
Propiedades de Separación de las MV-álgebras topológicas

*Trabajo de grado
para optar al título de:*
MATEMÁTICA

Autora:

Angee Grijalba

Directora:

Luz Victoria De La Pava, Ph. D.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas



11 de abril de 2025

Resumen

Las MV-álgebras introducidas por Chang en [3] son una generalización algebraica de la lógica proposicional de Łukasiewicz de múltiples valores. Este trabajo aborda las MV-álgebras topológicas, MV-álgebras dotadas de topologías compatibles con sus operaciones algebraicas. El objetivo principal es estudiar con detalle propiedades topológicas como regularidad, conexidad y los axiomas de separación, así como las condiciones necesarias para que una MV-álgebra sea considerada topológica bajo diferentes perspectivas.

Palabras claves: MV-álgebra topológica, topología filtro, regularidad, topología ideal, axiomas de separación.

Agradecimientos

A lo largo de este camino, he contado con el apoyo de muchas personas, sin las cuales la realización de este trabajo no hubiera sido posible. En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi directora de tesis, Luz Victoria de la Pava, por su guía, y valiosos consejos durante todo el proceso. Su conocimiento y dedicación han sido fundamentales para la realización de este trabajo.

A mi familia, mi mamá Rocio y mis abuelos Olga y Regulo, brindarme su amor, apoyo y motivación en cada etapa de mi vida. A mi pareja, Julian, por su paciencia, comprensión y apoyo inquebrantable. Gracias por estar siempre ahí, animándome a seguir adelante. A mis amigas Valentina y Lizeth, por siempre estar ahí cuando las he necesitado, brindándome su apoyo incondicional y regalándome momentos de alegría. Gracias por su compañía, por las risas compartidas y por hacer este camino mucho más llevadero.

A mis compañeros de estudio, quienes con su apoyo y compañía hicieron de este camino una experiencia más amena y disfrutable. Agradezco a la Universidad del Valle por brindarme la oportunidad de formarme académicamente en un entorno de aprendizaje enriquecedor. En especial, quiero expresar mi gratitud a los profesores del Departamento de Matemáticas por su disposición, paciencia y dedicación en la enseñanza. Sus conocimientos y su compromiso han sido fundamentales en mi desarrollo académico y en la culminación de este trabajo.

Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que, de una u otra manera, contribuyeron a la culminación de este trabajo, ya sea brindándome información, compartiendo su experiencia o simplemente confiando en mí.

A todos ustedes, gracias de corazón.

Índice general

Resumen	3
Introducción	7
1 Preliminares	9
1.1 Retículos	9
1.2 Topología	10
2 MV-álgebras	13
2.1 MV-álgebras, ideales y filtro	13
2.2 Álgebras libres y funciones de McNaughton	20
2.3 MV-álgebras y ℓu -grupos abelianos	23
3 Sobre MV-álgebras (semi, para, quasi) topológicas	25
4 Topología filtro	29
5 MV-álgebra topológica	35
5.1 Determinación única de una MV-álgebra topológica	35
5.2 Separación y regularidad	39
5.3 Ideales	42
5.4 Conexidad	43
5.5 Discretización y Trivialidad	44
5.6 MV-álgebras Topológicas Ideales	46
5.7 MV-álgebras Topológicas Cocientes	50
6 Conclusiones	55
Bibliografía	57

Introducción

Las álgebras Booleanas surgieron como la contraparte algebraica de la lógica clásica; por su parte las MV-álgebras fueron definidas por C. C. Chang, en 1958 y 1959, cuando éste dio la prueba algebraica de la completez de la lógica proposicional multivaluada de Lukasiewicz [3]. En este sentido, las MV-álgebras son la contraparte algebraica de la lógica proposicional de Lukasiewicz.

En 1986, D. Mundici probó una equivalencia categórica entre las MV-álgebras y los grupos abelianos reticulados con unidad fuerte [14]. Inspirados en esta equivalencia y en el trabajo de [22], en 2017, C. Lang y Y.C. Yuang definen las topologías filtro sobre MV-álgebras [12] y muestran que toda MV-álgebra puede ser dotada naturalmente de la topología filtro [12]. Surge la pregunta natural: ¿Cuándo la topología filtro hace a una MV-álgebra una MV-álgebra topológica? Lua, Wan y Weber responden a esta pregunta en [13], dando condiciones necesarias.

La investigación en torno a las MV-álgebras topológicas no ha cesado desde entonces, y en particular, en el último año, se han encontrado resultados sobre las propiedades de separación que estas poseen. En este trabajo estudiamos con detalle las propiedades de MV-álgebras topológicas y los resultados presentados en el artículo *On regularity of topological MV-algebras* [7], y vemos cómo la topología subyacente a la MV-álgebra topológica determina características fundamentales como la separación y la regularidad.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Retículos

Los retículos conforman una estructura matemática estrechamente ligada a las dos estructuras algebraicas discutidas en los siguientes capítulos, las *MV-álgebras* y los *lu-grupos*. Las definiciones y teoremas sobre retículos, que se presentan en este capítulo, se encuentran en [19] y [2].

Definición 1.1.1. Un *retículo* $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un conjunto $L \neq \emptyset$ junto con dos operaciones binarias $\vee, \wedge$ que satisfacen las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in L$:

- $x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$. (Conmutativa)
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. (Asociativa)
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$. (Idempotencia)
- $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$. (Absorción)

Decimos que L es un **retículo distributivo** si además cumple con $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Ejemplo 1.1.2. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con las operaciones $\vee = \text{mcm}(n, m)$, definida como el mínimo común múltiplo, y $\wedge = \text{mcd}(n, m)$, como el máximo común divisor, para cada par de elementos n y m en $\mathbb{N}$, es un retículo.

El concepto de retículo también se puede abarcar de la siguiente manera,

Definición 1.1.3. Un conjunto parcialmente ordenado (o poset) $\langle L, \leq \rangle$ es un **retículo**, si para cada $a, b \in L$, los elementos

$$\begin{aligned}\sup\{a, b\} &:= \min\{c \in L \mid a \leq c, b \leq c\}, \\ \inf\{a, b\} &:= \max\{d \in L \mid d \leq a, d \leq b\},\end{aligned}$$

existen en L .

Las definiciones 1.1.1 y 1.1.3 son equivalentes. En efecto, si $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo como en la Definición 1.1.1, se construye el orden parcial $\leq$ así:

$$a \leq b, \text{ si y solo si, } a = a \wedge b, \text{ si y solo si, } b = a \vee b.$$

En sentido contrario, si $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo como en la Definición 1.1.3, se definen las operaciones $\vee, \wedge$ como:

$$a \wedge b := \inf\{a, b\} \text{ y } a \vee b := \sup\{a, b\}.$$

Observación 1.1.4. Dado un retículo $L = \langle L, \vee, \wedge \rangle$, existe otro retículo asociado $L^{op} = \langle L, \vee_{op}, \wedge_{op} \rangle$ denominado **retículo dual** (también llamado opuesto), donde el conjunto subyacente es el mismo y las operaciones están definidas así:

De manera natural, se introducen las funciones que conservan la estructura de retículo, las cuales son conocidas como *homomorfismos de retículos*.

Definición 1.1.5. Dados dos retículos $\langle L_1, \vee_{L_1}, \wedge_{L_1} \rangle, \langle L_2, \vee_{L_2}, \wedge_{L_2} \rangle$, una función $f : L_1 \longrightarrow L_2$ se dice que es un **homomorfismo de retículos**, si para cada $a, b \in L_1$, se tiene que:

- $f(a \vee_{L_1} b) = f(a) \vee_{L_2} f(b).$
- $f(a \wedge_{L_1} b) = f(a) \wedge_{L_2} f(b).$

Si L_1 y L_2 son retículos considerados como posets, entonces una función $f : L_1 \longrightarrow L_2$ es un **homomorfismo de retículos** si $a \leq_{L_1} b$ implica $f(a) \leq_{L_2} f(b)$.

1.2. Topología

Definición 1.2.1. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple:

- $\emptyset, X \in \tau.$
- Si $\{A_i \mid i \in I\}$ es una familia arbitraria en τ , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau.$
- Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau.$

El par (X, τ) se denomina **espacio topológico**, mientras que los elementos de X y τ son llamados **puntos** y conjuntos **abiertos**, respectivamente. Un conjunto $A \subseteq X$ es **cerrado** si $A^c \in \tau.$

Ejemplo 1.2.2. Dado cualquier conjunto X , la colección $\tau_1 := \{\emptyset, X\}$ se conoce como **topología trivial**, mientras que $\tau_2 := \mathcal{P}(X)$ se denomina **topología discreta**. Evidentemente, (X, τ_1) y (X, τ_2) poseen el mismo conjunto subyacente, pero son espacios topológicos diferentes.

Definición 1.2.3. Una función entre espacios topológicos $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ se dice que es **continua** si para cada $U \in \tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\} \in \tau_X$.

Definición 1.2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una **base** para τ , si para cada $A \in \tau$, $A = \bigcup_{j \in J} B_j$ donde $\{B_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.2.5. El conjunto $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\} \cup \{\emptyset\}$ es una base para la topología discreta. Por otra parte, es inmediato que para cada espacio topológico (X, τ) , se tiene que τ es una base para sí misma.

Definición 1.2.6. Si (X, τ) es un espacio topológico y $x \in X$, una **vecindad de x** es un conjunto V para el que existe un abierto $U \in \tau$ tal que

$$x \in U \subseteq V.$$

Definición 1.2.7. Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{N}$ una colección de conjuntos. Decimos que $\mathcal{N}$ es una **base del sistema de vecindades de x** si,

1. Para todo $V \in \mathcal{N}$, $x \in V$.
2. Para todo abierto U de x , existe un $V \in \mathcal{N}$ que $V \subseteq U$.

Definición 1.2.8. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, la **clausura** de A , $\overline{A}$, es el conjunto:

$$\overline{A} = \bigcap \{C \subseteq X \mid C \text{ es cerrado y } A \subseteq C\}$$

y el **interior** de A , $\text{int}(A)$, es el conjunto:

$$\text{int}(A) = \bigcup \{U \subseteq A \mid U \text{ es abierto en } X\}$$

Definición 1.2.9. Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X . El espacio X es **conexo** si no existe una separación de X .

Teorema 1.2.10. La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Teorema 1.2.11. La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.

Proposición 1.2.12. *La clausura de un espacio conexo también es un espacio conexo.*

Definición 1.2.13. *Dado un espacio topológico X , se llama componente conexa, a cada uno de los conjuntos maximales conexos. Es decir un subconjunto $Y \subseteq X$ es un componente conexo si se cumplen estas dos condiciones:*

1. Y es conexo.
2. Cualquier conjunto Z que contiene propiamente a Y es desconexo.

Se cumple que las componentes conexas de X forman una partición de X . Si X es conexo, se tiene que X es su única componente conexa.

Propiedades de Separación

Los axiomas de separación son propiedades topológicas que garantizan la existencia de un número suficiente de conjuntos abiertos como para distinguir topológicamente puntos distintos.

Definición 1.2.14. *Un espacio topológico X es un espacio **regular** cuando para cada conjunto cerrado F de X y cada punto x que no pertenece a F , existen abiertos, U de x y V de F , que son disjuntos, esto es $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 1.2.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X es*

- T_0 : *Si dados dos puntos de X hay una vecindad de alguno de ellos que no contiene al otro.*
- T_1 : *Si dados dos puntos de X hay una vecindad de cada uno que no contiene al otro.*
- T_2 : (Hausdorff) *Si para cada par de puntos de X existen vecindades de cada uno disjuntas.*
- T_3 . *Si X es regular y T_1 .*

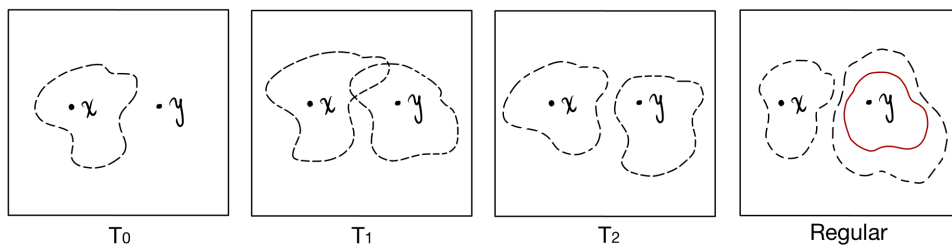


Figura 1.1: Axiomas de separación

Proposición 1.2.16. *Un espacio topológico X es regular si y solo si para todo $x \in X$ y cada vecindad U de x , existe una vecindad V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$, donde $\overline{V}$ es la clausura de V .*

Capítulo 2

MV-álgebras

Las MV-álgebras son estructuras algebraicas que generalizan la lógica proposicional clásica y la lógica difusa. Las MV-álgebras, tal como las conocemos hoy, fueron introducidas formalmente por el matemático italiano Daniele Mundici en 1986 en [15], pero el término y la estructura ya existían desde la investigación sobre álgebras de lógica multivaluada de Łukasiewicz [4]. Las definiciones y teoremas de este capítulo son de [5] y [16].

2.1. MV-álgebras, ideales y filtro

Definición 2.1.1. Una *MV-álgebra* es una álgebra $(A, \oplus, *, 0)$ del tipo $(2, 1, 0)$ que satisface los siguientes axiomas: para todo $x, y \in A$

M1. $(A, \oplus, 0)$ es un monoide conmutativo,

M2. $(x^*)^* = x$,

M3. $x \oplus 0^* = 0^*$,

M4. $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$.

Para simplificar la notación nos referiremos a la MV-álgebra $(A, \oplus, *, 0)$ solo con su conjunto soporte A . Una MV-álgebra es trivial si su conjunto soporte es un conjunto unitario. Para una MV-álgebra $(A, \oplus, *, 0)$ se definen una constante y las siguientes operaciones así:

- $1 := 0^*$
- $x \odot y := (x^* \oplus y^*)^*$,

$$\blacksquare x \ominus y := x \odot y^*.$$

Además para todo $x, y \in A$, se define la relación

$$x \leq y \Leftrightarrow x^* \oplus y = \mathbf{1},$$

que resulta ser un orden parcial en A , conocido como el orden natural de A ; este orden dota de una estructura de retículo distributivo acotado a A con $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ como primer y último elemento respectivamente, y

$$x \vee y = (x \odot y^*) \oplus y \text{ y } x \wedge y = x \odot (x^* \oplus y).$$

Ejemplos

1. El intervalo $[0, 1]$ con las operaciones $x \oplus y = \min\{1, x + y\}$ y $x^* = 1 - x$ es conocida como la MV-álgebra estándar.
2. Toda álgebra booleana es una MV-álgebra en la cual las operaciones $\oplus$ y $\vee$ coinciden.
3. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{L}_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}$ con las operaciones de la MV-álgebra estándar son MV-álgebras.
4. Sea X un conjunto y A una MV-álgebra, el conjunto $A^X = \{f : X \rightarrow A : f \text{ es función}\}$ es una MV-álgebra con las operaciones definidas puntualmente, esto es, si $f, g \in A^X$, $(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x)$ y $f^*(x) := (f(x))^*$ para todo $x \in X$, y el $\mathbf{0}$ corresponde a la función constante $\mathbf{0} : X \rightarrow A$ tal que $\mathbf{0}(x) = \mathbf{0}$ para todo $x \in X$.

Definición 2.1.2. Diremos que A es una **MV-cadena** si esta linealmente ordenada.

Ejemplo 2.1.3. Se definen los siguientes conjuntos C_0 y C_1 de símbolos formales:

$$C_0 = \{0, c, 2c, 3c, \dots\}, \quad C_1 = \{1, c^*, (2c)^*, (3c)^*, \dots\},$$

donde $0 = 0c$, $1 = 0^*$, y $(kc)^{**} = ((kc)^*)^* = kc$ para cualquier entero positivo k . Sea $+$ (resp. $-$) la suma ordinaria (resp. resta) entre enteros, se define la siguiente operación binaria $\oplus$ en $C = C_0 \cup C_1$:

- $nc \oplus mc = (n + m)c$,
- $(nc)^* \oplus (mc)^* = 1$,
- $nc \oplus (mc)^* = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq m, \\ ((m - n)c)^*, & \text{si } n > m. \end{cases}$

Entonces, $(C, \oplus, *, 0)$ es una MV-cadena, y

$$0 < c < 2c < \dots < (n-1)c < nc < \dots < (nc)^* < (n-1)c^* < \dots < (2c)^* < c^* < 1.$$

En lo que sigue, la letra A denotará una MV-álgebra si no se indica otra cosa.

Proposición 2.1.4. Para cualquier $x, y, z \in A$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $0 \leq x \leq 1$,
2. $x \leq y$ si y solo si $y^* \leq x^*$,
3. $x \odot y \leq z$ si y solo si $x \leq y^* \oplus z$,
4. $x \leq y$ entonces $x \oplus z \leq y \oplus z$ y $x \odot z \leq y \odot z$,
5. $x \odot z^* \leq x y^* \oplus y \odot z^*$,
6. $x \odot (y \oplus z) \leq y \oplus (x \odot z)$.

Lema 2.1.5. Para todo $x, y, z \in A$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $x \leq y$,
2. $x^* \oplus y = 1$,
3. $x \odot y^* = 0$,
4. $y = x \vee y$,
5. Existe un elemento $z \in A$ tal que $x \oplus z = y$,
6. $y^* \leq x^*$,
7. $x \oplus z \leq y \oplus z$ para todo $z \in A$,
8. $x \odot z \leq y \odot z$ para todo $z \in A$.

Lema 2.1.6. Si $x \ominus y = 0 = y \ominus x$ entonces $x = y$.

Demostración. Tenemos que

$$(x^* \oplus y)^* = 1^*(y^* \oplus x)^* =$$

es equivalente a

$$x \ominus y = 0 = y \ominus x$$

entonces por el 2 del Lema 2.1.5 x es igual a y . □

Lema 2.1.7. *Si $x, y \in A$ entonces:*

1. $x \odot y \leq x \wedge y \leq x, y \leq x \vee y \leq x \oplus y,$
2. $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*,$
3. $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*,$
4. $x \oplus y = (x \vee y) \oplus (x \wedge y),$
5. $x \odot y = (x \vee y) \odot (x \wedge y),$
6. $x \wedge y = 0$ entonces $x \oplus y = x \vee y,$
7. $x \vee y = 1$ entonces $x \odot y = x \wedge y.$

Lema 2.1.8. *Para todo $x, y, z \in A$, se tiene que:*

1. $x \odot y \leq x \wedge y \leq x, y \leq x \vee y \leq x \oplus y,$
2. $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z),$
3. $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z),$
4. $(x \oplus y) \oplus (x \odot y) = x \oplus y,$
5. Si $x \odot y = x \odot z$ y $x \oplus y = x \oplus z$, entonces $y = z.$
6. $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0,$
7. $x = (x \wedge y) \oplus (x \ominus y).$

Lema 2.1.9. *Sea A una MV-álgebra. Para cualesquiera $x, y \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $x \oplus y = y;$
2. $x \odot y = x;$
3. $x \wedge y^* = 0;$
4. $x^* \vee y = 1.$

Lema 2.1.10. *En una MV-álgebra A las operaciones $\oplus, \odot$ y $\ominus$ cumplen las siguientes propiedades:*

1. Si $x \leq y$ entonces $x \ominus z \geq y \ominus z.$

$$2. \ x \ominus (y \oplus x) = (x \ominus y) \ominus z.$$

Lema 2.1.11. Sean $x, a \in A$. Si $x \oplus a = a$ y $x \oplus a^* = a^*$, entonces $x = 0$.

Demostración. Supongamos que $x \oplus a = a$ y $x \oplus a^* = a^*$. Entonces, por el Lema 2.1.8 1, se tiene $x \leq x \oplus a = a$. Además, por el Lema 2.1.9 3, se cumple que

$$x \wedge a = x \wedge (a^*)^* = 0.$$

Por lo tanto, $x = x \wedge a = 0$. □

Definición 2.1.12. Un **MV-ideal** de una MV-álgebra A es un subconjunto no vacío $I \subseteq A$, tal que para todo $x, y \in A$:

1. Si $y \leq x \in I$ entonces $y \in I$,
2. Si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$.
3. Si $x, y \in I$ entonces $x \oplus y \in I$

Si I satisface 1. y 2., diremos que I es un **ideal**.

Definición 2.1.13. Un **MV-filtro** es un subconjunto no vacío $F \subseteq A$, tal que para todo $x, y \in A$:

1. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.
2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$,
3. Si $x, y \in F$ entonces $x \odot y \in F$

Si F satisface 1. y 2., diremos que F es un **filtro**.

Definición 2.1.14. Se dice que una MV-álgebra A es **simple** si sus únicos ideales son $\{0\}$ y A .

Definición 2.1.15. Dada una MV-álgebra A , se define la **función distancia** $d : A \times A \rightarrow A$, como

$$d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x).$$

Teorema 2.1.16. La función distancia d , cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) \oplus d(z, y)$.

Lema 2.1.17. $d(x, y) = d(x^*, y^*)$.

Demostración.

$$(x \oplus y) \oplus (y \oplus x) = (x^* \odot y^*) \oplus (y^* \odot x^*)$$

$$(x \odot y^*) \oplus (y \odot x^*) = (x^* \odot y) \oplus (y^* \odot x)$$

Dado que $\oplus$ y $\odot$ son conmutativas, tenemos que $d(x, y) = d(x^*, y^*)$. $\square$

Lema 2.1.18. *Una MV-álgebra A es finita si y solo si A es isomorfa a un producto finito de cadenas finitas, en símbolos,*

$$A \cong L_{n_1} \times L_{n_2} \times \cdots \times L_{n_k}$$

para algunos enteros $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$. Esta representación es única, salvo el orden de los factores.

Lema 2.1.19. *Sea I un ideal de una MV-álgebra A . Define una relación binaria $\equiv_I$ en A mediante:*

$$x \equiv_I y \iff d(x, y) \in I.$$

Entonces, $\equiv_I$ es una congruencia.

Recíprocamente, si $\equiv$ es una congruencia en A , entonces $\{x \in A \mid x \equiv 0\}$ es un ideal, y $x \equiv y$ si y solo si $d(x, y) = 0$. Por lo tanto, la correspondencia $I \mapsto \equiv_I$ es una biyección entre el conjunto de ideales de A y el conjunto de congruencias en A .

Sea I un ideal de una MV-álgebra A . Dado $x \in A$, la clase de equivalencia de x con respecto a $\equiv_I$ será denotada como x/I , y el conjunto cociente $A/\equiv_I$ será A/I . Dado que $\equiv_I$ es una congruencia, en el conjunto A/I se definen las siguientes operaciones:

$$(x/I)^* = x^*/I \quad \text{y} \quad (x/I) \oplus (y/I) = (x \oplus y)/I.$$

La estructura $(A/I, \oplus, *, 0/I)$ resulta ser una MV-álgebra, llamada el **álgebra cociente** de A por el ideal I . Además, la correspondencia $x \mapsto x/I$ define un homomorfismo natural ρ_I desde A hacia A/I .

Lema 2.1.20. *Sea I un ideal de una MV-álgebra A , y $a, b \in A$. Entonces,*

$$a/I = b/I \iff d(a, b) \in I \iff (a \odot b^* \in I \text{ y } b \odot a^* \in I).$$

Proposición 2.1.21. *Sea Ω un conjunto de índices, y $A = \prod_{i \in \Omega} A_i$ el producto directo de una familia $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ de MV-álgebras. Para cada $i \in \Omega$, si I_i es un ideal de A_i , entonces el producto cartesiano $\prod_{i \in \Omega} I_i$ de conjuntos I_i es un ideal de A , y*

$$A / \prod_{i \in \Omega} I_i \cong \prod_{i \in \Omega} (A_i / I_i).$$

Proposición 2.1.22. Sea Ω un conjunto finito de índices, y $A = \prod_{i \in \Omega} A_i$ el producto directo de una familia $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ de MV-álgebras. Si K es un ideal de A , entonces para cada $i \in \Omega$, existe un ideal I_i de A_i tal que

$$K = \prod_{i \in \Omega} I_i.$$

Lema 2.1.23. Sean A una MV-álgebra y $B \subseteq A$, se define

$$B^* = \{b^* : b \in B\}.$$

Si I es un MV-ideal de A entonces I^* es un MV-filtro de A .

Demostración. Sea $x \in I^*$ y $x < y$, se sabe que $x^* \in I$, y por la Proposición 2.1.4 $x^* > y^*$ por tanto $y^* \in I$ y hemos probado la primera condición de MV-ideal. 2 se tiene inmediatamente por el Lema 2.1.7, 3. Sean $x, y \in I^*$ entonces por propiedades de los ideales $(x \odot y)^* = x^* \oplus y^* \in I$ por tanto $x \odot y \in I^*$. $\square$

Definición 2.1.24. Sean A y B MV-álgebras. La función $f : A \rightarrow B$ es un **homomorfismo** si satisface las siguientes condiciones para todo $x, y \in A$:

1. $f(0) = 0$,
2. $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$,
3. $f(x^*) = f(x)^*$.

Lema 2.1.25. Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de MV-álgebras. Para cualesquiera $x, y \in A$, se cumple que:

1. $f(1) = 1$,
2. $f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$,
3. $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$,
4. $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$,

Notación

Para $a \in A$, $\star \in \{\oplus, \odot, \ominus, \vee, \wedge\}$ y $U, V \subseteq A$ definimos:

1. La función $\oplus_a : A \rightarrow A$ así $\oplus_a(x) = a \oplus x$,
2. La función $\odot_a : A \rightarrow A$ así $\odot_a(x) = a \odot x$,
3. La función $_a\ominus : A \rightarrow A$ así $_a\ominus(x) = a \ominus x$,

4. La función $\ominus_a : A \rightarrow A$ así $D_a(x) = x \ominus a$,
5. La función $\vee_a : A \rightarrow A$ así $\vee_a(x) = a \vee x$,
6. La función $\wedge_a : A \rightarrow A$ así $\wedge_a(x) = a \wedge x$,
7. $a \star U = \{a \star u : u \in U\}, U \star V = \{u \star v : u \in U, v \in V\}, U^* = \{u^* : u \in U\}$.

2.2. Álgebras libres y funciones de McNaughton

Dada una clase K de álgebras (como los grupos, anillos o MV-álgebras) y un conjunto X , es de utilidad conocer el álgebra más general de la clase K generada por X . Por ejemplo, si K es la clase de los semigrupos y $X = \{x\}$, en este caso hay varios semigrupos generados por X , el más simple $(X, \cdot)$, donde $x \cdot x = x$ y el más general es $(Y, \cdot)$ donde $Y = \{x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ y $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, el segundo semigrupo es el "más general", dado que todo semigrupo puede ser generado por un elemento es una imagen homomorfa de $(Y, \cdot)$, estas álgebras van a ser llamadas álgebras libres [9]

En esta sección vamos a estudiar las álgebras libres cuando K es la clase de las MV-álgebras y su relación con las funciones de McNaughton.

Definición 2.2.1. *Un MV-term o término en k variables $x_1, x_2, \dots, x_k$, es una cadena finita de símbolos sobre el alfabeto*

$$\{0, *, \oplus, x_1, \dots, x_k\}$$

obtenida inductivamente, con las siguientes reglas (Ver [5])

1. 0 y x_i para $i = 1, \dots, k$ son MV-términos.
2. Si τ es un MV-término, τ^* también lo es.
3. Si τ y σ son MV-términos, $\tau \oplus \sigma$ también lo es.

Para cada MV-álgebra A y un índice k los elementos de A^k tienen la forma:

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_\alpha, \dots)_{\alpha < k},$$

donde $x_\alpha \in A$, para cada $\alpha < k$. La α -ésima proyección $\pi_\alpha : A^k \rightarrow A$ es la función $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$. Denotamos $Proj_A^k = \{\pi_\alpha : \alpha < k\}$ el conjunto de proyecciones de A^k .

Definición 2.2.2. Dada A una MV-álgebra, la **MV-álgebra** $Term_k^A$ es el conjunto de funciones término $\tau_A : A^k \rightarrow A$ dadas por (Ver [9] definición 1.4.1)

1.

$$x_A^\alpha = \pi_\alpha : A^k \rightarrow A$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto x_\alpha$$

2. 0^A es la función constante 0 de $Term_k^A$.

3. Dadas ρ^A, σ^A funciones término, definimos por inducción:

a) $(\rho^*)^A := (\rho^A)^*$ es una función término.

b) $(\rho \oplus \sigma)^A := \rho^A \oplus \sigma^A$ es una función término.

Definición 2.2.3. La MV-álgebra $Free_n$ es la MV-álgebra libre con n generadores.

Teorema 2.2.4. Para cada $n \geq 1$, $Term_n^{[0,1]}$ es la MV-álgebra libre $Free_n$, es decir:

$$Free_n \approx Term_n^{[0,1]}$$

Definición 2.2.5. Decimos que la función $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es una **función de McNaughton** si:

1. f es una función continua respecto a la topología natural de $[0, 1]^n$,
2. Existe un número finito de funciones lineales con coeficientes enteros, $q_1, \dots, q_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(a_1, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$ hay un $i \in 1, \dots, t$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = q_i(a_1, \dots, a_n)$.

Teorema 2.2.6. Teorema de McNaughton

$$Free_n \approx M_{c_n}$$

Donde M_{c_n} es el conjunto de las funciones de Mcnaughton con dominio $\mathbb{R}^n$. Una demostración de este teorema se encuentra en [6].

Por el isomorfismo anterior, la MV-álgebra libre con un generador, $Free_1$, se puede ver como el conjunto de funciones $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que:

$$f(x) = \begin{cases} m_1x + b_1 & \text{si } 0 \leq x < a_1 \\ \vdots & \\ m_ix + b_i & \text{si } a_{i-1} \leq x \leq a_i \\ \vdots & \\ m_kx + b_k & \text{si } a_{k-1} \leq x \leq l \end{cases}$$

con $b_i, m_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}$ y con las operaciones definidas de la siguiente manera, $f, g \in Free_1$

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &= \min(f(x) + g(x), 1) \\ f^*(x) &= 1 - f(x) \\ (f \odot g)(x) &= \max(f(x) + g(x) - 1, 0) \\ (f \ominus g)(x) &= \max(f(x) - g(x), 0).\end{aligned}$$

Ejemplos. Dadas f y $g \in Free_1$ tales que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/4 \\ 4x - 1 & \text{si } 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -4x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/4 \\ 0 & \text{si } 1/4 < x \leq 1 \end{cases}$$

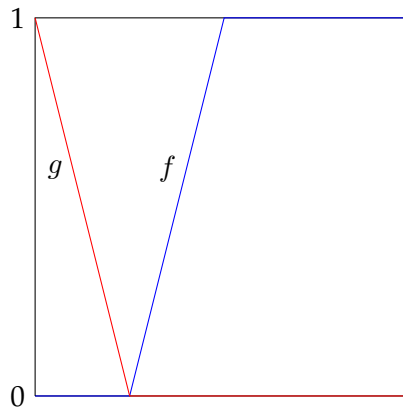


Figura 2.1

Entonces para la suma tenemos lo siguiente,

$$(f \oplus g)(x) = \begin{cases} -4x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/4 \\ 4x - 1 & \text{si } 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

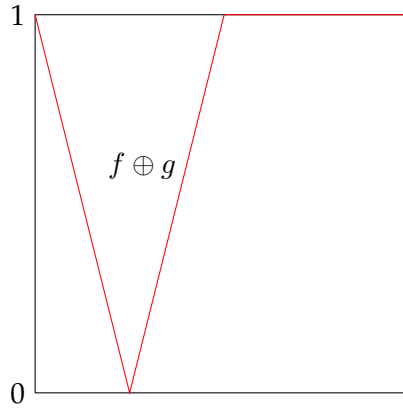


Figura 2.2

2.3. MV-álgebras y ℓu -grupos abelianos

Esta sección contiene algunos de los resultados más importantes de la teoría de las MV-álgebras. El primero es la equivalencia categórica de Mundici entre la categoría de las MV-álgebras y la categoría de los ℓu -grupos abelianos con unidad fuerte [18, 15]. La correspondencia biyectiva entre las MV-cadenas y los ℓu -grupos abelianos totalmente ordenados, con unidad fuerte, fue establecida por Chang en [4].

Denotamos por $\mathcal{MV}$ a la categoría de las MV-álgebras. Los objetos de $\mathcal{MV}$ son MV-álgebras y los morfismos son los homomorfismos de MV-álgebras. Denotaremos por $\mathcal{UAG}$ la categoría de ℓ -grupos con unidad fuerte. Los elementos de esta categoría son pares (G, u) , donde G es un ℓ -grupo abeliano y u es una unidad fuerte de G . Los morfismos serán homomorfismos de ℓ -grupos que preserven la unidad fuerte. Esto es, $h : (G, u) \rightarrow (H, v)$ es un homomorfismo de ℓ -grupos con unidad fuerte si $h : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de ℓ -grupos y $h(u) = v$.

Para probar la equivalencia categórica, definimos dos funtores:

$$\Gamma : \mathcal{UAG} \rightarrow \mathcal{MV} \quad \text{y} \quad \Xi : \mathcal{MV} \rightarrow \mathcal{UAG}.$$

La definición del funtor Γ es directa:

$$\Gamma(G, u) := [0, u]_G \quad \text{si } (G, u) \text{ es un } \ell\text{-grupo con unidad fuerte,}$$

$$\Gamma(h) := h|_{[0, u]} \quad \text{si } h : (G, u) \rightarrow (H, v) \text{ es un homomorfismo de } \ell\text{-grupos con unidad fuerte.}$$

El funtor Ξ es más complejo de definir, es decir, dada una MV-álgebra A , construir un ℓ -grupo con unidad fuerte G_A y una unidad fuerte u tal que A sea isomorfa a $[0, u]_{G_A}$. Entonces debemos probar que un ℓ -grupo G con unidad fuerte u es isomorfo a $G_{[0, u]_G}$.

Para cualquier MV-álgebra A , el grupo G_A se conoce como el *grupo de Chang* de A porque, en el caso particular cuando A es una MV-cadena, el ℓ -grupo G_A fue definido por primera vez por Chang [4].

La construcción en el caso general y la equivalencia categórica entre las MV-álgebras y los ℓ -grupos con unidad fuerte se deben a Mundici en [14].

Si A es una MV-álgebra, entonces el isomorfismo de MV-álgebras entre A y $[0, 1]_{G_A}$ se sigue por un cálculo sencillo. Si G es un ℓ -grupo con unidad fuerte u , entonces el isomorfismo de ℓ -grupos con unidad fuerte entre G y $G_{[0, u]_G}$ se sigue del hecho de que $[0, u]$ genera G .

Capítulo 3

Sobre MV-álgebras (semi, para, quasi) topológicas

En este capítulo se estudian las MV-álgebras dotadas de una estructura topológica, destacando su clasificación en términos de propiedades de continuidad de las operaciones. La incorporación de una topología en las MV-álgebras permite investigar la interacción entre su estructura algebraica y topológica, lo que enriquece el marco de estudio tradicional y abre la puerta a nuevas aplicaciones matemáticas.

El primer concepto en ser introducido fue el de MV-álgebra topológica y sus propiedades, este lo hizo Hoo en [10].

Definición 3.0.1. Diremos que una función $f : A \times A \rightarrow B$ es **semicontinua** si para todo $a, x \in A$ y cualquier vecindad abierta U de $f(a, x)$, existe una vecindad abierta V de x tal que $f(a, V) \subseteq U$.

M. Najafi, G.R. Rezaei y N. Kouhestani definen en [17] lo siguiente,

Definición 3.0.2. Sea A una MV-álgebra con una topología τ entonces (A, τ) es llamada una:

1. MV-álgebra **semitopológica** si la operación $\oplus$ es semicontinua.
2. MV-álgebra **paratopológica** si la operación $\oplus$ es continua.
3. MV-álgebra **quasitopológica** si la operación $\oplus$ es semicontinua y la operación $*$ es continua.
4. MV-álgebra **topológica** si las operaciones $\oplus$ y $*$ son continuas.

Ejemplo 3.0.3. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ con la topología usual de $\mathbb{R}$ es una MV-álgebra topológica.

Ejemplos. $\mathbb{L}_3 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ con $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1/3\}, \{0, 1/3, 2/3\}, \mathbb{L}_3\}$ es una MV-álgebra paratopológica.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{L}_3$ y W un abierto de $x \oplus y$, verifiquemos que $\oplus$ es continua:

Caso 1. Si $x \oplus y = 0$, la única opción es que $x = 0 = y$. Haciendo $U = \{0\} = V$ tenemos que $U \oplus V \subseteq W$.

Caso 2. Si $x \oplus y = 1/3$, basta con considerar el caso $W = \{0, 1/3\}$, tenemos que $x = 0$ ó $y = 0$, haciendo $U = \{0\}$ y $V = \{0, 1/3\}$ entonces $U \oplus V \subseteq W$.

Caso 3. Si $x \oplus y = 2/3$, por tanto basta con verificar cuando $x = 0$ y $y = 2/3$ y cuando $x = 1/3 = y$, en el primer caso haciendo $U = \{0\}$ y $V = \{0, 1/3, 2/3\}$ tenemos lo que queríamos y en el segundo caso con $U = \{0, 1/3\} = V$, en cualquier caso $U \oplus V \subseteq W$.

Caso 4. Si $x \oplus y = 1$, veamos cuando $x = 0$ y $y = 1$, haciendo $U = \{0\}$ y $V = \mathbb{L}_3$. Si $x = 1/3$ y $y = 2/3$ basta con escoger $U = \{0, 1/3\}$ y $V = \{0, 1/3, 2/3\}$ entonces $U \oplus V \subseteq \mathbb{L}_3$.

Ahora consideremos $W = \{0, 1/3\}$ un abierto de $1/3$, note que no existe abierto U de $(1/3)^* = 2/3$ tal que U^* este contenido en W , entonces $*$ no es continua. □

Ejemplo 3.0.4. Sea $A = \{0, a, b, 1\}$ donde $0 < a, b < 1$, consideremos las siguientes tablas

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
1	1	b	a	0

Sea $\tau = \{A, \{0, b\}, \{1, a\}, \emptyset\}$, (A, τ) con las operaciones definidas anteriormente es una MV-álgebra topológica.

Teorema 3.0.5. Sea A una MV-álgebra dotada de una topología τ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. (A, τ) es una MV-álgebra quasitopológica.
2. $\odot$ es semicontinua y $*$ es continua.
3. $\ominus$ es semicontinua y $*$ es continua.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$.) La función $*$ es continua por tanto semicontinua y la función $\odot$ es una composición de funciones semicontinuas $\oplus$ y $*$ entonces es semicontinua.

2 $\Rightarrow$ 3.) De forma similar $\ominus$ es una composición de $\odot$ y * , entonces es semicontinua.

2 $\Rightarrow$ 1.) Solo es necesario probar que $\odot$ es semicontinua, sean $x, a \in A$ y V un abierto de $x \oplus a^*$, consideremos $x^* \odot a^* = (x \oplus a)^*$, entonces V^* es un abierto de $x^* \odot a$, por la semicontinuidad de $\odot$ existe un abierto U de x^* tal que $U \odot a^* \subseteq V^*$ de ahí tenemos que $U \oplus a \subseteq V$ y hemos demostrado que $\oplus$ es semicontinua.

3 $\Rightarrow$ 2.) Note que $x \odot y = x \ominus y^*$, entonces $\odot$ es la composición de una función continua * y una función semicontinua $\ominus$, por tanto también es una función semicontinua. $\square$

Teorema 3.0.6. *Sea (A, τ) una MV-álgebra quasitopológica. Si el ideal $\{0\}$ es un conjunto abierto, entonces (A, τ) es una MV-álgebra topológica.*

Demostración. Sea $x \in A$. Dado que (A, τ) es una MV-álgebra quasitopológica, como la función $\odot$ es semicontinua, $x \odot x = 0$. Por lo tanto, existe una vecindad abierta V de x tal que $V \odot x = x \odot V = \{0\}$. Ahora, sea $y \in V$. Dado que $y \odot x = x \odot y = 0$ entonces por el Lema 2.1.6, tenemos que $y = x$. Esto implica que $V = \{x\}$, y haciendo el mismo proceso para cada $x \in A$, se puede concluir que τ debe ser la topología discreta en A . Por lo tanto, (A, τ) es una MV-álgebra topológica. $\square$

Capítulo 4

Topología filtro

Desde sus orígenes, la topología filtro ha jugado un papel importante en la evolución de la topología general, como parte de la necesidad de extender y generalizar conceptos como convergencia y continuidad más allá de los espacios métricos clásicos. En este contexto, los filtros ofrecen una herramienta más abstracta y flexible que las sucesiones para tratar problemas topológicos, y su aparición marcó un avance en la teoría de espacios topológicos no necesariamente definidos por distancias.

En esta sección estudiaremos cómo toda MV-álgebra puede ser equipada con una topología filtro y cuáles son las condiciones para tener una MV-álgebra topológica con una topología filtro.

Definición 4.0.1. Para todo filtro F , el subconjunto $F(c, r) := \{x \in A : r \ominus d(x, c) \in F\}$ es llamado una **F-bola abierta** centrada en $c \in A$ con radio $r \in F$.

Lema 4.0.2. Sean $r \in F$ y $x \in F(y, r)$. Entonces existe $s \in F$ tal que $F(x, s) \subseteq F(y, r)$.

Note que por el Lema 4.0.2 toda F-bola abierta es, en efecto, un abierto. El conjunto $\{F(c, r) : c \in A, r \in F\}$ de todas las F-bolas abiertas forma una base para una topología τ_F en A . La topología τ_F generada por un filtro F es llamada la **topología filtro** en A .

Lema 4.0.3. Sean $x \in A$ y $r \in F$. Entonces:

1. $F(x, r) = \{y \in A : d(x, y) \in F(0, r)\}$
2. $F(0, r)$ es un ideal.

Demostración. La primera parte se tiene de la definición de bola.

Para probar 2., sean $x, y \in F(0, r)$ y $z < x \vee y$. Entonces

$$r \ominus z \geq r \ominus (x \vee y) = (r \ominus x) \wedge (r \ominus y) \in F$$

por tanto $r \ominus z \in F$, así $z \in F(0, r)$. $\square$

Ejemplo 4.0.4. Un ejemplo de topología filtro es el siguiente: Para la MV-álgebra $Free_1$, se puede ver que, $F_{x_0} = \{f \in Free_1 : f(x_0) = 1\}$ es un filtro de $Free_1$. Utilizando los resultados anteriores para topologías filtro, si $f \in F(c, r)$, $r \ominus d(c, f) \in F_{x_0}$

$$\begin{aligned} \max(r - d(c, f), 0)(x_0) &= 1 \\ r(x_0) - d(c(x_0), f(x_0)) &= 1 \\ d(c(x_0), f(x_0)) &= 0 \\ c(x_0) &= f(x_0) \end{aligned}$$

entonces las bolas tienen la siguiente forma

$$F(c, r) = \{f \in Free_1 : f(x_0) = c(x_0)\}$$

Note que la elección del radio no determina la bola, para este caso particular las bolas con el mismo centro corresponden al mismo conjunto.

Proposición 4.0.5. Si $f : A \rightarrow A$ es una función tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para cualquier $x, y \in A$, entonces f es continua con τ_F .

Demostración. Sea $c \in A$. Para cada $x \in A$ y $r \in F$ tenemos que si $x \in F(c, r)$ entonces $r \ominus d(f(c), f(x)) \geq r \ominus d(c, x) \in F$ por tanto $f(F(c, r)) \subseteq F(f(c), r)$ y f es continua en c . $\square$

Teorema 4.0.6. Toda MV-álgebra dotada con una topología filtro es una MV-álgebra quasitopológica.

Demostración. Sea (A, τ) una MV-álgebra con una topología filtro. Note que

$$d(a \oplus x, a \oplus y) \leq d(x, y) \oplus d(a, a) = d(x, y).$$

Por la proposición anterior $\oplus_a$ es continua y por tanto $\oplus$ es semicontinua. Además tenemos que $d(x^*, y^*) = d(x, y)$, nuevamente por la proposición anterior $*$ es continua. $\square$

En [13], Luan, Weber y Yang, muestran con el siguiente ejemplo que una MV-álgebra con la topología filtro no es siempre topológica, y dan condiciones para que una MV-álgebra dotada de una topología filtro sea una MV-álgebra topológica.

Ejemplo 4.0.7. Consideremos la MV-álgebra $A := [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A que cumple con las siguientes propiedades:

1. $a_n(x) \geq a_{n+1}(x) > 0$ para todo $n, x \in \mathbb{N}$,

2. $a_n(x) \rightarrow 0$ Si $(n \rightarrow \infty)$ para todo $x \in \mathbb{N}$,
3. $\frac{a_n(x)}{a_m(x)} \rightarrow 1$ Si $(x \rightarrow \infty)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Estas condiciones las cumple $a_n(x) = \frac{1}{n+x}$.

Sea $F := \{\alpha \in A : \exists n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha\}$ un filtro de A . Vamos a mostrar que no existe un $U \times V$ abierto de $(0, 0)$ tal que $U \oplus V \subseteq F(0, a_1)$, dado que $\{F(0, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para el sistema de vecindades del 0, basta con verificar que para todo $a_n \in \mathbb{N}$, $F(0, a_n) \oplus F(0, a_n)$ no está contenido en $F(0, a_1)$.

Por 3, existe un $x_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_n(x_0)}{a_1(x_0)} > \frac{4}{5}$, luego por 2, existe $m > n$ tal que $a_m(x_0) < \frac{1}{5}a_1(x_0)$. Sea $a := a_n \ominus a_m = ya_n - a_m$ y $b := a \oplus a$. Entonces $a(x_0) > \frac{3}{5}a_1(x_0)$ y $b(x_0) \geq a_1(x_0)$. Se sigue que: $a \in F(0, a_n)$ pues $a_n \ominus a = a_m \in F$, pero $b \notin F(0, a_1)$ así $(a_1 \ominus b)(x_0) = 0$ más aún $a_1 \ominus b \not\geq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.0.8. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. (A, τ_F) es una MV-álgebra topológica.
2. Para toda $U \in \mathcal{N}(\tau_F, 0)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(\tau_F, 0)$ tal que para todo $x \in V$, $x \oplus x \in U$.
3. Para todo $r \in F$ existe un $\varepsilon \in F$ tal que para todo $x \in A$, $\varepsilon \ominus x \in F$ implica que $r \ominus (x \oplus x) \in F$.
4. Para todo $U \in \mathcal{N}(\tau_F, 0)$ existe un $V \in \mathcal{N}(\tau_F, 0)$ tal que para todo $x \in A$ si $y, z \in V$, $z \leq y \oplus z$ entonces $x \in U$.
5. Hay una única uniformidad u en A tal que (A, u) es una MV-álgebra uniforme y τ_F coincide con la u -topología.
6. Los conjuntos $U^* := \{(x, y) \in A^2 : d(x, y) \in U\}$, $U \in \mathcal{N}(\tau_F, 0)$ forman una base para una uniformidad en A con la cual su topología es τ_F .

Donde $\mathcal{N}(\tau_F, 0)$ es la colección de vecindades del cero.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$.) Como $\oplus$ es continua, para toda vecindad U del 0, existen V_1 y V_2 una vecindades del 0 tal que $V_1 \oplus V_2 \subseteq U$, sea $V = V_1 \cap V_2$ entonces $V \oplus V \subseteq U$.

$2 \Leftrightarrow 3$. Sea $U \in \mathcal{N}(0, \tau_F)$, existe $F(0, r) \subseteq U$, por hipótesis una vecindad $V \in \mathcal{N}(0, \tau_F)$ tal que $V \oplus V \subseteq U$ y existe ε que satisface que $F(0, \varepsilon) \subseteq V$ de donde sigue que $F(0, \varepsilon) \oplus$

$F(0, \varepsilon) \subseteq U$. Ahora si $\varepsilon \ominus x \in F \Leftrightarrow x \in F(0, \varepsilon)$, luego $x \oplus x \in F(0, r) \Leftrightarrow r \ominus (x \oplus x) \in F$.

$2 \Leftrightarrow 4$. Sea $U, V \in U(\tau_F, 0)$ de acuerdo con la condición 2 del Lema 2.1, podemos asumir que U y V son ideales reticulares. Sea $x \leq y \oplus z$ y $y, z \in V$. Entonces $a := y \vee z \in V$, por lo tanto $a \oplus a \in U$. Por lo tanto, $x \in U$ ya que $x \leq a \oplus a$.

$6 \Rightarrow 2$.) Sean $U, V \in U(\tau_F, 0)$ con $V^* \circ V^* \subseteq U^*$. Podemos asumir que V es un ideal reticular. Para cualquier $x \in V$ tenemos $d(x \oplus x, x) \leq d(x, 0) = x$, por lo tanto $d(x \oplus x, x), d(x, 0) \in V$, así $(x \oplus x, x), (x, 0) \in V^*$. En consecuencia $(x \oplus x, 0) \in V^* \circ V^* \subseteq U^*$. Así $x \oplus x \in U$.

$5 \Rightarrow 1$.) es claro de la definición de uniformidad.

$4 \Leftrightarrow 5 \Rightarrow 6$.) se deduce de [Teorema 2.1] [1]. □

Ejemplo 4.0.9. Consideremos la MV-álgebra y la topología del Ejemplo 4.0.4, verifiquemos si es una MV-álgebra topológica, si $\{0\}$ es un abierto, debe existir una bola $F(0, r)$ contenida en $\{0\}$, $F(0, r) = \{f \in Free_1 : f \ominus r \in F_{x_0}\} = \{f \in Free_1 : f(x_0) \ominus r(x_0) = 1\} = \{f : f(x_0) = 0\}$. Note que siempre se puede construir una función de McNaughton, diferente a la función nula, que se anule en x_0 , de la siguiente forma:

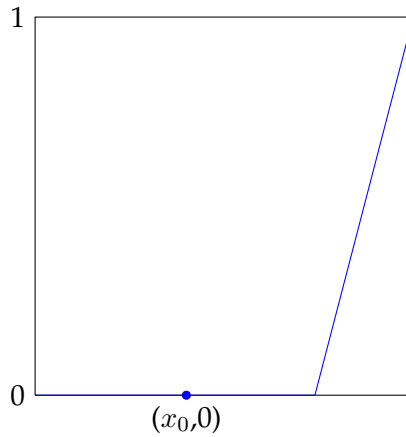


Figura 4.1

Entonces 0 no es un abierto y no podemos concluir si es una MV-álgebra topológica usando el Teorema 3.0.6.

Ahora consideremos una bola abierta del cero V , note que V corresponde a todas las funciones de $Free_1$ que se anulan en x_0 , de igual forma las funciones del conjunto $V \oplus V$ también se anulan

en x_0 entonces $V \oplus V \subset V$, así $Free_1$ y esta topología son una MV-álgebra topológica por la condición 2 del Teorema 4.0.8.

Capítulo 5

MV-álgebra topológica

En este capítulo, estudiamos las MV-álgebras dotadas de una topología compatible con sus operaciones. Veremos que la topología de una MV-álgebra topológica está determinada de manera única. También abordamos aspectos clave como los axiomas de separación, se introduce la MV-álgebra topológica ideal y se estudia la relación entre ideales y topología, la conexidad y las condiciones de trivialidad o discretización.

Lema 5.0.1. *En una MV-álgebra topológica las operaciones $\odot, \ominus, \vee$ y $\wedge$ son continuas.*

Es inmediato pues todas las operaciones mencionadas puede ser vistas como composiciones de $\oplus$ y $*$.

Proposición 5.0.2. *Sea τ una topología sobre una MV-álgebra A . (A, τ) es una MV-álgebra topológica si y sólo si la función $F : A \times A \rightarrow A$ definida $F(x, y) = x \oplus y^*$ es continua.*

Demostración. Supongamos que (A, τ) es un MV-álgebra topológica. Dado que las funciones $I(x) = x$ y $*(x) = x^*$ de A en A son continuas, la funciones $f(x, y) = (x, y^*) = (I(x), *(y))$ es una aplicación función de $A \times A$ en $A \times A$. Por lo tanto, $F = \oplus \circ f$ es continua. Recíprocamente, supongamos que F es continua. Entonces $K = F|_{\{0\} \times A}$ es continua. Definimos $h : A \rightarrow A \times A$ por $h(x) = (0, x)$. Claramente, h es continua. Por lo tanto, $*$ es continua. Ahora mostramos que $\oplus$ es continua. Sea $f(x, y) = (x, y^*)$ una aplicación de $A \times A \rightarrow A \times A$. Dado que las funciones $I(x) = x$ y $*$ son continuas, f también es continua. $\square$

5.1. Determinación única de una MV-álgebra topológica

Mostraremos que la topología τ de una MV-álgebra topológica (A, τ) esta completamente determinada por el sistema de vecindades de un punto a .

Definición 5.1.1. Sean $a \in A$ y $U \subseteq A$ definimos:

$$U(a) = \{x \in A : a \ominus x \in U \text{ y } x \ominus a \in U\};$$

$$U^{(a)} = \{x \in A : a \vee x \in U \text{ y } a \ominus x \in U\}$$

De la definición se tiene que $U(a) \subseteq V(a)$ y $U^{(a)} \subseteq V^{(a)}$ si $U \subseteq V \subseteq A$.

Lema 5.1.2. $(U(a))^* = U(a^*)$ para todo $a \in A$.

Demostración. Sea $x \in (U(a))^*$ entonces $a \ominus x^*, x^* \ominus a \in U$ y $a \ominus x^* = x \ominus a^*, x^* \ominus a = a^* \ominus x$ así $x \in U(a^*)$ y $(U(a))^* = U(a^*)$. $\square$

Lema 5.1.3. Sea U un abierto (cerrado) de (A, τ) entonces $U(a)$ y $U^{(a)}$ también son abiertos (cerrados).

Demostración. Tenemos que $U(a) = {}_a\ominus^{-1}(U) \cap \ominus_a^{-1}(U)$ y $U^{(a)} = \vee_a^{-1}(U) \cap L_a^{-1}(U)$, puesto que $L_a, \vee_a$ y D_a son funciones continuas $U(a)$ y $U^{(a)}$ son abiertos (cerrados). $\square$

Ejemplo 5.1.4. Consideremos $Free_1$ con la topología filtro del ejemplo 4.0.4 y sea $U = F(c, r)$ con $c \in Free_1$ y $r \in F_{x_0}$, entonces si,

$$f \in U(a) = \{f \in Free_1 : a \ominus f, f \ominus a \in U\}$$

es equivalente a tener que $(a \ominus f)(x_0) = (f \ominus a)(x_0) = c(x_0)$, pero $(a \ominus f)(x_0)$ o $(f \ominus a)(x_0)$ es igual a cero, por tanto para $c(x_0) \neq 0$, $U(a)$ es el conjunto vacío. Si $c(x_0) = 0$ entonces $(a \ominus f)(x_0) = (f \ominus a)(x_0) = 0$, lo que implica que $a(x_0) = f(x_0)$ y por tanto $U(a) = F(a, r)$.

Lema 5.1.5. Sea (A, τ) una álgebra MV-topológica, y $a \in A$. Si U es una base del sistema de vecindades abiertas del 0, entonces $\{U(a) : U \in \mathcal{U}\}$ es una base de vecindades abiertas de a .

Demostración. Sea V un abierto de a , queremos demostrar que existe U abierto del 0 tal que $U(a) \subseteq V$. Sea $x \in U(a)$, por el Lema 2.1.8 tenemos que:

$$x = (x \wedge a) \oplus (x \ominus a)$$

$$x = (a \ominus (a \ominus x)) \oplus (x \ominus a),$$

Note que $(a \ominus 0) \oplus 0 = a$, entonces por la continuidad de las operaciones existe un abierto del 0, U tal que $(a \ominus U) \oplus U \subseteq V$, y tenemos que $x \ominus a, a \ominus x \in U(a)$ entonces $x \in (a \ominus U) \oplus U$ y $U(a) \subseteq V$. $\square$

Proposición 5.1.6. *Sea (A, τ) una MV-álgebra topológica y $\mathcal{U}$ una base del sistema de vecindades abiertas del 0. Entonces $\mathcal{U}$ satisface las siguientes condiciones:*

1. $0 \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}$;
2. Para todo $U, V \in \mathcal{U}$ y $a, b \in A$, si $U(a) \cap V(b) \neq \emptyset$, entonces para cada $y \in U(a) \cap V(b)$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W(y) \subseteq U(a) \cap V(b)$;
3. Para todo $U \in \mathcal{U}$ y $a, b \in A$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(a) \oplus V(b) \subseteq U(a \oplus b)$.

En el otro sentido, sea A una MV-álgebra y sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de A que satisface las condiciones 1, 2 y 3. Entonces la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{U(x) : x \in A, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una topología en A . Con esta topología, A es una MV-álgebra topológica.

Demostración. Supongamos que (A, τ) es una MV-álgebra topológica y $\mathcal{U}$ es una base de vecindades abiertas de 0. Es claro que 1 se cumple. Además, sabemos por el Lema 5.1.5 que $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{U(x) : x \in A, U \in \mathcal{U}\}$ es una base de la topología τ , por lo que 2 se cumple. Finalmente, dado que la operación $\oplus$ es continua y $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ es una base de la topología τ , tenemos que 3. se cumple.

Recíprocamente, supongamos que A es una MV-álgebra y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de A que satisfacen las condiciones 1, 2 y 3. Sea $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{U(x) : x \in A, U \in \mathcal{U}\}$. Para cualquier $x \in A$ y $U \in \mathcal{U}$, dado que $x \oplus x = 0$ pertenece a U por la condición 1 tenemos $x \in U(x)$, y así $A = \bigcup_{x \in A, U \in \mathcal{U}} U(x)$. Esto, junto con la condición 2, implica que $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ es una base para una topología en A . Con esta topología, por la condición 3, obtenemos que la operación $\oplus$ es continua. Finalmente, por el Lema 5.1.2, tenemos que $(U(a))^* = U(a^*)$ para cualquier $a \in A$ y $U \in \mathcal{U}$, lo que implica que la operación $*$ es continua. Así, con esta topología, A es una MV-álgebra topológica. $\square$

Teorema 5.1.7. *Sea $a \in A$, la topología τ de una MV-álgebra topológica (A, τ) esta únicamente determinada por el sistema de vecindades de a . Más aún si $\mathcal{U}$ es un sistema de vecindades del cero $\{U^{(a)} : U \in \mathcal{U}\}$ es un sistema de vecindades de a .*

Demostración. Para cualquier vecindad abierta U de a , dado que $a \vee 0 = a \ominus 0 = a \in U$, tenemos $0 \in U^{(a)}$, y por lo tanto $U^{(a)}$ es una vecindad abierta de 0 por el Lema 5.1.3. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una base de vecindad abierta de a . Para cualquier vecindad abierta V de 0, dado que $0 \oplus 0 = 0$ y $\oplus$ es continua, existe una vecindad abierta W de 0 tal que $W \oplus W \subseteq V$. Por el Lema 5.1.5, $W(a)$ es una vecindad abierta de a , y por lo tanto existe

$O \in \mathcal{U}$ tal que $O \subseteq W(a)$. Afirmamos que $O^{(a)} \subseteq V$. De hecho, dado que $O \subseteq W(a)$, tenemos $O^{(a)} \subseteq (W(a))(a)$. Recordemos que

$$(W(a))(a) = \{x \in A \mid a \vee x, a \ominus x \in W(a)\}, W(a) = \{x \in A \mid a \ominus x, x \ominus a \in W\}.$$

Para cualquier $x \in O^{(a)}$, dado que $O^{(a)} \subseteq (W(a))(a)$, tenemos $x \in (W(a))(a)$, y por lo tanto $a \vee x, a \ominus x \in W(a)$. Se sigue que $x \ominus a = (a \vee x) \ominus a \in W$ y $a \wedge x = a \ominus (a \ominus x) \in W$. Inmediatamente tenemos $x = (x \ominus a) \oplus (a \wedge x) \in W \oplus W \subseteq V$. Así, $O^{(a)} \subseteq V$, y por lo tanto $\{U(a) : U \in \mathcal{U}\}$ es una base de vecindad abierta de 0.

□

Proposición 5.1.8. Sean (A, τ_A) y (B, τ_B) MV-álgebras topológicas y sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de MV-álgebras. Denotemos el elemento cero de las MV-álgebras A y B por 0_A y 0_B , respectivamente. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es continua.
2. f es continua en 0_A .
3. f es continua en a , para algún $a \in A$.

Demostración. Sea (A, τ_A) , (B, τ_B) y f como se ha dado en el enunciado. Es claro que $1 \Rightarrow 2$ y $2 \Rightarrow 3$.

$2 \Rightarrow 1$.) Supongamos que f es continua en 0_A . Para cualquier $a \in A$ y una vecindad abierta V de $f(a)$, como $0_B \oplus f(a) = f(a)$ y la suma es continua, existen vecindades abiertas U de 0_B y W de $f(a)$ tales que $U \oplus W \subseteq V$. Observemos que $f(a) \ominus 0_B = f(a)$ y, por lo tanto, $W(f(a))$ es una vecindad abierta de 0_B por el Lema 5.1.3. Así, $U \oplus W(f(a))$ es también una vecindad abierta de 0_B . Como $f(0_A) = 0_B$ y f es continua en 0_A , existe una vecindad abierta O de 0_A tal que $f(O) \subseteq U \oplus W(f(a))$.

Afirmamos que $f(O(a)) \subseteq V$, donde $O(a) = \{x \in A \mid a \ominus x, x \ominus a \in O\}$ es una vecindad abierta de a . En efecto, para cualquier $x \in O(a)$, tenemos que $a \ominus x, x \ominus a \in O$, y así

$$f(a) \ominus f(x) = f(a \ominus x), \quad f(x) \ominus f(a) = f(x \ominus a) \in f(O) \subseteq U \cap W^{(f(a))}.$$

De lo anterior se sigue que $f(x) \ominus f(a) \in U$ y $f(a) \wedge f(x) = f(a) \ominus (f(a) \ominus f(x)) \in W$. Por la definición de $W^{(f(a))}$, aplicando el Lema 2.1.8, obtenemos que:

$$f(x) = (f(x) \ominus f(a)) \oplus (f(a) \wedge f(x)) \in U \oplus W \subseteq V.$$

Por lo tanto, $f(O(a)) \subseteq V$, y se cumple 1.

3 $\Rightarrow$ 2.) Fijemos $a \in A$ y supongamos que f es continua en a . Para cualquier vecindad abierta V de 0_B , como $0_B \oplus 0_B = 0_B$ y la suma es continua, existe una vecindad abierta U de 0_B tal que $U \oplus U \subseteq V$. Por el Lema 5.1.5, sabemos que:

$$U(f(a)) = \{y \in B \mid f(a) \ominus y, y \ominus f(a) \in U\}$$

es una vecindad abierta de $f(a)$. Como f es continua en a , existe una vecindad abierta W de a tal que $f(W) \subseteq U(f(a))$. Por el Lema 5.1.3, sabemos que:

$$W(a) = \{x \in A \mid a \ominus x, a \vee x \in W\}$$

es una vecindad abierta de 0_A .

Afirmamos que $f(W(a)) \subseteq V$. En efecto, para cualquier $x \in W(a)$, se cumple que $a \ominus x, x \ominus a \in W$, y así

$$f(a) \vee f(x) = f(a \vee x), \quad f(x) \ominus f(a) = f(x \ominus a) \in f(W) \subseteq U(f(a)).$$

De esto se sigue que $f(x) \ominus f(a) = (f(a) \vee f(x)) \ominus f(a) \in U$ y

$$f(a) \wedge f(x) = f(a) \ominus (f(a) \ominus f(x)) \in U$$

Por la definición de $U(f(a))$. Aplicando nuevamente el Lema 2.1.8, obtenemos:

$$f(x) = (f(x) \ominus f(a)) \oplus (f(a) \wedge f(x)) \in U \oplus U \subseteq V.$$

Por lo tanto, $f(W(a)) \subseteq V$, y se cumple 2. □

5.2. Separación y regularidad

Lema 5.2.1. Sean (A, τ) una MV-álgebra topológica y $\mathcal{U}$ un sistema de vecindades del cero. $\{x\}$ es un cerrado si y solo si

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(x) = \{x\}$$

Demostración. $\Rightarrow$ Es claro que $\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(x)$, supongamos que existe z diferente de x tal que $z \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(x)$, tenemos que $A - \{x\}$ es un abierto entonces existe $V \in \mathcal{U}$ que cumple con $V(z) \subseteq A - \{x\}$ en particular tenemos que $z \in V(x)$ que es igual a tener que $x \in V(z)$ entonces $x \in A - \{x\}$ Contradicción.

$\Leftarrow$ Veamos que,

$$U(x) = A - \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \{U(z) : z \ominus x \notin U \text{ ó } x \ominus z \notin U\}$$

entonces cada $U(x)$ es un cerrado, por tanto $\{x\}$ también lo es. □

Remark. Note que $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(x)$ si y solo si $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$.

Lema 5.2.2. Sean (A, τ) una MV-álgebra topológica y $\mathcal{U}$ un sistema de vecindades del cero. La topología es Hausdorff si y solo si

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \{0\},$$

entonces existe $x \neq 0$ tal que $x \in U \in \mathcal{U}$ además existen vecindades V y W de x y el 0 respectivamente, disjuntas luego $x \notin W$ pero $W \in \mathcal{U}$. *Contradicción.*

$\Leftarrow$) Supongamos que A no es Hausdorff entonces existen $x, y \in A$ diferentes tales que $x, y \in U$ vecindad del cero, sea V una vecindad del cero, entonces

$$U(x) \cap V(y) \neq \emptyset$$

Usando el lema anterior,

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(x) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V(y) \neq \emptyset$$

se convierte en

$$\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$$

Lo que implica que $x = y$. *Contradicción.* □

Hoo prueba, en [10], que en una MV-álgebra topológica la condición T_0 implica la condición T_1 , nosotros además probamos que esto también se cumple en MV-álgebras quasitopológicas.

Proposición 5.2.3. Sea A una MV-álgebra quasitopológica, si A es un espacio T_0 entonces también es T_1 .

Demostración. Sean $x, y \in A$, x diferente de y , entonces $x \ominus y \neq 0$ o $y \ominus x \neq 0$. Supongamos que $x \ominus y \neq 0$. Dado que A es T_0 , tenemos dos posibilidades, primero supongamos que existe un abierto W de $x \ominus y$ y $0 \notin W$, por la semicontinuidad de $\ominus$ existen U, V abiertos de x, y correspondientes tales que

$$x \ominus V \subseteq W \text{ y } U \ominus y \subseteq W$$

por tanto $x \notin V$ y $y \notin U$ de lo contrario $0 \in W$.

Ahora si existe W abierto de 0, tal que $x \ominus y \notin W$, podemos encontrar abiertos U de x y V de y tales que $x \ominus U, V \ominus y \subset U$, recordemos que $x \ominus x = 0 = y \ominus y$, de donde $x \notin V$ y $y \notin U$. □

Teorema 5.2.4. *Sea A una MV-álgebra topológica las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. A es un espacio T_0 .
2. A es un espacio T_1 .
3. A es un espacio T_2 .

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2.) Toda MV-álgebra topológica es una MV-álgebra quasitopológica entoces se tiene por la proposición 5.2.3.

2 $\Rightarrow$ 3.) Tenemos que para $x \in A$, $\{x\}$ es un cerrado entonces $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = 0$ y por el Lema 5.2.2 A es Hausdorff. $\square$

Lema 5.2.5. *Sea W y S subconjuntos de una MV-álgebra topológica A , y $\mathcal{U}$ una base de abiertos del sistema de vecindades del 0. Entonces*

1. $\bar{S} = \bigcap \{U(S) : U \in \mathcal{U}\}$.
2. $\bar{V} \subseteq V(V)$ para toda vecindad abierta V del 0.
3. $W(S) := \bigcup_{s \in S} W(s)$ es un abierto si W es un abierto de A .

Demostración. 1. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una base de vecindades abiertos de 0. Por el Lema 5.1.5, sabemos que $\{U(x) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una base de vecindades abiertas de x para cualquier $x \in A$. Así que para cualquier $y \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
 y \in S &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U})(\exists s \in S) s \in U(y) \\
 &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U})(\exists s \in S) y \in U(s) \\
 &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U}) y \in U(S) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(S).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(S)$.

2. Para cualquier vecindad abierto V de 0, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Se sigue inmediatamente por 1 que $\bar{V} \subseteq U(V) \subseteq V(V)$.

3. Supongamos que W es abierto. Por el Lema 5.1.3, sabemos que $W(s)$ es abierto para cualquier $s \in S$, y también lo es $W(S) = \bigcup_{s \in S} W(s)$. $\square$

Teorema 5.2.6. *Toda MV-álgebra topológica es regular.*

Demostración. Supongamos que (A, τ) es una MV-álgebra topológica. Para cualquier vecindad abierta U de 0, dado que $0 \oplus 0 = 0$ y la operación $\oplus$ es continua, existe una vecindad abierta V_1 de 0 tal que $V_1 \oplus V_1 \subseteq U$. Ahora, para la vecindad abierta V_1 de 0, dado que $0 \odot 0 = 0$ y $\odot$ es continua, existe una vecindad abierta V_2 de 0 tal que $V_2 \odot V_2 \subseteq V_1$. Sea $V = V_1 \cap V_2$. Entonces V es una vecindad abierta de 0.

Afirmamos que $V(V) \subseteq U$. De hecho, para cualquier $x \in V(V)$, existe $v \in V$ tal que $x \in V(v)$. Nótese que $V(v) = \{y \in A \mid v \ominus y, y \ominus v \in V\}$. Tenemos $v \odot x \in V$ y $x \odot v \in V$, lo cual implica que $x \wedge v = v \odot (v \odot x) \in V \odot V \subseteq V_2 \odot V_2 \subseteq V_1$, y por el Lema 2.1.8 obtenemos

$$x = (x \odot v) \oplus (x \wedge v) \in V \oplus V_1 \subseteq V_1 \oplus V_1 \subseteq U.$$

En consecuencia, $V(V) \subseteq U$, y así $\overline{V} \subseteq V(V) \subseteq U$ por el Lema 5.2.5. Por lo tanto, hemos demostrado que para cualquier vecindad abierta U de 0, existe una vecindad V de 0 tal que $V \subseteq U$.

Ahora, para cualquier $a \in A$ y cualquier vecindad abierta W de a , por el Lema 5.1.5, existe una vecindad abierta U de 0 tal que $U(a) \subseteq W$. Sea V una vecindad abierta de 0 tal que $V \subseteq U$. Por el Lema 5.1.6, sabemos que $V(a)$ es una vecindad abierta de a y $V(a)$ es cerrada, lo que implica que $\overline{V(a)} \subseteq \overline{V(a)} \subseteq U(a) \subseteq W$. Por lo tanto, (A, τ) es regular. $\square$

5.3. Ideales

A partir de esta sección, la palabra ideal hace referencia a MV-ideal.

En [17], M. Najafi, G.R. Rezaei y N. Kouhestani muestran las siguientes propiedades.

Proposición 5.3.1. *Sea I un subconjunto de una MV-álgebra A . El conjunto I es un ideal si y solo si:*

1. $0 \in I$,
2. $y \in I$ y $x \ominus y \in I \Rightarrow x \in I$.

Demostración. Supongamos que I satisface las condiciones 1 y 2. Sea $y \in I$ y $x \leq y$. Entonces, $x \odot y = x \odot y^* = 0 \in I$. Por 2, $x \in I$. Ahora, demostraremos que I es cerrado para $\oplus$. Para esto, sean $x, y \in I$. Por las propiedades de las MV-álgebras, tenemos

$$(x \oplus y) \odot y = (x \oplus y) \odot y^* \leq x \oplus (y \odot y^*) = x \oplus 0 = x,$$

lo que implica que $x \oplus y \in I$. Por lo tanto, I es un ideal.

Recíprocamente, sea I un ideal. Dado que para cualquier $x \in I$, $0 \leq x$, entonces $0 \in I$. Ahora, sea $y \in I$ y $x \odot y \in I$. Dado que I es un ideal, $y \oplus (x \cdot y) \in I$. Tenemos

$$y \oplus (x \odot y) = y \oplus (x \odot y^*) \geq x \odot (y \oplus y^*) = x \odot 1 = x.$$

Entonces $x \in I$. □

Lema 5.3.2. *Sea I un ideal de una MV-álgebra A y τ una topología en A tal que (A, τ) una MV-álgebra topológica. Si 0 es un punto interior de I , entonces I es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea 0 un punto interior de un ideal I y $x \in I$. Por lo tanto, existe $W \in \tau$ tal que $0 \in W \subseteq I$. Como $\odot$ es continua y $x \odot x = 0 \in I$, existe una vecindad abierto U de x tal que $U \odot U \subseteq W \subseteq I$. Supongamos ahora que $y \in U$, entonces $y \odot x \in U \odot U \subseteq I$. Por la Proposición 5.3.1, $y \in I$. Por lo tanto, $U \subseteq I$. Esto muestra que I es un conjunto abierto. □

Lema 5.3.3. *Sea F un filtro de una MV-álgebra A y τ una topología en A tal que (A, τ) una MV-álgebra topológica. Si 1 es un punto interior de F , entonces F es un conjunto cerrado.*

5.4. Conexidad

Proposición 5.4.1. *Sea (A, τ) una MV-álgebra topológica y sean $a, b \in A$.*

1. *Si D es la componente conexa de a , entonces D^* es la componente conexa de a^* .*
2. *Sean $a \leq b$ y $a \neq b$. Si a y b son conexos, entonces el intervalo $[a, b]$ es un subconjunto conexo de A , donde*

$$[a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}.$$

3. *A es conexo si y solo si 0 y 1 son conexos.*

Demostración.

1. Supongamos que $a \in A$, y sean D y H respectivamente la componente conexa de a y a^* . Entonces D^* es conexo y $a^* \in D^*$, ya que $*$ es continua. Por lo tanto, $D^* \subseteq H$. De manera similar, se tiene $H^* \subseteq D$, y así $H = (H^*)^* = D^*$. Por lo tanto, $D^* = H$.
2. Sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y $a \neq b$. Supongamos que a y b son conexos. Denotemos por D la componente conexa de a . Entonces $b \in D$. Para cualquier $x \in [a, b]$, definimos la aplicación $k_x : A \rightarrow A$ dada por

$$k_x(y) = x \wedge y \text{ para cualquier } y \in A.$$

Como $\wedge$ es continua, tenemos que $k_x(D) = x \wedge D$ es conexo, y además $a = x \wedge a \in x \wedge D$ y $x = x \wedge b \in x \wedge D$. De esto se sigue que x y a son conexos. Por lo tanto, el intervalo $[a, b]$ es un subconjunto conexo de A .

3. La tercera afirmación se deduce inmediatamente de la parte 2.

□

Proposición 5.4.2. *La componente conexa del 0, en una MV-álgebra topológica, es un ideal cerrado.*

Demostración. Sea C la componente conexa de 0, sea $c \in C$ dado que $\oplus$ es continua y por el Teorema 1.2.11 $c \oplus C$ es conexo y $c \in c \oplus C$ entonces $C \cap (c \oplus C) \neq \emptyset$ y por el Teorema 1.2.10 $C \cup (c \oplus C)$ es conexo. Puesto que $0 \in C$ tenemos que $C \cup c \oplus C \subseteq C$ aún más $c \oplus C \subseteq C$. Si repetimos lo anterior para cada $c \in C$ obtenemos que $C \oplus C$ y hemos mostrado que C es cerrado para la $\oplus$. Sea $y \leq x \in C$, tenemos que $y = y \wedge x \in y \wedge C$, que es conexo por el Teorema 1.2.11 y además contiene al cero entonces $y \wedge C \subseteq C$ por tanto C es un ideal. Ahora por la proposición 1.2.12 $\overline{C}$ es un espacio conexo que contiene al 0, entonces $\overline{C} \subseteq C$ y por tanto C debe ser un cerrado. □

5.5. Discretización y Trivialidad

Es una cuestión fundamental saber cuándo se puede determinar si la topología de una MV-álgebra topológica es discreta o trivial. En esta sección, analizamos las condiciones necesarias y suficientes para que una MV-álgebra topológica sea discreta o trivial.

Lema 5.5.1. *$\{0\}$ es abierto (cerrado) si y solo si $\{a\}$ es abierto (cerrado) para algún $a \in A$.*

Demostración. Fijemos $a \in A$. Recordemos que $\bigoplus_a(x) = x \oplus a$. Si $\{a\}$ es abierto (cerrado), entonces $\{a^*\}$ también es abierto (cerrado), ya que $*$ es continua. Por lo tanto, las preimágenes $\bigoplus_{a^*}^{-1}(a^*) = \{x \in A \mid x \oplus a^* = a^*\}$ y $\bigoplus_a^{-1}(a)^{-1}(a) = \{x \in A \mid x \oplus a = a\}$ son abiertas (cerradas). Así, $\bigoplus_{a^*}^{-1}(a^*) \cap \bigoplus_a^{-1}(a) = \{0\}$ es abierto (cerrado) por el Lema 2.1.11. □

Notación

Para cualquier $x \in A$, el conjunto de todas las vecindades abiertas de x se denota por $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(x)$, es decir:

$$\mathcal{O}_{(A,\tau)}(x) = \{V \in \tau \mid x \in V\}.$$

Es claro que $A \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(x)$. Dado que $*$ es continua, se tiene que $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(x^*) = \{V^* \mid V \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(x)\}$. Definimos el conjunto $\mathbb{M}_{(A,\tau)}(x)$ como:

$$\mathbb{M}_{(A,\tau)}(x) = \bigcap \{V \mid V \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(x)\}.$$

Con frecuencia abreviaremos $\mathbb{M}_{(A,\tau)}(x)$ como $\mathbb{M}(x)$ si no es necesario destacar la MV-álgebra topológica (A, τ) .

Proposición 5.5.2. *En una MV-álgebra topológica (A, τ) , la topología τ es discreta si y solo si $\{a\} \in \tau$ para algún $a \in A$.*

Es inmediato del Lema anterior y el Teorema 3.0.6.

Teorema 5.5.3. *Sea (A, τ) una MV-álgebra topológica. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. τ es trivial.
2. $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(0) = \{A\}$.
3. $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(a) = \{A\}$ para algún $a \in A$.
4. $\{0, 1\} \subseteq U$ para cualquier conjunto abierto no vacío U .
5. $\{0, 1\} \subseteq U$ para cualquier $U \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(0)$.

Demostración. Es claro que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ y $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$.

$3 \Rightarrow 2$.) Supongamos que $a \in A$ con $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(a) = \{A\}$. Entonces, $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(a^*) = \{A^*\} = \{A\}$. Como $a \oplus a^* = 1$ y $\oplus$ es continua, tenemos $A = A \oplus A \subseteq V$ para cualquier $V \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(1)$, lo que implica que $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(1) = \{A\}$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(0) = \mathcal{O}_{(A,\tau)}(1^*) = \{A^*\} = \{A\}$ y se cumple 2.

$2 \Rightarrow 1$.) Supongamos que $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(0) = \{A\}$. Para cualquier $b \in A$ y cualquier $U \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(b)$, tenemos $U^* \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(b^*)$. Como $0 \oplus b = b$, $0 \oplus b^* = b^*$ y $\oplus$ es continua, existen $V \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(b)$ y $W \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(b^*)$ tales que $A \oplus V \subseteq U$ y $A \oplus W \subseteq U^*$. Así, $\{0, 1\} \subseteq U$, y por ser U arbitrario, se concluye $\mathcal{O}_{(A,\tau)}(b) = \{A\}$.

$4 \Rightarrow 2$.) Supongamos que 4 se cumple. Sea $V \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(0)$. Para cualquier $x \in A$, dado que $0 \oplus x = x$ y $\oplus$ es continua, existe $U \in \mathcal{O}_{(A,\tau)}(0)$ tal que $U \oplus x \subseteq V$. Como $\{0, 1\} \subseteq U$ por 5, tenemos $x \in U \oplus x \subseteq V$, lo que implica que $V = A$. Así, se cumple 2. $\square$

5.6. MV-álgebras Topológicas Ideales

En esta sección, se presenta una caracterización de la topología ideal, así como la relación entre el conjunto de ideales de A y el conjunto $\Psi(A)$, donde

$$\Psi(A) = \{\pi \mid \pi \text{ es una topología sobre } A \text{ y } (A, \pi) \text{ es una MV-álgebra topológica}\}$$

Sea I un ideal de una MV-álgebra A . Vamos a verificar que el conjunto de clases de equivalencia inducido por I , $\{a/I : a \in A\}$, forma una base de una topología. Es claro que la $\bigcup \{a/I : a \in A\} = A$, y que si $a/I \cap b/I \neq \emptyset$ entonces $a/I = b/I$. Denotamos esta topología por γ_I y la llamamos la **topología ideal** inducida por I .

Lema 5.6.1. *En toda MV-álgebra A , $(x/I)^* = x^*/I$, para todo $x \in A$.*

Demostración. Sea $z \in (x/I)^*$, entonces $z^* \in x/I$, que resulta en $d(x, z^*) \in I$ y por el Lema 2.1.17, $d(x^*, z) = d(x, z^*)$ entonces $z \in x^*/I$. $\square$

Proposición 5.6.2. *Sea I un ideal de una MV-álgebra A . Entonces, (A, γ_I) es una MV-álgebra topológica, y $\mathbb{M}_{(A, \gamma_I)}(x) = x/I$ para todo $x \in A$. Además, $\{x/I\}$ es una base de vecindades de x para la topología γ_I .*

Demostración. Sea I un ideal de una MV-álgebra topológica A , y sean $x, y \in A$. Sea U un abierto de x^* , existe z tal que $x^* \in z/I \subseteq U$, note que $z/I = x/I$, x/I es un abierto de x , por el lema anterior $(x/I)^* = x^*/I$ entonces $*$ es continua, además por el Lema 5.6.3, $\oplus$ también es continua. Luego, para todo abierto U de x , se tiene que $x/I \subseteq U$, y entonces $\mathbb{M}_{(A, \gamma_I)}(x) = x/I$ $\square$

Lema 5.6.3. *Sean A una MV-álgebra, $a, b \in A$ e I un ideal de A , se cumple que*

$$a/I \oplus b/I \subseteq a \oplus b/I.$$

Demostración. Sea $x \in a/I \oplus b/I$, entonces $x = x_a \oplus x_b$ donde $d(a, x_a), d(b, x_b) \in I$. Luego $d(a, x_a) \oplus d(b, x_b) \in I$ y por las propiedades de la distancia se tiene que

$$d(a \oplus b, x) \leq d(a, x_a) \oplus d(b, x_b)$$

y entonces $x \in a \oplus b/I$. $\square$

Teorema 5.6.4. *Sea (A, τ) una MV-álgebra topológica. Entonces se cumple que:*

1. $\mathbb{M}(0)$ es un ideal de A .
2. $\tau = \gamma_I$ para algún ideal I de A si y sólo si $\mathbb{M}(0) \in \tau$.

Demostración. 1. Para toda vecindad abierta U de 0 , dado que $0 \oplus 0 = 0$ y la operación $\oplus$ es continua, existe una vecindad V de 0 tal que $V \oplus V \subseteq U$, lo que implica que $\mathbb{M}(0) \oplus \mathbb{M}(0) \subseteq V \oplus V \subseteq U$. Así, $\mathbb{M}(0) \oplus \mathbb{M}(0) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{O}_{(A, \tau)}(0)} U = \mathbb{M}(0)$, y por lo tanto $\mathbb{M}(0)$ es cerrado bajo la operación $\oplus$. Además, para cualquier $y \in \mathbb{M}(0)$ y $z \in A$ tal que $z \leq y$, se tiene que $z \wedge 0 = 0$ y como $\wedge$ es continua, existe una vecindad W de 0 tal que $z \wedge W \subseteq U$, y esto implica que $z \in \mathbb{M}(0)$. Así, $\mathbb{M}(0)$ es un ideal de A .

2. Si $\mathbb{M}(0) \in \tau$ entonces $\{\mathbb{M}(0)\}$ forma una base de vecindades de 0 para la topología τ . $I = \mathbb{M}(0)$. Por 1, tenemos que $\mathbb{M}(0)$ es un ideal, entonces, $\{\mathbb{M}(0)\} = \{I\} = \{0/I\}$ es una base de vecindades de 0 para la topología γ_I por la Proposición 5.6.2 Así, $\tau = \gamma_I$ por el Teorema 5.1.7.

Recíprocamente, si $\tau = \gamma_I$ para un ideal I de A , entonces $\mathbb{M}(0) = \mathbb{M}_{(A, \gamma_I)}(0) = 0/I \in \gamma_I = \tau$ por la Proposición 5.6.2. $\square$

Ejemplo 5.6.5. Verifiquemos que la MV-álgebra topológica $(Free_1, \tau_{F_{x_0}})$, del Ejemplo 4.0.4, tiene una topología ideal. Sea $U \in \mathcal{O}(0)$, entonces existen $c \in Free_1$ y $r \in F_{x_0}$, tales que $0 \in F(c, r) \subseteq U$. Puesto que toda bola que contenga al 0 es de la forma $F(0, s)$, para cualquier $s \in F_{x_0}$, se tiene que $F(0, r) \subseteq \mathbb{M}(0)$. Además $F(0, r) \in \tau_{F_{x_0}}$, luego $\mathbb{M}(0) \subseteq F(0, r)$. Se tiene entonces que $\mathbb{M}(0) \in \tau_{F_{x_0}}$, y por la proposición anterior $(Free_1, \tau_{F_{x_0}})$ es una MV-álgebra topológica ideal.

Note que $F(0, r) = \{f \in Free_1 : f(x_0) = 0\}$ es un ideal, y además $F(0, r) = F_{x_0}^*$, entonces $\tau_{F_{x_0}} = \gamma_{F_{x_0}^*}$. Dado un filtro F , ¿qué relación hay entre τ_F y γ_{F^*} ? En la siguiente proposición probamos que $\gamma_{F^*} \subseteq \tau_F$. Sin embargo, queda abierta la pregunta sobre la inclusión contraria.

Proposición 5.6.6. Sea F un filtro de una MV-álgebra A , la topología ideal γ_{F^*} y la topología filtro τ_F satisfacen

$$\gamma_{F^*} \subseteq \tau_F.$$

Demostración. Sea $c \in A$,

$$\begin{aligned} F(c, 1) &= \{x \in A : 1 \ominus d(c, x) \in F\} \\ &= \{x \in A : 1 \odot d(c, x)^* \in F\} \\ &= \{x \in A : d(c, x)^* \in F\} \\ &= \{x \in A : d(c, x) \in F^*\} \\ &= c/F^*. \end{aligned}$$

Entonces $c/F^* \in \tau_F$. $\square$

Corolario 5.6.7. *Sea (L, σ) una MV-cadena topológica finita. Entonces, σ es discreta o trivial.*

Demostración. Sea (L, σ) es una cadena topológica finita. Entonces $M_{(L, \sigma)}(0) \in \sigma$, y por lo tanto $\sigma = \gamma_{M_{(L, \sigma)}(0)}$ por el Teorema 5.6.4. Dado que L es simple y $M_{(L, \sigma)}(0)$ es un ideal de L por el Teorema 5.6.4, tenemos que $M_{(L, \sigma)}(0) = \{0\}$ o $M_{(L, \sigma)}(0) = L$. Por lo tanto, σ es discreta o trivial por la Proposición 5.5.2 y el Teorema 5.5.3. $\square$

Para un MV álgebra A , definimos $\Theta(A) = \{I \mid I \text{ es un ideal de } A\}$ y

$$\Psi(A) = \{\pi \mid \pi \text{ es una topología sobre } A \text{ tal que } (A, \pi) \text{ es un MV-álgebra topológica}\}.$$

Definimos $f : \Theta(A) \rightarrow \Psi(A)$ por $f(I) = \gamma_I$ para todo $I \in \Theta(A)$. Entonces f es una aplicación inyectiva. De hecho, si $I, J \in \Theta(A)$ tales que $\gamma_I = \gamma_J$, entonces $I = 0/I = M_{(A, \gamma_I)}(0) = M_{(A, \gamma_J)}(0) = 0/J = J$ por el Lema 2.1.19 y la Proposición 5.6.2. Por lo tanto, f es inyectiva.

Corolario 5.6.8. *Para una MV-álgebra finita A , existe una biyección entre $\Theta(A)$ y $\Psi(A)$. En particular, si $A \cong L_{n_1} \times L_{n_2} \times \cdots \times L_{n_k}$ para algunos enteros $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$, entonces $|\Psi(A)| = 2^k$, donde $|\Psi(A)|$ es la cardinalidad de $\Psi(A)$.*

Demostración. Sea A una MV-álgebra finita. Definimos $f : \Theta(A) \rightarrow \Psi(A)$ mediante $f(I) = \gamma_I$ para todo $I \in \Theta$.

Sabemos que f es inyectiva. Para probar que f es sobreyectiva, supongamos que $\pi \in \Psi(A)$. Entonces $M_{(A, \pi)}(0) \in \pi$, pues resulta ser una intersección finita de abiertos dado que A es finita. Por el Teorema 5.6.4, 2, se deduce que f es sobreyectiva.

Supongamos que $A \cong L_{n_1} \times L_{n_2} \times \cdots \times L_{n_k}$, para algunos enteros $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$. Dado que cada MV-cadena finita es simple y por tanto solo posee 2 ideales ella misma y $\{0\}$ y por la Proposición 2.1.22 tenemos que $|\Theta(A)| = 2^k$. Por lo tanto, $|\Psi(A)| = |\Theta(A)| = 2^k$. $\square$

Sea $C = C_0 \cup C_1$ la MV-cadena del Ejemplo 2.1.3 y sea $T = \{\emptyset, C_0, C_1, C\}$, donde $C_0 = \{0, c, 2c, \dots, nc, \dots\}$ y $C_1 = (C_0)^* = \{1, c^*, (2c)^*, \dots, (nc)^*, \dots\}$. Es fácil ver que T es la topología inducida por el ideal C_0 , y así (C, T) es una MV-cadena topológica por la Proposición 5.6.2. Ahora mostramos que $|\Psi(C)| = |\Theta(C)| = 3$. Es decir, la única topología no trivial y no discreta en C tal que es una MV-cadena topológica es T .

Proposición 5.6.9. *Sea C la MV-cadena del Ejemplo 2.1.3. Si π es una topología no discreta y no trivial en C tal que (C, π) es una MV-cadena topológica, entonces $\pi = T$.*

Demostración. Sean C y π como se dan en la proposición, y sea $x \in C$. Entonces $C \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(x)$. Por la Proposición 5.5.2 y el Teorema 5.5.3, sabemos que $\{x\} \subset \mathcal{O}_{(C,\pi)}(x)$ y $\mathcal{O}_{(C,\pi)}(x) \neq \{C\}$, dado que π es no discreta y no trivial.

Claim 1. $\{0, c\} \subseteq U$ para cualquier $U \in \mathcal{O}_{(C,\wedge)}(0)$. De hecho, dado que $0 \wedge c = 0$ y la operación $\wedge$ es continua, existe $V \in \mathcal{O}_{(C,\wedge)}(0)$ tal que $V \wedge c \subseteq U$. Nota que $V \neq \{0\}$ y $c \leq z$ para cualquier elemento no nulo z en C . Tenemos que $c \in V$ y $V \wedge c \subseteq U$, por lo tanto, $\{0, c\} \subseteq U$.

Claim 2. $C_0 \subseteq U$ para cualquier $U \in \mathcal{O}(C, \pi)(0)$.

Para cualquier vecindad abierta U de 0, por el Claim 1, sabemos que $c \in U$. Dado que $0 \oplus 0 = 0$ y la operación $\oplus$ es continua, existe $V \in \mathcal{O}(C, \pi)(0)$ tal que $V \oplus V \subseteq U$. Por el Claim 1, tenemos $\{0, c\} \subseteq V$, por lo que $2c = c \oplus c \in V \oplus V \subseteq U$. Así, $\{0, c, 2c\} \subseteq U$. Dado que U es una vecindad abierta arbitraria de 0 y $V \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(0)$, tenemos $\{0, c, 2c\} \subseteq V$, lo que implica que $3c = c \oplus 2c \in V \oplus V \subseteq U$. Por analogía, obtenemos que $\{0, c, 2c, \dots, kc\} \subseteq V \cap U$ para cualquier entero positivo k , y por lo tanto $C_0 \subseteq U$.

Claim 3. $C_1 \subseteq W$ para cualquier $W \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(1)$.

De hecho, dado que la operación $*$ es continua, tenemos $W^* \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(0)$, y por el Claim 2. $C_0 \subseteq W^*$. Por lo tanto, $C_1 = (C_0)^* \subseteq W$.

Claim 4. Si $x \in C_0$, entonces $C_0 \subseteq V$ para cualquier $V \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(x)$.

En efecto, sea $x \in C_0$. Entonces $x = nc$ para algún entero positivo n . Dado que $0 \oplus nc = nc$ y la operación $\oplus$ es continua, existe $V_1 \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(0)$ tal que $V_1 \oplus nc \subseteq V$. Por el Claim 2. tenemos $C_0 \subseteq V_1$, y por lo tanto:

$$\{nc, (n+1)c, \dots\} = C_0 \oplus nc \subseteq V_1 \oplus nc \subseteq V.$$

Dado que $1 \ominus nc = nc$ y la operación $\ominus$ es continua, existe $V_2 \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(1)$ tal que $V_2 \ominus nc \subseteq V$. Por el Claim 3, obtenemos $C_1 \subseteq V_2$, lo que implica:

$$\{0, c, 2c, \dots, nc\} = C_1 \ominus nc \subseteq V_2 \ominus nc \subseteq V.$$

Por lo tanto, $C_0 \subseteq V$ por las ecuaciones anteriores.

Claim 5. Si $y \in C_1$, entonces $C_1 \subseteq P$ para cualquier $P \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(y)$.

En efecto, sea $y \in C_1$ y $P \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(y)$. Entonces $y^* \in C_0$. Dado que la operación $*$ es continua, tenemos $P^* \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(y^*)$, y por el Claim 4, $C_0 \subseteq P^*$. Por lo tanto, $C_1 = (C_0)^* \subseteq P$.

Claim 6. $\mathcal{O}_{(C,\pi)}(x) = \{C_0, C\}$ para cualquier $x \in C_0$.

En efecto, sea $x \in C_0$ y $D \in \mathcal{O}_{(C,\pi)}(x)$. Entonces $C_0 \subseteq D$ por el Claim 4. Si $D \neq C_0$, existe algún entero positivo n tal que $C_0 \cup \{(nx)^*\} \subseteq D$, lo que implica que D también es una vecindad abierta de $(nx)^*$, y por el Claim 5, $C_1 \subseteq D$. Por lo tanto, $D = C$, y así $\{C\} \subseteq \mathcal{O}(C, \pi)(x) \subseteq \{C_0, C\}$. Como $\mathcal{O}(C, \pi)(x) \neq \{C\}$, entonces $\mathcal{O}_{(C,\pi)}(x) = \{C_0, C\}$.

Claim 7. $\mathcal{O}_{(C,\pi)}(y) = \{C_1, C\}$ para cualquier $y \in C_1$.

Esto se deduce inmediatamente del Claim 6 y de la continuidad de la operación $*$.

Finalmente, por los Claims 6 y 7, obtenemos que $\pi = \{\emptyset, C_0, C_1, C\} = T$. $\square$

5.7. MV-álgebras Topológicas Cocientes

Una de las operaciones importantes en las álgebras universales topológicas es tomar sus cocientes. En esta sección, discutiremos los cocientes de álgebras MV topológicas.

Sea (A, τ) un álgebra MV topológica, B un álgebra MV, y $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo sobreyectivo de A sobre B que satisface la condición:

$$f^{-1}(f(V)) \in \tau, \quad \forall V \in \tau. \quad (5.1)$$

Entonces, es fácil verificar que $\tau_f = \{U \subseteq B \mid f^{-1}(U) \in \tau\}$ es una topología. Llamamos a τ_f la **topología cociente** sobre B inducida por f . La Proposición 5.1 establece que τ_f es la topología más fina tal que B es un álgebra MV topológica y f es un homomorfismo continuo y abierto.

Proposición 5.7.1. *Sea (A, τ) una álgebra MV topológica, B una álgebra MV y $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo sobreyectivo de A sobre B que satisface la condición 5.1. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. (B, τ_f) es un álgebra MV topológica, y la llamamos **la MV-álgebra topológica cociente** de (A, τ) .
2. f es un homomorfismo continuo y abierto de A sobre (B, τ_f) .
3. Si (B, π) es un álgebra MV topológica tal que f es un homomorfismo continuo de A sobre (B, π) , entonces $\tau_f \subseteq \pi$.

Demostración. 1. Para mostrar que $\oplus$ es continua en (B, τ_f) , sean $b_1, b_2 \in B$. Para cualquier vecindad abierta $U \in \tau_f$ de $b_1 \oplus b_2$, como f es sobreyectivo, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $b_1 = f(a_1)$ y $b_2 = f(a_2)$, por lo que $b_1 \oplus b_2 = f(a_1) \oplus f(a_2) = f(a_1 \oplus a_2)$. Se sigue que $a_1 \oplus a_2 \in f^{-1}(U)$.

Dado que $U \in \tau_f$, entonces $f^{-1}(U) \in \tau$ y $\oplus$ es continua en (A, τ) , existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $a_1 \in V_1$, $a_2 \in V_2$ y $V_1 \oplus V_2 \subseteq f^{-1}(U)$.

Por lo tanto, $b_1 = f(a_1) \in f(V_1)$, $b_2 = f(a_2) \in f(V_2)$ y $f(V_1) \oplus f(V_2) = f(V_1 \oplus V_2) \subseteq f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Por la condición 3, se tiene que $f^{-1}(f(V_1)), f^{-1}(f(V_2)) \in \tau$, por lo que $f(V_1), f(V_2) \in \tau_f$ por la definición de τ_f . Así, $\oplus$ es continua en (B, τ_f) .

Para demostrar que $*$ es continua en (B, τ_f) , sea $U \in \tau_f$. Entonces $f^{-1}(U) \in \tau$, y por lo tanto $(f^{-1}(U))^* \in \tau$ ya que $*$ es continua en (A, τ) . Además, como f es un homomorfismo, se tiene que

$$x \in f^{-1}(U)^* \Leftrightarrow f(x) \in U^* \Leftrightarrow (f(x))^* \in U \Leftrightarrow f(x^*) \in U \Leftrightarrow x^* \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(U))^*,$$

y por lo tanto $f^{-1}(U^*) = (f^{-1}(U))^*$, lo que implica que $U^* \in \tau_f$. Entonces (B, τ_f) es un MV-álgebra topológica.

2. Para cualquier $V \in \tau$, por la condición 3, se tiene que $f(V) \in \tau_f$, y por lo tanto f es abierto. Así, f es continua por la definición de τ_f .

3. Supongamos que (B, π) es un MV-álgebra topológica tal que f es un homomorfismo abierto y continuo de (A, τ) sobre (B, π) . Para cualquier $U \in \tau_f$, se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau$, y por lo tanto $f(f^{-1}(U)) \in \pi$ ya que f es abierto. Como f es sobreyectivo, se obtiene $U = f(f^{-1}(U)) \in \pi$, y así $\tau_f \subseteq \pi$ $\square$

Proposición 5.7.2. Sea (A, τ) una MV-álgebra topológica, B una MV-álgebra, y $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo sobreyectivo de A sobre B . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f satisface la condición 3 y la MV-álgebra topológica cociente (B, τ_f) es discreta.
2. $\ker(f) \in \tau$, donde $\ker(f) = f^{-1}(0) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$.

Demostración. Sean (A, τ) , B , y f como se describen en la proposición.

2 $\Rightarrow$ 1.) Supongamos que $\ker(f) \in \tau$. Queremos demostrar que $f^{-1}(f(V)) \in \tau$ para cualquier subconjunto no vacío V de A , y por lo tanto, f satisface la condición 3. De hecho, tenemos:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(V)) &\Leftrightarrow f(x) \in f(V) \\ &\Leftrightarrow (\exists v \in V) f(x) = f(v) \\ &\Leftrightarrow (\exists v \in V) d(x, v) = (x \ominus v) \oplus (v \ominus x) \in \ker(f) \\ &\Leftrightarrow (\exists v \in V) x \ominus v, v \ominus x \in \ker(f) \quad (\text{por el Lema 2.1.20}) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{v \in V} \{y \in A \mid y \ominus v, v \ominus y \in \ker(f)\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto: $f^{-1}(f(V)) = \bigcup_{v \in V} \{y \in A \mid y \ominus v, v \ominus y \in \ker(f)\}$. Por el Lema 5.1.3 tenemos que el conjunto $\{y \in A \mid y \ominus v, v \ominus y \in \ker(f)\}$ es un abierto, luego $f^{-1}(f(V)) \in \tau$.

Dado que $f^{-1}(0) = \ker(f) \in \tau$, tenemos que $\{0\} \in \tau_f$, y así (B, τ_f) es discreto por el Teorema 5.5.2.

1 $\Rightarrow$ 2.) Supongamos que (B, τ_f) es discreto. Entonces $\{0\} \in \tau_f$, y por lo tanto $f^{-1}(0) = \ker(f) \in \tau$. $\square$

Ejemplo 5.7.3. Sea (B_4, τ) la MV-álgebra topológica, donde $B_4 = \{0, a, b, 1\}$ es el álgebra de Boole con 4 elementos y $\tau = \{\emptyset, \{0, a\}, \{b, 1\}, B_4\}$ es la topología inducida por el ideal $\{0, a\}$. Definimos una función $f : B_4 \rightarrow B_4$ por $f(0) = 0$, $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(1) = 1$. Es fácil ver que f es un automorfismo y satisface la condición 3, y que $\tau_f = \{\emptyset, \{0, b\}, \{a, 1\}, B_4\}$.

Definición 5.7.4. Una función $f : A \rightarrow B$ entre dos MV-álgebras topológicas es un **isomorfismo topológico** si f es tanto un isomorfismo como un homeomorfismo.

Teorema 5.7.5. Sean (A, τ) y (B, π) MV-álgebras topológicas, y sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo. Sea $\rho : A \rightarrow A/\ker(f)$ el homomorfismo natural. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $\rho^{-1}(\rho(V)) = f^{-1}(f(V))$ para cualquier subconjunto V de A .
2. $A/\ker(f)$, dotado de la topología $\tau_\rho = \{U \subseteq A/\ker(f) \mid \rho^{-1}(U) \in \tau\}$, es una MV-álgebra topológica.
3. Existe un único isomorfismo topológico $\bar{f}$ de $(A/\ker(f), \tau_\rho)$ a (B, π) tal que $\bar{f} \circ \rho = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (A, \tau) & \xrightarrow{f} & (B, \pi) \\ \rho \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ (A/\ker(f), \tau_\rho) & & \end{array}$$

Figura 5.1

Demostración. Sea (A, τ) , (B, π) , f y ρ como se describe en el teorema. Entonces, $\ker(f)$ es un ideal de A .

1. Para cualquier $V \subseteq A$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 a \in \rho^{-1}(\rho(V)) &\Leftrightarrow a/\ker(f) = \rho(a) \in \rho(V) \\
 &\Leftrightarrow (\exists v \in V) (a/\ker(f) = v/\ker(f)) \\
 &\Leftrightarrow (\exists v \in V) (d(a, v) \in \ker(f)) \\
 &\Leftrightarrow (\exists v \in V) (a \odot v^* \wedge v \odot a^* \in \ker(f)) \quad (\text{por el Lema 2.1.20}) \\
 &\Leftrightarrow (\exists v \in V) (f(a \odot v^*) = 0 \wedge f(v \odot a^*) = 0) \\
 &\Leftrightarrow (\exists v \in V) f(a) \odot f(v)^* = 0 \wedge f(v) \odot f(a)^* = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\exists v \in V) (f(a) = f(v)) \\
 &\Leftrightarrow f(a) \in f(V) \\
 &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(f(V)).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho^{-1}(\rho(V)) = f^{-1}(f(V))$.

2. Dado que f es un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo, por 1 tenemos que $\rho^{-1}(\rho(V)) = f^{-1}(f(V)) \in \tau$, para cualquier $V \in \tau$. Por la Proposición 5.7.1 se tiene que entonces $(A/\ker(f), \tau_\rho)$ es una MV-álgebra topológica, donde $\tau_\rho = \{U \subseteq A/\ker(f) \mid \rho^{-1}(U) \in \tau\}$.

3. Definimos $\bar{f} : A/\ker(f) \rightarrow B$ por $\bar{f}(x \ker(f)) = f(x)$ para cualquier $x \in A$. Entonces, $\bar{f}$ es un isomorfismo por [5, Teorema 1.2.8], y claramente $\bar{f}$ es el único isomorfismo tal que $f = \bar{f} \circ \rho$. Para probar que $\bar{f}$ es abierta, sea $U \in \tau_\rho$. Entonces $\rho^{-1}(U) \in \tau$, y por lo tanto $f(\rho^{-1}(U)) \in \pi$, ya que f es abierta. Además, tenemos:

$$\begin{aligned}
 b \in \bar{f}(U) &\Leftrightarrow (\exists a \ker(f) \in U) b = \bar{f}(a \ker(f)) = f(a) \\
 &\Leftrightarrow (\exists a \in \rho^{-1}(U)) b = f(a) \\
 &\Leftrightarrow b \in f(\rho^{-1}(U)),
 \end{aligned}$$

lo que implica que $\bar{f}(U) = f(\rho^{-1}(U)) \in \pi$, y por lo tanto $\bar{f}$ es abierta.

Para demostrar que $\bar{f}$ es continua, supongamos que $W \in \pi$. Entonces $f^{-1}(W) \in \tau$, ya que f es continua. Así, $\rho(f^{-1}(W)) \in \tau_\rho$ por la Proposición 5.1. Además, tenemos:

$$\begin{aligned}
 z \ker(f) \in \bar{f}^{-1}(W) &\Leftrightarrow f(z) = \bar{f}(z \ker(f)) \in W \\
 &\Leftrightarrow z \in f^{-1}(W) \\
 &\Leftrightarrow z/\ker(f) \in \rho(f^{-1}(W)),
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
z/\ker(f) \in \rho(f^{-1}(W)) &\Leftrightarrow (\exists a \in f^{-1}(W)) z/\ker(f) = \rho(a) = a/\ker(f) \\
&\Leftrightarrow \bar{f}(z/\ker(f)) = \bar{f}(a/\ker(f)) = f(a) \in W \\
&\Leftrightarrow z/\ker(f) \in \bar{f}^{-1}(W).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{f}^{-1}(W) = \rho(f^{-1}(W)) \in \tau_\rho$ y $\bar{f}$ es continua.

Resumiendo el argumento anterior, hemos demostrado que $\bar{f}$ es el único isomorfismo topológico que va de $(A/\ker(f), \tau_\rho)$ a (B, π) tal que $f = \bar{f} \circ \rho$.

□

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo hemos abordado el estudio de las MV-álgebras topológicas, estudiando las condiciones necesarias para dotarlas de una estructura topológica compatible con sus operaciones algebraicas. Se ha explorado en detalle la interacción entre las MV-álgebras y diversas topologías, particularmente la topología filtro.

En el Capítulo 3, se introducen los conceptos de MV-álgebra para, quasi y semi-topológica, explicando sus propiedades y su relación con las MV-álgebras topológicas. Posteriormente, en el Capítulo 4, se estudia cómo dotar a una MV-álgebra de una estructura topológica utilizando la topología filtro, explorando sus propiedades y condiciones de compatibilidad con la estructura algebraica de la MV-álgebra. A lo largo del estudio, se ejemplifican teoremas y propuestas con casos particulares, como los presentados en los Ejemplos 4.0.4, 5.1.4 y 5.6.5. Se profundiza en la topología filtro como herramienta para definir estructuras topológicas en MV-álgebras. Como un aporte que no está en la literatura, hemos demostrado que toda MV-álgebra, con una topología filtro, es quasi-topológica y establecemos condiciones para que una MV-álgebra con esta topología sea, efectivamente, una MV-álgebra topológica.

En el Capítulo 5, se estudian las propiedades de las MV-álgebras topológicas. En particular, en la Sección 5.2, se revisa con detalle la prueba del Teorema [10, Teorema 3.4], y adicionalmente probamos la Proposición 5.2.3, la cual establece que si una MV-álgebra quasitopológica es un espacio T_0 , entonces también es un espacio T_1 . Este resultado se obtiene al debilitar las condiciones del Teorema [10, Teorema 3.4] previamente establecido para MV-álgebras topológicas.

Por último, se muestra cómo los ideales en una MV-álgebra interactúan con la estructura

topológica, abordando el concepto de conexidad en MV-álgebras topológicas. Se enfatizan las condiciones que garantizan la existencia de componentes conexas y se establece la relación entre la topología filtro y la topología ideal, como se muestra en la Proposición 5.6.6.

Bibliografía

- [1] G. Barbieri and H. Weber. A topological approach to the study of fuzzy measures. In Y. Abramovich, E. Avgerinos, and N. C. Yannelis, editors, *Functional Analysis and Economic Theory*, pages 17–46, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg.
- [2] S. Burris and H. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*, volume 91. Springer, 01 1981.
- [3] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Transactions of the American Mathematical society*, 88(2):467–490, 1958.
- [4] C. C. Chang. A new proof of the completeness of the lukasiewicz axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93:74–80, 1959.
- [5] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D’Ottaviano, and D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2000.
- [6] E. Dubuc and Y. Poveda. A simple proof of mcnaughton theorem. 07 2011.
- [7] A. Gan, W. Luan, F. Deng, and Y. Yang. On regularity of topological mv-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 475:108747, 2024.
- [8] S. Givant. *Regular Open Sets*, pages 66–73. Springer New York, New York, NY, 2009.
- [9] G. Grätzer. Universal algebra. *Studia Logica*, 41(4):430–431, 1982.
- [10] C. Hoo. Topological mv-algebras. *Topology and its Applications*, 81(2):103–121, 1997.
- [11] J. L. Kelley. General topology. *Journal of Symbolic Logic*, 27(2):235–235, 1962.
- [12] C. Luan and Y. C. Yang. Filter topologies on mv-algebras. *Soft Computing*, 21, 05 2017.
- [13] W. Luan, H. Weber, and Y. Yang. Filter topologies and topological mv-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 406:11–21, 2021. Mathematics.

- [14] D. Mundici. Interpretation of af c -algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65(1):15–63, 1986.
- [15] D. Mundici. Interpretation of afc -algebras in lukasiewicz sentential calculus. *J. Functional Analysis*, 65:15–63, 1986.
- [16] D. Mundici. *Advanced Łukasiewicz calculus and MV-algebras*. Trends in Logic. Springer Netherlands, 2011.
- [17] M. Najafi, G. R. Rezaei, and N. Kouhestani. On (para, quasi) topological mv-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 313:93–104, 2017. Theme: Mathematics of fuzzy sets.
- [18] D. M. Rignoli. An elementary presentation of the equivalence between mv - algebras and lu-groups with strong unit. *Studia Logica*, 61:49–64, 1998.
- [19] S. Roman. *Lattices*, pages 49–93. Springer New York, New York, NY, 2008.
- [20] H. Weber. On topological mv-algebras and topological ω -groups. *Topology and its Applications*, 159(16):3392–3395, 2012.
- [21] S. Wu, W. Luan, and Y. Yang. Filter topologies on mv-algebras ii. *Soft Comput.*, 24(5):3173–3177, mar 2020.
- [22] Y. C. Yang. The c -topology on lattice-ordered groups. *Science in China Series A Mathematics*, 52:2397–2403, 11 2009.