



UNIVERSIDAD DEL VALLE

APLICACIÓN DE MODELOS BIO-ECONÓMICOS AL DESARROLLO DE NUEVAS ESTRATEGIAS DE PESCA

Tesis doctoral presentada por Erica Cruz Rivera
dentro del Programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas

Dirigida por
Dra. Olga Vasilieva, Universidad del Valle
Dr. Héctor Ramírez, Universidad de Chile



UNIVERSIDAD DEL VALLE

APLICACIÓN DE MODELOS BIO-ECONÓMICOS AL DESARROLLO DE NUEVAS ESTRATEGIAS DE PESCA

Tesis doctoral presentada por Erica Cruz Rivera
dentro del Programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas

Dirigida por
Dra. Olga Vasilieva, Universidad del Valle
Dr. Héctor Ramírez, Universidad de Chile

El doctorando

El director

El director

Cali, Junio 2019

A mi Familia y a José Raúl.

Agradecimientos

Muy especialmente a: Dios por por cada día que me brinda, por ser mi padre, mi amigo y mi guía, porque sin Él no hubiese sido posible lograrlo. Agradezco infinitamente a mi Madre Myriam Margarita Rivera, a mis hermanos Alejandra, David y Diego, a mis sobrinos Salomé, María José y Diego por brindarme siempre su apoyo, cariño y por darme la motivación para seguir siempre adelante. Agradezco a mi Padre quien desde el cielo me acompaña en este recorrido, a José Raúl por su amor, comprensión, entusiasmo e incondicional apoyo.

A la profesora Olga Vasilieva, el profesor Héctor Ramírez, por guiarme y motivarme a trabajar en este interesante tema, exigiendo siempre lo mejor de mí. A mis amigos por estar siempre presentes en el trayecto de este trabajo. Al Posgrado en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle, a COLCIENCIAS, y muy especialmente a la profesora Doris Hinestroza quien estaría feliz de ver hoy el resultado de mi trabajo.

Erica Cruz Rivera,

junio 2019

Índice general

Índice de figuras	vii
Índice de cuadros	ix
1 Introducción	5
2 Modelo de Pesquería Pelágica	13
2.1 Introducción	13
2.2 Solución formal del problema de planificador social	17
2.2.1 Formulación del problema	17
2.2.2 Estados estacionarios del sistema de optimalidad	24
2.2.3 Políticas de pesca sostenible	27
2.3 Análisis de estados estacionarios	29
2.3.1 Existencia y unicidad de los equilibrios estacionarios	30
2.3.2 Análisis asintótico cuando $\beta \rightarrow 0^+$	37
2.4 Conclusiones	48
3 Modelo Biológico de Coexistencia de Tres Especies	51
3.1 Introducción	51
3.2 Formulación del modelo	52
3.3 Existencia de puntos de equilibrio	59
3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios	66
3.5 Sensibilidad respecto al parámetro ρ	80
3.6 Conclusiones	85

ÍNDICE GENERAL

4	Coexistencia de Tres Especies con Capturas	87
4.1	Sistema marino de tres especies con capturas	87
4.2	Impacto de capturas sobre el comportamiento asintótico del sistema	90
4.3	Conservación de coexistencia de especies bajo capturas de $z(t)$. .	95
4.3.1	Identificación de una bifurcación de Hopf	95
4.3.2	Bifurcación de Hopf en E_4^u	97
4.4	Diseño de estrategias para una pesca sostenible aplicando la teoría de control óptimo	104
4.5	Conclusiones	112
5	Conclusiones y Trabajo Futuro	115
A	Apéndice. Paquete de software GPOPS II	119
	Bibliografía	123

Índice de figuras

2.1	Función $s(x)$ con $F(x) = F_1(x)$ (Función Logística, ver Observación 2.1).	25
2.2	Trayectorias de la dinámica poblacional $x(t) = x(t, u(t))$ correspondientes a las soluciones de tipo <i>turnpike</i> (2.22) y (2.23).	28
2.3	Impacto de la tasa de descuento r en el nivel económicamente viable del recurso renovable x_r : $F'(0) > r_1 > r_2$ implica que $0 < x_{r_1} < x_{r_2}$	31
2.4	Comportamiento esquemático del estado estacionario $\lambda(\beta)$ para valores grandes de x_r (Caso 2(a), r es relativamente pequeño) y x_r pequeño (Caso 2(b), r es relativamente grande), como se describe en la Proposición 2.1.	43
3.1	Función $\frac{\beta_2 x}{\alpha_1 + x}$ de respuesta funcional Holling tipo II.	53
3.2	Comportamiento asintótico de las soluciones de (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_1	69
3.3	Comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_2	72
3.4	Retrato de fase del punto de equilibrio E_2 en $\mathbb{R}_+^2$	73
3.5	Comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_3	76
3.6	Retrato de fase del punto E_3 en $\mathbb{R}_+^2$	77
3.7	Comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_4	79
3.8	Retrato de fase del punto de equilibrio E_4 en $\mathbb{R}_+^3$	80

ÍNDICE DE FIGURAS

3.9	Comportamiento asintótico de $y(t; \rho)$ con diferentes valores de $\rho \in [0, 3\rho^*]$: Líneas grises discontinuas para $\rho < \rho^*$, línea negra gruesa para $\rho = \rho^*$, y líneas rojas para $\rho > \rho^*$	82
3.10	Comportamiento asintótico de $z(t; \rho)$ con diferentes valores de $\rho \in [0, 3\rho^*]$: Líneas grises discontinuas para $\rho < \rho^*$, línea negra gruesa para $\rho = \rho^*$, y líneas cafés para $\rho > \rho^*$	83
3.11	Comportamiento asintótico de $x(t; \rho)$ con diferentes valores de $\rho \in [0, 3\rho^*]$: Líneas grises discontinuas para $\rho < \rho^*$, línea negra gruesa para $\rho = \rho^*$, y líneas azules para $\rho > \rho^*$	85
4.1	Gráficas de $\eta_i(\delta + u)$, $i = 1, 2, 3$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$	101
4.2	Gráfica de $x_4(\delta + u)$, $y_4(\delta + u)$, $z_4(\delta + u)$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$	101
4.3	Gráficas de $D_2(\delta + u) = \eta_1(\delta + u)\eta_2(\delta + u) - \eta_3(\delta + u)$ (izquierda) y de $\left. \frac{dD_2}{d\delta} \right _{\delta=\delta+u}$ (derecha) en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$	102
4.4	Gráficas de $\eta_1(\delta + u)$, $\eta_3(\delta + u)$, $D_2(\delta + u) = \eta_1(\delta + u)\eta_2(\delta + u) - \eta_3(\delta + u)$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$	102
4.5	Comportamiento del sistema (4.3) cuando $0 < u < u_0$, tomando $u = 0.11$	103
4.6	Comportamiento del sistema (4.3) donde ocurre la bifurcación de Hopf simple.	103
4.7	Comportamiento del sistema (4.3) cuando $u > u_0$, tomando $u = 0.25$	104
4.8	Trayectorias del sistema (4.19).	110
4.9	Trayectorias del sistema (4.19), bajo la estrategia de pesca $u^*(t)$	111

Índice de cuadros

2.1	Resumen de dependencias respecto a β : creciente (+) y decreciente (−).	48
3.1	Los rangos de referencia para los parámetros son tomados del trabajo doctoral [1].	55
4.1	Valores explícitos de los parámetros.	100
4.2	Valores explícitos de los parámetros del problema de control óptimo (4.18)-(4.19).	110

Productos Doctorado

Artículos

Catch-to-stock dependence: the case of small pelagic fishery with bounded harvesting effort. *Natural Resource Modeling*. Vol.32, No. 1, Article ID: e12193, DOI: 10.1111/nrm.12193, 2019.

A control theory approach aimed at sustainable conservation of single species under human intervention. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 102, No. 4, pp. 653-669, DOI:10.12732/ijpam.v102i4.6, 2015.

Ponencias

“Catch-to-stock dependence: the case of small pelagic fish”, Workshop Optimization and Equilibrium. Abril 24–25, Concepción, Chile, 2017.

“Análisis de estabilidad de un ecosistema marino”, XXX Jornada de Matemática de la Zona Sur 2017 (JMZS2017). Abril 26–28, Concepción, Chile, 2017.

“Sobre la estabilidad para un modelo biológico depredador-presa asociado con la coexistencia de tres especies”, X Congreso Latinoamericano de Biomatemática - X SOLABIMA. Agosto 7–11, Cusco, Perú, 2017.

“A qualitative analysis for a harvesting model of small pelagic fish with bounded fishing effort”, LXXXVI Encuentro Nacional de la Sociedad de Matemática de Chile (SOMACHI2017). Noviembre 2–4, Talca, Chile, 2017.

“Cach-to-stock biomass dependence in pelagic fishery model”, International Conference on Applied Mathematics and Informatics (ICAMI 2017). Noviembre 26 – Diciembre 1, San Andrés, Colombia, 2017.

“Un modelo de capturas-biomasa en el caso de pequeños peces pelágicos”, Seminario de Estudiantes de Posgrado en Ciencias Matemáticas–Universidad del Valle. Marzo 5, Cali, Colombia, 2018.

“Análisis de estabilidad para un sistema biológico de coexistencia de tres especies con capturas”, XXXI Jornada de Matemática de la Zona Sur - JMZS2018. Abril 25–26, Valdivia, Chile, 2018.

“Análisis cualitativo para un modelo de pesca con recursos limitados”, Seminario Especial de Estudiantes y Egresados de Matemáticas CONVImaTE. Cali, Colombia, 2018.

Estancias

The Joint 2015 CAMBAM-MBI-NIMBioS Summer School, entitled “Nonlinear Dynamics in Biological Systems”, Montreal, Canada, Junio 1–12, 2015.

Estancia de investigación, supervisada por el Prof. Héctor Ramírez, Universidad de Chile, Santiago, Chile. Marzo 15 – Mayo 15 , 2017.

Estancia de investigación, supervisada por el Prof. Héctor Ramírez, Universidad de Chile, Santiago, Chile. Septiembre 20 – Noviembre 20, 2017.

Estancia de investigación, supervisada por el Prof. Héctor Ramírez, Universidad de Chile, Santiago, Chile. Marzo 10 – Mayo 25, 2018.

International Congress of Mathematicians ICM 2018, Rio de Janeiro, Brasil, Agosto 1–9, 2018.

Participación en proyectos de investigación

“Modelos de Optimización y Viabilidad en Ecología y Economía – ECOPTIM” respaldado por PEERS-IRD, Francia (Université Paris-Est - Francia y Universidad del Valle - Colombia) Proyecto dirigido por: Prof. Michel De Lara, Université Paris-Est - Francia, Enero 2013– Diciembre 2015.

“Dependencia entre la biomasa y captura: El caso de pequeños peces pelágicos”, proyecto institucional. Proyecto dirigido por: Prof. Olga Vasilieva, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia, Agosto 2017– Agosto 2018.

“Modeling, Optimization and Viability for Epidemics Control (MOVECO)”, MEAE, CONICYT, CMM-Universidad de Chile, COLCIENCIAS. Proyecto dirigido por: Prof. Olga Vasilieva, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia, 2018–2019.

REDES170059 “AM2V-MobiMat Network on Modeling and Control”. Proyecto dirigido por Pedro Gajardo, UTFSM, Chile, Enero 2018 - Diciembre 2019.

Financiación

Becaria, Convocatoria Doctorados Nacionales 617(2) COLCIENCIAS. Junio 2014 – Junio 2018.

Asistente de Docencia, Posgrado en Ciencias Matemáticas, Agosto – Diciembre 2018.

Becaria, The Joint 2015 CAMBAM-MBI-NIMBioS Summer School. (Junio 2015).

Estancia de investigación Universidad de Chile (Marzo-Mayo 2017). Financiada por el Posgrado en Ciencias Matemáticas, Universidad del Valle y el proyecto de Internacionalización del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería con Mención en Modelación Matemática, Universidad de Chile.

Workshop Optimization and Equilibrium–JMZS2017, (Abril 2017). Finaciada por el proyecto de internacionalización del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería con Mención en Modelación Matemática, Universidad de Chile.

X SOLABIMA (Agosto 2017). Financiada por la Convocatoria interna para apoyo a la movilidad –CIAM 2017, Universidad del Valle.

Estancia de investigación Universidad de Chile (Septiembre-Noviembre 2017). Financiada por “Dependencia entre la biomasa y captura: El caso de pequeños peces pelágicos”, proyecto institucional Universidad del Valle.

SOMACHI2017, (Noviembre 2017). Finaciada por el proyecto de internacionalización del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería con Mención en Modelación Matemática, Universidad de Chile.

Estancia de investigación Universidad de Chile (Marzo-Mayo 2018). Financiada por el Posgrado en Ciencias Matemáticas, Universidad del Valle y COLCIENCIAS.

Becaria, ICM 2018 (Agosto 2018), Financada por ICM 2018.

Próxima Ponencia, 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics – ICIAM 2019, becaria ICIAM 2019. (Julio 15–19, 2019).

Introducción

Los océanos son parte fundamental en la conservación de la vida en nuestro planeta, puesto que estos cubren las tres cuartas partes de la superficie de la Tierra, contienen el 97 por ciento del agua del planeta y son habitados por una importante diversidad de seres vivos que representan ecosistemas muy complejos. Estas características naturales se ven permanentemente amenazadas por el cambio climático, la contaminación, la sobreexplotación y el consumo de especies por debajo de las tallas mínimas. Es por esta razón que en *La Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*¹ uno de los objetivos trazados es conservar y utilizar sosteniblemente los océanos, los mares y los recursos marinos para el desarrollo sostenible (ver ONU [2]).

Para asegurar la conservación de la vida en el futuro de nuestros océanos y lograr este objetivo es muy importante establecer las prácticas de la pesca sostenible. Dichas prácticas están orientadas a garantizar la supervivencia a niveles óptimos de poblaciones de especies marinas, teniendo en cuenta el entorno natural y las características de los ecosistemas, con el fin de evitar un impacto negativo sobre las

¹Agenda desarrollada el 25 de septiembre de 2015, en donde líderes mundiales adoptaron un conjunto de objetivos globales para erradicar la pobreza, proteger el planeta y asegurar la prosperidad para todos como parte de una nueva agenda de desarrollo sostenible–ONU (The United Nations). Cada objetivo tiene metas específicas que deben alcanzarse en los próximos 15 años.

1. INTRODUCCIÓN

especies comerciales, de los demás habitantes del ecosistema y de las comunidades que encuentran en la pesca una fuente de ingresos y medios de supervivencia. De acuerdo a estadísticas de la FAO (Food and Agriculture Organization of the United Nations) más de tres mil millones de personas dependen de la biodiversidad marina y costera para su sustento [3].

La pesca sostenible implica que los agentes encargados deben establecer políticas claras sobre las capturas de forma controlada, con el fin de asegurar la preservación de las diferentes especies comerciales, lo cual permite obtener no solo ganancias en el presente sino también a futuro, garantizando así que las personas que dependen de la pesca puedan mantener su medio de vida en el tiempo. Las recolecciones en la pesca deben ser bien planificadas, de manera que generen el menor impacto negativo a la coexistencia de la especie comercial, de otras especies y al hábitat dentro del ecosistema.

Según informes de la FAO, la producción pesquera mundial alcanzó un máximo de aproximadamente 171 millones de toneladas en 2016, de los cuales las capturas marinas totales a nivel mundial fueron de 79,3 millones de toneladas, esto en comparación con los 81,2 millones de toneladas registrados en el reporte del año 2015 representa un descenso de casi 2 millones de toneladas [3]. En América del Sur los países pesqueros Perú y Chile reportaron una baja de las capturas de anchoveta, lo cual representa 1,1 millones de toneladas de esa disminución, y es básicamente atribuido a la influencia del cambio climático como lo es el fenómeno de El Niño. Es importante mencionar que el cultivo de especies de peces comerciales va en crecimiento, pues la acuicultura según la FAO en el año 2016 representó un 47 por ciento del total de la producción pesquera mundial [3].

La pesca sostenible es pues una práctica necesaria por lo que el desarrollo de líneas de investigación pesquera han motivado modelos matemáticos enfocados en ecosistemas marinos con el fin de contribuir a la creación de políticas y en la toma de decisiones para la conservación de recursos pesqueros y la utilidad económica de estos. Este trabajo desarrolla algunos aspectos de la teoría bioeconómica dinámica que podrían dar lineamientos para lograr un manejo sostenible de la actividad pesquera.

En la literatura se pueden encontrar modelos bioeconómicos simples (por ejemplo, [4, 5, 6, 7, 8, 9]) como es el modelo de Gordon-Schaefer (1950) [4]

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - h(t), \quad x(0) = x_0, \quad t > 0$$

donde $F(x)$ representa el crecimiento biológico del recurso pesquero. Para modelar la explotación, se introduce el término de tasa de recolección $h(t)$, la cual se define como:

$$h(t) = qu(t)x(t) \tag{1.1}$$

donde la recolección $h(t)$ depende del esfuerzo de pesca $u(t)$ y de la biomasa $x(t)$ en el tiempo t ; y q es una constante conocida como el coeficiente de *capturabilidad*, o como la eficiencia de un barco pesquero promedio, definido como la fracción de la población que es extraída por una unidad de esfuerzo.

La ecuación (1.1) implica que la misma captura puede obtenerse a diferentes niveles de esfuerzo y biomasa. La limitante en este sentido es que q , considerado constante para un período de tiempo determinado, no puede obtenerse sin una estimación independiente de la biomasa. Usualmente se supone que la CPUE² (la captura o recolección h por unidad de esfuerzo de pesca u) es proporcional al tamaño del stock existente de peces (o biomasa x), tal que $CPUE = h/u = qx$. Por lo tanto, los datos de la CPUE se usan tradicionalmente para proporcionar información histórica y actual sobre la abundancia de existencias [10, 11, 12, 13].

No obstante, existen otros enfoques más sofisticados para la evaluación de las poblaciones de peces existentes donde las series cronológicas de CPUE se complementan con datos de la pesca recopilados de diferentes fuentes, como estudios ecosistémicos, monitoreo acústico o aéreo, la edad y la talla de la biomasa recolectada, registros climáticos, etc. [14, 15, 16].

Por otro lado, el cambio en la CPUE puede no ser proporcional al tamaño actual de la población. En otras palabras, la CPUE puede disminuir más rápido o más lento que la abundancia de peces. Esto último se puede expresar, según [17], mediante la función de capturabilidad

$$q = q(x) = x^{\beta-1} \tag{1.2}$$

²Por sus siglas en inglés “Catch Per Unit of Effort”, captura por unidad de esfuerzo.

1. INTRODUCCIÓN

que depende del stock en lugar del coeficiente de capturabilidad constante. En la expresión (1.2), $\beta > 0$ se conoce como *elasticidad de capturabilidad* con respecto a los cambios en el nivel del stock. Por lo tanto, $\beta > 1$ implica que la CPUE disminuye más rápido que el stock de peces x , y esta situación se conoce como “hiperdepleción”. Por el contrario, $\beta < 1$ implica que la CPUE disminuye más lento que x , lo que resulta en la llamada “hiperestabilidad”. Para conocer más detalles sobre situaciones de “hiperdepleción” e “hiperestabilidad”, véase [7, 9, 17, 18].

En este documento, el primer modelo que estudiamos hace referencia a las poblaciones de peces pelágicos pequeños (ver Capítulo 2), que tienen una característica importante que no es considerada en los modelos tradicionales. Estas especies se reproducen en grandes cantidades, y tienden a agruparse en cardúmenes, lo cual las hace muy vulnerables respecto a las capturas. Esto implica que los pescadores pueden lograr una captura casi constante por unidad de esfuerzo (CPUE) en cualquier momento, siendo muy difícil establecer los momentos de escasez. Es por esta razón que las funciones de recolección tradicionales no son adecuadas para las capturas de este tipo de poblaciones marinas. Por este motivo, diferentes autores proponen como alternativa el uso de una función de recolección no lineal (o tasa de recolección instantánea) en la forma de una función de producción de tipo Cobb-Douglas [9, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] cuando se trata de pesquerías pelágicas, es decir,

$$h(x, u) = q(u, x)ux = u^\alpha x^\beta \quad \text{con} \quad q(u, x) = u^{\alpha-1}x^{\beta-1}, \quad (1.3)$$

donde u representa el esfuerzo de pesca, x el stock de peces disponible. De acuerdo con [22], el parámetro α no negativo expresa cómo el rendimiento de la captura marginal varía a los cambios del esfuerzo de la pesca, mientras que el parámetro $\beta > 0$ mide la sensibilidad de los rendimientos de las capturas con respecto a los cambios marginales en el nivel de stock de peces.

En el presente trabajo, usando la función de recolección en la forma (1.3) con $\alpha = 1$, $0 < \beta < 1$ y haciendo uso de la teoría de control óptimo, se obtuvo el sistema de optimalidad, en el cual se identificó un único estado estacionario, que se ajusta a los cambios en el parámetro de sensibilidad de los rendimientos β . Además, se logró comprobar que este estado estacionario es la única solución de la *ecuación*

*fundamental de explotación de recursos renovables*³.

La *ecuación fundamental de explotación de recursos renovables* nos permite establecer políticas de pesca sostenible, las cuales se adaptan a la variabilidad del número de buques pesqueros y a los cambios en el parámetro β que mide la sensibilidad de los rendimientos de las capturas respecto a los cambios marginales en los niveles de la densidad de la especie. Además, se estudió el caso en que el parámetro de sensibilidad tiende a cero, es decir en el caso de un posible colapso de la pesca, la pérdida total de sensibilidad. Este análisis proporciona algunas ideas útiles sobre las posibles alteraciones del estado estacionario y de las políticas de pesca adyacentes cuando el parámetro β es afectado por alguna perturbación exógena.

El análisis mencionado anteriormente se desarrolló para un modelo de una sola especie comercial. Es oportuno mencionar que en este caso no se consideró las interacciones de la especie estudiada con otras especies de su entorno. Lo anterior nos llevó a preguntarnos, ¿Qué sucede cuando se consideran las interacciones con otras especies? Es decir, cómo se ve afectada la recolección de una especie comercial dependiente de otras especies.

Es importante señalar que, de acuerdo con informes de la FAO, se ha mostrado que, los principales depredadores de los peces, son precisamente peces de otras especies [3]. Más aún, en muchos casos la depredación por parte del ser humano (capturas) es muy inferior a la depredación por peces de otras especies [3]. La depredación es un proceso natural e importante para la regulación de las poblaciones en los ecosistemas, en particular en poblaciones de peces. Sin embargo, las interacciones entre depredadores y presas, tienen efectos sobre los recursos pesqueros y éstos son sumamente variados y complejos. Por lo que es necesario estudiar las situaciones cuando está en peligro la supervivencia de una especie y, por ende, la viabilidad económica de las empresas pesqueras.

En este escenario es claro que la actividad humana y económica inducen una dinámica biológica que se diferencia de la que naturalmente habría surgido sin estas intervenciones. Esta posibilidad plantea algunos de los interrogantes con los que nos encontramos en el desarrollo de esta parte del trabajo: ¿Cómo afectan la intervención humana y los intereses económicos la estabilidad del equilibrio

³El planteamiento de esta ecuación es acorde al enfoque tradicional de C. Clark [4, 5], pero en nuestro caso la función de recolección $h(t)$ es no lineal.

1. INTRODUCCIÓN

biológico? Dado un recurso limitado, ¿Cuál es el esfuerzo (mano de obra, buques) que se debe disponer con el fin de optimizar las utilidades en la captura de una especie? ¿Qué políticas se deben implementar con el fin de tener utilidades sin acabar con el recurso (población)?

Estos interrogantes motivan el estudio de modelos de poblaciones desde un enfoque bioeconómico a través de un problema de control óptimo, dado que es posible describir la dinámica biológica poblacional simultáneamente con modelos (intereses) económicos a través de un problema de optimización, que puede definir pautas en términos de políticas de conservación y que también permita beneficios económicos en la extracción de un recurso biológico renovable.

El segundo modelo presentado en este trabajo, se enfoca en el estudio de una especie comercial que encabeza una cadena alimenticia (ver Capítulos 3 y 4). La especie de interés se alimenta de dos especies no comerciales, las cuales claramente son importantes para su persistencia y sobrevivencia. En esta parte de nuestra investigación, partimos de un trabajo reciente de P. Panja & S. K. Mondal [26] en el que se plantea un modelo de una cadena alimenticia de tres especies. En este modelo interactúan tres especies marinas (fitoplancton, zooplancton y peces), y se establece una función de crecimiento biológico $G(x)$ logística para la población de fitoplancton que está en el nivel inicial de la cadena y constituye la población de presa tanto para el zooplancton como para los peces.

En este trabajo consideramos una función de crecimiento biológico más general, es decir una función $G(x)$ no negativa de clase $C^2([0, K])$, estrictamente cóncava para la cual existe una constante $K > 0$ tal que $G(0) = G(K) = 0$. La constante K se denomina “*capacidad de carga*” o densidad máxima de presas soportable por el medio ambiente. Es importante señalar que la función $G(x)$ describe el crecimiento natural intrínseco de la población de presas, y puede abarcar diferentes funciones de crecimiento biológico, tales como la función de Gompertz, función de Smith, entre otras.

P. Panja & S. K. Mondal [26] centran su investigación en el modelo de tres especies en ausencia de capturas, dando condiciones no muy precisas sobre los parámetros del sistema para la existencia de puntos de equilibrio y su respectiva estabilidad local. En nuestro trabajo se realiza el análisis de estabilidad local del sistema sin capturas, estableciendo las condiciones que garantizan la existencia de

los puntos de equilibrio y sus respectivas estabilidades en términos de la función más general $G(x)$, simplificando y precisando dichas condiciones en comparación con el trabajo de P. Panja & S. K. Mondal [26].

Además, estudiamos el sistema mencionado de tres especies incluyendo las capturas, ya que nuestro interés está centrado en aspectos relacionados con los efectos de las capturas. De igual forma, en este nuevo sistema derivamos las condiciones que deben cumplir los parámetros del sistema para establecer la existencia y garantizar la estabilidad de sus puntos de equilibrio, y logramos especificar dichas condiciones en términos de la función $G(x)$, centrándonos en el punto de coexistencia de las especies.

En el trabajo de P. Panja & S. K. Mondal [26] se analiza la bifurcación respecto a un parámetro que representa la contaminación por parte de la población que es presa de las otras especies, lo cual afecta directa e indirectamente la densidad de las especies depredadoras. A diferencia del trabajo de P. Panja & S. K. Mondal [26], realizamos un análisis de sensibilidad del equilibrio de coexistencia de las especies respecto a las variaciones de dicho parámetro de contaminación (ver Sección 3.5), puesto que la coexistencia de las especies garantiza que la pesca sea sostenible.

Cabe resaltar que uno de los aportes de este trabajo de tesis es el análisis de bifurcación de Hopf del modelo con capturas respecto al control u que expresa el esfuerzo de pesca. Conviene mencionar que no se encuentra en la literatura trabajos en donde se estudian bifurcaciones respecto al parámetro de control. De otro lado, este tipo de análisis de bifurcación respecto al control u permite ver cuál podría ser la respuesta del ecosistema respecto a pequeñas variaciones de las capturas.

Estudiamos además, el problema de control óptimo del sistema de tres especies con capturas, donde se incluyen las capturas de la especie comercial, en tiempo continuo y finito. Nuestro interés va dirigido a maximizar los beneficios eligiendo de forma adecuada el esfuerzo de pesca. Para esto aplicamos el Principio del Máximo de Pontryagin, determinando el sistema de optimalidad asociado con el problema de control óptimo, y logrando así una caracterización del control óptimo $u^*(t)$. Sin embargo, dado que el sistema de optimalidad resultante en este problema es no lineal y tiene dimensión 6, resolverlo de forma analítica es imposible, debido a su complejidad. Por lo anterior, solucionamos este problema de control óptimo

1. INTRODUCCIÓN

de forma numérica, haciendo uso del paquete de software avanzando **GPOPS II**⁴ elaborado por PR Optimization Research LLC para la plataforma de **MATLAB** ([27] <http://www.gpops2.com/>).

En resumen, en el Capítulo 2 planteamos un modelo bioeconómico de una población de peces pelágicos pequeños en donde estudiamos un problema de control óptimo de horizonte infinito relacionado con las capturas. Para esto se hace uso del Principio del Máximo de Pontryagin. En dicho capítulo nos interesa cómo responde el sistema planteado a las variaciones en el parámetro que mide la sensibilidad del rendimiento de capturas adicionales con respecto a los cambios marginales en el nivel de las poblaciones de peces. Además, debido a las características del problema y haciendo uso del Teorema de la Función Implícita mostraremos la existencia de una curva de puntos de equilibrio.

En el Capítulo 3, desarrollamos un modelo matemático que describe la coexistencia de tres especies en una cadena alimenticia, estudiamos la estabilidad de los puntos de equilibrio de la dinámica natural. También llevamos a cabo un análisis de sensibilidad de los cambios que presenta el estado estacionario de coexistencia respecto a pequeñas variaciones en el parámetro ρ . Dicho parámetro representa la contaminación por parte de la población de presa que afecta directa e indirectamente las poblaciones de depredadores.

En el Capítulo 4 realizamos un análisis de la estabilidad en el caso de adicionar al sistema del Capítulo 3 la actividad de explotación humana, la cual puede alterar la dinámica biológica natural. También identificamos una bifurcación de Hopf respecto al control u cuando éste se asume constante. Además, analizamos el problema de control óptimo del sistema de tres especies donde se incluye las capturas de la especie comercial en tiempo continuo y finito, logrando la construcción de políticas de pesca sostenible.

Por último, en el Capítulo 5 presentamos las conclusiones generales de este trabajo y las perspectivas de trabajos futuros. A medida que se ha desarrollado la investigación, nos hemos encontrados con problemas interesantes que son complementarios a este trabajo doctoral en los cuales se planea trabajar para obtener otros resultados importantes derivados de esta investigación.

⁴La descripción del paquete **GPOPS II** se presenta en el Apéndice.

Modelo de Pesquería Pelágica

2.1 Introducción

Los peces pelágicos pequeños (entre los cuales se pueden encontrar el arenque, la anchoa, la macarela, el capelán o la sardina, entre otros) se caracterizan por tener una alta tasa de reproducción y un ciclo de vida bastante corto. Las poblaciones de peces pelágicos presentan de forma recurrente ciclos fuertes de abundancia y escasez, de tal forma que exhiben un patrón de comportamiento distintivo que los hace particularmente vulnerables a las capturas. Las especies de peces pelágicos tienden a agruparse en cardúmenes y bancos densos y grandes, que constituyen un objetivo fácil para la pesca comercial. Durante los períodos de disminución de la abundancia de estos peces, el número total de cardúmenes puede disminuir, mientras que cada banco de peces mantiene el mismo tamaño promedio a los dados en períodos de mayor abundancia. En consecuencia, la densidad promedio de biomasa en los bancos permanece casi igual durante períodos de abundancia y de escasez. Esto implica que los pescadores pueden lograr una captura casi constante por unidad de esfuerzo (CPUE) en cualquier momento.

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Este fenómeno, conocido como la hiperestabilidad de las poblaciones pelágicas [7, 9, 17], admite la modelación matemática expresada por la función de capturabilidad q (ver (1.2) en Capítulo 1) que depende del tamaño del stock e incluye un parámetro particular $\beta > 0$ referente a la “elasticidad de capturabilidad”. Este parámetro juega un papel fundamental en el modelamiento de la recolección de los recursos pelágicos [22], a saber:

- Si la captura por unidad de esfuerzo, CPUE, decrece más lentamente que el tamaño del stock pelágico, se tiene

$$0 < \beta < 1;$$

- Si la captura por unidad de esfuerzo, CPUE, permanece casi invariable a pesar del decrecimiento del tamaño del stock pelágico existente, se tiene

$$\beta \rightarrow 0^+.$$

Por lo tanto, el uso de los datos de la CPUE en una evaluación de la abundancia actual de peces, sin tener en cuenta la variabilidad de q (es decir, asumiendo $\beta = 1$, en (1.2), Capítulo 1), puede desinformar a los administradores de pesquerías produciendo estimaciones demasiado “optimistas” de la población existente de peces y así aumentar el riesgo de la sobreexplotación de la pesquería.

Por esta razón, diferentes autores proponen usar una función de producción de tipo Cobb-Douglas [9, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] para modelar la recolección del stock pelágico hiperestable

$$h(x, u) = q(u, x)ux = u^\alpha x^\beta \quad \text{con} \quad q(u, x) = u^{\alpha-1}x^{\beta-1}, \quad (2.1)$$

donde u representa el esfuerzo de pesca, mientras que x representa el stock de peces disponible. Es pertinente recordar que, de acuerdo con [22], el parámetro no negativo α expresa cómo la productividad (o rendimiento) de la captura marginal responde a los cambios del esfuerzo de la pesca⁵, mientras que el parámetro $\beta > 0$ mide la sensibilidad de los rendimientos de las capturas con respecto a los cambios

⁵Bajo este supuesto, $\alpha = 1$ implica una productividad marginal de captura constante por unidad adicional de esfuerzo de pesca.

marginales en el nivel de stock de peces. En el caso del costo unitario constante del esfuerzo de pesca, los valores bajos de β expresan la pérdida de sensibilidad del costo unitario de recolección con respecto a las variaciones en el nivel de stock de peces, y $\beta = 0$ implica que los costos de recolección son independientes del stock. Conviene notar que en [25] se hace referencia a los parámetros α y β en un sentido más general, llamándolos *elasticidades del esfuerzo de pesca* y de la *producción del stock*, respectivamente.

Los modelos tradicionales de pesca de tipo Gordon-Schaefer [4] con capturabilidad constante son incluidos en la fórmula generalizada de recolección (2.1) cuando la CPUE se asume proporcional a la abundancia del stock ($\beta = 1$) y la productividad marginal de captura de un esfuerzo adicional de pesca se supone constante (es decir, $\alpha = 1$). Bajo esta suposición, el recurso está siempre a salvo de la extinción, incluso a tasas bajas de crecimiento biológico del stock de peces y tasas altas de descuento [4].

Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que, en el caso de poblaciones pelágicas que exhiben hiperestabilidad, tal simplificación no es posible y que β debe ser estrictamente menor que la unidad (ver, por ejemplo, [17, 19, 28, 29, 30]), mientras para algunas especies en particular, β puede incluso alcanzar valores cercanos a cero [18, 29]. Por otro lado, la elasticidad del esfuerzo de pesca α no es significativamente diferente de la unidad para la mayoría de las flotas [18, 20, 30, 31, 32]. No obstante, [23] resalta que $\alpha > 1$ puede esperarse cuando hay “pocos” buques, mientras que $\alpha < 1$ implica “muchos” buques.

Los autores de [22] estudiaron un modelo de pesquería pelágica en tiempo continuo con rendimientos decrecientes ($0 < \alpha < 1$) y valores pequeños positivos para β , relacionados por $\alpha + \beta = 1$, y analizaron la respuesta de un único estado estable de la biomasa y la recolección estacionaria cuando $\beta \rightarrow 0^+$ (pérdida de sensibilidad de las capturas con respecto a las variaciones en el nivel del stock).

Por otra parte, los autores de [25] analizaron un modelo de pesca pelágica en tiempo discreto con rendimientos crecientes ($\alpha > 1$) y $\beta = 0,562$ fijo, reafirmando el resultado previo de [20] con respecto al caso de rendimientos constantes ($\alpha = 1$) con $\beta < 1$ donde los experimentos numéricos revelaron la existencia de un equilibrio óptimo en el estado estacionario en el cual el recurso se puede preservar en niveles altos de stock.

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Más aún, el autor de [33] estudió un modelo de pesca recreativa con productividad de captura por esfuerzo constante ($\alpha = 1$) y stock hiperestable ($0 < \beta < 1$), donde maximizó una función de utilidad tipo CES⁶ y donde tanto la biomasa recolectada y como el mismo esfuerzo de pesca constituyeron los beneficios para los pescadores recreativos. Este caso no es de nuestro interés, dado que en los modelos de pesca comercial el esfuerzo pesquero está limitado por la capacidad de la flota y no puede maximizarse sin aumentar los costos relacionados con la explotación de los recursos, ni tampoco sin afectar el rendimiento de la renta económica.

En este capítulo, seguimos la idea principal de [22] mientras asumimos la productividad marginal *constante* de una unidad adicional de pesca ($\alpha = 1, \beta \geq 0$) en la función de recolección de tipo Cobb-Douglas. Además, suponemos que el esfuerzo de pesca está acotado y proporcionamos una forma explícita de políticas de pesca sostenible como una función del stock estacionario que, a su vez, depende continuamente del parámetro β . Esta política permite al planificador social (o los administradores de la pesquería) elegir un número adecuado de unidades de pesca (buques) de acuerdo con el máximo esfuerzo de pesca permitido. Esto último marca la diferencia principal entre nuestro trabajo y el de [22] donde el esfuerzo de pesca (asumido a priori no acotado) ha sido caracterizado en términos del stock estacionario y el precio sombra, ambos dependientes continuamente de β y dependientes esencialmente del número de buques usados por la pesquería.

Esperamos que este trabajo pueda contribuir en la evaluación de las políticas pesqueras existentes y futuras. En los últimos años, los responsables de la toma de decisiones han utilizado ampliamente el enfoque de *Evaluación de la Estrategia de Gestión* (MSE, por sus siglas en inglés “Management Strategy Evaluation”) para investigar las compensaciones entre los diferentes objetivos de maximización de rendimientos, reducción de costos y desafíos de la conservación de stock [14, 15, 16, 35]. El enfoque MSE se basa en el desarrollo de varios “modelos operativos” que simulan el ciclo completo de gestión probando un conjunto de comprensivas estrategias de gestión bajo diferentes escenarios de dinámicas poblacionales, a fin

⁶En economía, la función de utilidad de *elasticidad de sustitución constante* (CES, por sus siglas en inglés “Constant Elasticity of Substitution”) describe los cambios en las preferencias de los consumidores entre bienes diferenciados; la definición original de la función de utilidad tipo CES se encuentra en [34].

2.2 Solución formal del problema de planificador social

de determinar una estrategia la cual sea suficientemente robusta y pueda predecir un resultado deseable. En este contexto, nuestro modelo de un solo stock junto con la propuesta de política de pesca podría probarse dentro del marco del enfoque MSE con diferentes niveles de hiperestabilidad expresados por el parámetro de captura-stock β y diferentes tamaños iniciales de las poblaciones de peces. Esto, además de proporcionar una base teórica, puede brindar información adicional sobre el comportamiento potencial de las pesquerías pelágicas y así ayudar a una mayor adaptación y mejora de los modelos de gestión pesquera.

2.2 Solución formal del problema de planificador social

El “planificador social” se entiende como un único propietario de una pesquería pelágica que comprende peces de una sola especie. El objetivo principal del planificador social consiste en elegir una variable de decisión única (nivel estacionario del esfuerzo pesquero) que permita explotar este recurso natural de manera sostenible mientras se maximiza el total del valor de la renta económica de descuento intertemporal derivada de la pesca.

2.2.1 Formulación del problema

Antes de proceder con la formulación matemática del problema, es importante mencionar que nuestro enfoque se basa en varias suposiciones esenciales no matemáticas que pueden estar fuera de las prácticas actuales en algunas pequeñas pesquerías reales, mientras que las grandes pesquerías comerciales deberían ser capaces de cumplir con tales suposiciones. En términos específicos, nuestro enfoque requiere que los administradores de la pesquería:

- Estén informados de las tendencias actuales en la situación económica; es decir, ellos deben tener estimaciones razonables de los valores económicos presentes y futuros del activo (stock de peces explotados). En términos matemáticos, la diferencia entre los valores del activo presente y futuro está determinado por la tasa de descuento (r), que se presentará más adelante en esta sección;

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

- Puedan evaluar y monitorear el tamaño del stock, y tener una posible estimación del crecimiento biológico natural de la biomasa explotada;
- Tengan la capacidad de detectar la variabilidad en los niveles de hiperestabilidad (expresada por el parámetro β en (2.1)) utilizando registros de CPUE y/o datos alternativos recolectados por las pesquerías y otros organismos.

Además de estos puntos, suponemos que todos los buques que participan en la pesca tienen la misma tecnología, en consecuencia, los mismos costos de recolección. También suponemos que el precio por unidad de recolección está fijado exógenamente por el mercado de la pesca.

Nuestro modelo bioeconómico será lo suficientemente simple para centrarse directamente en el análisis de sensibilidad de la elección óptima del esfuerzo de pesca, correspondiente a los niveles estacionarios (sostenibles) para la tasa de recolección y del stock de peces, con respecto a los cambios en el parámetro β .

Consideremos un stock inicial de una sola especie de peces pelágicos $x(0) = x_0 > 0$ y supongamos que hay N unidades de pesca simétricas y uniformes (por ejemplo, buques, embarcaciones, barcos) que en $t = 0$ comienza simultáneamente la pesca. El número de unidades de pesca es definido por el planificador social que controla únicamente el proceso de recolección. La evolución del stock de peces $x(t)$ (o biomasa) bajo explotación se puede describir mediante el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t)) - h(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, & x_0 > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $F(x)$ representa una función de crecimiento biológico con $K > 0$ tal que

$$F(0) = F(K) = 0, \quad F(x) > 0 \text{ para todo } x \in (0, K),$$

y donde K expresa el nivel máximo del stock biológico el cual es soportado por el medio ambiente en ausencia de recolección. Se debe aclarar que consideramos un modelo sin escala y que el stock biológico disponible para la recolección se mide en unidades de masa (por ejemplo, toneladas). Es natural suponer que $x(t)$ es acotada para todo $t \geq 0$ donde K puede verse como la cota superior (saturación constante o capacidad de carga) y $h(t)$ corresponde a la función de recolección.

2.2 Solución formal del problema de planificador social

Observación 2.1 Algunos ejemplos de $F(x)$ usados extensamente en la literatura son los siguientes (ver [36]):

1. *Función Logística:* $F_1(x) = ax(1 - x/K)$;

2. *Función de Gompertz:* $F_2(x) = \begin{cases} ax \ln(x/K) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$;

3. *Función de Smith:* $F_3(x) = \frac{ax(K - x)}{K + bx}$.

Las anteriores funciones $F_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, son cóncavas para $x \in (0, K)$ y satisfacen las condiciones $F_i(0) = F_i(K) = 0$, $F'_i(0) > 0$, $F'_i(K) < 0$ y $F''_i(x) < 0$ para $x \in (0, K)$.

Adicionalmente, una ecuación diferencial de la forma $\dot{x}(t) = F_i(x(t))$, $i = 1, 2, 3$ con condición inicial $x(0) = x_0$, $x_0 \in [0, K]$ tiene una única solución no negativa $x(t)$, la cual es acotada por K para todo $t \geq 0$ en el sentido que $0 \leq x(t) \leq K$. En otras palabras, cualquier trayectoria de esta ecuación iniciada en $x_0 \in [0, K]$ permanecerá en $[0, K]$ para todo $t \geq 0$.

De acuerdo con la Observación 2.1, la función $F(x)$ se asume estrictamente cóncava y dos veces diferenciable, mientras que la función de recolección $h(t)$ en (2.2) tiene la forma de una función de tipo Cobb-Douglas, esto es,

$$h(t) = Nu^\alpha(t)x^\beta(t) = Nu(t)x^\beta(t), \quad (2.3)$$

con $\alpha = 1$ y $\beta \geq 0$, donde $u(t) \in [0, u_{\text{máx}}]$ es una función continua a trozos que representa un *esfuerzo de pesca admisible* (entrada única o variable de control) e incluye la mano de obra, capital, mantenimiento, etc. medido en proporciones fijas. Bajo las anteriores condiciones, se puede suponer que el sistema dinámico (2.2) con condición inicial positiva $x_0 > 0$ siempre tiene una única solución no negativa para una función de control $u(t)$ fija.

Al definir $\alpha = 1$ en (2.3), establecemos la productividad marginal constante de una unidad de esfuerzo de pesca adicional, mientras que $\beta \geq 0$ medirá la sensibilidad del rendimiento de captura adicional a los cambios marginales en el nivel

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

de stock de peces⁷. En otras palabras, valores más pequeños de $\beta > 0$ implican una pérdida de sensibilidad de la unidad de recolección a posibles variaciones en el nivel del stock de peces y pueden provocar efectivamente (*ceteris paribus*), la ocurrencia de extinción de peces. Por lo tanto, nos enfocaremos en el caso cuando $\beta \rightarrow 0^+$.

Finalmente, el problema del planificador social consiste en elegir el esfuerzo de pesca $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$ para cada buque y la biomasa $x = x(t, u)$ correspondiente, que sea solución de (2.2) - (2.3), que juntos maximicen el valor total de la renta de pesca con descuento intertemporal.

Para introducir esta renta, denotemos por $p > 0$ el precio por unidad de biomasa recolectada, y $c \in (0, p)$ el costo por unidad de esfuerzo de pesca que, de acuerdo con nuestras suposiciones, es el mismo para cada buque. Entonces, para cada buque, la utilidad marginal, en un instante $t > 0$ dado, es la misma y la podemos calcular de la siguiente manera:

$$\pi_i(t) = pu(t)x^\beta(t) - cu(t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Por lo tanto, para los N barcos (buques) que participan en la pesquería y para una tasa de descuento $r > 0$ dada, el valor global de la renta de la pesca con descuento intertemporal está dado por

$$J(x, u) = \sum_{i=1}^N \int_0^\infty e^{-rt} \pi_i(t) dt = N \int_0^\infty e^{-rt} [pu(t)x^\beta(t) - cu(t)] dt. \quad (2.4)$$

Aquí $u : [0, \infty) \mapsto [0, u_{\max}]$ es una función continua a trozos (esto es $u(\cdot) \in PC[0, \infty)$) con un rango acotado $[0, u_{\max}]$ y el valor constante $u_{\max} > 0$ expresa el nivel máximo de esfuerzo de pesca permitido. Luego, definimos el conjunto de controles admisibles de la siguiente manera:

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC[0, \infty) \text{ y } u : [0, \infty) \mapsto [0, u_{\max}]\}. \quad (2.5)$$

⁷Se hace énfasis que el índice de sensibilidad normalizado hacia adelante de la función de recolección (2.3) con respecto al nivel existente de biomasa x es $\Upsilon_x^h = \beta$. Esto último implica que si x disminuye en un 50 %, la recolección h se reducirá solo por $\frac{\beta}{2}$ % de ese grado. La definición formal y más detalles sobre el concepto de índice de sensibilidad normalizado hacia adelante puede consultarse en el trabajo original de Chitnis *et al* [37].

2.2 Solución formal del problema de planificador social

En la práctica, definir el valor de $u_{\text{máx}} > 0$ puede ser una tarea difícil. Por lo tanto, este tema se abordará luego en el análisis del modelo (2.2)-(2.4).

Notemos que consideramos N unidades de pesca simétricas (ver (2.3), (2.4)); por lo tanto, cualquier variación en los rendimientos de recolección causados por los cambios en el esfuerzo de pesca $u(t)$ son reflejados a nivel de sólo un barco (buque). Este supuesto nos permite ignorar los efectos de la congestión en la flota agregada.

Resumiendo todo lo anterior, podemos formular el problema de control óptimo de horizonte infinito. Para una población inicial de peces dada $x_0 \in (0, K]$, hallar una política de esfuerzo pesquero admisible $u(t)$ que maximice la renta total de pesca (2.4) sujeta a la dinámica del stock biológico (2.2) con recolección (2.3). En la formulación matemática, este problema puede escribirse como

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \{ J(x), u : x \text{ solución de (2.2)-(2.3)} \}. \quad (2.6)$$

Desde el punto de vista matemático, los problemas del tipo (2.6) generalmente se resuelven aplicando el Principio del Máximo de Pontryagin (ver, por ejemplo, [38, 39, 40]), que es una condición necesaria de optimalidad que se debe cumplir por cualquier maximizador de la funcional objetivo (2.4) sobre el conjunto de controles admisibles (2.5) y sujeto a la dinámica del stock biológico (2.2) con función de recolección (2.3).

En el contexto de nuestro problema, donde el lado derecho del sistema dinámico (2.2) con la función de recolección (2.3) y el integrando de la funcional objetivo (2.4) son diferenciables con respecto a x y u , el Principio del Máximo se puede establecer tal como se muestra a continuación.

De acuerdo con el Principio del Máximo de Pontryagin (ver, [4, 5]), si $u(t) : [0, \infty) \mapsto [0, u_{\text{máx}}]$ es una solución óptima del problema de horizonte infinito (2.6) y $x = x(t, u(t)) : [0, \infty) \mapsto [0, K]$ es la trayectoria correspondiente al stock de peces, entonces existe una función absolutamente continua $\lambda(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ (diferenciable casi en todo $\mathbb{R}$) tal que

$$\dot{\lambda}(t) = r\lambda(t) - \frac{\partial H(x, u, \lambda)}{\partial x}, \quad t > 0$$

donde el Hamiltoniano de tiempo corriente

$$H(x, u, \lambda) = N(pux^\beta - cu) + \lambda(F(x) - Nux^\beta) \quad (2.7)$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

alcanza su máximo en el mismo $u(t)$, esto es,

$$H(x, u, \lambda) = \max_{v \in [0, u_{\text{máx}}]} H(x, v, \lambda), \quad \text{casi para todo } t > 0. \quad (2.8)$$

Así, el estado $x(t)$ y el *coestado* $\lambda(t)$ deben satisfacer el llamado *sistema de optimalidad*

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - Nu(t)x^\beta(t) \quad (2.9a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = (r - F'(x(t)))\lambda(t) + \beta Nu(t)x^{\beta-1}(t)(\lambda(t) - p) \quad (2.9b)$$

con condición inicial y condición de *transversalidad*⁸ dadas por

$$x(0) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)\lambda(t)e^{-rt} = 0. \quad (2.10)$$

Dado que el Hamiltoniano (2.7) es una función escalar de tres argumentos ($H : [0, K] \times [0, u_{\text{máx}}] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$), y su maximización con respecto a la variable de control $u \in [0, u_{\text{máx}}]$ (esfuerzo de pesca acotado) es puntual (es decir, en cada $t \in [0, \infty]$), se pueden aplicar los resultados de optimización tradicionales. A saber, el máximo de $H(x, u, \lambda)$ con respecto a u para cada $t \in [0, \infty)$ se obtiene en el punto crítico $u^* \in (0, u_{\text{máx}})$, donde $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, o en uno de los puntos extremos, es decir, $u = 0$ o $u = u_{\text{máx}}$.

Por otro lado, el Hamiltoniano (2.7) es *lineal* en u , y el procedimiento estándar en este caso (ver, por ejemplo, [4, 5, 38, 39]) consiste en definir la *función de conmutación*

$$\Psi(t) = \Psi(x(t), \lambda(t)) = \frac{\partial H(x, u, \lambda)}{\partial u} = N(px^\beta(t) - \lambda(t)x^\beta(t) - c), \quad (2.11)$$

la cual nos ayuda a identificar en que instante $t \in [0, \infty)$ el Hamiltoniano está decreciendo ($\Psi < 0$), creciendo ($\Psi > 0$) o es invariable ($\Psi = 0$) con respecto a u . Por lo tanto, el control óptimo $u(t)$ se puede escribir en la forma

⁸La condición de transversalidad en (2.10) (lado izquierdo) generalmente se cumple para $r > 0$ siempre que las variables de estado y coestado (x y λ , respectivamente) se comporten bien en infinito. Sin embargo, hay casos en que la función adjunta λ podría exhibir algún comportamiento asintótico patológico en infinito, lo que hace poco clara la validez de esta condición de transversalidad. Tales casos no surgen cuando las variables de estado y de control son acotadas. Para una completa revisión sobre el comportamiento de las variables adjuntas en infinito y las pruebas formales de equivalencia entre los diferentes tipos de condiciones de transversalidad, se puede revisar los trabajos [41, 42] y [43].

2.2 Solución formal del problema de planificador social

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Psi < 0 \\ u_{\text{máx}}, & \text{si } \Psi > 0 \\ u^*, & \text{si } \Psi = 0 \end{cases}, \quad (2.12)$$

donde $u^* \in (0, u_{\text{máx}})$ se introducirá más adelante en (2.19). Además, utilizando la estructura (2.12) de u , el sistema de optimalidad (2.9) puede ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sigma_1(x(t), \lambda(t)) \\ \dot{\lambda}(t) &= \sigma_2(x(t), \lambda(t)) \end{cases} \quad (2.13)$$

donde

$$\sigma_1(x, \lambda) = \begin{cases} F(x), & \text{si } \Psi < 0 \\ F(x) - Nu_{\text{máx}}x^\beta, & \text{si } \Psi > 0 \\ F(x) - Nu^*x^\beta, & \text{si } \Psi = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_2(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda(r - F'(x)), & \text{si } \Psi < 0 \\ \lambda(r - F'(x)) - \beta Nu_{\text{máx}}x^{\beta-1}(p - \lambda), & \text{si } \Psi > 0 \\ \lambda(r - F'(x)) - \beta Nu^*x^{\beta-1}(p - \lambda), & \text{si } \Psi = 0 \end{cases}$$

Observe que la *función adjunta* o de *coestado* $\lambda(t)$ asociada con el problema de control óptimo (2.6), puede ser vista como un multiplicador de Lagrange asociado con una restricción diferencial (2.2) y representa el valor de *precio sombra* en tiempo corriente por unidad de stock x , esto es, el valor marginal del activo en el tiempo $t \in [0, \infty)$. Se debe enfatizar que el precio sombra se refiere al valor del activo atribuido a su productividad futura.

Observación 2.2 En el caso donde $\Psi \equiv 0$, puede existir un arco singular definido por la relación

$$x(t) = \left(\frac{c}{p - \lambda(t)} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.14)$$

o similarmente

$$\lambda(t) = p - \frac{c}{x^\beta(t)}. \quad (2.15)$$

Este caso es nuestro principal interés y se estudiará bajo el supuesto que $\beta \rightarrow 0^+$.

De lo anterior, se deriva el siguiente resultado. La política de pesca $u(t)$ que maximiza la renta de pesca (2.4) es sostenible para todo $t \geq 0$ solo si las trayectorias de estado y de coestado ($x = x(t, u(t))$ y $\lambda(t)$, respectivamente) correspondientes a la aplicación de esta política $u(t)$ se vuelven invariables cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir,

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

esto implica que el sistema de optimalidad (2.9) alcance uno de sus estados estacionarios bajo esta política $u(t)$. En la siguiente subsección, abordamos el problema de la existencia de estados estacionarios del sistema de optimalidad (2.9) teniendo en cuenta la caracterización del control óptimo (2.12).

2.2.2 Estados estacionarios del sistema de optimalidad

Denotaremos por (x^*, λ^*) todos los posibles equilibrios del sistema de optimalidad (2.9). Sea $\Psi^* = \Psi(x^*, \lambda^*)$, donde Ψ se definió en (2.11).

Notemos primero que en el caso cuando $\lambda^* \geq p > 0$, no hay equilibrios positivos del sistema (2.9). De hecho, en este caso se tiene que $\Psi^* < 0$ y en consecuencia $u^*(\cdot) = 0$. Entonces, los únicos posibles puntos de equilibrio de (2.9) son $x^* = 0$ y $x^* = K$. Sin embargo, el caso $x^* = K$ se descarta por la desigualdad $F'(K) < 0$, la cual implica que $r - F'(K) > 0$. En consecuencia, $\lambda^* = 0$ en (2.9b), y se obtiene de esta forma una contradicción.

Por otro lado, el equilibrio trivial $x^* = 0$ (extinción del stock) es posible siempre que $F'(0) = r$. No obstante, esta condición no es deseable y se evitará en el resto del trabajo (ver Teorema 2.1).

Por lo tanto, consideramos solamente el caso $\lambda^* < p$ el cual es razonable y viable económicamente. Definimos el *punto de referencia*

$$\tilde{x} = \left(\frac{c}{p - \lambda^*} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

tal que

$$\Psi^* < 0 \Leftrightarrow x^* < \tilde{x} \quad \text{y} \quad \Psi^* > 0 \Leftrightarrow x^* > \tilde{x}.$$

Para $\Psi^* < 0$ y $u^*(\cdot) = 0$, solo hay dos posibles equilibrios x^* : $x^* = 0$ y $x^* = K$. El primero conduce al estado estacionario trivial $(x^*, \lambda^*) = (0, 0)$, mientras que $x^* = K$ implica que se debe satisfacer $K < (c/p)^{1/\beta} < 1$, donde $c < p^9$, lo cual contradice al supuesto $K > 0$ cuando β es suficientemente pequeño y debe excluirse del análisis posterior.

⁹Esto significa que el costo por unidad de pesca es menor que el precio por unidad de peces – de lo contrario, no se obtendrá ningún beneficio por la pesca.

2.2 Solución formal del problema de planificador social

Para $\Psi^* > 0$ y $u^*(\cdot) = u_{\text{máx}}$, tenemos que cualquier punto fijo (x^*, λ^*) de (2.13) debe satisfacer

$$\begin{aligned} F(x^*) - Nu_{\text{máx}}(x^*)^\beta &= 0, \quad x^* \in [0, K] \\ \lambda^*(r - F'(x^*)) - \beta Nu_{\text{máx}}(x^*)^{\beta-1}(p - \lambda^*) &= 0, \end{aligned}$$

y es fácil ver que $x^* = K$ no es solución de estas ecuaciones. Además, $x^* = 0 < \tilde{x}$, por lo cual se excluyen ambos puntos. Sin embargo, puede existir un $x^* \in (0, K)$ tal que

$$\frac{F(x^*)}{(x^*)^\beta} = u_{\text{máx}}N, \quad \tilde{x} < x^* < K. \quad (2.16)$$

Vamos a caracterizar (x^*, λ^*) en este caso.

Primero, se nota que la función $s(x) = \frac{F(x)}{x^\beta}$, $x \in [0, K]$, es cóncava para $\beta > 0$ suficientemente pequeño (ver Figura 2.1). En efecto,

$$s''(x) = \frac{1}{x^{\beta+2}} (x^2 F''(x) + \beta (-2x F'(x) + (\beta + 1)F(x))),$$

y usando la concavidad de F junto con que F y F' son acotadas en $[0, K]$, se sigue que $s''(x) < 0$, esto es, $s(x)$ es estrictamente cóncava, para $\beta > 0$ suficientemente pequeño.

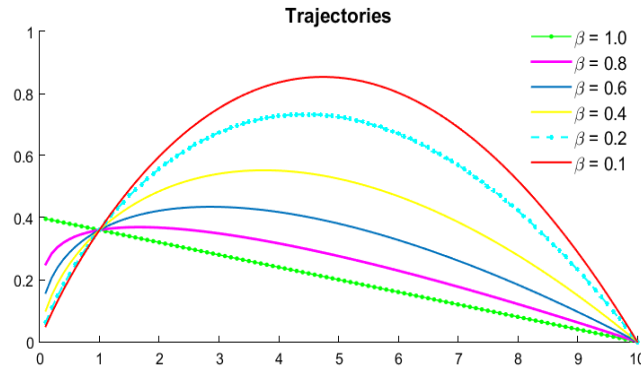


Figura 2.1: Función $s(x)$ con $F(x) = F_1(x)$ (Función Logística, ver Observación 2.1).

En consecuencia, dependiendo del valor $Nu_{\text{máx}}$ podrían existir dos, una o ninguna solución de (2.16). Si dicha solución x^* existe, entonces (x^*, λ^*) debería satisfacer la ecuación (2.9b), esto es,

$$\lambda^*(r - F'(x^*)) + \beta \frac{F(x^*)}{x^*} (\lambda^* - p) = 0, \quad \tilde{x} < x^* < K. \quad (2.17)$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Esto nos lleva directamente a

$$\lambda^* = \frac{p}{\left[\frac{(r - F'(x^*))x^*}{\beta F(x^*)} + 1 \right]}. \quad (2.18)$$

Note que $\lambda^* < p$. De hecho, $\tilde{x} < x^* < K$, esto es,

$$\left(\frac{c}{p - \lambda^*} \right)^{\frac{1}{\beta}} < x^* < K,$$

y se obtiene inmediatamente que

$$\lambda^* < p - \frac{c}{(x^*)^\beta} < p - \frac{c}{K^\beta} < p.$$

Finalmente, si $\Psi^* = 0$ para valores fijos (x^*, λ^*) se obtiene que el correspondiente control está dado por

$$u(\cdot) = u^* := \frac{F(x^*)}{N(x^*)^\beta}, \quad (2.19)$$

lo cual es, en efecto, el control *singular* estacionario para el problema (2.6) cuando $u^* \in (0, u_{\text{máx}}]$. Notemos que en este caso x^* y $\tilde{x}$ coinciden.

Adicionalmente, dado que $\lambda^* = p - (x^*)^{-\beta}c$ y debemos asegurarnos que $\dot{\lambda}(t) = 0$ en (2.9b), podemos hallar el punto x^* como una solución de la siguiente ecuación algebraica:

$$(p(x^*)^\beta - c)(r - F'(x^*)) - \beta c \frac{F(x^*)}{x^*} = 0. \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) permite calcular el nivel de equilibrio de la biomasa para el problema (2.6) siempre que su raíz x^* se encuentre en el rango $(0, K)$. Esto se demostrará en el Teorema 2.1 (Subsección 2.3.1), suponiendo que el control correspondiente u^* (calculado por la fórmula (2.19)) se mantiene en $[0, u_{\text{máx}}]$. Esto último puede garantizarse, por ejemplo, cuando el esfuerzo de pesca máximo de cada buque $u_{\text{máx}}$ es suficientemente grande o cuando el número total de buques N es suficientemente grande. Por lo tanto, si $x^* \in (0, K)$ y $u^* \in [0, u_{\text{máx}}]$, entonces la política de pesca $u(t) = u^*$ aplicado a la dinámica (2.2) en realidad mantendría la biomasa en el nivel x^* para todo $t > 0$ y, por lo tanto, permitiría la pesca sostenible utilizando N barcos (o buques).

2.2.3 Políticas de pesca sostenible

La ecuación (2.20) se puede escribir como

$$F'(x^*) + \frac{\beta c \frac{F(x^*)}{x^*}}{p[x^*]^\beta - c} = r \quad (2.21)$$

la cual es una variante de la *ecuación o regla fundamental de explotación de recursos renovables* (ver, por ejemplo, [5, 6, 44]). El lado derecho de (2.21) representa la tasa de descuento o *tasa de rendimiento externa* sobre los activos fuera de la pesquería, mientras que su lado izquierdo representa la *tasa de rendimiento interna instantánea* proveniente de la pesca. La tasa de rendimiento interna de la pesquería proviene de dos fuentes: la productividad marginal del recurso pesquero (expresada por $F'(x^*)$) y el llamado *efecto marginal de biomasa existente* expresado por el segundo sumando (véase, por ejemplo, [5, 6]).

Por lo tanto, la ecuación (2.21) establece que, en el nivel de stock óptimo x^* , la tasa de rendimiento externa debe ser igual a la tasa de rendimiento interna instantánea, y la segunda debe garantizar la rentabilidad y sostenibilidad de la pesca.

Observación 2.3 *En el caso en que u^* sea mayor que $u_{\text{máx}}$, la política de pesca $u(t) = u_{\text{máx}}$ aplicada a la dinámica (2.2) mantendrá la biomasa en algún nivel $x > x^*$. En este caso, el planificador social se enfrentará a una pérdida de beneficios potenciales al no tener suficiente capacidad de esfuerzo de pesca por cada unidad de buques, y podría pensar en aumentar el número total de buques de N a $N + \Delta N$ hasta cumplir*

$$\frac{F(x^*)}{(N + \Delta N)(x^*)^\beta} \leq u_{\text{máx}}.$$

Una vez que el número de barcos se determina como $N + \Delta N$, la política de pesca sostenible definida anteriormente por (2.19) debe mantener la biomasa en el nivel x^ para todo $t > 0$.*

Antes de aplicar la política de pesca estacionaria (o sostenible) u^* definida por (2.19), se requieren algunos ajustes iniciales. Esto se relaciona con el nivel inicial $x(0) = x_0$ del recurso.

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

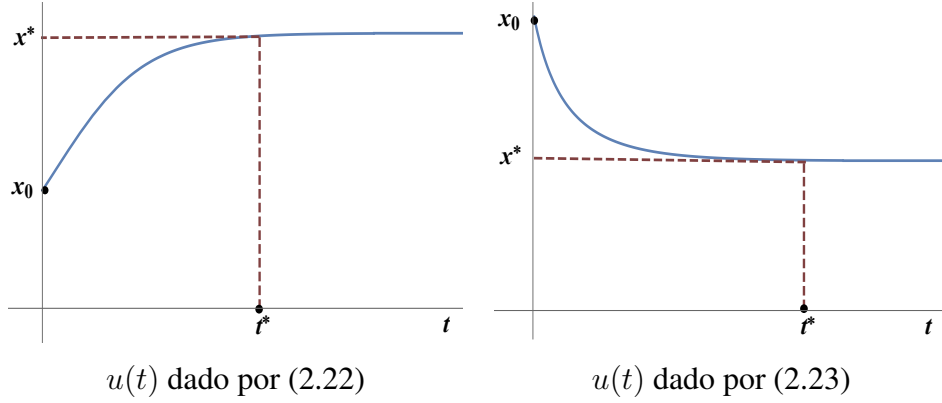


Figura 2.2: Trayectorias de la dinámica poblacional $x(t) = x(t, u(t))$ correspondientes a las soluciones de tipo *turnpike* (2.22) y (2.23).

De hecho, suponiendo que tanto el nivel inicial de la biomasa x_0 como la raíz de (2.20) (la cual ahora se denota como x^*) son conocidos o al menos pueden estimarse, tenemos dos opciones:

1. Si $x_0 < x^*$, entonces las políticas óptimas de pesca podrían ser

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_*) \\ u^*, & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.22)$$

donde $t_* > 0$ define el momento en que el recurso alcanza el nivel x^* de acuerdo con su crecimiento natural (ver el modelo (2.2) con $h(t) = 0$), es decir, $x^* = x(t_*)$ (ver Figura 2.2, gráfica izquierda).

2. Si $x_0 > x^*$, entonces las políticas óptimas de pesca podrían ser

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{máx}}, & t \in [0, t_*) \\ u^*, & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.23)$$

donde $t_* > 0$ tiene un significado similar al anterior, es decir, $x^* = x(t_*)$ pero el nivel del recurso x^* se alcanza reduciendo el stock de peces (ver Figura 2.2, gráfica derecha).

Las políticas de pesca a largo plazo del tipo (2.22) y (2.23) a veces se denominan “*soluciones tipo turnpike*” ya que buscan acercarse al estado estable x^* tan rápido como sea posible. Este tipo de soluciones surgen a menudo en problemas de

gestión sostenible de recursos naturales (ver, por ejemplo, [4], Sección 2.5). Se pueden consultar más detalles sobre las soluciones de tipo *turnpike* y sus propiedades en el libro [45].

Las políticas de pesca (2.22) y (2.23) pueden parecer simples y directas a primera vista. Sin embargo, su implementación práctica requiere estimaciones conocidas (o al menos algunas aproximaciones razonables) del parámetro de elasticidad de producción del stock β ya que tanto u^* como x^* están definidos por β (cf. fórmula (2.19) con x^* determinado como raíz de la ecuación (2.20)). Además, estas políticas se pueden mantener siempre que β permanezca sin cambios. ¿Qué tipo de alteraciones en la biomasa del estado estacionario x^* y la política de pesca u^* correspondiente pueden esperarse cuando la pesquería exhibe un grado mayor o menor de hiperestabilidad debido a factores externos? ¿Qué acciones deberían tomar los administradores de la pesquería para garantizar su sostenibilidad y rentabilidad?

Las respuestas a estas preguntas se pueden obtener mediante el análisis de las reacciones del stock en equilibrio, es decir, la fluctuación de la raíz x^* de la ecuación estacionaria (2.20) o (2.21) y de las políticas de pesca sostenible (expresadas por (2.19)) con respecto a los cambios en β . Además, probando el modelo con diferentes valores de β dentro de los marcos del enfoque MSE, puede proporcionar información útil para una mejor evaluación del tamaño del stock disponible y ayudar a anticipar oportunamente cambios en el manejo de la pesca.

Para ilustrar tales ideas, debemos establecer las propiedades centrales del equilibrio estacionario del sistema de optimalidad (2.9) que genera políticas de pesca sostenible (2.19), así como su dependencia continua del parámetro β . Luego debemos realizar análisis exhaustivo del comportamiento asintótico de este equilibrio estacionario cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Este último corresponde al “peor escenario” y modela la situación cuando la tasa de recolección (2.3) pierde sensibilidad con respecto al nivel actual de stock. El análisis mencionado se realiza en la siguiente sección.

2.3 Análisis de estados estacionarios

A continuación para el análisis posterior, imponemos la condición

$$F'(0) > r \tag{2.24}$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

la cual se refiere a la rentabilidad y la viabilidad económica de la pesca. Esta condición implica que la productividad marginal inicial del recurso es mayor que la tasa de descuento r . En otras palabras, el valor de este activo (stock de peces) crece a una tasa mayor que la tasa de la depreciación del capital. De lo contrario, si $F'(0) \leq r$, no existiría interés económico en mantener este activo mientras que la exterminación total del recurso debería permitir invertir el beneficio total obtenido por recolección en otras partes del mercado a una tasa de rendimiento al menos tan alta como r .

2.3.1 Existencia y unicidad de los equilibrios estacionarios

En esta subsección, proporcionamos la respuesta a la siguiente pregunta. Dado algún $\beta \in (0, 1)$ suficientemente pequeño, la ecuación estacionaria (2.20) tiene una única solución positiva $\bar{x}^* = x^*(\beta)$ que define de manera unívoca el esfuerzo de pesca sostenible $\bar{u}^* = u^*(\beta)$ y el precio sombra $\lambda^*(\beta)$ mediante las fórmulas (2.19) y (2.15), respectivamente?

Antes de proceder, vamos a introducir dos cantidades importantes

$$x_r : \quad \text{tal que} \quad F'(x_r) = r, \quad (2.25)$$

la cual siempre existe bajo la condición (2.24), y

$$\lambda_r = p - \frac{c}{x_r^\beta}.$$

Observemos que x_r es un punto de referencia que define el nivel de biomasa en el que la productividad marginal del recurso es igual a la tasa de depreciación del capital y $\lambda_r < p$ representa el precio sombra correspondiente a x_r . En términos prácticos, x_r marca el umbral del *nivel de stock de recursos económicamente viables* por debajo del cual la recolección no puede ser sostenible. Esto último está acorde con la *regla fundamental de la explotación de recursos renovables* (ver relación (2.21) en la subsección 2.2.3) en el sentido que $x_r < x^*$ porque $F'(x)$ es una función decreciente y cumple $F'(x^*) < F'(x_r) = r$.

El tamaño de la población x_r se define únicamente por la tasa de descuento r y está disminuyendo con respecto a r . Por lo tanto, los valores más bajos de r inducen valores más altos de x_r , como se ilustra en la Figura 2.3. Además, si el

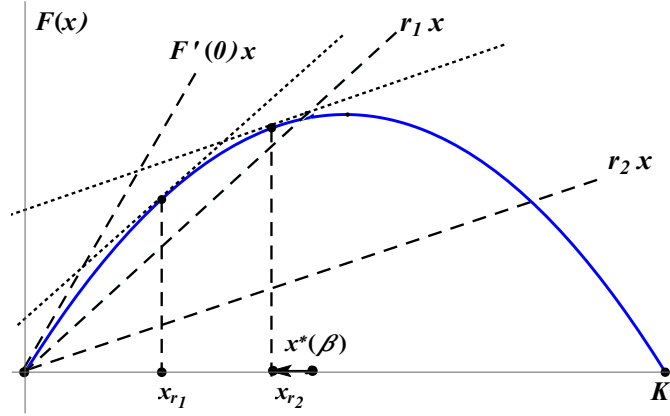


Figura 2.3: Impacto de la tasa de descuento r en el nivel económicamente viable del recurso renovable x_r : $F'(0) > r_1 > r_2$ implica que $0 < x_{r_1} < x_{r_2}$.

descuento intertemporal se ignora ($r = 0$) o es insignificante ($r \rightarrow 0^+$), tenemos que $x_r = x_{\text{MSY}}$ donde x_{MSY} denota el tamaño de stock con la máxima productividad del recurso renovable ($F'(x_{\text{MSY}}) = 0$) que genera el *máximo rendimiento sostenible* (MSY – Maximum Sustainable Yield, por sus siglas en inglés)¹⁰. Por lo tanto, $x_r < x_{\text{MSY}}$ para $r > 0$.

El siguiente teorema establece la existencia y unicidad de un estado estacionario $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ del sistema de optimalidad (2.9) con $u(t)$ reemplazado por (2.19) cuando este estado estacionario está asociado a un valor particular de $\beta \in (0, 1)$. El mismo teorema también define el dominio de este estado estacionario.

Teorema 2.1 Sea $\beta \in (0, 1)$ y $K > (c/p)^{\frac{1}{\beta}}$. Supongamos que la condición (2.24) se cumple. Entonces, existe un único equilibrio

$$(x^*(\beta), \lambda^*(\beta)) \in (x_r, K) \times (\lambda_r, p)$$

del sistema de optimalidad (2.9), siempre que $u(\cdot)$ sea constante e igual a

$$u^*(\beta) = \frac{F(x^*(\beta))}{N[x^*(\beta)]^\beta}. \quad (2.26)$$

¹⁰Esto se mantiene en línea con los resultados de [18] obtenidos para pesquerías pelágicas hiperestables ($\beta = 0$) en donde se ignoró el descuento ($r = 0$).

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Note que $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ satisface la relación

$$\lambda^*(\beta) = p - \frac{c}{[x^*(\beta)]^\beta}. \quad (2.27)$$

Demostración. Consideremos el control singular estacionario $u(\cdot) = u^*$ dado por (2.26).

Primero, vamos a mostrar la existencia de $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ para un $\beta \in (0, 1)$ específico. Para esto, definimos la función g inspirada por la ecuación (2.20)

$$g(x) = (px^\beta - c)(r - F'(x)) - \beta c \frac{F(x)}{x}. \quad (2.28)$$

En vista de la condición (2.24), de la continuidad y concavidad de F , existe un único $x_r \in (0, K)$ tal que $F'(x_r) = r$. Mostremos que $g(x_r) < 0$ y que $g(K) > 0$. En efecto, primero se tiene que

$$g(x_r) = (px_r^\beta - c)(r - F'(x_r)) - \beta c \frac{F(x_r)}{x_r} = -\beta c \frac{F(x_r)}{x_r} < 0.$$

Por hipótesis, tenemos que $F(K) = 0$ y $F'(K) < 0$. Lo cual implica que, $r - F'(K) > 0$. Junto con la hipótesis $K > (c/p)^{\frac{1}{\beta}}$, en consecuencia

$$g(K) = (pK^\beta - c)(r - F'(K)) - \beta c \frac{F(K)}{K} = (pK^\beta - c)(r - F'(K)) > 0.$$

dado que para todo $x \in [x_r, K]$, g es una función continua la cual cumple que $g(x_r) < 0$ y $g(K) > 0$, y en virtud del Teorema del Valor Intermedio, para un $\beta \in (0, 1)$ fijo existe al menos un $x^*(\beta) \in (x_r, K)$ tal que $g(x^*(\beta)) = 0$.

Observemos que (2.15) define de manera única $\lambda^*(\beta)$ en términos de $x^*(\beta)$ como en (2.27) y proporciona así una solución de estado estacionario $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ del sistema de optimalidad (2.9) para un $\beta \in (0, 1)$ dado. Más aún, puesto que $x^*(\beta) \in (x_r, K)$, entonces se cumple que

$$\lambda_r = p - \frac{c}{x_r^\beta} < p - \frac{c}{[x^*(\beta)]^\beta} < p - \frac{c}{K^\beta} < p,$$

lo cual implica que $\lambda^*(\beta) \in (\lambda_r, p)$.

Sólo queda probar que este equilibrio $x^*(\beta)$ es único. Esto puede hacerse mostrando que la función $g(x)$ definida por (2.28) es estrictamente creciente en (x_r, K) . En otras palabras, que $g'(x) > 0$ para todo $x \in (x_r, K)$.

Primero, la relación $g(x^*(\beta)) = 0$ implica que

$$F'(x^*(\beta)) - r = \frac{\beta c}{c - p[x^*(\beta)]^\beta} \cdot \frac{F(x^*(\beta))}{x^*}$$

y consideremos tres funciones auxiliares

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \frac{\beta c}{c - px^\beta}, & G(x) &= \frac{F(x)}{x}, \\ \phi(x) &= \frac{\beta c}{c - px^\beta} \cdot \frac{F(x)}{x} = \xi(x)G(x).\end{aligned}\tag{2.29}$$

La función $\xi(x)$ es definida para todo $x > (c/p)^{\frac{1}{\beta}}$, es negativa y estrictamente creciente en (x_r, K) puesto que

$$\xi'(x) = \frac{p\beta^2 x^{\beta-1}}{(c - px^\beta)^2} > 0 \quad \text{y} \quad \xi(x) \leq \xi(K) = \frac{\beta c}{c - pK^\beta} < 0$$

para todo $x \in (x_r, K)$.

Por otro lado, la función $G(x)$ es positiva y estrictamente decreciente para todo $x \in (x_r, K)$. Es fácil ver que $G(x) > 0$ cuando $x \in (x_r, K)$. Ahora para probar que $G(x)$ es una función estrictamente decreciente, recordemos que $F''(x) < 0$ esto significa que $F'(x)$ es una función estrictamente decreciente para todo $x \in [0, K]$, entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$F'(x) : xF'(x) < \int_0^x F'(s)ds = F(x) - F(0) = F(x) \text{ para todo } x \in [x_r, K].$$

Por lo tanto, la relación

$$G'(x) = \frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} < 0$$

es cierta para todo $x \in [0, K]$, y se cumple para $x \in (x_r, K)$. Luego, podemos inferir que la función $\phi(x)$ es negativa y estrictamente creciente en (x_r, K) ya que

$$\phi'(x) = \xi'(x)G(x) + \xi(x)G'(x) > 0.$$

Ahora, supongamos que hay dos raíces $x_1^*(\beta)$ y $x_2^*(\beta)$ de (2.20) para el $\beta \in (0, 1)$ fijo tal que $x_r < x_1^*(\beta) \leq x_2^*(\beta) < K$.

Entonces, tenemos que $\phi(x_1^*(\beta)) \leq \phi(x_2^*(\beta))$, luego

$$F'(x_1^*(\beta)) - r = \phi(x_1^*(\beta)) \leq \phi(x_2^*(\beta)) = F'(x_2^*(\beta)) - r.$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

En consecuencia, $F'(x_1^*(\beta)) \leq F'(x_2^*(\beta))$.

Sin embargo, esto implica que $x_1^*(\beta) \geq x_2^*(\beta)$, puesto que $F'(x)$ es una función decreciente. En otras palabras, $x_1^*(\beta) = x_2^*(\beta)$, así que solo hay una raíz $x^*(\beta)$ de (2.20). ■

Corolario 2.1 *La ecuación (2.20) no tiene raíces en $[(c/p)^{1/\beta}, x_r]$ cuando $\beta \in (0, 1)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que la ecuación (2.20) tiene una raíz estrictamente positiva $x^*(\beta)$ tal que $0 < (c/p)^{1/\beta} < x^*(\beta) < x_r$. Recordemos que la función $\phi(x)$ definida por (2.29) es continua, negativa y estrictamente creciente para todo $x > (c/p)^{1/\beta}$. Por lo tanto, $x^*(\beta) < x_r$ implica que

$$\phi(x^*(\beta)) = F'(x^*(\beta)) - r = F'(x^*(\beta)) - F'(x_r) < \phi(x_r) < 0.$$

Por otro lado, F' es una función decreciente para todo $x \in [0, K]$ y $F'(x^*) - F'(x_r) < 0$ implica que $x^*(\beta) > x_r$, lo cual es una contradicción. ■

Veamos ahora un resultado auxiliar que será útil para el análisis asintótico del sistema de optimalidad (2.9) cuando $\beta \rightarrow 0^+$.

Lema 2.1 *Existe $0 < \beta^* < 1$ tal que para todo $\beta \in (0, \beta^*)$ y $x \in [x_r, K]$, se tiene que*

$$-c\beta \left[A(x) - F'(x) + \beta \frac{F(x)}{x} \right] + \lambda x^\beta [xF''(x) - A(x)] < 0,$$

donde $A(x) = r - F'(x)$.

Demostración. Recordemos que $F'(\cdot)$ es una función estrictamente decreciente, se tiene que $r = F'(x_r) > F'(x)$ para $x \in [x_r, K]$, lo que significa que $r > F'(x)$ para $x \in [x_r, K]$. Así que formalmente podemos escribir

$$\begin{aligned} A(x) - F'(x) + \frac{\beta F(x)}{x} &= r - F'(x) - F'(x) + \frac{\beta F(x)}{x} \\ &= r - 2F'(x) + \frac{\beta F(x)}{x} \\ &> r - 2r + \frac{\beta F(x)}{x} \\ &> -r, \end{aligned}$$

y

$$-c\beta \left[A(x) - F'(x) + \beta \frac{F(x)}{x} \right] < -c\beta(-r) = c\beta r.$$

Por otro lado,

$$\lambda x^\beta [xF''(x) - A(x)] \leq \lambda x^\beta \max_{x \in [x_r, K]} \{xF''(x) - A(x)\} < 0,$$

puesto se tiene que $F''(x) < 0$ para $x \in [0, K]$ y $A(x) > 0$ para $x \in (x_r, K)$.

Entonces

$$xF''(x) - A(x) < 0, \quad x \in [x_r, K].$$

Ahora, si asumimos que

$$x_r < x < K \quad \text{y} \quad \lambda_r < \lambda < p$$

entonces

$$x_r^\beta < x^\beta < K^\beta \quad \text{y} \quad \lambda_r x_r^\beta < \lambda x^\beta < pK^\beta.$$

De este hecho, concluimos que

$$\begin{aligned} \lambda x^\beta (xF''(x) - A(x)) &\leq \lambda x^\beta \max_{x \in [x_r, K]} \{xF''(x) + F'(x) - r\} \\ &\leq \lambda_r x_r^\beta \max_{x \in [x_r, K]} \{xF''(x) + F'(x) - r\} < 0. \end{aligned}$$

Juntando las estimaciones anteriores, vemos que

$$\begin{aligned} -c\beta \left[A(x) - F'(x) + \frac{\beta F(x)}{x} \right] + \lambda x^\beta [xF''(x) - (r - F'(x))] \\ < c\beta r + \lambda_r x_r^\beta \max_{x \in [x_r, K]} \{xF''(x) + F'(x) - r\}. \end{aligned}$$

Así, podemos escoger algún $\beta^* > 0$ (suficientemente pequeño) tal que para $0 < \beta < \beta^*$

$$\beta cr + x_r^\beta \lambda_r \max_{x \in [x_r, K]} \{xF''(x) - (r - F'(x))\} < 0.$$

Esto último implica que para todo $\beta \in (0, \beta^*)$ se cumple que

$$-c\beta \left[A(x) - F'(x) + \frac{\beta F(x)}{x} \right] + \lambda x^\beta [xF''(x) - A(x)] < 0.$$

■

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Observación 2.4 *Como hemos supuesto que $p > c$, se cumple que $(c/p)^{1/\beta} \rightarrow 0^+$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Note que, la hipótesis $K > (c/p)^{1/\beta}$ es redundante cuando $\beta > 0$ es suficientemente pequeño.*

El resultado principal del Teorema 2.1 tiene una interpretación directa desde el punto de vista bioeconómico. Para cada nivel de hiperestabilidad $\beta \in (0, 1)$ detectado en la pesquería pelágica, existe un único nivel del recurso (o de la biomasa) en estado estacionario $x^* = x^*(\beta)$, definido por medio de la relación (2.26), que corresponde a la política $u^*(\beta)$ para la pesca sostenible. Además, este nivel de estado estacionario $x^* = x^*(\beta)$ es la única raíz de la ecuación fundamental de la explotación de recursos renovables (2.21) con β dado en $(0, 1)$ (este problema se aborda directamente en la prueba de Teorema 2.1). En otras palabras, $x^* = x^*(\beta)$ es exactamente el tamaño óptimo del recurso renovable explotado que permite, para cada $\beta \in (0, 1)$ fijo, mantener la tasa de rendimiento interno de la pesca igual a la tasa de rendimiento externo en activos fuera de la pesquería.

Por otro lado, también se entiende que tener estimaciones plausibles de $x^*(\beta)$ y $u^*(\beta)$ para un nivel observable de hiperestabilidad β es algo idealista, ya que β puede exhibir variaciones repentinas e impredecibles. Por lo tanto, es importante analizar qué tipo de cambios en $x^*(\beta)$ y $u^*(\beta)$ pueden esperarse cuando β varía. Cuando los administradores de la pesca aplican el enfoque MSE, parece razonable incluir como uno de los objetivos, mantener el nivel del recurso en el tamaño de la población $x^*(\beta)$ y mantener el esfuerzo de pesca tan cerca como sea posible a $u^*(\beta)$, mientras se prueban diferentes modelos operativos con valores variables de β .

Otro resultado importante derivado del Teorema 2.1 se relaciona con la forma del esfuerzo de pesca estacionario $u^*(\beta)$ (ver fórmula (2.26)) que admite cierto grado de flexibilidad en la toma de decisiones por parte de los administradores de la pesquería. A saber, los responsables de la toma de decisiones pueden elegir el número de unidades de pesca N , de acuerdo con el nivel máximo permitido del esfuerzo de pesca $u_{\text{máx}}$. Note que el esfuerzo de pesca sostenible $u^*(\beta)$ depende explícitamente de N mientras que el stock estacionario $x^*(\beta)$ se define como la raíz de la ecuación (2.20) o (2.21) y es independiente de N . Si $u^*(\beta)$ está muy por debajo de $u_{\text{máx}}$, se puede reducir el número de buques pesqueros para que coincida

con el nivel $u_{\text{máx}}$. De lo contrario, si $u^*(\beta) > u_{\text{máx}}$, se puede rentar o adquirir buques adicionales (ver Observación 2.3).

Finalmente, las tendencias actuales de la economía (expresadas en nuestro modelo por la tasa de descuento r) también puede tener un impacto en el tamaño del stock sostenible $x^*(\beta)$. Bajo la condición (2.24), siempre se cumple $x_r > 0$ y x_r es independiente de $\beta \in (0, 1)$. Sin embargo, cuando r es bastante grande (esto es, $r \rightarrow F'(0)$ – ver Figura 2.3), el punto de referencia x_r puede volverse muy pequeño (esto es, $x_r \rightarrow 0$) y este es el caso cuando la posibilidad de agotamiento y el colapso de la pesquería se incrementaría drásticamente cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Este tema se discutirá más a fondo en la Subsección 2.3.2.

2.3.2 Análisis asintótico cuando $\beta \rightarrow 0^+$

En esta subsección, analizaremos el comportamiento del único estado estacionario $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ del sistema de optimalidad (2.9) (dado por el Teorema 2.1) con respecto a las variaciones del parámetro $\beta \in (0, 1)$. En particular, estamos interesados en el caso cuando $\beta \rightarrow 0^+$ el cual modela la pérdida de sensibilidad del rendimiento de la recolección a cambios marginales en el nivel de stock de peces. Este análisis debe proporcionar algunas ideas útiles sobre las posibles alteraciones del estado estacionario y de las políticas de pesca cuando β es afectado por alguna perturbación exógena (climática, ambiental, tecnológica, entre otras). El siguiente teorema establece la continuidad de la solución estacionaria $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ con respecto a el parámetro $\beta \in (0, 1)$.

Teorema 2.2 *Supongamos que todas las hipótesis del Teorema 2.1 se cumplen. Entonces, para $\beta \in (0, 1)$ suficientemente pequeño, existe una aplicación continuamente diferenciable $\beta \mapsto (x(\beta), \lambda(\beta))$ definida como la única solución del sistema (2.9) siempre que (2.26) se cumpla. Además, se tiene que*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} x^*(\beta) = x_r, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \lambda^*(\beta) = p - c \quad (2.30)$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} u(x(\beta), \lambda(\beta)) = \frac{F(x_r)}{N}.$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Demostración. En primer lugar vamos a considerar algún $\beta \in (0, 1)$ fijo. De acuerdo con el Teorema 2.1, existe una única solución $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ del siguiente sistema auxiliar:

$$\nu(\beta, x, \lambda) := (p - \lambda)x^\beta - c = 0 \quad (2.31a)$$

$$\eta(\beta, x, \lambda) := \beta(p - \lambda)F(x) - x\lambda(r - F'(x)) = 0, \quad (2.31b)$$

En el sistema anterior (2.31), la primera ecuación (2.31a) corresponde a la relación (2.15) mientras que la segunda ecuación (2.31b) se obtiene reemplazando u por la expresión (2.26) en (2.9) del sistema de optimalidad y luego multiplicando por x . Dado que el rol de β es claro en el contexto, en adelante vamos sólo a escribir (x^*, λ^*) en lugar de $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$.

Ahora procedemos a aplicar el Teorema de la Función Implícita al sistema auxiliar (2.31). Un cálculo directo muestra que en el punto (β, x^*, λ^*) , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial x}(\beta, x^*, \lambda^*) &= \frac{c\beta}{x^*} \\ \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}(\beta, x^*, \lambda^*) &= -(x^*)^\beta \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(\beta, x^*, \lambda^*) &= \frac{c\beta}{(x^*)^\beta} F'(x^*) - \lambda^*(r - F'(x^*) - x^* F''(x^*)) \\ \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}(\beta, x^*, \lambda^*) &= -\beta F(x^*) - x^*(r - F'(x^*)). \end{aligned}$$

En otras palabras, se tiene que la matriz Jacobiana $M(\beta)$ de (ν, η) evaluada en el punto (β, x^*, λ^*) está dada por

$$\begin{aligned} M(\beta) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial x}(\beta, x^*, \lambda^*) & \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}(\beta, x^*, \lambda^*) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(\beta, x^*, \lambda^*) & \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}(\beta, x^*, \lambda^*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c\beta}{(x^*)^\beta} F'(x^*) - \lambda^*(A(x^*) - x^* F''(x^*)) & -\beta F(x^*) - x^* A(x^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $A(x^*) = r - F'(x^*)$ como en el Lema 2.1.

Recordemos que $A(x^*) > 0$ puesto que $r = F'(x_r) > F'(x^*)$ para $x_r < x^*$ donde $F'(\cdot)$ es una función decreciente. Ahora,

$$\begin{aligned} \det(M(\beta)) = & -c\beta \left[A(x^*) - F'(x^*) + \beta \frac{F(x^*)}{x^*} \right] \\ & + \lambda^*(x^*)^\beta [x^* F''(x^*) - A(x^*)]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Luego, aplicando el Lema 2.1, existe algún $\beta^* \in (0, 1)$ tal que para todo $\beta \in (0, \beta^*)$ se cumple que

$$\det(M(\beta)) < 0.$$

Por lo tanto, en virtud del Teorema de la Función Implícita, existe una aplicación $\beta \mapsto (x(\beta), \lambda(\beta))$ continuamente diferenciable (C^1) definida para todo $\beta \in (0, \beta^*)$ (suficientemente pequeño) tal que $(x(\beta), \lambda(\beta))$ es una solución de clase C^1 del sistema (2.31).

Ahora vamos a establecer la convergencia del estado de equilibrio $(x(\beta), \lambda(\beta))$ parametrizado por β cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Esto se sigue del Teorema 2.1 para $x(\cdot)$ y $\lambda(\cdot)$ que pertenecen al conjunto compacto $[x_r, K] \times [\lambda_r, p]$. Para probar la convergencia de $x(\beta)$ y $\lambda(\beta)$, cuando $\beta \rightarrow 0^+$, es suficiente probar que $(x_r, p - c)$ es el punto límite para cualquier sucesión convergente $\{(x(\beta_k), \lambda(\beta_k))\}$.

Sea $\{\beta_k\}$ una sucesión que converge a 0, tal que $(x(\beta_k), \lambda(\beta_k)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \in [x_r, K] \times [\lambda_r, p]$. Dado que se tiene que

$$\lambda(\beta) = p - \frac{c}{[x(\beta)]^\beta},$$

concluimos que $\tilde{\lambda} = p - c$. En otras palabras,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \lambda(\beta) = p - c.$$

Ahora, de la ecuación (2.31b) se obtiene que

$$\tilde{\lambda}(r - F'(\tilde{x})) = 0,$$

lo cual implica que $F'(\tilde{x}) = r$. De la concavidad estricta de F , el único elemento que satisface esta relación es x_r ; por lo tanto, $\tilde{x} = x_r$, esto es,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} x(\beta) = x_r.$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Finalmente, cuando $u = u(x(\beta), \lambda(\beta))$ es dado por (2.26), vemos que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} u(x(\beta), \lambda(\beta)) = \frac{F(x_r)}{N}.$$

■

En virtud del Teorema 2.1, el estado estacionario del sistema de optimalidad (2.9) es único para cada β ; luego, el Teorema 2.2 implica que $(x(\beta), \lambda(\beta)) = (x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ para β suficientemente pequeño. Así, en adelante utilizaremos la notación $(x(\beta), \lambda(\beta))$ para el estado estacionario del sistema de optimalidad (2.9) sin confusión alguna.

Observación 2.5 *La dependencia continua del estado estacionario de la biomasa $x(\beta)$ sobre el parámetro de sensibilidad β de capturabilidad respecto a cambios en el stock combinado con la relación del lado izquierdo en (2.30) y el hecho de que $x(\beta) > x_r$ para todo $\beta \in (0, 1)$ (ver la prueba del Teorema 2.1), indica cómo este único estado estacionario reacciona a los cambios en β . En particular, si el valor observable de β aumenta (decrece) desde β_1 a β_2 , entonces el estado estacionario de la biomasa también aumenta (decrece) desde $x^*(\beta_1)$ a $x^*(\beta_2)$ cuando β_1 y β_2 son relativamente pequeños.*

Cuando $\beta \rightarrow 0^+$ y la función de recolección (2.3) se vuelve (casi) independiente¹¹ del nivel actual de biomasa x , el problema de control óptimo (2.6) con $\alpha = 1$, $\beta = 0$ tiene una solución turnpike (véase [4, Capítulo 4]) y las trayectorias del sistema de optimalidad se aproximan a los valores $x = x_r$ y $\lambda = (p - c)$ tan rápido como sea posible. Un resultado similar fue obtenido por Gajardo *et al* [22] considerando la función de recolección (2.3) de tipo Cobb-Douglas con $\alpha + \beta = 1$ y analizando el comportamiento de la solución de estado estacionario $(x(\beta), \lambda(\beta))$ con $\alpha \rightarrow 1^-$ y $\beta \rightarrow 0^+$.

Por otro lado, el caso extremo de la ecuación fundamental de explotación de recursos renovables (2.21) cuando $\beta \rightarrow 0^+$ nos lleva a la llamada “regla de oro de la inversión de capital” (véase, [5, p.29]), esto es,

$$F'(x^*) = r.$$

¹¹Se debe señalar que algunos autores suponen deliberadamente que la función de recolección es independiente del nivel actual de biomasa; ver, por ejemplo, [24].

La relación anterior implica que la productividad marginal del recurso en x^* constituye la única fuente de la tasa de rendimiento interno instantánea en la pesca y que el efecto marginal del stock (expresado por el segundo sumando en el lado derecho de (2.21)) desaparece cuando $\beta \rightarrow 0^+$. En otras palabras, la ganancia actual se vuelve independiente del nivel actual de recurso x , y como resultado, el equilibrio estacionario óptimo de biomasa $x(\beta)$ tiende a x_r (ver Figura 2.3).

El Teorema 2.2 establece que un único estado estacionario $(x(\beta), \lambda(\beta))$ del sistema de optimalidad (2.9) depende continuamente del parámetro β y tiene límites finitos cuando $\beta \rightarrow 0^+$. La siguiente proposición será útil para entender la razón de cambio en el comportamiento asintótico de la solución estacionaria $(x(\beta), \lambda(\beta))$ inducida por la pérdida de sensibilidad de los rendimientos de la captura adicional con respecto a x en la función de la recolección.

Proposición 2.1 *Los límites de las derivadas de los estados estacionarios $(x(\beta), \lambda(\beta))$ con respecto a β son dados por*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{dx(\beta)}{d\beta} = -\frac{cF(x_r)}{F''(x_r)(p-c)x_r} > 0; \quad (2.34)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} = c \ln(x_r). \quad (2.35)$$

En particular, para $\beta > 0$ suficientemente pequeño¹², se tiene:

1. $\frac{dx}{d\beta} > 0$ esto es, $x(\beta)$ decrece cuando β decrece.
2. (a) Si $\ln(x_r) > 0$ entonces $\frac{d\lambda}{d\beta} > 0$, esto es, $\lambda(\beta)$ decrece, cuando β decrece.
 (b) Si $\ln(x_r) < 0$ entonces $\frac{d\lambda}{d\beta} < 0$, esto es, $\lambda(\beta)$ crece, cuando β decrece.

Demostración. Recordemos que el Teorema 2.2 establece la existencia de una curva diferenciable $\beta \mapsto (x(\beta), \lambda(\beta))$ que satisface el sistema (2.31). Para calcular las

¹²Con “suficientemente pequeño”, nos referimos a todos los $\beta \in (0, \beta^*)$ donde β^* tiene el mismo significado que en el Lema 2.1 y en la prueba del Teorema 2.2.

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

derivadas $\frac{dx(\beta)}{d\beta}$ y $\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta}$ aplicamos el Teorema de la Función Implícita:

$$\begin{aligned}\frac{dx(\beta)}{d\beta} &= - \frac{[x(\beta)]^\beta (p - \lambda(\beta))}{\det(M(\beta))} \times \\ &\quad \left[F(x(\beta)) - \ln(x(\beta)) \left(\beta F(x(\beta)) + x(\beta)(r - F'(x(\beta))) \right) \right], \\ \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} &= \frac{[x(\beta)]^{\beta-1} (p - \lambda(\beta))}{\det(M(\beta))} \times \\ &\quad \left[x(\beta) \ln(x(\beta)) \left[\beta (p - \lambda(\beta)) F'(x(\beta)) - \lambda(\beta)(r - F'(x(\beta))) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x(\beta) \lambda(\beta) F''(x(\beta)) \right] - \beta (p - \lambda(\beta)) F(x(\beta)) \right],\end{aligned}$$

donde $M(\beta)$ se definió en (2.32) y $\det(M(\beta))$ se calculó en (2.33). Cuando $\beta \rightarrow 0^+$ tenemos que

$$x(\beta) \rightarrow x_r, \quad \lambda(\beta) \rightarrow p - c, \quad \det(M(\beta)) \rightarrow (p - c)x_r F''(x_r).$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{dx(\beta)}{d\beta} &= - \frac{cF(x_r)}{x_r F''(x_r)(p - c)} > 0, \\ \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} &= c \ln(x_r).\end{aligned}$$

■

El significado de la relación (2.34) es acorde con el resultado de los Teoremas 2.1 y 2.2. Efectivamente, dado que $x(\beta) \in (x_r, K)$ y $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} x(\beta) = x_r$, el estado estacionario $x(\beta)$ se aproxima a x_r siempre desde arriba cuando $\beta \rightarrow 0^+$ (ver Figura 2.3). Para β lo suficientemente pequeño, un valor menor de β debería inducir a un menor valor estacionario de $x(\beta)$ y, en consecuencia, a un menor rendimiento interno en la pesca. Este último se sigue de la regla fundamental (2.21) donde el efecto marginal del stock (segundo sumando en el lado derecho) se hace más pequeño cuando $\beta \rightarrow 0^+$ mientras que valores grandes de β deberían incrementar la productividad marginal del stock y los beneficios futuros que se obtendrían al mantener una unidad adicional de x en el mar.

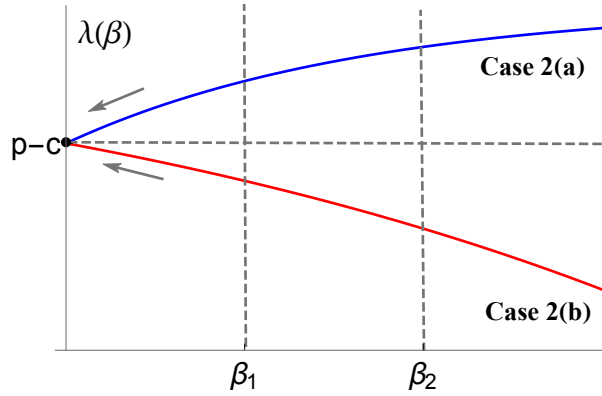


Figura 2.4: Comportamiento esquemático del estado estacionario $\lambda(\beta)$ para valores grandes de x_r (Caso 2(a), r es relativamente pequeño) y x_r pequeño (Caso 2(b), r es relativamente grande), como se describe en la Proposición 2.1.

Por otro lado, la Parte 2 de la Proposición 2.1 indica *cómo* la solución estacionaria $\lambda(\beta)$ se aproxima asintóticamente a su límite $(p - c)$, establecido en el Teorema 2.2, cuando $\beta \rightarrow 0^+$. A saber, si $x_r > 1$, es decir, x_r está lejos del origen, lo que significa que $F'(0)$ está muy por encima de r , entonces $\lambda(\beta)$ se acerca a su límite $(p - c)$ por encima cuando $\beta \rightarrow 0^+$. De lo contrario, si $x_r < 1$ (es decir, x_r está cerca del origen, lo que significa que $F'(0)$ está ligeramente por encima de r) entonces $\lambda(\beta)$ aproxima su límite $(p - c)$ desde abajo cuando $\beta \rightarrow 0^+$ (ver Figura 2.4).

Aquí, es importante recordar que $\lambda(\beta)$ es el valor presente del precio sombra del estado estacionario del stock de peces $x(\beta)$ atribuido a su productividad futura. Por lo tanto, si $x(\beta) \rightarrow x_r$ y x_r es relativamente grande (Caso 2(a) en la Proposición 2.1), entonces $\lambda(\beta) > (p - c)$ y se aproxima al valor $(p - c)$ por encima. Esto implica que para x_r grande, el valor futuro de una unidad de peces en el mar siempre permanece por encima de $(p - c)$. Por otro lado, si $x(\beta) \rightarrow x_r$ y x_r es bastante pequeño (Caso 2(b) en Proposición 2.1), entonces $\lambda(\beta) < (p - c)$ significa que $\lambda(\beta)$ se acerca al valor $(p - c)$ desde abajo y el valor futuro de una unidad de peces en el mar siempre permanece por debajo de $(p - c)$. La Figura 2.4 ilustra el comportamiento del estado estacionario $\lambda(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$ como se describe en la Proposición 2.1.

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Del argumento anterior, podemos concluir que si x_r es relativamente grande (Caso 2(a) en la Proposición 2.1), entonces la valoración del planificador social de la inversión marginal en el stock de peces x es alta puesto que $\lambda(\beta) > (p - c)$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Alternativamente, si x_r es bastante pequeño (Caso 2(b) en la Proposición 2.1), entonces valoración del planificador social de la inversión marginal en el stock de peces x es baja puesto que $\lambda(\beta) < (p - c)$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Esta conclusión es acorde con el resultado de [22] (véase la Proposición 3 en ese trabajo) pero la interpretación presente es más directa ya que solo involucra el valor de referencia x_r (tamaño del stock de peces económicamente viable bajo la tasa de descuento $r > 0$) y no compromete el número de unidades de pesca N .

La siguiente proposición describe el efecto marginal en la solución estacionaria $u(\beta)$ expresada por (2.26) cuando $\beta \rightarrow 0^+$.

Proposición 2.2 *Sea $u(\beta)$ dado por (2.26). Entonces, se tiene que*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{du(\beta)}{d\beta} = -\frac{F(x_r)}{N} \left[\ln(x_r) + \frac{rc}{F''(x_r)(p-c)x_r} \right]. \quad (2.36)$$

En particular, para $\beta > 0$ suficientemente pequeño si $\ln(x_r) < 0$, entonces $\frac{du(\beta)}{d\beta} > 0$ y $\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} < 0$.

Demostración. Notemos que $u(\beta) = \frac{F(x(\beta))}{N[x(\beta)]^\beta}$ de acuerdo con (2.26). Por lo tanto,

$$\frac{du(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{N} \left[\frac{F'(x(\beta))}{[x(\beta)]^\beta} \cdot \frac{dx(\beta)}{d\beta} - F(x(\beta)) \left(\frac{\ln(x(\beta))}{[x(\beta)]^\beta} + \frac{\beta}{[x(\beta)]^{\beta+1}} \cdot \frac{dx(\beta)}{d\beta} \right) \right].$$

Tomando el límite cuando $\beta \rightarrow 0^+$, obtenemos que la relación (2.36) se cumple.

Si suponemos que $\ln(x_r) < 0$, entonces obtenemos directamente que $\frac{du(\beta)}{d\beta} > 0$, debido a la estricta concavidad de F y teniendo en cuenta que $p > c$. Además, por la Proposición 2.1 también tenemos en este caso que $\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} < 0$. ■

Hemos mencionado que $\ln(x_r) < 0$ implica que x_r está cerca del origen, esto significa que r es bastante grande y permanece ligeramente por debajo de $F'(0)$.

En este caso, la Proposición 2.2 señala que $\frac{du(\beta)}{d\beta} > 0$ y que $u(\beta)$ decrece cuando $\beta \rightarrow 0^+$. En otras palabras, valores menores de β deberían inducir la elección de un esfuerzo de pesca estacionario $u(\beta)$ menor.

Por otro lado, cuando r es muy pequeño (cercano a cero) el término entre corchetes en (2.36) debe ser positivo, lo que significa que $\frac{du(\beta)}{d\beta} < 0$ y que el esfuerzo de pesca estacionario $u(\beta)$ aumentará cuando $\beta \rightarrow 0^+$ mientras que $x(\beta)$ y $\lambda(\beta)$ disminuirán y se aproximarán por encima a sus valores límites (x_r y $(p - c)$, respectivamente). Este resultado es consistente con el Teorema 2.2 y es acorde con resultados similares obtenidos en [22, Proposición 7].

Observación 2.6 *Para valores intermedios de $r > 0$ no hay certeza con respecto al comportamiento del esfuerzo de pesca $u(\beta)$ en el estado estacionario con respecto a los cambios en β . Si el valor observable de β aumenta de β_1 hasta β_2 , el estado estacionario del esfuerzo $u(\beta_1)$ puede aumentar o disminuir a $u(\beta_2)$ incluso si ambos β_1 y β_2 son relativamente pequeños. El resultado final dependerá principalmente de la proximidad de β_1 y β_2 a r .*

Ahora recordemos que el estado estacionario de recolección está dado por

$$h(\beta) := h(x(\beta), u(\beta)) = Nu(\beta)[x(\beta)]^\beta$$

de acuerdo con (2.3). En la siguiente proposición, vamos a estudiar el comportamiento de $h(\beta)$ y su valor marginal $\frac{\partial h(x(\beta), u(\beta))}{\partial x}$ en el equilibrio cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Por simplicidad, denotamos

$$h_x(\beta) := \frac{\partial h(x(\beta), u(\beta))}{\partial x}.$$

Proposición 2.3 *Para $\beta > 0$ suficientemente pequeño, el estado estacionario de recolección $h(\beta)$ y el estado estacionario de recolección marginal $h_x(\beta)$ decrecen cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Concretamente,*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{dh(\beta)}{d\beta} > 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{dh_x(\beta)}{d\beta} > 0.$$

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Demostración. El Teorema 2.2 establece que $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} x(\beta) = x_r$ y este límite $x_r > 0$ sólo es alcanzable por encima cuando $\beta \rightarrow 0^+$, dado que $\frac{dx(\beta)}{d\beta} > 0$ si β es suficientemente pequeño (ver Proposición 2.1). Por otro lado, recordemos que $x(\beta)$ es un estado de equilibrio; por lo tanto, $h(\beta) = F(x(\beta))$ y podemos calcular

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{dh(\beta)}{d\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} F'(x(\beta)) \frac{dx(\beta)}{d\beta} = -\frac{crF(x_r)}{x_r F''(x_r)(p-c)} > 0,$$

Aquí hemos usado las relaciones $F'(x_r) = r > 0$ y (2.34) junto con la estricta concavidad de F . Además, se tiene que

$$h_x(\beta) = \frac{\partial}{\partial x} \left[Nu(\beta) [x(\beta)]^\beta \right] = \beta Nu(\beta) [x(\beta)]^{\beta-1}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{dh_x(\beta)}{d\beta} &= Nu(\beta) [x(\beta)]^{\beta-1} + \beta N [x(\beta)]^{\beta-1} \frac{du(\beta)}{d\beta} \\ &\quad + \beta Nu(\beta) \left([x(\beta)]^{\beta-1} \ln(x(\beta)) + (\beta-1) [x(\beta)]^{\beta-2} \cdot \frac{dx(\beta)}{d\beta} \right). \end{aligned}$$

Usando el hecho que $Nu(\beta) [x(\beta)]^\beta = F(x(\beta))$ y tomando el límite cuando $\beta \rightarrow 0^+$, concluimos que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{dh_x(\beta)}{d\beta} = \frac{F(x_r)}{x_r} > 0.$$

■

La Proposición 2.3 básicamente establece que cualquier disminución en β siempre inducirá a una reducción de los niveles del estado estacionario de biomasa $x(\beta)$, de la recolección $h(\beta)$ correspondiente, y del equilibrio de recolección marginal $h_x(\beta)$. En otras palabras, $x(\beta)$, $h(\beta)$ y $h_x(\beta)$ muestran una fuerte monotonidad con respecto a β .

Sin embargo, la respuesta del equilibrio de la productividad marginal de recolección

$$h_u(\beta) := \frac{\partial h(u(\beta), x(\beta))}{\partial u}$$

a los cambios en β no sigue el mismo patrón y la razón se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.4 *La productividad marginal de recolección $h_u(\beta)$ del esfuerzo pesquero en el estado estacionario tiene las mismas propiedades de monotonidad que el precio sombra $\lambda(\beta)$ cuando β varía y se cumple que*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{dh_u(\beta)}{d\beta} = N \ln(x_r). \quad (2.37)$$

Demostración. La prueba de esta proposición es inmediata y se sigue de la fórmula (2.14) junto con el resultado de la Proposición 2.1:

$$\frac{dh_u(\beta)}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left[\frac{cN}{p - \lambda(\beta)} \right] = \frac{cN}{[p - \lambda(\beta)]^2} \cdot \frac{d\lambda}{d\beta}.$$

Tomando el límite cuando $\beta \rightarrow 0^+$ en la relación anterior, llegamos directamente a (2.37). ■

De (2.37) es claro que para $\beta \rightarrow 0^+$ la productividad marginal de recolección $h_u(\beta)$ en el equilibrio aumenta cuando r es (relativamente) grande y permanece ligeramente por debajo de $F'(0)$ ya que en este caso podemos tener que $x_r < 1$ y $\ln(x_r) < 0$. De lo contrario, es decir, cuando $x_r > 1$ y r es (relativamente) pequeño, $h_u(\beta)$ debería decrecer cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Este resultado concuerda con la variabilidad del estado estacionario del precio sombra $\lambda(\beta)$ (ver Parte 2 de la Proposición 2.1 y la relación (2.37)). De nuevo vale la pena recordar el significado de $\lambda(\beta)$ que hace referencia a futuros descuentos en el valor presente del stock en el estado estacionario $x(\beta)$. Aparentemente, si r es grande y x_r es pequeño, se tiene que $\lambda(\beta) < (p - c)$ y el precio sombra $\lambda(\beta)$ se aproxima a $(p - c)$ al crecer desde abajo cuando $\beta \rightarrow 0^+$ (ver Caso 2(b) en la Figura 2.4). Esto induce un aumento en la productividad marginal de recolección $h_u(\beta)$ en el equilibrio cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Alternativamente, si r es pequeño y x_r es grande, se tiene que $\lambda(\beta) > (p - c)$, así que $\lambda(\beta)$ se aproxima a $(p - c)$ decreciendo desde arriba cuando $\beta \rightarrow 0^+$, y esto induce a una disminución en la productividad marginal de recolección $h_u(\beta)$ en el equilibrio cuando $\beta \rightarrow 0^+$ (ver Caso 2(a) en la Figura 2.4).

El argumento anterior reafirma el resultado de Gajardo [22] (véase la Proposición 6 en ese trabajo) respecto a la monotonidad de $\lambda(\beta)$ y $h_u(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$ pero la interpretación actual es más evidente ya que sólo involucra directamente el valor x_r del tamaño del stock de peces económicamente viable bajo la tasa presente de descuento $r > 0$ y no involucra el número de unidades de pesca N .

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

Situación paramétrica	$\frac{dx}{d\beta}$	$\frac{d\lambda}{d\beta}$	$\frac{du}{d\beta}$	$\frac{dh}{d\beta}$	$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)$	$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)$
$x_r > 1$	+	+	?	+	+	+
$x_r < 1$	+	-	+	+	+	-

Tabla 2.1: Resumen de dependencias respecto a β : creciente (+) y decreciente (-).

Finalmente, la Tabla 2.1 proporciona un resumen de los principales resultados derivados, los cuales son consistentes con los obtenidos por [22] (ver Tabla 1 en dicho trabajo) y llenan algunos vacíos en ese trabajo. A saber, se ha establecido la dependencia del estado estacionario del precio sombra $\lambda(\beta)$ con respecto a β y se ha demostrado que el estado estacionario del esfuerzo de recolección $u(\beta)$ debería disminuir cuando $\beta \rightarrow 0^+$ cuando r es relativamente grande ($x_r < 1$). Esto último indica claramente una mayor probabilidad de colapso de la industria de la pesca y la exterminación de los recursos locales causado por la pérdida de sensibilidad ($\beta \rightarrow 0^+$) del rendimiento de la captura adicional con respecto a los cambios marginales en el nivel de la población de peces.

2.4 Conclusiones

Durante los períodos de abundancia y escasez, las especies de peces pelágicos pequeños tienden a formar grandes bancos que proporcionan objetivos fáciles para los grandes depredadores naturales y redes de pesca. Esto último implica que la productividad marginal de la captura de una unidad de esfuerzo de pesca adicional puede presentar respuestas constantes independientemente de la variabilidad del stock de peces. La evidencia empírica sobre las poblaciones de peces pelágicos pequeños también sugiere que los rendimientos de la recolección pueden mostrar una sensibilidad reducida con respecto a las variaciones en los niveles del stock.

En este contexto, el modelo bioeconómico sencillo (2.2) con recolección definida por (2.3) propuesto en este documento ($\alpha = 1$ y $\beta \in (0, 1)$ suficientemente pequeño) parece razonable a pesar de su simplicidad y permite enfocarse en la dependencia de las soluciones estacionarias sobre el parámetro no lineal de captura

stock $0 < \beta < 1$, así como analizar las respuestas de equilibrio a los cambios en este parámetro inducidos por algunos factores exógenos (climáticos, perturbaciones ambientales, tecnológicas).

Nuestro objetivo era proponer una política de pesca sostenible en función del stock estacionario que sea capaz de responder de manera adecuada a las variaciones del parámetro de capturabilidad $0 < \beta < 1$ que caracteriza el nivel de hiperestabilidad del stock pelágico. Los resultados (formulados por los Teoremas 2.1 y 2.2) revelaron que la pesca sostenible es posible siempre que el nivel de biomasa en equilibrio se mantenga por encima del punto de referencia x_r definido por (2.25). Este punto de referencia es independiente del parámetro de hiperestabilidad β y sirve como un límite inferior de la biomasa de equilibrio, $x^*(\beta)$, cuando la tasa de recolección se vuelve insensible a las variaciones en el nivel del stock ($\beta \rightarrow 0^+$). El tamaño de x_r depende esencialmente de la tasa de descuento $r > 0$ y su proximidad (cercanía o lejanía) a la productividad marginal inicial del recurso $F'(0)$ (ver relación (2.24)). Cuanto más ancha es la brecha entre $F'(0)$ y r , mayor es el punto de referencia x_r y menor es la probabilidad de exterminar los recursos pesqueros y de que colapse la pesquería. Si la brecha entre $F'(0)$ y r es estrecha, el valor de referencia x_r puede volverse muy pequeño y alcanzar un “nivel peligroso” ($0 < x_r < 1$). Este último, agravado por la pérdida de sensibilidad ($\beta \rightarrow 0^+$) puede dar como resultado una reducción drástica del stock estacionario con un mayor riesgo de colapso de la pesquería pelágica.

En términos generales, el valor del parámetro de hiperestabilidad β resume el efecto combinado de factores climáticos, ambientales y tecnológicos entre otros, en la interacción entre el tamaño de las poblaciones de peces pelágicos pequeños y los rendimientos de recolección por unidad de esfuerzo de pesca. Los fuertes ciclos recurrentes de abundancia y escasez de peces son típicos para especies pelágicas pequeñas, y una pesquería también puede experimentar variaciones en el valor del parámetro β causado por cambios climáticos, contaminación o polución, reubicación de stocks y capacidad de los pescadores para buscar bancos de peces.

Las pesquerías pelágicas que pretendan operar de manera sostenible deben tener capacidades para detectar cualquier alteración observable en el valor de β y actuar acorde. La detección de variabilidad en el valor de β es una tarea desafiante y su realización requiere un trabajo adicional minucioso referente a la validación

2. MODELO DE PESQUERÍA PELÁGICA

del modelo bajo posibles alteraciones de β . Como se señala en [46], tal validación se puede llevar a cabo aplicando el enfoque MSE que consiste en un “acoplamiento dinámico” entre el modelo estudiado del tipo (2.2) y un “modelo operativo” de complejidad más alta¹³. Bajo tal enfoque, los registros de la CPUE y otros datos internos de la pesquería se contrastan con datos empíricos independientes recopilados de diferentes fuentes, con el fin de garantizar la capacidad de ambos modelos para capturar los patrones observables y para obtener un valor de β que hace una mejor coincidencia.

Una vez que se detecta un cambio en el valor de β , los administradores de la pesquería pueden evaluar el tamaño del stock en estado estable $x^*(\beta)$ correspondiente, como una única raíz de la ecuación fundamental de la explotación de recursos renovables (2.21), y luego ajustar, de acuerdo con (2.26), la política de pesca óptima $u^*(\beta)$ que puede mantenerse mientras β permanezca sin cambios. Por lo tanto, la detección oportuna de alteraciones observables en el valor de β es un tema fundamental para el diseño de políticas flexibles dirigidas a la pesca sostenible. Puede que no solo brinde información útil sobre el comportamiento potencial de la pesca, sino que también sirva como base teórica sobre la cual se pueden probar nuevos modelos aplicados (o adaptados) en pesquerías reales.

¹³La tarea de detectar la variabilidad de β se puede combinar, dentro del marco del enfoque MSE, con la validación de otros parámetros del modelo cuyos valores pueden alterar el nivel de estado estacionario del recurso $x^*(\beta)$, como r, p, c , y la forma de la función $F(x)$ que describe el crecimiento del stock biológico (véase la ecuación (2.20) o (2.21) que da a $x^*(\beta)$ como única raíz).

Modelo Biológico de Coexistencia de Tres Especies

3.1 Introducción

La explotación de recursos naturales renovables es de gran interés para entidades gubernamentales, agentes industriales y económicos, así como organizaciones dedicadas al control y la conservación de recursos naturales. A través de la historia se han presentado colapsos biológicos y económicos como consecuencia del mal manejo de los recursos naturales, por lo que el estudio de modelos bioeconómicos son de gran importancia. Los matemáticos desarrollan modelos que incluyen diferentes factores biológicos, evolutivos y económicos tales como el impacto de conservación, la industrialización y en algunos casos el efecto global de la economía en las comunidades locales, donde se encuentra el recurso, que son directamente afectadas. De estos estudios se derivan criterios a la hora de explotar recursos con el fin de mantener unos niveles aceptables para no llevar a la extinción los recursos o tener una pérdida económica irreversible.

En este capítulo desarrollaremos un modelo matemático que describe la coexistencia de tres especies, estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio de la dinámica natural, así como el estudio de la estabilidad en el caso de adicionar

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

al sistema la actividad de explotación humana la cual puede alterar la dinámica biológica natural.

3.2 Formulación del modelo

Estamos interesados en estudiar un modelo matemático que describe la coexistencia de tres especies en donde la población z depreda las poblaciones x y y , además, la población y depreda a la población x , y a su vez la población x afecta de forma negativa el crecimiento de la población y debido a contaminación o envenenamiento, por ejemplo. Un modelo con las características expuestas se puede describir mediante el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - \frac{\beta_2 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x} \quad (3.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta_1 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1 yz}{\alpha_1 + x} - d_1 y \quad (3.1b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1 yz}{\alpha_1 + x} - \delta z \quad (3.1c)$$

Suposiciones del modelo y descripción de parámetros

- (i) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ denotan densidad de tres poblaciones en el instante t , sujetas a condiciones iniciales no negativas $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ y $z(0) = z_0$.
- (ii) G es una función no negativa de clase $C^2([0, K])$, estrictamente cóncava para la cual existe una constante $K > 0$ tal que $G(0) = G(K) = 0$. La constante K se denomina capacidad de carga o densidad máxima de presas soportable por el medio ambiente. $G(x)$ describe el crecimiento natural intrínseco de la población de presas $x(t)$, además puede tener diferentes formas (ver Observación 2.1 del Capítulo 2).
- (iii) Los parámetros β_2 , β_1 y d_1 representan la tasa máxima de ingestión con respecto a la población de presa x (es decir, el número máximo de presas que un depredador puede consumir por unidad de tiempo), la proporción de conservación de biomasa y la tasa de muerte natural para la población y , respectivamente, donde

$$0 < \beta_1 < \beta_2.$$

3.2 Formulación del modelo

- (iv) Los parámetros γ y γ_1 denotan la tasa máxima de ingestión de la población de depredadores z respecto a las poblaciones de sus presas x, y respectivamente.
- (v) El parámetro ρ denota la tasa de contaminación que afecta a la población y producida por unidad de biomasa x .
- (vi) Los parámetros S y S_1 representan la proporción de conservación de biomasa de la población de depredadores z por las poblaciones de sus presas x y y respectivamente, donde
$$S < \gamma \text{ y } S_1 < \gamma_1.$$
- (vii) El parámetro δ representa la tasa de muerte natural de la población de depredadores z .
- (viii) El término $\frac{\beta_2 xy}{\alpha_1 + x}$ representa la respuesta funcional del depredador y en la forma de *Michaelis-Menten* (o Holling tipo II) donde $\frac{\beta_2 x}{\alpha_1 + x}$ corresponde al número de presas consumidas por el depredador por unidad de tiempo y el parámetro $\alpha_1 > 0$ corresponde a la mitad de la constante de saturación. En otras palabras, cuando $x = \alpha_1$ se tiene que (ver Figura 3.1)

$$\frac{\beta_2 x}{\alpha_1 + x} = \frac{\beta_2 \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_1} = \frac{\beta_2}{2}.$$

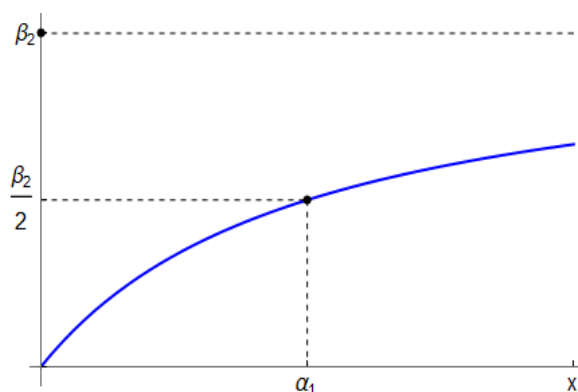


Figura 3.1: Función $\frac{\beta_2 x}{\alpha_1 + x}$ de respuesta funcional Holling tipo II.

Dado que la población de presas x es consumida por la población del depredador y , entonces la tasa de crecimiento de la población y es proporcional a la

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

tasa de consumo de la población x . En otras palabras, la tasa de crecimiento de la población y es $\frac{\beta_1 x}{\alpha_1 + x}$.

- (ix) Puesto que alguna parte de la población de presas x contamina con toxinas a la población y , la tasa de muertes de la población y es proporcional a la tasa de consumo de la población x . Es decir, la tasa de mortalidad de la población y atribuida a toxinas emitidas por x es $\frac{\rho x}{\alpha_1 + x}$. Además, se debe cumplir

$$\beta_1 > \rho.$$

De lo contrario ($\beta_1 \leq \rho$) la población y se extingue.

- (x) Los términos $\frac{\gamma x z}{\alpha_1 + x}$ y $\frac{\gamma_1 y z}{\alpha_1 + x}$ representan las respuestas funcionales de ingestión de la población z con respecto a las poblaciones x e y , respectivamente.

Un caso particular del sistema (3.1) fue considerado por P. Panja & S. Mondal en [26], cuando la población $x(t)$ corresponde a la densidad de fitoplancton (cabe mencionar que una fracción de la población de fitoplancton es tóxica), la densidad $y(t)$ corresponde a zooplancton y la población $z(t)$ corresponde a la densidad de una población de peces. Los autores realizaron un análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (3.1) considerando G como la función logística

$$G(x) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K} \right),$$

donde K representa la capacidad de carga de la población de fitoplancton $x(t)$ y r_1 es la tasa intrínseca de crecimiento.

Es importante señalar que el sistema propuesto (3.1) incluye una variedad de modelos biológicos como la coexistencia de tres poblaciones de peces en donde una parte de la población $x(t)$ está contaminada por ejemplo por mercurio, desechos tóxicos, por el aumento de la población de algas tóxicas o como consecuencia del cambio climático, entre otros. Esto primariamente afecta de forma negativa el crecimiento de la población intermedia $y(t)$ que consume a $x(t)$, y en consecuencia, a la población de peces $z(t)$.

Si bien es cierto que desde el punto de vista biológico y matemático es relevante el estudio del sistema (3.1), también es importante entender cómo la actividad de explotación humana (en particular, la industrial y económica) puede alterar la

3.2 Formulación del modelo

Parámetro	Descripción	Rango
K	Capacidad de carga	[100, 600]
α_1	Mitad de la constante de saturación	[20, 200]
$\gamma > 0$	Tasa máx. de ingestión de la población z sobre x	[0.6, 1.4]
$\gamma_1 > 0$	Tasa máx. de ingestión de la población z sobre y	[0.6, 1.4]
$\beta_2 > 0$	Tasa máx. de ingestión de la población y sobre x	[2, 12]
$\beta_1 > 0$	Proporción de conservación de biomasa para la población y , con $\beta_1 < \beta_2$	[0.15, 0.64]
$d_1 > 0$	Tasa de muerte natural de la población y	[0.01, 0.1]
ρ	Tasa de contaminación por unidad de biomasa de x	$[0, \beta_1 - d_1)$
S	Proporción de conservación de biomasa de z por la población x , con $S < \gamma$	[0.1, 0.8]
S_1	Proporción de conservación de biomasa de z por la población y , con $S_1 < \gamma_1$	[0.1, 0.8]
$\delta > 0$	Tasa de muerte natural para la población z	[0.01, 0.15]

Tabla 3.1: Los rangos de referencia para los parámetros son tomados del trabajo doctoral [1].

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

dinámica biológica natural, lo que se ve reflejado cuando a este sistema se le adiciona la componente de crecimiento económico asociado con la captura de una de las poblaciones de peces, en este caso la población $z(t)$, lo cual requiere examinar el impacto sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Antes de iniciar la discusión sobre los puntos de equilibrio, vamos a mostrar que si los datos iniciales en (3.1) son no negativos entonces las soluciones del sistema son no negativas y están definidas en el intervalo $[0, \infty)$. Para ver esto, primero definamos el conjunto de interés biológico

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 < x < K, y > 0, z > 0\}. \quad (3.2)$$

Teorema 3.1 *Supongamos que $\beta_1 < \beta_2$ y que $\gamma S_1 < \gamma_1 S$. El conjunto $\mathcal{D}$ es positivamente invariante para las soluciones del sistema (3.1). Más aún, si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$, entonces la solución $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{D}$, existe para todo $t \geq 0$ y es acotada en $[0, \infty)$.*

Demostración. Supongamos que $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$ y sea $(x(t), y(t), z(t))$ la solución del sistema (3.1) con esta condición inicial definida en $t \in [0, T_0)$, donde $T_0 > 0$ es el tiempo máximo de existencia. Sea $t_0 < T_0$ el primer punto tal que $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \notin \mathcal{D}$. Notemos que de la ecuación (3.1c) tenemos que para $t \in [0, T_0)$

$$\frac{dz}{dt} \geq -\delta z.$$

Por lo tanto, para $t \in [0, T_0)$ obtenemos que

$$\frac{d}{dt} (e^{\delta t} z(t)) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) \geq z(0)e^{-\delta t} > 0.$$

Supongamos ahora que $y(t) > 0$ para todo $0 < t < t_0$. Notemos que de la ecuación (3.1b)

$$\frac{dy}{dt} \leq \beta_1 y,$$

de donde concluimos que

$$y(t) \leq y(0)e^{\beta_1 t} \leq M_2(\beta_1, y(0), T_0),$$

con $M_2(\beta_1, y(0), T_0) = y(0)e^{\beta_1 T_0}$.

Utilizando este estimativo, podemos ver que

$$\frac{dz}{dt} \leq Sz + \frac{S_1 M_2}{\alpha_1} z,$$

y esta desigualdad implica que

$$z(t) \leq z(0)e^{\left(S + \frac{S_1 M_2}{\alpha_1}\right)t} \leq M_3(S, S_1, \alpha_1, M_2, z(0), T_0),$$

donde $M_3(S, S_1, \alpha_1, M_2, z(0), T_0) = z(0)e^{\left(S + \frac{S_1 M_2}{\alpha_1}\right)T_0}$.

De otro lado, de la ecuación (3.1a) podemos ver que

$$x(t) \leq \int_0^t G(x(s)) ds + x(0) \leq M_0 T_0 + x_0 = M_1,$$

donde $M_0 = \sup_{0 \leq x \leq K} G(x)$. Como consecuencia de los acotamientos previos,

$$\frac{dx}{dt} \geq -\left(\frac{\beta_2 M_2}{\alpha_1} + \frac{\gamma M_3}{\alpha_1}\right)x,$$

lo que implica que

$$x(t) \geq x(0)e^{-M_4 t} > 0,$$

donde $M_4 = \frac{\beta_2 M_2}{\alpha_1} + \frac{\gamma M_3}{\alpha_1}$. Ahora veamos qué $y(t) > 0$. Para ello observemos que

$$\frac{dy}{dt} \geq -\left(\frac{\rho M_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma_1 M_3}{\alpha_1} + d_1\right)y.$$

Como en los casos anteriores, concluimos que

$$y(t) \geq y(0)e^{-M_5 t} > 0,$$

donde $M_5 = \frac{\rho M_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma_1 M_3}{\alpha_1} + d_1$.

Ahora mostremos que $x(t) < K$ para $t \in [0, T_0)$. Supongamos que para algún $t_1 < T_0$ tenemos que $x(t_1) = K$ y $x(t) < K$ para $t \in (0, t_1)$. Utilizando lo anterior y que $G(x(t_1)) = G(K) = 0$, concluimos que $\frac{dx(t_1)}{dt} \leq G(x(t_1)) = 0$, lo que implica que

$$\frac{dx(t_1)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_1 - h) - x(t_1)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_1 - h) - K}{-h} \leq 0.$$

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

Por lo tanto, para $h > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $x(t_1 - h) \geq K$, lo cual es una contradicción pues $t_1 - h < t_1$. Finalmente, utilizando que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son positivas, se puede mostrar que las soluciones se pueden extender hasta infinito. Para ver esto, definamos

$$W(t) = x(t) + y(t) + \frac{\gamma}{S}z(t).$$

Entonces un cálculo directo muestra que

$$\frac{dW(t)}{dt} = G(x(t)) + (\beta_1 - \beta_2 - \rho) \frac{x(t)y(t)}{\alpha_1 + x(t)} + \left(\frac{\gamma S_1}{S} - \gamma_1 \right) \frac{y(t)z(t)}{\alpha_1 + x(t)} - d_1 y(t) - \frac{\delta \gamma}{S} z(t).$$

Ahora por hipótesis, G es estrictamente cóncava, entonces para todo $v \in (0, K)$ tenemos que

$$-G(v) = G(K) - G(v) = \int_v^K G'(s) ds \geq (K-v)G'(K) \Leftrightarrow G(v) \leq (K-v)G'(K).$$

En consecuencia, tomando $v = x(t)$ y usando que $\beta_1 - \beta_2 - \rho < 0$ y $\gamma S_1 - \gamma_1 S < 0$, concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &\leq (x(t) - K)G'(K) - d_1 y(t) - \frac{\delta \gamma}{S} z(t) \\ &\leq -x(t)(-G'(K)) - KG'(K) - d_1 y(t) - \frac{\delta \gamma}{S} z(t) \\ &\leq -\eta W(t) - KG'(K), \end{aligned}$$

donde $\eta = \min\{-G'(K), d_1, \delta\}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} (e^{\eta t} W(t)) \leq -KG'(K)e^{\eta t}.$$

De donde se concluye que

$$0 < W(t) \leq W(0)e^{-\eta t} - \frac{KG'(K)}{\eta}(1 - e^{-\eta t}), \quad (3.3)$$

lo que implica que la solución $(x(t), y(t), z(t))$ está definida y acotada para todo $t \in [0, \infty)$. ■

Teorema 3.2 *Supongamos que $\beta_1 < \beta_2$ y que $\gamma S_1 < \gamma_1 S$. Existe un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ que atrae a cualquier conjunto acotado en $\mathbb{R}_+^3$.*

3.3 Existencia de puntos de equilibrio

Demostración. Tomando límite en (3.3), concluimos que

$$0 < W(t) \leq -\frac{KG'(K)}{\eta}.$$

Consideremos un conjunto acotado B contenido en $\mathbb{R}_+^3$ y $W(0) \in B$. Por lo tanto, existe $M_6 > 0$ tal que $W(0) \leq M_6$. Si escogemos $t_0 > 0$ tal que $M_6 e^{-\eta t_0} < -\frac{KG'(K)}{\eta}$, entonces de (3.3) tenemos para $t \geq t_0$ que

$$W(t) \leq W(0)e^{-\eta t} - \frac{KG'(K)}{\eta}(1 - e^{-\eta t}) \leq W(0)e^{-\eta t} - \frac{KG'(K)}{\eta} < -\frac{2KG'(K)}{\eta}.$$

Por lo tanto, cualquier solución está definida para todo $t \geq 0$ y el conjunto compacto

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq K, y \geq 0, z \geq 0, \quad x + y + \frac{\gamma}{S}z \leq -\frac{2KG'(K)}{\eta} \right\}$$

atrae cualquier conjunto acotado B . ■

3.3 Existencia de puntos de equilibrio

En esta sección vamos a dar condiciones suficientes para garantizar la existencia de puntos de equilibrio para el sistema (3.1), además analizaremos la estabilidad de éstos.

En primer lugar, usando que $G(0) = G(K) = 0$, se puede ver directamente que $E_0 = (0, 0, 0)$ y $E_1 = (K, 0, 0)$ son puntos de equilibrio. Ahora vamos a ver que $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ es un punto de equilibrio para valores apropiados no nulos de x_2 e y_2 , con $\beta_1 > \rho + d_1$.

En este caso, al reemplazar en el sistema se tiene trivialmente que $\frac{dz(t)}{dt} = 0$, además

$$G(x_2) - \frac{\beta_2 x_2 y_2}{\alpha_1 + x_2} = 0, \tag{3.4a}$$

$$\frac{\beta_1 x_2 y_2}{\alpha_1 + x_2} - d_1 y_2 - \frac{\rho x_2 y_2}{\alpha_1 + x_2} = 0. \tag{3.4b}$$

En primer lugar, $y_2 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$, puesto $y_2 = 0$ implica que $x_2 = 0$ ó $x_2 = K$ y este es el caso anterior. En efecto, si $x_2 = 0$ entonces $y_2 = 0$. De hecho, la ecuación

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

(3.4b), implica para $\beta_1 > d_1 + \rho$ que

$$\frac{(\beta_1 - \rho)x_2}{\alpha_1 + x_2} - d_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}.$$

De la ecuación (3.4a) encontramos que

$$y_2 = \frac{(\alpha_1 + x_2)G(x_2)}{\beta_2 x_2} = \frac{(\beta_1 - \rho)}{d_1 \beta_2} G\left(\frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}\right).$$

Por lo tanto, para $\beta_1 > \rho + d_1$

$$E_2 = \left(\frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}, \frac{\beta_1 - \rho}{d_1 \beta_2} G\left(\frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}\right), 0 \right)$$

es un punto de equilibrio.

En términos biológicos, este punto de equilibrio implica coexistencia de la población de presas $x(t)$ con la población del depredador $y(t)$ y la eventual extinción de la población de la especie $z(t)$ que encabeza la cadena alimenticia. Aquí la condición $\beta_1 > \rho + d_1$ garantiza la supervivencia del depredador intermedio $y(t)$. La eventual violación de esta condición (aumento en el nivel ρ de toxinas) puede ocasionar la extinción de $y(t)$.

Veamos ahora que el punto $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ con $S > \delta$ es un punto de equilibrio para valores apropiados $x_3 \neq 0$ y $z_3 \neq 0$. En este caso, tenemos que

$$G(x_3) - \frac{\gamma x_3 z_3}{\alpha_1 + x_3} = 0, \tag{3.5a}$$

$$\frac{S x_3 z_3}{\alpha_1 + x_3} - \delta z_3 = 0. \tag{3.5b}$$

De las ecuaciones (3.5a)-(3.5b), concluimos que

$$x_3 = \frac{\alpha_1 \delta}{S - \delta}, \quad z_3 = \frac{(\alpha_1 + x_3)G(x_3)}{\gamma x_3} = \frac{S}{\gamma \delta} G\left(\frac{\delta \alpha_1}{S - \delta}\right).$$

Así que para $S > \delta$,

$$E_3 = \left(\frac{\delta \alpha_1}{S - \delta}, 0, \frac{S}{\gamma \delta} G\left(\frac{\delta \alpha_1}{S - \delta}\right) \right)$$

es un punto de equilibrio.

3.3 Existencia de puntos de equilibrio

El sentido biológico de este punto de equilibrio consiste en la eventual extinción de la población intermedia $y(t)$ y la persistencia de la presa $x(t)$ y el depredador $z(t)$.

Finalmente, veamos que el punto de coexistencia de las tres especies $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$ es un punto de equilibrio para valores apropiados x_4 , y_4 y z_4 que satisfacen las ecuaciones

$$G(x_4) - \frac{\beta_2 x_4 y_4}{\alpha_1 + x_4} - \frac{\gamma x_4 z_4}{\alpha_1 + x_4} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\frac{\beta_1 x_4 y_4}{\alpha + x_4} - d_1 y_4 - \frac{\rho x_4 y_4}{\alpha_1 + x_4} - \frac{\gamma_1 y_4 z_4}{\alpha_1 + x_4} = 0, \quad (3.6b)$$

$$\frac{S x_4 z_4}{\alpha_1 + x_4} + \frac{S_1 y_4 z_4}{\alpha_1 + x_4} - \delta z_4 = 0. \quad (3.6c)$$

De la ecuación (3.6b) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 x_4}{\alpha_1 + x_4} - d_1 - \frac{\rho x_4}{\alpha_1 + x_4} - \frac{\gamma_1 z_4}{\alpha_1 + x_4} &= 0 \Rightarrow \\ \beta_1 x_4 - d_1(\alpha_1 + x_4) - \rho x_4 - \gamma_1 z_4 &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$z_4 = \frac{1}{\gamma_1} (x_4(\beta_1 - \rho - d_1) - d_1 \alpha_1),$$

en donde $z_4 > 0$ si y sólo si $x_4 > \frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}$. Ahora de la ecuación (3.6c)

$$S x_4 + S_1 y_4 - \delta(\alpha_1 + x_4) = 0 \Rightarrow S_1 y_4 = \delta(\alpha_1 + x_4) - S x_4$$

por lo que y_4 viene dado por

$$y_4 = \frac{1}{S_1} (\delta \alpha_1 - x_4(S - \delta)).$$

Notemos que $y_4 > 0$ si se cumple una de estas condiciones:

1. $x_4 < x_3 = \frac{\delta \alpha_1}{S - \delta}$, con $S > \delta$.
2. $S < \delta$.

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

Entre estas condiciones, la condición 2. es más factible. De hecho, esta implica que solo la presa $x(t)$ no puede sostener el depredador $z(t)$, por lo que para la supervivencia de $z(t)$ es necesario la presencia de otra fuente de alimentación representada por $y(t) > 0$.

Reemplazando y_4 y z_4 en la ecuación (3.6a) se tiene que

$$(\alpha_1 + x_4)G(x_4) - \frac{\beta_2 x_4}{S_1}(\delta\alpha_1 - x_4(S - \delta)) - \frac{\gamma x_4}{\gamma_1}(x_4(\beta_1 - d_1 - \rho) - d_1\alpha_1) = 0.$$

De donde obtenemos que

$$S_1\gamma_1(\alpha_1 + x_4)G(x_4) - \beta_2\gamma_1 x_4(\delta\alpha_1 - x_4(S - \delta)) - \gamma S_1 x_4(x_4(\beta_1 - \rho - d_1) - d_1\alpha_1) = 0,$$

lo que es equivalente a que x_4 satisfaga la siguiente ecuación:

$$S_1\gamma_1(\alpha_1 + x_4)G(x_4) = x_4^2[\gamma S_1(\beta_1 - \rho - d_1) - \beta_2\gamma_1(S - \delta)] + x_4[\beta_2\gamma_1\delta\alpha_1 - \gamma S_1 d_1\alpha_1]. \quad (3.7)$$

Si definimos

$$A = \gamma S_1(\beta_1 - \rho - d_1) - \beta_2\gamma_1(S - \delta) \quad (3.8a)$$

$$B = \beta_2\gamma_1\delta\alpha_1 - \gamma S_1 d_1\alpha_1, \quad (3.8b)$$

podemos escribir

$$\sigma_1(x_4) = Ax_4^2 + Bx_4 = (Ax_4 + B)x_4, \quad \sigma_2(x_4) = S_1\gamma_1(\alpha_1 + x_4)G(x_4).$$

Entonces x_4 corresponde a soluciones positivas de la ecuación $\sigma_1(x_4) = \sigma_2(x_4)$. Para determinar las soluciones basta determinar los puntos de corte de las gráficas de σ_1 y σ_2 en $[0, K]$. Para esto primero notemos que

$$\sigma_1(0) = \sigma_1\left(-\frac{B}{A}\right) = 0, \quad \sigma_2(0) = \sigma_2(K) = 0.$$

Ahora vamos a ver que la existencia de puntos de equilibrio con componentes positivas depende de analizar los siguientes casos:

$$S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) > \sigma_1'(0), \quad S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) < \sigma_1'(0), \quad S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) = \sigma_1'(0). \quad (3.9)$$

o equivalentemente,

$$S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) > B, \quad S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) < B, \quad S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) = B.$$

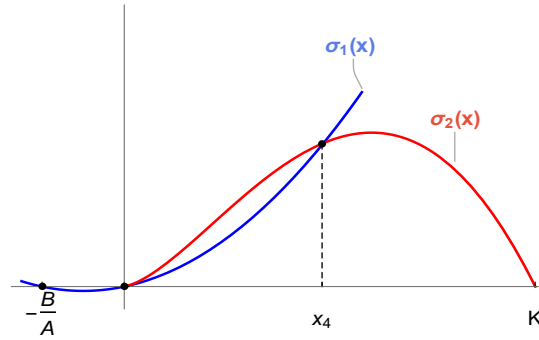
3.3 Existencia de puntos de equilibrio

Además, debemos considerar diferentes casos respecto a los signos de las componentes A y B definidas en (3.8a)-(3.8b).

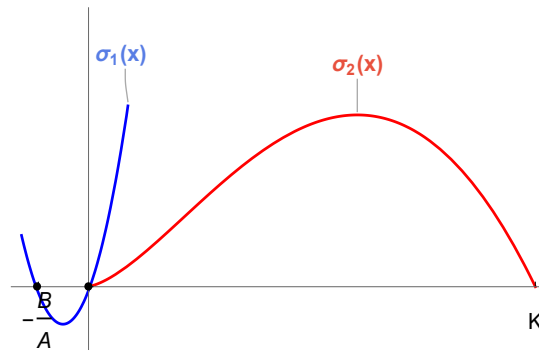
Caso 0. El caso $S_1\gamma_1\alpha_1G'(0) = B$ no es factible porque para $x > 0$ cercanos a cero el cambio de $\sigma_1(x)$ es lineal, pero el cambio de $\sigma_2(x)$ es no lineal.

Caso 1: $A > 0$ y $B > 0$. En este caso, $-\frac{B}{A} < 0 < K$.

1a. Existe un único punto de equilibrio si y sólo si $S_1\gamma_1\alpha_1G'(0) > B$.

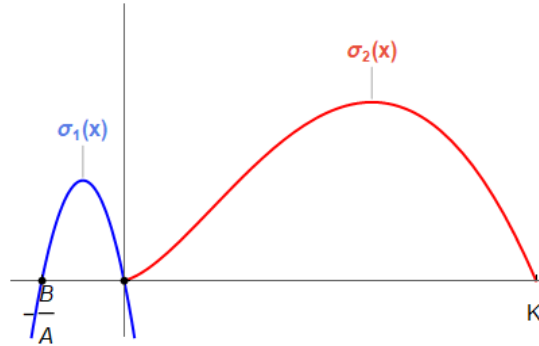


1b. No hay puntos de equilibrio si y sólo si $S_1\gamma_1\alpha_1G'(0) \leq B$.



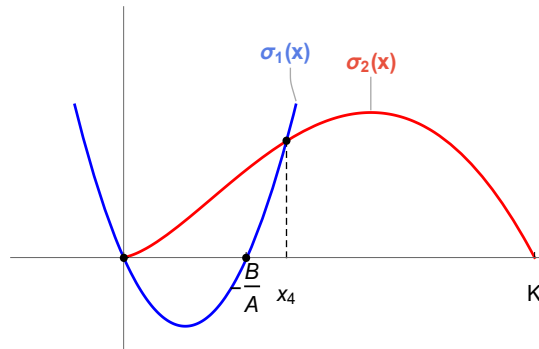
Caso 2: $A < 0$ y $B < 0$. En consecuencia, $-\frac{B}{A} < 0 < K$, no existen puntos de equilibrio para ninguna opción en (3.9).

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

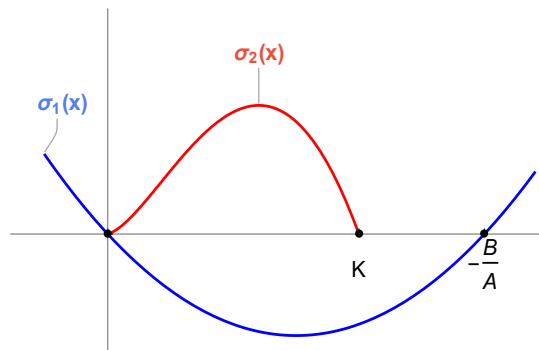


Caso 3: $A > 0$ y $B < 0$. En este caso $-\frac{B}{A} > 0$, se tienen dos opciones.

3a. Existe un punto de equilibrio si sólo si $K > -\frac{B}{A} > 0$.



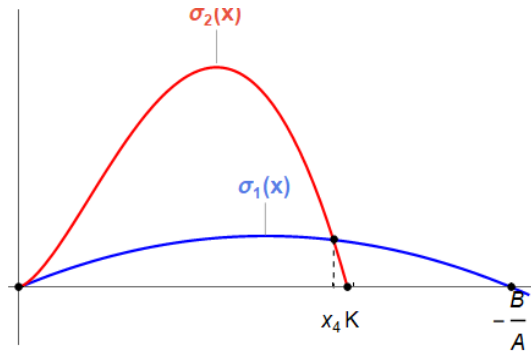
3b. No hay puntos de equilibrio si y sólo si $K < -\frac{B}{A}$.



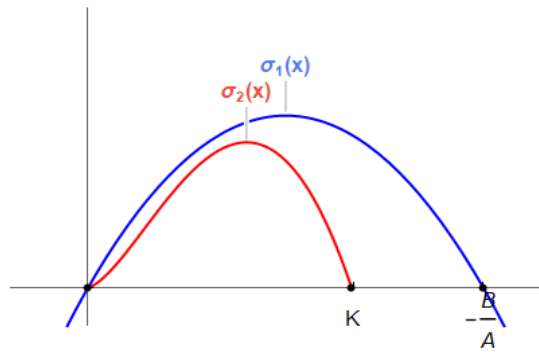
Caso 4: $A < 0$ y $B > 0$. En este caso $-\frac{B}{A} > 0$ y existen 5 posibles opciones.

4a. Si $S_1\gamma_1\alpha_1G'(0) > B$ y $K < -\frac{B}{A}$, entonces existe un punto de equilibrio.

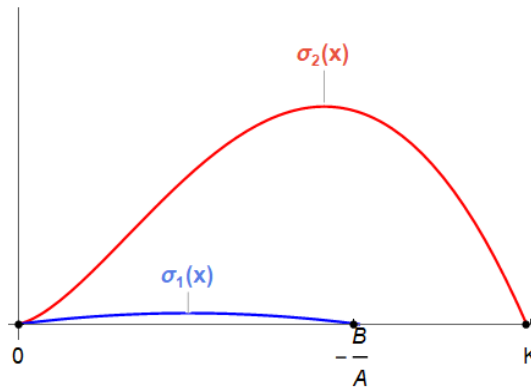
3.3 Existencia de puntos de equilibrio



4b. Si $S_1 \gamma_1 \alpha_1 G'(0) < B$ y $K < -\frac{B}{A}$, entonces no hay puntos de equilibrio.

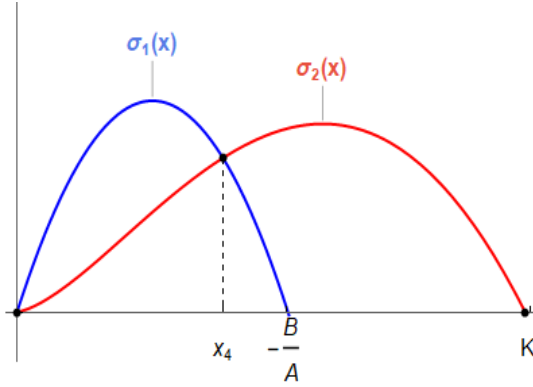


4c. Si $S_1 \gamma_1 \alpha_1 G'(0) > B$ y $K > -\frac{B}{A}$, entonces no hay puntos de equilibrio.



4d. Si $S_1 \gamma_1 \alpha_1 G'(0) < B$ y $K > -\frac{B}{A}$, entonces existe un punto de equilibrio.

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES



Observación 3.1 Es importante imponer la condición $0 < x_2 \leq K$, es decir,

$$x_2 = \frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1} \leq K \quad (3.10)$$

para excluir que $\beta_1 - \rho - d_1 \rightarrow 0^+$, ya que este último puede impedir la existencia de x_2 debido a un eventual aumento en el nivel de intoxicación ρ (aún manteniendo la condición $\beta_1 > \rho + d_1$) que puede ocasionar la extinción de la población $y(t)$. En tal caso, el sistema (3.1) evolucionará hacia el punto de equilibrio $E_1(K, 0, 0)$.

Observación 3.2 Es importante imponer la condición $0 < x_3 \leq K$, es decir

$$x_3 = \frac{\alpha_1 \delta}{S - \delta} \leq K \quad (3.11)$$

para excluir el caso $S - \delta \rightarrow 0^+$ que puede ocasionar la eventual extinción de $z(t)$. En tal caso, el sistema (3.1) evolucionará hacia el punto $E_1(K, 0, 0)$.

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

Estamos interesados en analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x) - \frac{\beta_2 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x} \\ \frac{\beta_1 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1 yz}{\alpha_1 + x} - d_1 y \\ \frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1 yz}{\alpha_1 + x} - \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} := \mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

En este caso, las derivadas parciales de F_1 están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) &= \partial_x F_1(x, y, z) = G'(x) - \frac{\beta_2 \alpha_1 y}{(\alpha_1 + x)^2} - \frac{\gamma \alpha_1 z}{(\alpha_1 + x)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) &= \partial_y F_1(x, y, z) = -\frac{\beta_2 x}{\alpha_1 + x}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) &= \partial_z F_1(x, y, z) = -\frac{\gamma x}{\alpha_1 + x}.\end{aligned}$$

Ahora, las derivadas parciales de F_2 están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) &= \partial_x F_2(x, y, z) = \frac{\beta_1 \alpha_1 y}{(\alpha_1 + x)^2} - \frac{\rho \alpha_1 y}{(\alpha_1 + x)^2} + \frac{\gamma_1 y z}{(\alpha_1 + x)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) &= \partial_y F_2(x, y, z) = \frac{\beta_1 x}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho x}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1 z}{\alpha_1 + x} - d_1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) &= \partial_z F_2(x, y, z) = -\frac{\gamma_1 y}{\alpha_1 + x}.\end{aligned}$$

Además, las derivadas parciales de F_3 están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) &= \partial_x F_3(x, y, z) = \frac{S \alpha_1 z}{(\alpha_1 + x)^2} - \frac{S_1 y z}{(\alpha_1 + x)^2}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) &= \partial_y F_3(x, y, z) = \frac{S_1 z}{\alpha_1 + x}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) &= \partial_z F_3(x, y, z) = \frac{S_1 y}{\alpha_1 + x} + \frac{S x}{\alpha_1 + x} - \delta.\end{aligned}$$

Entonces la matriz Jacobiana $DF := J$ en el punto (x, y, z) viene dada por

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} G'(x) - \frac{\alpha_1 (\beta_2 y + \gamma z)}{(\alpha_1 + x)^2} & -\frac{\beta_2 x}{\alpha_1 + x} & -\frac{\gamma x}{\alpha_1 + x} \\ \frac{(\alpha_1 (\beta_1 - \rho) + \gamma_1 z) y}{(\alpha_1 + x)^2} & \frac{(\beta_1 - \rho) x - \gamma_1 z}{\alpha_1 + x} - d_1 & -\frac{\gamma_1 y}{\alpha_1 + x} \\ \frac{(S \alpha_1 - S_1 y) z}{(\alpha_1 + x)^2} & \frac{S_1 z}{\alpha_1 + x} & \frac{S_1 y + S x}{\alpha_1 + x} - \delta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Ahora procedemos a determinar los signos de los valores propios de la matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio E_0, E_1, E_2, E_3 y E_4 .

Antes de seguir adelante, es importante mencionar un criterio de estabilidad que será útil para el análisis que desarrollaremos a continuación.

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

Criterio de Routh-Hurwitz [47].

Sea P el polinomio $P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ de grado $n = 2, 3$. Las raíces están en la parte izquierda del plano $\mathbb{C}$ si y sólo si los coeficientes del polinomio satisfacen:

(R-H1) $a_1, a_2 > 0$, cuando $n = 2$.

(R-H2) $a_1 > 0, a_3 > 0$ y $a_1 a_2 > a_3$, en el caso $n = 3$.

En otras palabras, un sistema en un punto de equilibrio con ecuación característica $P(s) = 0$ es estable, sólo si P es un polinomio de grado dos satisfaciendo **(R-H1)** o un polinomio de grado tres satisfaciendo **(R-H2)**.

Proposición 3.1 *El punto de equilibrio $E_0 = (0, 0, 0)$ es siempre inestable.*

Demostración. Evaluando el Jacobiano en el punto de equilibrio trivial $E_0 = (0, 0, 0)$ encontramos que

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} G'(0) & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

En este caso, los valores propios de $J(E_0)$ son $\lambda_1 = G'(0) > 0$, $\lambda_2 = -d_1$, $\lambda_3 = -\delta$. Dado que $\lambda_1 > 0$, entonces E_0 es un punto de equilibrio inestable (punto silla). ■

Proposición 3.2 *El punto de equilibrio $E_1 = (K, 0, 0)$ es local asintóticamente estable si existen los parámetros críticos*

$$R_0 = \frac{K(\beta_1 - \rho - d_1)}{d_1 \alpha_1}, \quad R_1 = \frac{(S - \delta)K}{\delta \alpha_1}, \quad (3.13)$$

tales que $R_0 < 1$ y $R_1 < 1$.

Demostración. Evaluando el Jacobiano en el punto de equilibrio $E_1 = (K, 0, 0)$, se tiene que

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} G'(K) & -\frac{\beta_2 K}{\alpha_1 + K} & -\frac{\gamma K}{\alpha_1 + K} \\ 0 & \frac{(\beta_1 - \rho)K}{\alpha_1 + K} - d_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{SK}{\alpha_1 + K} - \delta \end{pmatrix}.$$

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

Se observa que el punto de equilibrio E_1 es asintóticamente estable si los valores propios $\lambda_2 = \frac{(\beta_1 - \rho) K}{\alpha_1 + K} - d_1 < 0$ y $\lambda_3 = \frac{SK}{\alpha_1 + K} - \delta < 0$.

Sabemos que $\lambda_1 = G'(K) < 0$, entonces veamos qué condiciones se requieren para tener $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ y así garantizar la estabilidad de E_1 , entonces

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \frac{(\beta_1 - \rho) K}{\alpha_1 + K} - d_1 < 0 &\Rightarrow K(\beta_1 - \rho - d_1) < d_1 \alpha_1 \\ &\Rightarrow \frac{K(\beta_1 - \rho - d_1)}{d_1 \alpha_1} < 1. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\lambda_3 = \frac{SK}{\alpha_1 + K} - \delta < 0 \Rightarrow \frac{(S - \delta) K}{\delta \alpha_1} < 1.$$

Luego E_1 es local asintóticamente estable si existen los parámetros críticos

$$R_0 = \frac{K(\beta_1 - \rho - d_1)}{d_1 \alpha_1}, \quad R_1 = \frac{(S - \delta) K}{\delta \alpha_1},$$

tales que $R_0 < 1$ y $R_1 < 1$. ■

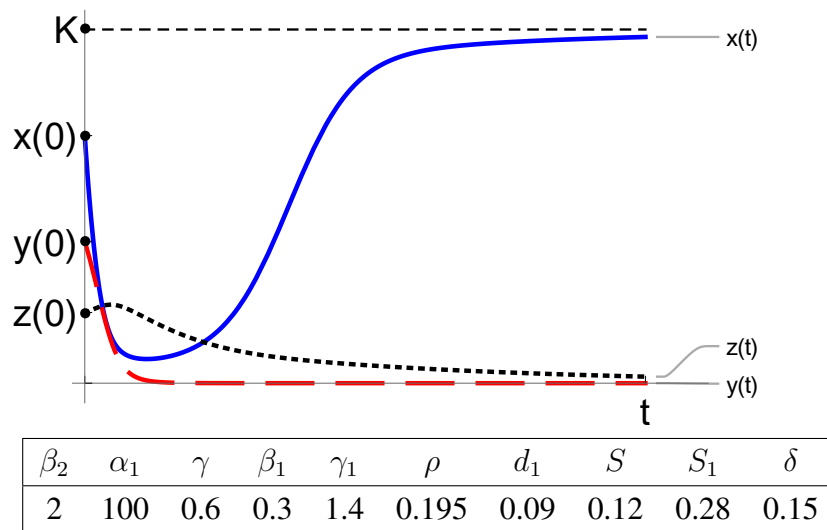


Figura 3.2: Comportamiento asintótico de las soluciones de (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_1 .

En la Figura 3.2 se puede visualizar el comportamiento de las tres trayectorias del sistema (3.1) que son atraídas por el punto de equilibrio $E_1 = (K, 0, 0)$ cuando los parámetros del sistema satisfacen las condiciones $R_0 < 1$ y $R_1 < 1$.

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

Observación 3.3 *La expresión*

$$R_0 = \frac{K(\beta_1 - \rho - d_1)}{d_1 \alpha_1} < 1$$

indica que la población de la presa $x(t)$ no puede soportar la población del depredador intermedio $y(t)$, debido a dos posibles situaciones:

- $\beta_1 < \rho + d_1$ lo cual impide la existencia del otro punto de equilibrio $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ por tener $x_2 < 0$.
 - $\beta_1 - \rho - d_1 \rightarrow 0^+$ lo cual no permite la existencia de $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ por tener $x_2 > K$ (ver Observación 3.1).
- Conviene notar que $R_0 < 1$ es equivalente a $x_2 > K$ (ver (3.10)).*

Observación 3.4 *De otro lado, la condición*

$$R_1 = \frac{(S - \delta) K}{\delta \alpha_1} < 1$$

indica que la población de presa $x(t)$ no puede soportar al depredador $z(t)$, las posibles razones para esto son:

- $S < \delta$ lo cual impide la existencia del punto $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ por tener $x_3 < 0$.
- $S - \delta \rightarrow 0^+$ lo cual no permite la existencia de $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ por tener $x_3 > K$ (ver Observación 3.2).

Conviene notar que $R_1 < 1$ es equivalente a $x_3 > K$ (ver (3.11)).

Proposición 3.3 *El punto de equilibrio $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ existe si $R_0 > 1$. Además, E_2 es local asintóticamente estable, si se cumplen las condiciones:*

$$1) \quad \nu_7 = \frac{Sx_2}{\alpha_1 + x_2} + \frac{S_1 y_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta < 0;$$

$$2) \quad \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + x_2)} G(x_2) > x_2 G'(x_2);$$

e inestable en otro caso.

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

Demostración. Evaluamos la matriz Jacobiana J en el punto $E_2 = (x_2, y_2, 0)$

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} G'(x_2) - \frac{\beta_2 \alpha_1 y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2} & -\frac{\beta_2 x_2}{\alpha_1 + x_2} & -\frac{\gamma x_2}{\alpha_1 + x_2} \\ \frac{(\beta_1 - \rho) \alpha_1 y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2} & \frac{(\beta_1 - \rho) x_2}{\alpha_1 + x_2} - d_1 & -\frac{\gamma_1 y_2}{\alpha_1 + x_2} \\ 0 & 0 & \frac{S_1 y_2 + S x_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta \end{pmatrix}.$$

Con el fin de simplificar los cálculos adoptamos la notación

$$\nu_1 = G'(x_2) - \frac{\beta_2 \alpha_1 y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2}, \quad (3.14)$$

$$\nu_2 = \frac{\beta_2 x_2}{\alpha_1 + x_2}, \quad (3.15)$$

$$\nu_3 = \frac{\gamma x_2}{\alpha_1 + x_2}, \quad (3.16)$$

$$\nu_4 = \frac{\beta_1 \alpha_1 y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2} - \frac{\rho \alpha_1 y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2} = \frac{\alpha_1 (\beta_1 - \rho) y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2}, \quad (3.17)$$

$$\nu_5 = \frac{\beta_1 x_2}{\alpha_1 + x_2} - \frac{\rho x_2}{\alpha_1 + x_2} - d_1 = 0, \quad (3.18)$$

$$\nu_6 = \frac{\gamma_1 y_2}{\alpha_1 + x_2}, \quad (3.19)$$

$$\nu_7 = \frac{S x_2}{\alpha_1 + x_2} + \frac{S_1 y_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta. \quad (3.20)$$

Primero notemos que $\nu_5 = 0$. Para ello recordemos que $x_2 = \frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}$, entonces al reemplazarlo en ν_5 obtenemos que

$$\begin{aligned} \nu_5 &= (\beta_1 - \rho) \frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1 + \frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}} - d_1 \\ &= (\beta_1 - \rho) \left(\frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1} \right) \left(\frac{\beta_1 - \rho - d_1}{\alpha_1 (\beta_1 - \rho)} \right) - d_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene que

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_6 \\ 0 & 0 & \nu_7 \end{pmatrix}$$

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

luego el polinomio característico viene dado por

$$P_2(\lambda) = (\nu_7 - \lambda)[\lambda^2 - \nu_1\lambda + \nu_2\nu_4].$$

Por lo tanto, E_2 es **inestable** en el caso en que $\nu_7 = \frac{Sx_2}{\alpha_1 + x_2} + \frac{S_1y_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta > 0$.

Ahora en el caso en que $\nu_7 < 0$, el criterio de **Routh-Hurwitz** para un polinomio de segundo grado implica que E_2 es **estable** si y sólo si los coeficientes $-\nu_1 > 0$

y $\nu_2\nu_4 > 0$. Notemos que $\nu_2 > 0$ y recordemos que $\beta_1 - \rho > d_1 > 0$ entonces $\nu_4 > 0$, así $\nu_2\nu_4 > 0$. El caso $-\nu_1 > 0$ se da siempre que $\frac{\beta_2\alpha_1y_2}{(\alpha_1 + x_2)^2} > G'(x_2)$ o

lo que es equivalente $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_2}G(x_2) > x_2G'(x_2)$. ■

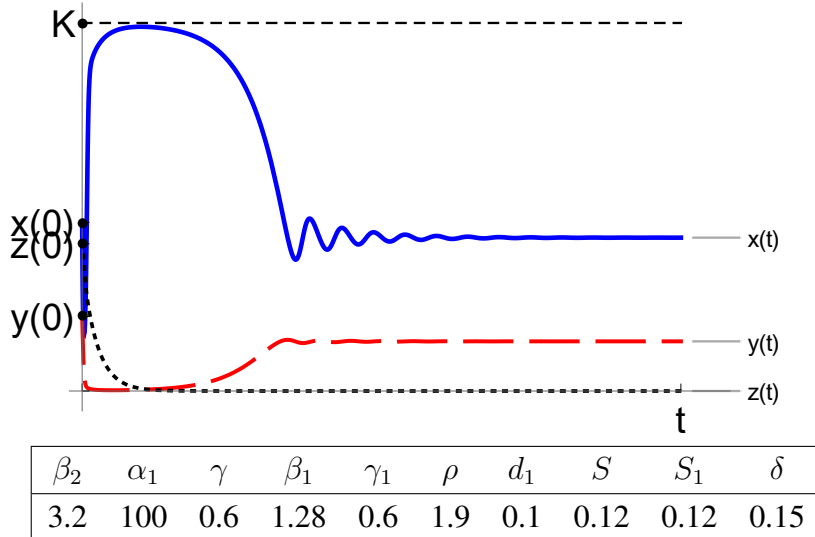


Figura 3.3: Comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_2 .

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

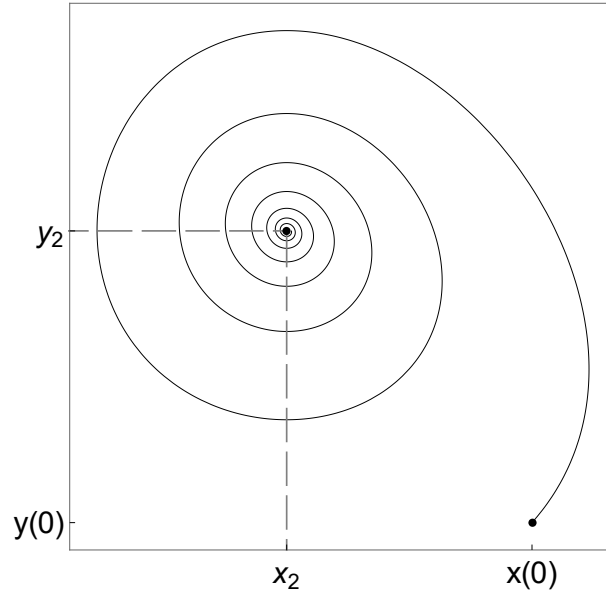


Figura 3.4: Retrato de fase del punto de equilibrio E_2 en $\mathbb{R}^2_+$.

En la Figura 3.3 se puede observar el comportamiento de las soluciones del sistema (3.1) las cuales son atraídas por el punto de equilibrio $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ cuando los parámetros del sistema satisfacen las condiciones $\nu_7 < 0$ y $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_2} G(x_2) > x_2 G'(x_2)$. De igual forma, en la Figura 3.4 se puede ver el retrato de fase correspondiente al punto E_2 cuando los parámetros del sistema cumplen las condiciones mencionadas.

Observación 3.5 *Conviene notar que la condición*

$$\nu_7 = \frac{Sx_2}{\alpha_1 + x_2} + \frac{S_1 y_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta < 0$$

básicamente garantiza la extinción de la población $z(t)$ cuando el sistema (3.1) evoluciona hacia el punto $E_2 = (x_2, y_2, 0)$. Esta condición implica que, en el punto $E_2 = (x_2, y_2, 0)$, la tasa de crecimiento de $z(t)$, expresada por $\frac{Sx_2 + S_1 y_2}{\alpha_1 + x_2}$, es menor que su respectiva tasa de mortalidad δ .

Observación 3.6 *De otro lado, para cumplir la condición*

$$\frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + x_2)} G(x_2) > x_2 G'(x_2) \quad (3.21)$$

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

sería suficiente (más no necesario) que $x_2 \geq \bar{x}$ donde

$$\bar{x} = \arg \max_{x \in [0, K]} G(x)$$

ya que en este caso $G'(x_2) \leq 0$ mientras que $\frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + x_2)} G(x_2) > 0$.

Por ende, $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ será estable siempre que $x_2 \geq \bar{x}$ lo cual implica la abundancia de la población de presa $x(t)$.

La condición $\frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + x_2)} G(x_2) > G'(x_2)$ puede cumplirse cuando $x_2 < \bar{x}$ pero en este caso x_2 debe ser lo suficientemente grande para que $G'(x_2)$ sea lo suficientemente pequeño. Por ejemplo, si $G(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$, entonces la condición (3.21) se cumple para todo $x_2 > \frac{K - \delta}{2}$. En este caso, $\bar{x} = \frac{K}{2}$ lo cual implica que $\frac{K - \delta}{2} < x_2 < \frac{K}{2}$ también satisface (3.21) así como $K > x_2 > \frac{K}{2}$.

Proposición 3.4 El punto de equilibrio $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ es local asintóticamente estable si cumple las siguientes condiciones:

$$1) \ b_4 = \frac{(\beta_1 - \rho)x_3}{\alpha_1 + x_3} - \frac{\gamma_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} - d_1 < 0;$$

$$2) \ \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_3} G(x_3) > x_3 G'(x_3);$$

e inestable en otro caso.

Demostración. Evaluamos ahora la matriz Jacobiana (3.12) en el punto $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ donde estamos suponiendo que $S > \delta$ (garantizando así la positividad de x_3) y obtenemos

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} G'(x_3) - \frac{\gamma \alpha_1 z_3}{(\alpha_1 + x_3)^2} & -\frac{\beta_2 x_3}{\alpha_1 + x_3} & -\frac{\gamma x_3}{\alpha_1 + x_3} \\ 0 & \frac{(\beta_1 - \rho)x_3 - \gamma_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} - d_1 & 0 \\ \frac{S \alpha_1 z_3}{(\alpha_1 + x_3)^2} & \frac{S_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} & \frac{S x_3}{\alpha_1 + x_3} - \delta \end{pmatrix}$$

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

Para simplificar los cálculos consideramos la siguiente notación

$$b_1 = G'(x_3) - \frac{\gamma\alpha_1 z_3}{(\alpha_1 + x_3)^2}, \quad (3.22)$$

$$b_2 = \frac{\beta_2 x_3}{\alpha_1 + x_3}, \quad (3.23)$$

$$b_3 = \frac{\gamma x_3}{\alpha_1 + x_3}, \quad (3.24)$$

$$b_4 = \frac{\beta_1 x_3}{\alpha_1 + x_3} - \frac{\rho x_3}{\alpha_1 + x_3} - \frac{\gamma_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} - d_1, \quad (3.25)$$

$$b_5 = \frac{S\alpha_1 z_3}{(\alpha_1 + x_3)^2}, \quad (3.26)$$

$$b_6 = \frac{S_1 z_3}{\alpha_1 + x_3}, \quad (3.27)$$

$$b_7 = \frac{Sx_3}{\alpha_1 + x_3} - \delta = 0. \quad (3.28)$$

Dado que $x_3 = \frac{\delta\alpha_1}{S-\delta}$, $z_3 = \frac{S}{\gamma\delta}G\left(\frac{\delta\alpha_1}{S-\delta}\right)$, observemos que $b_7 = 0$ puesto que

$$b_7 = \frac{Sx_3}{\alpha_1 + x_3} - \delta = S \left(\frac{\delta\alpha_1}{S-\delta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1 + \frac{\delta\alpha_1}{S-\delta}} \right) - \delta = \delta - \delta = 0.$$

Entonces la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio E_3 es de la siguiente forma

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & b_4 & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el polinomio característico está dado por

$$P_3(\lambda) = (b_4 - \lambda)[\lambda^2 - b_1\lambda + b_3b_5].$$

Si $b_4 = \frac{(\beta_1 - \rho)x_3}{\alpha_1 + x_3} - \frac{\gamma_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} - d_1 > 0$ entonces E_3 es **inestable**.

La condición $b_4 = \frac{(\beta_1 - \rho)x_3}{\alpha_1 + x_3} - \frac{\gamma_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} - d_1 > 0$ es poco factible desde el punto de vista biológico ya que b_4 representa la tasa intrínseca de crecimiento del

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

depredador intermedio $y(t)$ (ver (3.1b)) en el punto $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ donde esta especie desaparece. Por lo tanto, se debe tener $b_4 < 0$. Esta conclusión es similar a la Observación 3.5.

Supongamos ahora que $b_4 < 0$. Dado que $b_3 b_5 > 0$, entonces el criterio de **Rout-Hurwitz** implica que E_3 es **estable** cuando $-b_1 > 0$. Es decir, E_3 es estable si $b_4 < 0$ y $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_3} G(x_3) > x_3 G'(x_3)$, con $S > \delta$. De igual forma que en la Observación 3.6, la condición 2) se cumple para valores suficientemente grandes de x_3 (abundancia de la presa). ■

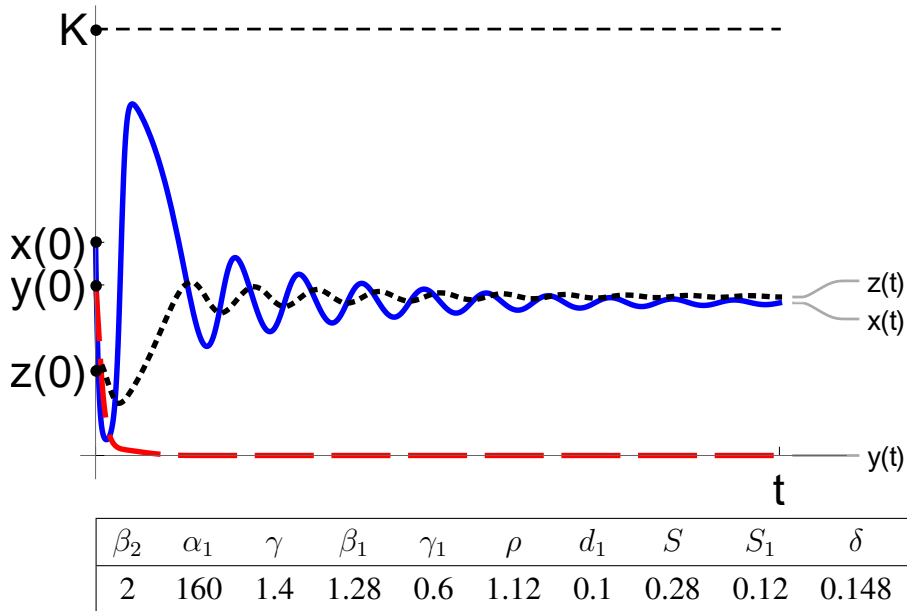


Figura 3.5: Comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_3 .

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

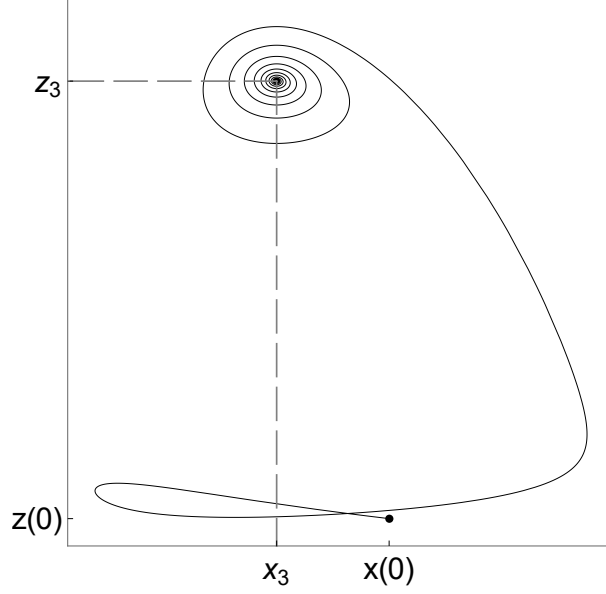


Figura 3.6: Retrato de fase del punto E_3 en $\mathbb{R}_+^2$.

En la Figura 3.5 se puede ver el comportamiento de las trayectorias (soluciones) del sistema (3.1) las cuales son atraídas por el punto de equilibrio $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ cuando los parámetros del sistema satisfacen las condiciones $b_4 < 0$ y $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_3} G(x_3) > x_3 G'(x_3)$. De la misma forma, en la Figura 3.6 se puede visualizar el retrato de fase correspondiente al punto E_3 cuando los parámetros del sistema cumplen las condiciones mencionadas.

Proposición 3.5 *El punto de equilibrio $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$ con $x_4 > 0$, $y_4 > 0$, $z_4 > 0$ existe, si $x_2 < x_4$ y $\beta_1 > \rho + d_1$. Además, E_4 es local asintóticamente estable si $\eta_1, \eta_3 > 0$ y $\eta_1 \eta_2 > \eta_3$, e inestable en otro caso.*

Demostración. Evaluando ahora la matriz Jacobiana J en el punto de equilibrio $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$, es decir que $J(E_4)$ está dada por

$$\begin{pmatrix} G'(x_4) - \frac{\alpha_1 (\beta_2 y_4 - \gamma z_4)}{(\alpha_1 + x_4)^2} & -\frac{\beta x_4}{\alpha_1 + x_4} & -\frac{\gamma x_4}{\alpha_1 + x_4} \\ \frac{(\alpha_1 (\beta_1 - \rho) + \gamma_1 z_4) y_4}{(\alpha_1 + x_4)^2} & \frac{(\beta_1 - \rho) x_4 - \gamma_1 z_4}{\alpha_1 + x_4} - d_1 & -\frac{\gamma_1 y_4}{\alpha_1 + x_4} \\ \frac{(S \alpha_1 - S_1 y_4) z_4}{(\alpha_1 + x_4)^2} & \frac{S_1 z_4}{\alpha_1 + x_4} & \frac{S_1 y_4 + S x_4}{\alpha_1 + x_4} - \delta \end{pmatrix}$$

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

Consideremos ahora las constantes a_i dadas por

$$\begin{aligned}
 a_1 &= G'(x_4) - \frac{\beta_2 \alpha_1 y_4}{(\alpha_1 + x_4)^2} - \frac{\gamma \alpha_1 z_4}{(\alpha_1 + x_4)^2}, \\
 a_2 &= \frac{\beta_2 x_4}{\alpha_1 + x_4}, \\
 a_3 &= \frac{\gamma x_4}{\alpha_1 + x_4}, \\
 a_4 &= \frac{(\beta_1 - \rho) \alpha_1 y_4}{(\alpha_1 + x_4)^2} + \frac{\gamma_1 y_4 z_4}{\alpha_1 + x_4}, \\
 a_5 &= \frac{\beta_1 x_4}{\alpha_1 + x_4} - \frac{\rho x_4}{\alpha_1 + x_4} - \frac{\gamma_1 z_4}{\alpha_1 + x_4} - d_1, \\
 a_6 &= \frac{\gamma_1 y_4}{\alpha_1 + x_4}, \\
 a_7 &= \frac{S \alpha_1 z_4}{(\alpha_1 + x_4)^2} - \frac{S_1 y_4 z_4}{(\alpha_1 + x_4)^2}, \\
 a_8 &= \frac{S_1 z_4}{\alpha_1 + x_4}, \\
 a_9 &= \frac{S x_4}{\alpha_1 + x_4} + \frac{S_1 y_4}{\alpha_1 + x_4} - \delta.
 \end{aligned}$$

Recordemos que $y_4 = \frac{1}{S_1} (\delta \alpha_1 - x_4(S - \delta))$ y $z_4 = \frac{1}{\gamma_1} (x_4(\beta_1 - d_1 - \rho) - d_1 \alpha_1)$, al reemplazar estos valores en a_5 y a_9 se obtiene que $a_5 = 0$ y $a_9 = 0$. En efecto

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{1}{\alpha_1 + x_4} (\beta_1 x_4 - \rho x_4 - \gamma_1 z_4) - d_1 \\
 &= \frac{1}{\alpha_1 + x_4} \left(\beta_1 x_4 - \rho x_4 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} (x_4(\beta_1 - d_1 - \rho) - d_1 \alpha_1) \right) - d_1 \\
 &= \frac{1}{\alpha_1 + x_4} (d_1 x_4 + d_1 \alpha_1 - d_1 \alpha_1 - d_1 x_4) = 0.
 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 a_9 &= \frac{1}{\alpha_1 + x_4} \left(S x_4 + \frac{S_1}{S_1} (\delta \alpha_1 - x_4(S - \delta)) \right) - \delta \\
 &= \frac{1}{\alpha_1 + x_4} (S x_4 + \delta \alpha_1 - x_4 S + \delta x_4) - \delta = \delta - \delta = 0.
 \end{aligned}$$

Luego la matriz Jacobiana en E_4 está dada por

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_4 & 0 & -a_6 \\ a_7 & a_8 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Análisis de estabilidad de los puntos estacionarios

donde el polinomio característico es de la forma

$$P_4(\lambda) = \lambda^3 - a_1\lambda^2 + (a_2a_4 + a_3a_7 + a_6a_8)\lambda - a_6(a_1a_8 + a_2a_7) + a_3a_4a_8.$$

Ahora para simplificar la expresión anterior, definamos η_1, η_2 y η_3 como

$$\eta_1 = -a_1, \quad \eta_2 = a_2a_4 + a_3a_7 + a_6a_8, \quad \eta_3 = -a_6(a_1a_8 + a_2a_7) + a_3a_4a_8. \quad (3.29)$$

En consecuencia, podemos reescribir P_4 como

$$P_4(\lambda) = \lambda^3 + \eta_1\lambda^2 + \eta_2\lambda + \eta_3. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, del criterio de **Rout-Hurwitz**, E_4 es **asintóticamente estable** si $\eta_1, \eta_3 > 0$ y $\eta_1\eta_2 > \eta_3$, en otro caso es **inestable**. ■

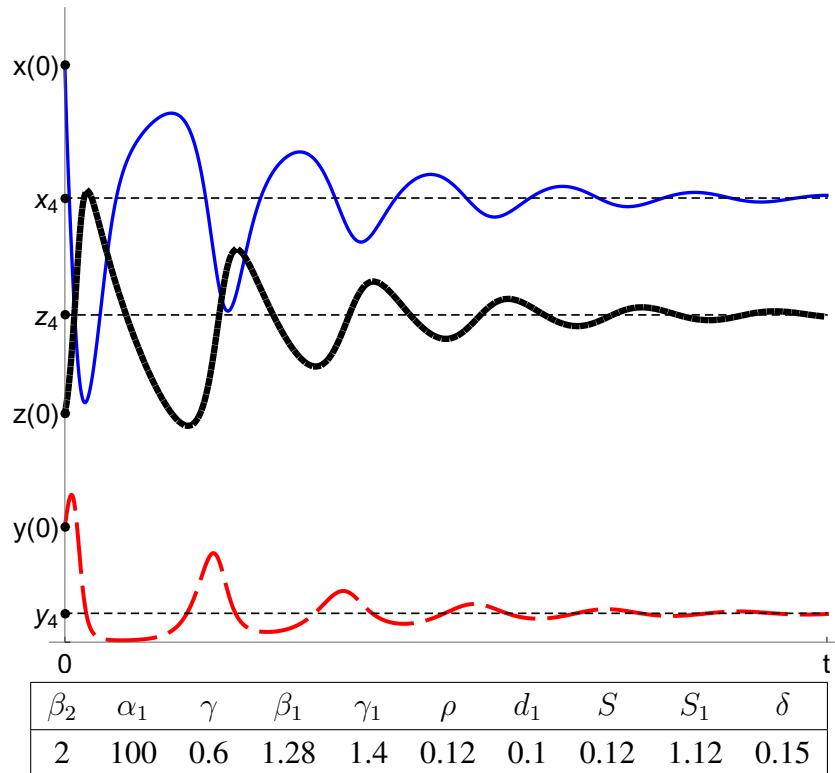


Figura 3.7: Comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.1) atraídas por el punto de equilibrio E_4 .

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

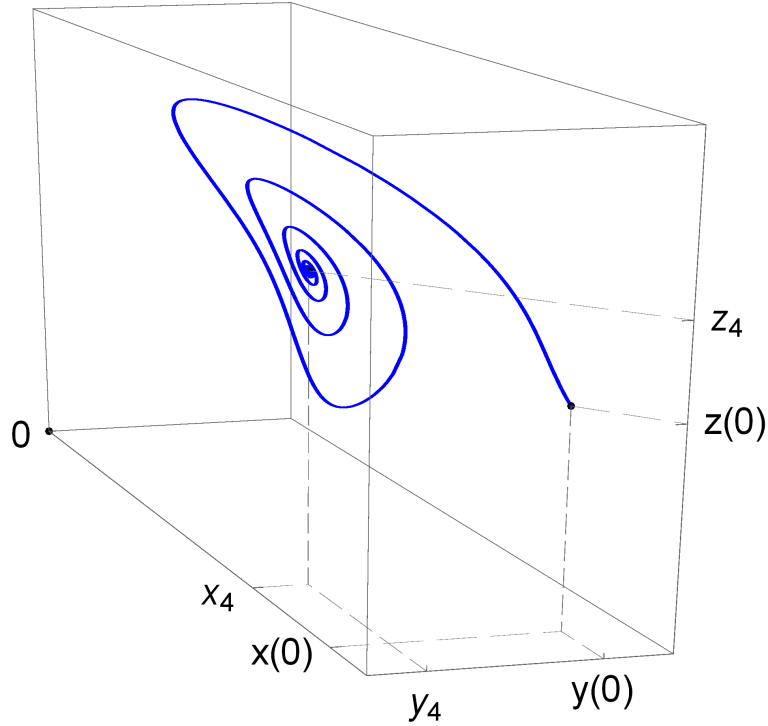


Figura 3.8: Retrato de fase del punto de equilibrio E_4 en $\mathbb{R}_+^3$.

En la Figura 3.7 se puede apreciar el comportamiento de las soluciones del sistema (3.1) las cuales son atraídas por el punto de equilibrio $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$ cuando los parámetros del sistema satisfacen las condiciones $\eta_1, \eta_3 > 0$ y $\eta_1\eta_2 > \eta_3$. De esta misma manera, en la Figura 3.8 se puede visualizar el retrato de fase correspondiente al punto E_3 en $\mathbb{R}_+^3$ cuando los parámetros del sistema cumplen las condiciones mencionadas.

3.5 Sensibilidad respecto al parámetro ρ

En esta sección ilustraremos los cambios que presenta el estado estacionario de coexistencia (x_4, y_4, z_4) del sistema (3.1), respecto a pequeñas variaciones en el parámetro ρ , el cual como se mencionó al inicio de este capítulo es un parámetro que representa la contaminación por parte de la población $x(t)$ que afecta directa

3.5 Sensibilidad respecto al parámetro ρ

e indirectamente las poblaciones $y(t)$ y $z(t)$. Panja *et al* en el trabajo [26] realizaron un análisis de bifurcación respecto al parámetro ρ , pero en esta tesis vamos a estudiar el caso donde otro parámetro referente a la extracción o explotación del depredador principal $z(t)$ puede ocasionar bifurcaciones y así provocar la desaparición de la coexistencia de las tres especies. Dicho análisis se presenta en el Capítulo 4 de este trabajo, donde se estudia la persistencia y sostenibilidad del sistema (3.1) bajo la explotación pesquera de la especie $z(t)$, y se proponen políticas o estrategias para la pesca sostenible.

Aún cuando los cambios en el nivel de contaminación ρ puede inducir bifurcaciones (ver [26]), dichos cambios alteran los niveles estacionarios de coexistencia. Es decir, afecta los valores de coordenadas x_4, y_4, z_4 de punto estacionario E_4 . Esto, a su vez, puede tener impacto sobre el diseño de estrategias para la pesca sostenible, cuando se introduce la explotación del recurso pesquero $z(t)$.

Por el momento, veremos qué tipo de repercusión podrán tener las variaciones en ρ sobre los niveles estacionarios x_4, y_4, z_4 del punto de equilibrio E_4 de coexistencia de tres especies.

Primero recordemos que

$$y_4 = \frac{1}{S_1} [\alpha_1 \delta - (S - \delta)x_4].$$

Es decir, y_4 no depende directamente del parámetro ρ y se tiene que

$$\frac{\partial y_4}{\partial \rho} = 0.$$

Esto implica que la coordenada y_4 del punto estacionario de coexistencia E_4 es bastante robusta a cambios en ρ cuando este punto existe y es estable. Lo anterior se puede visualizar en la Figura 3.9 donde se presentan las trayectorias $y(t; \rho)$ del sistema (3.1) con $\rho \in [0, 3\rho^*]$ donde $\rho^* = 0.12$ correspondiente al valor de referencia dado en la tabla que acompaña la Figura 3.7

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

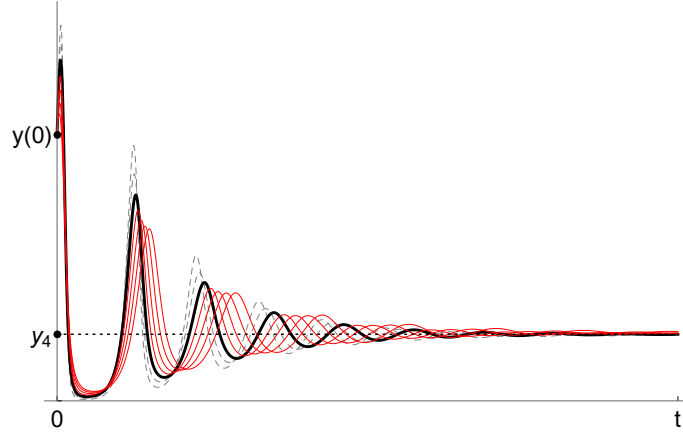


Figura 3.9: Comportamiento asintótico de $y(t; \rho)$ con diferentes valores de $\rho \in [0, 3\rho^*]$: Líneas grises discontinuas para $\rho < \rho^*$, línea negra gruesa para $\rho = \rho^*$, y líneas rojas para $\rho > \rho^*$.

Recordemos ahora que

$$z_4 = \frac{1}{\gamma_1} [(\beta_1 - \rho - d_1)x_4 - \alpha_1 d_1]$$

notando que z_4 sí tiene dependencia directa de ρ , y se tiene que

$$\frac{\partial z_4}{\partial \rho} = -\frac{1}{\gamma_1} x_4 < 0.$$

Es decir, el valor estacionario de z en el punto de coexistencia estable $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$ se reduce cuando el nivel de contaminación ρ aumenta. Lo anterior se puede visualizar en la Figura 3.10 donde se presentan las trayectorias $z(t; \rho)$ del sistema (3.1) con $\rho \in [0, 3\rho^*]$ y $\rho^* = 0.12$.

3.5 Sensibilidad respecto al parámetro ρ

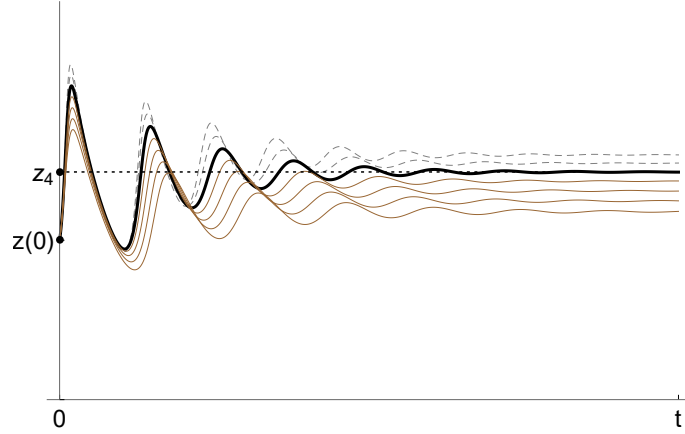


Figura 3.10: Comportamiento asintótico de $z(t; \rho)$ con diferentes valores de $\rho \in [0, 3\rho^*]$: Líneas grises discontinuas para $\rho < \rho^*$, línea negra gruesa para $\rho = \rho^*$, y líneas cafés para $\rho > \rho^*$.

Por último, para analizar los cambios en el nivel estacionario de la presa x_4 , en el punto de coexistencia estable $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$ inducidos por variaciones en ρ , recordemos que x_4 es solución de la ecuación (3.6a) la cual se puede reescribir como

$$\zeta(x; \rho) = (\alpha_1 + x)G(x) - x[\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho)] = 0. \quad (3.31)$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{dx}{d\rho} = - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \Big|_{x=x_4}}{\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=x_4}}$$

donde

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = -\gamma x \frac{\partial z}{\partial \rho} \Big|_{x=x_4} = \frac{\gamma}{\gamma_1} x_4^2 > 0.$$

De otro lado,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = G(x) + (\alpha_1 + x)G'(x) - (\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho)) - x \left(\beta_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} \right). \quad (3.32)$$

Ahora determinemos el signo de $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ en $x = x_4$. Partiendo del supuesto que E_4 es

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

estable, se debe cumplir en él la condición $\eta_1 = -a_1 > 0$, la cual es equivalente a

$$(\alpha_1 + x)G'(x) - \frac{\alpha_1(\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho))}{\alpha_1 + x} < 0$$

cuando $x = x_4, y = y_4, z = z_4$. Además, en virtud de (3.31) se cumple la relación

$$G(x) - \frac{x(\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho))}{\alpha_1 + x} = 0$$

para $(x, y, z) = (x_4, y_4, z_4)$.

Por último, observamos que en $x = x_4$

$$\beta_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} > 0$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{S - \delta}{S_1} > 0, \text{ por ser } S - \delta < 0. \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\beta_1 - \rho - d_1}{\gamma_1} > 0, \text{ por ser } \beta_1 - \rho - d_1 > 0. \end{aligned}$$

Conviene recordar que $S < \delta$ y $\beta_1 - \rho > d_1$ son condiciones necesarias para la persistencia del depredador intermedio $y(t)$ que garantizan la positividad de y_4 y existencia del estado estacionario de coexistencia E_4 .

Con todo lo anterior podemos reescribir la relación (3.32) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= G(x) + (\alpha_1 + x)G'(x) - \frac{\alpha_1 + x}{\alpha_1 + x} [\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho)] - x \left(\beta_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ G(x) - \frac{(\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho))x}{\alpha_1 + x} &- x \left(\beta_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} \right) + G'(x)(\alpha_1 + x) \\ &- \frac{\alpha_1(\beta_2 y(x) + \gamma z(x; \rho))}{\alpha_1 + x}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_4} = 0 - x_4 \left[\frac{\beta_2}{S_1}(S - \delta) + \frac{\gamma}{\gamma_1}(\beta_1 - \rho - d_1) \right] + (\alpha_1 + x)a_1 < 0.$$

Por ende, tenemos que

$$\frac{dx}{d\rho} = - \frac{\left. \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right|_{x=x_4}}{\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=x_4}} > 0.$$

Esto implica que el aumento en el nivel de contaminación ρ eleva el valor estacionario de x_4 , y esto se puede ver en la Figura 3.11 donde se presentan las trayectorias $x(t; \rho)$ del sistema (3.1) con $\rho \in [0, 3\rho^*]$ siendo $\rho^* = 0.12$.

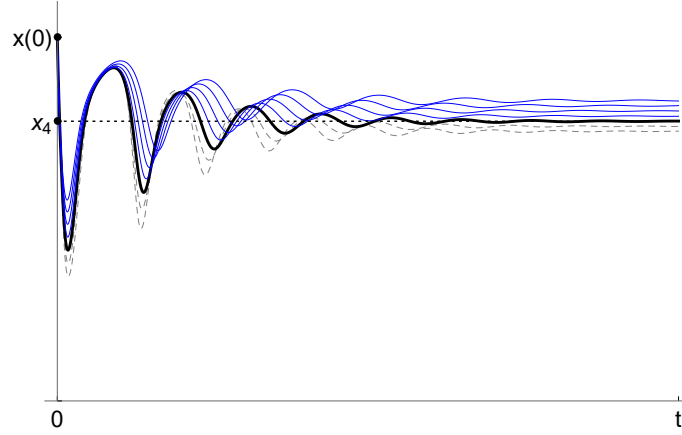


Figura 3.11: Comportamiento asintótico de $x(t; \rho)$ con diferentes valores de $\rho \in [0, 3\rho^*]$: Líneas grises discontinuas para $\rho < \rho^*$, línea negra gruesa para $\rho = \rho^*$, y líneas azules para $\rho > \rho^*$.

3.6 Conclusiones

En este capítulo consideramos la interacción de una especie comercial con otras dos especies. Es decir, se analizó la existencia de estados estacionarios y la estabilidad de ellos en un sistema que involucra una cadena alimenticia. En este contexto, el modelo bioeconómico (3.1) propuesto en este capítulo permite enfocarse en la dependencia de las soluciones estacionarias sobre condiciones en los parámetros, así como analizar las respuestas de equilibrio a los cambios en los parámetros.

Nuestro objetivo era proponer un modelo más general al propuesto por P. Panja & S. K. Mondal [26], en el cual logramos mostrar que para condiciones iniciales en (3.1) no negativas las soluciones del sistema (3.1) son no negativas y están definidas para todo $t \geq 0$. Además, dadas condiciones biológicas en los parámetros, se mostró la existencia de un conjunto $\mathcal{K}$ compacto que atrae a cualquier conjunto acotado en $\mathbb{R}_+^3$. Lo anterior nos garantiza la existencia de las soluciones del sistema en el medio de estudio.

3. MODELO BIOLÓGICO DE COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES

Encontramos condiciones suficientes para garantizar la existencia de puntos de equilibrio para el sistema (3.1) dadas en las condiciones de los parámetros críticos R_0 y R_1 definidos por (3.13) en la Sección 3.4.

El punto de equilibrio de coexistencia de las tres especies existe si $R_0 > 1$ y la componente $x_4 > x_2$. Además, es asintóticamente estable cuando los parámetros del sistema satisfacen las condiciones $\eta_1, \eta_3 > 0$ y $\eta_1\eta_2 > \eta_3$ definidas por (3.29) en la Sección 3.4.

Por ende, realizamos un análisis de sensibilidad en el punto de equilibrio de coexistencia de las especies respecto a los cambios en el nivel de contaminación ρ el cual se ve directamente afectado por el cambio climático, aumento de Dióxido de carbono (CO_2) en el océano, contaminación, entre otros. Este parámetro altera los niveles estacionarios de coexistencia y hasta puede inducir bifurcaciones (ver [26]). Cabe resaltar que las variaciones de ρ también alteran las densidades estacionarias de las tres especies en su equilibrio de coexistencia. Se obtuvo que cuando hay aumentos en el nivel de contaminación ρ éste eleva el valor estacionario de la presa (x_4) y reduce el valor estacionario de la especie comercial (z_4), manteniendo casi inalterado el nivel del valor estacionario de la especie intermedia (y_4) en el equilibrio de coexistencia (E_4). Dado que en el estudio que realizamos en este capítulo no incluimos las capturas a la especie comercial, no hablamos en este caso de estrategias para la pesca sostenible.

Coexistencia de Tres Especies con Capturas

4.1 Sistema marino de tres especies con capturas

En esta sección mostraremos como se afecta la dinámica natural del sistema considerando la explotación de recursos biológicos pesqueros. Daremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de puntos de equilibrio para el nuevo sistema, el cual incluye una función de recolección que afecta directamente a la población z . La función de recolección $h(\cdot)$ es una función de tipo Cobb-Douglas la cual está dada por

$$h(t) = u^\alpha z^\beta \quad (4.1)$$

donde α, β son parámetros positivos. El modelo de coexistencia de tres especies con captura viene dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x) - \frac{\beta_2 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\beta_1 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1 yz}{\alpha_1 + x} - d_1 y \\ \frac{dz}{dt} = \frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1 yz}{\alpha_1 + x} - \delta z - u^\alpha z^\beta \end{cases} \quad (4.2)$$

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

Este tipo de modelos se han estudiado extensivamente por economistas como modelos de crecimiento de capital y consumo (ver Clark [4]). Es importante señalar que la dinámica del sistema con capturas aún en el caso sencillo en que u es una cantidad constante positiva es muy distinta al caso sin capturas ($u = 0$). De hecho, para u suficientemente grande, algunos de los puntos cambian de estable (inestable) a inestable (estable), inclusive algunos puntos de equilibrio pueden desaparecer. Por esta razón, restringimos nuestro análisis al caso cuando $\alpha = \beta = 1$.

En esta sección estudiaremos el caso cuando $u > 0$ representa el esfuerzo de pesca constante medido en unidades adecuadas, como por ejemplo la fracción de biomasa a extraer por unidad de tiempo. Vamos a observar que el tamaño de u puede cambiar la existencia y la naturaleza de los puntos de equilibrio.

Con $\alpha = \beta = 1$ y $u = \text{const} > 0$, el sistema (4.2) se puede reescribir como

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - \frac{\beta_2 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x} \quad (4.3a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta_1 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1 yz}{\alpha_1 + x} - d_1 y \quad (4.3b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1 yz}{\alpha_1 + x} - (\delta + u)z \quad (4.3c)$$

donde la única diferencia con el sistema original (3.1) consiste en la tasa de mortalidad del depredador $z(t)$ aumentada de δ a $\delta + u$, ($u > 0$) por las capturas.

Vamos a denotar los puntos de equilibrio del sistema (4.3) por E_i^u con $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Así mismo podemos observar que

$$E_0 = E_0^u, \quad E_1 = E_1^u, \quad E_2 = E_2^u,$$

dado que las coordenadas de dichos puntos no son afectadas por los cambios en la ecuación (4.3c) inducido por $\delta \rightarrow \delta + u$, sin embargo, la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema E_1^u y E_2^u cambia dependiendo del tamaño de u , excepto para el punto de equilibrio trivial E_0^u .

De otro lado las coordenadas de los puntos E_3 y E_4 si son afectadas por las capturas, es decir que $E_3 \neq E_3^u$, $E_4 \neq E_4^u$, en el caso en que $u > 0$.

Consideremos el punto $E_3^u = (x_3(u), 0, z_3(u))$ con $S > \delta + u$ el cual es un punto de equilibrio para valores apropiados $x_3(u) \neq 0$ y $z_3(u) \neq 0$. En este caso,

4.1 Sistema marino de tres especies con capturas

tenemos que

$$G(x_3) - \frac{\gamma x_3 z_3}{\alpha_1 + x_3} = 0 \quad (4.4a)$$

$$\frac{S x_3 z_3}{\alpha_1 + x_3} - (\delta + u) z_3 = 0. \quad (4.4b)$$

De las ecuaciones (4.4a)-(4.4b), concluimos que

$$x_3(u) = \frac{\alpha_1(\delta + u)}{S - (\delta + u)}, \quad z_3(u) = \frac{(\alpha_1 + x_3)G(x_3)}{\gamma x_3} = \frac{S}{\gamma(\delta + u)} G\left(\frac{\alpha_1(\delta + u)}{S - (\delta + u)}\right). \quad (4.5)$$

Así que para $S > \delta + u$, el punto

$$E_3^u = \left(\frac{\delta(\alpha_1 + u)}{S - (\delta + u)}, 0, \frac{S}{\gamma(\delta + u)} G\left(\frac{\alpha_1(\delta + u)}{S - (\delta + u)}\right) \right)$$

es un punto de equilibrio.

Finalmente, el punto $E_4^u = (x_4(u), y_4(u), z_4(u))$ es un punto de equilibrio para valores apropiados $x_4(u)$, $y_4(u)$, y $z_4(u)$ dados por

$$z_4(u) = \frac{1}{\gamma_1} (x_4(\beta_1 - \rho - d_1) - d_1 \alpha_1),$$

$$y_4(u) = \frac{1}{S_1} (\alpha_1(\delta + u) - x_4(S - (\delta + u)))$$

Observemos como en la ecuación (3.7) del Capítulo 3, $x_4(u)$ debe satisfacer la ecuación

$$S_1 \gamma_1 (\alpha_1 + x_4) G(x_4) = A_u x_4^2 + B_u x_4$$

donde

$$A_u = \gamma S_1 (\beta_1 - d_1 - \rho) - \beta_2 \gamma_1 (S - (\delta + u))$$

$$B_u = \beta_2 \gamma_1 \alpha_1 (\delta + u) - \gamma S_1 d_1 \alpha_1.$$

A continuación, resumimos el análisis de existencia de puntos de equilibrio, el cual es análogo al caso sin capturas ($u = 0$) estudiado en el capítulo 3:

Caso 1: $A_u > 0$ y $B_u > 0$. Aquí $-\frac{B_u}{A_u} < 0 < K$. Por lo tanto, existe un único punto de equilibrio si y sólo si $S_1 \gamma_1 \alpha G'(0) > B_u$.

Caso 2: $A_u < 0$ y $B_u < 0$. En donde, $-\frac{B_u}{A_u} < 0 < K$ y no existen puntos de equilibrio.

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

Caso 3: $A_u > 0$ y $B_u < 0$. En este caso existe un punto de equilibrio si sólo si $K > -\frac{B_u}{A_u} > 0$.

Caso 4: $A_u < 0$ y $B_u > 0$. En donde se tiene que $-\frac{B_u}{A_u} > 0$.

4a. Si $S_1\gamma_1\alpha G'(0) > B_u$ y $K < -\frac{B_u}{A_u}$, entonces existe un punto de equilibrio.

4b. Si $S_1\gamma_1\alpha G'(0) < B_u$ y $K < -\frac{B_u}{A_u}$, entonces no hay puntos de equilibrio.

4c. Si $S_1\gamma_1\alpha G'(0) > B_u$ y $K > -\frac{B_u}{A_u}$, entonces no hay puntos de equilibrio.

4d. Si $S_1\gamma_1\alpha G'(0) < B_u$ y $K > -\frac{B_u}{A_u}$, entonces existe un punto de equilibrio.

Observación 4.1 Notemos qué si u es suficientemente grande, entonces $A_u > 0$ y $B_u > 0$. Más aún, es posible que $S_1\gamma_1\alpha_1 G'(0) < B_u$. Por lo tanto, como en el **Caso 1** sin capturas ($u = 0$), concluimos que no existen puntos de equilibrio. En otras palabras, existe una dinámica muy distinta en el caso con capturas cuando u es muy grande, puesto que se eliminan los puntos de equilibrio E_3^u y E_4^u .

4.2 Impacto de capturas sobre el comportamiento asintótico del sistema

En esta sección, vamos a analizar brevemente qué alteraciones se pueden esperar en el comportamiento asintótico del sistema (4.3) con capturas en comparación con el sistema original (3.1) sin capturas.

Supongamos primero que el sistema original (3.1) sin capturas ($u = 0$) evoluciona hacia el punto de equilibrio $E_1 = (K, 0, 0)$. En este caso, los parámetros deben satisfacer las relaciones (ver Proposición 3.2):

$$R_0 = \frac{K(\beta_1 - d_1 - \rho)}{d_1\alpha_1} < 1, \quad R_1 = \frac{(S - \delta)K}{\delta\alpha_1} < 1.$$

Cuando se introducen capturas $u > 0$, el valor del parámetro δ aumenta a $(\delta + u)$ y se tiene

$$R_{1,u} = \frac{(S - \delta - u)K}{(\delta + u)\alpha_1} < \frac{(S - \delta)K}{\delta\alpha_1} = R_1 < 1.$$

Por lo tanto, la introducción de capturas al sistema no altera el comportamiento asintótico del sistema y éste sigue evolucionando hacia el punto de equilibrio $E_1 = (K, 0, 0) = E_1^u$.

4.2 Impacto de capturas sobre el comportamiento asintótico del sistema

Supongamos ahora que $E_1 = (K, 0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable del sistema original (3.1) sin capturas, es decir, se cumple la condición

$$R_1 = \frac{(S - \delta)K}{\delta\alpha_1} > 1.$$

Ahora, al introducir las capturas ($u > 0$), se puede notar que R_1 es decreciente con respecto a δ puesto que

$$\frac{dR_1}{d\delta} = -\frac{SK}{\alpha_1\delta^2} < 0.$$

Es decir, R_1^u decrece cuando δ aumenta. Además, en este caso se puede llegar a tener

$$R_{1,u} = \frac{(S - \delta - u)K}{(\delta + u)\alpha_1} < 1 < \frac{(S - \delta)K}{\delta\alpha_1} = R_1$$

para valores suficientemente grandes de $u > 0$. En otras palabras, la introducción de capturas puede transformar $E_1 = (K, 0, 0)$ de inestable a estable y así cambiar la evolución asintótica del sistema.

Consideremos ahora el punto de equilibrio $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ del sistema original (3.1) sin capturas ($u = 0$). Según los cálculos presentados en la Sección 3.3, las coordenadas de dicho punto son:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}, \\ y_2 &= \frac{(\alpha_1 + x_2)G(x_2)}{\beta_2 x_2} = \frac{(\beta_1 - \rho)}{d_1\beta_2} G\left(\frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - \rho - d_1}\right). \end{aligned}$$

Dichas coordenadas no dependen del parámetro δ que es afectado por las capturas ($\delta \rightarrow \delta + u$) y, por lo anterior, se tiene que

$$E_2^u = (x_2, y_2, 0) = E_2.$$

Es decir, la introducción de las capturas ($u > 0$), no altera las coordenadas de este punto de equilibrio.

Supongamos que $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ es un punto de equilibrio estable del sistema original (3.1) sin capturas ($u = 0$). En este caso, se deben cumplir las condiciones

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

dadas en la Proposición 3.3, es decir:

$$\nu_7 = \frac{Sx_2}{\alpha_1 + x_2} + \frac{S_1y_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta < 0 \quad (4.6a)$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_2} \right) G(x_2) > x_2 G'(x_2). \quad (4.6b)$$

Cuando se introducen las capturas $u > 0$, la condición (4.6b) no se altera ya que x_2 no depende del parámetro δ el cual es afectado por las capturas ($\delta \rightarrow \delta + u$). De otro lado, la condición (4.6a) se transforma en

$$\nu_{7,u} = \frac{Sx_2}{\alpha_1 + x_2} + \frac{S_1y_2}{\alpha_1 + x_2} - \delta - u < 0$$

y esta condición es válida para todo $u > 0$ siempre y cuando (4.6a) se cumpla.

Por lo tanto, si $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ es estable para el sistema (3.1) sin capturas, este punto sigue siendo estable en el sistema (4.3) con capturas.

De otro lado, es posible que E_2 sea un punto de equilibrio inestable del sistema original (3.1) sin capturas ($u = 0$) y que E_2^u sea un punto de equilibrio estable del sistema (4.3) con capturas ($u > 0$). Esto puede ocurrir cuando se tiene

$$\nu_{7,u} < 0 < \nu_7$$

para valores suficientemente grandes de u .

Lo anterior concuerda con el sentido común: la extracción sustancial de la especie $z(t)$ puede causar la exterminación de esta especie haciendo que el sistema (4.3) evolucione hacia $E_2^u = E_2$.

Ahora, consideremos $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ cuyas coordenadas dependen de δ :

$$x_3 = \frac{\alpha_1 \delta}{S - \delta}$$

$$z_3 = \frac{\alpha_1 + x_3}{\gamma x_3} G(x_3) = \frac{S}{\gamma \delta} G\left(\frac{\delta \alpha_1}{S - \delta}\right). \quad (4.7)$$

Es decir, cuando $\delta \rightarrow \delta + u$, $u > 0$ los valores estacionarios x_3 , z_3 se alteran y se tiene que

$$E_3^u = (x_3(u), 0, z_3(u)) \neq (x_3, 0, z_3) = E_3.$$

4.2 Impacto de capturas sobre el comportamiento asintótico del sistema

Debemos recordar que la condición necesaria para la existencia de E_3 es $S - \delta > 0$. Luego E_3^u existe siempre y cuando $u > 0$ es tal que $S - (\delta + u) > 0$.

El punto $E_3^u = (x_3(u), 0, z_3(u))$ desaparece cuando $S - (\delta + u) \rightarrow 0$ con el aumento en u . Es decir, la introducción de las capturas $u > 0$ puede inducir a bifurcaciones y cambiar la estabilidad del punto $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ del sistema original (3.1) donde no se consideran las capturas.

Para entender qué tipo de cambios pueden causar las capturas en el estado estacionario E_3 , notamos que

$$\frac{dx_3}{d\delta} = \frac{\alpha_1 S}{(S - \delta)^2} > 0.$$

Es decir, el valor estacionario $x_3(u)$ de E_3^u aumenta cuando δ crece (de δ a $\delta + u$, $u > 0$).

De la fórmula (4.7) también tenemos:

$$\frac{dz_3}{d\delta} = \frac{dz_3}{dx_3} \frac{dx_3}{d\delta} = \frac{1}{\gamma x_3^2} (x_3(\alpha_1 + x_3)G'(x_3) - \alpha_1 G(x_3)) \frac{dx_3}{d\delta}. \quad (4.8)$$

Supongamos que el punto de equilibrio $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ del sistema original sin capturas (3.1) es estable, entonces son válidas las condiciones estipuladas en la Proposición 3.4, es decir:

1. $b_4 = \frac{(\beta_1 - \rho)x_3}{\alpha_1 + x_3} - \frac{\gamma_1 z_3}{\alpha_1 + x_3} - d_1 < 0;$
2. $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + x_3} G(x_3) > x_3 G'(x_3)$

y el polinomio característico en $E_3 = (x_3, 0, z_3)$ viene dado por

$$P_3(\lambda) = (b_4 - \lambda)(\lambda^2 - b_1\lambda + b_3b_5) = 0. \quad (4.9)$$

donde $b_1 = G'(x_3) - \frac{\alpha_1 G(x_3)}{x_3(\alpha_1 + x_3)} < 0$ (en virtud del ítem 2. dado en la parte de arriba)

$$b_3 = \frac{\gamma x_3}{\alpha_1 + x_3} > 0, \quad b_5 = \frac{\alpha_1 S z_3}{(\alpha_1 + x_3)^2} > 0.$$

De acuerdo con la fórmula (4.8), el aumento en δ (de δ a $\delta + u$, $u > 0$) reducirá el valor estacionario z_3 a $z_3(u)$, pero E_3^u seguirá siendo estable si se mantienen las relaciones $S - (\delta + u) > 0$ y

$$b_{4,u} = \frac{(\beta_1 - \rho)x_3(u) - \gamma_1 z_3(u)}{\alpha_1 + x_3(u)} - d_1 < 0.$$

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

Para valores más grandes de u , es decir, tales que

$$S - (\delta + u) \leq 0,$$

el punto $E_3^u = (x_3(u), 0, z_3(u))$ dejará de existir y el sistema (4.3) con capturas evolucionará hacia otro estado estacionario. Es decir, en $\bar{u} = S - \delta$ existe una bifurcación “silla-nodo” dado que $z_3(u) \rightarrow 0$ implica que

$$b_{5,u} = \frac{\alpha_1 S z_3(u)}{(\alpha_1 + x_3(u))^2} \rightarrow 0$$

y el polinomio característico (4.9) tendrá un valor propio real igual a cero.

De otro lado, sabemos que las capturas $u > 0$ reducen el nivel estacionario $z_3(u)$ y aumentan $x_3(u)$. Por lo tanto, aún cuando se tiene $b_4 < 0$ en el sistema original sin capturas (3.1), se puede llegar a tener

$$b_{4,u} = \frac{(\beta_1 - \rho)x_3(u) - \gamma_1 z_3(u)}{\alpha_1 + x_3(u)} - d_1 \geq 0$$

cuando $u > 0$ crece, pero cumple la relación $S - (\delta + u) > 0$. Esta situación puede inducir otra bifurcación del tipo “silla-nodo” ocasionando que uno de los valores propios del polinomio (4.9) cruce por cero. En este caso, el punto de equilibrio E_3^u no desaparecerá, pero se volverá inestable y el sistema (4.3) evolucionará hacia otro estado estacionario $(E_1, E_2, \text{ o } E_4^u)$ sujeto al cumplimiento de condiciones para la estabilidad local dadas en las Propositiones 3.2, 3.3, 3.5 al reemplazar δ por $\delta + u$. También existe la posibilidad de que la introducción de las capturas desate un ciclo límite (estable o inestable) alrededor del punto E_3^u .

Los casos que acabamos de analizar brevemente no son de mucho interés en la práctica porque la estabilidad de los puntos estacionarios $E_1^u = E_1$, $E_2^u = E_2$ y E_3^u no es la deseada en términos biológicos.

Lo que sí es de interés es conservar la coexistencia estable de las tres especies introduciendo las capturas del depredador principal y así llevar a cabo una pesca sostenible sin arruinar el ecosistema.

4.3 Conservación de coexistencia de especies bajo capturas de $z(t)$

El objetivo principal de esta sección consiste en identificar un valor máximo de capturas $u_0 > 0$ que permite sostener la coexistencia estable de las tres especies.

Supongamos que el sistema original (3.1) sin capturas ($u = 0$) evoluciona hacia el punto estacionario de coexistencia $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$, es decir, los parámetros del sistema (3.1) cumplen las condiciones dadas en la Proposición 3.5.

Al iniciar la explotación del recurso pesquero $z(t)$, se desea satisfacer dos criterios:

1. Extraer la cantidad máxima posible del recurso (por unidad de tiempo) para maximizar la renta de pesca.
2. Mantener la coexistencia de las tres especies para garantizar la sostenibilidad de la pesquería.

En términos matemáticos, se desea identificar un valor “crítico” de capturas $u_0 > 0$ tal que el sistema (4.3) evolucione hacia el estado estacionario estable de coexistencia $E_4^u = (x_4(u), y_4(u), z_4(u))$ para $0 < u < u_0$, mientras que para $u > u_0$ el punto E_4^u se vuelve inestable, y se desata un ciclo límite alrededor de E_4^u .

Lo anterior implica que u_0 es exactamente el valor crítico de $\delta + u_0$ donde ocurre la bifurcación de Hopf del sistema (4.3) cuando δ aumenta a $\delta + u_0$.

4.3.1 Identificación de una bifurcación de Hopf

Los resultados sobre la existencia de bifurcación de Hopf están basados en el análisis de los valores propios de la matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio del sistema. En el caso particular de un sistema de orden tres como el considerado en este trabajo, el criterio para la existencia de bifurcación de Hopf se puede presentar de la siguiente forma.

Consideremos un sistema

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}_\delta(\mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, \quad \delta \in \mathbb{R}_+ \quad (4.10)$$

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

con un punto de equilibrio $(\mathbf{X}_0, \delta_0)$ y $\mathbf{F} \in C^\infty$. Según el trabajo [48], existe una curva suave de puntos de equilibrio $(\mathbf{X}(\delta), \delta)$ con $\mathbf{X}(\delta_0) = \mathbf{X}_0$, bajo los siguientes supuestos:

(HS1) La matriz Jacobiana $D_{\mathbf{X}}\mathbf{F}_{\delta_0}(\mathbf{X}_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y la otra raíz es negativa.

En el caso en que exista una curva suave de puntos de equilibrio $(\mathbf{X}(\delta), \delta)$ con $\mathbf{X}(\delta_0) = \mathbf{X}_0$ y que los valores propios imaginarios puros $\lambda(\delta)$ y $\bar{\lambda}(\delta)$ de $J(\delta) = D_{\mathbf{X}}\mathbf{F}_\delta(\mathbf{X})$ varían de forma suave con δ en $\delta = \delta_0$, entonces existe una bifurcación simple de Hopf, cuando

(HS2) $\frac{d}{d\delta}(Re(\lambda(\delta_0))) \neq 0$.

Wei-Min Liu en [48] estableció un criterio sencillo para mostrar la existencia de bifurcaciones de Hopf simple, utilizando el criterio de Routh-Hurwitz sin hacer uso de los valores propios. En efecto, en el caso $n = 3$, si $P(\cdot, \delta)$ es el polinomio característico de la matriz Jacobiana $J(\delta)$ dado por

$$P(\lambda, \delta) = \lambda^3 + \eta_1(\delta)\lambda^2 + \eta_2(\delta)\lambda + \eta_3(\delta),$$

entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1 (*W. Liu [48]*) *Supongamos que existe una curva suave de puntos de equilibrio $(\mathbf{X}(\delta), \delta)$ con $\mathbf{X}(\delta_0) = \mathbf{X}_0$ para el sistema (4.10). Las condiciones (HS1)-(HS2) para una bifurcación simple de Hopf son equivalentes a las siguientes condiciones sobre los coeficientes del polinomio característico $P(\lambda, \delta)$:*

(CH1) $\eta_1(\delta_0) > 0, \quad D_1(\delta_0) = \eta_2(\delta_0) > 0,$

$$D_2(\delta_0) = \eta_1(\delta_0)\eta_2(\delta_0) - \eta_3(\delta_0) = 0,$$

(CH2) $\frac{dD_2(\delta_0)}{d\delta} \neq 0.$

Utilizando el criterio establecido en el Teorema 4.1, es posible mostrar que el punto de equilibrio de coexistencia para el sistema (4.3) exhibe una bifurcación simple de Hopf con respecto al parámetro δ .

4.3 Conservación de coexistencia de especies bajo capturas de $z(t)$

4.3.2 Bifurcación de Hopf en E_4^u

Recordemos que las coordenadas del punto estacionario de coexistencia dependen de δ cuando este parámetro es alterado por las capturas, es decir $E_4^\delta = (x_4(\delta), y_4(\delta), z_4(\delta))$. Dichas coordenadas vienen definidas mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} G(x_4(\delta)) - \frac{\beta_2 x_4(\delta) y_4(\delta)}{\alpha_1 + x_4(\delta)} - \frac{\gamma x_4(\delta) z_4(\delta)}{\alpha_1 + x_4(\delta)} &= 0, \\ y_4(\delta) &= \frac{1}{S_1} ((\delta + u)\alpha_1 - x_4(\delta)(S - \delta - u)), \\ z_4(\delta) &= \frac{1}{\gamma_1} ((\beta_1 - d_1 - \rho)x_4(\delta) - d_1\alpha_1). \end{aligned}$$

Además, para cada δ , los coeficientes η_i , $i = 1, 2, 3$ del polinomio característico (3.28) correspondiente a E_4^δ también depende de δ :

$$\begin{aligned} \eta_1(\delta) &= -a_1(\delta), \\ \eta_2(\delta) &= a_2(\delta)a_4(\delta) + a_3(\delta)a_7(\delta) + a_6(\delta)a_8(\delta), \\ \eta_3(\delta) &= -a_6(\delta)[a_1(\delta)a_8(\delta) + a_2(\delta)a_7(\delta)] + a_3(\delta)a_4(\delta)a_8(\delta), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1(\delta) &= G'(x_4(\delta)) - \frac{\beta_2 \alpha_1 y_4(\delta)}{(\alpha_1 + x_4(\delta))^2} - \frac{\gamma \alpha_1 z_4(\delta)}{(\alpha_1 + x_4(\delta))^2}, \\ a_2(\delta) &= \frac{\beta_2 x_4(\delta)}{\alpha_1 + x_4(\delta)}, \\ a_3(\delta) &= \frac{\gamma x_4(\delta)}{\alpha_1 + x_4(\delta)}, \\ a_4(\delta) &= \frac{(\beta_1 - \rho)\alpha_1 y_4(\delta)}{(\alpha_1 + x_4(\delta))^2} + \frac{\gamma_1 y_4(\delta) z_4(\delta)}{\alpha_1 + x_4(\delta)}, \\ a_6(\delta) &= \frac{\gamma_1 y_4(\delta)}{\alpha_1 + x_4(\delta)}, \\ a_7(\delta) &= \frac{S \alpha_1 z_4(\delta)}{(\alpha_1 + x_4(\delta))^2} - \frac{S_1 y_4(\delta) z_4(\delta)}{(\alpha_1 + x_4(\delta))^2}, \\ a_8(\delta) &= \frac{S_1 z_4}{\alpha_1 + x_4(\delta)}, \end{aligned}$$

de acuerdo con lo descrito en la Proposición 3.5 y su respectiva demostración.

En adelante utilizaremos la notación $x_4(\delta_0)$, $y_4(\delta_0)$ y $z_4(\delta_0)$ con $\delta_0 = \delta + u$ para poder identificar el valor crítico de las capturas $u_0 > 0$ que induce una bifurcación

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

de Hopf en el sistema (4.3). Esto último lo haremos aplicando el Teorema 4.1 al sistema (4.3).

Para comenzar vamos a establecer bajo qué condiciones se puede tener la desigualdad $a_1(\delta_0) < 0$. De la definición de a_1 , tenemos que garantizar que

$$\begin{aligned} a_1(\delta_0) &= G'(x_4(\delta_0)) - \frac{\beta_2 \alpha_1 y_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} - \frac{\gamma \alpha_1 z_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} \\ &= G'(x_4(\delta_0)) - \frac{\alpha_1 G(x_4(\delta_0))}{x_4(\delta_0)(\alpha_1 + x_4(\delta_0))} < 0, \end{aligned}$$

lo cual se garantiza cuando $G'(x_4(\delta_0)) \leq 0$ es decir, cuando $x_4(\delta_0) > \bar{x}$ donde $\bar{x}$ fue definido en la Observación 3.6 como

$$\bar{x} = \arg \max_{x \in [0, K]} G(x).$$

Por lo tanto, la condición $a_1(\delta_0) < 0$ es válida en el caso en que $x_4(\delta_0) \in [\bar{x}, K]$.

Vamos a mostrar que $\eta_3(\delta_0) > 0$. Si $x_4(\delta_0), y_4(\delta_0), z_4(\delta_0)$ existen (es decir, son positivas) entonces tenemos para $\beta_1 > \rho$ las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_2(\delta_0) &= \frac{\beta_2 x_4(\delta_0)}{\alpha_1 + x_4(\delta_0)} > 0, \quad a_3(\delta_0) = \frac{\gamma x_4(\delta_0)}{\alpha_1 + x_4(\delta_0)} > 0, \\ a_4(\delta_0) &= \frac{(\beta_1 - \rho) \alpha_1 y_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} + \frac{\gamma_1 y_4(\delta_0) z_4(\delta_0)}{\alpha_1 + x_4(\delta_0)} > 0, \\ a_6(\delta_0) &= \frac{\gamma_1 y_4(\delta_0)}{\alpha_1 + x_4(\delta_0)} > 0, \quad a_8(\delta_0) = \frac{S_1 z_4(\delta_0)}{\alpha_1 + x_4(\delta_0)} > 0, \end{aligned}$$

Más aún, se puede ver directamente que para $S - \delta_0 < 0$ se cumple

$$a_7(\delta_0) = \frac{S \alpha_1 z_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} - \frac{S_1 y_4(\delta_0) z_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} = \frac{z_4(\delta_0)}{\alpha_1 + x_4(\delta_0)} (S - \delta_0) < 0.$$

De este último hecho y dado que $a_1(\delta_0) < 0$ concluimos directamente que

$$\eta_3(\delta_0) = -a_6(\delta_0) [a_1(\delta_0) a_8(\delta_0) + a_2(\delta_0) a_7(\delta_0)] + a_3(\delta_0) a_4(\delta_0) a_8(\delta_0) > 0. \quad (4.11)$$

Ahora, vamos a ver que si $\gamma_1 > \gamma$, entonces $\eta_2(\delta_0) > 0$. Observemos que

$$\eta_2(\delta_0) = a_2(\delta_0) a_4(\delta_0) + a_3(\delta_0) a_7(\delta_0) + a_6(\delta_0) a_8(\delta_0) = a_2(\delta_0) a_4(\delta_0) + \tilde{\eta}_2(\delta_0),$$

4.3 Conservación de coexistencia de especies bajo capturas de $z(t)$

donde

$$\tilde{\eta}_2(\delta_0) = a_6(\delta_0)a_8(\delta_0) + a_3(\delta_0)a_7(\delta_0).$$

Un cálculo directo muestra que si $\gamma_1 > \gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_2(\delta_0) &= \frac{z_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} (S_1\gamma_1 y_4(\delta_0) + \gamma(S - \delta_0)x_4(\delta_0)) \\ &= \frac{z_4(\delta_0)}{(\alpha_1 + x_4(\delta_0))^2} (\gamma_1\delta_0\alpha_1 - (S - \delta_0)(\gamma_1 - \gamma)x_4(\delta_0)) > 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por lo tanto, $\eta_2(\delta_0) > 0$, siempre que $\gamma_1 > \gamma$.

De la discusión previa y aplicando el Teorema 4.1 de Liu [48] tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1 *Suponga que $\gamma_1 > \gamma$ y sea $E_4^\delta = (x_4(\delta), y_4(\delta), z_4(\delta))$ el equilibrio de coexistencia del sistema (4.3) modificado por la variabilidad del parámetro δ ($\delta \rightarrow \delta + u$, $u > 0$). Entonces, el sistema (4.3) exhibe una bifurcación simple de Hopf en $\delta_0 = \delta + u_0$, si se cumplen las condiciones:*

1. $x_4(\delta_0) \in [\bar{x}, K]$
2. $D_2(\delta_0) = \eta_1(\delta_0)\eta_2(\delta_0) - \eta_3(\delta_0) = 0$
3. $\frac{dD_2}{d\delta} \neq 0$.

Demostración. De la condición $x_4(\delta_0) \in [\bar{x}, K]$, se obtiene que $\eta_1(\delta_0) = -a_1(\delta_0) > 0$ y también que $\eta_3(\delta_0) > 0$ en virtud de la fórmula (4.11). Cuando $\gamma_1 > \gamma$, por la fórmula (4.12) tenemos que $\eta_2(\delta_0) > 0$.

Además, si $\delta_0 = \delta + u > \delta$ es una raíz simple de

$$D_2(\delta) = \eta_1(\delta)\eta_2(\delta) - \eta_3(\delta) = 0,$$

es decir, se cumple que

$$\left. \frac{dD_2}{d\delta} \right|_{\delta=\delta_0} \neq 0,$$

el Teorema 4.1 nos asegura que el sistema (4.3) exhibe una bifurcación simple de Hopf en $\delta_0 = \delta + u_0$, con $u_0 > 0$. ■

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

La Proposición 4.1 ofrece un método numérico para encontrar el valor crítico $\delta_0 = \delta + u_0$ del parámetro de bifurcación, y los respectivos cálculos se presentan a continuación.

Para identificar numéricamente el valor crítico $\delta_0 = \delta + u_0$, utilizamos la función logística $G(x) = r_1 x (1 - \frac{x}{K})$, junto con los parámetros explícitos que vienen dados en la siguiente tabla:

K	r_1	β_2	α_1	γ	β_1	γ_1	ρ	d_1	S	S_1	δ
500	1.5	2	100	0.6	1.28	1.4	0.12	0.1	0.12	1.12	0.15

Tabla 4.1: Valores explícitos de los parámetros.

Recordemos que, en este caso $\bar{x} = \frac{K}{2} = 250$ y $x_4(\delta_0) = 289,448 > \bar{x}$.

Los valores dados en esta tabla cumplen la condición $\gamma_1 > \gamma$ y para dichos valores el punto estacionario de coexistencia $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$ en ausencia de capturas ($u = 0$) existe y es local asintóticamente estable, es decir, se cumplen las condiciones dadas en la Proposición 3.5.

Cuando se introducen las capturas ($\delta \rightarrow \delta + u$, $u \in [0, \frac{1}{2}]$) podemos visualizar cómo se alteran las coordenadas $x_4(\delta + u)$, $y_4(\delta + u)$, $z_4(\delta + u)$ y los coeficientes del polinomio característico $P_4(\lambda, \delta)$ al variar $u \in [0, \frac{1}{2}]$ (ver Figuras 4.1 y 4.2).

A continuación presentamos las gráficas de las funciones $a_1(\delta + u) = -\eta_1(\delta + u)$, $\eta_2(\delta + u)$, $\eta_3(\delta + u)$, con el propósito de verificar que efectivamente tenemos que

$$a_1(\delta + u) = -\eta_1(\delta + u) < 0, \quad \eta_2(\delta + u) > 0, \quad \eta_3(\delta + u) > 0.$$

4.3 Conservación de coexistencia de especies bajo capturas de $z(t)$

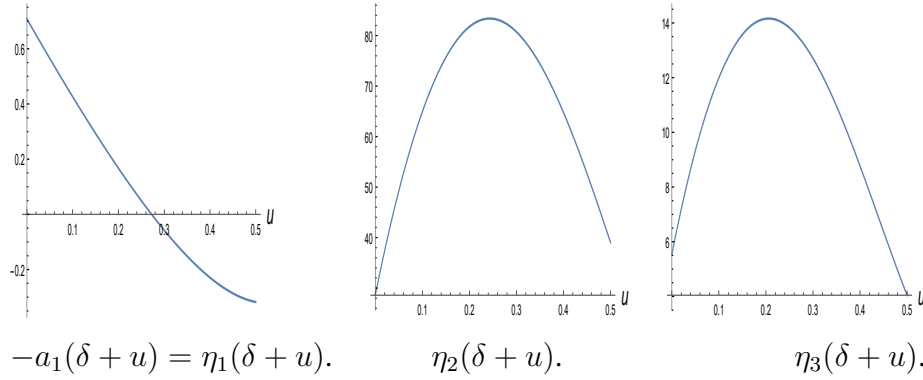


Figura 4.1: Gráficas de $\eta_i(\delta + u)$, $i = 1, 2, 3$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$.

También, podemos graficar $D_2(\delta + u) = \eta_1(\delta + u)\eta_2(\delta + u) - \eta_3(\delta + u)$ así como su derivada $\frac{dD_2}{d\delta}$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$ (ver Figura 4.3). De estas gráficas podemos identificar la raíz u_0 de $D_2(\delta + u) = 0$ como $u \approx 0.197314$ que cumple la condición $\left. \frac{dD_2}{d\delta} \right|_{\delta+u_0} \neq 0$ donde $\delta = 0.15$ (ver Tabla 4.1).

Además, la Figura 4.4 demuestra que para $u \in [0, u_0)$ se cumple que $\eta_1(\delta + u) > 0$, $\eta_3(\delta + u) > 0$, $D_2(\delta + u) = \eta_1(\delta + u)\eta_2(\delta + u) - \eta_3(\delta + u) > 0$ lo cual implica que el equilibrio de coexistencia con $u < u_0$ permanece local asintóticamente estable.

De otro lado, para $u > u_0$ la condición $D_2(\delta + u) < 0$ implica que E_4 deja de ser asintóticamente estable. Es decir, es el valor crítico de las capturas, donde ocurre una bifurcación simple de Hopf.

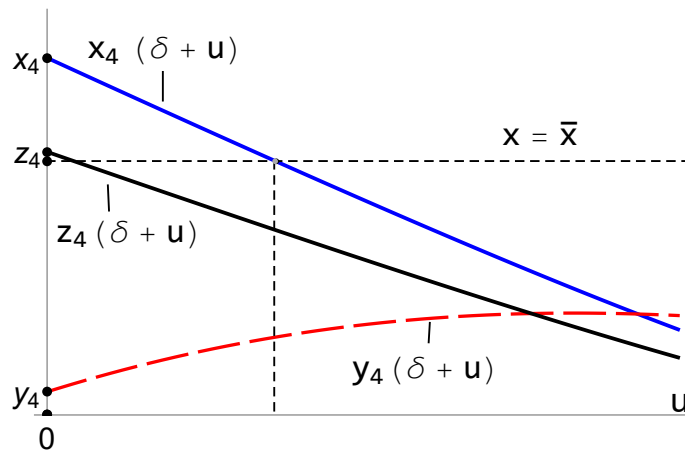


Figura 4.2: Gráfica de $x_4(\delta + u)$, $y_4(\delta + u)$, $z_4(\delta + u)$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$.

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

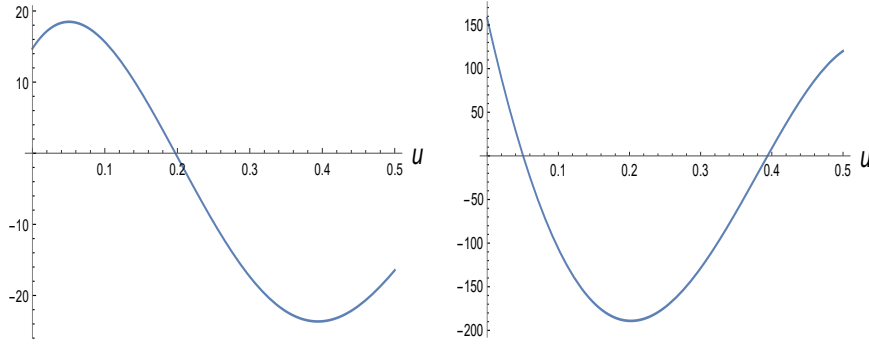


Figura 4.3: Gráficas de $D_2(\delta + u) = \eta_1(\delta + u)\eta_2(\delta + u) - \eta_3(\delta + u)$ (izquierda) y de $\frac{dD_2}{d\delta} \Big|_{\delta=\delta+u}$ (derecha) en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$.

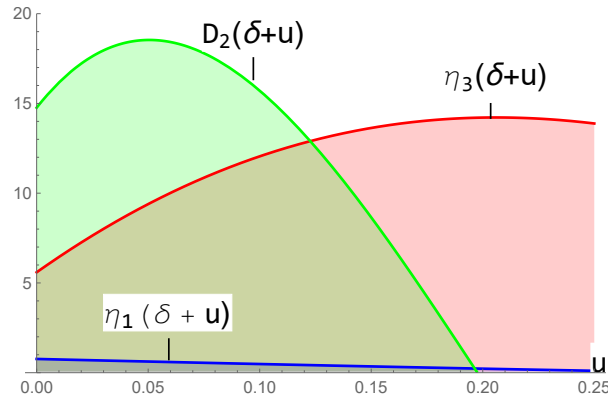


Figura 4.4: Gráficas de $\eta_1(\delta + u)$, $\eta_3(\delta + u)$, $D_2(\delta + u) = \eta_1(\delta + u)\eta_2(\delta + u) - \eta_3(\delta + u)$ en función de $u \in [0, \frac{1}{2}]$.

A continuación presentamos el comportamiento del sistema (4.3) analizado anteriormente, por medio de algunos resultados de la experimentación numérica utilizando **Wolfram Mathematica**. Para esta experimentación se usó el conjunto de valores dados en la Tabla 4.1 y la función logística $G(x) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$.

Como ya se ha mencionado la inestabilidad del sistema (4.3) depende del valor crítico $\delta_0 = \delta + u_0$ del parámetro de bifurcación. Ahora por la Proposición 4.1 podemos determinar el valor crítico u_0 de δ_0 como $u_0 = 0.197314$.

1. Para $0 < u < u_0$ el sistema (4.3) es estable puesto que evoluciona hacia el estado estacionario de coexistencia $E_4^u = (x_4(\delta), y_4(\delta), z_4(\delta))$.

4.3 Conservación de coexistencia de especies bajo capturas de $z(t)$

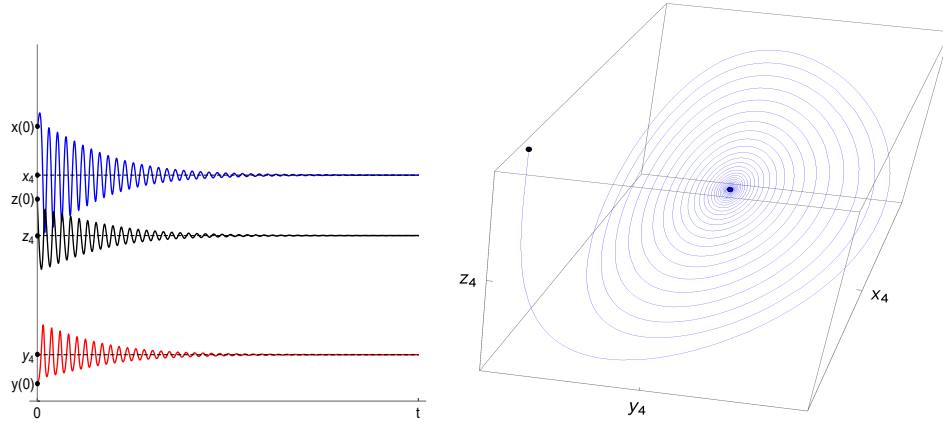


Figura 4.5: Comportamiento del sistema (4.3) cuando $0 < u < u_0$, tomando $u = 0.11$.

2. Comportamiento del sistema (4.3) en el valor crítico $u_0 = 0.197314$ alrededor del estado estacionario de coexistencia $E_4^u = (x_4(\delta), y_4(\delta), z_4(\delta))$, donde ocurre la bifurcación de Hopf simple.

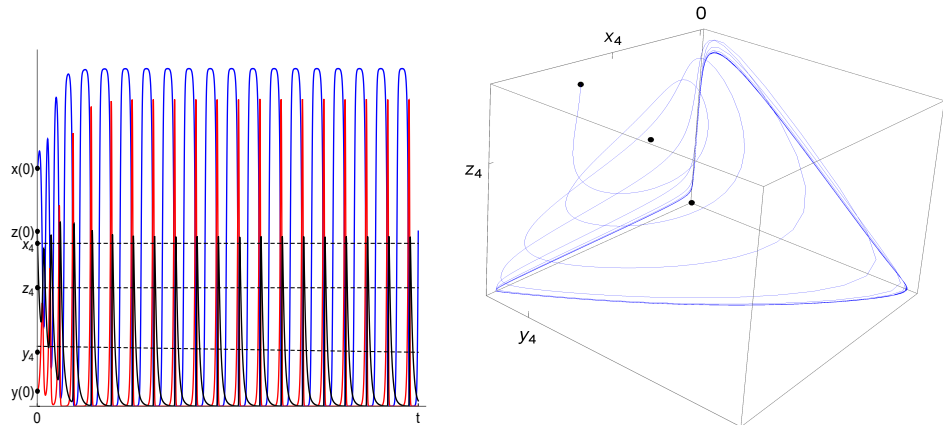


Figura 4.6: Comportamiento del sistema (4.3) donde ocurre la bifurcación de Hopf simple.

3. En el caso que $u > u_0$ se observa que el sistema (4.3) es inestable alrededor de $E_4^u = (x_4(\delta), y_4(\delta), z_4(\delta))$.

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

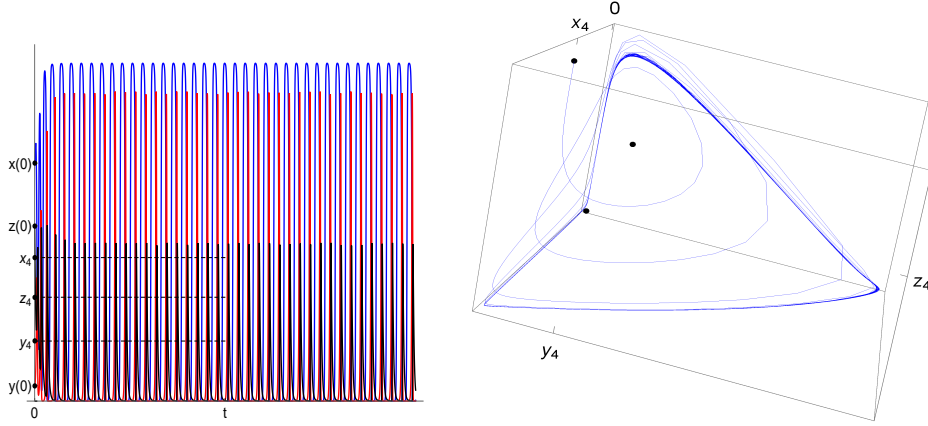


Figura 4.7: Comportamiento del sistema (4.3) cuando $u > u_0$, tomando $u = 0.25$.

4.4 Diseño de estrategias para una pesca sostenible aplicando la teoría de control óptimo

En esta sección analizaremos la dinámica de la población de peces $z(t)$ bajo el impacto de las capturas, considerando además la maximización de la siguiente función de utilidad

$$\Pi(z, h) = p(h)h - C(z, h). \quad (4.13)$$

Aquí $p(h)$ es la función de demanda en donde se considera una relación inversa entre demanda – precio y $C(z, h)$ es la función de costo asociada con las capturas [49]. Asumimos un modelo económico donde la demanda tiene pendiente decreciente y los costos dependen de los niveles del stock, los cuales cumplen que:

$$\frac{\partial p(\cdot)}{\partial h} < 0, \quad \frac{\partial C(\cdot)}{\partial h} > 0, \quad \frac{\partial C(\cdot)}{\partial z} < 0. \quad (4.14)$$

Estas condiciones obedecen a comportamientos frecuentes de las pesquerías [49] y se interpretan de la siguiente forma:

- Un aumento en la recolección h implica que el precio p disminuya.
- Un aumento en la recolección h implica que el costo aumente.
- Si aumenta la biomasa entonces el costo disminuye.

4.4 Diseño de estrategias para una pesca sostenible aplicando la teoría de control óptimo

Las funciones de demanda y costo están dadas por:

$$p(h) = p_0 - p_1 h \quad (4.15)$$

$$C(z, h) = \frac{ch}{z} \quad (4.16)$$

donde h representa la recolección de los peces, p_0 es el precio del stock, p_1 es la fuerza de la demanda. $C(z, h)$ se define como los costos totales menos la depreciación y los pagos de intereses, es decir, una aproximación a los costos variables totales, c es el costo de explotación.

Ahora, sustituyendo (4.15) y (4.16) en (4.13), la función de utilidad es:

$$\Pi(z, h) = p_0 h - p_1 h^2 - \frac{ch}{z} \quad (4.17)$$

donde $h(t) = u(t)z(t)$ con $u(t)$ representando la tasa de capturas o esfuerzo de pesca. Es necesario mencionar que, en este caso consideramos las siguientes suposiciones:

- El modelo bioeconómico que planteamos es considerado como un modelo de pesca comercial, por lo que es conveniente para los administradores de la pesquería un control sobre la pesquería, debido a que se puede correr el riesgo de que ésta sea sobreexplotada.
- Los administradores de la pesquería aplican el precio del mercado del pescado recolectado.

En el planteamiento de este modelo se considera que los agentes encargados tienen como objetivo maximizar las ganancias de las recolecciones en un horizonte de tiempo finito, sujeto a la restricción dinámica (4.3) y otras restricciones naturales y de políticas que implican límites (o cotas) para la recolección, $h(t) = u(t)z(t)$ y el stock, $z(t)$. Por lo anterior, nuestro objetivo es maximizar los beneficios de la recolección en un horizonte de tiempo finito:

$$J(z, u) = \int_0^T e^{-rt} \Pi(z, h) dt = \int_0^T e^{-rt} \left[p_0 h - p_1 h^2 - \frac{ch}{z} \right] dt \rightarrow \text{máx} \quad (4.18)$$

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

sujeto a

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - \frac{\beta_2 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x}; \quad x(0) = x_0 \quad (4.19a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta_1 xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1 yz}{\alpha_1 + x} - d_1 y; \quad y(0) = y_0 \quad (4.19b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1 yz}{\alpha_1 + x} - \delta z - u(t)z; \quad z(0) = z_0 \quad (4.19c)$$

donde $r > 0$ es la tasa de descuento, es decir, los rendimientos marginales sobre el capital de los agentes de la pesquería, y $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ y $z_0 > 0$ son los niveles iniciales para el stock de cada población. En la ecuación (4.19c) notamos que las capturas dependen ahora del tiempo t y están incluidas en el problema, en la dinámica de la biomasa del stock de peces z .

De nuevo, como en el problema estudiado en el Capítulo 2, $u : [0, T] \mapsto [0, u_{\max}]$ es una función continua a trozos (esto es $u(\cdot) \in PC[0, T]$) con un rango acotado $[0, u_{\max}]$ y el valor constante $0 < u_{\max} < u_0$ expresa el nivel máximo de esfuerzo de pesca permitido. Conviene recordar que u_0 fue identificado en la Sección 4.3.1 como el valor particular de capturas en el cual el sistema (4.3) exhibe una bifurcación de Hopf. Es decir, para $u_{\max} < u_0$ el sistema (4.19) evoluciona hacia su equilibrio de coexistencia estable, lo cual es imprescindible para los administradores de la pesquería ya que ellos buscan realizar una “pesca sostenible”.

Luego, definimos el conjunto de controles admisibles como:

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC[0, T] \text{ y } u : [0, T] \mapsto [0, u_{\max}]\}. \quad (4.20)$$

Por lo tanto, nuestro objetivo consiste en maximizar los beneficios eligiendo el esfuerzo de pesca $0 \leq u(t) \leq u_{\max} < u_0$ y la biomasa $z = z(t, u)$ correspondiente, como solución de (4.19), de tal forma que juntos maximicen el valor total de la renta de pesca con descuento intertemporal definida por (4.18).

También se supone que las funciones Π , $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ son continuamente diferenciables, en todas las variables.

De acuerdo con el Principio del Máximo de Pontryagin (ver [4, 5]), si $u(t) : [0, T] \mapsto [0, u_{\max}]$ es una solución óptima del problema de horizonte infinito (4.18)-(4.19) y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, u(t)) : [0, T] \mapsto \mathcal{K}$ ¹⁴ es la trayectoria correspondiente, entonces

¹⁴ $\mathcal{K}$ es el conjunto absorbente definido en el Teorema 3.2 del Capítulo 3.

4.4 Diseño de estrategias para una pesca sostenible aplicando la teoría de control óptimo

existe una función absolutamente continua $\lambda(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^3$ (diferenciable casi en todo $\mathbb{R}^3$) tal que

$$H(\mathbf{X}^*, u^*, \lambda^*) \geq H(\mathbf{X}^*, u, \lambda)$$

para todo $u \in [0, u_{\max}]$ y para casi todo $t \in [0, T]$.

Para el modelo propuesto, del Principio del Máximo de Pontryagin la función Hamiltoniana en tiempo corriente asociada con el problema de control óptimo (4.18)-(4.19) viene dada por

$$\begin{aligned} H(x, y, z, u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & p_0uz - p_1u^2z^2 - \frac{cu}{z} + \lambda_1 \left(G(x) - \frac{\beta_2xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x} \right) \\ & + \lambda_2 \left(\frac{\beta_1xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1yz}{\alpha_1 + x} - d_1y \right) \\ & + \lambda_3 \left(\frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1yz}{\alpha_1 + x} - \delta z - uz \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde $\lambda_i(t)$ con $i = 1, 2, 3$ son denominadas las variables de *coestado* o variables *adjuntas*. Las condiciones necesarias para garantizar la optimalidad están dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = r\lambda - \frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

con $\mathbf{X} = (x, y, z)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Luego las condiciones en detalle son de la forma:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_0z - 2p_1z^2u - \lambda_3z - c = 0 \quad (4.22)$$

$$\dot{x}(t) = G(x) - \frac{\beta_2xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma xz}{\alpha_1 + x} \quad (4.23)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\beta_1xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\rho xy}{\alpha_1 + x} - \frac{\gamma_1yz}{\alpha_1 + x} - d_1y \quad (4.24)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{Sxz}{\alpha_1 + x} + \frac{S_1yz}{\alpha_1 + x} - \delta z - u(t)z \quad (4.25)$$

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = & \lambda_1 \left(r - G'(x) + \frac{\alpha_1 \beta_2 y}{(\alpha_1 + x)^2} + \frac{\alpha_1 \gamma z}{(\alpha_1 + x)^2} \right) + \frac{\lambda_2 y (\alpha_1 (\rho - \beta_1) - \gamma_1 z)}{(\alpha_1 + x)^2} \\ & + \frac{\lambda_3 z (S_1 y - S \alpha_1)}{(\alpha_1 + x)^2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \frac{\lambda_1 \beta_2 x}{\alpha_1 + x} + \lambda_2 \left(r + \frac{\gamma_1 z - x(\beta_1 - \rho)}{\alpha_1 + x} + d_1 \right) - \frac{\lambda_3 S_1 z}{\alpha_1 + x}, \quad (4.27)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = 2p_1 u^2 z - p_0 u + \frac{\lambda_1 \gamma x}{\alpha_1 + x} + \frac{\lambda_2 \gamma_1 y}{\alpha_1 + x} + \lambda_3 \left(\delta + u + r - \frac{S_1 y + S x}{\alpha_1 + x} \right), \quad (4.28)$$

con condiciones iniciales y condiciones de *transversalidad* dadas por

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad (4.29)$$

$$\lambda_1(T) = 0, \quad \lambda_2(T) = 0, \quad \lambda_3(T) = 0. \quad (4.30)$$

Ahora, de $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ se obtiene que

$$u(t) = \frac{(p_0 - \lambda_3(t))z(t) - c}{2p_1 z^2(t)} \quad (4.31)$$

de donde la caracterización del control óptimo $u(t)$ es de la forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} < 0 \\ \frac{(p_0 - \lambda_3(t))z(t) - c}{2p_1 z^2(t)}, & \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ u_{\max}, & \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} > 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Es decir, el control óptimo está dado por

$$u^*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{(p_0 - \lambda_3(t))z(t) - c}{2p_1 z^2(t)}, u_{\max} \right\} \right\}. \quad (4.33)$$

4.4 Diseño de estrategias para una pesca sostenible aplicando la teoría de control óptimo

Ahora se reemplaza la estructura (4.33) de u en el sistema de optimalidad (4.23)-(4.28) para resolver el problema.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, & \mathbf{X}(0) = X_0 \\ \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = r\boldsymbol{\lambda} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} & \boldsymbol{\lambda}(T) = 0 \end{cases}. \quad (4.34)$$

Por otro lado, si existe una solución $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^3$ para todo $t \in [0, T]$, esta solución permite definir un control extremal usando la fórmula de caracterización (4.33). Se debe aclarar que no cualquier solución del sistema de optimalidad (4.34) proporciona un control óptimo a través de su caracterización (4.31). Esto último se debe a que el Principio del Máximo de Pontryagin proporciona una condición necesaria de optimalidad (más no necesariamente ésta es suficiente).

Ahora dado que el sistema de optimalidad resultante (4.22)-(4.28) es no lineal y tiene dimensión 6, es imposible resolverlo de forma analítica debido a su complejidad. Por lo que solucionamos este problema de control óptimo de forma numérica utilizando el software **GPOPS - II** de plataforma **MATLAB**. (la descripción del paquete **GPOPS - II** está en el Apéndice).

En este problema de control la existencia de un control óptimo se da, puesto que al inicio del Capítulo 3 hemos mostrado que las soluciones del sistema (4.19) son positivas y acotadas para todo $u \in [0, u_{\text{máx}}]$, porque $\frac{dz}{dt}$ es decreciente respecto a u dado que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dz}{dt} \right) = -z,$$

y el sistema (4.19) es lineal en u . Además, la función (4.17) es cóncava en la variable de control u , claramente vemos que

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u} = -2p_1 z^2 < 0,$$

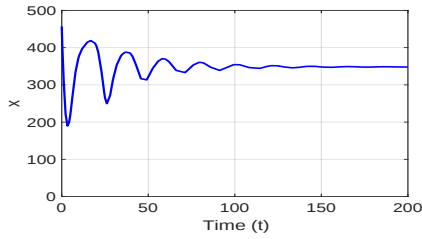
y el conjunto de controles admisibles $[0, u_{\text{máx}}]$ es compacto. Es decir, se cumplen las condiciones suficientes de la existencia de control óptimo con $T < \infty$ dispuestas en [50].

Para la solución de este problema (4.18) sujeto a (4.19) se usó el conjunto de valores dados en la Tabla 4.2 y la función logística $G(x) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$.

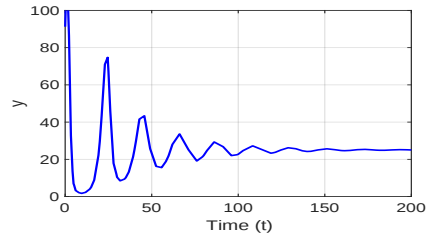
4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

K	r_1	β_2	α_1	γ	β_1	γ_1	ρ	d_1	S	S_1	δ	p	c
500	1.5	2	100	0.6	1.28	1.4	0.12	0.1	0.12	1.12	0.15	3	1

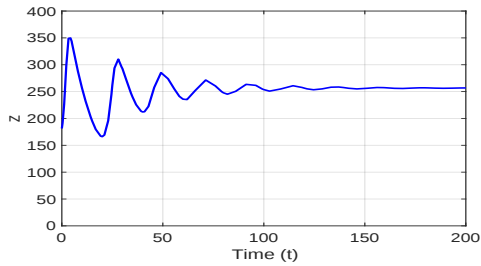
Tabla 4.2: Valores explícitos de los parámetros del problema de control óptimo (4.18)-(4.19).



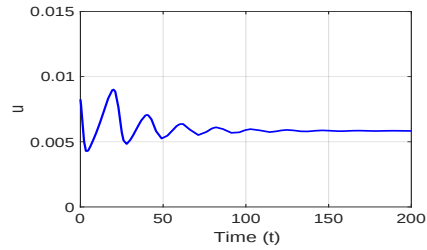
(a) Trayectorias $x^*(t)$



(b) Trayectorias $y^*(t)$



(c) Trayectorias $z^*(t)$



(d) Trayectorias $u^*(t)$

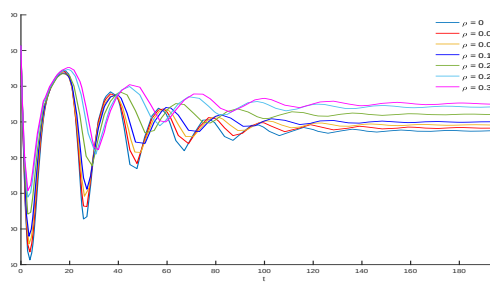
Figura 4.8: Trayectorias del sistema (4.19).

En la Figura 4.8 están las gráficas de las trayectorias $x^*(t)$, $y^*(t)$, $z^*(t)$, $u^*(t)$, donde el parámetro ρ es fijo $\rho = 0.12$. Recordemos que ρ es un parámetro que representa la contaminación por parte de la población $x(t)$ que afecta directa e

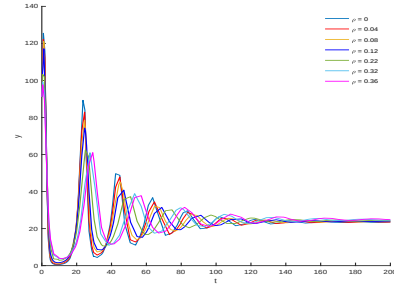
4.4 Diseño de estrategias para una pesca sostenible aplicando la teoría de control óptimo

indirectamente las poblaciones $y(t)$ y $z(t)$. Se observa que bajo esta política los estados $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ y el control $u(t)$ después de cierto tiempo comienzan a estabilizarse, lo cual garantiza la sostenibilidad de la pesca, además de garantizar la coexistencia de las poblaciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

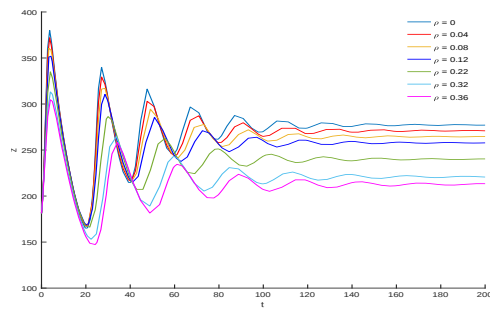
A continuación, ilustraremos los cambios que presentan las soluciones del problema de control óptimo (4.18) sujeto a las condiciones (4.19), respecto a pequeñas variaciones en el parámetro ρ .



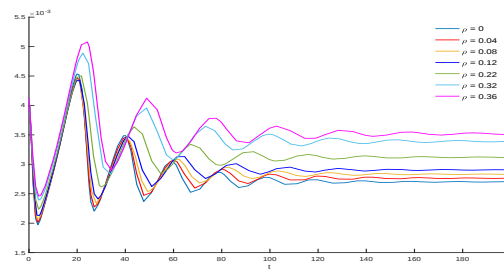
(a) Trayectorias $x^*(t)$



(b) Trayectorias $y^*(t)$



(c) Trayectorias $z^*(t)$



(d) Trayectorias $u^*(t)$

Figura 4.9: Trayectorias del sistema (4.19), bajo la estrategia de pesca $u^*(t)$.

Al analizar las gráficas de la Figura 4.9 se puede ver que independiente de los

4. COEXISTENCIA DE TRES ESPECIES CON CAPTURAS

valores que tome el parámetro ρ todos los estados se estabilizan. Cabe destacar según las gráficas que:

- Para valores grandes de ρ , es decir al aumentar la contaminación en el sistema el control estacionario u^* es mayor. Es decir, en este caso los administradores de la pesquería deben aumentar el esfuerzo de pesca. Lo anterior tiene una explicación bastante lógica.

De acuerdo con el análisis realizado en la Sección 3.5, en ausencia de capturas ($u = 0$), las variaciones en ρ afectan los niveles estacionarios de coexistencia de las tres especies de la siguiente manera: la población $x(t)$ aumenta su nivel estacionario cuando ρ crece, la población $y(t)$ es básicamente inalterada en el estado estacionario por los cambios en ρ y el nivel estacionario de la población $z(t)$ decrece al aumentar ρ . La política de capturas $u^*(t)$ está diseñada para conservar estas tendencias respecto a las posibles variaciones en ρ , y de esta forma mantener la sostenibilidad de la pesca. Como el nivel estacionario de $z(t)$ disminuye cuando ρ aumenta, se requiere mayor esfuerzo $u^*(t)$ dado que el tamaño de la población $z(t)$ es menor.

- En el caso en que ρ es pequeño, los niveles de las poblaciones consideradas en el sistema (4.19) aumentan, generando más oferta para la recolección de la especie comercial. Se observa además que el control disminuye, lo cual implica que los administradores de la pesquería invierten menos en el esfuerzo de la recolección de la especie z .

4.5 Conclusiones

En este capítulo, al igual que en el Capítulo 3, se analizó la existencia de estados estacionarios y la estabilidad de ellos en un sistema que ahora involucra la captura de la especie comercial que encabeza una cadena alimenticia.

Dada la complejidad del sistema con recolección (4.19), su análisis se restringió al caso $\alpha = \beta = 1$ en la función de recolección (4.1).

Encontramos que aún en el caso en que la variable de esfuerzo pesquero u es una cantidad constante positiva, la dinámica poblacional de las tres especies involucradas en la cadena alimenticia es muy distinta al caso en el que no se considera

la captura de la especie comercial ($u = 0$). Se evidenció que, para un esfuerzo de pesca u suficientemente grande, algunos puntos de equilibrio del sistema cambian de estable (inestable) a inestable (estable). Inclusive algunos puntos de equilibrio pueden desaparecer de acuerdo a las variaciones del esfuerzo de pesca u .

Nuestro interés se centró en conservar la coexistencia estable de las tres especies introduciendo las capturas del depredador principal, establecer las condiciones bajo las cuales se permite extraer una cantidad razonable del recurso que, por un lado, maximiza la renta de pesca y, por otro lado, conserva una fracción del recurso para las futuras ganancias, fomentando así una pesca sostenible.

Realizamos un análisis de bifurcación de Hopf del punto estacionario de coexistencia respecto al esfuerzo de pesca u , suponiendo éste un parámetro constante dentro del modelo. Mediante este análisis de bifurcación logramos identificar un valor crítico del esfuerzo de pesca, u_0 , tal que para todo $u \in [0, u_0)$ se conserva la coexistencia estable de las especies.

Por otra parte, se aplicó la teoría de control óptimo para diseñar una estrategia de pesca sostenible respecto a la dinámica del sistema (4.19) donde el esfuerzo de pesca es una función continua a trozos, $u(t)$. Dicha estrategia garantiza que el sistema dinámico con capturas evolucione hacia el estado estacionario de coexistencia estable de las tres especies.

Además, se mostró que la estrategia de pesca sostenible se puede ajustar a las variaciones en el nivel de contaminación $\rho \geq 0$ inducidas por las presas tóxicas. En particular se obtuvo que, al aumentar la contaminación en el sistema el control estacionario u^* es mayor. Es decir, en este caso los administradores de la pesquería deben aumentar el esfuerzo de pesca. En caso contrario los niveles de las poblaciones del sistema (4.19) aumentan, lo cual implica que los administradores de la pesquería invierten menos en el esfuerzo de la recolección de la especie comercial z .

Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones

Establecer políticas de conservación de vida y alimento en nuestro planeta, cada día cobran más importancia, debido a que hay una mayor necesidad de alimentos por parte de la población humana y la escasez de recursos naturales renovables. Estas necesidades conllevan al aumento de estudios de modelos biológicos con un enfoque no solo económico sino sostenible. En particular, en este tipo de modelos se pueden encontrar aquellos que involucran la conservación de especies marinas, dado que los recursos pesqueros constituyen una fuente importante de alimentación y generan utilidades económicas en todas las escalas.

Es importante resaltar que los recursos renovables pesqueros contienen características naturales que se ven permanentemente amenazadas por el aumento de la contaminación, la sobreexplotación y el consumo de especies sin ningún tipo de control. Debido a lo mencionado anteriormente, el estudio de modelos bioeconómicos que involucran especies marinas con características particulares (como son las especies pelágicas) o describen la interacción de especies en ecosistemas marinos

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

(cadenas alimenticias) es un campo de investigación que permite aplicar diversas teorías de las matemáticas.

El objetivo principal de esta tesis doctoral era contribuir en este campo de investigación estudiando la dinámica modificada de una o más especies marinas por la explotación externa de este recurso renovable por parte de la industria.

Como resultado de los estudios realizados en este trabajo, se diseñaron estrategias sostenibles para los dos modelos analizados.

Es importante resaltar que, la falta de datos en Colombia relacionados con la recolección de especies marinas, hace que no se puedan estudiar modelos acorde a las necesidades de los agentes encargados en el diseño de estrategias para la pesca sostenible en el país lo que puede generar colapsos y extinción de especies vitales para la seguridad alimentaria de poblaciones costeras, por ejemplo.

Trabajo futuro

En el desarrollo de la investigación, nos hemos encontrados con problemas interesantes derivados de este trabajo, que no hacen parte de los objetivos planteados en el proyecto doctoral. Planeamos estudiar estos problemas con el fin de obtener importantes resultados complementarios. Nuestro trabajo a futuro se centrará en los siguientes temas:

La teoría referente a la existencia de soluciones tipo *Turnpike* fue inicialmente planteada para problemas de control óptimo gobernados por los sistemas dinámicos lineales [45]. Luego, dicha teoría fue aplicada por A. Rapoport & P. Cartigny [51, 52] a modelos de pesca tradicionales considerados por Clark [4]. Nuestra intención consiste en extender la metodología propuesta en [51, 52] al modelo de la pesquería pelágica estudiado en esta tesis doctoral.

Una de las preguntas que ha surgido con mayor frecuencia en las exposiciones hechas sobre el modelo de la cadena alimenticia, es sobre la estabilidad global de la coexistencia de las tres especies. Dicha pregunta todavía no tiene respuesta justificada. De otro lado, cabe resaltar que para la construcción de las estrategias de pesca sostenible no es necesario que el punto estacionario de coexistencia sea globalmente estable. No obstante, encontramos un camino que podrá ayudarnos a

resolver este interrogante el cual consiste en aplicar un método geométrico propuesto en [53, 54, 55].



Apéndice. Paquete de software GPOPS II

Los problemas de control óptimo pueden resultar de alta complejidad, por lo que encontrar la solución de un problema de control óptimo de forma analítica no siempre es posible. Por lo tanto, el uso de herramientas computacionales ha pasado a ser un aliado importante en la solución de estos problemas complejos. Es importante mencionar que el control óptimo computacional está compuesto por una variedad de métodos numéricos e implementaciones de software. La gran mayoría de las implementaciones de software de control óptimo involucran la transcripción directa de un problema de control óptimo de tiempo continuo a un problema de *programación no lineal* (PNL). Este tipo de problemas se pueden resolver haciendo uso de paquetes de dominio libre o paquetes comerciales (ver [56]).

A medida que se han ido desarrollando estrategias de solución numérica de problemas se ha podido apreciar que desde la década 1980, los métodos de *colocación directa* se han posicionado en la solución numérica de problemas de control óptimo no lineales. En un procedimiento de colocación directa, las variables de estado y de coestado del sistema de optimalidad se discretizan en un conjunto de puntos elegidos apropiadamente en el intervalo de tiempo considerado. Dicho sistema en tiempo continuo luego se transforma en un problema PNL de dimensión finita. El

A. APÉNDICE. PAQUETE DE SOFTWARE GPOPS II

problema PNL resultante se resuelve utilizando las subrutinas destinadas para este fin (por ejemplo, las subrutinas SNOPT o IPOPT de MATLAB), iniciando en las condiciones de frontera y luego ajustando las trayectorias de estado y coestado (mediante aproximaciones polinomiales de un mismo grado máximo o splines) dentro de cada subintervalo de partición para que cada una de ellas satisfaga la dinámica del sistema. La convergencia de estos métodos se consigue mediante el aumento del número de puntos de colocación (afinamiento de la malla). Sin embargo, la convergencia no se logra siempre ya que cuando la distancia entre los nodos vecinos tiende al “épsilon de la máquina”, el algoritmo numérico debe detenerse sin llegar aún a las trayectorias que satisfacen la dinámica del sistema.

Por otro lado, existen métodos directos de *colocación ortogonal* basada en la cuadratura Gaussiana. En estos métodos, las trayectorias se aproximan utilizando un polinomio de interpolación de Lagrange, donde los puntos de colocación (o sea, los nodos de este polinomio) se eligen para ser puntos asociados con la cuadratura de Gauss. Originalmente, se implementaban métodos de colocación de cuadratura Gaussiana en el intervalo entero de tiempo (el cual puede ser normalizado a $[-1, 1]$). Por lo tanto, la convergencia de estos métodos se lograba aumentando el número de nodos y el grado del polinomio de aproximación sobre el intervalo entero. En estos casos, la complejidad computacional crecía drásticamente con el aumento de grado del polinomio de aproximación. No obstante, para aquellos problemas con valores en la frontera en donde las soluciones son suaves y no tienen cambios abruptos, los métodos de colocación basados en la cuadratura Gaussiana no requieren muchos puntos de colocación (nodos) y tienen una estructura simple, lo cual hace que estos métodos convergen exponencialmente [57].

La combinación de los dos enfoques anteriores se conoce como *métodos de colocación ortogonal directa*, además se conocen como *métodos pseudoespectrales de Gauss* [27, 56, 58]. La selección particular de puntos de colocación (nodos) da origen a diferentes métodos pseudoespectrales.

Según lo indicado en [58], existen tres tipos básicos de conjuntos de nodos para la colocación ortogonal en un método pseudospectral:

- los puntos LG (de Legendre-Gauss),
- los puntos LGR (de Legendre-Gauss-Radau),

-
- los puntos LGL (de Legendre-Gauss-Lobatto).

Estos tres conjuntos de puntos se obtienen a partir de las raíces de un polinomio de Legendre y/o de las combinaciones lineales de un polinomio de Legendre con sus derivadas. Todos estos conjuntos de puntos están definidos en el dominio $[-1, 1]$, pero difieren significativamente entre sí. El conjunto de los puntos LG no incluye los puntos extremos, el conjunto de los puntos LGR incluye sólo uno de los puntos extremos y el conjunto de los puntos LGL incluye ambos puntos finales; además, los puntos LGR son asimétricos con respecto al origen.

Para cada tipo de conjuntos de colocación (LG, LGR, LGL) fueron elaborados los métodos pseudoespectrales correspondientes, a saber:

- conjunto LG $\Rightarrow$ *método pseudoespectral de Gauss* [59];
- conjunto LGR $\Rightarrow$ *método pseudoespectral de Radau* [60];
- conjunto LGL $\Rightarrow$ *método pseudoespectral de Legendre* [61].

Estos tres métodos son métodos adaptativos tanto en el número de subintervalos de la malla como en el grado del polinomio de aproximación dentro de cada subintervalo. Por lo tanto, permiten tomar ventaja de la convergencia exponencial de un método global de cuadratura Gaussiana en las regiones donde la solución es suave e introducir nodos adicionales solo en las regiones donde la solución cambia rápidamente.

El paquete computacional GPOPS-II implementa el método pseudoespectral de Radau aplicando de manera interna y automática un escalamiento del intervalo $[0, T]$ a $[-1, 1]$ junto con un refinamiento adaptativo de su partición y permite variar el grado de los polinomios de aproximación, el número de subintervalos en la malla y el ancho de cada subintervalo durante el proceso de ejecución. También permite adicionar puntos de colocación en las regiones donde se necesita más información acerca de las trayectorias para así capturar las características claves de una solución óptima.

La principal ventaja del método pseudoespectral de Radau consiste en que este método (a diferencia de otros métodos pseudoespectrales) permite utilizar las fórmulas exactas de las derivadas parciales para calcular el gradiente y el Hessiano

A. APÉNDICE. PAQUETE DE SOFTWARE GPOPS II

del Lagrangiano, así como el Jacobiano de restricciones, en el problema PNL resultante de discretización. Esto contribuye significativamente en la exactitud de los cálculos y favorece la convergencia del algoritmo numérico [27].

En el paquete GPOPS-II para resolver un problema de control óptimo es necesario definir dos funciones, una “*endpoint function*” y una “*continuos function*”. En la *endpoint function* se define cuando empiezan y terminan todas las fases del problema y la función objetivo del problema de control óptimo. En la *continuos function* se define la dinámica del problema, las restricciones sobre los estados y/o controles del problema y las condiciones de frontera. Además, se deben especificar los límites superior e inferior de

- El tiempo al inicio y final de una fase.
- El estado al inicio, durante y al final de una fase.
- El control durante una fase.
- Las condiciones de frontera.
- Los parámetros fijos.

Luego, al ejecutar GPOPS-II se obtienen los siguientes resultados

- Solución: estado, coestado y control.
- Objetivo: El valor óptimo de la función objetivo en cada iteración.

La principal limitación del paquete GPOPS-II consiste en que éste requiere la continuidad de las primeras y segundas derivadas del Hamiltoniano H (y también de las restricciones, si éstas están presentes) con respecto a todas sus variables. No obstante, los modelos trabajados en esta tesis cumplen esta condición.

Bibliografía

- [1] Halil Ibrahim Egilmez. *Mathematical modelling of predator-prey dynamics in complex environments*. PhD thesis, Department of Mathematics, 2018. ix, 55
- [2] ONU. 17 goals to transform our world. url<http://www.un.org/en/>, 2015. Accedido 17-03-2019. 5
- [3] FAO. El estado mundial de la pesca y la acuicultura 2018. url<http://www.fao.org/home/en/>, 2019. Accedido 17-03-2019. 6, 9
- [4] Colin Clark. *Mathematical bioeconomics: optimal management of renewable resources*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1990. 7, 9, 15, 21, 22, 29, 40, 88, 106, 116
- [5] Colin Clark. *Mathematical bioeconomics: the mathematics of conservation*. John Wiley & Sons, 3 edition, 2010. 7, 9, 21, 22, 27, 40, 106
- [6] Quentin Grafton, Wiktor Adamowicz, Diane Dupont, Harry Nelson, Robert J Hill, and Steven Renzetti. *The economics of the environment and natural resources*. Blackwell Publishing Ltd., Oxford, UK, 2004. 7, 27
- [7] Ray Hilborn and Carl Walters. *Quantitative fisheries stock assessment: choice, dynamics and uncertainty*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 2001. 7, 8, 14
- [8] Michael King. *Fisheries biology, assessment and management*. Blackwell Publishing Ltd., Hong-Kong, 2013. 7

BIBLIOGRAFÍA

- [9] Terrance Quinn and Richard Deriso. *Quantitative fish dynamics*. Oxford University Press, 1999. 7, 8, 14
- [10] Pierre Fréon, Philippe Cury, Lynne Shannon, and Claude Roy. Sustainable exploitation of small pelagic fish stocks challenged by environmental and ecosystem changes: a review. *Bulletin of Marine Science*, 76(2):385–462, 2005. 7
- [11] K Kleisner, D Zeller, Rainer Froese, and D Pauly. Using global catch data for inferences on the world’s marine fisheries. *Fish and Fisheries*, 14(3):293–311, 2013. 7
- [12] Mark Maunder and André Punt. Standardizing catch and effort data: a review of recent approaches. *Fisheries research*, 70(2-3):141–159, 2004. 7
- [13] Christian Mullon, Pierre Fréon, and Philippe Cury. The dynamics of collapse in world fisheries. *Fish and Fisheries*, 6(2):111–120, 2005. 7
- [14] Mark Maunder and André Punt. A review of integrated analysis in fisheries stock assessment. *Fisheries Research*, 142:61–74, 2013. 7, 16
- [15] Mark Maunder, John Sibert, Alain Fonteneau, John Hampton, Pierre Kleiber, and Shelton Harley. Interpreting catch per unit effort data to assess the status of individual stocks and communities. *IES Journal of Marine Science*, 63(8):1373–1385, 2006. 7, 16
- [16] Michael Wilberg, James Thorson, Brian Linton, and Jim Berkson. Incorporating time-varying catchability into population dynamic stock assessment models. *Reviews in Fisheries Science*, 18(1):7–24, 2010. 7, 16
- [17] Shelton J Harley, Ransom A Myers, and Alistair Dunn. Is catch-per-unit-effort proportional to abundance? *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 58(9):1760–1772, 2001. 7, 8, 14, 15
- [18] Sean Pascoe and Richard Hillary. Bioeconomic target reference points for the commonwealth small pelagic fishery. Technical report, Report to the Australian Fisheries Management Authority (AFMA). CSIRO, Hobart., 2016. 8, 14, 15, 31

- [19] Scott Bannerot and C. Bruce Austin. Using frequency distributions of catch per unit effort to measure fish-stock abundance. *Transactions of the American Fisheries Society*, 112(5):608–617, 1983. 8, 14, 15
- [20] Trond Bjørndal and Jon M Conrad. The dynamics of an open access fishery. *Canadian Journal of Economics*, 20(1):74–85, 1987. 8, 14, 15
- [21] José-María Da-Rocha, Linda Nøstbakken, and Marcos Pérez. Pulse fishing and stock uncertainty. *Environmental and resource economics*, 59(2):257–274, 2014. 8, 14
- [22] Pedro Gajardo, Julio Peña-Torres, and Héctor Ramírez. Harvesting economic models and catch-to-biomass dependence: the case of small pelagic fish. *Natural Resource Modeling*, 24(2):268–296, 2011. 8, 14, 15, 16, 40, 44, 45, 47, 48
- [23] Rögnvaldur Hannesson. Bioeconomic production function in fisheries: Theoretical and empirical analysis. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 40(7):968–982, 1983. 8, 14, 15
- [24] Jose M Maroto and Manuel Moran. Increasing marginal returns and the danger of collapse of commercially valuable fish stocks. *Ecological Economics*, 68(1):422–428, 2008. 8, 14, 40
- [25] Jose M Maroto, Manuel Moran, Leif K Sandal, and Stein I Steinshamn. Potential collapse in fisheries with increasing returns and stock-dependent costs. *Marine Resource Economics*, 27(1):43–63, 2012. 8, 14, 15
- [26] Prabir Panja and Shyamal Kumar Mondal. Stability analysis of coexistence of three species prey–predator model. *Nonlinear Dynamics*, 81(1-2):373–382, 2015. 10, 11, 54, 81, 85, 86
- [27] Michael A Patterson and Anil V Rao. Gpops-ii: A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 41(1):1, 2014. 12, 120, 122

BIBLIOGRAFÍA

- [28] Trond Bjørndal. Production economics and optimal stock size in a North Atlantic fishery. *The Scandinavian Journal of Economics*, pages 145–164, 1987. 15
- [29] Steven Mackinson, Ussif Rashid Sumaila, and Tony J Pitcher. Bioeconomics and catchability: fish and fishers behaviour during stock collapse. *Fisheries research*, 31(1-2):11–17, 1997. 15
- [30] Jean-Didier Opsomer and Jon M Conrad. An open-access analysis of the northern anchovy fishery. *Journal of Environmental Economics and Management*, 27(1):21–37, 1994. 15
- [31] Trond Bjørndal. Production in a schooling fishery: The case of the North Sea herring fishery. *Land Economics*, 65(1):49–56, 1989. 15
- [32] Julio Peña-Torres and Michael Basch. Harvesting in a pelagic fishery: The case of Northern Chile. *Annals of Operations Research*, 94(1-4):295–320, 2000. 15
- [33] Max Thilo Stoeven. Enjoying catch and fishing effort: The effort effect in recreational fisheries. *Environmental and Resource Economics*, 57(3):393–404, 2014. 16
- [34] Kenneth Arrow, Hollis Chenery, Bagicha Minhas, and Robert Solow. Capital-labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, pages 225–250, 1961. 16
- [35] André Punt. Strategic management decision-making in a complex world: quantifying, understanding, and using trade-offs. *ICES Journal of Marine Science*, 74(2):499–510, 2015. 16
- [36] Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology*, volume 40. Springer, 2001. 19
- [37] Nakul Chitnis, James Hyman, and Jim Cushing. Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bulletin of mathematical biology*, 70(5):1272–1296, 2008. 20

- [38] Dieter Grass, Jonathan Caulkins, Gustav Feichtinger, Gernot Tragler, and Doris Behrens. *Optimal control of nonlinear processes*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2008. 21, 22
- [39] Suzanne Lenhart and John T. Workman. *Optimal control applied to biological models*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. 21, 22
- [40] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. International series of monographs in pure and applied mathematics. Interscience, New York, 1962. 21
- [41] Sergei M Aseev and Arkady V Kryazhimskiy. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(3):1094–1119, 2004. 22
- [42] Sergei M Aseev and Arkady V Kryazhimskiy. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proceedings of the Steklov institute of mathematics*, 257(1):1–255, 2007. 22
- [43] Phillippe Michel. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 975–985, 1982. 22
- [44] Trond Bjørndal and Daniel Gordon. On the contributions of Professor G. R. Munro to economics. In D. Arnason R. Bjørndal, T. Gordon and U. R. Sumaila, editors, *Advances in Fisheries Economics: Festschrift in Honour of Professor Gordon R. Munro*, pages 1–14. Blackwell Publishing Ltd., Singapore, 2007. 27
- [45] Alexander Zaslavski. *Turnpike properties in the calculus of variations and optimal control*, volume 80 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Springer Science & Business Media, New York, USA, 2006. 29, 116

BIBLIOGRAFÍA

- [46] Sigrid Lehuta, Raphaël Girardin, Stéphanie Mahévas, Morgane Travers-Trolet, and Youen Vermard. Reconciling complex system models and fisheries advice: Practical examples and leads. *Aquatic Living Resources*, 29(2):208, 2016. 50
- [47] JS Allen Linda. *An introduction to mathematical biology*. Pearson Education Ltd. USA, 2007. 68
- [48] Wei-min Liu. Criterion of Hopf bifurcations without using eigenvalues. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 182(1):250–256, 1994. 96, 99
- [49] L Bayón, Paulino José García-Nieto, R García-Rubio, JA Otero, PM Suárez, and C Tasis. An algorithm for quasi-linear control problems in the economics of renewable resources: The steady state and end state for the infinite and long-term horizon. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309:456–472, 2017. 104
- [50] Wendell Fleming and Raymond Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer, New York, USA, 1975. 109
- [51] Alain Rapaport and Pierre Cartigny. Necessary and sufficient conditions for turnpike optimality: The singular case. In *Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis*, pages 85–100. Springer, 2004. 116
- [52] Alain Rapaport and Pierre Cartigny. Competition between most rapid approach paths: necessary and sufficient conditions. *Journal of optimization theory and applications*, 124(1):1–27, 2005. 116
- [53] Bruno Buonomo and Cruz Vargas-De-León. Global stability for an HIV-1 infection model including an eclipse stage of infected cells. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385(2):709–720, 2012. 117
- [54] Kunal Chakraborty, Soovoojeet Jana, and TK Kar. Global dynamics and bifurcation in a stage structured prey–predator fishery model with harvesting. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18):9271–9290, 2012. 117

- [55] Michael Y Li and James S Muldowney. A geometric approach to global-stability problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(4):1070–1083, 1996. 117
- [56] Anil V Rao, David A Benson, Christopher Darby, Michael A Patterson, Camila Francolin, Ilyssa Sanders, and Geoffrey T Huntington. Algorithm 902: GPOPS, a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 37(2):22, 2010. 119, 120
- [57] Claudio Canuto, M Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, and Thomas A Zang. Spectral methods in fluid dynamics. Technical report, Springer, 1988. 120
- [58] Divya Garg, Michael A Patterson, William W Hager, Anil V Rao, David A Benson, and Geoffrey T Huntington. An overview of three pseudospectral methods for the numerical solution of optimal control problems. *Advances in the Astronautical Sciences*, 135(1):475–487, 2009. 120
- [59] David A Benson, Geoffrey T Huntington, Tom P Thorvaldsen, and Anil V Rao. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(6):1435–1440, 2006. 121
- [60] Shivakumar Kameswaran and Lorenz T Biegler. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at Radau points. *Computational Optimization and Applications*, 41(1):81–126, 2008. 121
- [61] Gamal Elnagar, Mohammad A Kazemi, and Mohsen Razzaghi. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(10):1793–1796, 1995. 121