$ y $j(x)$, para finalizar se le pide al estudiante la justificación de su respuesta; la octava pregunta corresponde al sistema de representación grafico diseñada de forma argumentaría; la novena pregunta se encuentra dentro de la categoría de representación simbólica, diseñada de forma argumentaría; la decima pregunta corresponde al sistema de representación simbólico y esa expresada de forma argumentaría.

La tercera categoría, sobre el comportamiento asintótico de las funciones racionales, corresponde de la pregunta once al trece (11 - 13) en el que se plantea como objetivo, indagar sobre los conocimientos que tienen los estudiantes acerca las asíntotas de las gráficas de las funciones racionales, para esta categoría se utilizan los sistemas de representación simbólico y gráfico; la pregunta 11 corresponde al sistema de representación gráfica y está diseñada de tipo argumentativo; la pregunta número 12 pertenece al sistema de representación simbólica, de tipo argumentativo; la pregunta 13 es una pregunta diseñada de tipo argumentativo.

La cuarta categoría sobre las transformaciones de las funciones racionales corresponde de la pregunta once a la trece (14 - 17) en el que se plantea como objetivo, indagar sobre los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de las transformaciones de las funciones

racionales, utilizan los sistemas de representación simbólico tabular y gráfico, la pregunta 14 corresponde al sistema de representación gráfica y está diseñado de tipo argumentativo; la pregunta 15 pertenece al sistema de representación simbólico y está diseñado de tipo argumentativo; la pregunta 16 corresponde al sistema de representación gráfica y esta expresada de tipo argumentativo; la pregunta 17 pertenece al sistema de representación simbólico y está diseñado de forma argumentativa.

3.2 Análisis de los resultados

En este apartado, se explicitan los resultados y sus respectivos análisis, obtenidos como consecuencia de las actuaciones de los estudiantes al resolver las tareas propuestas en la prueba de aula. Estos resultados se obtienen a partir de técnicas de recolección de datos que principalmente fue la producción escrita de los estudiantes en las fotocopias donde aparecía las preguntas de la prueba, además de otras herramientas ya mencionadas anteriormente. Para el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba de aula, inicialmente se hace una revisión de cada una de las preguntas, luego, según la interpretación del investigador se procede con la presentación de las respuestas de los estudiantes, en una tabla de tres columnas en las que se relaciona cada una de las preguntas, el estudiante (a quienes identificamos en adelante como E1, E2, E3, o E4), el tipo de respuesta y la frecuencia absoluta (F. A) respectiva. Esto con el fin de tratar de interpretar las respuestas de los estudiantes y encontrar algunas relaciones entre ellas.

Posteriormente se procede a realizar el respectivo análisis a cada una de las respuestas de acuerdo a criterios de análisis establecidos en coherencia con elementos teórico propuestos en el Marco de Referencia Conceptual, para culminar con la generalización y la propuesta de las posibles dificultades encontradas en las respuestas de cada una de las preguntas, de acuerdo a los análisis.

A continuación, se procede con el análisis de cada una de las respuestas.

Tabla 6.
Tabla de análisis de resultados pregunta 1

Pregunta 1		
Dadas las siguientes expresiones algebraicas, indica cuáles de ellas corresponden a una función racional. Justifica tu respuesta. $f(m) = \frac{3m^2 - 5m + 1}{6} \quad g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x+2)^2} \quad h(n) = \frac{n}{n^3 - 9}$ $i(w) = w^2 - 6w + 9$ $l(x) = \frac{16x^2 - 2}{x^4 + 2x + 1} \quad m(a) = \frac{2a(a^2 + 2)}{4a}$		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	Las funciones son $g(x)$ y $l(x)$ porque son referentes a la x y al cuadrado que lleve cada una.	1
E2	Las expresiones que no son $f(m)$ y $i(w)$ primero por $f(m)$ en el 6 y $i(w)$ no cumplen con la estructura de la función racional.	1
E3	$g(x)$, $h(n)$, $l(x)$, $m(a)$ Son funciones algebraicas porque cada una está en términos de la otra tanto en el numerador como el denominador.	1
E4	$g(x)$, $h(n)$, $l(x)$ corresponden a una función racional porque son aquellas que cumplen la condición que es en fracción y en su denominador hay una variable.	1

Lo que se puede interpretar con respecto a la respuesta de **E1**, es que él no reconoce las principales características de las funciones racionales, puesto que el estudiante en esta pregunta elige las opciones $g(x)$ y $l(x)$ como correctas y en este caso, aunque las funciones pertenecen al grupo de las racionales, la particularidad de ellas corresponde a que están en términos de una variable x , esto da a pensar que el estudiante podría tener un conocimiento erróneo de que las funciones son consideradas racionales siempre que estén expuestas en variable x , de modo que basados en esta afirmación, expresiones como $2x +$

1 o $x^2 + 3$ para **E1** serían parte del grupo de las funciones racionales e incluso podría pensarse que para él, expresiones como $f(a) = \frac{a^2+3}{a}$, siendo funciones racionales, no serían reconocidas por él como tal. Esto reafirma cuando se observa que el estudiante no marca la función $h(n)$ que es una opción correcta, pero que no está en términos de la variable x .

Aparte de eso el estudiante da a entender que para él las funciones racionales corresponden no sólo a funciones que llevan variable x , sino que, además dichas variables deben estar elevadas al cuadrado, y los resultados muestran evidencia cuando menciona “referentes a la x y *al cuadrado que lleve cada una*”. Este podría ser el motivo de peso por el cual **E1** excluyó de sus respuestas a la función $h(n)$, que corresponde a una función racional, además de que se pensaría que podría tener una confusión entre este tipo de funciones y las funciones cuadráticas. Así, podría decirse que el estudiante está presentando dificultades en lo que corresponde al reconocimiento de las características principales de las funciones racionales puesto que el estudiante no especifica ni da muestra de la presencia de las características de estas funciones.

Analizando las respuestas que **E2** da a la pregunta uno, se puede notar que él tiene un acercamiento más claro de lo que corresponde a la estructura de una función racional, puesto que sus respuestas él centra su atención en las funciones que aparte de presentar una estructura fraccionaria también señala que “las funciones racionales corresponden a una función en cuyo denominador existe la presencia de una variable x ”, es decir que tiene claro que el denominador de una función racional debe ser un polinomio de un grado mayor a cero esto debido a que él afirma que $f(m)$ e $i(w)$ no son funciones racionales, y efectivamente estas no cuentan con una variable en su denominador. Pero a pesar de su

acercamiento a las respuestas, **E2** cometió un error al no darse cuenta que $m(a)$ corresponde a una función cuadrática y no a una función racional, después de sufrir un tratamiento en el que su denominador es simplificado.

Con respecto a **E3** se puede interpretar, debido a su respuesta que para él, una función es considerada racional cuando su estructura corresponde a una fracción porque el estudiante está hablando de un denominador y un numerador, además de esto podría decirse que el estudiante trata de referirse a una relación de dependencia cuando se refiere a que, “una está en términos de la otra”, pero también está claro que para el estudiante no es suficiente sólo con que la función corresponda a una expresión fraccionaria dado que, aunque no lo menciona explícitamente puede deducir con sus opciones de respuesta que el estudiante tendría claro, que en las funciones racionales es indispensable la existencia de una variable en el denominador.

En el caso de **E4** se puede afirmar que, de los estudiantes que presentaron la prueba según lo referente a la pregunta 1, es el más preciso en relacionar las características principales de las funciones racionales, puesto que afirma que las funciones elegidas por él, cumplen las condiciones, por un lado ser una expresión fraccionaria y por otro lado que su denominador presente una variable y efectivamente sus respuestas $g(x)$, $h(n)$ y $l(x)$ concuerdan con las justificaciones presentadas por el estudiante.

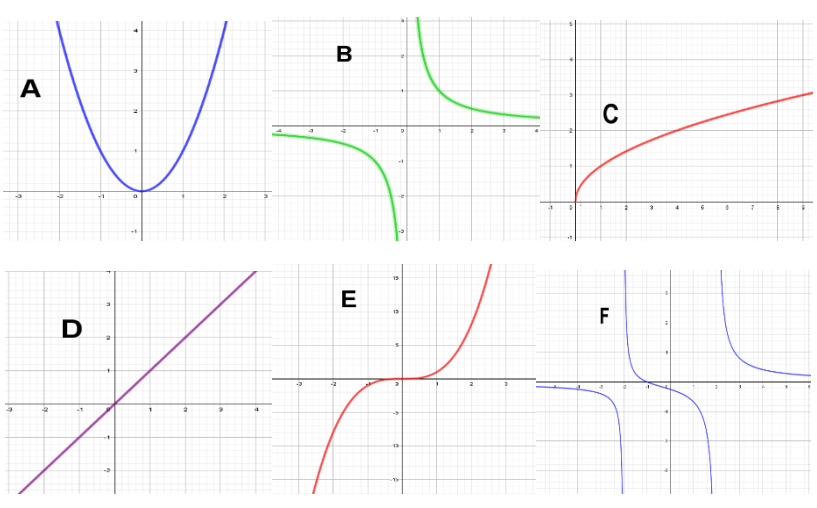
Finalmente podemos decir que de estos 4 estudiantes, 3 de ellos tienen una conciencia más o menos clara de lo que corresponde a la estructura de una función racional y particularmente el último de ellos es muy preciso al indicar cuál es esa estructura.

No obstante, salta a la vista dos errores contundentes de los estudiantes

por un lado, sostienen que las funciones racionales son aquellas funciones que están dadas en términos de variables x correspondiendo a ciertas expresiones que no siendo racionales por presentar variable x como $x + 3$ o $3x^2$ corresponden para él a funciones racionales y en otros casos funciones racionales en las que no hay presencia de la variable x como $f(a) = \frac{a^3+5}{a}$, no serían consideradas como funciona racionales de parte del estudiante.

Por otro lado, también es erróneo afirmar que las funciones racionales tienen que corresponder a expresiones de grado 2 y esto se debe principalmente a la dificultad que puede estar presentando él en la falta de reconocimiento de la estructura o características principales de las funciones racionales.

Tabla 7.
Tabla de análisis de resultados pregunta 2

Pregunta 2		
De las siguientes gráficas, cuáles corresponden a la gráfica de una función racional. Justifica tu respuesta.		
		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A

E1	A, B y E Son gráficas de funciones racionales porque son los que el tema nos está diciendo independientemente la función se acerca al eje y , pero nunca llega a tocarla	1
E2 y E3	Las gráficas B y F son funciones porque se puede notar las asíntotas en las que son los saltos de una función, además las gráficas están en dos de los cuadrantes, la cual es una de las características de las funciones.	2
E4	B y F Es una función racional porque tiene una asíntota	1

Lo que se puede evidenciar después de analizar la respuesta de **E1**, es que el estudiante en primera medida no tiene claro lo que implica un comportamiento asintótico en la gráfica de una función racional, puesto que el estudiante se centra sólo en que, en la función racional, la asíntota está situada siempre en el eje y , puesto que en su respuesta relaciona el eje con una asíntota afirmando que “la función se acerca al eje y , pero nunca llega a tocarla” y además de eso también lo evidenció al seleccionar la opción **a**, que siendo una función cuadrática no lleva asíntotas, al parecer el estudiante tienen una noción equívoca de lo corresponde a las asíntotas. Esto podría ser causante de confusiones futuras puesto que, en teoría, él podría pensar que cualquier gráfica dibujada en el plano cartesiano donde se muestre el eje y , estaría correspondiendo para él, a una función racional. Se puede evidenciar que el estudiante tiene grandes dificultades para identificar no sólo en la parte simbólica de los respectivo a las funciones racionales, sino también en la parte gráfica puesto que, no reconoce a una función racional representada en el plano cartesiano por medio de sus características.

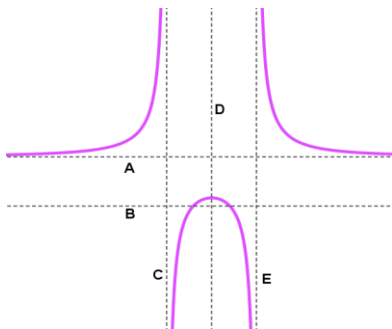
Las respuestas de los estudiantes restantes muestran que **E2**, **E3** y **E4** tienen una conciencia de lo que puede corresponder a la gráfica de una función racional, puesto que ellos se centran en analizar las asíntotas de una función ya que para los tres, es importante

que la gráfica de una función racional presenté asíntotas, esto les permite poder seleccionar las opciones correctas referentes a la pregunta, aunque los estudiantes **E2** y **E3** también resaltan que las gráficas de las funciones deben estar en dos de los cuadrantes del plano cartesiano afirmando que esta es una característica de las funciones racionales. Podría pensarse que los estudiantes centran su mirada solo en un caso particular de este tipo de funciones, para generalizar sus respuestas.

Esto deja claro, que el acercamiento que tienen, **E2**, **E3** y **E4** sobre las características de una gráfica de una función para que sea considerada racional tiene que ver mucho con sus asíntotas y lo muestran como una característica principal cuando se menciona en sus respuestas cosas en las que hacen referencia a que, “lo más importante o lo primordial para la gráfica es que presenta asíntotas.

Tabla 8.

Tabla de análisis de resultados pregunta 3

Pregunta 3		
Dada la siguiente representación gráfica de una función racional, determina cuáles de las rectas punteadas representan las asíntotas de la gráfica de función. Justifica tus respuestas. 		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	C, D, y E Son los valores que no pertenecen al dominio de la función racional definen en ella asíntotas, que son rectas a	1

	las que la función se acerca indefinidamente, pero no la intercepta.	
E2 y E4	La A, C y E son porque las asíntotas son aquellas por las cuales la gráfica no puede pasar, simplemente se acerca, pero no la toca.	2
E3	La E, la C, y la A porque en estos puntos es donde la gráfica tiene su salto.	1

En esta ocasión **E1** tiene una definición muy cercana y acertada a lo que corresponde en este caso a la asíntota de la gráfica de una función racional. La definición dada por el estudiante, muestra de cierta forma las características que tiene una asíntota, cuando él menciona que “son los valores que no pertenecen al dominio de la función racional”. Están dando cuenta de que sabe de la existencia de la relación entre el dominio y las asíntotas, es decir, el estudiante está hablando en un salto que da la función y que eso corresponde a un dominio discriminador de los números reales. Pero en contraste con todo esto, las respuestas que da el estudiante aunque dos de ellas son acertadas, una de ellas corresponde a una recta que intercepta a la función en un punto, lo cual, no la hace con las facultades necesarias para pertenecer al grupo de las asíntotas de la gráfica de la función presente, esto lo que muestra es que el estudiante a pesar de que tiene una definición muy cercana al concepto de asíntota, aún no encuentra relación entre los numerosos rechazados por el dominio de la función y la recta representada en la gráfica de la función como asíntota.

Para el caso de **E2**, **E3** y **E4**, aunque cada uno en su justificación, utilizan términos distintos, los tres tienen un acercamiento acertado a las posibles definiciones que se le podrían dar a lo que es una asíntota. Se nota que los estudiantes tienen claro cuáles son las características de las asíntotas, y tiene la capacidad de reconocer una asíntota, al menos en lo que respecta en el registro de representación gráfico.

Tabla 9.
Tabla de análisis de resultados pregunta 4

Pregunta 4		
Exponga a continuación algunas características que debe tener una función para que sea considerada racional.		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	Debe tener dominio $R - \{0\}$. Si n es un número par el recorrido es $\{0 + \infty\}$. Si n es un número impar el recorrido es $R - \{0\}$. La función $y = \frac{1}{x}$ con n siendo un número par son simétricas respecto al eje y	1
E2	Una función racional debe contar con asíntotas, y la gráfica de la función debe estar expuesta en ambos cuadrantes, además debe tener un numerador y un denominador.	1
E3	Debe estar expresada de la forma $\frac{a}{b}$. Debe haber asíntotas verticales y horizontales. La gráfica principal es una hipérbola $\frac{1}{x}$.	1
E4	Debe tener asíntotas. Debe tener un numerador y un denominador. Intersección en X y en Y (en algunos casos).	1

Con respecto a las respuestas de **E1** se podrían decir dos cosas: primero, según su respuesta, por la forma en cómo se plantea la expresión, se puede decir que para él, corresponden a funciones racionales aquellas expresiones que excluyen al cero de su dominio, que para algunos casos podría ser cierto, pero **E1** relaciona la característica de una función específica, da a pensar que se está refiriendo solo a un caso en particular, es decir, que el estudiante recurre a una función como $f(x) = \frac{1}{x}$, para plantear la característica de las funciones en general, lo cual es erróneo dado que, el estudiante deja de lado funciones racionales que no excluye al cero de su dominio como $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Como segunda medida, el estudiante relaciona en sus respuestas un n que no especifica, lo cual hace dificultoso generar un análisis de sus respuestas. Esto muestra que el estudiante presenta dificultades en el reconocimiento de las características de las funciones racionales, podría decirse que tiene alguna conciencia de que el dominio de este tipo de funciones debe ser excluyente, pero el estudiante no da claridad de esta característica en planteamiento de sus respuestas.

Por otro lado los estudiantes **E2**, **E3** y **E4** son muy contundentes al especificar que las funciones racionales siempre deben contar con asíntotas, eso muestra que tienen un acercamiento más claro en la identificación de las características de las funciones, puesto que a lo largo de la prueba, han sido muy enfáticos en que las funciones racionales deben de tener asíntotas, además, han sido muy consecuentes en sus respuestas, por ejemplo al mencionar que “debe contar con un numerador y un denominador” refiriéndose a que la estructura de la función racionales debe estar compuesta por un denominador y un numerador o queriendo decir que su estructura corresponde a una expresión fraccionaria. Pero algo para tener en cuenta es que los estudiantes también mencionan que es importante que “la función esté en ambos cuadrantes del plano”, aunque esto no es una característica esencial de las funciones racionales, el estudiante la considera como característica fundamental y han sido consecuentes puesto que en anteriores preguntas han mencionado este punto, podría pensarse que los estudiantes debido a la interacción reiterada con las gráficas posiblemente en posiciones similares se presta para que los estudiantes la identifique como una característica de las funciones racionales.

Tabla 10.

Tabla de análisis de resultados pregunta 5

Pregunta 5		
Dada las siguientes expresiones, determine cuál de ellas podría representar el dominio de una función racional. Justifica tu respuesta A. $D_f = \{x \in R : x \geq 0\}$ D. $D_f = R$ B. $D_f = R - [0]$ E. $D_f = [-3, 20]$ C. $D_f = R^-$ F. $D_f = R - \{-2; 2\}$		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	La B, representa el dominio de una función, porque tiene dominio y su respuesta es cero (0).	1
E2	La B, representa un dominio porque está incluyendo todos los reales menos el cero (0)	1
E3	A, B y F Porque son los que tienen asíntotas horizontales y verticales	1
E4	A, B, F, porque excluyendo valores no da cero en el denominador, para que no que de indeterminado.	1

Analizando las respuestas en este caso **E1** y **E2**, quienes coinciden al seleccionar opción de respuesta B, se puede ver que los estudiantes, por un lado, aunque aciertan en su selección, siguen pensando en un dominio que excluye solo al cero, puesto que en este caso no se seleccionan las respuestas F que es otra de las de las expresiones que podría representar el dominio de una función racional dentro de las opciones. los resultados muestran evidencia de que los estudiantes siguen pensando en una característica de una función particular como lo es $f(x) = \frac{1}{x}$, para generalizar las características de las funciones racionales.

Para el caso de **E3** podría decirse que, aunque selecciona las respuestas correctas, el estudiante no se enfoca principalmente en el sentido de pregunta, puesto que su justificación se basa en la presencia de asíntotas horizontales como una razón fundamental por la cual elegir sus opciones respuesta, siendo que estas no tienen ninguna relación directa con el dominio de las funciones racionales y tienen que ver más con los grados de los polinomios que conforman la expresión racional. Esto da a pensar que los estudiantes no tienen claro la procedencia de las asíntotas horizontales razón por la cual se generan este tipo de errores, podría decirse que los estudiantes tienen grandes dificultades primordialmente para reconocer los tipos de asíntotas y su relación tanto con la expresión algebraica de la función racional, como con el dominio de estas.

Con respecto a **E4** se puede notar que tiene un acercamiento más claro en su justificación sobre la estructura y el sentido del dominio de una función racional, aunque también selecciona la opción A, que no es correcta, al igual que **E3**, en este caso se puede ver que ambos estudiantes aunque podrían tener algún conocimiento de que, si bien, en el dominio de las funciones racionales se excluyen algunos valores reales, están desconociendo que esta exclusión de valores no puede ser un conjunto infinito, tendría que ser un conjunto finito de valores, para ser considerado como la representación del dominio de una función racional.

Se puede notar que **E1** es reiterativo al incurrir en el error de pensar que el dominio de las funciones racionales, solamente excluye al cero, y esto lo que promueve es la gran dificultad que está presentando el estudiante al reconocer principalmente las características de las funciones y, además, al no tener claro lo correspondiente a los dominios de las

funciones racionales. En cuanto a los demás estudiantes la dificultad se puede notar primordialmente en relacionar el dominio de las funciones racionales, con las expresiones racionales y las asíntotas de las gráficas de las funciones.

Tabla 11.

Tabla de análisis de resultados pregunta 6

Pregunta 6		
De los siguientes dominios, determine cuál de ellos representa el dominio de la función $g(x)$. Justifica tu respuesta. $g(x) = \frac{10}{x^2 - 4}$ a. $D_f = R - [4]$ d. $D_f = R$ b. $D_f = R - [0]$ e. $D_f = R - \{-2; 2\}$ c. $D_f = R - [2]$		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	A, porque la operación da que la respuesta sea esa y porque además se está despejando.	1
E2	La C, y E, si es el dos (2) al elevarlo al cuadrado se indetermina la función.	1
E3 y E4	E, Para saber cuál es el dominio debemos sacar las asíntotas, entonces operamos en el denominador y al realizar los despejos nos da que cuando $x = 2$ y $x = -2$ se indetermina y hay saltos.	2

En las soluciones brindadas por **E1**, lo que se puede notar aparentemente es la falta de conciencia que tiene el estudiante frente al análisis de la indeterminación de la función y esto se puede notar cuando se analiza el procedimiento realizado por el estudiante puesto que, si bien **E1** tiene algún conocimiento de que se debe igualar a cero la expresión racional para encontrar el dominio de la función, el estudiante no tienen claridad en que es

exactamente lo que hay que iguala a cero, muestra una confusión sobre como plantear la ecuación (ver figura 10). Podría pensarse que es estudiante no tiene una conciencia clara de cómo se presenta una indeterminación o como encontrarla básicos necesarios para realizar cada uno de estos procedimientos.

6.

$$g(x) = \frac{10}{x^2 - 4}$$

$$0 = \frac{10}{x^2 - 4}$$

$$0 = \frac{10}{(x+2)(x-2)}$$

$$(x-2) 0 = \frac{10}{x-2}$$

$$0 = \frac{10}{x-2}$$

$$0 = 10$$

Figura 10. Evidencia de E1 a pregunta 10.

En el caso del estudiante **E2**, se puede notar que tiene claridad de cómo hallar el dominio de las funciones racionales, puesto que, justifica la elección de la respuesta C, al expresar que “al elevar al cuadrado se indetermina la función”, está sugiriendo también que esa respuesta o ese valor podría ser el dominio de la función, porque es un valor que se está excluyendo de los valores del dominio, también determina la función como no lo hacen los otros valores de las otras opciones de respuesta. Esto lo que resaltan en el estudiante es que sí tiene claridad de realizar los procedimientos necesarios para encontrar los dominios de las funciones racionales sin ninguna dificultad.

Para el caso de los estudiantes **E3** y **E4**, sus respuestas son muy concretas, ellos especifican que “para encontrar los dominios, lo primero que hacen es encontrar las

asíntotas” y expresan explícitamente que se debe operar el denominador y realizar un despeje para encontrar la indeterminación de las funciones. Esto deja claro que los estudiantes comprenden en su totalidad los procedimientos a realizar para encontrar cada uno de los dominios de las funciones y que no tienen dificultad alguna para encontrar el dominio y lo demuestran seleccionando la opción correcta.

Se puede ver que los tres últimos estudiantes logró establecer los dominios de la función sin ninguna dificultad, teniendo en cuenta los procedimientos correctos, los estudiantes demostraron habilidad para resolver este tipo de procedimientos, esto lo que deja ver es que existe en estos estudiantes una claridad conceptual frente a la relación que existe entre los ceros del denominador de la expresión racional y el dominio de la función racional, se podría afirmar que los estudiantes tienen conciencia que lo que se debe buscar es la indeterminación de la función y por tanto conocen de que existe una relación estrecha entre los valores que indeterminan la expresión racional y el dominio de la función racional, no obstante, **E1** demostró mayor dificultad conceptual para reconocer la relación entre los ceros del denominador expresión racional y el dominio de la función racional, y dejó ver la dificultad para encontrar los dominios de estas funciones.

Tabla 12.
Tabla de análisis de resultados pregunta 7

Pregunta 7

Dada la siguiente tabla, indique cuál (es) de ellas podría ser la representación tabular de una función racional. Justifica tu respuesta.								
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$g(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$h(x)$	2	N. E	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$	N. E	2	$\frac{5}{6}$
$j(x)$	N. E	N. E	N. E	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
Estudiante	Tipo de respuesta							F. A
E1	$g(x)$ porque los números van en par							1
E2	$h(x)$ porque en primer lugar la expresión está dada de manera de fracción, además el N.E, es que no existe o sea que esto lo podríamos tomar como asíntota.							1
E3	$h(x)$ y $j(x)$ debido a que presenta asíntotas y una de las características de las funciones racionales es tener asíntotas tanto verticales como horizontales en $h(x)$ el dominio $R - \{2, -2\}$ y $j(x) R^+$.							1
E4	$f(x)$ y $g(x)$ porque da resultado en los reales.							1

Revisando las respuestas que obtuvieron los estudiantes en la pregunta número siete, se puede notar que **E1**, aparentemente no tiene una conciencia de que en las funciones racionales, existe una condición indispensable, en la que se habla de algunos valores que son excluidos de su dominio, lo que muestra que en la función existen pre imágenes no cuentan con una imagen, lo mismo ocurre con lo que expone **E4** en sus respuesta ya que él afirma que el dominio son todos los reales, siendo esta una característica exclusiva de las funciones polinómicas y contradice totalmente la condicon de exclusión de algunos valores reales que cumplen los dominio de las funciones racionales.

Por otro lado, **E2**, fue muy acertado en la escogencia de la opción tabular que podría estar representando una función racional, puesto que en su justificación el estudiante expresa explícitamente la razón por la cual escoge la opción de respuesta, mencionando que los valores en la que aparece N.E, significa que no existe y él lo asimila como la parte de las asíntotas, es decir, los valores reales que no corresponden al dominio de la función. Esto da a entender que el estudiante si tiene conciencia de que en el dominio de las funciones racionales hay que excluir unos valores y en este caso **E2** no mostró dificultad para exponer su análisis desde la posible representación tabular de una función racional. Sin embargo, el estudiante al parecer presenta una confusión, puesto que él, hace referencia a una expresión que está dada en forma de fracción, cuando en la pregunta no se hace referencia alguna a una expresión racional.

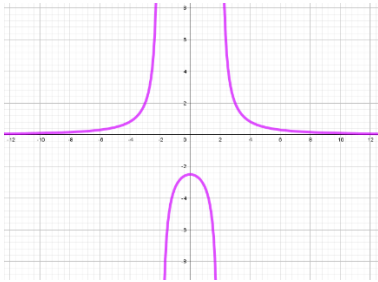
Podría suponerse que **E2** está afirmando que el hecho de que los valores presentes en la tabla como imágenes, estén representados en forma de fracción, da a entender que la expresión racional está dada en forma de fracción, por tanto $h(x)$ corresponde a una función racional, afirmación que es totalmente falsa, puesto que lo que se está representando en la tabla solo son las imágenes y preimágenes de la función. Si se analiza desde otra perspectiva, podría decirse que es para el estudiante en el caso de una función polinómica en la que sus imágenes corresponden a una fracción, tendría lugar en el grupo de las funciones racionales.

E3, por otro lado, deja ver un acercamiento más contundente a lo que el ejercicio cuestiona puesto que el estudiante expresa que las respuestas escogidas por él tienen asíntotas. Podría pensarse que el estudiante asume como asíntotas aquellos valores que en

la tabla aparecen con N.E, es decir, que no están definidos lo cual es muy acertado, y además de ello, propone una expresión la cual representa el dominio de la función $h(x)$ donde excluye de los valores reales al 2 y -2 , suponiendo que estos valores representan las asíntotas y recalando que esto es una característica principal de las funciones racionales. Pero, en contraste, el estudiante propone una expresión para $j(x)$ que fácilmente podría estar representando sólo la parte positiva de una función polinómica o el dominio de una función raíz y no a una función racional, además el estudiante estaría excluyendo del dominio de la función un conjunto infinito de valores por tanto no podría ser el dominio de una función racional.

Tabla 13.

Tabla de análisis de resultados pregunta 8

Pregunta 8		
Dada la siguiente gráfica de una función, establezca su dominio. Justifica tu respuesta. 		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	(No responde)	1
E2	$Df = \{2, -2\}$ El dominio es $\{2, -2\}$ porque es la asíntota donde nos muestra la imagen	1
E3	$Df = R - \{2, -2\}$ $Df = R - \left\{0, \infty \wedge -\infty, \frac{5}{4}\right\}$ (no justifica)	1
E4	$Df = R - \{0, 2, -2\}$	1

	(no justifica)	
--	----------------	--

Con respecto a **E1**, de la abstención de responder al ejercicio se puede decir es que él no encuentra una relación entre la representación gráfica y el dominio de la función, es decir, no reconoce las asíntotas verticales de la gráfica como elementos esenciales para la delimitación del dominio de las funciones racionales.

Con respecto a **E2** se puede notar que, al parecer el estudiante presenta una confusión en la forma en cómo presenta su respuesta, dado que el estudiante manifiesta en su justificación que 2 y -2 son asíntotas de la gráfica, podría pensarse que él tiene claro cuáles son los valores que representan la asíntota en la gráfica de la función, pero la forma en cómo el presenta el dominio de la función da a pensar que la función solo está definida para esos valores específicamente. **E2** podría estar pensando en que los valores que representan la asíntota en la gráfica de la función son valores pertenecientes al dominio, desconociendo que precisamente por representar las asíntotas en la gráfica de la función, son excluidos del dominio porque la función no está definida para esos valores.

Este tipo de errores podría manifestarse debido a que el estudiante no tiene una noción clara sobre las asíntotas, o también de lo que corresponde a la definición del dominio de las funciones racionales, y esto se puede notar dado que se presenta un error en la forma en cómo presenta el dominio de la función expuesta en la pregunta.

Para el caso de **E3** y **E4** presentan un dominio que efectivamente corresponde al dominio de la función presente en el cuestionario. Basados en esto se puede notar que los

estudiantes tienen presente los elementos que le permiten analizar las gráficas y no muestran mayor dificultad para reconocer los valores que representan las asíntotas en la gráfica de la función. Pero analizando en caso particular, **E3** presenta un dominio en el que pareciera ser que él está pensando en los valores horizontales, puesto que trata de representar la franja horizontal que precisamente no pertenece a la gráfica de la función, lo cual incurriría en un error puesto que además de la forma en como él presenta la expresión, está desconociendo que las asíntotas horizontales no tienen relación alguna con los dominios de las funciones.

Por otro lado, **E4** llama la atención que excluye el cero de los valores del dominio, quizá esto se pueda ver a que el estudiante está pensando en la recta $y = 0$, es decir, al eje x como una asíntota que también está excluyendo del dominio, pero si fuera así está desconociendo que esta es una asíntota horizontal y qué lazos y las asíntotas horizontales no hace ninguna referencia al dominio de las funciones racionales

Tabla 14.

Tabla de análisis de resultados pregunta 9

Pregunta 9		
Dadas las siguientes expresiones racionales, determine de ellas su dominio. Realice todos los procedimientos necesarios para ello.		
$f(x) = \frac{2x+4}{3x-6}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2-8x+16}, \quad h(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	(no responde)	1

E2	$Df = 2, Dg = \{4,1\}, Dh = 1,$	1
E3	$Df = R - \{2\}, Dg = R - \{-4,4\}, Dh = R - \{0\}$	1
E4	$Df = R - \{2\}, Dg = R - \{4\}, Dh = R - \{0\}$	1

De **E1**, se puede decir es que él no encuentra un método adecuado para obtener el dominio de una función racional. Además, dado que el estudiante no realiza ningún procedimiento y no da respuesta al cuestionario, lo cual da a pensar que el estudiante además de que no puede obtenerlo también muestra que podría tener algunos “vacíos” o en el peor de los casos no tiene una conciencia de lo que es el dominio de una función racional y más aún de las funciones en general, puesto que, siendo de otro modo hubiese empleado métodos no algebraicos, como el tanteo o el ensayo y error entre otros, para llegar a la solución. Es decir, que el estudiante no tiene los conocimientos necesarios para realizar los procedimientos adecuados para encontrar el dominio de las funciones propuestas en este ejercicio.

En lo que respecta a **E2**, aunque no muestra evidencia de los procedimientos realizados para encontrar el dominio de la función, de acuerdo con la primera tarea el estudiante propuso una respuesta que podría acercarse un poco a la correspondiente del dominio de la función $f(x)$, aparte de que el estudiante no plantea correctamente la expresión, en primera medida da a pensar que el estudiante realizó de manera correcta los procedimientos acordes al ejercicio y que él, tiene conciencia de que al encontrar la indeterminación de la expresión racional se le facilita la delimitación del dominio. No obstante, parece ser que él tiene alguna dificultad para reconocer que el dominio excluye aquellos valores para los que se indetermina la expresión racional. De acuerdo con las respuestas a las tareas restantes,

podría pensarse que el estudiante cometió errores en la realización de los procedimientos para encontrar las soluciones a las tareas, dado que en las soluciones presentadas para $g(x)$ y $h(x)$ no son las correctas además de que están escritas de forma incorrecta.

En general se resalta que el estudiante podría tener alguna conciencia de que, el encontrar los ceros del denominador, le conduce a encontrar el dominio de la función, sin embargo, su dificultad podría corresponder a los procedimientos para encontrar la indeterminación, o con la definición que corresponde al concepto de dominio de una función y la forma en cómo plantea los dominios de las funciones.

Para el caso de **E3** y **E4**, se puede ver que tienen más claridad a la hora de relacionar los ceros del denominador de la expresión racional con el dominio de la función, los estudiantes encontraron cada una de las soluciones a los ejercicios planteados y además representan cada uno de los dominios de manera correcta. los resultados muestran evidencia de que los estudiantes tienen conciencia de la relación existente entre la indeterminación de la expresión racional y el dominio de la función, puesto que, se puede notar que los estudiantes lograron encontrar los dominios de las funciones partiendo de las expresiones racionales. Cabe resaltar que el estudiante **E3**, cometió un error al considerar a -4 como parte del conjunto de valores excluidos por el dominio de la función $g(x)$, que podría ser atribuido simplemente a un error de procedimiento o también a una idea errónea que él podría tener sobre los ceros de una expresión cuadrática, que sin bien son dos, puede no estar considerando que, en ocasiones como esta, esos dos valores son el mismo, es decir, no son distintos.

Tabla 15.**Tabla de análisis de resultados pregunta 10**

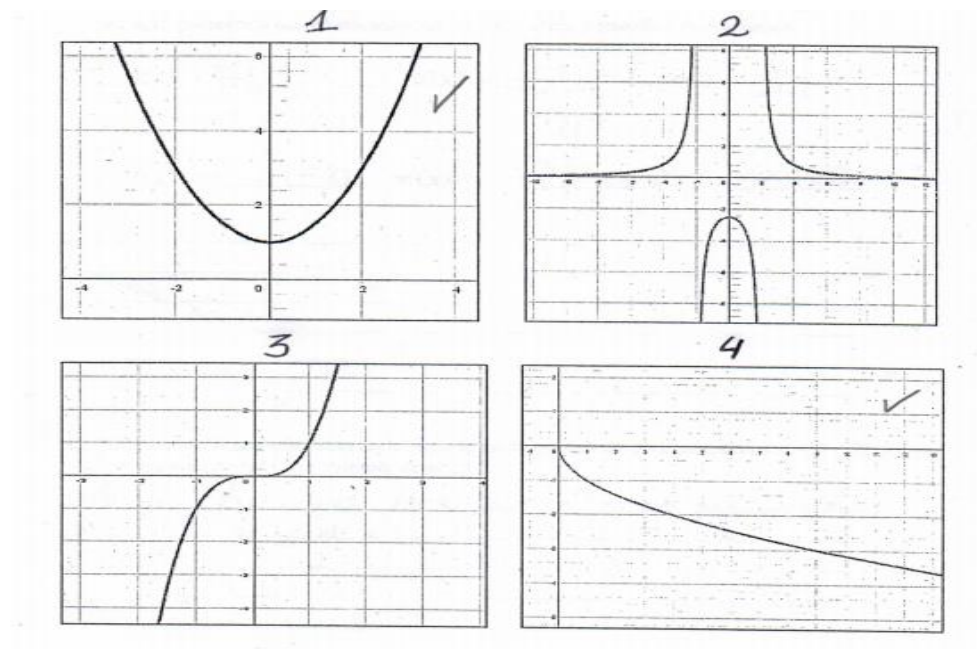
Pregunta 10		
Es posible que exista una función racional cuyo dominio sean todos los números reales. Justifica tu respuesta. En caso afirmativo, cite al menos un ejemplo.		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	Si se puede porque es considerado que todos los números pueden ser del dominio. $y = (x)^{20,15,17}$	1
E2	No porque se indetermina al utilizar todos lo reales en las funciones.	1
E3	No es posible, debido a que una de las características de la función es que se debe tener asíntotas verticales u horizontales	1
E4	No es posible porque en las funciones racionales siempre queda una variable en el denominador y sea el valor que tome no puede dar cero (0) por tanto hay números que se excluyen.	1

En esta ocasión las respuestas de **E1**, reafirma el desconocimiento que este podría tener sobre las características propias del dominio de una función racional. De acuerdo con lo expuesto por el estudiante, se evidencia que no tienen ninguna claridad sobre cómo relacionar las indeterminaciones de una función, desde los diferentes sistemas de representación con su dominio, hecho que se ve reflejado en este ejercicio donde se podría decir que el estudiante no tiene conciencia de que en las funciones racionales, el dominio excluye valores reales, podría pensarse, que para él, el dominio de estas funciones no discriminan valores, lo que deja ver que el estudiante podría estar pensando más en una función polinómica que en una función racional.

Por otra parte, a partir de las respuestas de **E2**, **E3** y **E4**, se podría inferir que los estudiantes al parecer tienen claro la condición que cumplen los dominios de las funciones racionales, puesto que cada uno de ellos, de alguna u otra manera, hacen referencia en su justificación a la indeterminación o a la exclusión de algunos valores reales en el dominio de las funciones de este tipo se podría decir que los estudiantes no presentaron ninguna dificultad en reconocer una de las características fundamentales del dominio de las funciones racionales. No obstante, se puede ver como **E3** relaciona las asíntotas horizontales con el dominio de la función, siendo que este no da cuenta de esta clase de asíntotas, parece ser que **E3** presenta una confusión en ello y debido a esto comete este tipo de errores.

Tabla 16.
Tabla de análisis de resultados pregunta 11

Pregunta 11		
 De las siguientes gráficas determine cuáles de ella presentan asíntotas y que tipo de asíntotas son. Traza en cada caso la asíntota que encuentre.		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1, E2, E3 y E4	No hay justificación, solo hacen los ejercicios	4



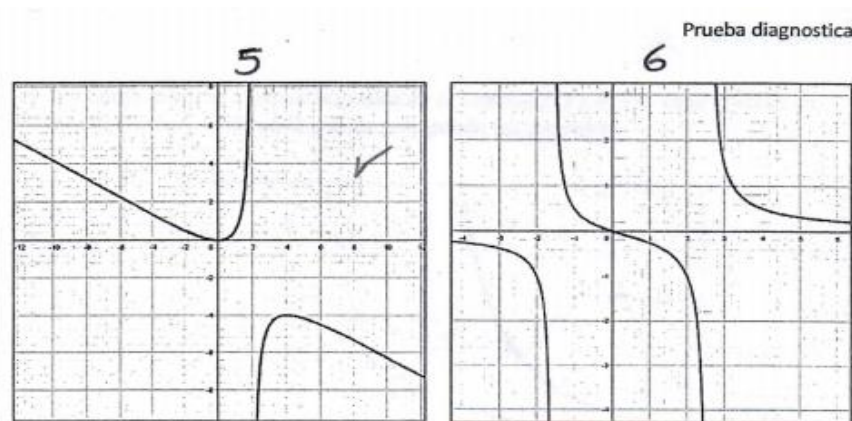


Figura 11. Evidencia de E1 a pregunta 11.

E1 (ver figura 11), en esta pregunta al parecer no realizó el ejercicio correctamente, puesto que el estudiante no trazó en ninguna de las gráficas las asíntotas correspondientes, solo señaló alguna de las gráficas que se le presento, lo cual da a pensar que el estudiante está señalando las gráficas que para él tienen asíntotas, y en este caso **E1** identifica las gráficas 1, 4 y 5, posiblemente como gráficas que podrían tener asíntotas. Siendo así, se puede decir que el estudiante no cuenta con los conocimientos necesarios, para identificar las características que, en su representación gráfica poseen las funciones que presentan asíntotas, además de ello, también da a pensar que presenta dificultades para identificar y relacionar las gráficas de las funciones con las rectas formadas en ellas representando las asíntotas.

Se puede ver que el estudiante presenta dificultades en el reconocimiento de las asíntotas y en general en sus características, además, no socializo ninguna de las asíntotas, esto deja ver que también que tiene dificultades para identificar la gráfica de una función racional. Esto, debido a que el estudiante señala la que podría representar la gráfica de una función cuadrática.

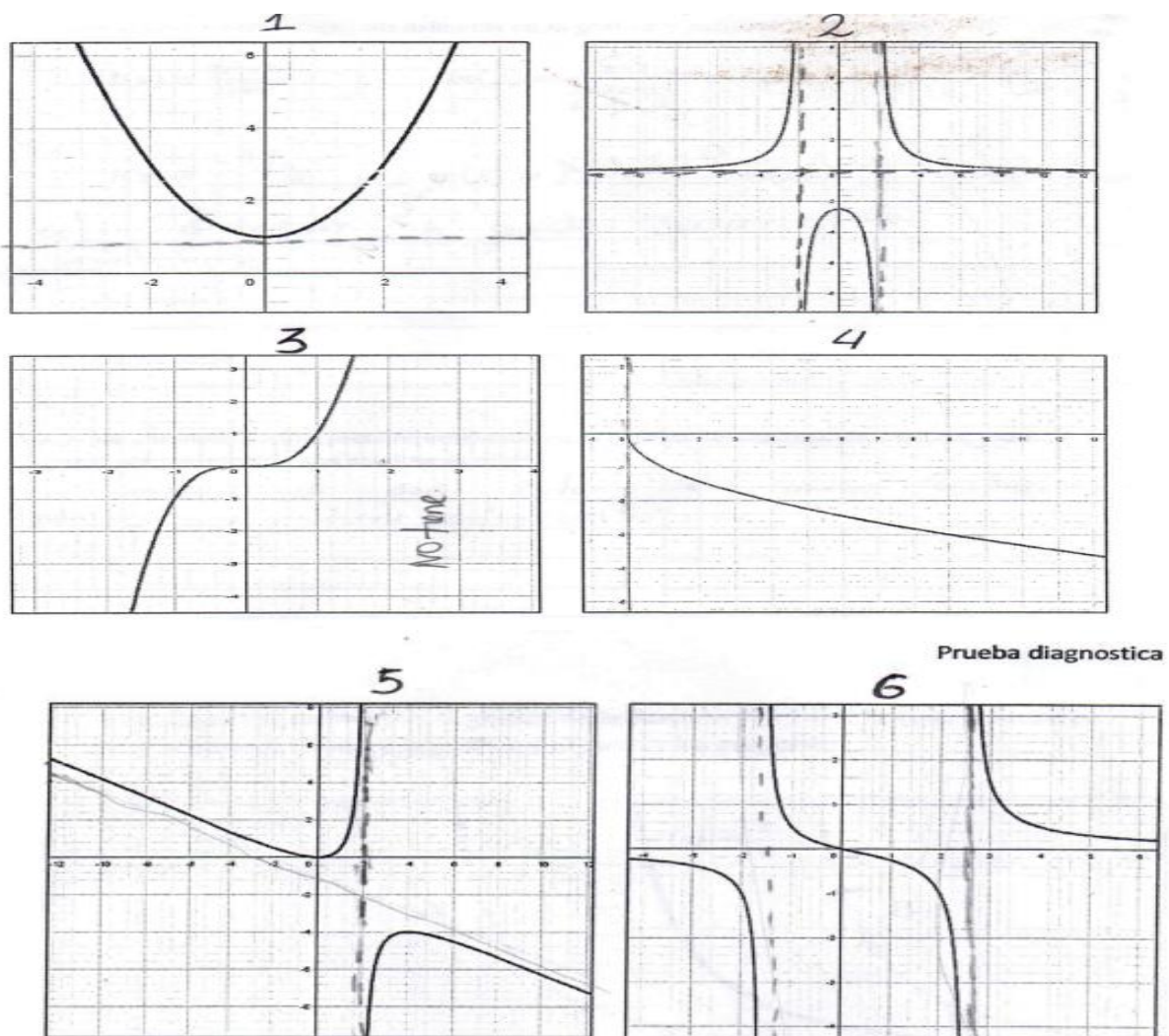


Figura 12. Evidencia de E2 en pregunta 11

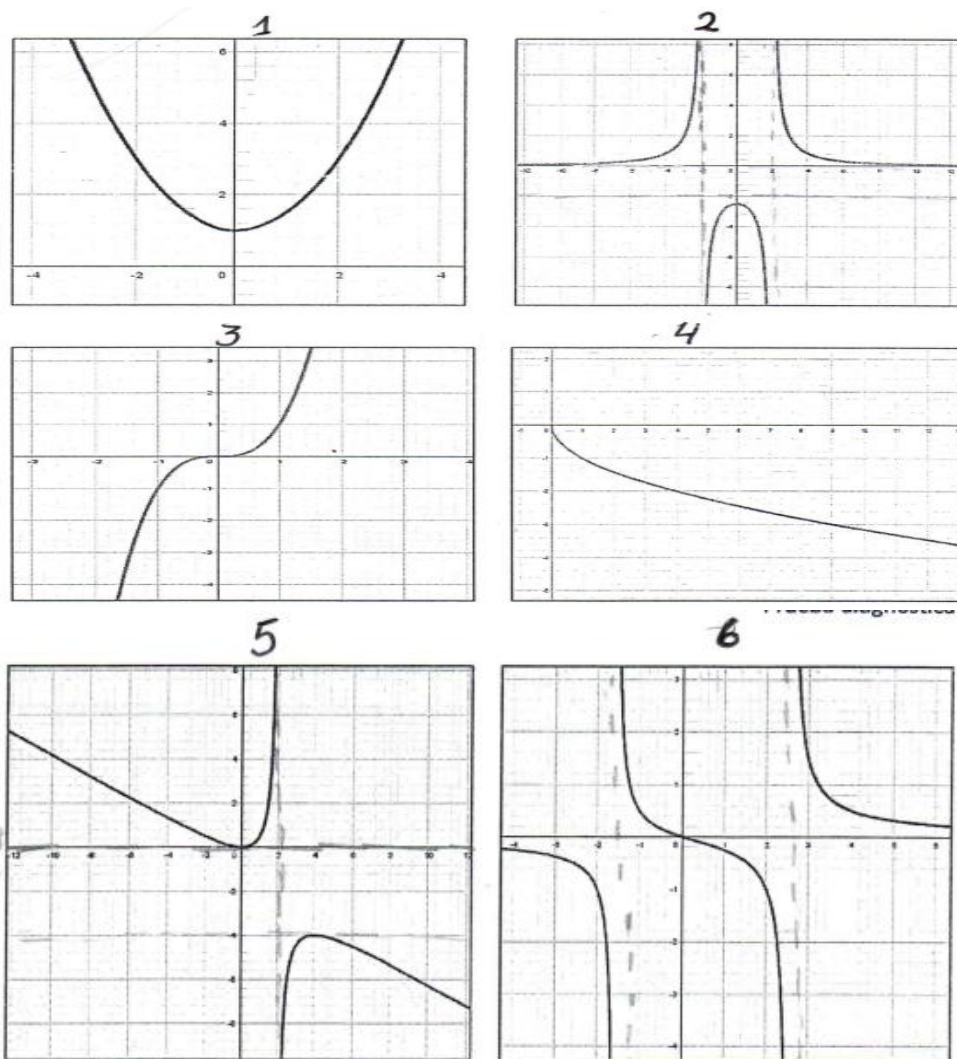


Figura 13. Evidencia de E3 a pregunta 11.

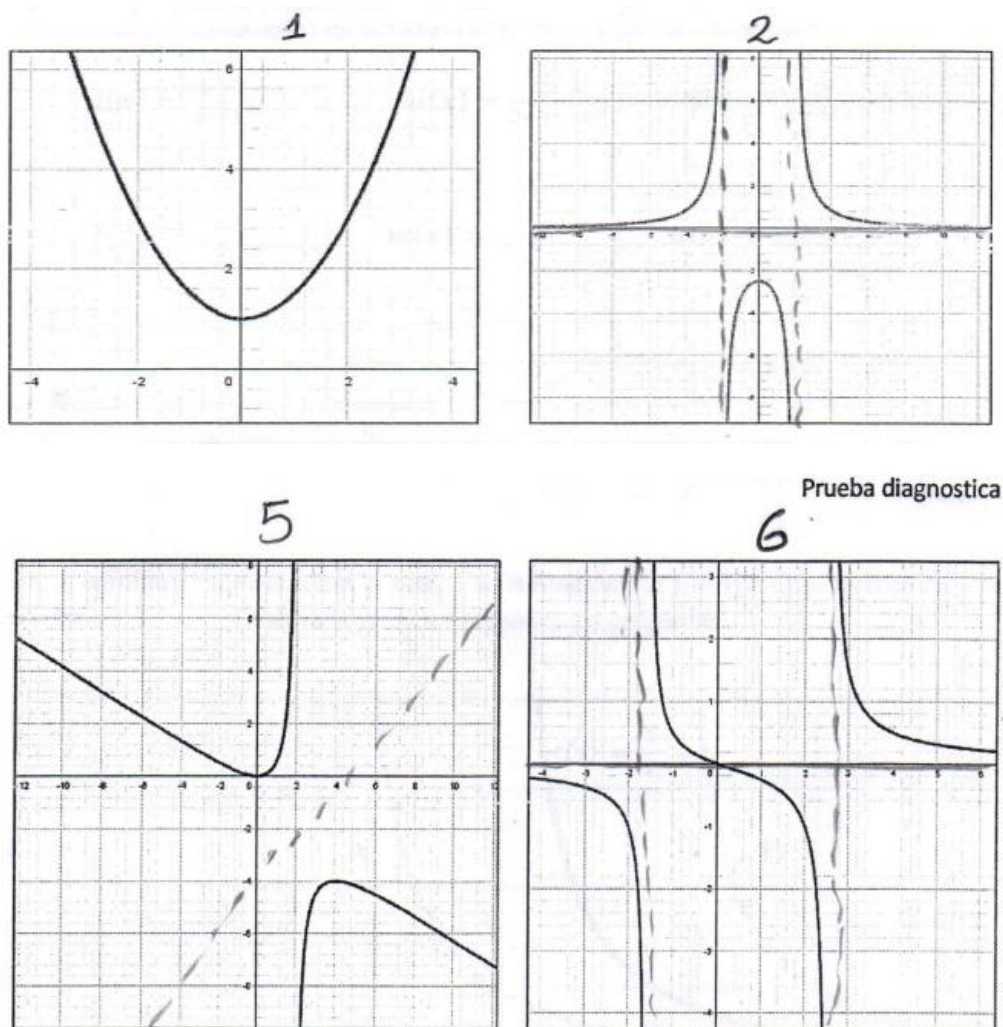


Figura 14. Evidencia de E4 a pregunta 11.

E2, E3 y E4, aunque no justifican sus respuestas, se puede ver claramente que los estudiantes señalaron correctamente las gráficas presentadas, las cuáles poseen asíntotas, esto deja claro que los estudiantes, no presentan problemas para identificar las gráficas que corresponden a funciones racionales, además de ello muestran de forma contundente que tiene los conocimientos necesarios para identificar cada una de las asíntotas, lo cual deja ver, que los estudiantes tienen una conciencia clara sobre la definición de las asíntotas formadas en las gráficas de las funciones racionales.

De **E2**, se puede afirmar que el estudiante también realizó las rectas que representa no solo las asíntotas verticales, sino también las horizontales y las oblicuas, lo que deja claro que el estudiante no solo tiene claridad sobre la definición de las asíntotas, sino que comprende ampliamente su definición y además de eso sus características y sus representaciones gráficas (*ver figura 12*).

De **E3**, se puede resaltar que en la gráfica número cinco, el estudiante delinea una asíntota horizontal que no correspondía a la gráfica de la función, caso que también se presentó con **E4** al trazar una “asíntota oblicua” (*ver figura 14*), lo que podría verse como alguna dificultad en identificar las rectas que pueden estar representando este tipo de asíntotas. Puede ser que los estudiantes no tengan completamente claro, los casos en los que las gráficas de las funciones racionales presentan asíntotas horizontales y oblicuas.

Tabla 17.
Tabla de análisis de resultados pregunta 12

Pregunta 12		
Dada las siguientes expresiones determine si es posible, la ecuación de la recta que representan sus asíntotas en la gráfica y justifica tu respuesta.		
$l(x) = \frac{9x^2+2}{3x+1} \qquad m(x) = \frac{x-3}{2+3x-x^2} \qquad n(x) = \frac{4x}{2x^2+3}$		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	$l(x) = 81 + 2 = 81, m(x) = 5 - x^2 = 25, n(x) = 106$	1

E2	$l(x) = -\frac{1}{3}, m(x) = (x = 3); (x = 0), n(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ Al despejar se puede sacar las asíntotas.	1
E3	$(x) = y = \frac{1}{3}, m(x) = (y = -1); (y = 4)$, Para encontrar las ecuaciones despejamos el denominador y utilizamos la ecuación de la recta	1
E4	(No responde)	1

Dadas las respuestas anteriores se puede decir inicialmente que **E1** por un lado, no muestra algún indicio de que conoce los procedimientos necesarios para encontrar las asíntotas las cuales sugería el cuestionario, además de ello se puede ver que tiene grandes dificultades para identificar las asíntotas teniendo a la mano solo la expresión racional dado que en ninguno de los casos planteo al menos las indeterminaciones de la expresiones, por otro lado, podría decirse que el estudiante también presenta dificultades en el reconocimiento de la ecuación de la recta, puesto que tampoco mostró indicios de alguna conciencia sobre dicho tema, dado que ninguna de sus repuestas esclarece, la solución a la tarea, se podría afirmar que el estudiante halla relación, primero entre los valores que indeterminan la función y la recta formada en el plano que representa la asíntota en la gráfica de la función y segundo tampoco encuentra relación entre ceros del denominador y la ecuación de la recta que forma la asíntota en la gráfica de la función.

Caso contrario de **E2** y **E3** quienes muestran algún indicio de que encontrando los ceros del denominador podrían hallar valores que les permitiría descubrir la ecuación de la recta, aunque muchas de sus respuestas no fueron acertadas, podría decirse que los estudiantes reconocen que encontrando los ceros del denominador de la expresión racional, que representa la asíntota en la gráfica de la función, se les facilita encontrar la ecuación de la

recta que representa la asíntota en la gráfica de la función. En otras palabras, se puede decir que los estudiantes encontraron relación entre los valores que indeterminan la expresión racional, la asíntota de la gráfica de la función y la ecuación de la recta que representa la asíntota.

E4, quien no dio respuesta al cuestionario, deja ver su dificultad primeramente para encontrar los valores que indeterminan la función y por ende se podría afirmar que no reconoce la importancia de dichos valores con respecto a las asíntotas de la gráfica de una función racional y la relación directa que existe con la ecuación de la recta que representa la asíntota.

Tabla 18.

Tabla de análisis de resultados pregunta 13

Pregunta 13		
¿Qué caracteriza a una recta representada en la gráfica de una función racional para que sea considerada una asíntota de ella?		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	Porque tiene un dominio que consiste en hacer gráfica.	1
E2	Las gráficas de por si están en ambos cuadrantes, Y define curvas.	1
E3	Lo que lo caracteriza es que tiene asíntotas y es de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$.	1
E4	No responde	1

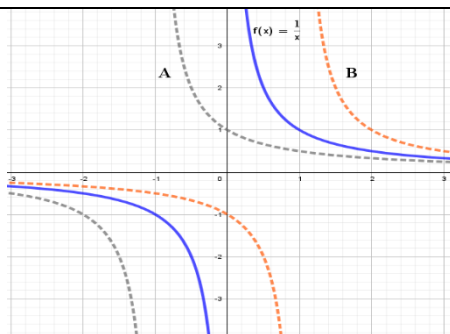
En esta tarea se puede notar que ninguno de los estudiantes dio una respuesta contundente a la prueba, no se propuso alguna característica aproximada que diera cuenta

de una recta que podría representar una asíntota en la gráfica de una función racional. Al parecer ellos carecen de los conocimientos necesarios para identificar o relacionar las características de las rectas formadas en las gráficas de las funciones racionales. No obstante, de **E2** llama la atención que diga “y define curvas”, pues esto se puede relacionar como cierto conocimiento sobre alguna característica de la asíntota, dado que, esta afirmación se puede interpretar como que él conoce de la discontinuidad de la función, a raíz de que podría estar pensando en que la asíntota ciertamente “parte la gráfica en distintas curvas”, generando así una función discontinua.

Esto deja claro que los estudiantes tienen dificultades para reconocer desde la parte teórica, todo lo relacionado con las asíntotas. Podría pensarse que ellos presentan grandes vacíos en lo que respecta a las definiciones que corresponden a las asíntotas de las gráficas de una función racional. Además, debido a sus respuestas se podría afirmar que también pueden estar presentando dificultades para identificar en las gráficas de las funciones racionales, las rectas que podría representar las asíntotas y esto debido a que los estudiantes muestran indicios de que no tiene claro cuáles son las condiciones necesarias que cumplen las rectas dibujadas en las gráficas de las funciones racionales que las convierten en asíntotas.

Tabla 19.
Tabla de análisis de resultados pregunta 14

Pregunta 14
A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ (que aparece en línea continua). Observa la gráfica y responde las preguntas.



a) ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ y las gráficas punteadas (A y B)?

Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	Que las dos nos define un denominador de asíntotas.	1
E2	Son transformación cuando tiene un -2 o un 2 donde la gráfica es movida a la derecha o izquierda.	1
E3	Que las gráficas A y B son transformaciones verticales y A también se alarga.	1
E4	Es la misma gráfica, solo que se expande o se disminuye y de igual tienen la misma asíntota horizontal	1

Analizando las respuestas de **E2** y **E3** se puede ver que los estudiantes de forma contundente hablan de una transformación que sufre la gráfica de la función, puesto que ellos expresen explícitamente con la palabra transformación refiriéndose al movimiento o desplazamiento que le ocurre a la gráfica, e incluso **E2** se atreve a dar valores a los que podríamos suponer que el estudiante atribuye a la distancia del movimiento realizado a las gráficas. Cabe resaltar que **E3** aunque reconoce que a la gráfica se le hace una transformación el estudiante no muestra claridad sobre la dirección o el sentido del movimiento e incluso menciona que la gráfica de la función A, presenta un movimiento diferente frente a las demás.

E4 por su parte expresa que las gráficas son las misma, e incluso de manera contundente afirma que tienen la misma asíntota horizontal, los resultados muestran evidencia de que el estudiante reconoce que a la gráfica se le realiza un movimiento. Podría afirmarse que el estudiante relaciona muy bien las gráficas mostradas entre sí y que no presenta dificultad para identificar transformaciones realizadas a las funciones racionales, no obstante, el estudiante deja ver que presenta una a dificultad para identificar el tipo de transformación que se le realiza a las gráficas de las funciones racionales, debido a que el estudiante argumenta que la transformación realizada a las gráficas corresponde a una expansión o disminución cuándo la transformación corresponde solo a un movimiento horizontal.

E1 por su parte, no muestra ninguna evidencia de que tiene conciencia de los movimientos que se han realizado a la función $f(x)$, dado que su justificación no da cuenta de ninguno de ellos. Además de ello, mencionando las asíntotas, el estudiante da a pensar, qué éstas tienen alguna influencia en la relación directa que cumplen cada una de estas transformaciones con la función inicial, siendo que las asíntotas en muchos casos suelen tener el mismo desplazamiento que la función, en este caso corresponde a la asíntota vertical. Esto muestra las dificultades que presenta el estudiante para relacionar funciones con las mismas características, solo desde su representación gráfica.

Tabla 20.

Tabla de análisis de resultados pregunta 15

Pregunta 15		
Proponga una expresión algebraica para cada una de las gráficas punteadas (A y B).		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A

E1	(No responde).	1
E2	$f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $f(x) = \frac{1}{x} - 2$,	1
E3	$f(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(x) = \frac{1}{2x}$	1
E4	$f(x) = \frac{1}{x+1}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$	1

Para este caso, dado que **E1** no dio una respuesta ante el interrogante, se podría decir que el estudiante no tiene conciencia de los movimientos que se le realizan a la gráfica de la función, parece ser que no relaciona la transformación que ocurre en la gráfica de función, con la transformación que debe sufrir la expresión racional. Esto da pensar que el estudiante presenta dificultades para encontrar, primeramente, la expresión racional de la función únicamente desde su representación gráfica y además tiene dificultades para reconocer los cambios que se realizan en la expresión racional, debido a las variaciones que sufren las gráficas de las funciones, es decir, que desconoce las consecuencias que sufren las expresiones racionales cuándo se realizan transformaciones en las gráficas.

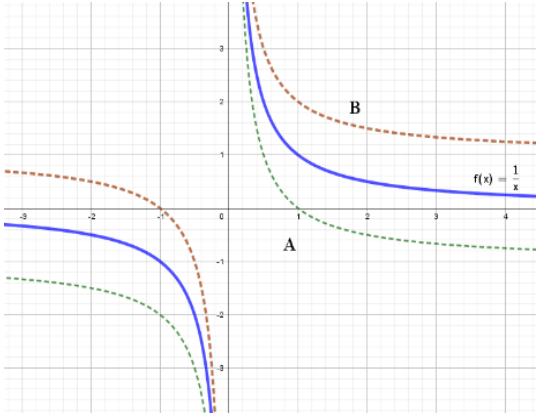
Con respecto a **E2**, se puede notar que sí tiene alguna conciencia de que al realizarle algún movimiento a la gráfica de la función racional, está repercute en la expresión racional de la gráfica, puesto que, el estudiante genera dos expresiones que aunque no son correctas podría decirse que son generadas por el movimiento que se le ha realizado a la gráfica de una función, solo que **E2** no es consciente de la dirección del movimiento y por tanto la posición o el lugar donde deben estar ubicados los números agregados a la expresión racional. Esto lo que muestra es que el estudiante podría tener una confusión sobre la posición en la cual deben ir los valores que se agregan a la expresión racional.

E3 fue un poco más acertado a la hora de presentar la expresión racional, puesto que, el estudiante plantea una expresión, la cual corresponde efectivamente a un movimiento horizontal que se le realiza a la gráfica de la función inicial, esto deja claro que el estudiante tiene conciencia sobre el movimiento que se le realiza a la gráfica de la función genera una expresión, en la cual se le debe restar un número a la x de la expresión, para visualizar un movimiento horizontal hacia la derecha. Se podría decir que el estudiante tiene claro la relación existente entre el movimiento de la gráfica y el cambio en la expresión racional. No obstante, cabe resaltar que, en la segunda expresión planteada por el estudiante, en este caso el estudiante no suma el valor, sino que lo multiplica generando no un movimiento horizontal y más bien un movimiento de acotamiento de la gráfica.

Con respecto a **E4**, quien en este punto fue el único que respondió acertadamente, se puede decir que tiene claro en que consiste las transformaciones de la funciones y la repercusiones que estas dejan en las expresiones racionales, puesto que, el estudiante plantea las expresiones correctamente, las cuales corresponden efectivamente a los movimientos horizontales que se le realizan a la gráfica de la función inicial, el estudiante no dejó ver ninguna dificultad a la hora de relacionar las transformaciones con los cambios en las expresiones racionales.

Tabla 21.

Tabla de análisis de resultados pregunta 16

Pregunta 16		
15. A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = 1/x$. (que aparece en línea continua). Observa la gráfica y responde las preguntas.  ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ y las gráficas punteadas (A y B)?		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	Que la $f(x)$ esta demarca un resultado de cómo va la gráfica y A y B, realizan un espacio de otros resultados.	1
E2	Es una transformación donde se está corriendo una unidad respecto al eje y.	1
E3	Existen unas transformaciones. A se mueve verticalmente y con B sucede lo mismo solo que hacia arriba.	1
E4	En las gráficas una se expande y la otra se contrae y tienen la misma asíntota vertical.	1

E1, este caso no dio una respuesta coherente para resolver el cuestionario por tal razón, se podría decir que el estudiante no tiene conciencia de los movimientos que se le realizan a la gráfica de la función, se puede ver que el estudiante no relaciona la dichos movimientos de la gráfica de función inicial con las imágenes producto de las transformación que sufre

la gráfica inicial, esto reitera las dificultades del estudiante para encontrar, la las relaciones entre las gráficas de las funciones racionales aun cuando estas solo son gráficas que sufren un desplazamiento ya sea vertical u horizontal, con respecto a la función original.

E2 y E3 exponen respuestas contundentes. Al desarrollar al cuestionario, dan cuenta de que reconocen los movimientos que se le realizan a la gráfica de la función, y que no presentan dificultad relacionar las transformaciones de la gráfica de función con las imágenes que se obtiene de los movimientos realizados de la gráfica inicial. Se puede ver que los estudiantes no presentan dificultad alguna para encontrar las relaciones entre las gráficas producidas de las transformaciones realizadas a $f(x)$, puesto que, los estudiantes comprendieron que **A** y **B** son imágenes de $f(x)$.

E4 por su lado presenta una respuesta en la que se puede pensar que tiene alguna conciencia de que la gráfica presentada en el cuestionario sufre alguna modificación, de hecho, da a pensar que puede reconocer la relación existente entre las gráficas presentadas como imágenes y la gráfica inicial de la función racional, puesto que, en su justificación muestra indicios de que a la gráfica se le realiza una transformación. Su dificultad puede notarse en el momento de identificar qué tipo de transformación que sufre la gráfica, dado que el estudiante se refiere a una transformación de expansión y contracción de la gráfica inicial que da como resultado las imágenes **A** y **B**. Puede ser que el estudiante no esté reconociendo claramente las características de cada una de las gráficas, en las que se podría dar de cuenta que las gráficas solo has sido desplazadas n cantidad de veces sobre los ejes del plano. Cabe resaltar que el estudiante expone la que podría ser una característica fundamental a la hora de relacionar las gráficas de las funciones, cuando menciona que las

funciones poseen la misma asíntota.

Tabla 22.

Tabla de análisis de resultados pregunta 17

Pregunta 17		
Proponga una expresión algebraica para cada una de las gráficas punteadas (A y B).		
Estudiante	Tipo de respuesta	F. A
E1	$f(x) = \frac{0}{x}$ $f(x) = \frac{2}{x}$	1
E2	$f(x) = \frac{1}{x} - 1$ $f(x) = \frac{1}{x} + 1$	1
E3	$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right) - 1,$ $f(x) = \frac{1}{x-1},$	1
E4	$f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right),$ $f(x) = \frac{1+x}{x},$	1

Al análisis de las repuesta expuesta por **E1**, se reitera dado que no presentó una respuesta correcta, que el estudiante no tiene conciencia de los movimientos que se le realizan a la gráfica de la función. El estudiante propone unas expresiones que no corresponde a las de la gráfica, al parecer el estudiante puede estar confundiendo la forma en cómo cambia la gráfica y por ende la expresión. Él aparentemente no relaciona la transformación que ocurre en la gráfica de función con la transformación que debe sufrir la expresión racional, esto muestra que el estudiante presenta dificultades para encontrar, las expresiones racionales de la función desde su representación gráfica y además tiene dificultades para reconocer los cambios que se realizan en la expresión racional de la función solo desde su representación gráfica.

E2, E3 y E4, al responder al cuestionario, dan cuenta de que reconocen los movimientos que se le realizan a la gráfica de la función, y que no presentan dificultad relacionar las transformaciones de la gráfica de función con las imágenes que se obtiene de los movimientos realizados de la gráfica inicial y además de ello comprenden que movimientos, también repercuten en la expresión de la función. Parece ser que su dificultad se presenta en el momento de plantear la expresión, los tres estudiantes plantean expresiones en la que en la mayoría de los casos la posición de los números que se agregan a la expresión producto del desplazamiento, están ubicados en posición equivocada. Esto puede verse como una confusión que se presenta en los estudiantes sobre la relación que existe entre la posición y el signo de un término que se agrega a la expresión y la dirección del desplazamiento o la transformación que se le realiza a la gráfica de la función. También se puede decir que los estudiantes estarían presentando alguna dificultad a la hora de plantear correctamente las expresiones racionales dadas desde su gráfica.

Capítulo 4.

Conclusiones y Reflexiones Didácticas.

4 Capítulo 4. Conclusiones y Reflexiones Didácticas

La presentación de este capítulo se ha dividido en dos apartados, por un lado, se exponen algunas conclusiones con respecto a la pregunta de investigación del trabajo y los objetivos trazados para el desarrollo del mismo, y se presenta una serie de categorías diferentes en que se agrupan las dificultades encontradas producto de los análisis de resultados realizados de la implementación de la prueba y en la segunda parte tiene que ver con la presentación de las reflexiones didácticas que surgen principalmente del diseño de la prueba de aula y de las producciones de los estudiantes al enfrentarla. Con respecto al primer apartado se debe resaltar que dichas conclusiones emergen tomando como referencia los objetivos trazados desde el inicio del trabajo y los resultados obtenidos de la implementación de la prueba de aula.

4.1 Conclusiones

En este apartado se presentarán algunas conclusiones como consecuencia de los objetivos trazados para el desarrollo general de este trabajo, que ha estado centrado en la caracterización de las dificultades y errores que un grupo de estudiantes de grado undécimo presentan en torno al estudio de las funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

En relación con el primer objetivo específico trazado como primer paso para lograr la finalidad de este trabajo, el cual fue identificar algunos elementos conceptuales de orden Didáctico, Curricular y Matemático en torno a el estudio de las funciones racionales. Se puede afirmar que se logró identificar algunos elementos conceptuales en este trabajo, los cuales fueron tomados desde tres perspectivas:

La Curricular, la cual permitió asentar y delimitar el trabajo de investigación principalmente en el pensamiento variacional, dado que, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, de tal manera que se le dio de gran importancia en el diseño de la prueba dando a esta flexibilidad al evaluar el concepto de función desde sus distintas representaciones.

Otros elementos como los conocimientos básicos y los procesos generales, que dieron soporte desde lo curricular al diseño de la prueba, tales como el razonamiento matemático que se entiende como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión y permite a los estudiantes desarrollar habilidades que tienen que ver con la justificación de las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de tareas a desarrollar además de utilizar argumentos propios para exponer ideas que se encaminen a la solución. La comunicación que permite a los estudiantes construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Y la modelación que permite al estudiante utilizar el conocimiento y las habilidades adquiridas para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas.

La perspectiva Matemática, puesto que se toma como eje principal dentro del diseño de la prueba. En ella se indaga sobre aquellos conceptos que de una u otra forma tienen alguna relación con las funciones, permitiendo la conceptualización más apropiada y centrada de las funciones racionales, la cual permitió abordar en su gran mayoría los elementos

conceptuales que se evalúan dentro de la prueba, conceptos tales como el dominio de las funciones, su comportamiento asintótico y sus transformaciones. Estos elementos evaluados en la prueba permitieron reconocer las dificultades que están presentando los estudiantes en una forma más específica del concepto, lo que hace que su papel cobre más importancia.

Y la Didáctica, que se presenta como guía para la elaboración de los análisis de la prueba dada las respuestas de los estudiantes. En ella se estudiaron algunos elementos que dieron fuerza al diseño de la prueba como lo fue la teoría de las representaciones propuesta por Luis Rico (2009), donde se hizo alusión a la importancia del manejo de diferentes tipos de representaciones para una mejor comprensión del concepto a estudiar. A demás de ello también se relacionaron elementos que hacen referencia a las dificultades de los estudiantes, las cuales soporte dentro del análisis de los resultados de la prueba.

Es posible anotar que estos elementos brindaron insumos fundamentales para el diseño de la prueba de aula y la realización del análisis de los resultados que arrojó la implementación de dicha prueba.

Con respeto al segundo objetivo que correspondió a la articulación de los elementos conceptuales estudiados en una prueba de aula, para su posterior implementación con un grupo de estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escipión Jaramillo del municipio de caloto, cauca; se logró el diseño de unas tareas, que articularon cuatro categorías, de la siguiente forma:

- En la primera categoría sobre el reconocimiento de funciones racionales, en la cual se recogen aspectos importantes de las funciones en forma general, tales como la estructura

de las funciones en su representación simbólica, el reconocimiento de las funciones únicamente desde su representación gráfica y la identificación de sus asíntotas; poniendo a prueba los conocimientos del estudiante, haciendo un recorrido por los sistemas de representaciones. Esta categoría encamina al estudiante a realizar tareas que indagan en sus conocimientos, los aspectos que él pueda reconocer, acerca de las funciones racionales desde sus diferentes representaciones, logrando enfocar al estudiante en las características generales de las funciones racionales.

- En la segunda categoría sobre el dominio de las funciones racionales, que permitió evaluar al estudiante, desde los diferentes tipos de representación, sus conocimientos acerca del dominio de las funciones racionales sus características y cuál es el papel que juega dentro de las funciones racionales, y obligándolo al reconocimiento de la relación entre las funciones y su dominio.
- En la tercera categoría sobre el comportamiento asintótico de las funciones, en la cual se logró llevar al estudiante a dar cuenta del reconocimiento dentro de las gráficas de las funciones, las rectas que representan las asíntotas, la relación existente entre las indeterminaciones de la expresión simbólica y las rectas que representan asíntotas en la gráfica.
- En la cuarta categoría sobre las transformaciones de las funciones racionales, en las que se logró indagar sobre si el estudiante reconoce semejanzas de funciones con una leve traslación en el plano cartesiano, desde sus diferentes representaciones con

tareas en las que el estudiante debía reconocer estas semejanzas en la representación gráfica y expresarla en la representación simbólica y viceversa.

Cada una de estas categorías dio lugar a distintas nociones matemáticas relacionadas con el concepto de función racional, dando importancia a aquellos aspectos del concepto que podrían resultar laborioso para los estudiantes, como el reconocimiento de las funciones, el dominio, la asíntotas, y la transformación de las funciones, pasando por cada uno de los tipos de representaciones logrando recoger, gran parte de los conceptos que de una u otra forma se relaciona directamente con las funciones racionales.

Sin pretender hacer una clasificación exhaustiva y relacionando el tercer objetivo específico, se presentan a continuación una serie de categorías de dificultades, en las que se agrupan los errores encontrados producto de los análisis de resultados realizados en la implementación de la prueba de aula con los estudiantes. Cada uno de estos errores se encuentran dentro del desarrollo de la prueba de aula como manifestación de las dificultades de los estudiantes, y se considera como una característica de aquella categoría a la que pertenece.

Dificultades relacionadas con el reconocimiento de las funciones racionales

De acuerdo con los resultados obtenidos producto de los análisis de la prueba, se encontró que la mayoría de los estudiantes que realizaron la prueba tienen algún conocimiento sobre las características principales de las funciones racionales, lo cual les permite la identificación de las funciones racionales de manera contundente. No obstante, con estos resultados también se encontró que algunas de las dificultades de los estudiantes

tienen que ver, por un lado, con la estructura de las funciones racionales, dado que el 25% de los estudiantes deja ver errores al momento de reconocer las características de las funciones racionales, hablando primordialmente de su composición fraccionaria entre dos polinomios. Afirman que las funciones racionales tienen que corresponder a expresiones de grado 2 (ver figura 15), lo que abre la posibilidad de entender que se piensa más en una función cuadrática que en una racional.

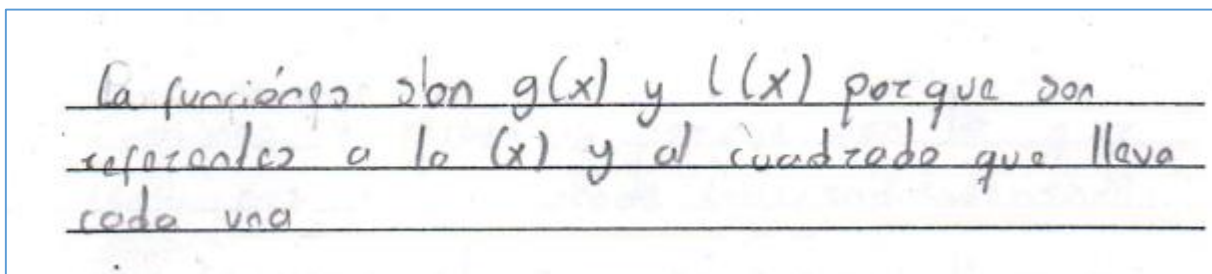


Figura 15. Evidencia de E1 a pregunta 1

Se notó además un fuerte arraigo que existe en los estudiantes, en relación con la variable x , sostienen que las funciones racionales son aquellas funciones que están dadas en términos de variables x correspondiendo a ciertas expresiones que no siendo racionales por presentar variable x podrían ser consideradas como tal y viceversa, motivo por el cual los estudiantes suelen confundir una función polinómica con una función racional.

Por otro lado, también se notó estudiantes que confunden graficas de funciones racionales, con otro tipo de graficas como las cuadráticas, generalmente por relacionar los ejes del plano cartesiana con asíntotas de las funciones, y dado que ésta es una de las principales características de estas funciones. Este tipo de errores podría llevar al estudiante al estudiante a tener dificultades no solo con el reconocimiento de las funciones, sino también con otro tipo de dificultades que tienen que ver con las asíntotas he incluso con el dominio delas funciones racionales.

Dificultades relacionadas con el dominio de las funciones racionales

Los resultados muestran evidencia de que los estudiantes se basan en una característica de una función particular como lo es $f(x) = \frac{1}{x}$, para generalizar las características de las funciones racionales. En este caso los errores más frecuentes que cometen los estudiantes tiene que ver con la identificación de aquellas funciones racionales para las cuales en su denominador se excluye el cero de su dominio, error que los encamina a cometer otros, donde se dejan de lado funciones como $f(x) = \frac{1}{x-1}$ o $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, para las cuales su denominador no excluye al cero y por ende no serían consideradas como funciones racionales.

Otro de los errores revelados que cometen los estudiantes frecuentemente, se relacionan con el análisis de la indeterminación de las funciones, puesto que los estudiantes no tienen claridad en este sentido, terminan por cometer errores en los procedimientos que se necesitan para encontrar los valores que causan la indeterminación de dicha función, tales como, el no saber igualar la expresión racional a cero, o no saber que igualar a cero (*ver figura 16*).

6.

$$g(x) = \frac{-10}{x^2 - 4}$$

$$0 = \frac{-10}{x^2 - 4}$$

$$0 = \frac{-10}{(x+2)(x-2)}$$

$$(x-2) 0 = \frac{-10}{x-2}$$

$$0 = \frac{10}{x-2}$$

$$0 = 10$$

Figura 16. Evidencia para errores de procedimientos.

Además de esto, también se encontró errores donde los estudiantes confunden las funciones racionales con otro tipo de funciones, en las que las integran como parte de las funciones racionales, y más se reflejó, dentro de las representaciones tabulares de las funciones en las cuales los estudiantes demostraron que tienen muchos vacíos frente a las condiciones que poseen las funciones racionales en estas representaciones tales como la aparición de pre-imágenes que no cuentan con una imagen real.

Otro error evidente que se notó, tiene que ver mucho con los conocimientos que tiene los estudiantes acerca de la definición del dominio de las funciones racionales, dado que se observó estudiantes que, aunque en muchas de los casos dan a pensar que tienen conciencia acerca del dominio de la función, la forma en como lo presentan, muestra lo opuesto (ver figura 17 y 18), puesto que suponen que los valores excluidos del dominio para ellos son los únicos valores pertenecientes al dominio.

$$D_f = \{-2, 2\}$$

El dominio son $\{-2, 2\}$

Figura 17. Evidencia de E2 a pregunta 8.

$$D_f = 2, D_g = \{4, 1\}, D_h = 1.$$

Figura 18. Evidencia de E2 a pregunta 9.

Por último, en esta categoría también se detectaron errores en los que los estudiantes relacionan las asíntotas horizontales con el dominio de la función, siendo que este no da cuenta de esta clase de asíntotas. Para ellos, los valores excluidos del dominio de las funciones racionales también representan una asíntota horizontal en la gráfica de la función. Todo esto dado a que los estudiantes presentan una confusión o un desconocimiento sobre el origen real de asíntotas horizontales y debido a ello dejan ver estos errores que se reflejan más cuando se intenta articular información de los sistemas de representación como el gráfico y el simbólico pasando de un sistema de representación a otro.

Dificultades relacionadas con el comportamiento asintótico de las funciones racionales

Encontramos la mayoría de las deficiencias de esta categoría en las representaciones gráficas de las funciones racionales. Por un lado, se detectaron errores en los que los estudiantes relacionan las asíntotas horizontales con el dominio de la función, error que también fue evidente en la categoría anterior. Los estudiantes presentan mayor dificultad para comprender la procedencia de las asíntotas horizontales, las oblicuas y su relación con

las gráficas de las funciones racionales, provocando errores donde dibujan las asíntotas horizontales relacionándolas con los valores reales que indeterminan la expresión racional.

Por otro lado, en esta categoría también se relacionan los errores en los que los estudiantes suponen los ejes del plano cartesiano, como representaciones de las asíntotas de las gráficas de las funciones, en la mayoría de los casos relación el eje x , con una asíntota horizontal y esta a su vez, con una función racional que excluye de su dominio al cero.

Además, a esta categoría se atribuyen también errores en los procedimientos que realizan los estudiantes, para encontrar los valores que representan las asíntotas dentro de la gráfica de las funciones racionales, o al plantear las indeterminaciones de las expresiones racionales.

En general, se pudo notar que ninguno de los estudiantes tenía claro cuáles son las características principales de las rectas que representan una asíntota dentro de la gráfica de una función racional, dado que, ninguno de ellos concretó las características de estas rectas. Los estudiantes presentan grandes vacíos en lo que respecta a las definiciones que corresponden a las asíntotas de las gráficas de una función, razón por la cual los estudiantes termina por cometer los errores ya mencionado anteriormente.

Dificultades relacionadas con la transformación de las funciones racionales

Los errores asentados en esta categoría, tienen que ver con la relación dada entre el movimiento de la gráfica de la función racional y la expresión simbólica resultante después de dicho movimiento. Los estudiantes dejan ver errores como:

- Tienen confusiones con la relación existente entre la dirección del movimiento que experimenta la gráfica de la función y el número que cambia en la expresión racional (ver figura 19 y 20).

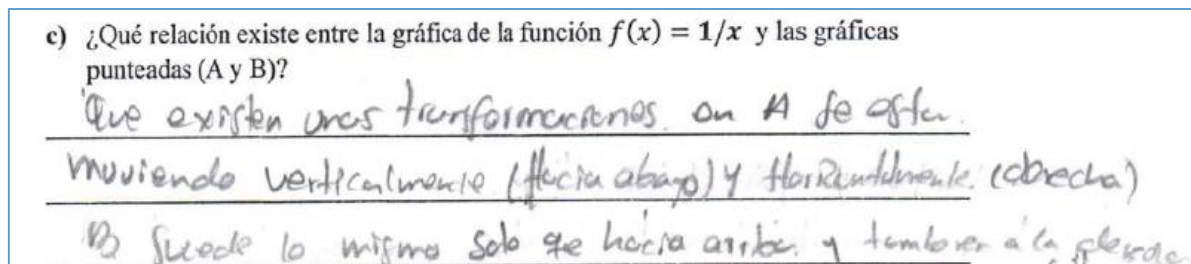


Figura 19. Evidencia pregunta 16.

Para este caso, la gráfica solo realiza movimientos verticales y el estudiante no planteo la expresión correcta.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Figura 20. Evidencia pregunta 16.

- Tienen confusiones al asignar la posición del número que se agrega en la expresión racional cuando la gráfica experimenta un movimiento (ver figura 21).

d) proponga una expresión algebraica para cada una de las gráficas punteadas (A y B).

A

$$f(x) = \frac{1-x}{x}$$

B

$$f(x) = \frac{1+x}{x}$$

Figura 21. Evidencia pregunta 15 de E2

Para este caso el estudiante expone el número de la expresión racional en una posición equivocada dado que el número debería estar acompañando la variable en el denominador.

- Tienen confusiones cuando relacionar dos movimientos de la misma gráfica de la función racional con un número de la expresión racional, es decir, que deducen que dado un valor que se agrega a la expresión racional, la gráfica sufre dos movimientos (ver figura 20)

a) ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ y las gráficas punteadas (A y B)?

es la misma gráfica, solo que se expande o disminuye y de igual tienen la misma asíntota horizontal

Figura 22. Evidencia pregunta 14 de E4.

Para este ejemplo, la gráfica experimenta movimientos verticales.

- Tienen confusiones al identificar los tipos de movimiento que experimenta la gráfica de la función racional (ver figura 21).

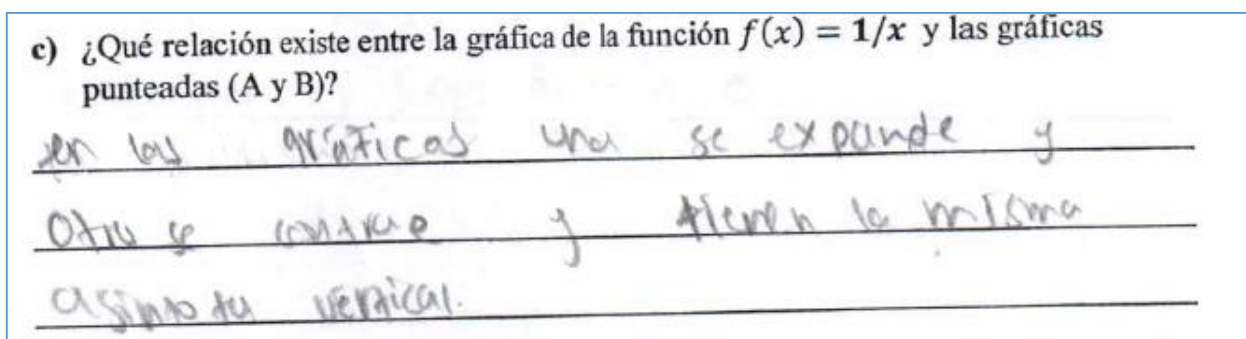


Figura 23. Evidencia pregunta 16 de E1

4.2 Reflexiones didácticas

Es importante mencionar como primera reflexión que el uso de las representaciones es fundamental, para la comprensión de un concepto matemático en su amplitud, los estudiantes deberían poseer cierta flexibilidad en el manejo de las representaciones, dado que esto permite potenciar la aprehensión de un concepto; es labor del docente de matemáticas llevar a cabo esta tarea desde sus propuestas de aula, el docente siendo el emisor del conocimiento, tiene la posibilidad de brindar al estudiante una enseñanza más dinámica, absteniéndose de caer en formas comunes de enseñar usando los sistemas de representación unidireccionalmente como lo menciona Hitt (2003), que considera que es importante no priorizar el recurso a algún registro en detrimento de otros cuando se está promoviendo un proceso de construcción de algún concepto matemático, es decir, si de funciones se habla, normalmente en las aulas se enseña a graficar una función, iniciando

con el análisis de la expresión simbólica, luego se exponen valores independientes para buscar sus imágenes y luego se llevan al plano. Este es un proceso recurrente que poco se hace en sentido contrario y tal como lo menciona Rico (2000), es necesario para lograr en los estudiantes una mayor comprensión de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, las tareas realizadas por los estudiantes en las que más se notó dificultad comportamiento asintótico; en las tareas relacionadas con este punto que realizaron los estudiantes, fue donde se revelaron en mayor medida los errores de los estudiantes desde su representación gráfica y simbólica. Y esto genera cierta preocupación, dado que, siendo esta una de las características más relevantes, el hecho de que un estudiante desconozca o no tenga un conocimiento adecuado de ello, lo encaminara a cometer errores y a su vez dificultades, que en un futuro podría afectar su formación académica.

Por tal razón, y con el fin de minimizar este tipo de situaciones, se puede considerar que uno de los conceptos a los que más énfasis se debe hacer en las aulas de clase, dentro de lo relacionado con las funciones racionales, tiene que ver con el comportamiento asintótico y sus implicaciones tales como las indeterminaciones, las asíntotas y el dominio, pues estos se consideran de gran importancia, para el desarrollo del concepto de funciones racionales.

Fuerte hincapié en las competencias de **formulación, comunicación y razonamiento**, de manera que los estudiantes empleen medios para mostrar los procedimientos y razones que lo llevaron a contemplar la forma de solucionar las diversas situaciones.

Referencias Bibliográficas

- Álvarez, J. (2009). *Estructuras teórico conceptual y comprensión conceptual en matemáticas*. Documento de trabajo. Universidad del Valle. Cali. Colombia.
- Álvarez, J. (2005). Una conceptualización operativa de formación matemática como estado. (Desde la perspectiva de las matemáticas). Documento de trabajo. Universidad del Valle. Cali. Colombia
- Arce, M. y Ortega, T. (2013). *Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato*. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 147-155). Bilbao, España: SEIEM.
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Traducción en español en Gómez P. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcarate, C., y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y sus gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Barrantes, H. (2006). *Resolución de problemas, el trabajo de allan schoenfeld*. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR Escuela de Ciencias Exactas y Naturales UNED. Síntesis
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiatemathematicseducation*, 3, pp. 114-62.
- Chavez, F. (2016). *Incidencia de los criterios algebraicos para graficar Funciones racionales de segundo grado, aplicado a Estudiantes de las escuelas de telecomunicaciones y Control, de la facultad de informática y electrónica*. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Riobamba. Ecuador
- D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Barcelona España: Uno pág 35-106.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Traducción Myriam Vega Restrepo.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Segunda edición. Traducción Vega M., 1999, Cali, Colombia.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisas*, (23), 23–29. Recuperado de http://soarem.org.ar/Documentos/23_Engler.pdf

Grueso, R., González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. (Tesis de maestría). Universidad de Valle. Cali. Colombia.

Godino J D., Font V, (2007). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperada el 14 septiembre de 2018 en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros>

Goldin, G. y Kaput, J. (1996). *A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics*. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, and B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 987-439), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Heredia, M., y Palacios, M. (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje*. Universidad del valle. Cali. Colombia.

Hitt, F. (1997). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. Departamento de la Matemática Educativa, Cinvestav- ipn. México

Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica* (Tesis de maestría). Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Hurtado, A. y zuñiga, F. (2011). *La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica*. Universidad del valle. Santiago de Cali. Colombia

ICFES. Saber 5° y 9° (2009). *Resultados Nacionales*. pág. 67-68, en línea. ICFES, Colombia. Recuperado el 25 de abril de 2018 de, <http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/Informe%20nacional%20SABER%205%20y%209%202009.pdf>

ICFES (2013) *Colombia en pisa 2012 Informe nacional de resultados*. Resumen ejecutivo. Recuperado el 25 de Abril de 2018, de: http://www2.icfes.gov.co/investigacion/component/docman/doc_download/183-resumen-ejecutivo-de-los-resultados-de-colombia-en-pisa-2012?Itemid

Kaput J. (1994). *The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience*. London: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1991) *Notations and Representations as Mediators of Constructive Live Processes*. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*, 53-74. Dordrecht: Kluwer A. P.

López, J. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. México.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, (21), pp. 308-318.

Maquilón, W. (2017) Resolución y planteamiento de problemas matemáticos apoyados por las TIC. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias. Medellín. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Serie Lineamientos.

Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional. Documento No. 3.

Muños, Y. (2015). *Análisis histórico–epistemológico de la noción de función en la obra la geometría de René descartes*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Noreña, R. A. (2012). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional*. (Tesis de pregrado), Cali: Universidad del Valle.

Ospina. (2012). *las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal*. (Tesis de maestría). Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.

Pisa (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Mathematics*. París: OECD Publishing.

Porras, F., (2011). *El concepto de función en la transición bachillerato*, (Tesis de maestría). Santiago d Cali: Universidad del Valle.

Posada, F., & Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de maestría), Medellín: Universidad de Antioquia.

Radatz, H. (1979). *Error analysis in mathematics education*. Journal Research in Mathematics Education, 10(3), 163-177.

Rees, P., Rees, C. & Spark, F. (2006). *Álgebra*, (10a Ed.). México. Mc. Graw-Hill.

Rico, L. (1995a). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Granada: universidad de granada.

Rico, L. (1995b). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas*. En J. Kilpatrick, P. Gómez. y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L., (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*, Ponencia en el IV SEIEM (Huelva, 2000), U. de Granada, España.

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Obtenido 22 de diciembre de 2018 de:
https://www.google.com.co/?gfe_rd=cr&ei=6fikvypyomlsqfu9igwdq&gws_rd=ssl#q=sobre+las+nociones+de+representaci%c3%93n+y+comprensi%c3%93n+en+la+investigaci%c3%93n+en+educaci%c3%93n+matem%c3%81tica

Sierpinska A. (1992). *On understanding the notion of function*, IN: Harel & Dubinsky (1991). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Washington, DC : Mathematical Association of America, 25-58. Traducción al castellano (inédita) de Cesar Delgado.

Socas, M. M. (1989). *Una clasificación de errores en el álgebra*. XIV Jornadas Hispano-Lusas. Vol. 3, pp. 1541-1546. Universidad De La Laguna

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. La educación matemática en la enseñanza secundaria, pp. 125-154. Universidad De La Laguna

Stepanenko, P. (2004). *El problema de las representaciones subjetivas en Kant*. *Revista Digital Universitaria*., 2-9.

Vasco, C (2003). *Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. En: *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas*. MEN. Bogotá.

Anexos

Anexo 1. Prueba Diagnostica

Dificultades y errores de estudiantes de grado undécimo en torno al estudio de las funciones racionales.

A continuación, se realiza el diseño de la prueba diagnóstica para la continuación del propósito de este trabajo. En el siguiente apartado se hace una breve descripción de la prueba y algunas recomendaciones a los estudiantes para la realización de la prueba.

El propósito de la prueba es indagar acerca las posibles dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado un decimo en torno al estudio de las funciones racionales en su representación simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

La prueba conta de 17 preguntas en distintos formatos, distribuidas en cuatro categorías que tiene que ver con el reconocimiento de las funciones racionales y algunos aspectos característicos, como el dominio de las funciones, las asíntotas y sus trasformaciones, cada una con un objetivo específico. Para la resolución de la prueba se estima un periodo de 2 horas y 30 minutos y se resolverá de forma individual.

La prueba se realizará con 20 estudiantes seleccionados aleatoriamente de grado undécimo, con el único requisito necesario para la prueba, que ya tenga conocimiento del tema de la prueba.

Para la elaboración de cada uno de las preguntas, se hacen las siguiente recomendaciones o sugerencias:

- se le pide al estudiante resolver, justificando sus respuestas, y en caso de necesitar hojas alternas para resolver algunos de los ejercicios se le proporcionara.
- Es necesario leer atentamente cada una de las preguntas y responderlas únicamente con los conocimientos propios.
- No se permite el uso de alguna herramienta que facilite las repuestas de las preguntas.
- Se le aclara al estudiante que el resultado de la prueba no incide en la calificación de su rendimiento académico.

¡¡¡Suerte!!!

1. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, indica cuáles de ellas corresponden a una función racional. Justifica tu respuesta.

$$f(m) = \frac{3m^2 - 5m + 1}{6}$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x + 2)^2}$$

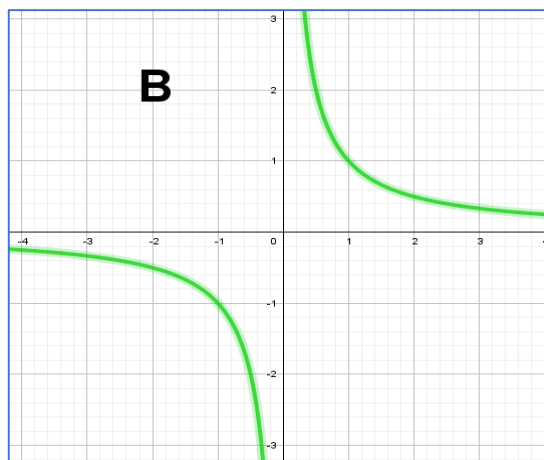
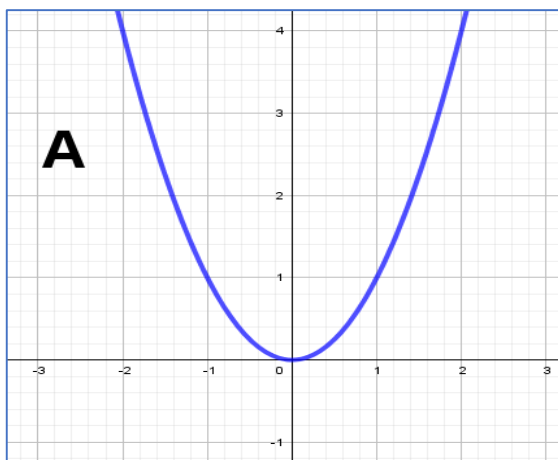
$$h(n) = \frac{n}{n^3 - 9}$$

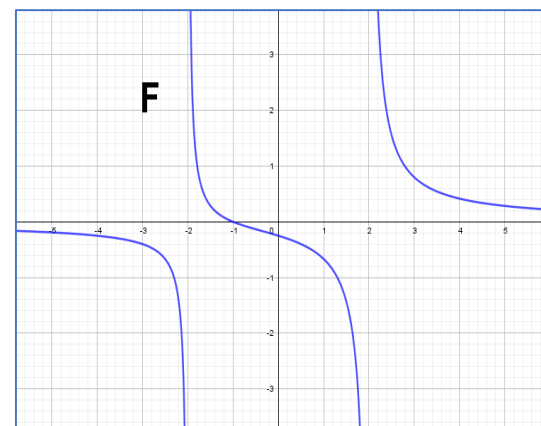
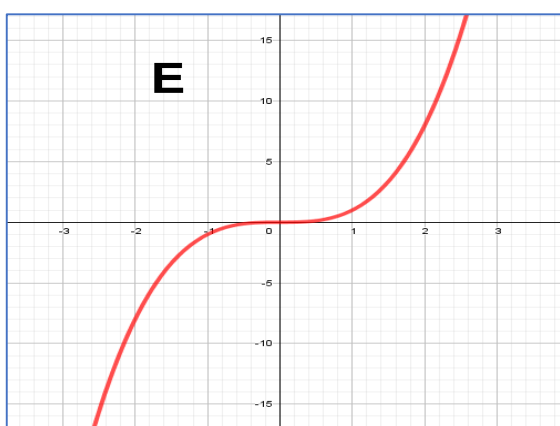
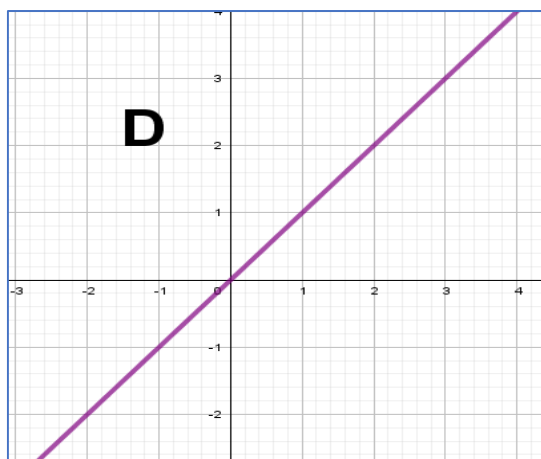
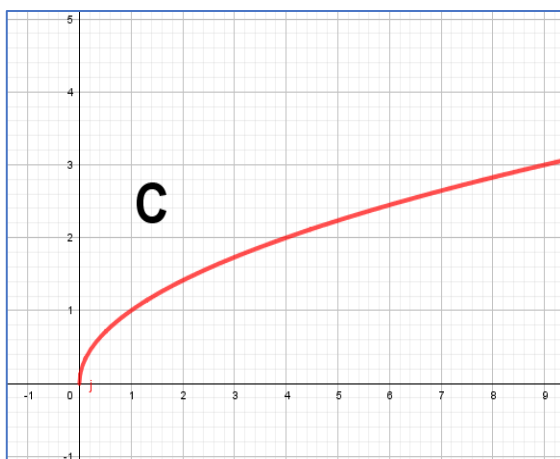
$$i(w) = w^2 - 6w + 9$$

$$l(x) = \frac{16x^2 - 2}{x^4 + 2x + 1}$$

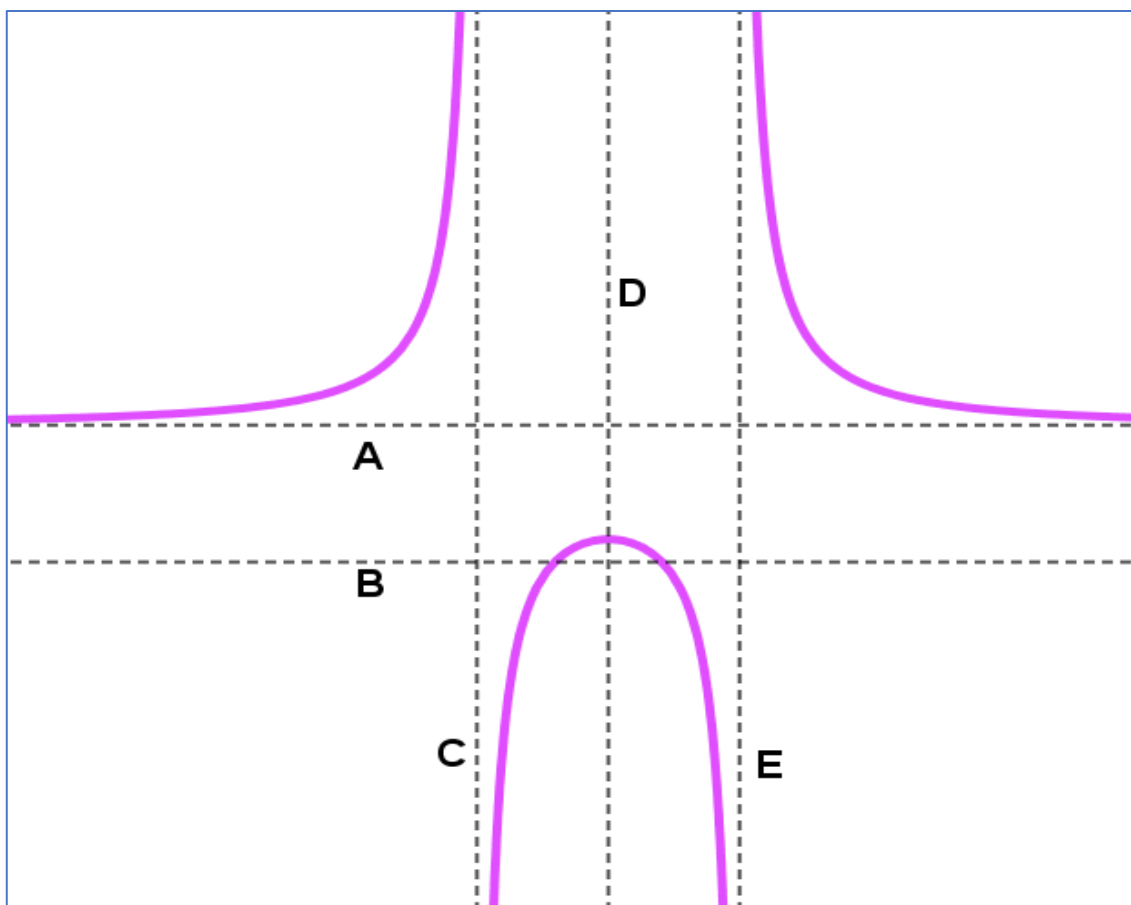
$$m(a) = \frac{2a(a^2 + 2)}{4a}$$

2. De las siguientes gráficas, cuáles corresponden a la gráfica de una función racional. Justifica tu respuesta.





-
-
-
3. Dada la siguiente representación gráfica de una función racional, determina cuáles de las rectas punteadas representan las asíntotas de la gráfica de función. Justifica tus respuestas.



4. Exponga a continuacion algunas carataeristicas que debe tener una función para que sea conciderada racional.

5. Dada las siguientes expresiones, determine cuál de ellas podría representar el dominio de una función racional. Justifica tu respuesta.

A. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

D. $D_f = \mathbb{R}$

B. $D_f = \mathbb{R} - [0]$

E. $D_f = [-3, 20]$

C. $D_f = \mathbb{R}^-$

F. $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

6. De los siguientes dominios, determine cuál de ellos representa el dominio de la función $g(x)$. Justifica tu respuesta.

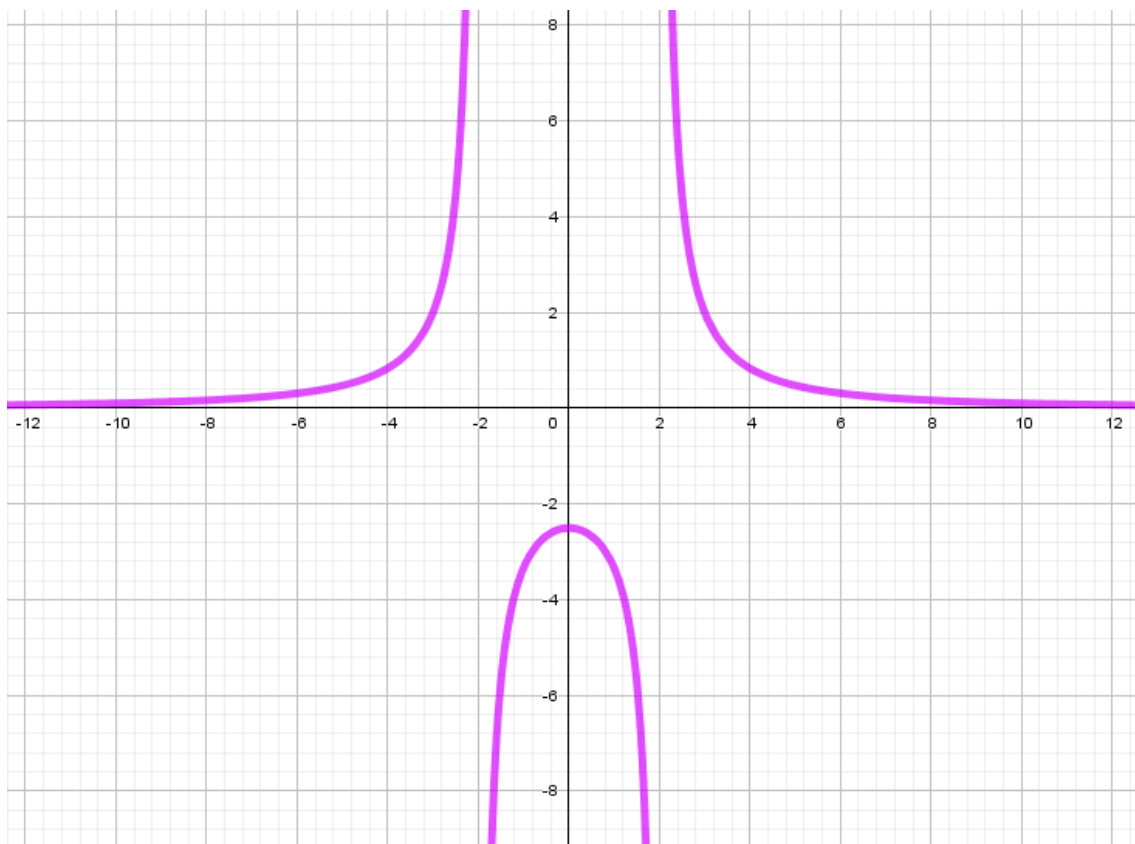
$$g(x) = \frac{10}{x^2 - 4}$$

a. $D_f = \mathbb{R} - [4]$	d. $D_f = \mathbb{R}$
b. $D_f = \mathbb{R} - [0]$	e. $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
c. $D_f = \mathbb{R} - [2]$	

7. Dada la siguiente tabla, indique cuál (es) de ellas podría ser la representación tabular de una función racional. Justifica tu respuesta.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$g(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$h(x)$	2	N. E	$-10/3$	$-5/3$	$-10/3$	N. E	2	$5/6$
$j(x)$	N. E	N. E	N. E	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

8. Dada la siguiente gráfica de una función, establezca su dominio y rango. Justifica tu respuesta.



$$D_f = \underline{\hspace{4cm}}$$

9. Dadas las siguientes expresiones racionales, determine de ellas su dominio y rango. Realice todos los procedimientos necesarios para ello.

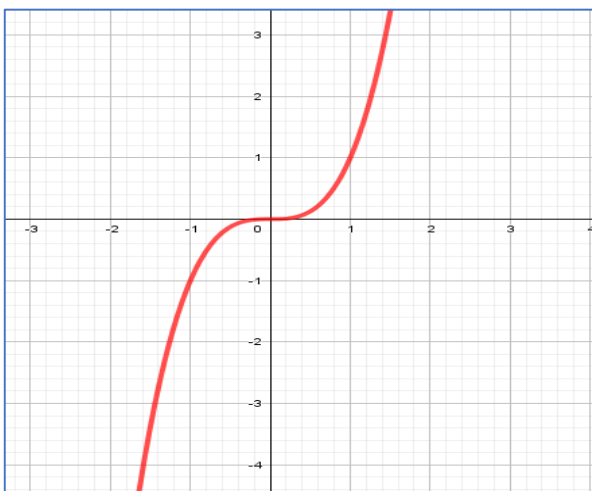
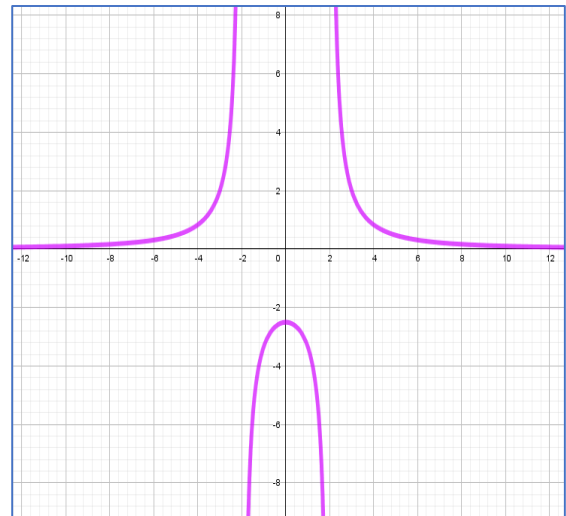
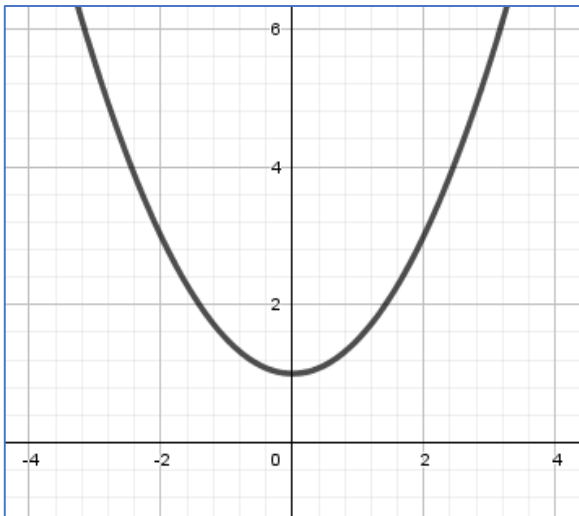
$$f(x) = \frac{2x+4}{3x-6}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2-8x+16}, \quad h(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

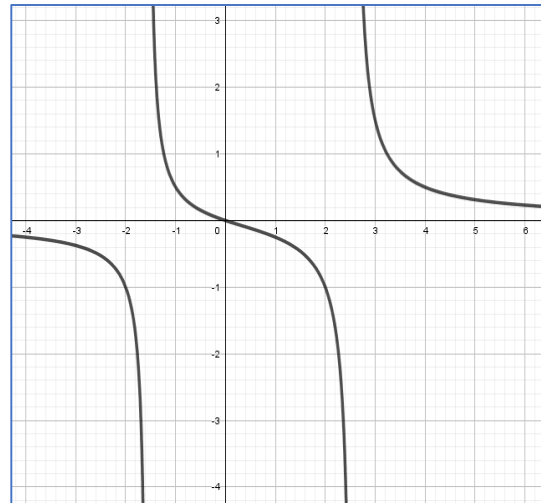
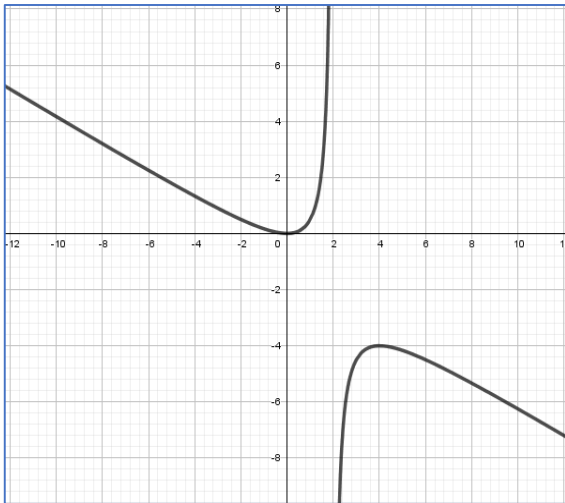
$$D_f = \underline{\hspace{2cm}}, \quad D_g = \underline{\hspace{2cm}}, \quad D_h = \underline{\hspace{2cm}}.$$

10. Es posible que exista una función racional cuyo dominio sean todos los números reales. Justifica tu respuesta. En caso afirmativo, cite al menos un ejemplo.

$$y =$$

11. De las siguientes gráficas, determine cuáles de ellas presentan asíntotas y que tipo de asíntotas son. Traza en cada caso la asíntota que encuentre.





12. Dada las siguientes expresiones, determine de ser posible, la ecuación de la(s) recta(s) que representa(n) sus asíntotas en la gráfica y justifica tu respuesta.

$$l(x) = \frac{9x^2+2}{3x+1}$$

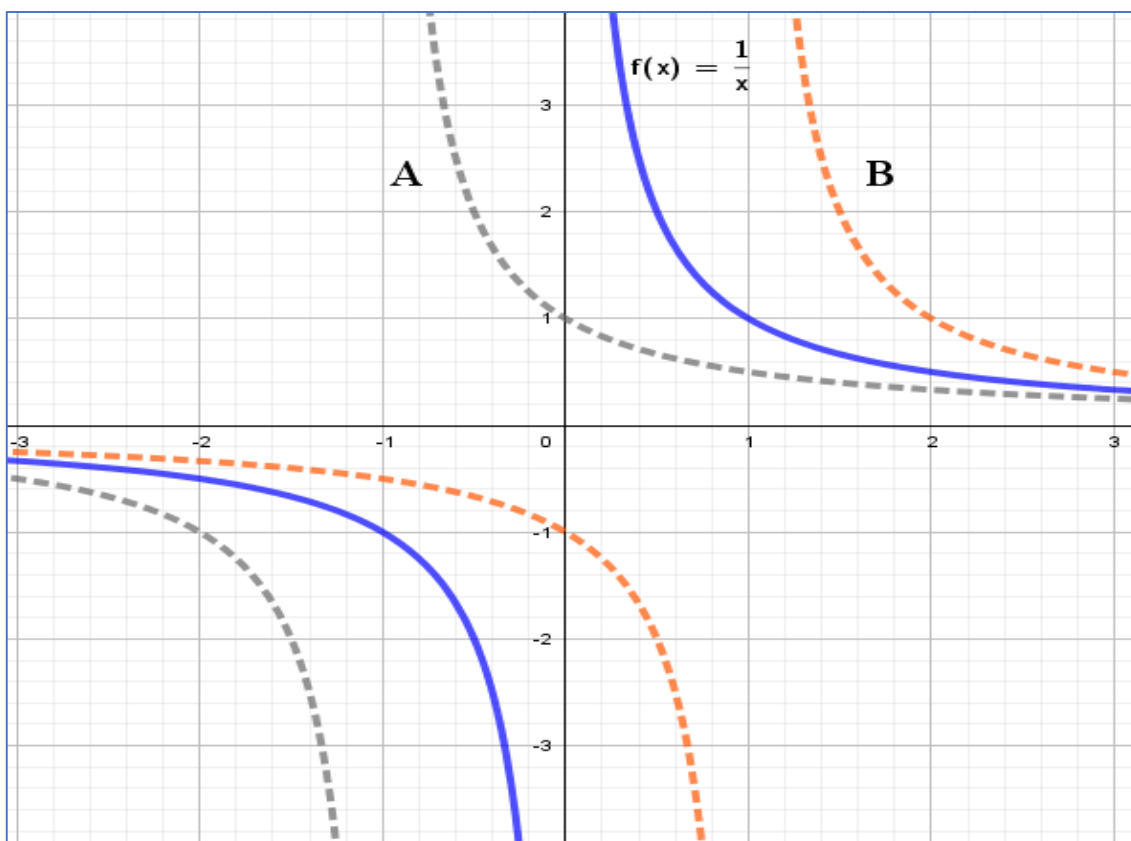
$$m(x) = \frac{x-3}{2+3x-x^2}$$

$$n(x) = \frac{4x}{2x^2+3}$$

$$l(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad m(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

13. ¿Qué caracteriza a una recta representada en la gráfica de una función racional para que sea considerada una asíntota de ella?

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ (que aparece en línea continua). Observa la gráfica y responde las preguntas 14 y 15 con esta información.



14. ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ y las gráficas punteadas (A y B)?

15. Proponga una expresión algebraica para cada una de las gráficas punteadas (A y B).

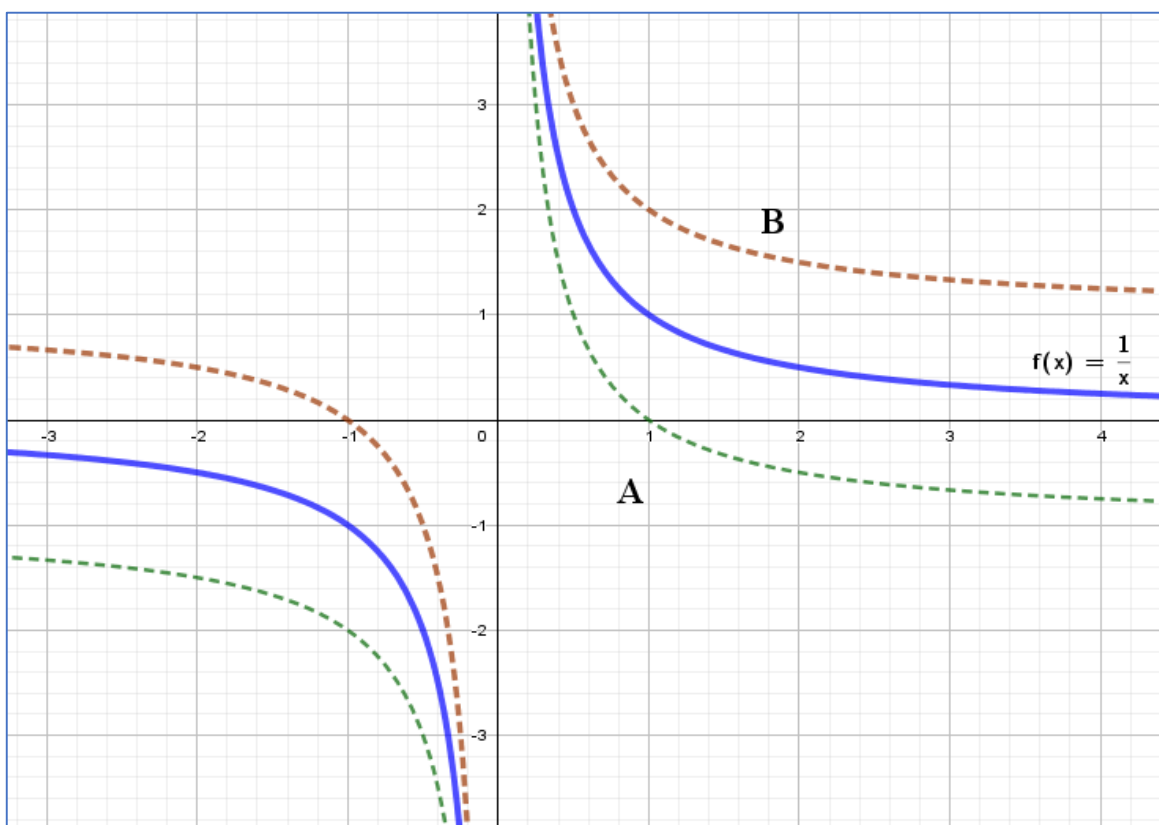
A

$f(x) =$

B

$f(x) =$

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = 1/x$. (que aparece en línea continua). Observa la gráfica y responde las preguntas 16 y 17 con esta información.



16. ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = 1/x$ y las gráficas punteadas (A y B)?

17. proponga una expresión algebraica para cada una de las gráficas punteadas (A y B).

A

$$f(x) = n \text{ color azul}.$$

B

$$f(x) =$$

¡Enhorabuena has terminado la prueba, gracias por tu colaboración!