



**UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES
PERIÓDICAS SENO Y COSENO DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL**

OMAR ALEXANDER SANTACRUZ LENIS

Código: 201303702

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DE 2016**



**UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES
PERIÓDICAS SENO Y COSENO DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL**

OMAR ALEXANDER SANTACRUZ LENIS

Código: 201303702

**Trabajo para optar al título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática.
Modalidad Profundización.**

Directora de trabajo de grado:

LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO, MG

Profesora del Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DE 2016

Dedicado a mi madre por su comprensión y paciencia.
A la eterna memoria de mi padre Servio Omar Santacruz (1950 – 2005) quien siempre cultivó mi
pasión por el estudio.

Agradecimientos

A los estudiantes del grado 10 – 1 jornada de la mañana (Año lectivo 2015) de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, por su dedicación, empeño y compromiso con esta propuesta de aula.

A mis compañeros docentes por su colaboración y en particular al profesor Justo Pastor Buitrago por facilitarme la implementación de las situaciones en el aula.

A la profesora Ligia Amparo Torres, por su orientación y asesoría, para la culminación de este proyecto.

Contenido

	Pág.
Resumen.....	1
Introducción	2
Capítulo 1. Aspectos generales de la propuesta.....	4
1.1 Presentación del problema	5
1.2 Objetivos	8
1.2.1 Objetivo General	8
1.2.2 Objetivos Específicos.....	9
1.3 Justificación.....	9
1.4 Antecedentes	12
1.4.1. Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones.....	12
1.4.2. Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica	13
1.4.3. Un análisis didáctico de la función trigonométrica	14
1.4.4. Las funciones trigonométricas Seno y Coseno a partir de sus aplicaciones	15
1.4.5. Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica	16
1.4.6. La modelación matemática en la educación matemática realista: Un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos	17
1.4.7. Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros.....	18
Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia	22
2.1 Sobre la educación matemática realista	22
2.2 Principios de la educación matemática realista.....	23
2.2.1 Principio de actividad.....	23
2.2.2 Principio de realidad: Partir de contextos y situaciones problemáticas realistas	23
2.2.3 Principio de interacción.....	25

2.2.4 Principio de interconexión (estructuración) de los ejes o unidades curriculares de la matemática	26
2.2.5 Principio de reinención.....	26
2.2.6 Principio de niveles: Paso del conocimiento informal al formal	27
2.3 Sobre la utilización de los modelos.....	30
2.3.1 Características de los modelos en la EMR.....	31
2.4. Referentes curriculares	32
2.4.1 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.....	32
2.4.2 La modelación una mirada desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares	37
2.5 Referentes matemáticos.....	41
2.5.1 Noción de función	42
2.5.2 Noción de función periódica y función trigonométrica	44
 Capítulo 3. La Función Periódica en el aula: El caso de las Funciones Seno y Coseno.....	56
3.1 Diseño de la propuesta de aula	56
3.1.1 Propósito, contenidos y desempeños esperados en cada situación	59
3.2 Sobre la propuesta de aula.....	63
3.2.1 Situación 1.....	63
3.2.2 Situación 2.....	67
3.2.3 Situación 3.....	72
3.3 Implementación de la propuesta de aula	78
3.4 Resultados y análisis de resultados	79
3.4.1 Resultados y Análisis de Resultados de la Situación 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos.....	80
3.4.2 Resultados y Análisis de Resultados de la Situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas	112
3.4.3 Resultados y Análisis de Resultados de la Situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno	170
 Capítulo 4. Conclusiones Generales y Algunas Reflexiones Didácticas	219
4.1 Conclusiones generales	219

4.2 Algunas reflexiones didácticas.....	224
Referencias bibliográficas.....	228
Anexo 1. Situación aplicada a los estudiantes	231

Índice de Tablas

Pág.

Tabla 1. Coherencia vertical de los estándares para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	35
Tabla 2. Coherencia horizontal de los estándares para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	36
Tabla 3. Contenidos y desempeños esperados situación 1.	60
Tabla 4. Contenidos y desempeños esperados situación 2.	61
Tabla 5. Contenidos y desempeños esperados situación 3.	62
Tabla 6. Tipos de respuestas P1T1(S1)	82
Tabla 7. Tipos de respuestas P2T1(S1)	83
Tabla 8. Tipos de respuestas P3T1(S1)	84
Tabla 9. Tipos de respuestas P4T1(S1)	85
Tabla 10. Tipos de respuestas P5a, bT1(S1)	87
Tabla 11. Tipos de respuestas P1T2(S1)	92
Tabla 12. Tipos de respuestas P2T2(S1)	93
Tabla 13. Tipos de respuestas P3T2(S1)	94
Tabla 14. Tipos de respuestas P4T2(S1)	94
Tabla 15. Tipos de respuestas P5aT2(S1)	95
Tabla 16. Tipos de respuestas P5bT2(S1)	95
Tabla 17. Tipos de respuestas P6aT2(S1)	97
Tabla 18. Tipos de respuestas P6bT2(S1)	97
Tabla 19. Tipos de respuestas P6bT2(S1)	98
Tabla 20. Tipos de respuestas P1aT3(S1)	99
Tabla 21. Tipos de respuestas P1bT3(S1)	99
Tabla 22. Tipos de respuestas P2T3(S1)	102
Tabla 23. Tipos de respuestas P3aT3(S1)	104
Tabla 24. Tipos de respuestas P3bT3(S1)	105
Tabla 25. Tipos de respuestas P3bT3(S1)	105

Tabla 26. Tipos de respuestas P3bT3(S1)	105
Tabla 27. Tipos de respuestas P3bT3(S1)	105
Tabla 28. Tipos de respuestas P3bT3(S1)	106
Tabla 29. Tipos de respuestas P4aT3(S1).....	109
Tabla 30. Tipos de respuestas P4bT3(S1)	109
Tabla 31. Tipos de respuestas P4cT3(S1).....	109
Tabla 32. Tipos de respuestas P5T3(S1).....	110
Tabla 33. Tipos de respuestas P1T1(S2).....	113
Tabla 34. Tipos de respuestas P2T1(S2).....	117
Tabla 35. Tipos de respuestas P3T1(S2).....	118
Tabla 36. Tipos de respuestas P4T1(S2).....	119
Tabla 37. Tipos de respuestas P5T1(S2).....	123
Tabla 38. Tipos de respuestas P6T1(S2).....	124
Tabla 39. Tipos de respuestas P1aT2(S2).....	125
Tabla 40. Tipos de respuestas P1bT2(S2)	126
Tabla 41. Tipos de respuestas P2T2(S2).....	127
Tabla 42. Tipos de respuestas P3aT2(S2).....	132
Tabla 43. Tipos de respuestas P3bT2(S2)	132
Tabla 44. Tipos de respuestas P3cT2(S2).....	133
Tabla 45. Tipos de respuestas P3dT2(S2)	133
Tabla 46. Tipos de respuestas P4T2(S2).....	134
Tabla 47. Tipos de respuestas P5aT2(S2).....	138
Tabla 48. Tipos de respuestas P5bT2(S2)	139
Tabla 49. Tipos de respuestas P6T2(S2).....	140
Tabla 50. Tipos de respuestas P7T2(S2).....	143
Tabla 51. Tipos de respuestas T3P1,2(S2)	147
Tabla 52. Tipos de respuestas T4P1a(S2).....	155
Tabla 53. Tipos de respuestas T4P1b(S2)	155
Tabla 54. Tipos de respuestas T4P2a(S2).....	159
Tabla 55. Tipos de respuestas T4P2b(S2)	162
Tabla 56. Tipos de respuestas T4P3(S2).....	164

Tabla 57. Tipos de respuestas T4P4(S2).....	167
Tabla 58. Tipos de respuestas T1P1a(S3).....	173
Tabla 59. Tipos de respuestas T1P1a(S3).....	173
Tabla 60. Tipos de respuestas T1P1b(S3)	182
Tabla 61. Tipos de respuestas T1P1b(S3)	182
Tabla 62. Tipos de respuestas T1P2(S3).....	186
Tabla 63. Tipos de respuestas T1P3(S3).....	189
Tabla 64. Tipos de respuestas T1P3(S3).....	190
Tabla 65. Tipos de respuestas T1P4(S3).....	192
Tabla 66. Tipos de respuestas T1P5a(S3).....	195
Tabla 67. Tipos de respuestas T1P5b(S3)	195
Tabla 68. Tipos de respuestas T2P1a(S3).....	199
Tabla 69. Tipos de respuestas T2P1b(S3)	199
Tabla 70. Tipos de respuestas T2P2a(S3).....	203
Tabla 71. Tipos de respuestas T2P2b(S3)	203
Tabla 72. Tipos de respuestas T2P2c(S3).....	203
Tabla 73. Tipos de respuestas T2P2d(S3)	203
Tabla 74. Tipos de respuestas T2P3a(S3).....	207
Tabla 75. Tipos de respuestas T2P3b(S3)	207
Tabla 76. Tipos de respuestas T2P3c(S3).....	207
Tabla 77. Tipos de respuestas T2P3d(S3)	207
Tabla 78. Tipos de respuestas T2P3e(S3).....	207
Tabla 79. Tipos de respuestas T2P4a(S3).....	208
Tabla 80. Tipos de respuestas T2P4a(S3).....	209
Tabla 81. Tipos de respuestas T2P4b(S3)	209
Tabla 82. Tipos de respuestas T2P4b(S3)	209
Tabla 83. Tipos de respuestas T2P5a(S3).....	212
Tabla 84. Tipos de respuestas T2P5b(S3)	212
Tabla 85. Tipos de respuestas T2P6(S3).....	214

Índice de Figuras

	Pág.
Figura 1. Niveles de Matematización	29
Figura 2. Elementos básicos de la construcción de modelos	37
Figura 3. Función $A(x)$	45
Figura 4. Función Circular	45
Figura 5. Ángulo $\angle AOP$ de x radianes	51
Figura 6. Descripción geométrica de $\sin x$ y $\cos x$	52
Figura 7. Calendario lunar 2014	64
Figura 8. Calendario lunar para los meses de enero, febrero y marzo de 2014	81

Resumen

Este trabajo considera como punto de partida la problemática asociada al escaso énfasis que dentro de los procesos de enseñanza y de los procesos de aprendizaje de la trigonometría escolar en la Educación Media, particularmente de las funciones Seno y Coseno, se da a la variación y dependencia periódica. En este sentido, se presenta aquí el diseño e implementación de una propuesta de aula enmarcada en el enfoque de la Educación Matemática Realista EMR, en torno a la identificación y modelación de fenómenos periódicos cotidianos y el reconocimiento de la función periódica como elementos fundamentales para caracterizar las funciones trigonométricas Seno y Coseno, como casos específicos de este tipo de variación.

La implementación y el análisis de las producciones de un grupo de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, evidencia la apropiación de aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional, alrededor del estudio de la periodicidad en contextos realistas, tales como: la interpretación, uso y relación entre diferentes sistemas de representación (retórico, tabular, gráfico, algebraico), la modelación de fenómenos cotidianos y el reconocimiento de las matemáticas como medio para organizar la realidad. Asimismo, el transitar de los estudiantes a través de los distintos niveles de comprensión dentro de la matematización progresiva, es decir los procesos de matematización horizontal y de matematización vertical.

Palabras claves: Educación Matemática Realista, Fenómenos Periódicos, Funciones Seno y Coseno, Función Periódica, Modelación, Sistemas de Representación, Propuesta de Aula.

Introducción

Este trabajo gira en torno al estudio de fenómenos de variación periódica y funciones periódicas, específicamente de las funciones Seno y Coseno como casos concretos de este tipo de variación. Esta indagación toma como punto de referencia algunas investigaciones (Buendía, 2004, citada por Montiel (2005), p. 109) y Montiel (2005, p. 109) que han determinado la periodicidad como la propiedad analítica más relevante de las funciones trigonométricas, a través de las cuales adquiere sentido esta propiedad en ámbitos escolares. No obstante, como lo determinó Santacruz (2005, p. 130) el proceso de enseñanza de la trigonometría escolar, ha encapsulado lo funcional en un modelo estático al privilegiar el enfoque de las razones. Asimismo, las tres perspectivas que identifica Santacruz (2005, p. 189) para la enseñanza de este tipo de funciones promueven en el aula un enfoque de correspondencia en tanto se deja de lado el estudio de las variaciones y covariaciones de las funciones trigonométricas, incluida la propiedad de periodicidad.

En este sentido, a partir del enfoque de la Educación Matemática Realista EMR, los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) como referentes curriculares colombianos, particularmente el pensamiento variacional y el proceso general de modelación; así como de aspectos propios de la matemática, se articula una propuesta de aula que permita a los estudiantes caracterizar las funciones trigonométricas Seno y Coseno como casos particulares de dependencia periódica, desde la identificación y modelación de fenómenos de esta naturaleza y el reconocimiento de la función periódica.

La implementación de las situaciones problema y el análisis de resultados deja ver las producciones de un grupo de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón del municipio de Santiago de Cali con respecto a la modelación de fenómenos cotidianos, el reconocimiento de la variación periódica y el uso de sistemas de representación retórico, tabular, gráfico y algebraico, aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional.

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales de la propuesta. Se inicia con el planteamiento del problema y la formulación del objetivo general y los objetivos específicos, para luego dar paso a las diferentes investigaciones, que alrededor de los procesos de enseñanza

y de los procesos de aprendizaje de la trigonometría y del enfoque de la Educación Matemática Realista, como marco teórico y metodológico para el diseño e implementación de situaciones didácticas en el aula, se constituyen en antecedentes de este trabajo.

En el segundo capítulo se establece el marco teórico de referencia, donde se describen los principios de la Educación Matemática Realista: principio de actividad, principio de realidad, principio de interacción, principio de interconexión, principio de reinención y el principio de niveles (Paso del conocimiento informal al formal), así como el uso de los modelos dentro de este enfoque. Desde los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) se da una visión general del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos y del proceso general de modelación. Finalmente, la perspectiva matemática se centra en la presentación de la noción de función, función periódica y las funciones trigonométricas Seno y Coseno.

En el tercer capítulo se aborda la descripción cada una de las tres situaciones que componen la propuesta de aula, Situación 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos, Situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas y Situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares Seno y Coseno; desde su diseño. Asimismo, se establecen los propósitos, contenidos y desempeños esperados en los estudiantes en cada una de ellas. Luego de la presentación de las tres situaciones y la metodología de implementación, se lleva a cabo por medio de tablas de frecuencia la sistematización de resultados y análisis de los mismos, teniendo en cuenta los elementos teóricos definidos en el capítulo 2. Se anexan algunos registros de los estudiantes y al finalizar el análisis de cada situación se precisan algunas conclusiones con respecto a los desempeños esperados durante la aplicación en el salón de clase.

En el capítulo 4 se determinan las conclusiones del trabajo y algunas reflexiones didácticas sobre los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas y de manera específica sobre las funciones Seno y Coseno, a partir de los objetivos formulados, el marco teórico y el análisis de los resultados de los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón al desarrollar las distintas tareas concernientes a las situaciones problema planteadas. Al finalizar se presentan las referencias bibliográficas.

Capítulo 1.

Aspectos generales de la propuesta

Capítulo 1. Aspectos generales de la propuesta

Este capítulo presenta los aspectos generales de esta propuesta de indagación didáctica. Se inicia con el planteamiento del problema y la formulación de los objetivos, para luego dar paso a la justificación y los antecedentes que enmarcan el presente trabajo. La presentación de la problemática, retoma aspectos fundamentales de estudios llevados a cabo en el CINVESTAV (México) y algunas de las conclusiones encontradas en el trabajo Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros (Santacruz, 2005). Los objetivos presentan el propósito del trabajo en tanto, por medio del análisis de los resultados de la implementación de una propuesta de aula, que articula varias perspectivas (curriculares, didácticas y matemáticas), bajo el enfoque de la Educación Matemática realista, se puedan movilizar algunos aspectos del pensamiento variacional en un grupo de estudiantes de la Educación Media colombiana. Los antecedentes toman en consideración investigaciones realizadas a nivel nacional e internacional llevadas a cabo alrededor de los procesos de enseñanza y de los procesos de aprendizaje de las funciones trigonométricas, así como al enfoque de la Educación Matemática Realista.

1.1 Presentación del problema

Los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas en la Educación Básica y Media en Colombia, han estado ligados a diversas dificultades que radican entre otras, a la complejidad en la construcción de conocimiento matemático, teniendo en cuenta la propia naturaleza de los objetos que constituyen esta disciplina, lo que se evidencia en la poca significación y uso que tienen los estudiantes de las nociones y conceptos matemáticos no solo dentro del aula sino fuera de esta.

Si se considera a las matemáticas como un constructo humano que se ha desarrollado en cada época de acuerdo a las particularidades de la misma, es decir, como respuesta a necesidades de tipo práctico (mediciones, construcciones, etc.) o de tipo científico (consolidación de teorías propias de la disciplina o modelación de fenómenos tanto al interior de la misma como en otros campos del conocimiento); su enseñanza no puede estar desligada, por ejemplo, de concepciones

de tipo histórico, epistemológico, filosófico y fenomenológico que han contribuido no solo a la constitución del actual conocimiento matemático, sino que podrían dotar de significado la práctica escolar de esta disciplina, limitada – en la mayoría de casos – a la presentación y memorización de un conocimiento descontextualizado, poco relacionado con los saberes culturales de los estudiantes, así como con los de otras disciplinas escolares.

Ante esta dificultad, como lo expresa Santacruz (2005, p. 3) una nueva visión de la Educación Matemática reconoce la necesidad de dotar a las matemáticas escolares de un significado y funcionalidad, donde sus orígenes, conexiones y aplicaciones en diversos contextos diferentes a los matemáticos, contribuyan a una mejor comprensión e intuición de los procesos constructivos que efectúan los estudiantes.

De este modo el trabajo que aquí se presenta centra la atención en atender el poco énfasis que dentro del estudio de las funciones en la Educación Básica y Media en Colombia se otorga a los modelos de variación y dependencia periódica; particularmente las funciones trigonométricas Seno y Coseno como casos específicos de este tipo de variación. En este sentido, diversas investigaciones (Buendía, 2004, citada por Montiel, 2005, p. 109) y Montiel (2005, p. 109) caracterizan la periodicidad como la propiedad analítica más importante de la función trigonométrica, siendo este tipo de función donde encuentra definición escolar, en tanto concepto, la periodicidad. Es decir, se enfatiza el reconocimiento de la variación periódica para estas funciones trascendentes y se evidencia en el trabajo con los estudiantes dentro del aula, que esta propiedad adquiere sentido solo a través de la función trigonométrica.

Estos estudios (Buendía, 2004; Montiel, 2005) caracterizan el discurso escolar en matemáticas para la noción de función trigonométrica asociado en primer lugar a su definición desde las razones en el triángulo rectángulo, para luego definir a partir del círculo trigonométrico la función y efectuar las gráficas de las funciones trigonométricas básicas, con el propósito de ilustrar la propiedad de periodicidad.

Como lo expresa Montiel (2005, p. 124) el tratamiento en el sistema escolar de las funciones trigonométricas no moviliza su aspecto periódico, ya que en la escuela este tipo de funciones son abordadas como una extensión de las razones, cuya única explicación gira alrededor de la unidad de medida (equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico). Así, se despoja de los usos y significados que dan origen a la función trigonométrica, pero aún más se desvincula ésta de algunas prácticas de referencia, como es el

caso del estudio del movimiento circular uniforme en física. Es decir, pese a ser el círculo trigonométrico el elemento tradicional – en la enseñanza – por el cual se dota a la trigonometría de carácter funcional y se abandona su carácter geométrico, De Kee et al (1996) citados por Montiel (2005, p. 117), señalan que al comparar el desempeño de los estudiantes en el contexto del triángulo rectángulo y en el del círculo trigonométrico, estos obtienen mejores resultados en el trabajo trigonométrico en el contexto del triángulo rectángulo y muestran poca comprensión de la función circular y de su papel en la construcción de las funciones trigonométricas.

De este modo, Montiel (2005, p. 125) enfatiza, que si se utiliza el círculo solo como un medio didáctico que permite hacer visual o más concreta la construcción de las funciones trigonométricas, esta estrategia de enseñanza termina obstaculizando esta construcción en un contexto analítico. Lo anterior, no descarta que el círculo trigonométrico se constituye en un recurso gráfico que vincula de forma coherente las nociones y unidades de medida en la trigonometría y en la función trigonométrica, ya que el discurso matemático escolar no deja claro en los estudiantes el porqué de la necesidad de usar los radianes sobre los grados para la variable independiente, es decir el enfoque clásico (de las razones a las funciones) no ha podido resolver: la elección de una unidad de medida en el paso de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica; por ende no hay recursos didácticos que permitan al profesor el tránsito constructivo triángulo rectángulo $\rightarrow$ círculo trigonométrico $\rightarrow$ función trigonométrica.

En esta dirección, Santacruz (2005, p. 130) hace énfasis en el encapsulamiento de lo funcional en un modelo estático, como es el triángulo rectángulo, que promueve el enfoque de las razones, privilegiado por los docentes para la enseñanza de las funciones trigonométricas. Lo anterior, evidencia un tratamiento de las funciones trigonométricas como correspondencia, ya que el interés está en los puntos (ángulo, lado y razón) y no en sus variaciones.

Santacruz (2005, p. 189) identifica tres perspectivas para la enseñanza de las funciones trigonométricas: la primera, de las funciones circulares hacia el triángulo rectángulo, la segunda, de las funciones trigonométricas entre los lados de un triángulo rectángulo (razones) hacia las funciones circulares y finalmente, desde las razones trigonométricas hacia las razones en una circunferencia no unitaria; las cuales promueven en la escuela un enfoque de correspondencia para este tipo de funciones, dado el escaso reconocimiento por parte de los libros de texto y los docentes de las variaciones y covariaciones de las funciones trigonométricas, entre las cuales se encuentra inmersa la propiedad de periodicidad.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo se centra en la identificación y modelación de fenómenos periódicos cotidianos y el reconocimiento de la función periódica como elementos fundamentales que permitan caracterizar las funciones trigonométricas Seno y Coseno, como casos particulares de variación periódica, con el objeto de contextualizar la trigonometría escolar dentro de un ámbito de dependencia. Así, la propuesta de aula, es decir el diseño de las situaciones problema y las tareas, se enmarca dentro del enfoque de la Educación Matemática Realista, promovido por Hans Freudenthal (1973,1991), dado que concibe la matemática como una herramienta para organizar situaciones del entorno de los estudiantes, realidad a partir de la cual debe estructurarse el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje dentro del aula; lo que se ha denominado matematización.

En síntesis, en este trabajo se trata de responder la siguiente pregunta:

¿Qué aspectos del pensamiento variacional se favorecen, en un grupo de estudiantes de Educación Media, a través de la implementación de una propuesta de aula sobre las funciones periódicas, particularmente las funciones trigonométricas Seno y Coseno, enmarcada dentro del enfoque de la Educación Matemática Realista?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Caracterizar algunos aspectos del pensamiento variacional (reconocimiento de la variación periódica, sus representaciones, ejemplos etc.) en un grupo de estudiantes de Educación Media de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón a través del análisis de la implementación de situaciones problema enmarcadas en contextos realistas y organizadas en una propuesta de aula.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Articular los resultados del estudio de algunos aspectos curriculares, didácticos y matemáticos, relacionados con las funciones periódicas, particularmente las funciones trigonométricas Seno y Coseno, en una propuesta de aula, bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista.
- Caracterizar algunos aspectos del pensamiento variacional, desde el enfoque de la Educación Matemática Realista y las políticas curriculares Colombianas (MEN. 1998, 2006) según las producciones de un grupo de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, alrededor de situaciones problema de variación periódica.
- Determinar algunas reflexiones didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las funciones periódicas en general y de forma particular sobre las funciones trigonométricas Seno y Coseno, a partir de los resultados de este trabajo.

1.3 Justificación

La reflexión acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las funciones periódicas en el ámbito de la investigación en Educación Matemática se ha limitado al estudio de las funciones trigonométricas, como lo afirma Buendía (2006, p. 234) al señalar que el discurso matemático escolar para las funciones periódicas ha propiciado una identificación de la periodicidad como propiedad exclusiva de este tipo de funciones, dejando por fuera otros modelos funcionales. En este sentido, añade la autora que si un fenómeno físico puede ser modelado por medio de la función seno, adquiere como consecuencia la propiedad de ser periódico. La periodicidad pareciera no significar nada por sí misma, más que a la luz del comportamiento repetitivo sui generis de la función seno (Buendía, 2006, p.234).

A lo anterior, se suma el tratamiento analítico y algebraico que recibe en el sistema escolar la periodicidad, desconociendo aspectos de esta propiedad, que como la predicción se encuentran relacionados al desarrollo mismo de la humanidad, establecido por Buendía (2006, p. 234) al afirmar que el estudio de los fenómenos naturales periódicos ha contribuido al avance de

la ciencia en tanto su comportamiento repetitivo permitió al hombre conocerlos y utilizarlos como unidades naturales de tiempo.

A nivel nacional, los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) como marcos curriculares que determinan posturas didácticas, conciben la variación periódica y la modelación de fenómenos periódicos cotidianos, ligadas exclusivamente a las funciones trigonométricas; es decir aun cuando hacen énfasis dentro del desarrollo del pensamiento variacional al estudio de la dependencia entre variables en contextos reales, por medio de patrones de variación, limitan la modelación de fenómenos periódicos del mundo real a la variación de las funciones Seno y Coseno.

Es decir, las políticas educativas colombianas para la Educación Básica y Media, al igual que las investigaciones de Buendía (2004, citada por Montiel, 2005, p. 109) y Montiel (2005, p. 109), reconocen la existencia de la periodicidad en ambientes escolares solo a través de estas funciones trascendentes.

Sin embargo, como lo determinó Santacruz (2005) pese a la publicación de los Lineamientos (1998) y Estándares (2006)¹, los procesos de enseñanza de la trigonometría escolar continúan ligados a un contexto estático donde se privilegian las razones en el triángulo rectángulo, presentación que limita su aprendizaje al uso adecuado de técnicas aritméticas y algebraicas, pero que esconde el tipo de variación y cambio que subyace a las funciones trigonométricas. Así, la escuela no ha potencializado aún la modelación de situaciones cotidianas relacionadas con las funciones Seno y Coseno, pues fomenta únicamente las relaciones entre los lados y los ángulos en el triángulo rectángulo, así como la operatividad en la demostración de identidades y la solución de ecuaciones trigonométricas.

Este trabajo se enfoca en el estudio de la periodicidad en contextos reales. Es decir, intenta acercar al estudiante al reconocimiento y comprensión de regularidades periódicas en su contexto, desde la perspectiva variacional y funcional de los Lineamientos (1998) en donde “El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (p. 73). De esta forma, el diseño de una propuesta de aula en el marco de la Educación Matemática Realista, promueve en el sistema escolar la matematización de situaciones

¹ Si bien 2006 figura como el año de publicación de los Estándares, el trabajo desarrollado por Santacruz (2005) tomó en consideración la publicación realizada por el MEN en 2003.

problemáticas de la cotidianidad del estudiante, contrario a la enseñanza tradicional que ha privilegiado la definición y el concepto por encima de la actividad matemática del alumno, en lo que Freudenthal denominó “inversión antididáctica” relacionada con comenzar por los conceptos en vez de por las aplicaciones (Freudenthal, 1983; traducción de Puig, 2001).

Así, la identificación por parte de los estudiantes de fenómenos naturales periódicos, les permitirá caracterizar aspectos fundamentales asociados a la definición de función periódica tales como: periodo, representaciones (gráfica, tabular, algebraica) y la relación de dependencia entre las variables, elementos a través de los cuales no solo se pretende el reconocimiento de la propiedad de periodicidad en las matemáticas y en otras disciplinas, sino contribuir al fenómeno didáctico, como lo expresa Buendía (2006, p. 228 – 229) que surge de la poca coherencia entre la existencia y aplicabilidad de una definición matemática de periodicidad – componente esencial de la estructura matemática – y lo que se interpreta acerca de lo periódico en ambientes escolares, específicamente al reconocimiento de las funciones trigonométricas Seno y Coseno como modelos particulares de variación periódica.

Por tanto, el trabajo plantea situaciones en diferentes contextos realistas (Enfoque de la EMR) que permitan como lo enuncia Buendía (2006, p. 230) una resignificación del conocimiento matemático relacionado con el aspecto periódico de las funciones, en tanto su tratamiento dentro del aula no brinda suficientes marcos de referencia más allá de los exclusivamente matemáticos. En este sentido, la propuesta de indagación didáctica al permitir la caracterización de la variación periódica desde fenómenos naturales, se constituye en una herramienta para iniciar el estudio y determinación de la noción de función (periódica), que brindará a los estudiantes un acercamiento a la función circular y a las funciones Seno y Coseno, desde su representación gráfica, como modelos de comportamiento funcional periódico.

De este modo, se espera aportar una aproximación a los procesos de enseñanza y a los procesos de aprendizaje de la trigonometría escolar, que parte de la identificación y descripción de la periodicidad en situaciones cotidianas para determinar un modelo funcional de variación periódica y así comprender las funciones Seno y Coseno, como casos concretos de este comportamiento.

1.4 Antecedentes

Como fue mencionado anteriormente, las investigaciones asociadas con las funciones periódicas a nivel escolar, Educación Básica y Media, se han centrado en las funciones trigonométricas, de este modo la recopilación de antecedentes, gira en torno – en primer lugar – a investigaciones que han indagado los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas y de las funciones trigonométricas Seno y Coseno, concretamente su periodicidad.

En este sentido, se encuentra un gran número de estudios adelantados en el CINVESTAV (México) enmarcados en la aproximación Socioepistemología en Matemática Educativa. Si bien estos trabajos competen a la aproximación Socioepistemológica como modelo teórico, exploran herramientas de tipo curricular y didáctico como son: concepciones sobre la enseñanza de las funciones trigonométricas desde los textos escolares, los programas oficiales, la visión de los maestros, de los alumnos (desde la aplicación de cuestionarios y pruebas) y también estudios matemáticos e históricos que determinan la presentación actual de las nociones trigonométricas en el aula.

En segundo lugar, los antecedentes involucran trabajos desarrollados en el enfoque de la Educación Matemática Realista, aunque su objeto de estudio matemático no sean las funciones trigonométricas. Finalmente, como antecedente personal se encuentra el trabajo de grado: Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros (2005), el cual deja ver los planteamientos de maestros y libros de texto que han predominado en la enseñanza de la trigonometría en algunas Instituciones Educativas de Cali por cerca de 30 años.

Sobre la enseñanza de las funciones periódicas y de las funciones trigonométricas

1.4.1. Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones

Este artículo (Buendía, 2006) presenta una socioepistemología – o epistemología de prácticas – acerca de la periodicidad de las funciones, que tiene como aspecto principal la relación predicción – periodicidad en el reconocimiento significativo de dicha propiedad.

Además, atendiendo al tratamiento de la periodicidad dentro de la escuela, aborda el fenómeno didáctico que surge entre la poca coherencia que hay entre la existencia y aplicabilidad de una definición matemática de periodicidad, componente esencial de la estructura matemática, y lo que se interpreta acerca de lo periódico en los ambientes escolares, es decir una problemática relacionada con el poco significado de la definición formal de la propiedad periódica y la asociación no discriminada de esta propiedad con cualquier tipo de repetición que presente una gráfica.

Mediante una situación (compuesta de tres secuencias) que gira alrededor del comportamiento repetitivo de gráficas de funciones que describen movimientos y retoma elementos identificados en torno a la construcción de lo periódico como son: la relación de lo periódico con lo dinámico, la búsqueda de patrones de comportamiento, la necesidad de una visión local – global, la búsqueda de una unidad de análisis y la importancia de la predicción como una práctica que potencia la aparición de dichos elementos, la autora resalta en primer lugar, el predominio de argumentos de tipo analítico, ante la falta de un marco de referencia adecuadamente amplio que permita distinguir entre fenómenos y gráficos repetitivos de aquellos que son periódicos.

En segundo lugar, señala que lo periódico constituye todo un lenguaje incluso antes del tratamiento analítico formal de esta propiedad, en este sentido se hace indispensable reconocer estos marcos de significación ya que permitirán articular (lo periódico) a lo largo del sistema didáctico; es decir el saber matemático se problematiza en tanto no se le puede considerar como un objeto acabado no cuestionable, sino como un complejo de prácticas, de naturaleza social, que le den sentido y significado, como es el caso de la periodicidad, que se constituye – como saber matemático – socialmente en ámbitos no escolares.

1.4.2. Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica

Este estudio (Montiel, 2005) centra su atención en el fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica, involucrando aspectos cognitivos, epistemológicos, didácticos y aporta fundamentos de carácter social para explicar el fenómeno en cuestión. Esta investigación documenta que en la escuela la función trigonométrica es vista como una extensión de las razones, cuya única explicación con respecto a la unidad de medida

radica en la equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico, dejando de lado los usos y significados que dan origen a las funciones trigonométricas y la relación de las matemáticas con otras áreas escolares que se contemplan en la formación de los estudiantes.

Esta relación, entre las matemáticas y otras áreas escolares, no se concibe como una simple *aplicación* (perspectiva tradicional), sino que por el contrario para el caso de la función trigonométrica, es en esas otras áreas (física, química, biología) donde se originan las nociones, ideas y conceptos matemáticos que dotan de significado, utilidad y sentido a este tipo de función, lo que determina que las matemáticas deben entenderse y aprenderse en la medida en que conviven en la construcción de conocimiento relacionado con otras asignaturas escolares.

Este enfoque clásico (de las razones a las funciones) – como lo establece esta investigación – no ha podido resolver la elección de una unidad de medida en el paso de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica; de este modo no hay recursos didácticos que permitan al profesor el tránsito constructivo triángulo rectángulo $\rightarrow$ círculo trigonométrico $\rightarrow$ función trigonométrica. Así, la autora a partir del contexto de origen de la función trigonométrica, el cual le permite identificar las circunstancias, las problemáticas, los medios y las denominadas prácticas de referencia (matematización de la astronomía, matematización de la física y matematización de la transferencia de calor) que posibilitaron la emergencia de este tipo de función; propone como ruta alternativa al enfoque de la escuela, una construcción social de la función trigonométrica en escenarios que articulen la actividad del alumno con una práctica de referencia específica y realista, ambas reguladas por tres prácticas sociales: anticipación, predicción y formalización.

1.4.3. Un análisis didáctico de la función trigonométrica

Tomando como punto de referencia la falta de apropiación por parte de los estudiantes mexicanos del concepto de función, dado que de ella se tienen diferentes concepciones y representaciones, generada por una enseñanza tradicional que no permite pasar de una representación a otra; la investigación (Maldonado, 2005) caracteriza con respecto a la apropiación del concepto de función trigonométrica, en el medio escolar, la siguiente presentación:

- En el contexto del triángulo rectángulo, definiéndose como razones.
- Luego como razones trigonométricas de ángulos (medidos en grados) de cualquier valor (sistema de ejes coordenados).
- Finalmente a partir del círculo unitario se da la conversión de ángulos medidos en grados a radianes y de esta manera se trata a las funciones trigonométricas como funciones de variable real.

Dada esta forma de abordar la función trigonométrica en el aula, el interés – de la autora – se centra en qué percibe el estudiante de este tratamiento e intenta dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo vive la noción de función trigonométrica en el sistema escolar mexicano?, para esto a partir de un cuestionario, cuyo diseño es realizado desde el análisis didáctico de la función trigonométrica en programas oficiales de estudio (objetivos o propósitos) y libros de texto (conceptos, definiciones, ejemplos y ejercicios), infiere sobre las concepciones que quedan en el estudiante de la noción de función trigonométrica, considerando que, la concepción del “sujeto” refiere los conocimientos que éste tiene sobre un objeto, que son originados como consecuencia de los procesos de enseñanza – aprendizaje en el interior del sistema didáctico.

Así, uno de los señalamientos más importantes de la investigación, sostiene que los estudiantes no logran profundizar el concepto de función trigonométrica, ya que no hacen diferencia, cuando se les presenta este tipo de función como función real, esto dado que el tratamiento escolar de las funciones trigonométricas como funciones reales, es decir cuando se pasa de radianes a reales, no se hace explícito.

1.4.4. Las funciones trigonométricas Seno y Coseno a partir de sus aplicaciones

A partir de la relevancia de la trigonometría dentro de la matemática a nivel de secundaria en Colombia, al estar relacionada con los tipos pensamiento: geométrico, algebraico y variacional y los procesos generales de: planteamiento y resolución de problemas y modelación; establecidos por el MEN (Lineamientos Curriculares y Estándares) y las dificultades asociadas a su enseñanza y a su aprendizaje como es el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas (problema de lo discreto a lo continuo) y la falta de contextualización significativa que los estudiantes de grado décimo tienen de las funciones trigonométricas, el

trabajo (Sánchez, 2014) plantea el diseño y aplicación de una propuesta didáctica (unidad didáctica) centrada en el aprendizaje significativo de las funciones Seno y Coseno tomando como referencia problemas experimentales relacionados con el movimiento circular uniforme y las ondas mecánicas.

De este modo, el diseño de la unidad didáctica se fundamenta en los fenómenos físicos como fuente de inspiración de conocimiento matemático, de tal forma que el estudio de las funciones Seno y Coseno por medio de fenómenos físicos de comportamiento periódico le permitan a los estudiantes descubrir estas funciones a través de sus aplicaciones y utilizarlas como una herramienta útil para poder analizar algunos problemas periódicos que se pueden encontrar en el mundo real. Para tal fin se hace uso programas computacionales como el Geogebra y el Osciloscopio y de elementos estadísticos como la regresión.

Los resultados de la investigación revelan que las aplicaciones de la matemática escolar se constituyen en herramienta fundamental que permite a los estudiantes un acercamiento al conocimiento matemático que les ayuda a comprender su entorno. Así, la interdisciplinariedad, el uso de herramientas tecnológicas y el contexto histórico, enriquecen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

Sobre la Educación Matemática realista

1.4.5. Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica

El trabajo (Pérez, 2012) es una indagación que muestra el diseño y la aplicación de una unidad didáctica a estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Normal Superior de Villavicencio, para conceptualizar las cónicas (elipse, parábola e hipérbola) desde una versión geométrica hacia una analítica.

La unidad didáctica está enmarcada dentro de la Educación Matemática Realista, por ello el diseño de cada una de las 3 situaciones que la componen: Cortes a un cono, Capturando cónicas y Cónicas desplazadas, tiene en cuenta los principios que caracterizan este enfoque y son tomadas como punto de partida de los procesos de matematización o modelación propuestos en las actividades que desarrollan los estudiantes. Además, el diseño e implementación toma como

referentes los marcos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los libros de texto y las propuestas de enseñanza para las cónicas, así como el plan de área institucional y el proceso general de modelación (pensamiento espacial y sistemas geométricos).

Cada actividad contiene una estructura que se identifica con los principios planteados por Freudenthal: *una finalidad* (principio de actividad), una *experiencia* (principio de realidad) donde el rol del estudiante es reinventar modelos, conceptos, estrategias matemáticas (principio de reinvención) y el diseño e implementación de las situaciones con la secuencia de actividades propende por el paso del estudiante a través de los diferentes niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal (principio de niveles). Asimismo, una *socialización de resultados* por medio de la cual se suscita la discusión, el uso de estrategias matemáticas y se facilita una reflexión colectiva que se constituye en elemento fundamental para que los estudiantes alcancen niveles más elevados (principio de interacción).

La puesta en marcha de cada una de las situaciones fortalece el desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos y el dominio de los sistemas conceptuales y simbólicos a través de la ejecución de los procesos generales (principio de interconexión).

La investigación evidencia que la propuesta didáctica favoreció la comprensión de las cónicas por medio de la visualización, construcción, explicación y formalización de los aspectos gráficos y analíticos de estas curvas, además que el proceso de matematización permite la reinvención guiada del conocimiento matemático, donde es posible “hacer” matemática, lo que se constituye en una herramienta motivadora en el aula y promueve un cambio de actitud hacia el aprendizaje de esta disciplina.

1.4.6. La modelación matemática en la educación matemática realista: Un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos

Esta investigación (Henao & Vanegas, 2012) se desarrolla a partir del reconocimiento de algunas problemáticas en didáctica de la matemática asociadas a la búsqueda, diseño e implementación de propuestas de enseñanza que permitan abordar la falta de sentido común de los estudiantes en la interpretación y resolución de problemas en diferentes contextos, lo que genera una desvinculación del conocimiento matemático escolar con sus saberes informales.

De este modo, se enmarca una propuesta dentro de la Educación Matemática Realista que busca divulgar algunos de sus referentes teóricos y metodológicos en el diseño de tareas relacionadas con modelos cuadráticos, enfatizándose el papel que desempeña el proceso de modelación en la conexión entre las matemáticas y la realidad para promover la formación de conceptos matemáticos ligados a lo cuadrático. Así, se asumen los diferentes niveles de matematización, como posibilidad para indagar el desempeño de los estudiantes de los últimos grados de educación media (10° y 11°) y las implicaciones didácticas y cognitivas, con respecto al proceso de modelación matemática en el contexto escolar.

Algunos de los resultados obtenidos en este trabajo, reivindican las diferentes etapas de matematización horizontal y vertical que atraviesan los estudiantes, especificadas por medio de los niveles de comprensión (en el marco de la Educación Matemática Realista), lo que evidencia que los estudiantes pueden situarse en alguno de estos niveles, sin embargo debido a que sus modelos van evolucionando, hasta adquirir una mayor generalidad, dicha “ubicación” tiene inevitablemente un valor relativo. Lo anterior, deja ver que la Educación Matemática Realista como marco teórico y metodológico promueve un acercamiento particular a los procesos de modelación en el aula y permite desarrollar estrategias de intervención en ambientes escolares.

1.4.7. Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros

El estudio (Santacruz, 2005) realizado es una indagación de las posturas de maestros de matemáticas en ejercicio de diferentes Instituciones Educativas Oficiales de Cali, frente a la enseñanza de las funciones trigonométricas y los enfoques de los textos escolares de trigonometría de diferentes épocas, marcados por las reformas curriculares particulares de esos momentos históricos.

La investigación establece tres diferentes perspectivas definidas por los textos para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones trigonométricas:

- Partir de las funciones circulares pasando por las trigonométricas definidas para cualquier ángulo y finalmente establecerlas en el triángulo rectángulo.

- Partir de las funciones trigonométricas establecidas entre los lados de un triángulo rectángulo, para definirlas luego en cualquier ángulo como razones trigonométricas y finalmente como circulares.
- Partir desde el estudio de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, para pasar luego al de las funciones trigonométricas en una circunferencia unitaria y finalmente en una no unitaria.

Las anteriores perspectivas continúan promoviendo en la escuela un enfoque de correspondencia para el estudio de estas funciones, ante el escaso reconocimiento de sus variaciones y covariaciones. Enfoque que en términos de la fenomenología, deja por fuera diversos contextos que a lo largo de la historia han sido referentes para este tipo de funciones, conllevando a que como tal se acceda en la escuela sólo al concepto de razón trigonométrica lo que genera que no se constituya un verdadero objeto mental de la función trigonométrica, puesto que no son materia de estudio todos los fenómenos por ella organizados, como es el caso de los movimientos físicos con características periódicas.

El trabajo evidencia además el alto grado de subordinación de los maestros hacia los textos escolares que aluden dentro de su presentación innovaciones de tipo curricular (política educativa) e identifica que la concepción predominante en los docentes es la de ver la función como correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, en detrimento de la concepción de esta como dependencia entre variables, lo que ha llevado a la falta de reconocimiento de la dependencia que caracteriza las funciones trigonométricas.

Este estudio señala que el funcionamiento actual del sistema didáctico no contribuye de manera significativa al desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes de Educación Media, ya que las concepciones que guían las prácticas de enseñanza no se corresponden con la lógica de la construcción de los conceptos y van en sentido contrario a ella, al presentar conceptos matemáticamente descontextualizados, poco relacionados entre sí y orientados sólo hacia una aplicación artificial a problemas prácticos.

La anterior síntesis de antecedentes permite, en primer lugar, delimitar y justificar la problemática abordada en este trabajo. De esta forma, algunos de los estudios presentados caracterizan dentro de la trigonometría escolar las dificultades asociadas a la enseñanza y al aprendizaje de las funciones trigonométricas, concretamente su periodicidad, desde las diferentes

perspectivas o enfoques identificados para su presentación en el aula. En segundo lugar, las investigaciones mencionadas con respecto a la Educación Matemática Realista brindan un marco de referencia en torno al diseño y aplicación de propuestas de enseñanza (unidades didácticas) llevadas a cabo en diversas Instituciones Educativas, dentro del enfoque en el cual se ambienta la propuesta de aula a implementar. Finalmente, algunos de los señalamientos de estos antecedentes, brindan herramientas para orientar las conclusiones del presente trabajo a partir del análisis de los resultados de la propuesta de aula.

Capítulo 2.

Marco Teórico de Referencia

Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia

Este segundo capítulo expone los referentes teóricos que sustentan la propuesta de investigación, se inicia con una presentación general del enfoque de la Educación Matemática Realista EMR, donde se caracteriza: ¿Qué es la EMR? y cuáles son sus principios fundamentales. De igual forma, en este capítulo se abordan aspectos relacionados con la modelación matemática desde el enfoque de la EMR, así como desde referentes curriculares colombianos, es decir como proceso general establecido desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias (2006). Finalmente, se plantea el ámbito disciplinar matemático en torno a la noción de función, función periódica y las funciones trigonométricas Seno y Coseno.

2.1 Sobre la educación matemática realista

En este apartado se hace referencia a los principios fundamentales que caracterizan la propuesta de la EMR, marco teórico y metodológico dentro del cual se enmarca el presente trabajo. Los aspectos o bases teóricas de este enfoque son tomados desde la perspectiva que Bressan y Gallego (2011) y Bressan, Zolkower y Gallego (2004), pertenecientes al Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática, realizan de las diversas obras de Hans Freudenthal considerado el fundador de la EMR y de autores como Panhuizen, Gravemeijer y Treffers.

La EMR nace entre los años 60 y 70 en oposición tanto al enfoque mecanicista que primaba en la enseñanza de las matemáticas, como a la aplicación de la matemática moderna en las escuelas holandesas.

Freudenthal establece como punto de partida para la EMR el hecho de que la enseñanza de las matemáticas debe estar vinculada con la realidad, permanecer cercana a los estudiantes y ser relevante en la sociedad con miras a constituirse en un valor humano. Este autor considera además que la matemática es para todos y no para una élite de personas, lo que lo conlleva a pensar esta disciplina como una actividad humana, a la que todos pueden acceder y es mejor aprendida haciéndola; es decir todos los estudiantes deben tener alguna forma de contacto con lo que ha denominado el quehacer matemático, considerado como una actividad estructurante u

organizadora de matematización, donde: “Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma” (Freudenthal, 1973, p. 44, citado por Bressan y Gallego, 2011, p. 2).

2.2 Principios de la educación matemática realista

2.2.1 Principio de actividad

La matemática es concebida como una actividad humana a la que todas las personas pueden tener acceso y puede ser mejor aprendida haciéndola, de esta manera, para Freudenthal (1991, citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 3) hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado. Aunque el autor no profundiza en la noción de actividad resalta que desde el punto de vista didáctico es indispensable reconstruir el proceso oculto dentro del producto, así por ejemplo el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, etc.

Al propiciar una matemática para todos, Freudenthal reconoce que no todos los estudiantes van a ser matemáticos, por ende lo más importante es que se aborden en el sistema educativo de forma matemática y crítica problemas de su cotidianidad. Así, se debe brindar la posibilidad al estudiante de acceder a estos conocimientos y destrezas, por medio de situaciones problemáticas que le conlleven a la necesidad de usar herramientas matemáticas para su organización y solución.

Desde el enfoque realista, la matemática posee un valor educativo en tanto permite comprender y participar en las maneras en que esta disciplina organiza diferentes ámbitos de nuestro entorno social y natural.

2.2.2 Principio de realidad: Partir de contextos y situaciones problemáticas realistas

Para Freudenthal (1991, citado por Bressan y Gallego, 2011, p. 3) dado que la matemática surge en gran medida como una organización de la realidad, es decir como herramienta para matematizar situaciones del entorno social y natural, su enseñanza y aprendizaje debe originarse también en esa realidad, organizar situaciones de este tipo. Sin

embargo, esto no significa que los procesos de enseñanza y de aprendizaje deban limitarse a fenómenos perceptibles o tangibles del mundo real, como lo argumenta Panhuizen (2003, p. 2) los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real, ya que la matematización se entiende aún dentro del mismo ámbito de la matemática.

Lo que busca, Freudenthal, es que los estudiantes reinventen las herramientas matemáticas (procedimientos de cálculo – estrategias de resolución) a partir de un trabajo en el aula que comprenda un espacio para preguntas surgidas de las situaciones problema, para la discusión sobre las diversas estrategias y soluciones, pero sobre todo en torno a la interpretación misma de las situaciones problemáticas presentadas en contextos y situaciones realistas². Surge así el concepto de contexto dentro del marco de la EMR, siendo entendido como el dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado (Freudenthal, 1991, p. 73, citado por Bressan y Gallego, 2011, p. 3).

La idea de contexto es ampliada por Dekker y otros (2001, citados por Bressan y Gallego, 2011, p. 3), los cuales conciben un contexto como un evento o situación derivada de la realidad que resulta significativa para los estudiantes o la pueden imaginar y conlleva a que hagan uso de métodos matemáticos desde su propia experiencia. Estos autores definen diferentes tipos de contextos: reales (cotidianos), artificiales (fantasía), matemáticos y virtuales (aquellos que surgen de la realidad pero contienen elementos no reales en sí mismos, cuyo objetivo es simplificar y simular situaciones).

De este modo, los contextos en la EMR al ser significativos para el aprendizaje Freudenthal (1981, p.144, citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 5) se constituyen en los puntos abiertos de partida de su actividad matemática, haciendo uso del sentido común, así como estrategias informales de solución en vía hacia las formales. En este sentido, Bressan y otros (2006, p. 11 – 33, citadas por Bressan y Gallego, 2011, p. 3 – 4) resaltan que los contextos realistas cumplen un papel fundamental en el aprendizaje de los estudiantes, en tanto que:

- Son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de la misma.
- Bien buscados, resultan de interés para los alumnos.

² Una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada (Freudenthal, 1991; Panhuizen, 1996, Streefland, 1991).

- Se constituyen en objetos de trabajo, tornando accesible el contenido matemático y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización con base a sus posibilidades.
- Promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos.
- Son abiertos (permiten estrategias variadas y/o varias soluciones) dando lugar a valiosas discusiones matemáticas entre los alumnos.

No obstante, es importante aclarar el carácter relativo del concepto de contexto realista en la medida que este se torna realista o no dependiendo de la experiencia previa de los estudiantes y/o su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

2.2.3 Principio de interacción

El aprendizaje de la matemática es considerado como una actividad social donde la interacción colectiva, por medio de la reflexión, lleva a niveles de comprensión más elevados en los estudiantes. Así, la discusión sobre las diferentes interpretaciones de una situación problema, de los procedimientos y justificaciones de la solución es central en la EMR. Estas interacciones pueden ser de dos tipos: sociales verticales (docente – alumno) y horizontales (alumno – alumno), donde el docente debe manejar este tipo de interacciones de tal manera que pueda promover la producción, intercambio y apropiación de ideas por parte de los estudiantes (Dekker y Elshout – Mohr, 2004, citados por Bressan y Gallego, 2011, p. 6).

El tener en cuenta situaciones problema que den lugar a diversas interpretaciones y diferentes niveles de comprensión por parte de los estudiantes, conlleva a la consideración de una clase no fragmentada en pequeños grupos con procesos similares, sino más bien, como lo argumenta Freudenthal a una clase general como una unidad de organización o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos (heterogeneidad cognitiva).

2.2.4 Principio de interconexión (estructuración) de los ejes o unidades curriculares de la matemática

El principio de interconexión se asocia con poca diferenciación que hace la EMR entre los ejes curriculares de las matemáticas. Desde la EMR se concibe que aplicar la matemática es muy complejo si cada eje curricular que la compone es enseñado de forma aislada, ya que usualmente en las aplicaciones de esta disciplina, se requiere no solo de la aritmética, del álgebra o la geometría para resolver un problema. Así, por medio de una integración curricular, se logra mayor coherencia en la enseñanza, ya que permite diversos modos de matematizar una situación.

En términos de Freudenthal (1982, citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 9) lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede, o no, integrar con todo o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación.

2.2.5 Principio de reinención

La enseñanza de la matemática dentro de la EMR toma la forma de reinención guiada (Freudenthal, 1991, citado por Bressan y Gallego, 2011, p. 6). Esta concepción de la enseñanza debe permitir al alumno reinventar ideas y herramientas matemáticas a partir del proceso de matematización, en el cual los estudiantes no crean, ni descubren sino que reinventan modelos, operaciones y estrategias matemáticas similares a las usadas por los matemáticos al crearlas. En este ámbito es fundamental el rol del docente como guía y organizador de la matematización en el aula, es decir como agente que media entre los estudiantes y las situaciones problema, entre los propios estudiantes y entre las producciones informales y las formales ya institucionalizadas dentro de la matemática como disciplina.

Este modelo de enseñanza participativa requiere que los estudiantes expliquen, justifiquen, cuestionen, acuerden alternativas de solución y reflexionen sobre ellas, siendo sus métodos informales la base para el logro de los formales.

2.2.6 Principio de niveles: Paso del conocimiento informal al formal

Este es quizá uno de los principios más relevantes de la propuesta de Freudenthal y sus colaboradores, ya que el objetivo principal de la EMR es el estudio de cómo pasa un estudiante del conocimiento informal, al preformal y de éste al formal y cómo ayudarlo en este proceso.

En concordancia con la búsqueda de una matemática accesible para todos, las contribuciones de Freudenthal giran en torno a facilitar el encuentro entre la organización matemática de situaciones cotidianas y la matemática haciendo énfasis en la matematización y la formulación de secuencias didácticas que se adapten a diferentes aulas, estructurando clases con base en los múltiples usos de los saberes a enseñar y los diversos modos de apropiación de estos saberes por parte de los estudiantes.

Este paso de lo informal a lo formal es denominado por Treffers (1987, citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 6) matematización progresiva. Treffers, sostiene que los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión caracterizados por diversos tipos de actividades mentales y lingüísticas. Este proceso de matematización es retomado por Freudenthal (1991, citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 7) quien lo presenta bajo dos formas:

- Matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.
- Matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

Freudenthal añade que la matematización horizontal implica ir del mundo real al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse en el mundo de los símbolos, aclarando que la diferencia entre estos dos tipos de matematización no siempre está claramente delimitada.

En particular, Gravemeijer (2002; citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 7) al realizar la distinción entre “modelo de” y “modelo para” establece que estos niveles de

comprensión son: situacional, referencial, de generalización y de formalización y que se encuentran ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada.

Niveles de matematización

Nivel situacional: conocimiento e interpretación de la situación problema y uso de estrategias relacionadas completamente al contexto de la situación misma. En este nivel los estudiantes hacen uso de sus conocimientos informales, su experiencia y sentido común para identificar la matemática que se encuentra en el contexto, descubre relaciones y regularidades con otras situaciones, etc.

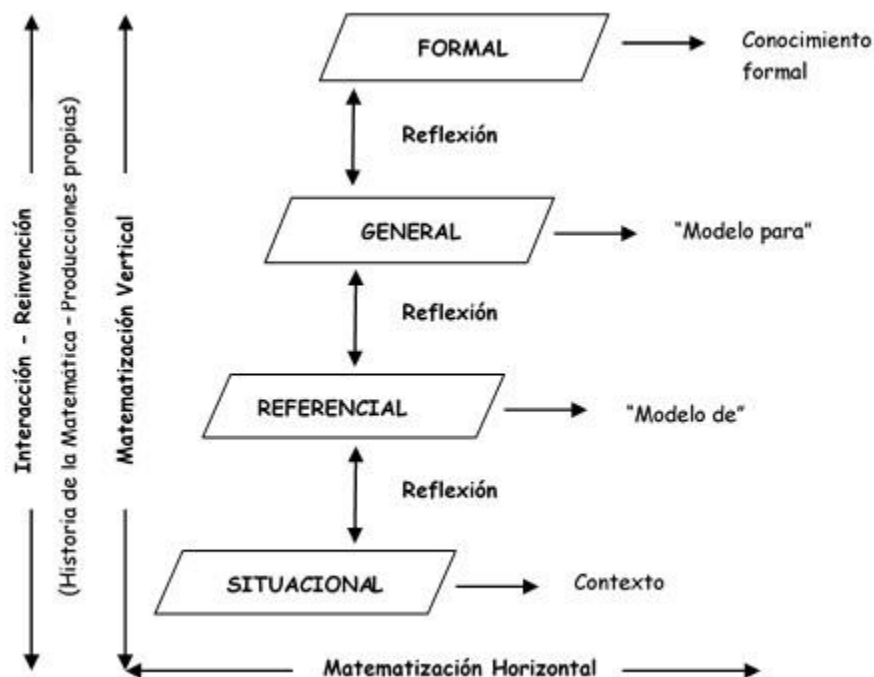
Nivel referencial: aparecen las representaciones, modelos, descripciones, conceptos y procedimientos individuales que sintetizan el problema, pero ligadas a la situación particular en la cual se originaron.

Nivel general: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización sobre las diferentes representaciones, modelos, descripciones, conceptos y procedimientos surgidos en el nivel anterior, pero favoreciendo una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. En este nivel, por medio de la reflexión sobre estrategias, conceptos y modelos (del nivel anterior) surgen aspectos generalizables, de donde los estudiantes pueden concluir que se pueden utilizar en conjuntos de problemas, generando modelos para la solución de los mismos³.

Nivel formal: se comprende y se actúa con los procedimientos, conceptos y notaciones propias de la rama de las matemáticas donde se ubica la situación problema.

³ Generalizar en la EMR implica conectar diversas situaciones reconociendo características similares que permiten que se las clasifique dentro de un determinado tipo y no como la aplicación de un procedimiento conocido a situaciones nuevas.

Figura 1. Niveles de Matematización



El proceso de matematización horizontal corresponde al nivel situacional y de matematización vertical corresponde a los niveles referencial, general y formal.

Para Freudenthal (1971, p. 417 citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 8) la evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio de un nivel se torna objeto del siguiente nivel. De igual manera, la reflexión se constituye en eje central del paso de niveles dentro de la matematización y es concebida como un proceso mental de estructuración o re – estructuración de una experiencia, un problema o un conocimiento existente o intuitivo.

Por último, la finalidad de estos niveles se orienta más hacia la exploración de los procesos de aprendizaje de los estudiantes que a la descripción exacta de lo que hacen en cada uno de estos.

2.3 Sobre la utilización de los modelos

Los modelos se constituyen en las representaciones de las situaciones donde se reflejan los aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son significativos para dar solución a la situación presentada. En términos de Freudenthal (1991, p. 34, citado por Bressan y Gallego, 2011, p. 4):

“El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal.”

En la EMR la noción de modelo no hace referencia a estos como sistemas axiomáticos o estructuras cognitivas, o preconstituidos o impuestos desde la matemática formal, sino de modelos que emergen durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje, es decir en la actividad matemática de los estudiantes como herramientas para representar y organizar los diversos contextos y situaciones. De esta forma, la EMR concibe los modelos emergentes (no presentes de la matemática formal), propios de los educandos, como aquellos inspirados en las estrategias informales que surgen en los estudiantes o se presentan en alguna etapa de la historia de la matemática (de cuyo estudio se encarga la fenomenología didáctica).

En un principio, estos modelos están estrechamente relacionados a los contextos y situaciones de los que emergen, pero poco a poco se van desligando de la situación particular para adquirir un carácter de modelos formales y generales, que se van extendiendo a otras situaciones y contextos, pasando así de un nivel situacional (modelo de una situación particular) a modelos para o herramientas para diversas situaciones tanto al interior como por fuera de la matemática, generando un razonamiento matemático más formal, tal como lo señala Streefland (1985) citado por Panhuizen (2003, p. 5) los modelos pueden desempeñar la función de tender un puente entre el nivel informal y el formal: pasando de un “modelo de” a un “modelo para”.

Este proceso de matematización progresiva basado en el análisis reflexivo del trabajo oral y escrito de los estudiantes (soluciones informales y producciones libres) debe centrar su atención a momentos claves tales como: búsqueda de atajos, cambios de perspectiva o puntos de vista, creación o apropiación de modelos más elaborados, entre otros; ocurridos en los procesos

de esquematización o formalización progresivas y en organizar las discusiones surgidas alrededor de las soluciones propuestas por los estudiantes, de tal manera que se pueda hacer explícito el camino hacia niveles de generalización más formales, eficientes y sofisticados.

2.3.1 Características de los modelos en la EMR

Dentro de la EMR los modelos no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones (operaciones) y se visualizan, comparan, contrastan y comprueban relaciones. Por tanto, satisfacen las siguientes condiciones:

- Están establecidos en contextos realistas, imaginables.
- Flexibles para ser aplicados en un nivel más general. Los modelos cambian con el tiempo, esto significa que el modelo deberá apoyar la matematización vertical, sin obstruir la posibilidad de volver a los recursos o las situaciones desde las cuales una estrategia se originó, de este modo los estudiantes siempre deben poder retornar a niveles más bajos.
- Viables, deben ajustarse a las estrategias informales de los estudiantes, como si los propios estudiantes los pudieran haber re – inventado y ser fácilmente adaptados a otras situaciones.

Desde la perspectiva del docente, como afirma Panhuizen (2005, citada por Bressan y Gallego, 2011, p. 5), el análisis de las diferentes maneras de solución de un problema (soluciones informales y producciones libres de los estudiantes) permite entender los niveles de comprensión, habilidades de cálculo y notaciones que poseen los estudiantes en un momento determinado; elementos que brindan al profesor la posibilidad de tomar decisiones micro – didácticas (aula) y lo guían para decisiones macro – didácticas.

Esta síntesis de aspectos fundamentales de la EMR, consolida este enfoque como marco teórico y metodológico de referencia de este trabajo, en tanto fundamenta el diseño de la propuesta de aula, permite su ejecución y posterior análisis de los resultados. Con referencia al diseño un enfoque de esta naturaleza brinda la posibilidad a los estudiantes de acceder al conocimiento matemático desde situaciones problemáticas enmarcadas en contextos realistas, permitiéndoles el uso y desarrollo de diversas estrategias y herramientas matemáticas para

organizar y solucionar diferentes aspectos de su cotidianidad. Así, los principios que caracterizan la EMR se constituyen en el eje fundamental no solo para la elaboración de la propuesta (principio de actividad, principio de realidad y principio de interconexión) sino también su implementación (principio de interacción y principio de reinención) y análisis, principio de niveles. Siendo este último principio, paso del conocimiento informal al formal y sus procesos de matematización horizontal y matematización vertical, los que orientan a partir de las producciones de los estudiantes el análisis y las conclusiones.

2.4. Referentes curriculares

El marco curricular para este trabajo dentro del contexto de la Educación Básica y Media en Colombia, conlleva a considerar referentes propios del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos y la modelación (como proceso general de la actividad matemática), señalados desde los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias (2006) por el Ministerio de Educación Nacional. El tomar en cuenta el pensamiento variacional y la modelación gira en torno a la problemática central relacionada con las funciones periódicas y de manera particular con las funciones Seno y Coseno, además por su coherencia con la propuesta de la EMR escogida como marco teórico y metodológico.

Es necesario precisar que estos referentes del MEN, aluden al tratamiento general del concepto de función dentro del pensamiento variacional, no obstante se asume que para las funciones de variación periódica el tratamiento es análogo, dado que se constituyen en modelos específicos de dependencia entre variables; es decir pueden ser estudiadas desde sus representaciones gráficas, tabulares y expresiones algebraicas. Se debe tener en cuenta, como se mencionó en el capítulo 1, que estas políticas curriculares colombianas centran el estudio y modelación de fenómenos periódicos a través de las funciones trigonométricas Seno y Coseno.

2.4.1 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Tanto los Lineamientos (1998) como los Estándares (2006) caracterizan el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos como uno de los cinco tipos de pensamiento matemático que integrado con el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el

pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; debe orientar a partir de situaciones problema, que los articule, los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el aula. En otras palabras, el desarrollo del pensamiento variacional no puede desligarse de los otros pensamientos matemáticos.

De manera general, los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) asocian el pensamiento variacional al análisis, organización y modelación matemática de situaciones y problemas de la vida cotidiana del ser humano, al interior de las matemáticas como de otras áreas y disciplinas (ciencias sociales – ciencias naturales) donde subyace la variación. Estos marcos curriculares pretenden el reconocimiento, la identificación y la caracterización de los fenómenos de variación y cambio en diversos contextos, así como su modelación y representación en diferentes sistemas o registros simbólicos (verbales, icónicos, gráficos o algebraicos). Específicamente, los Lineamientos (1998, p. 72) fundamentan diversos ejes conceptuales matemáticos en los cuales se encuentra inmersa la variación y el cambio, siendo los más relevantes para el estudio aquí efectuado: la función como dependencia y modelos de función.

Como lo expresa Santacruz (2005, p. 76) “la función se encuentra asociada al estudio de aspectos que se relacionan con la dependencia entre variables, es decir desde contextos referidos a fenómenos de la cotidianidad, determinados por el cambio o variación de cantidades”. De este modo, el pensamiento variacional, centra el estudio de la función desde sus diversos sistemas de representación, y la relación entre estos, como son: las tablas, los enunciados verbales, los gráficos cartesianos o sagitales, las fórmulas y las expresiones analíticas (algebraicas). Perspectiva reafirmada en los Estándares (2006) donde el desarrollo del pensamiento variacional se logra por medio de la elaboración e interpretación de representaciones matemáticas, como: gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades; las cuales permiten tratar situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas.

Particularmente, la representación tabular de un tipo de variación, se establece como punto de partida para iniciar el estudio de la función, ya que se constituye en un caso concreto de función presentada de forma numérica; proceso que ayuda no sólo a la comprensión del concepto de variable por parte del estudiante, en tanto el uso de filas con variables deja ver la infinidad de valores de reemplazo que una variable puede tener, sino también para el planteamiento y escritura de expresiones algebraicas o fórmulas para describir la variación o cambio. Por su

parte, la elaboración e identificación de la gráfica de una función, permite un estudio dinámico de la variación, en torno a los aspectos de la dependencia entre variables (variable independiente – variable dependiente) propiciando una visión de la función como dependencia.

Por otro lado, consideraciones en torno al estudio de patrones se relacionan con nociones propias del pensamiento variacional, tales como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia entre variables y con los diferentes modelos funcionales que se asocian a ciertas familias de funciones, como las lineales o afines, las exponenciales y polinómicas. De esta forma, el estudio de relaciones funcionales en la vida cotidiana se constituye en una aproximación a la determinación de la función como dependencia entre magnitudes variables; dicho estudio debe centrar la atención en aspectos relevantes de la variación como son: lo que cambia y lo que permanece constante, las variables puestas en juego, el ámbito de variación de cada una de estas variables y las relaciones entre ellas. En este sentido, el tipo de situaciones que fomentan el desarrollo del pensamiento variacional en el aula, debe permitir a los estudiantes poner en práctica habilidades como la conjeturación, la generalización y la argumentación, ya sea para refutar o sustentar una conjetura o una propuesta de generalización; habilidades relacionadas con el pensamiento lógico como científico.

Los Estándares (2006), desde su estructura proponen algunos niveles de avance en el desarrollo de las competencias ligados a los diferentes tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional), así como a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a cada uno de estos pensamientos. Así, cada estándar formulado pone acento en uno o dos de los procesos generales que desde los Lineamientos (1998) son contemplados para la actividad matemática.

Para el caso específico de las funciones periódicas, al centrarse su enseñanza y aprendizaje en las funciones trigonométricas Seno y Coseno en la Educación Media, se establecen los siguientes estándares para el conjunto de grados décimo a undécimo, asociados a los procesos generales de comunicación y modelación respectivamente:

Desde el pensamiento espacial y sistemas geométricos: Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.

Desde el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Como lo sugieren los Lineamientos (1998) y Estándares (2006), el estudio de la variación no puede limitarse a la enseñanza concreta del concepto de función, sino que debe ser iniciado desde los primeros grados de la Educación Básica a través de los patrones y regularidades (numéricos – geométricos), asociado según los Estándares (2006) a la identificación de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para establecer el patrón que se repite periódicamente.

De este modo, un rastreo a los procesos generales de comunicación y modelación desde la Básica Primaria deja ver la relación de los estándares: Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas y Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas, con los demás estándares propuestos para el mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados; a lo que se ha denominado coherencia vertical.

La coherencia vertical (ver tabla 1) de los estándares estará referida únicamente a aquellos que estructuran el proceso general de modelación, en el marco del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Esta decisión obedece a la temática central del trabajo, relacionada con la variación funcional periódica.

Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos: Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Tabla 1. Coherencia vertical de los estándares para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Conjunto de Grados	Estándar
Primero a tercero	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
Cuarto a quinto	Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
Sexto a séptimo	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
Octavo a noveno	Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

A partir de la tabla 1 es posible establecer que el diseño de situaciones de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas, para este caso concreto la variación, se generan a partir de un trabajo sistemático llevado a cabo con los estudiantes desde el primer conjunto de grados, donde la aproximación inicial pone énfasis en el reconocimiento y descripción de situaciones del entorno donde la variación está presente, por medio del lenguaje cotidiano y otras representaciones simbólicas.

En cuanto a la coherencia horizontal de los estándares, entendida como la relación de un estándar con los estándares de los otros pensamientos en el mismo conjunto de grados, es pertinente resaltar la relación del pensamiento variacional con el pensamiento numérico y sistemas numéricos en torno al estudio de las propiedades numéricas y sus operaciones, así como a la noción de número real; elementos que contribuyen al paso de la variación numérica discreta (tablas) a la variación numérica continua. Así, la articulación e interrelación entre los cinco tipos de pensamiento matemático debe organizar y mediar la actividad matemática dentro del aula.

La coherencia horizontal (ver tabla 2) al igual que la vertical estará referida al proceso general de modelación, en el marco del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, por las razones anteriormente expuestas.

Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos: Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Tabla 2. Coherencia horizontal de los estándares para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

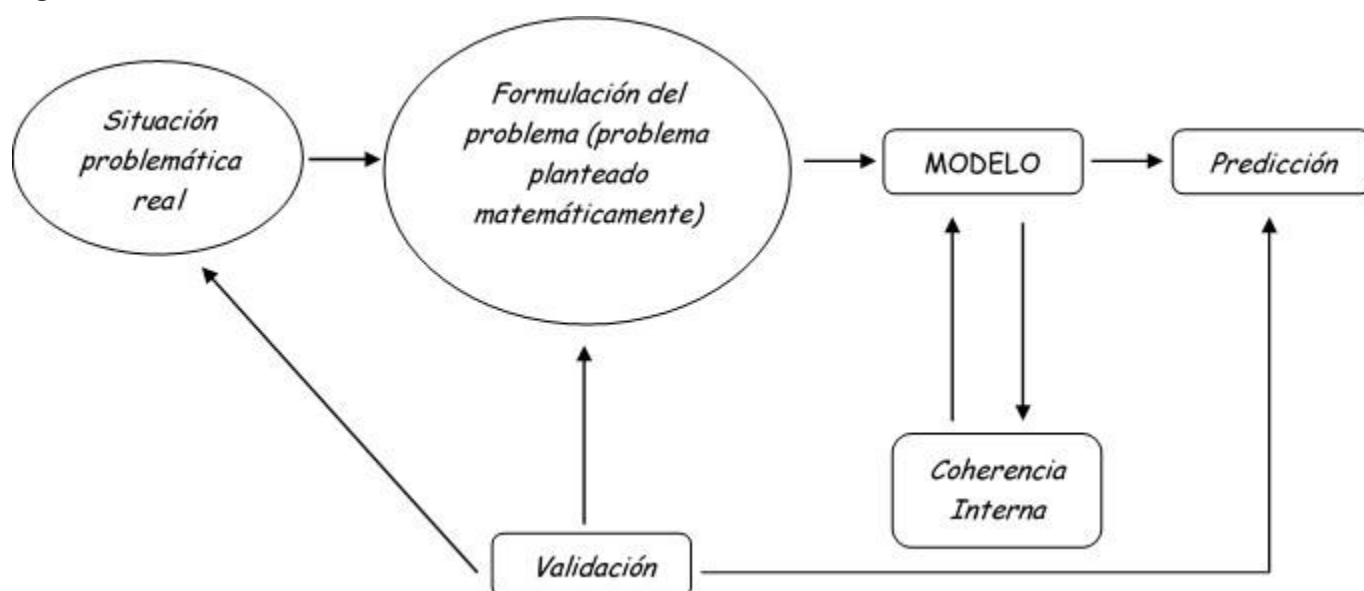
Tipo de Pensamiento Matemático
Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos: Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos: Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos: Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.

Si bien se establecen los estándares definidos para el conjunto de grados décimo y undécimo, y la coherencia vertical y horizontal, es pertinente precisar que el trabajo gira alrededor de la caracterización de las funciones trigonométricas, Seno y Coseno, como los casos particulares de variación periódica que son estudiados en la Educación Media. Por esta razón, se privilegia la modelación como proceso general de la actividad matemática, como ya se mencionó, y por su relación con los principios de la EMR.

2.4.2 La modelación una mirada desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares

Los Lineamientos (1998) describen el proceso general de modelación partiendo de una consideración básica de que los estudiantes aprenden matemáticas “haciendo matemáticas”, postura proveniente de enfoques como la fenomenología didáctica y la EMR, corrientes fundadas por el matemático holandés Hans Freudenthal. Desde esta consideración, es indispensable integrar al currículo de matemáticas una gran variedad de problemas que giren en torno al contexto o cotidianidad de los estudiantes, es decir situaciones próximas a su vida diaria. Así, en su sentido más elemental la modelación permite describir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas. En este ámbito, la figura 2 describe los elementos básicos del proceso de modelación.

Figura 2. Elementos básicos de la construcción de modelos



Fuente: Lineamientos, 1998, p. 97.

El esquema anterior concibe como punto de partida del proceso de modelación una situación problemática real. Dicha situación debe ser idealizada, estructurada y sujeta a condiciones y restricciones, que le permitan un tratamiento en el aula (escolar), lo que conduce a una formulación del problema. Sin embargo, es pertinente señalar que dicha formulación conlleva por un lado características fundamentales de la situación original y por otro una esquematización que permite abordarla con elementos matemáticos.

Una vez enunciado matemáticamente, el problema, debe trasladarse al ámbito matemático, es decir los conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones deben ser matematizados, generando un modelo matemático de la situación real. Este modelo como lo argumentan los Lineamientos (1998, p. 98) consta fundamentalmente de ciertos objetos matemáticos que se identifican con los “elementos básicos” de la situación original o del problema formulado, pero también de ciertas relaciones entre estos objetos, que corresponden a relaciones entre esos “elementos básicos”.

Dado que la modelación asume la resolución de problemas de la vida real como eje primordial de la actividad matemática escolar, este proceso general permite obtener determinados resultados matemáticos, a través de cálculos y revisión de ejemplos concretos, extracción de conclusiones, aplicación de métodos y resultados matemáticos ya conocidos, así como el desarrollo de nuevas deducciones matemáticas. Es así como entra en juego la validación de dichos resultados, es decir su interpretación en el contexto de la situación original. De este modo, quien soluciona el problema valida al mismo tiempo el modelo, si este se ajusta al propósito para el cual fue construido.

Este proceso de validación de un modelo suele tener incompatibilidades que conllevan a la modificación o al reemplazo total del modelo, por ende la resolución de problemas puede ser un proceso que requiera la devolución o retorno varias veces. Al obtenerse un modelo satisfactorio, este puede ser usado como base para efectuar predicciones acerca de la situación original o del objeto modelado, con el fin de tomar decisiones. Lo que es reafirmado en los Estándares (2006) donde se pone de manifiesto que la modelación de una situación problema, hace posible establecer modelos matemáticos de diferentes grados de complejidad⁴, a partir los cuales se pueden hacer predicciones, obtener resultados y comprobar que tan razonables son estos a la luz de las condiciones iniciales de la situación problemática real. Es precisamente la

⁴ Complejidad que depende de las variables y las relaciones que se den entre estas variables.

capacidad de predicción la potencialidad del modelo matemático dentro de la actividad matemática en el aula.

Tanto los Lineamientos como los Estándares generan la discusión sobre el uso de modelación y matematización como sinónimos, particularmente los Lineamientos (1998) realizan una aclaración con respecto al significado conferido a cada uno de estos términos. Se entiende por modelación (o construcción de modelos) “el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático” (Lineamientos, 1998, p. 98) y por matematización “el proceso desde el problema enunciado matemáticamente hasta las matemáticas” (Lineamientos, 1998, p. 98).

Desde esta perspectiva, se considera la descripción de modelación dada por Treffers y Goffree como “una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas” (Lineamientos, 1998, p. 98). Añadiendo que los modelos matemáticos estructuran y crean una parte de realidad (proceso real pre – existente) y que por tanto la modelación no puede ser limitada simplemente a la producción de una imagen simplificada de un proceso real; pero que en últimas todo depende de los intereses, conocimientos e intenciones de quien resuelve la situación problema.

Tomando como base a Treffers y Goffree, los Lineamientos (1998) señalan algunas actividades que pueden ayudar al paso de la situación problemática real a la formulación del problema, proceso que se identifica con lo que Freudenthal ha denominado matematización horizontal. Algunas de estas actividades (Lineamientos, 1998, p. 99) son:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general
- Esquematizar, formular y visualizar un problema en diferentes formas
- Descubrir relaciones y regularidades
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido

Asimismo, una vez el problema haya sido planteado matemáticamente es posible identificar algunas actividades que permiten abordarlo con herramientas matemáticas, es decir matematizar la situación para “construir” el modelo matemático; paso que se identifica con la

matematización vertical establecida por Freudenthal, algunas de estas actividades (Lineamientos, 1998, p. 99) son:

- Representar una relación en una fórmula
- Probar o demostrar regularidades
- Utilizar diferentes modelos
- Combinar e integrar modelos
- Generalizar (Siendo esta última el nivel más alto de modelación).

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, los Lineamientos (1998) dan gran relevancia al proceso de modelación en el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir y comprobar con el fin de construir de modo significativo conceptos matemáticos, es decir que experimenten procesos de matematización que les conlleven al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles. Visión que se corresponde con el principio de actividad en la EMR, al propiciar una matemática para todos.

Con respecto a los Estándares (2006), estos avanzan más en la concepción y definición de modelo, que en el proceso mismo de modelación, como si lo hacen los Lineamientos (1998). Desde los Estándares (2006, p. 52), se entiende por modelo: un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible, es decir un buen modelo debe permitir al estudiante efectuar manipulaciones o transformaciones sobre la situación, explorar diferentes alternativas de solución, así como la conjeturación y verificación de estas soluciones. Este punto de vista se corresponde, con la definición de modelo concebida por Freudenthal dentro del enfoque de la EMR, donde es considerado como un intermediario por medio del cual una realidad es simplificada con el propósito de tornarla asequible a un tratamiento matemático formal.

Los Estándares (2006) al igual que los Lineamientos (1998) retoman elementos de la propuesta de Freudenthal en torno a la matematización. Sin embargo, la postura de los Estándares (2006, p. 53) considera equivalentes los procesos de modelación y matematización, entendiendo estos, desde su forma más sencilla “como simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida”, de tal modo que

pueda detectarse qué esquema se le puede aplicar, cómo es su relación con otras situaciones y qué operaciones matemáticas resultan adecuadas para dar solución a los interrogantes que dicha situación plantea; siendo esta la acepción de matematización y modelación para la Educación Básica y Media.

Así, la modelación puede simplificar una situación de diferentes maneras y representarla ya sea de forma gráfica, mental, gestual o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, de tal forma que los estudiantes formulen y resuelvan situaciones problema relacionados con ella; pero ante todo debe permitirles la detección de esquemas similares en las diversas situaciones cotidianas, de otras disciplinas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente.

Esta reseña acerca del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, así como del proceso de modelación, deja claro que las políticas curriculares Colombianas son congruentes con posturas internacionales, fundamentalmente con el enfoque de la EMR, que establecen la complejidad de este proceso general, en tanto requiere asumir la cotidianidad y la experiencia del estudiante en espacios fuera del aula de clase; ámbitos donde los conceptos y herramientas matemáticas deben adquirir significado en el marco de situaciones problema reales.

2.5 Referentes matemáticos

Este apartado, considera elementos matemáticos asociados a las nociones de función, función periódica y funciones trigonométricas Seno y Coseno. En gran medida, se retoman los aspectos matemáticos desarrollados por Santacruz (2005) en el marco del trabajo de grado: Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros; donde se realizó una presentación de estas nociones tomadas de textos universitarios⁵ que han orientado e influenciado la enseñanza de las matemáticas a nivel superior y la formación de los docentes que actualmente se desempeñan en niveles de Educación Básica y Media. Sin embargo se hacen algunas modificaciones de acuerdo a la temática central de esta investigación: función periódica, considerando el caso de las funciones Seno y Coseno.

La presentación de estos referentes matemáticos, inicia con la noción de función que desarrolla cada texto, luego se caracterizan las nociones de función periódica y de función

⁵ Calculus (Volumen 1) de Tom Apostol – Matemáticas fundamentales y Funciones de una variable real: Teoría Elemental de Guillermo Restrepo.

trigonométrica Seno y Coseno. Esta presentación es una manera particular de organización definida por el autor de este trabajo y no se corresponde necesariamente con el orden temático establecido en los textos de referencia.

2.5.1 Noción de función

El capítulo 3 (Funciones, gráficas y ecuaciones) del texto Matemáticas Fundamentales inicia una introducción al concepto de función mencionando que “expresa la relación entre una variable x (variable independiente) y una variable y (variable dependiente) que indica la forma como y depende de x , lo cual se escribe así: $y = f(x)$ ” (Restrepo, 1995, p. 111).

Definición de función

“Sean X y Y conjuntos. Una función de X en Y es una regla abstracta o explícita que a cada elemento $x \in X$ le asigna uno y sólo un elemento $y \in Y$. Si la función se denota con la letra f , el elemento único y que le corresponde a x se denota por $y = f(x)$. El conjunto X se llama dominio de la función (o conjunto de la variable independiente) y el conjunto Y se llama contradominio (o conjunto de la variable dependiente)” (Restrepo, 1995, p. 111 – 112).⁶

Por su parte Apostol en el capítulo 1 (Los Conceptos del Cálculo Integral) presenta algunas ideas generales del concepto de función, para luego dar una definición rigurosa del mismo, no sin antes aclarar que utilizar el término función para hacer referencia a determinados tipos de fórmulas matemáticas, tal como fue concebido por Leibniz, es limitado y por ende actualmente la definición puede ser entendida como:

“Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y , una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y . El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y , asociados

⁶ Esta es la única definición tomada del texto Matemáticas Fundamentales, puesto que en Funciones de una variable real: Teoría Elemental, libro del mismo autor, no se define este concepto.

con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función. (Éste puede ser todo el conjunto Y , pero no es necesario)” (Apostol, 1988, p. 62).

Luego de discutir algunos aspectos relacionados con la notación de funciones y presentar ejemplos particulares (función identidad, función valor absoluto, función número primo y función factorial) centrados en aquellas cuyo dominio y recorrido son conjuntos de números reales (funciones de variable real o funciones reales) que admiten representación geométrica mediante gráfica en un plano cartesiano, concluye el autor que todas las funciones se caracterizan por los siguientes aspectos:

- Para cada x del dominio X existe una y sólo una imagen y emparejada con aquel valor particular de x .
- Cada función engendra un conjunto de pares (x,y) , siendo x un elemento genérico del dominio X , e y es el elemento único de Y que corresponde a x . (Apostol, 1988, p. 65).

Esta concepción de la función como conjunto de parejas ordenadas, junto con el uso de las palabras «correspondencia» y «asocia a» dadas en la definición anterior las cuales según el autor no tienen el mismo significado para todo el mundo, lo conllevan a dar una definición formal fundamentada en la noción de conjunto. De este modo, inicia por definir par ordenado desde su diferencia con la igualdad de conjuntos, en la cual el orden de los elementos no interesa, dado que $\{3,5\} = \{5,3\}$, en tanto que en el plano cartesiano las coordenadas de un punto (x,y) , el orden es necesario ya que: $(3,5) \neq (5,3)$.

Definición de función

“Una función f es un conjunto de pares ordenados (x,y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento. Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x,y) de f se llama el dominio de f . El conjunto de los segundos elementos y se denomina recorrido de f , o conjunto de valores de f ” (Apostol, 1988, p. 65).

“A diferencia de la definición anterior se tiene que esta segunda se encuentra inmersa dentro de la Teoría de Conjuntos, donde se involucran nociones como relación binaria y producto cartesiano, es decir se entiende la función como una tríada (X, Y, f) donde X y Y son conjuntos y f es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ tal que si la pareja ordenada (x, y) pertenece a f y la pareja (x, z) pertenece a f entonces $y = z$ ” (Santacruz, 2005, p. 62).

2.5.2 Noción de función periódica y función trigonométrica

Tanto el texto Funciones de una Variable Real como Calculus (Volumen 1) asumen la definición de función periódica al abordar el estudio de las funciones trascendentes (primer texto) y las funciones trigonométricas (segundo texto).

El capítulo 4 del texto Funciones de una Variable Real, se centra en las funciones trascendentes, dando relevancia al estudio de su dominio y rango, sus derivadas, gráficas y propiedades elementales. Para ello, el autor, inicia con una presentación formal de algunos conceptos básicos como el número π , longitud de arco, medida de ángulos y función circular, que le permitirán caracterizar finalmente las funciones Seno y Coseno. Dada la temática del trabajo aquí presentado, la descripción de los aspectos matemáticos hará énfasis en la función circular y las funciones Seno y Coseno.

En este sentido, la función circular se define a partir de una circunferencia de centro 0 y radio 1, donde la semicircunferencia superior corresponde a la gráfica de la función: $x \rightarrow A(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$, $-1 \leq x \leq 1$, la cual es biyectiva y continua del intervalo $[-1, 1]$ sobre dicha semicircunferencia, donde $A(1) = (1, 0) = I$, $A(0) = (0, 1) = E$, $A(-1) = (-1, 0) = F$. Además, cuando x se mueve en el intervalo $[-1, 1]$, $A(x)$ recorre la semicircunferencia desde I hasta F como se muestra en la siguiente figura:

Características de la función $U(t)$:

- $U(0) = U(2\pi) = I = (1,0), U(\pi) = F = (-1,0).$
- $U\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) = E, U\left(\frac{3\pi}{2}\right) = G = (0,-1).$
- La función $t \rightarrow U(t)$ de $[0,2\pi[$ en la circunferencia unitaria C es biyectiva.
- Si $U(s) = (u, v) \rightarrow U(2\pi - s) = (u, -v).$

Con base en estas características, se establece la función $t \rightarrow X(t), \forall t \in R$, de R en la circunferencia unitaria C . Así, si $t \in R$ existen uno y sólo un $n \in Z$ y uno y sólo un $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ tal que: $t = n \cdot 2\pi + \alpha$. De esta forma, $\frac{t}{2\pi}$ se puede ubicar entre dos enteros consecutivos:

$$n \cdot 2\pi \leq t \leq (n+1) \cdot 2\pi \text{ de donde } n \leq \frac{t}{2\pi} \leq (n+1).$$

Si $\alpha = t - n \cdot 2\pi, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$ y $t = n \cdot 2\pi + \alpha$ se define:

$$X(t) = X(n \cdot 2\pi + \alpha) = U(\alpha) = U(t - n \cdot 2\pi) \text{ es decir } X(t) = U(\alpha).$$

De tal manera que si $0 \leq \alpha \leq 2\pi \Rightarrow X(t) = U(t).$

Propiedades de la función $X(t)$:

- La función $t \rightarrow X(t)$ es continua.
- $X(t) = I = (1,0)$ si y sólo si $t = n \cdot 2\pi, n \in Z.$
- $X(t+u) = X(t)$ para todo $t \in R$ si y sólo si u es de la forma $u = n \cdot 2\pi, n \in Z.$
- Si $X(t) = (u, v)$ entonces $X(-t) = (u, -v).$

La función $t \rightarrow X(t) = (u, v)$ cuyo dominio es el conjunto de los números reales y codominio es la circunferencia unitaria se llama función circular. Esta función es continua y si $0 \leq t \leq 2\pi$ entonces la longitud del arco $\widehat{IX(t)}$ es t .

En otras palabras, la función circular le hace corresponder a cada número real t un punto (u, v) sobre la circunferencia unitaria, además $X(t+2\pi) = X(t)$ para todo $t \in R$ lo que

garantiza que es periódica de periodo 2π . Esta última afirmación la realiza el autor de este trabajo, ya que el texto define con posterioridad la función periódica.

Definición de las funciones Seno y Coseno

Las funciones trigonométricas Seno y Coseno se definen a partir de la función circular. Si $t \rightarrow X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es la función circular y $X(t) = (u, v)$ en la circunferencia unitaria, entonces $t \rightarrow \text{sen } t$ y $t \rightarrow \text{cos } t$ serán las proyecciones:

$$\text{sen}(t) = v = p_2 \circ X(t), \text{cos}(t) = u = p_1 \circ X(t).$$

De donde se deduce que $X(t) = (\text{cos } t, \text{sen } t)$ y $\text{cos}^2 t + \text{sen}^2 t = 1$. Es decir, que las funciones Seno y Coseno se definen respectivamente como la coordenada y y la coordenada x del punto correspondiente en la circunferencia unitaria.

Como las proyecciones son funciones continuas y $t \rightarrow X(t)$ es continua se tiene que:

- $t \rightarrow \text{sen } t$ y $t \rightarrow \text{cos } t$ son funciones continuas.
- $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$ y $-1 \leq \text{cos } t \leq 1$.
- $\text{sen}(\pi) = 0$ y $\text{cos}(\pi) = -1$.
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ y $\text{cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Definición de función periódica

Sea Ω un conjunto, en general se dice que una función no constante f de $\mathbb{R}$ en Ω es *periódica* de período $p > 0$ si $f(x + p) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ y p es el menor número positivo con esta propiedad. De esta manera, la definición explícita de función periódica⁷ se constituye en la

⁷ Se habla de definición explícita ya que con anterioridad el autor del texto ha establecido que la función circular $X(t)$ es periódica.

base para formalizar las propiedades y fórmulas fundamentales para las funciones Seno y Coseno:

- $t \rightarrow \operatorname{sen} t$ y $t \rightarrow \operatorname{cos} t$ son funciones periódicas de periodo 2π .
- $\operatorname{cos}(t) = \operatorname{cos}(-t)$ y $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- El rango de las funciones $t \rightarrow \operatorname{sen} t$ y $t \rightarrow \operatorname{cos} t$ es $[-1,1]$.
- $\operatorname{cos}(t + s) = \operatorname{cos} t \cdot \operatorname{cos} s - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} s$.
- $\operatorname{sen}(t + s) = \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{cos} s + \operatorname{cos} t \cdot \operatorname{sen} s$.

En cuanto a las gráficas de las funciones Seno y Coseno en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, estas se justifican por medio de enunciados que hacen referencia al análisis de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como a los signos de la primera derivada para cada función. Inicialmente el texto presenta las gráficas limitadas al intervalo $[0, 2\pi]$, luego realiza la “extensión” a toda la recta por medio de la periodicidad (periodo 2π) de estas dos funciones, lo que garantiza que la parte de las gráficas en el intervalo $[0, 2\pi]$, se repite en intervalos de la forma $[k \cdot 2\pi, (k + 1) \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$.

El capítulo 2: Algunas Aplicaciones de la Integración, del Calculus de Apostol, presenta las funciones trigonométricas asumiendo el conocimiento – por parte del lector – de algunas de las propiedades de estas funciones y sus inversas en tanto su estudio se ha abordado en cursos anteriores de trigonometría centrado en la solución de problemas con triángulos rectángulos.

A diferencia del texto Funciones de una Variable Real, Apostol asume la relevancia de las funciones trigonométricas en el cálculo no solo por las relaciones ángulos – lados en el triángulo rectángulo, sino por las múltiples propiedades que presentan estas funciones, específicamente su periodicidad. De esta forma, inicia la presentación de las funciones trigonométricas considerando en primer lugar la función periódica.

Definición de función periódica

“Una función f es periódica con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga a x y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x del dominio de f ”
(Apostol, 1988, p. 117).

En este mismo apartado, el autor señala que las funciones Seno y Coseno son periódicas de periodo 2π , donde π es el área de un disco circular unidad. Además que tales funciones son fundamentales para el análisis – desde una perspectiva matemática – de diversos problemas de campos como la física o la ingeniería, relacionados con fenómenos periódicos como vibraciones, movimiento de planetas, ondas, etc.⁸

El texto introduce las funciones Seno y Coseno de dos maneras diferentes, una de ellas asociada a las definiciones geométricas (Seno y Coseno relacionados con ángulos) y la otra a las definiciones analíticas (sin referencia a la geometría)⁹.

- Introducción analítica de las funciones Seno y Coseno

Esta presentación inicia con cuatro propiedades fundamentales que son tomadas como axiomas para el Seno y Coseno, a partir de las cuales se pueden deducir todas las demás por medio de teoremas.

- Propiedades fundamentales del Seno y del Coseno

1. Dominio de definición. Las funciones Seno y Coseno están definidas en toda la recta real.
2. Valores especiales. Tenemos $\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos \pi = -1$.
3. Coseno de una diferencia. Para x e y cualesquiera, tenemos

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x.$$

4. Desigualdades fundamentales. Para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, tenemos

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}. \text{ (Apostol, 1988, p. 118).}$$

⁸ Si bien el texto hace referencia al estudio de fenómenos periódicos cotidianos por medio de las funciones trigonométricas, una revisión de los ejemplos y de los ejercicios propuestos del capítulo muestra una ausencia de este tipo de problemas.

⁹ El autor afirma que ambas perspectivas son equivalentes en tanto conducen a las mismas funciones y que su interés no es centrarse en la definición (de estas funciones), sino en las propiedades que se pueden derivar de estas definiciones.

Teorema. Si dos funciones Seno y Coseno satisfacen las propiedades 1 a 4, satisfacen también las siguientes:

(a) La identidad pitagórica, $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$, para todo x .

(b) Valores especiales, $\text{sen } 0 = \text{cos } \frac{1}{2}\pi = \text{sen } \pi = 0$.

(c) El coseno es función par y el seno es función impar. Esto es, para todo x tenemos:

$$\text{cos}(-x) = \text{cos } x, \text{ sen } (-x) = -\text{sen } x.$$

(d) Co – relaciones. Para todo x , se tiene:

$$\text{sen} \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) = \text{cos } x, \text{ cos} \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) = -\text{sen } x.$$

(e) Periodicidad. Para todo x , se tiene $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x$.

(f) Fórmulas de adición. Para x e y cualesquiera, se tiene:

$$\text{cos}(x + y) = \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y,$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \text{cos } y + \text{cos } x \text{sen } y.$$

(g) Fórmulas de diferencias. Par todos los valores a y b , se tiene

$$\text{sen } a - \text{sen } b = 2\text{sen} \frac{a - b}{2} \text{cos} \frac{a + b}{2}.$$

$$\text{cos } a - \text{cos } b = -2\text{sen} \frac{a - b}{2} \text{sen} \frac{a + b}{2}.$$

(h) Monotonía. En el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, el seno es estrictamente creciente y el coseno estrictamente decreciente. (Apostol, 1988, p. 118 – 119).

Esta introducción analítica asume la existencia de tales funciones, denominadas Seno y Coseno, en tanto el objetivo es deducir las propiedades¹⁰. Además la presentación de las propiedades a través de teoremas, se justifica con el único fin de establecer las fórmulas de integración para el seno y el coseno. En este ámbito, las propiedades (d), (e) y (h) demuestran que las funciones Seno y Coseno son monótonas a trozos en cualquier intervalo, por tanto por aplicación sucesiva del teorema: “Si f es monótona en un intervalo cerrado $[a, b]$, f es integrable en $[a, b]$ ” (Apostol, 1988, p. 95), el Seno y el Coseno son integrables en cualquier intervalo finito.

¹⁰ En la presentación geométrica se define el Seno y el Coseno como funciones que verifican las propiedades anteriormente enunciadas.

La introducción analítica finaliza en el capítulo 11: Sucesiones y series de funciones con la consideración de las funciones Seno y Coseno y sus derivadas acotadas por el número 1 en todo el eje real. Por tanto la desigualdad establecida en el siguiente teorema es válida con $A = 1$ si $f(x) = \text{sen } x$ o $f(x) = \cos x$.

“Si f es infinitamente derivable en un intervalo abierto $I = (a - r, a + r)$, y si existe una constante positiva A tal que $|f^n(x)| \leq A^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y todo x de I , entonces la serie de Taylor generada por f en a converge hacia $f(x)$ para cada x de I ” (Apostol, 1988, p. 533).

Lo anterior permite el desarrollo en series de potencias del Seno y del Coseno:

$$\begin{aligned}\text{sen } x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \forall x \in R. \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \forall x \in R.\end{aligned}$$

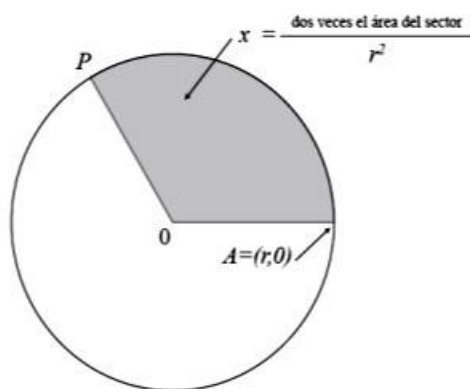
Este desarrollo constituye el punto de inicio del estudio analítico de las funciones trigonométricas. Partiendo de las definiciones de Seno y Coseno, se pueden deducir todas las propiedades algebraicas y analíticas de las funciones trigonométricas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{sen } 0 &= 0, \cos 0 = 1, \text{sen } (-x) = -\text{sen } x, \cos(-x) = \cos x \\ D\text{sen } x &= \cos x, D\cos x = -\text{sen } x\end{aligned}$$

Descripción geométrica de las funciones Seno y Coseno

La descripción geométrica, parte de una circunferencia de radio r y centro en el origen, en la cual se asigna el punto $A = (r, 0)$ y P a cualquier otro punto de esta. Los segmentos rectilíneos OA y OP determinan el ángulo AOP , representado por el símbolo $\angle AOP$ (ver figura 5).

Figura 5. Ángulo $\angle AOP$ de x radianes



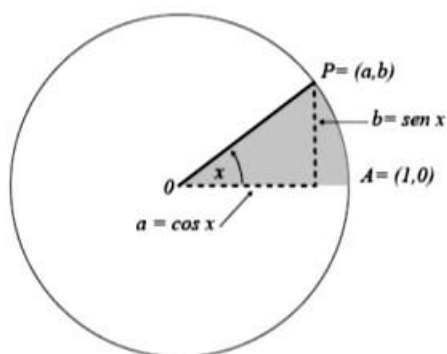
Se quiere asignar a este ángulo un número real no negativo x que pueda verse como medida de su magnitud. El proceso consiste en considerar la circunferencia unitaria y llamar x a la longitud del arco AP , descrito en el sentido contrario a las manecillas del reloj y decir que la medida de $\angle AOP$ es x radianes.

Para obtener una medida independiente de la unidad de distancia el autor define la medida del $\angle AOP$ como el doble del área del sector AOP dividida por el cuadrado del radio. Esta unidad de medida obtenida recibe el nombre de radian, así se tiene que la medida de un $\angle AOP$ es x radianes si $\frac{x}{2}$ es el área del sector AOP determinado en el disco circular unidad.

Dado que π designa el área de un disco circular unidad, “cuando $P = (-1,0)$, el sector AOP es un semicírculo de área $\frac{\pi}{2}$, de modo que subtiende un ángulo de π radianes. El disco completo es un sector de 2π radianes. Si inicialmente P está en $(1,0)$ y se desplaza una vez alrededor de la circunferencia en sentido contrario al de las agujas del reloj el área del sector AOP crece de 0 a π , tomando todos los valores del intervalo $[0,\pi]$ exactamente una vez” (Apostol, 1988, p. 127).

El seno y el coseno quedan definidos en términos de un número más que de un ángulo, de tal manera que estas funciones estén determinadas sobre la recta real. Para esto, se considera un número $x(0 < x < 2\pi)$ y un punto P de la circunferencia unitaria tal que el área del sector AOP sea igual a $\frac{x}{2}$, donde (a,b) son las coordenadas de P (figura 6).

Figura 6. Descripción geométrica de $\text{sen } x$ y $\cos x$



Los números a y b están completamente definidos por x . En consecuencia, se tiene que: $\cos x = a$, $\text{sen } x = b$ es decir $\cos x$ es la abscisa de P y $\text{sen } x$ es su ordenada.

La determinación del seno y del coseno como funciones definidas en el intervalo $(0, 2\pi)$ se realiza mediante la asignación de valores a x :

- Cuando $x = \pi$, $P = (-1, 0)$ de tal manera que $\cos \pi = -1$ y $\text{sen } \pi = 0$.
- Cuando $x = \frac{\pi}{2}$, $P = (0, 1)$ de tal manera $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$.

La extensión de las funciones Seno y Coseno a todo el eje real se hace por medio de igualdades y expresiones que involucran la propiedad de periodicidad de estas dos funciones.

$$\text{sen } 0 = 0, \cos 0 = 1, \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x, \cos (x + 2\pi) = \cos x.$$

Finalmente, los ejercicios planteados para esta sección del texto establecen las gráficas de las seis razones trigonométricas (razón en contradicción con la definición – función – dada anteriormente por el autor) en un intervalo de un periodo de amplitud, subrayando que la periodicidad garantiza para cada caso el resto de la gráfica. Por ende, lo periódico justifica no sólo la “extensión” de las funciones Seno y Coseno a toda la recta real, sino también la “prolongación” de la gráfica de todas las funciones trigonométricas en términos de la “repetición” de la forma.

El marco teórico de referencia definido en este capítulo, establece las consideraciones que estructuran las etapas de diseño e implementación de la propuesta de aula, el análisis de las

producciones de los estudiantes y el planteamiento de las conclusiones derivadas de estos resultados. En este sentido, las tres situaciones que componen la propuesta de aula articulan el enfoque de la EMR, desde sus principios y la noción de contexto realista, los Lineamientos y Estándares, desde la caracterización del pensamiento variacional, los diferentes sistemas de representación (retórico, tabular, gráfico y algebraico) y el proceso general de modelación. El ámbito disciplinar enmarca las definiciones, conceptos, representaciones sagitales, algebraicas y cartesianas, que constituyen las diversas tareas que componen las situaciones.

Capítulo 3.
La Función Periódica en el aula: El caso de las
Funciones Seno y Coseno

Capítulo 3. La Función Periódica en el aula: El caso de las Funciones Seno y Coseno

En este capítulo, se presentan los aspectos relacionados con el diseño de las tres situaciones que conforman la propuesta de aula, el cual se fundamentó básicamente en los principios de la EMR, sin dejar de lado consideraciones que con respecto al pensamiento variacional y la modelación provienen de los Lineamientos (1998) y Estándares (2006); así como los referentes matemáticos. De igual manera, se hace referencia al proceso de implementación de la propuesta, donde se exponen los aspectos relacionados con la población de estudio y la metodología empleada durante la aplicación en el aula.

Finalmente, se muestra por medio de tablas de frecuencia la sistematización de resultados y tipificación de las respuestas a las diferentes preguntas que componían cada situación, acompañada de su respectivo análisis y algunas conclusiones obtenidas a partir de los marcos teóricos de referencia establecidos.

3.1 Diseño de la propuesta de aula

El planteamiento de las tres situaciones a desarrollar en el aula, toma como eje fundamental los principios establecidos por la EMR. En este sentido, la situación 1 Reconozcamos fenómenos naturales periódicos, la situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas; parten de problemas de la cotidianidad o cercanos a la realidad del estudiante, como lo señalan los principios de actividad y de realidad, al concebir la matemática como una actividad humana, accesible para todos, que permite organizar la realidad; es decir matematizar situaciones del entorno social y natural. La situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno si bien no toma como punto de referencia un fenómeno natural, se ubica dentro de un contexto propio de las matemáticas, como lo establecen Dekker y otros (2001, citados por Bressan y Gallego, 2011, p. 3).

De esta forma, la enseñanza de la matemática debe ser abordada dentro del sistema educativo esencialmente desde situaciones problemáticas presentadas en contextos y situaciones realistas, que brinden al estudiante la posibilidad de discutir sus diferentes estrategias y soluciones, pero sobre todo la interpretación misma de la situación. Es oportuno recordar que

para el enfoque de la EMR una situación realista no está limitada a un fenómeno tangible o perceptible, es realista en tanto se presente al estudiante como realizable o susceptible de ser imaginada.

Bajo este último señalamiento, es preciso mencionar, que el calendario lunar del año 2014 (situación 1) fue modificado de acuerdo al propósito de las tareas, las cuales se centran en los fenómenos periódicos. Las variaciones efectuadas al calendario¹¹, buscaron que el tiempo transcurrido de una fase de la luna a otra similar se aproximara a la duración del mes sinódico y que por tanto la diferencia con las fechas del calendario real fuese mínima, cumpliéndose para cada mes el número de fases establecidas (por ejemplo dos fases de luna llena en los meses de enero y marzo). Estas modificaciones afectan la duración de cada fase de la luna (tiempo transcurrido para que cambie de una fase a otra), en consecuencia no siempre se aproxima a 7 días, como se establecería desde la duración del mes sinódico. Sin embargo, este mismo comportamiento se presenta en el calendario lunar real del año 2014¹².

El principio de interacción, planteado desde la EMR, enfatiza el aprendizaje de la matemática como una actividad social mediada por las interacciones docente – estudiante (social vertical) y estudiante – estudiante (social horizontal); de este modo la propuesta articula el trabajo en equipo (parejas), el dialogo con los integrantes de cada equipo y la socialización en plenaria como mecanismos que generan la discusión alrededor de los diversos procedimientos, justificaciones y soluciones dadas por los estudiantes frente a la situación problemática.

El principio de interconexión, en concordancia con los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) integra dentro de la propuesta de aula la caracterización de los fenómenos de variación periódica a partir de diferentes sistemas de representación: tabulares, enunciados verbales, gráficos cartesianos o sagitales, expresiones algebraicas y las relaciones entre estos; de tal forma que entra en juego la interrelación de sistemas conceptuales y simbólicos de los distintos tipos de pensamiento matemático. En este ámbito, los estudiantes reinventan modelos, estrategias y operaciones, herramientas matemáticas, a partir de las situaciones problemáticas planteadas, aspectos en los cuales se centra el principio de reinención dentro de la EMR.

¹¹ Estas variaciones se deben a que los fenómenos naturales, para este caso las fases lunares, no son exactamente periódicos.

¹² Disponible en: www.pac.com.ve/contenido/calendario-lunar-2014-imprimir/10989

En este sentido, las situaciones planteadas involucran los diferentes sistemas de representación, así la situación 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos se enfatiza en el uso e interpretación de representaciones tabulares y textos (enunciados verbales) por medio de tareas que implican al estudiante no solo la lectura, sino el manejo y comprensión de este tipo de representaciones, con el fin de caracterizar fenómenos de variación periódica y la noción de periodo en contextos cercanos a su cotidianidad (contextos realistas).

La situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas gira en torno fundamentalmente al manejo de relaciones entre diversos sistemas de representación: tabular, cartesiano, sagital y algebraico para la función periódica, a través de actividades que conllevan al estudiante a la elaboración e interpretación de gráficas en el plano cartesiano, la comprensión y validación de relaciones periódicas expresadas de forma sagital y analítica como lo establecen los Lineamientos (1998) al caracterizar la elaboración e identificación de la gráfica de una función esencial en el estudio y concepción de la función como una relación de dependencia, para este caso dependencia periódica entre variables.

De manera particular, la tarea 1 de la situación 2, al considerar la representación tabular (discreta) de un fenómeno de variación periódica, se constituye en un punto de partida que ayuda al estudiante a la comprensión de la noción de variable, al tiempo que le permite la representación cartesiana (tarea 2) y la validación de las expresiones analíticas¹³ en la tarea 4.

La situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno toma en consideración un contexto de medida (longitudes de arco) dentro de la misma matemática, involucrando el uso de representaciones: retóricas, cartesianas, tabulares y algebraicas, donde la interpretación de representaciones retóricas y cartesianas debe permitir a los estudiantes no solo la caracterización de la función circular y por ende de las funciones de variación periódica seno y coseno como coordenadas asociadas al punto $p(t) = (x, y)$ ¹⁴ donde $t = \text{longitud del arco}$; sino también la aproximación gráfica y la determinación de algunas de sus propiedades como: valor máximo, valor mínimo y periodicidad, esta última a través de su expresión algebraica.

¹³ Si bien la tarea 4 de la situación 2 involucra expresiones algebraicas, esta constituye un contexto realista en tanto toma en consideración la experiencia previa de los estudiantes, como se establece en el principio de realidad del enfoque de la EMR.

¹⁴ Este punto generalmente recibe el nombre de punto trigonométrico.

Bajo estos señalamientos, el planteamiento de las tareas en cada una de las situaciones, busca el tránsito de los estudiantes entre los diferentes niveles de matematización: situacional, referencial, general y formal, es decir dentro del principio de niveles, el paso de un conocimiento informal al formal.

Por otro lado, desde la coherencia vertical señalada en la tabla 1 la propuesta de aula diseñada retoma la descripción, el análisis y representación de situaciones de variación de diversas disciplinas, relacionando diagramas, expresiones verbales, gráficas, tablas, etc., aspectos que deben ser el centro de atención para el estudio de la variación en el aula desde los primeros grados de la Educación Básica, según los Estándares (2006). Desde la coherencia horizontal (tabla 2), es pertinente señalar que las situaciones llevan consigo el uso de propiedades, relaciones y operaciones en el sistema de los números reales, dado que están dirigidas a estudiantes de grado 10 de la Educación Media.

Desde la modelación, Lineamientos (1998) y Estándares (2006), las tareas de las tres situaciones se centran desde la matematización horizontal en actividades como: la identificación de las matemáticas específicas en un contexto general, la transferencia de un problema de la vida real a un problema matemático y la caracterización de relaciones y regularidades. Desde la matematización vertical, algunas de las actividades que se establecen en las diferentes tareas se asocian con: la utilización de diferentes modelos, la validación de regularidades y la generalización.

3.1.1 Propósito, contenidos y desempeños esperados en cada situación

En las tablas presentadas a continuación, se establecen los propósitos de cada una de las situaciones, donde se indica además los contenidos y los desempeños esperados en los estudiantes al desarrollar las tareas. Asimismo, se ubica cada situación dentro de los niveles del proceso de matematización progresiva: matematización horizontal (nivel situacional) y matematización vertical (niveles referencial, general y formal). Al finalizar las tablas, se muestran cada una de las situaciones diseñadas para su puesta en juego con los estudiantes en el aula.

Tabla 3. Contenidos y desempeños esperados situación 1.

Propósito: Favorecer el acercamiento de los estudiantes a fenómenos periódicos a través de la experiencia con situaciones problemáticas naturales de su entorno.

Situación	Nivel de matematización	Tarea	Contenidos	Desempeños esperados
Situación 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos	Matematización horizontal de la situación (Nivel situacional): los estudiantes hacen uso de herramientas empíricas (conocimientos informales, su experiencia y sentido común) para llevar una situación problema en contexto a un problema matemático.	Tarea 1: Comprendiendo la situación	- Representación tabular de fenómenos cotidianos. - Variación periódica, patrones y regularidades.	Reconoce la noción de periodicidad en situaciones cotidianas.
		Tarea 2: Estableciendo regularidades periódicas	- Representación tabular de fenómenos periódicos. - Variación periódica, patrones y regularidades.	Identifica patrones y regularidades en contextos realistas.
		Tarea 3: Validando fenómenos periódicos	- Variación periódica, patrones y regularidades. - Periodo.	

Tabla 4. Contenidos y desempeños esperados situación 2.

Propósito: Reconocer una función periódica a través de sus diferentes representaciones: tabular, gráfica y analítica.

Situación	Nivel de matematización	Tarea	Contenidos	Desempeños esperados
Situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas	Matematización vertical (Nivel referencial): los estudiantes emplean diferentes representaciones, modelos, conceptos y procedimientos individuales para sintetizar el problema, relacionadas a la situación de la cual se originaron.	Tarea 1: Comprendiendo la situación	- Representación tabular de una función. - Variación y dependencia periódica. - Variación y dependencia entre magnitudes (altura – tiempo). - Par ordenado.	Interpreta una variación funcional periódica expresada de forma tabular.
		Tarea 2: Representando y describiendo funciones periódicas	- Representación gráfica de una función (plano cartesiano - sagital). - Función periódica (periodo de una función). - Dominio y rango de una función.	Representa gráficamente una función periódica.
	Matematización vertical (Nivel general): a través de la reflexión sobre las estrategias, conceptos y modelos surgidos en el nivel referencial, surgen aspectos generalizables (estrategias que superan el contexto) a partir de los cuales los estudiantes pueden concluir que se pueden utilizar en otras situaciones problemáticas.	Tarea 3: Reconociendo gráficas de funciones periódicas	- Representación gráfica de una función (plano cartesiano). - Función periódica (periodo de una función).	Determina el periodo de una función a partir de su representación gráfica.
		Tarea 4: Aproximándonos a la expresión algebraica	- Expresión algebraica de una función - Traslación de gráficas. - Pendiente de una recta. - Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. - Funciones definidas a trozos. - Operaciones con reales. - Desigualdades. - Valor numérico de una función.	Verifica la expresión analítica de una función periódica.

Tabla 5. Contenidos y desempeños esperados situación 3.

Propósito: Reconocer las funciones seno y coseno como casos particulares de variación periódica.

Situación	Nivel de matematización	Tarea	Contenidos	Desempeños esperados
Situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno	Matematización vertical (Nivel general): a través de la reflexión sobre las estrategias, conceptos y modelos surgidos en el nivel referencial, surgen aspectos generalizables (estrategias que superan el contexto) a partir de los cuales los estudiantes pueden concluir que se pueden utilizar en otras situaciones problemáticas.	Tarea 1: Caracterizando las funciones circulares seno y coseno como funciones periódicas	• Circunferencia unitaria. • Longitud de arco. • Plano cartesiano. • Pareja ordenada. • Teorema de Pitágoras. • Números reales. • Función circular. • Representación tabular de una función. • Función periódica.	Identifica en representaciones retóricas y gráficas la correspondencia entre longitudes de arcos en una circunferencia unitaria y parejas ordenadas de números reales asociadas al extremo del arco (función circular).
	Matematización vertical (Nivel formal): se comprende y se actúa con los procedimientos, conceptos y notaciones propias de la rama de las matemáticas donde se ubica la situación problema.	Tarea 2: Aproximación gráfica de las funciones circulares seno y coseno	• Representación gráfica de una función (plano cartesiano). • Valor máximo y mínimo de una función. • Función periódica (periodo de una función). • Operaciones con números reales. • Funciones circulares seno y coseno.	Reconoce las funciones seno y coseno como coordenadas del punto $p(t) = (x, y)$ asociado al extremo de un arco en una circunferencia unitaria. Interpreta las funciones seno y coseno y sus propiedades desde sus representaciones gráficas (circunferencia unitaria), tabular y cartesiana como funciones de variable real.

3.2 Sobre la propuesta de aula

En este apartado se presenta el diseño final de la propuesta de aula que se implementó con los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón entre los meses de junio y diciembre del año 2015.

3.2.1 Situación 1

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

Situación 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos

Fases de la luna y calendario lunar

La luna es el único satélite natural de la Tierra. Su diámetro es de unos 3.476 km, aproximadamente una cuarta parte del de la Tierra. La luna gira alrededor de su eje (*rotación*) en aproximadamente 27 días, 7 horas, 43 minutos y 11,5 segundos – **27.32 días** – (mes sidéreo) y se traslada alrededor de la Tierra (*traslación*) en el mismo intervalo de tiempo, de ahí que siempre nos muestra la misma cara. Además, nuestro satélite completa una revolución relativa al sol en aproximadamente 29 días, 12 horas, 44 minutos y 2,8 segundos (mes sinódico), es decir para cambiar de una fase a otra similar, o mes lunar, la luna necesita **29.53 días**. (www.astromia.com/tierraluna/movluna.htm)

A medida que la luna gira alrededor de la Tierra, y la Tierra gira alrededor del sol, la zona de la luna iluminada va cambiando de posición de manera que unas veces vemos toda la cara visible de la luna iluminada por el sol, cuando la Tierra está en alguna posición entre el sol y la luna, y otras veces vemos la cara visible oscura, ya que el sol se encuentra al otro lado de la luna e ilumina la cara oculta. Esta variación en la cantidad de superficie lunar que vemos iluminada recibe el nombre de FASES DE LA LUNA, y son cuatro (*luna nueva, cuarto creciente, luna llena y cuarto menguante*) que se van alternando a lo largo del mes lunar (recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido11.htm).

A continuación se presenta el calendario lunar para los meses de enero, febrero y marzo de 2014, y las fechas correspondientes a las diferentes fases de la luna.¹⁵

Figura 7. Calendario lunar 2014



Mes	Enero					Febrero			Marzo				
Fecha	1	8	16	24	31	7	15	23	2	9	17	25	31
Fase Lunar													

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto anterior, responda las siguientes preguntas:

1. Indique en qué consiste el mes sidéreo y cuál es su valor aproximado.
2. Explique en qué consiste el mes sinódico y cuál es su valor, según la lectura.
3. Explique que es el calendario lunar y cómo se divide el mes sinódico para determinar cada fase de la luna.
4. Para dos rotaciones de la luna, enuncie el tiempo en días transcurridos.
5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3		6	$7\frac{1}{2}$			10
Días transcurridos				109.28			259.54	327.84	

¹⁵ Este calendario se ha modificado de acuerdo al propósito de las tareas, relacionadas con los fenómenos periódicos. Ver un ejemplo de calendario real en www.pac.com.ve/contenido/calendario-lunar-2014-imprimir/10989

- b. Escriba la manera cómo determinó la relación entre el número de rotaciones de la luna y los días transcurridos.

Tarea 2: Estableciendo regularidades periódicas

Observe el calendario lunar para los meses de enero a marzo de 2014 y conteste:

1. Determine el tiempo ha transcurrido entre cada fase de luna nueva en el mes de enero. Compárelo con el mes sinódico y saque una conclusión.
2. ¿Transcurre para el cuarto menguante entre los meses de febrero y marzo la misma cantidad de días que para la luna nueva en el mes de enero? Explique su respuesta.
3. Podrías dar la razón por la cual durante el mes de febrero de 2014, no se presenta luna nueva y durante los meses de enero y marzo hay dos días de esta fase. Justifique su respuesta.
4. Realice el calendario lunar para el siguiente trimestre del año 2014 (Abril, Mayo y Junio).
5. a. Complete la siguiente tabla.

<i>Fecha</i>	Abril 8	Junio 15	Mayo	Junio 23	Abril	Mayo 8	Abril 24	Mayo	Junio
<i>Fase Lunar</i>									

- b. Indique los aspectos que tuvo en cuenta para realizar este calendario.
6. a. Con base en el calendario lunar del primer semestre del año 2014, determine la manera de predecir las fases lunares y fechas, pertenecientes al segundo semestre del 2014.
- b. Indique la regularidad relacionada con días transcurridos entre cada fase lunar. ¿Cómo la podrías denominar?

Tarea 3: Validando fenómenos periódicos

Las fases lunares y la agricultura

Como bien sabes, Colombia es uno de los principales países a nivel mundial en la siembra, cultivo y producción de café, procesos caracterizados por las prácticas tradicionales de los campesinos de las distintas regiones del país.

El desarrollo de la caficultura comprende una serie de tareas para las cuales los pequeños productores consideran, en la mayoría de los casos, las diferentes fases lunares para ejecutarlas, es así como la mejor fase lunar para cosechar granos de café con la finalidad de producir semillas es el **cuarto menguante** hacia la **luna nueva** (Torres, 2012).

Con ayuda del calendario lunar construido en la tarea anterior y tomando como referencia el texto las fases lunares y la agricultura, determine:

1. a. ¿Cuáles fueron las fechas en el primer semestre del año 2014 donde los pequeños productores de café pudieron cosechar los granos de café?
- b. Identifique la regularidad de las cosechas de granos de café.
2. Caracterice de acuerdo a las actividades realizadas en las tareas anteriores un fenómeno periódico.
3. a. Clasifique los siguientes fenómenos en periódicos o no periódicos e indique el ¿por qué?
 - Estaciones del año.
 - Movimiento telúrico (Temblor).
 - El día y la noche.
 - Funcionamiento de un semáforo.
 - Los latidos del corazón.
- b. Indique el periodo en los fenómenos clasificados como periódicos. Escriba una reflexión al respecto.

4. Identifique el periodo o regularidad aproximada de:

- Mes sinódico.
- Mes sidéreo.
- Cosecha de granos de café.

5. De ejemplos, aparte de los ya mencionados, de algunos fenómenos que tienen un periodo o regularidad en su comportamiento.

3.2.2 Situación 2

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

Situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas

Un deportista de alto rendimiento realiza una práctica en una escalera partiendo de un lugar A (ubicado en la base de la escalera) hacia la cima, ubicada en un lugar B a 6,9 metros de altura y hace el recorrido en 3 segundos. Regresa a su punto de partida, pero al regresar decide ir nuevamente a B y continúa esta trayectoria de A a B . La tabla 1 muestra los valores del tiempo (t) en segundos de cada desplazamiento del deportista y la altura (h) en metros de la posición del deportista:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h(m)$	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0

Tabla 1. Valores del tiempo y altura en metros de la posición del deportista.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto y la tabla anterior, solucione las siguientes actividades:

- Bosqueje un gráfico de la situación.
- Escriba el significado que tiene el punto $(0,0)$ en la relación entre tiempo y altura (posición en metros del deportista).

3. Indique el número de metros que recorre el deportista cada segundo.
4. Explique el significado de las parejas ordenadas $(6,0)$ y $(12,0)$.
5. Determine el tiempo que tarda el deportista en regresar, por primera vez, al punto de partida. Argumente su respuesta.
6. Si el deportista a los 2 segundos se encuentra a una altura de 4.6 metros, explique porque al cabo de 5 segundos su altura es de 2.3 metros.

Tarea 2: Representando y describiendo funciones periódicas

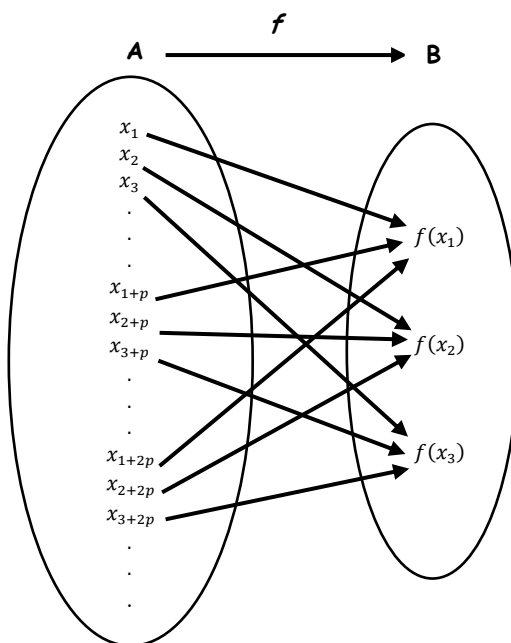
1. a. Escriba cómo varia el tiempo en esta situación.
b. Escriba cómo varia la posición del deportista (altura en metros).
2. Represente en el plano cartesiano, las parejas ordenadas dadas en la tabla 1.
3. Escriba Falso (F) o Verdadero (V), según el caso.
 - a. Al transcurrir 6, 12 y 18 segundos el deportista se encuentra en el sitio de partida ().
 - b. A los 3 y 9 segundos el deportista se encuentra en la cima ().
 - c. A los 4 segundos el deportista se encuentra subiendo de A hacia B ().
 - d. El periodo de esta situación es 3 segundos ().
4. Teniendo en cuenta que en el plano cartesiano se pueden unir los puntos, describa en el contexto de la situación (movimiento del deportista) el significado de la gráfica resultante.

Se puede afirmar que el movimiento del deportista se describe mediante una **función periódica**.

Una función f es periódica con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga a x y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x del dominio de f .

La representación gráfica de una función periódica se repite a intervalos regulares. El intervalo menor para el cual se repita la gráfica se llama periodo de la función.¹⁶

El siguiente diagrama sagital muestra una representación de la función periódica:

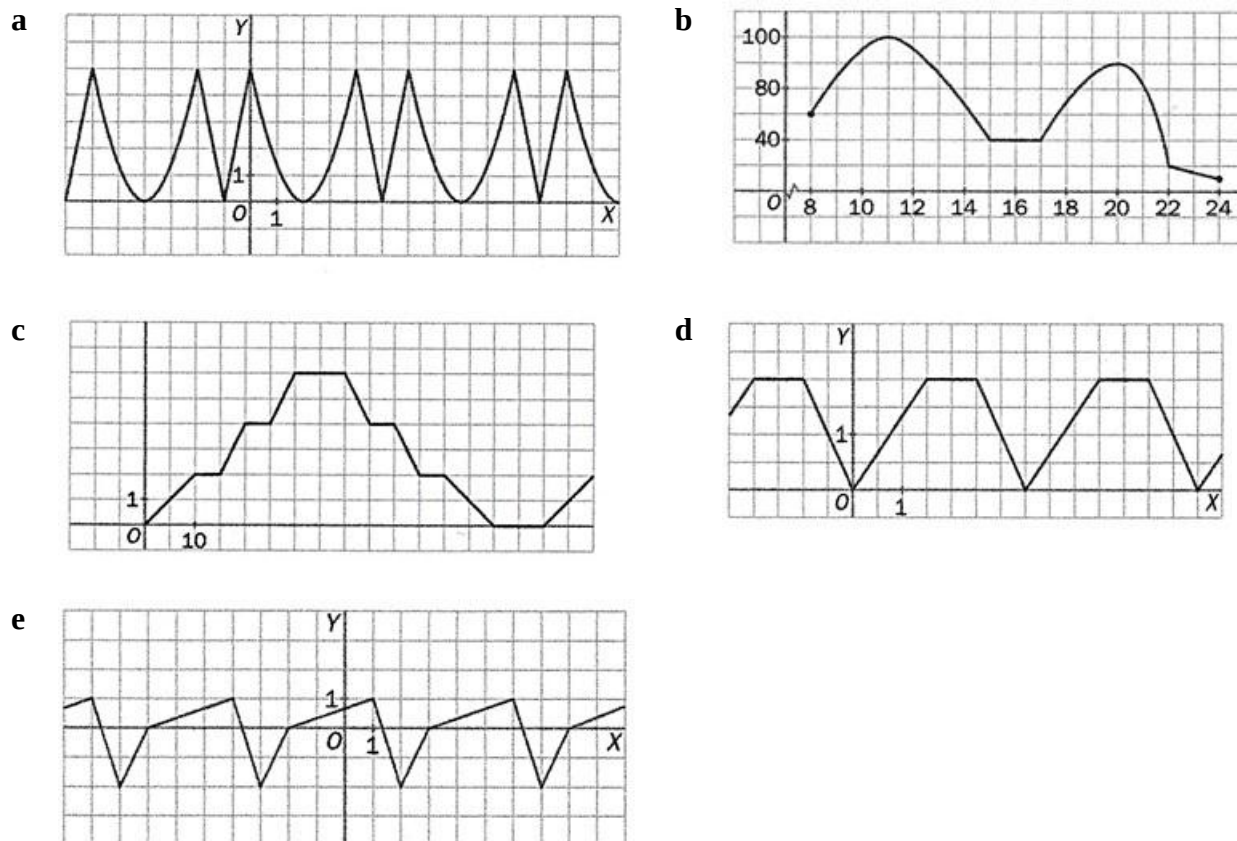


5. a. Con base en la gráfica del punto 2 (tarea 2) y la definición anterior, determine lo que sucede con la gráfica a partir de los 12 segundos.
- b. Indique el periodo (p) de tiempo a partir de la gráfica. Explique su respuesta.
6. Compruebe, por lo menos para tres valores de t , que el periodo p obtenido en 5 (b), verifica: $h(t + p) = h(t)$.
7. Explique la representación sagital de una función periódica según la relación entre los x del dominio y los $f(x)$ del rango.

¹⁶ Definición tomada de Apostol, Tom. Calculus (Vol. 1). 2ed. Barcelona: Reverté, 1988. Pág. 117 y Espiral 10. Grupo Editorial Norma, 2004. Pág. 67.

Tarea 3: Reconociendo gráficas de funciones periódicas

Observe las siguientes representaciones gráficas de algunas funciones:¹⁷



1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica					
Periodo					

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

¹⁷ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Tarea 4: Aproximándonos a la expresión algebraica

Para obtener una expresión algebraica que describa el movimiento del deportista, Valentina y Juan inician una discusión al respecto. Valentina asegura que la variación de la altura del deportista en función del tiempo corresponde a una función lineal dada por la expresión: $h(t) = 2,3t$.

Sin embargo, Juan argumenta que esta expresión es válida solo para el primer tramo de la gráfica, $k = 0$, es decir cuando el deportista sube por primera vez a la cima de la escalera.

1. De este modo, Juan propone a Valentina que la expresión algebraica que describe el movimiento del deportista para los tramos de ascenso en la gráfica es $h(t) = 2,3(t - 6k)$, donde k indica el número de veces en que sube el deportista. Por ejemplo, para $k = 1$ la expresión es:

$$h(t) = 2,3(t - 6).$$

- a. Determine la validez de esta afirmación para $k = 3$.
- b. Valentina encuentra que para $k = 4$, la expresión algebraica es $h(t) = 2,3(t - 24)$ y establece que: $h(24) = 0$; $h(25) = 2,3$; $h(26) = 4,6$ y $h(27) = 6,9$. Verifique los valores dados por Valentina.

2. Ahora, Valentina decide buscar una expresión algebraica que permita modelar los tramos de descenso del deportista y propone: $h(t) = -2,3(t - 6k)$.

- a. Decida si para $k = 1$ la expresión dada por Valentina representa el primer tramo de descenso del deportista.
- b. Si $k = 0$ no representa este primer tramo, explique cuál es el valor mínimo que debe tomar k para que la expresión tenga sentido.

3. Al final de la discusión Valentina y Juan deciden que la expresión algebraica que modela la altura del deportista en función del tiempo es de la forma:

$$h(t) = \begin{cases} 2,3(t - 6k); k = 0,1,2,3, \dots; 6n \leq t \leq 3p \text{ donde } n = 0,1,2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \quad \textbf{(Tramos de ascenso)} \\ -2,3(t - 6k); k = 1,2,3, \dots; 3p \leq t \leq 6n \text{ donde } n = 1,2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \quad \textbf{(Tramos de descenso)} \end{cases}$$

Compruebe la validez de esta expresión para al menos dos valores de k y de t , para cada tramo (ascenso y descenso).

4. Teniendo en cuenta las diferentes tareas llevadas a cabo en esta situación, escriba como define una función periódica.

3.2.3 Situación 3

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

Situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno

A partir de las inquietudes de Valentina y Juan con respecto a las funciones periódicas, el profesor de matemáticas decide proponerles una situación en un contexto de medida. Para esto partiendo de una circunferencia unitaria ($radio = 1$) cuya longitud es $L = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$, centrada en el origen del sistema de coordenadas relaciona a cada longitud de arco t un único punto $p(t) = (x, y)$ asociado al extremo del arco¹⁸, estableciendo una correspondencia entre las longitudes de los arcos y parejas ordenadas de números reales (ver figura 1).

¹⁸ Un arco determinado en el sentido contrario a las manecillas del reloj se considera positivo; si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj el arco se considera negativo.

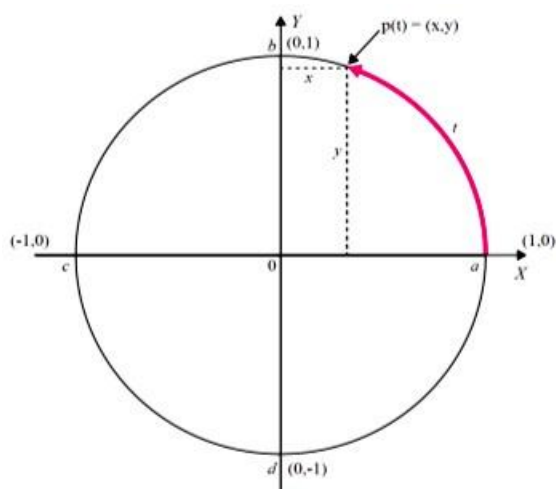


Figura 1.

Por ejemplo, si el arco es de $\frac{1}{4}$ de circunferencia unitaria se tiene que: $t = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ entonces $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, como se observa en la figura 2.¹⁹

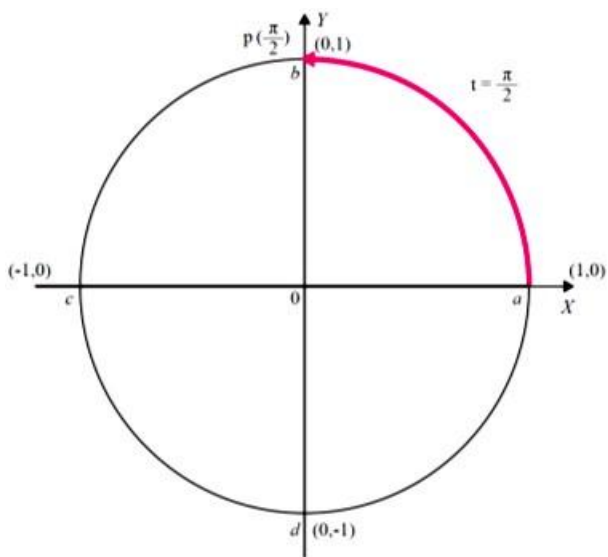


Figura 2.

¹⁹ Las figuras 1 y 2 son tomadas del libro: Matemática Moderna y Estructurada 5. Editorial Norma, 1978. Pág. 46 – 47. El texto inicial es una adaptación de las definiciones dadas en este mismo libro (Pág. 45 – 46).

Tarea 1: Caracterizando las funciones circulares seno y coseno como funciones periódicas

1. a. Teniendo en cuenta el texto inicial y las figuras 1, 2 y 3, complete la tabla, para los arcos de circunferencia dados.

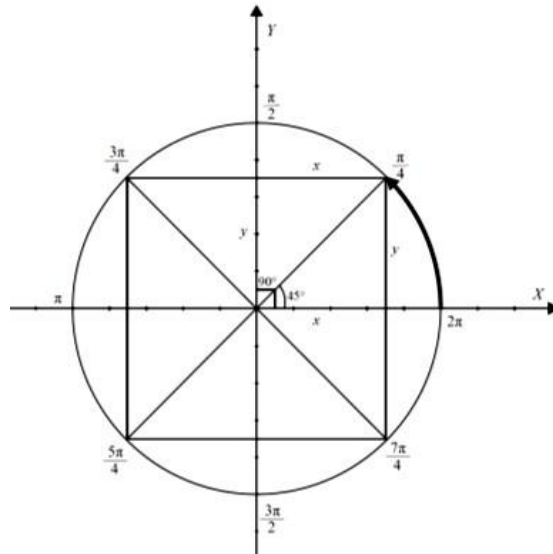


Figura 3.

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0		
$\frac{1}{8}$ de circunferencia		
$\frac{3}{8}$ de circunferencia		
$\frac{1}{2}$ de circunferencia		
$\frac{5}{8}$ de circunferencia		
$\frac{3}{4}$ de circunferencia		
$\frac{7}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta completa		
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia		
2 vueltas completas		

Tabla 1.

b. Explique cómo determinó las longitudes de los arcos y las parejas ordenadas.

2. A partir de la tabla 1, establezca para cuáles longitudes de arco la pareja $p(t) = (x, y)$ es igual. Argumente su respuesta.

3. Indique entre qué valores varía la coordenada x y entre qué valores varía la coordenada y de la pareja ordenada $p(t) = (x, y)$.

Tomando en consideración que a cada longitud de arco t se le puede asociar una pareja ordenada $p(t) = (x, y)$ se puede definir la función circular seno como la coordenada y del punto $p(t)$ y la función circular coseno como la coordenada x del punto $p(t)$, de tal manera que:

$$p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t).$$

A continuación se presentan algunos valores para $p(t)$ asociados a diferentes longitudes de arco t .

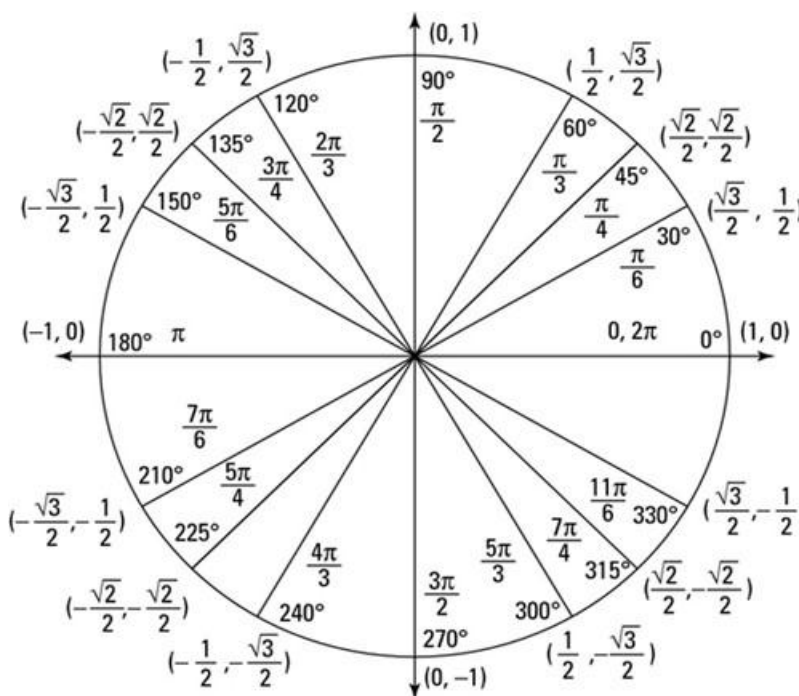


Figura 4. Círculo Trigonómico²⁰.

4. A partir de la figura 4, indique cómo determinar el valor de $\text{seno } t$ y $\text{coseno } t$, para longitudes de arco mayores a 2π .

²⁰ Figura tomada de <https://sites.google.com/site/portafolioisainsaenz/-quinto-parcial/1-círculo-unitario>

5. Complete las siguientes tablas:

a.

<i>Longitud del arco (t)</i>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
<i>Seno t</i>																	

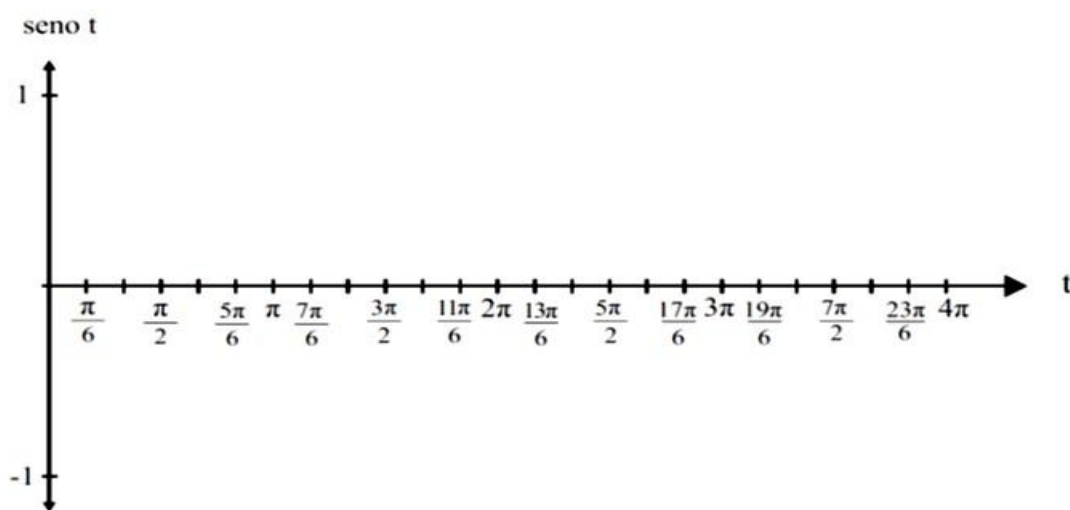
b.

<i>Longitud del arco (t)</i>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
<i>Coseno t</i>																	

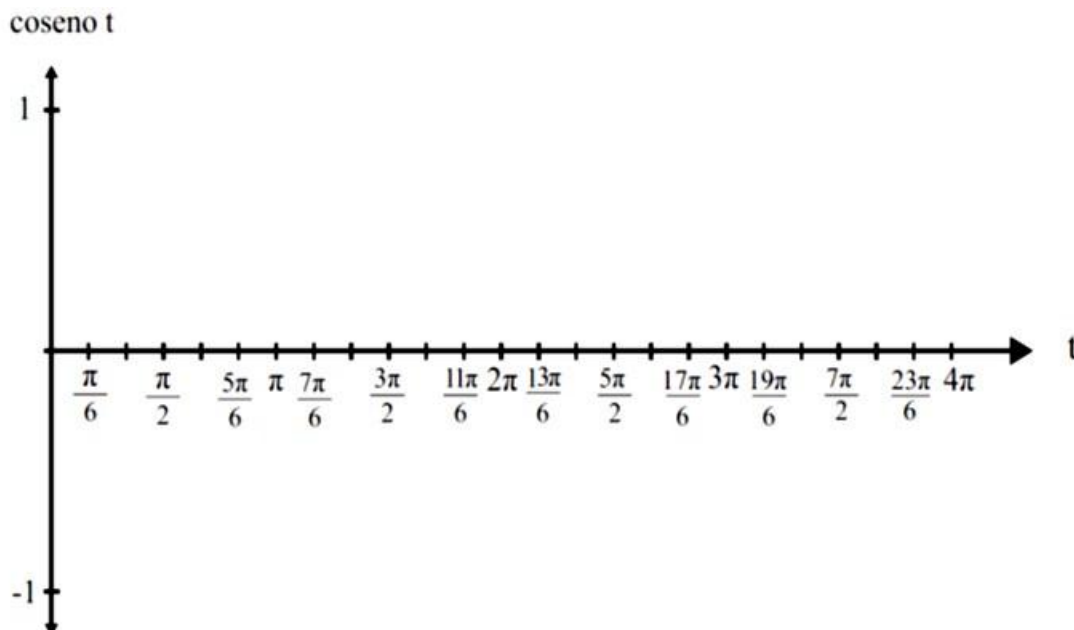
Tarea 2: Aproximación gráfica de las funciones circulares seno y coseno

Dado que $p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$, lo que significa que a cada longitud de arco le corresponde un único valor $\text{seno } t$ y un único valor $\text{coseno } t$, realice las gráficas de estas funciones teniendo en cuenta las tablas de la pregunta 5 (a, b) de la tarea 1.

1. a. Gráfica de la Función Seno



b. Gráfica de la Función Coseno



2. Con base en las gráficas anteriores determine:

- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función coseno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función coseno.

3. Determine el valor de:

- $\text{seno } \frac{7\pi}{6} =$
- $\text{coseno } \frac{5\pi}{3} =$
- $\text{coseno } 3\pi =$
- $\text{seno } \frac{\pi}{6} =$
- $\text{coseno } \frac{5\pi}{2} =$

4. a. Indique las razones por las cuales la función seno es periódica y determine su periodo.
b. Indique las razones por las cuales la función coseno es periódica y determine su periodo.
5. Compruebe para al menos dos valores de t que el periodo p obtenido en la pregunta 4, verifica:
 - a. $\text{seno}(t + p) = \text{seno } t$
 - b. $\text{coseno}(t + p) = \text{coseno } t$
6. Después de haber realizado las tres situaciones propuestas, describa que es una función periódica.

3.3 Implementación de la propuesta de aula

La propuesta de aula se implementó entre los meses de junio y diciembre del año lectivo 2015, con estudiantes del grupo 10 – 1 (grupo Sena²¹) de la jornada de la mañana, de la Institución Educativa Hernando Navia Varón, sede Central. Institución de carácter oficial del Municipio de Santiago de Cali, ubicada en la Cra 26P N° 50 – 39 del barrio La Nueva Floresta perteneciente al estrato socioeconómico 3. Sin embargo, la Institución cuenta con estudiantes de los estratos 1, 2 y 3.

La selección del grupo obedeció a disponibilidad de horario, dado que en el año lectivo 2015, el autor de esta propuesta no orientó el área de matemáticas en el nivel de Educación Media; así las horas de matemáticas del grupo 10 – 1 coincidieron con espacios donde no desempeñó actividades académicas en los grados a cargo. El total inicial de estudiantes fue de 30, no obstante se finalizó con 28 ya que dos de ellos se retiraron de la Institución durante la aplicación de la propuesta. Las edades del grupo elegido oscilan entre los 15 y los 17 años.

La metodología de implementación, fue el trabajo en parejas para toda la propuesta, con un tiempo asignado para cada tarea de acuerdo a la complejidad o cantidad de preguntas que la componían. El trabajo en equipo ayuda a los estudiantes a plantear diversas estrategias para

²¹ Estudiantes seleccionados por medio de evaluación en Lenguaje y Matemáticas, efectuada por el Sena, que al culminar su Educación Media reciben además de su título de bachilleres Técnicos Comerciales, la titulación de Técnicos en Contabilización De Operaciones Comerciales y Financieras. Lo anterior, supone un plan de estudios diseñado en conjunto con el Sena (diferente a los demás grupos) solo para el área de comerciales.

abordar las actividades, a discutir sus ideas y establecer puntos de acuerdo para la solución de cada una de las situaciones. Se buscó que la discusión se generara entre los dos integrantes de cada equipo y no entre los grupos de trabajo.

Durante la aplicación, el docente investigador resolvió las inquietudes²² de los alumnos frente a las actividades de las tareas, actuando como mediador entre los estudiantes y las situaciones problemáticas (principio de interacción – principio de reinención). Esta mediación del docente, se realizaba con cada equipo de trabajo, solo se hizo extensiva a todo el grupo cuando la inquietud o duda era general.

De igual manera, al finalizar cada situación se llevó a cabo una plenaria²³, acorde con el principio de interacción y el principio de reinención de la EMR, donde los estudiantes discutieron sus interpretaciones, procedimientos de cálculo y estrategias de solución de las situaciones problemáticas. Las plenarias fueron dirigidas por el docente hacia aquellas tareas donde se observó interpretación errónea o dificultad en la solución. Para esta dinámica cada grupo cuenta con el material que ya había resuelto y se fue dando la palabra a los estudiantes para que socializaran sus respuestas, generando la discusión y el análisis, que permitieron la apropiación de los conceptos por parte de los estudiantes.

Algunas dificultades presentadas en la ejecución de la propuesta se debieron a la no continuidad semana tras semana en la aplicación de las situaciones, por actividades propias de la Institución y por no estar a cargo del área de matemáticas en el grado 10 – 1, el autor de este trabajo. Esta última dificultad se relacionó con la ejecución del plan de aula por parte del docente responsable y las calificaciones de los periodos académicos. Por esta razón se hizo necesaria la implementación de las situaciones 2 y 3, en espacios cedidos por otros docentes de la Institución.

3.4 Resultados y análisis de resultados

Los resultados se organizan por medio de tablas de frecuencias clasificadas por tipos, la respuesta dada por los estudiantes, el número de estudiantes y el porcentaje. La clasificación por tipo de respuesta permite sistematizar las diferentes opciones de los estudiantes. Las tablas van acompañadas de su respectiva pregunta, título y análisis. Los títulos de las tablas se corresponden

²² Las inquietudes o cuestionamientos de los estudiantes fueron anotadas por el docente y se constituyen en un elemento fundamental para enriquecer los análisis de las situaciones.

²³ Se realizó filmación solo de la primera plenaria.

con la tarea y el número de pregunta, así $P_1T_1(S_1)$ hace referencia a: pregunta 1, tarea 1, situación 1; esto con el fin de facilitar la lectura e interpretación de los resultados. Los análisis parten fundamentalmente de los registros de los estudiantes, las observaciones del docente (discusión con los equipos de trabajo) y las plenarias llevadas a cabo. El análisis de esta información se asocia con un análisis general de las producciones de los estudiantes frente a la propuesta de aula implementada, es decir lo alcanzado por el grupo.

Se escanean algunos de los registros de los estudiantes con el fin de dar coherencia y respaldo a las afirmaciones realizadas dentro de los respectivos análisis. En el Anexo 1 (pág. 231) se presenta en su totalidad el registro de la propuesta de aula desarrollada por dos de los equipos.

Para los diferentes registros escaneados se hace uso de Evidencias de respuesta P T S Tipo, en tanto los registros no siempre se corresponden entre las diferentes preguntas, es decir la etiqueta Evidencias de respuesta P T S Tipo 1, no hace referencia necesariamente al mismo grupo de estudiantes.

3.4.1 Resultados y Análisis de Resultados de la Situación 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos

Fases de la luna y calendario lunar

La luna es el único satélite natural de la Tierra. Su diámetro es de unos 3.476 km, aproximadamente una cuarta parte del de la Tierra. La luna gira alrededor de su eje (rotación) en aproximadamente 27 días, 7 horas, 43 minutos y 11,5 segundos – **27.32 días** – (mes sidéreo) y se traslada alrededor de la Tierra (traslación) en el mismo intervalo de tiempo, de ahí que siempre nos muestra la misma cara. Además, nuestro satélite completa una revolución relativa al sol en aproximadamente 29 días, 12 horas, 44 minutos y 2,8 segundos (mes sinódico), es decir para cambiar de una fase a otra similar, o mes lunar, la luna necesita **29.53 días** (www.astromia.com/tierraluna/movluna.htm).

A medida que la luna gira alrededor de la Tierra, y la Tierra gira alrededor del sol, la zona de la luna iluminada va cambiando de posición de manera que unas veces vemos toda la cara visible de la luna iluminada por el sol, cuando la Tierra está en alguna posición entre el sol y

la luna, y otras veces vemos la cara visible oscura, ya que el sol se encuentra al otro lado de la luna e ilumina la cara oculta. Esta variación en la cantidad de superficie lunar que vemos iluminada recibe el nombre de FASES DE LA LUNA, y son cuatro (*luna nueva*, *cuarto creciente*, *luna llena* y *cuarto menguante*) que se van alternando a lo largo del mes lunar (recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido11.htm).

A continuación se presenta el calendario lunar para los meses de enero, febrero y marzo de 2014, y las fechas correspondientes a las diferentes fases de la luna.²⁴

Figura 8. Calendario lunar para los meses de enero, febrero y marzo de 2014



Un análisis general, a la lectura del texto Fases de la luna y calendario lunar deja ver que este no reviste dificultad para la mayoría de estudiantes, no obstante pese a abordar un fenómeno cotidiano como son las fases de la luna, los jóvenes manifiestan desconocer aspectos relacionados con los movimientos de rotación y traslación de nuestro satélite natural, así como de revolución relativa con respecto al sol y por ende con términos como mes sidéreo y mes sinódico. Aunque están familiarizados con las diferentes fases de la luna, no conocen el fenómeno natural, relacionado con la variación en la cantidad de superficie lunar iluminada, que las determina.

²⁴ Este calendario se ha modificado de acuerdo al propósito de las tareas, relacionadas con los fenómenos periódicos. Ver un ejemplo de calendario real en www.pac.com.ve/contenido/calendario-lunar-2014-imprimir/10989

Los estudiantes logran asociar la representación gráfica del calendario lunar del primer trimestre del año 2014 con la representación tabular donde se especifica la fecha y la fase lunar correspondiente para los meses de enero, febrero y marzo. Las representaciones numéricas involucradas, enteras y decimales, no constituyen un obstáculo para el desarrollo de la lectura, sin embargo todos los estudiantes se limitan a la aproximación dada en el texto para los meses sidéreo (27.32 días) y sinódico (29.53 días). No hay preguntas o cuestionamientos al respecto, ni el intento de comprobar o explicar las equivalencias de las horas, los minutos y los segundos en días.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto anterior, responda las siguientes preguntas:

1. Indique en qué consiste el mes sidéreo y cuál es su valor aproximado.

Tabla 6. Tipos de respuestas $P_1T_1(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que definen parcial o completamente el mes sidéreo desde el fenómeno físico (rotación y/o traslación de la luna) y como el intervalo de tiempo transcurrido para dichos movimientos de la luna. Dan el valor requerido.	4	13,3%
Tipo 2	Estudiantes que definen parcial o completamente el mes sidéreo desde el fenómeno físico (rotación y/o traslación de la luna), más no como el intervalo de tiempo transcurrido para dichos movimientos de la luna. Dan el valor requerido.	22	73,3%
Tipo 3	Estudiantes que definen el mes sidéreo, desde una interpretación errónea de los movimientos de rotación y traslación de la luna; sin embargo dan el valor requerido.	4	13,3%

2. Explique en qué consiste el mes sinódico y cuál es su valor, según la lectura.

Tabla 7. Tipos de respuestas $P_2T_1(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que definen el mes sinódico parcial o completamente como el tiempo transcurrido para que la luna cambie de una fase a otra similar y /o complete una revolución relativa alrededor del sol. Dan el valor pedido.	4	13,3%
Tipo 2	Estudiantes que definen parcial o completamente el mes sinódico desde el fenómeno físico (una revolución relativa de la luna con respecto al sol y/o el cambio de una fase de la luna a otra similar); más no como el tiempo transcurrido en dicha revolución y/o cambio. Dan el valor pedido.	24	80%
Tipo 3	Estudiantes que definen de forma errónea el mes sinódico, aunque dan su valor aproximado.	2	6,7%

Teniendo en cuenta las tablas 6 y 7, donde se presenta la tipificación de respuestas a las preguntas 1 y 2, se observa que el 13,3 % de los estudiantes conciben el mes sidéreo no solo desde el fenómeno natural, sino también como su duración (fenómeno). Es conveniente señalar que ningún equipo de estudiantes hace señalamientos explícitos sobre la misma duración, en tiempo, del movimiento de rotación de la luna sobre su propio eje y de traslación alrededor de la tierra. Para el mes sinódico, este mismo porcentaje 13,3 %, da su definición únicamente en términos de la duración del fenómeno. Sin embargo, el 73,3 % y el 80%, para las preguntas 1 y 2 respectivamente, se limitan a la descripción de los fenómenos, más no interpretan los meses sidéreo y sinódico como unidades de medida de tiempo.

Lo anterior indica que la mayoría de estudiantes tiene una comprensión de los fenómenos naturales asociados a las fases lunares a partir de su descripción en el texto inicial, aunque no identifiquen como unidades de tiempo el mes sidéreo, duración de la rotación y traslación de la luna y el mes sinódico, duración de una revolución relativa de la luna alrededor del sol y el cambio de una fase lunar a otra similar. En este sentido, el texto: Fases de la luna y calendario lunar, brinda un contexto, como lo argumenta Freudenthal (1981, p.144, citado por Bressan, Gallego y Zolkower, 2004, p. 5) para el inicio de la actividad matemática de los estudiantes, a la vez que permite el reconocimiento y caracterización de fenómenos de variación periódica en una disciplina externa a la matemática desde una lectura (registro verbal) como lo argumentan los Lineamientos (1998) y Estándares (2006).

3. Explique que es el calendario lunar y cómo se divide el mes sinódico para determinar cada fase de la luna.

Tabla 8. Tipos de respuestas $P_3T_1(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	El calendario lunar es una representación numérica (registro) de los días en los cuales la luna atraviesa sus distintas fases. El mes sinódico se divide en 4 fases, cada una con un tiempo aproximado de duración de 7 días.	8	26,7%
Tipo 2	El calendario lunar es un registro donde se representan las fechas correspondientes a las fases lunares. El mes sinódico se divide en 4 fases (no establecen el tiempo aproximado de duración de cada fase).	8	26,7%
Tipo 3	El calendario lunar es un registro de las fases lunares y sus fechas. La explicación gira en torno a los fenómenos naturales que determinan el mes sinódico. Este mes se divide en 4 fases, cada una con un tiempo aproximado de 7 días.	8	26,7%
Tipo 4	El calendario lunar muestra las fases (caras) de la luna. El mes sinódico se divide en 4 fases, pero no dan valor aproximado para cada fase o es incorrecto.	6	20%

Por organización y tipificación de las respuestas, se incluye en el tipo 3 una pareja de estudiantes que difiere en el número de fases en que se divide el mes sinódico, 3 fases, pero que no afecta su respuesta en cuanto la duración aproximada de cada fase. Además, se incluye en el tipo 4 una pareja de estudiantes que en su explicación del calendario lunar confunden el mes sinódico con el mes sidéreo.

La clasificación de respuestas a la pregunta 3, evidencia que 81 % de los estudiantes, asocian el calendario lunar con una representación o registro que indica las diferentes fases lunares y sus correspondientes fechas, de tal manera que el calendario del primer trimestre del año 2014 acompañado de su registro tabular, fecha y fase lunar, no reviste dificultad en su interpretación. Con respecto a la división del mes sinódico, se observa que los estudiantes, salvo un grupo (como se mencionó anteriormente) divide este mes en 4 fases, donde algunos aproximan la duración de cada fase a 7 días. El grupo que afirma que son tres fases, realiza una deducción que no incluye la fase inicial, luna nueva, sino el total de fases intermedias: creciente, llena y menguante que transcurren para llegar a nuevamente a la luna nueva, como lo indica su respuesta:

3. El calendario lunar es el proceso en el cual la luna realiza la rotación alrededor de la tierra y hace dos cambios de fase lunar. El mes sinódico es un lapso de 29.53 días y se divide en 3 fases (Creciente, Llena, Menguante) y cada fase tiene un tiempo aproximado de 7 días hasta cambiar de fase, por lo que completan los 29.53 días hasta llegar a la fase inicial (luna nueva).

En esta pregunta, comienzan a surgir en los estudiantes los primeros cálculos numéricos referidos a la duración de cada fase, de este modo, se asume la aproximación de 7 días, ya que los procedimientos de los jóvenes muestran que 7,38 días y 7,75 días son los valores que encuentran. El primero de ellos, concerniente a la duración del mes sinódico (29,53 días) y el segundo a la duración de un mes de 31 días. En ambas respuestas se acude a la división como proceso de cálculo.

4. Para dos rotaciones de la luna, enuncie el tiempo en días transcurridos²⁵.

Tabla 9. Tipos de respuestas $P_4T_1(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que enuncian el valor correcto en días transcurridos con o sin aproximaciones decimales, argumentando su respuesta a través de cálculos numéricos y/o lenguaje retórico.	24	85,7%
Tipo 2	Estudiantes que enuncian un valor erróneo para el número de días transcurridos. No hay justificación de su respuesta, se limitan al resultado.	4	14,3%

Para esta pregunta y las siguientes el número total de estudiantes se reduce a 28 ya que dos de ellos se retiran de la Institución.

La tabla 9 muestra que el 85,7% de los estudiantes da el valor acertado para dos rotaciones de la luna, independiente del uso o no de aproximaciones decimales, donde las estrategias de solución que surgen son de tipo aditivo y multiplicativo, expresadas mediante operaciones y/o lenguaje retórico. Lo que demuestra el uso de herramientas matemáticas por

²⁵ A partir de la pregunta 4 se le permite a los estudiantes el uso de la calculadora en las actividades donde lo consideren necesario.

parte de los alumnos para comprender, organizar y dar solución a la situación planteada, procesos que se acentúan en los principios de actividad, de realidad y reinvención dentro del enfoque de la EMR.

En cuanto a las respuestas incorrectas, se puede deducir de los registros de los estudiantes errores de cálculo debido a la consideración del mes sinódico, donde se alude a la duración de dos fases lunares, como se muestra a continuación:

3 el calendario lunar es las fases de la luna
donde va cumpliendo ciertas fases en su rotación
donde vemos varias fases donde el mes
sinódico se divide

$$\begin{array}{r} 29.53 \text{ } \overline{) 4} \\ 15 \\ 33 \\ 1 \end{array}$$

7.38 días dura cada fase
de la luna.

4 en días transcurridos es
14.76 días transcurridos para dar
dos rotaciones la luna

Claramente se observa que el número de días transcurridos $14,76^{26}$ proviene de la duración aproximada (7,38 días) de cada fase lunar.

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3		6	$7\frac{1}{2}$			10
Días transcurridos				109.28			259.54	327.84	

b. Escriba la manera cómo determinó la relación entre el número de rotaciones de la luna y los días transcurridos.

²⁶ Los estudiantes no especifican si este cálculo lo realizan a través de adición o multiplicación.

Tabla 10. Tipos de respuestas $P_{5a,b}T_1(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Justificación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que completan de forma adecuada la tabla en su totalidad, haciendo uso o no de aproximaciones decimales.	La relación entre el número de rotaciones y los días transcurridos se determina total o parcialmente (días transcurridos), por medio de una descripción en lenguaje retórico, que involucra estructuras tipo multiplicativo (multiplicación y/o división).	10	35,7%
		La relación entre el número de rotaciones y los días transcurridos se determina por medio de cálculos numéricos que involucran estructuras tipo multiplicativo (multiplicación y/o división).	6	21,4%
		La relación entre el número de rotaciones y los días transcurridos se determina parcialmente (días transcurridos), haciendo uso de lenguaje retórico e involucra estructuras tipo multiplicativo (multiplicación).	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que no completan de forma adecuada la tabla (1 – 3 valores incorrectos).	La relación entre el número de rotaciones y los días transcurridos se determina parcialmente (días transcurridos), haciendo uso de lenguaje retórico y/o cálculos numéricos e involucra estructuras tipo multiplicativo (multiplicación).	6	21,4%
Tipo 3	Estudiantes que no completan de forma adecuada la tabla (4 o más valores o incorrectos).	La relación entre el número de rotaciones y los días transcurridos se determina, por medio de cálculos numéricos que involucran estructuras tipo multiplicativo (multiplicación y/o división).	2	7,1%

La tabla 10 muestra que el 57,1% de los estudiantes completa no solo de forma adecuada los valores de la relación número de rotaciones de la luna y días transcurridos, sino que hacen uso de estructuras de tipo multiplicativo, ya sea por medio de descripciones en lenguaje retórico o el uso de algoritmos para justificar dicha relación. Lo que deja ver, las diversas estrategias de solución o primeros modelos²⁷ que emergen para representar y organizar la situación, es decir la matematización de la situación planteada desde el enfoque de la EMR. De igual forma, el uso de la representación tabular constituye para los jóvenes un punto de partida en el estudio de la función en tanto permite el reconocimiento de patrones y regularidades en el contexto de la variación, en torno a las nociones de variable y constante, como lo afirman los Lineamientos (1998, p.73).

²⁷ Estos modelos están asociados al contexto o situación de la cual emergen (nivel situacional).

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes se presentan a continuación:

Evidencias de respuesta $P_{5a,b}T_1(S_1)$ Tipo 1

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27.32	13.66	81.96	109.28	163.92	204.9	259.54	327.84	273.2

b. Escriba la manera como determino la relación entre el número de rotaciones de la luna y los días transcurridos.

$$1 \times 27.32 = 27.32$$

$$6 \times 27.32 = 163.92$$

$$10 \times 27.32 = 273.2$$

$$1,2 \times 27.32 = 13.66$$

$$7.5 \times 27.32 = 204.9$$

$$3 \times 27.32 = 81.96$$

$$9.5 \times 27.32 = 259.54$$

$$4 \times 27.32 = 109.28$$

$$12 \times 27.32 = 327.84$$

Evidencias de respuesta $P_{5a,b}T_1(S_1)$ Tipo 2

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27,32	13,66	81,96	109.28	163,92	204,9	259.54	327.84	273,2

5.b-El primero lo conseguí con la lectura.

-El segundo lo conseguí dividiendo por 2 o a la mitad, la cantidad de días.

-El tercero lo encontré multiplicando por 3, la cantidad de días.

-El cuarto lo encontré dividiendo la cantidad determinada de días con la cantidad original de días.

-El quinto lo encontré multiplicando por 6, la cantidad de días.

-El sexto lo encontré con el siguiente procedimiento:

Multiplico la cantidad de días por 7.

Luego dividí la cantidad de días a la mitad ($\times 2$)

y sumo los dos resultados.

-El séptimo lo realice, multiplicando la cantidad de días por cada número, superior al 7, fijándome de no superar la cantidad determinada, luego descubrí que no me daba un número exacto, así que le sume la mitad y obtuve el resultado.

-El octavo lo conseguí dividiendo la cantidad determinada de días con la cantidad original.

-Y en la novena, multiplico la cantidad de días por 10.

Es pertinente señalar que al hablar de una determinación parcial de la relación número de rotaciones de la luna y días transcurridos por parte de algunos estudiantes, se hace referencia a la justificación, ya sea de forma retórica y/o numérica de los días transcurridos, razón por la cual solo involucran la multiplicación. A partir del diálogo con los diversos grupos y la plenaria se establece, aunque no está explícito, que para el número de rotaciones de la luna prevalece el método de ensayo y error, multiplicando 27,32 por el valor que genere el dado en la tabla, en

palabras de los jóvenes: “Suponemos que el número de rotaciones aumenta, así multiplicamos 27,32 por el número de rotaciones que no sabíamos hasta que nos dio”.

En general, aunque los estudiantes hacen uso de la calculadora, la notación no es impedimento para que los jóvenes empleen las equivalencias entre las representaciones numéricas: $7\frac{1}{2} = 7,5$ y $9\frac{1}{2} = 9,5$ es decir pese a obtener $259,54 \div 27,32 = 9,5$ lo escriben como $9\frac{1}{2}$.

Algunos procedimientos (ver a continuación) muestran un tratamiento de los números $7\frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2}$ y $9\frac{1}{2} = 9 + \frac{1}{2}$, es decir desde su representación mixta y decimal.

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27.32	13.66	81.96	109.28	163.92	204.9	259.54	327.84	273.2

$$a - 27.32 \times 1 = 27.32.$$

$$b - 27.32 \div 2 = 13.66$$

$$c - 27.32 \times 3 = 81.96.$$

$$d - 109.28 \div 27.32 = 4.$$

$$e - 27.32 \times 6 = 163.92.$$

$$f - 27.32 \times 7 + 13.66 = 204.9$$

$$g - 27.32 \times 9 + 13.66 = 259.54$$

$$h - 327.84 \div 27.32 = 12.$$

$$i - 27.32 \times 10 = 273.2$$

Finalmente, las dificultades de los grupos que no logran completar de forma adecuada la tabla se centran en el uso incorrecto de la coma o el punto en las cifras decimales e interpretación errónea del número $\frac{1}{2}$:

Evidencias de respuesta $P_{5a}T_1(S_1)$ Tipo 1

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	9.5	12	10
Días transcurridos	27.32	54.64	81.96	109.28	163.92	234.171	259.54	327.84	273.20

En este caso, el número $\frac{1}{2}$ se toma como el doble del valor de una rotación y se nota además un inadecuado uso de las cifras decimales (casillas 2 y 9).

Evidencias de respuesta $P_{5a}T_1(S_1)$ Tipo 2

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27.32	40.98	81.96	109.28	163.92	232.22	259.54	327.84	273.2

5. lo determine multiplicando y sumando
 rotación $\frac{1}{2} = 27.32 \leftarrow$ días transcurridos
 $\frac{1}{2} \rightarrow 27.32$
 $\frac{1}{2} \rightarrow 27.32 \div 2 = 13.66$
 $27.32 + 13.66 = 40.98$
 $27.32 \times 12 = 327.84$
 $327.84 = N^\circ \text{ rotaciones de } 12$

Resultado que conduce a los cálculos $27,32 \times 7 + 40,98 = 232,22$ (casilla 6) y $27,32 \times 8 + 40,98 = 259,54$ (casilla 7).

Con respecto al grupo clasificado como tipo 3 dentro de la tabla 10, se percibe en este caso, una comprensión errada de la relación: número de rotaciones y días transcurridos que conduce a cálculos numéricos inapropiados e incoherentes.

5. a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27.32	13.66	9.12	109.28	4.55	327.84	259.54	327.84	273.2

$$\begin{array}{ll}
 \textcircled{1} & 27.32 \div 1 = 27.32 \\
 \textcircled{2} & 27.32 \div 2 = 13.66 \\
 \textcircled{3} & 27.32 \div 3 = 9.12 \\
 \textcircled{4} & 27.32 \div 4 = 109.28 \\
 \textcircled{5} & 27.32 \div 6 = 4.55 \\
 \textcircled{6} & 27.32 \times 7 = 19.124 + 13.66 \\
 & = 32.784 \\
 \textcircled{7} & 27.32 \times 9 = 245.88 + 13.66 \\
 & = 259.54 \\
 \textcircled{8} & 27.32 \times 12 = 327.84
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 27.32 \times 7 = 19.124 \\
 + 13.66 \\
 \hline
 \end{array}$$

Tarea 2: Estableciendo regularidades periódicas

Observe el calendario lunar para los meses de enero a marzo de 2014 y conteste:

1. Determine el tiempo ha transcurrido entre cada fase de luna nueva en el mes de enero. Compárelo con el mes sinódico y saque una conclusión.

Tabla 11. Tipos de respuestas $P_1T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Conclusión	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan que el tiempo transcurrido es de 29 días.	El tiempo transcurrido para la luna nueva en el mes de enero se aproxima a la duración del mes sinódico.	16	57,1%
Tipo 2	Estudiantes que determinan que el tiempo transcurrido es de 30/31 días.	El tiempo transcurrido para la luna nueva en el mes de enero se aproxima a la duración del mes sinódico.	8	28,6%
Tipo 3	Estudiantes que determinan que el tiempo transcurrido es de 29 días.	No hay conclusión.	2	7,1%
Tipo 4	Estudiantes que determinan que el tiempo transcurrido es de 7 días.	El tiempo transcurrido entre cada fase lunar es aproximadamente 7 días hasta llegar nuevamente a su fase similar.	2	7,1%

La tabla 11 deja claro que 24 de los 28 estudiantes, independiente del tiempo transcurrido en días para las fases de luna nueva en enero, reconocen el mes sinódico como una regularidad al margen de su duración. Con respecto al tiempo transcurrido, la diferencia en días radica en la inclusión o no, de los extremos (fechas) donde se presenta la primera luna nueva (1 enero) y la segunda (31 enero), lo que evidencia el conteo como principal estrategia para

determinar los días transcurridos. Si bien uno de los grupos responde de forma inadecuada que el tiempo transcurrido es de 7 días entre las fases de luna nueva en enero, su conclusión reafirma la regularidad del mes sinódico, en tanto cada fase demora aproximadamente 7 días hasta llegar a su similar.

2. ¿Transcurre para el cuarto menguante entre los meses de febrero y marzo la misma cantidad de días que para la luna nueva en el mes de enero? Explique su respuesta.

Tabla 12. Tipos de respuestas $P_2T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Explicación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que responden sí.	Asociada a la duración del mes sinódico.	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que responden sí.	Referida al cambio (duración) entre cada fase de la luna.	6	21,4%
Tipo 3	Estudiantes que responden sí.	No hay explicación.	8	28,6%
Tipo 4	Estudiantes que responden no.	Asociada a una diferencia en días con respecto a la duración del mes sinódico y/o interpretación inadecuada de este mes.	8	28,6%

La tipificación de las respuestas en sí y no, a esta pregunta se efectúa sin tomar en consideración los días transcurridos para la luna nueva en enero, señalados por los estudiantes en la pregunta 1.

El 71,4 % de los jóvenes ratifica una regularidad ligada a la duración del mes sinódico, tiempo que la luna tarda en ir de una fase a otra similar, indiferente de la respuesta a la pregunta 1, como se mencionó en el párrafo anterior. En el marco del contexto definido para esta situación, estos resultados indican un reconocimiento por parte de los jóvenes de la inexactitud (cuantitativa) que caracteriza los fenómenos naturales de nuestro entorno, en este caso la variación periódica de las fases lunares. No obstante, los 8 estudiantes que afirman *no* basan su conclusión en este mismo argumento, solo que visto desde la no exactitud (en días) con el mes sinódico.

3. Podrías dar la razón por la cual durante el mes de febrero de 2014, no se presenta luna nueva y durante los meses de enero y marzo hay dos días de esta fase. Justifique su respuesta.

Tabla 13. Tipos de respuestas $P_3T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Al ser febrero un mes de 28 días, no se completa el mes sinódico desde la última fase de luna nueva (31 enero).	20	71,4%
Tipo 2	Febrero es un mes de 28 días, por tanto es más corto que enero y marzo (No hay argumentos asociados a la duración del mes sinódico).	4	14,3%
Tipo 3	No responden.	4	14,3%

Nuevamente, el mayor porcentaje de estudiantes (71,4%) justifica su respuesta con base en la regularidad del mes sinódico y como esta se cumple sin distinción de la fase lunar, lo que demuestra un nivel de comprensión de la definición del mes sinódico a partir de la lectura, es decir sin acudir a una verificación por medio de conteo.

4. Realice el calendario lunar para el siguiente trimestre del año 2014 (Abril, Mayo y Junio).

Tabla 14. Tipos de respuestas $P_4T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que realizan adecuadamente y en su totalidad el calendario lunar para el segundo trimestre de 2014.	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que realizan completa o parcialmente el calendario lunar, pero al menos una de las fechas o fases es incorrecta.	10	35,7%
Tipo 3	Estudiantes que completan o no en su totalidad el calendario lunar, pero todas sus fechas son incorrectas.	14	50%
Tipo 4	Estudiantes que no realizan el calendario lunar.	2	7,1%

5. a. Complete la siguiente tabla.

Fecha	Abril 8	Junio 15	Mayo	Junio 23	Abril	Mayo 8	Abril 24	Mayo	Junio
Fase Lunar									

Tabla 15. Tipos de respuestas $P_{5a}T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que completan la tabla adecuadamente o máximo con dos respuestas no acertadas.	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que completan la tabla con al menos 3 valores adecuados.	10	35,7%
Tipo 3	Estudiantes que completan la tabla de forma totalmente inadecuada o a lo sumo dan dos respuestas acertadas.	2	7,1%
Tipo 4	Estudiantes que no completan la tabla, dando respuestas totalmente incorrectas o al menos cinco acertadas.	10	35,7%

b. Indique los aspectos que tuvo en cuenta para realizar este calendario.

Tabla 16. Tipos de respuestas $P_{5b}T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que realizan conteo (en el calendario del primer trimestre) del número de días que transcurren de una fase de la luna a otra similar (duración del mes sinódico).	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que realizan conteo (en el calendario del primer trimestre) del número de días que transcurren entre cada fase.	4	14,3%
Tipo 3	Estudiantes que mencionan el calendario del primer trimestre y conteo sin especificar proceso alguno.	8	28,6%
Tipo 4	No indican aspecto alguno/No son claros en el ámbito de la pregunta.	10	35,7%

El análisis de la tipificación de respuestas a las preguntas 4, 5a y 5b muestra alto grado de complejidad, en tanto el conteo como proceso generalizado usado por los estudiantes se vio afectado por la inclusión de los extremos (fechas) dadas para las fases de la luna en el calendario del primer trimestre, del cual parte la mayoría de jóvenes (18) y por tomar en consideración la duración aproximada de 7 días de cada fase lunar. Lo anterior generó que las fechas y fases lunares dadas en la tabla (5a) no coincidieran con los calendarios elaborados por los alumnos; en este sentido los grupos que completan la tabla adecuadamente o máximo con dos respuestas no acertadas manifestaron como base fundamental para el conteo la duración del mes sinódico (29 días).

Sin embargo, lo expuesto no contradice el reconocimiento y comprensión de los estudiantes de una regularidad de tiempo, periodo, en el cambio de una fase de la luna a otra similar o mes sinódico y una regularidad entre las diferentes fases lunares; al contrario esta periodicidad se confirma con el hecho de utilizar 29 días en el conteo para predecir nuevas fechas por parte de algunos estudiantes, es decir asumen este comportamiento de variación periódica para el segundo trimestre.

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas 5a y 5b se infiere que estas no se corresponden directamente con los calendarios construidos en la pregunta 4, así calendarios incorrectos o incompletos no implican fechas/fases erróneas en la tabla (5a), lo que se corrobora con la clasificación tipo 1 de la tabla 14 donde solo una pareja de estudiantes elabora acertadamente el calendario:

ABRIL							MAYO							JUNIO						
lu	ma	mi	ju	vi	sa	do	lu	ma	mi	ju	vi	sa	do	lu	ma	mi	ju	vi	sa	do
	1	2	3	4	5	6														
7	8	9	10	11	12	13			1	2	3	4								
14	15	16	17	18	19	20	5	6	7	8	9	10	11	2	3	4	5	6	7	8
21	22	23	24	25	26	27	12	13	14	15	16	17	18	12	13	14	15	16	17	18
28	29	30					19	20	21	22	23	24	25	19	20	21	22	23	24	25
							26	27	28	29	30	31		26	27	28	29	30		

5. a. Complete la siguiente tabla.

Fecha	Abril 8	Junio 15	Mayo	Junio 23	Abril	Mayo 8	Abril 24	Mayo	Junio
Fase Lunar									
			30		16			24	7

Ante esta situación, los estudiantes manifestaron en la plenaria que pese a que sus fechas/fases lunares no coincidían con las relacionadas en la tabla (5a) pues les daba una fecha anterior/una fecha posterior, realizaban el ajuste a la fecha establecida. Por esta razón, la mayor dificultad se reflejó en la determinación del día del mes donde se presentaba la fase lunar.

Si bien, se presentó dificultad en las preguntas 4, 5a y 5b, este tipo de actividades donde se pone en juego la predicción, como aspecto fundamental asociado a la periodicidad, contribuye

al desarrollo del pensamiento variacional, Lineamientos (1998), en tanto permite a los estudiantes el manejo de habilidades como la conjeturación, la generalización y la argumentación en la solución de situaciones problemáticas, punto de vista coherente con el enfoque de la EMR donde el énfasis se centra en la matematización (organización de la realidad con medios matemáticos) a partir del uso de estrategias referidas al contexto de la situación (nivel situacional), para este caso el conteo.

6. a. Con base en el calendario lunar del primer semestre del año 2014, determine la manera de predecir las fases lunares y fechas, pertenecientes al segundo semestre del 2014.

Tabla 17. Tipos de respuestas $P_{6a}T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Contando los días que transcurren para que la luna cambie de una fase a otra similar (mes sinódico).	2	7,1%
Tipo 2	Contando los días que transcurren entre cada fase lunar.	20	71,4%
Tipo 3	Contando (no especifican si los días transcurridos entre cada fase lunar o de una fase a otra similar).	2	7,1%
Tipo 4	No determinan la forma de predecir las fechas / No es coherente.	4	14,3%

b. Indique la regularidad relacionada con días transcurridos entre cada fase lunar.

Tabla 18. Tipos de respuestas $P_{6b}T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que indican una regularidad de 7 u 8 días.	16	57,1%
Tipo 2	Estudiantes que no responden	12	42,9%

¿Cómo la podrías denominar?

Tabla 19. Tipos de respuestas $P_{6b}T_2(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Rutina – cambios lunáticos.	4	14,3%
Tipo 2	Periodo de tiempo (semanal).	6	21,4%
Tipo 3	Estudiantes que no responden.	18	64,3%

El análisis de las respuestas a la pregunta 6, corrobora el conteo como herramienta matemática para predecir las fechas correspondientes al segundo semestre del 2014²⁸, además que los estudiantes reconocen e indican una regularidad asociada a los cambios entre cada fase lunar (57,1% de la tabla 18). La tabla 19, muestra que el 21,4% de los jóvenes identifica esta regularidad como un periodo de tiempo, interpretando este como el tiempo transcurrido para cada cambio de fase lunar, es decir la palabra periodo alude a la duración en días de cada fase lunar (7 aproximadamente) y no al tiempo transcurrido para que el fenómeno vuelva a iniciar, se repita, como sucede con el mes sinódico o tiempo que transcurre entre cada fase similar de la luna. De lo anterior se puede inferir que algunos estudiantes están asumiendo el periodo de un fenómeno como cualquier regularidad que se presente dentro del mismo, lo cual es incorrecto en tanto todo periodo está caracterizado por una regularidad, pero no toda regularidad determina un periodo.

Tarea 3: Validando fenómenos periódicos

Las fases lunares y la agricultura

Como bien sabes, Colombia es uno de los principales países a nivel mundial en la siembra, cultivo y producción de café, procesos caracterizados por las prácticas tradicionales de los campesinos de las distintas regiones del país.

El desarrollo de la caficultura comprende una serie de tareas para las cuales los pequeños productores consideran, en la mayoría de los casos, las diferentes fases lunares para ejecutarlas, es así como la mejor fase lunar para cosechar granos de café con la finalidad de producir semillas es el **cuarto menguante** hacia la **luna nueva** (Torres, 2012).

²⁸ Sin embargo este conteo, como lo demuestra el porcentaje (71,4%) de la tabla 17, se fundamenta nuevamente en la duración de cada fase lunar, la cual como se mencionó en el análisis de la pregunta 5, conlleva a dificultades en la determinación de las fechas y fases lunar del segundo trimestre.

Con ayuda del calendario lunar construido en la tarea anterior y tomando como referencia el texto las fases lunares y la agricultura, determine:

1. a. ¿Cuáles fueron las fechas en el primer semestre del año 2014 donde los pequeños productores de café pudieron cosechar los granos de café?

Tabla 20. Tipos de respuestas $P_{1a}T_3(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que indican de manera acertada las fechas para la cosecha de granos de café durante el primer semestre de 2014.	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que indican de manera acertada las fechas para la cosecha de granos de café únicamente para el primer trimestre de 2014.	22	78,6%
Tipo 3	Estudiantes que indican de manera incorrecta las fechas para la cosecha de granos de café durante el primer semestre de 2014.	2	7,1%
Tipo 4	Estudiantes que no especifican ninguna fecha / No responden.	2	7,1%

b. Identifique la regularidad de las cosechas de granos de café.

Tabla 21. Tipos de respuestas $P_{1b}T_3(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que indican como regularidades el mes sinódico (29.53 días) y una semana (7 días).	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que señalan una regularidad aproximada de 1 mes (30/31 días).	4	14,3%
Tipo 3	Estudiantes que indican una regularidad aproximada de 7 días.	16	57,1%
Tipo 4	Estudiantes que señalan una regularidad aproximada de 23 días.	4	14,3%
Tipo 5	Estudiantes que no indican valor numérico para la regularidad.	2	7,1%

En la clasificación tipo 3 se toman en consideración las respuestas que se aproximan a 7 días, 1 semana – 6/8 días, así como aquellas que dan el número exacto de días (7).

De acuerdo con los resultados y análisis de las preguntas 4 y 5 (a, b) de la tarea 2, la tabla 20 muestra que el 78,6% de los estudiantes indica acertadamente las fechas para la cosecha de granos de café para el primer trimestre, es decir la información dada en el calendario inicial de la tarea 1 (situación 1). Lo anterior, deja ver que las dificultades presentadas por los jóvenes en la elaboración del calendario lunar para el segundo trimestre del 2014 inciden directamente en la determinación de las fechas del segundo trimestre para las cosechas de granos de café. Es importante resaltar, que el único equipo de estudiantes que realiza adecuadamente el calendario lunar del segundo trimestre (tabla 14, clasificación tipo 1) además de completar correctamente la tabla 5a (tarea 2) y determinar la forma de predecir las fechas y fases lunares del segundo semestre (tabla 17, clasificación tipo 1), logran dar las fechas para las cosechas de granos de café durante todo el primer semestre del 2014; lo anterior tomando en cuenta la duración del mes sinódico (periodo).

En cuanto a la pregunta b se puede establecer la identificación de la regularidad con la duración en días, 7 aproximadamente, de la cosecha de granos de café. En este sentido, la mayoría de los estudiantes continúa interpretando (57,1%, tabla 21) el tiempo transcurrido entre el cuarto menguante y la luna nueva como una regularidad periódica, lo que resulta inadecuado en virtud de los argumentos expuestos en el análisis de la pregunta 6 (tarea 2, situación 2). De este modo, se puede concluir que la acepción de periodo que poseen los estudiantes en general está referida a un uso social o cotidiano, que lo vincula como un “espacio” de tiempo durante el cual se desarrolla un evento (acontecimiento) o una fase de cualquier fenómeno.

Los estudiantes interpretan el periodo de las cosechas de granos de café como una semana, no logrando identificar este tiempo, que se corresponde con una fase lunar, como una de las tareas por las cuales pasa el proceso de cultivo del café. Al formular la pregunta se esperaba el señalamiento del mes sinódico o tiempo transcurrido entre el inicio del cuarto menguante y el inicio del siguiente cuarto menguante, como periodo, dado que el texto hacía énfasis en la temporada lunar pertinente para cosechar los granos de café, la cual se presenta cada 29 días aproximadamente. Es decir, no comprenden que el desarrollo de la caficultura es un fenómeno cíclico, caracterizado por etapas que se asimilan con las diferentes fases lunares.

Solo uno de los grupos realiza dos señalamientos adecuados para la regularidad de las cosechas de granos de café, el primero relacionado con el periodo (mes sinódico) y el segundo con la duración de esta tarea dentro del proceso de siembra, cultivo y producción del café. Al

dialogar con los integrantes de este equipo, especifican que cada mes se pueden cosechar granos de café, pero que hay un tiempo limitado por una fase lunar para esta tarea. La argumentación de estos estudiantes deja claro que diferencian el periodo del fenómeno y lo que dura esta fase específica.

Cabe resaltar que 4 estudiantes (clasificación tipo 2, tabla 21) señalan como periodo 1 mes aproximadamente, de lo que se puede inferir no solo una interpretación adecuada del texto, sino también una noción de este concepto ligada al transcurso de un intervalo de tiempo regular entre el inicio de una cosecha y el inicio de la siguiente cosecha de granos de café. En este orden de ideas, algunos grupos (clasificación tipo 4, tabla 21) indican aproximadamente 23 días, respuesta a partir de la cual se puede deducir el periodo como el intervalo de tiempo transcurrido entre la finalización de una cosecha y el inicio de la siguiente, excluyendo la fase o etapa que dura cada cosecha.

Finalmente, hay un grupo de estudiantes que no indica un valor numérico (tipo 5, tabla 21) pero especifican que estos periodos de tiempo se dan al final de mes y la regularidad se aproxima; esta respuesta implícitamente conlleva a la identificación del mes sinódico como periodo para la cosecha de granos de café, en tanto se relaciona con los días del mes donde la luna va de la fase de cuarto menguante hacia la fase de luna nueva (ver respuesta a continuación).

b) Estos periodos de tiempo se dan usualmente a final de mes.
La regularidad de los días no suelen ser los mismos pero si son cercanos, sin mucha diferencia.

2. Caracterice de acuerdo a las actividades realizadas en las tareas anteriores un fenómeno periódico.

Tabla 22. Tipos de respuestas $P_2T_3(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que caracterizan un fenómeno periódico como un suceso o evento que ocurre (constantemente) cada cierta cantidad de tiempo determinado pero no exacto (aproximado).	8	28,6%
Tipo 2	Estudiantes que caracterizan un fenómeno periódico como aquel que ocurre constantemente con un tiempo determinado. La descripción se limita al fenómeno dado desde la duración del mes sinódico.	6	21,4%
Tipo 3	Estudiantes que caracterizan un fenómeno periódico por un tiempo o regularidad transcurrido (ocurre constantemente). La descripción se limita al fenómeno dado desde la duración de cada fase lunar.	8	28,6%
Tipo 4	Estudiantes que caracterizan un fenómeno periódico como un movimiento regularmente repetitivo.	2	7,1%
Tipo 5	Estudiantes que no caracterizan un fenómeno periódico o su caracterización es errónea.	4	14,3%

El análisis de la tabla 22 evidencia que la descripción de los estudiantes (50%) al caracterizar un fenómeno periódico sigue ligada al contexto de la situación, las fases lunares, ubicándolos en el nivel situacional dentro del enfoque de la EMR (clasificaciones tipo 2 y tipo 3). La identificación de un fenómeno periódico (tipo 3, tabla 22) con la regularidad transcurrida de 7 días entre las fases lunares es muestra de la persistencia de los estudiantes en asignar el periodo de un fenómeno a cualquier regularidad que se presente dentro del mismo, como fue mencionado con anterioridad (pregunta 6, tarea 2). Contrario a la respuesta tipo 2, donde los jóvenes realizan la descripción del fenómeno periódico desde la duración del mes sinódico, es decir el periodo para las fases de la luna.

Se puede señalar también, que un 28,6% (tipo 1, tabla 22) logra caracterizar un fenómeno periódico independiente del contexto de la situación. Asimismo, las respuestas de los alumnos (clasificaciones tipo 1, tipo 2 y tipo 3) involucran la frase “ocurrencia constante” del evento o suceso cada cierto tiempo, expresión a la que se dio claridad desde la plenaria donde los estudiantes manifestaron entenderla como que el suceso no se detiene “siempre se da”, más no a la igualdad (no variación) del fenómeno en sí, es decir que se repite con las mismas características.

3. a. Clasifique los siguientes fenómenos en periódicos o no periódicos e indique el ¿por qué?

- Estaciones del año.
- Movimiento telúrico (Temblor).
- El día y la noche.
- Funcionamiento de un semáforo.
- Los latidos del corazón.

Tabla 23. Tipos de respuestas $P_{3a}T_3(S_1)$

Clasificación	Respuesta	Justificación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que clasifican como periódicos los fenómenos: estaciones del año, el día y la noche, funcionamiento de un semáforo y los latidos del corazón. No periódico: movimiento telúrico (temblor).	Los fenómenos periódicos se repiten o transcurren en un tiempo determinado, están definidos, establecidos o programados (una vez terminados vuelven a empezar). Los fenómenos no periódicos pueden suceder en cualquier momento (inesperados), por ende no se pueden predecir.	8	28,5%
		Los fenómenos periódicos son constantes (frecuentes), siempre se presentan (perciben) en el diario vivir. Los fenómenos no periódicos se dan muy pocas veces (baja frecuencia).	4	14,3%
		Los fenómenos periódicos se pueden predecir, hay un cambio y movimiento constante.	2	7,1%
		Los fenómenos no periódicos no se pueden predecir, no tienen un horario o ciclo establecido.		
		Los fenómenos periódicos cambian en un determinado tiempo y son constantes. No hay explicación para los no periódicos.	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que clasifican como periódicos los fenómenos: estaciones del año, el día y la noche y funcionamiento de un semáforo. No periódicos: movimiento telúrico (temblor) y los latidos del corazón.	Los fenómenos periódicos se repiten con una duración aproximada (regularidad), por tanto se puede predecir su inicio (cuándo van a ocurrir). Los fenómenos no periódicos son espontáneos y no se puede predecir su ocurrencia.	6	21,4%
		No dan razones para sus respuestas.	2	7,1%
Tipo 3	Estudiantes que clasifican como periódicos los fenómenos: el día y la noche, funcionamiento de un semáforo y los latidos del corazón. No periódicos: movimiento telúrico (temblor) y las estaciones del año.	Los fenómenos periódicos son sincronizados, se dan en un lapso de tiempo y son constantes. Los fenómenos no periódicos no presentan regularidad.	4	14,3%

b. Indique el periodo en los fenómenos clasificados como periódicos. Escriba una reflexión al respecto.

Tabla 24. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
Estaciones del año	12 meses (1 año).	2	7,1%
	9 meses.	4	14,3%
	4 meses.	2	7,1%
	3 meses.	16	57,1%

La cantidad de estudiantes en la tabla 24. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$ es de 24 dado que 4 estudiantes clasifican como no periódicas las estaciones del año.

Tabla 25. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
Día y noche	24 horas.	8	28,6%
	12 horas.	18	64,3%
	No responden.	2	7,1%

Tabla 26. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
Funcionamiento de un semáforo	$1 - 1\frac{1}{2}$ minutos	12	42,9%
	3 minutos.	2	7,1%
	Menos de 1 minuto (30 – 50 segundos).	6	21,4%
	No responden.	8	28,6%

Tabla 27. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
Latidos del corazón	1 segundo.	14	50%
	No responden.	6	21,4%

La cantidad de estudiantes en la tabla 27. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$ es de 20 dado que 8 estudiantes clasifican como no periódico los latidos del corazón.

Tabla 28. Tipos de respuestas $P_{3b}T_3(S_1)$

Clasificación	Número de estudiantes	Reflexión	Porcentaje
Estudiantes que escriben reflexión.	8	Siempre un fenómeno periódico se repite cada determinado tiempo. Los fenómenos periódicos cuentan con un periodo programado, los que no son periódicos son espontáneos.	28,6%
		Los fenómenos catalogados como periódicos se deben a que tienen un ciclo, horario y se pueden predecir. Los periodos de tiempo se pueden presentar en cualquier momento de la vida cotidiana.	
Estudiantes que no escriben reflexión.	20	No hay reflexión.	71,4%

La tabla 23, muestra que 16 de los 28 estudiantes clasifican de manera adecuada como periódicos los fenómenos: estaciones del año, el día y la noche, funcionamiento de un semáforo y los latidos del corazón y no periódico: movimiento telúrico (temblor). Sus argumentos para esta clasificación, de forma general, giran alrededor de catalogar los periódicos como fenómenos que se repiten, se pueden predecir y están definidos; en cuanto a los no periódicos, estas descripciones aluden fundamentalmente a que estos no se pueden predecir, suceden de manera espontánea o no presentan una regularidad. Lo anterior es válido también para aquellas respuestas tipificadas como 2 y 3, donde salvo un 7,1% que no indica el porqué de su clasificación, se observa que las justificaciones de los jóvenes giran en torno a los argumentos ya mencionados así no haya un reconocimiento de las estaciones del año y los latidos del corazón como fenómenos periódicos. De nuevo la palabra “constante” se asocia a que el fenómeno siempre ocurre, no se detiene.

Es conveniente señalar, en el marco de la concepción de periodo identificada en los estudiantes en análisis anteriores y que se asocia con un “espacio” de tiempo durante el cual se lleva a cabo un acontecimiento o una etapa de cualquier fenómeno, que las expresiones los fenómenos periódicos (tabla 23):

- Transcurren en un tiempo determinado...
- Se repiten con una duración aproximada (regularidad), por tanto se puede predecir su inicio (cuándo van a ocurrir).

- Son sincronizados, se dan en un lapso de tiempo...

Adquieren diferente sentido para los estudiantes. El que transcurran en un lapso de tiempo determinado se puede asociar a la luz de los resultados anteriores con la duración de una de las etapas del fenómeno ya sean las fases lunares o la cosecha de granos de café, o con el periodo del fenómeno (mes sinódico). Asimismo, el que se repitan con una duración aproximada (regularidad) puede hacer referencia nuevamente al periodo o al tiempo de cada una de las fases que atraviesa el fenómeno.

En cuanto a la parte b, la determinación del periodo de los fenómenos indicado, se ve que para las estaciones del año (57,1%, tabla 24) y el día y la noche (64,3%, tabla 25) predomina para el primer fenómeno un periodo de 3 meses y para el segundo de 12 horas. Lo que evidencia nuevamente que para los estudiantes, en general, el periodo de un fenómeno no indica el tiempo transcurrido para que este se repita bajo las mismas condiciones, sino que está relacionado con la duración de una de las fases que atraviesa el fenómeno. Estas respuestas confirman la ambigüedad de las expresiones usadas por los estudiantes al momento de clasificar un fenómeno como periódico (ver párrafo anterior).

Durante la plenaria al interactuar e indagar con los estudiantes sobre estos registros por medio de la pregunta: ¿Cada cuánto se repite una estación?, la respuesta es acertada, cada año, lo que permite hacer claridad entre el periodo del fenómeno de las estaciones del año y la duración aproximada de cada una de ellas. Esto se debió quizá a la forma como se estructuró la pregunta, relacionándola con el intervalo de tiempo que transcurre para que vuelva independiente de cual sea, a presentarse la estación.

Este dialogo abrió el debate sobre el periodo del día y la noche, donde se hizo énfasis en el intervalo de tiempo transcurrido entre amanecer – amanecer y ocaso – ocaso, sin embargo algunos jóvenes continúan manifestando inquietudes con relación al periodo y la duración aproximada de cada estación (3 meses); así como a las 12 horas que transcurren desde que sale el sol hasta que se oculta, lo que confirma la acepción de periodo mencionada en el párrafo anterior.

Ante esta dificultad, de concebir el periodo de las estaciones y del día y la noche como 1 año y 24 horas respectivamente, se hizo necesario dentro de la socialización final generar la discusión alrededor de un fenómeno cotidiano para la mayoría de estudiantes²⁹ del grado: el ciclo

²⁹ De los 28 estudiantes, 25 son mujeres.

menstrual. Al preguntar: ¿Cuál sería el periodo en días aproximados de un ciclo menstrual? manifestaron que 28 días, al margen de las irregularidades por cambios hormonales, no obstante expresan al mismo tiempo que el ciclo menstrual dura aproximadamente entre 5 y 6 días. Esta última consideración hace que algunos estudiantes relacionen 1 semana (aproximada) como periodo de este fenómeno.

De esta manera, se hace necesario aclarar que la duración del ciclo menstrual, es decir el tiempo transcurrido entre el primer día del ciclo (primer día de la menstruación) y el primer día del siguiente ciclo (primer día de la menstruación) es aproximadamente 28 días (periodo) mientras que 1 semana corresponde a la duración de una de las fases del ciclo, la menstruación. Lo que se puede explicar desde el uso cotidiano dado a la palabra periodo en este contexto, ya que esta se asocia tanto al tiempo que dura la menstruación (días de sangrado) como al mismo ciclo.

Así, la plenaria se orientó por medio de afirmaciones como: “si el periodo de las estaciones es 3 meses y el día y la noche 12 horas, significa que cada tres meses se repite una estación y cada 12 horas sale el sol, por ende si el tiempo que dura el ciclo menstrual es de una semana entonces al finalizar cada semana iniciaría nuevamente el ciclo”. Esta última consideración al ser tan natural a la cotidianidad de los estudiantes, les permite reflexionar y afirmar la falsedad de las afirmaciones, de este modo fue posible llevarlos a un nivel de comprensión más elevado (principio de interacción) con respecto al concepto de periodo de un fenómeno al margen de la naturaleza del mismo.³⁰

Para el funcionamiento de un semáforo, no se presenta esta dificultad, dado que el mayor porcentaje de estudiantes 42,9% (tabla 26) indica que de $1 - 1\frac{1}{2}$ minutos es el tiempo que tarda (tiempo de espera) aproximadamente un semáforo en pasar de rojo → anaranjado → verde → rojo, lo que también se puede inferir de los estudiantes que dan como respuesta 3 minutos. Por el contrario, aquellos que determinan un periodo menor a un minuto, de 30 a 50 segundos, están relacionando este con el cambio entre cada uno de los colores que componen el semáforo. Para los latidos del corazón el 50% (tabla 27) asigna como periodo 1 segundo referido al hecho de que este musculo “late” sin detenerse, es decir es constante. Estos señalamientos toman como base los registros de los estudiantes y la socialización llevada a cabo al final de la situación 1.

³⁰ Durante la plenaria también se abordó la discusión con respecto al periodo de las cosechas de granos de café (pregunta 1b, tarea 3) y se logró dar claridad sobre: periodo del fenómeno y duración de la fase dentro cultivo de café.

La reflexión realizada solo por 8 estudiantes confirma que las razones de la escogencia de los fenómenos periódicos se fundamentan en: se repiten en un determinado tiempo, pueden ser predecidos y a su seguridad de ocurrencia independiente si son naturales como las estaciones, el día y noche, los latidos del corazón o artificiales como el funcionamiento de un semáforo.

4. Identifique el periodo o regularidad aproximada de:

- a. Mes sinódico.
- b. Mes sidéreo.
- c. Cosecha de granos de café.

Tabla 29. Tipos de respuestas $P_{4a}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
Mes sinódico	29 días aproximadamente.	26	92,9%
	No responden.	2	7,1%

Tabla 30. Tipos de respuestas $P_{4b}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
Mes sidéreo	27 días aproximadamente.	26	92,9%
	No responden.	2	7,1%

Tabla 31. Tipos de respuestas $P_{4c}T_3(S_1)$

Fenómeno	Periodo	Número de estudiantes	Porcentaje
	1 mes.	2	7,1%
Cosecha de granos de café	23 días aproximadamente.	4	14,3%
	7 días aproximadamente	20	71,4%
	No responden.	2	7,1%

La determinación del periodo para los meses sinódico y sidéreo, como indican las tablas 29 y 30, no reviste dificultad para los estudiantes, por ser explícitos en el texto dado. No obstante, para la cosecha de los granos de café, el 71,4% continúa señalando el periodo como el tiempo de duración de la cosecha, es decir la fase transcurrida entre el cuarto menguante y la luna nueva.

Solamente uno de los equipos determina adecuadamente 1 mes como periodo, tiempo que se aproxima al mes sinódico (de cuarto menguante a cuarto menguante). Estos resultados son coherentes con la tabla 21 (pregunta 1b, tarea 3), donde la mayor cantidad de estudiantes señala

la regularidad (periodo) como 7 días. Es decir se ratifica la concepción de periodo como una duración determinada de tiempo, más no como la duración determinada de tiempo que permite a un fenómeno repetirse con las mismas características.

Los estudiantes que señalan 23 días aproximadamente, consideran el periodo como el tiempo transcurrido entre la finalización de la cosecha, fase de luna nueva y el inicio de la nueva cosecha, cuarto menguante, más no como el tiempo entre el inicio del cuarto menguante y su fase similar.

5. De ejemplos, aparte de los ya mencionados, de algunos fenómenos que tienen un periodo o regularidad en su comportamiento.

Tabla 32. Tipos de respuestas $P_5T_3(S_1)$

Fenómeno	Número de estudiantes
Horarios (programas de televisión, de trabajo, de alimentación, dormir)	16
Movimiento de las manecillas del reloj	14
Año escolar/Horario escolar	10
Ciclo menstrual	8
Fechas especiales (cumpleaños – aniversarios)	6
Cometa Halley/Eclipses	6
Embarazo (Periodo de gestación)	6
Rotación/Traslación de la tierra	4
Año bisiesto	2
Fenómeno del Niño	2
Partido de fútbol	2
Fotosíntesis	2
Encendido de las luces de los postes	2
Funcionamiento de un microondas	2
Fenómenos ya mencionados	6
No responden	4

De la variedad de fenómenos señalados se puede inferir que los estudiantes comprenden que es un fenómeno periódico, en tanto la mayoría muestra un patrón regular de tiempo (periodo) en su comportamiento. La determinación de estos fenómenos periódicos, naturales y no naturales, obedece a la descripción llevada a cabo por los jóvenes en la tabla 23 donde este tipo de fenómenos son frecuentes, siempre suceden, se pueden predecir, transcurren en un determinado tiempo, se repiten, etc. Sin embargo, la ambigüedad generada frente a un significado “social” y “matemático” del término periodo, así como la discusión generada alrededor del ciclo menstrual deja ver una identificación inadecuada de algunos de estos

fenómenos como periódicos, esto se percibe en la afirmación de 6 estudiantes del embarazo como fenómeno de naturaleza periódica.

La argumentación de los estudiantes se basa en la duración aproximada de 9 meses en los seres humanos, lo que los conlleva a pensar que este intervalo de tiempo o periodo de gestación como comúnmente se denomina, se identifica con el periodo del fenómeno. Al respecto se aclara que el embarazo pese a tener una regularidad de tiempo (duración aproximada) no es periódico dado que al transcurrir los 9 meses (lo que ellos determinan como periodo) no se inicia una nueva gestación. Se destaca así, la relevancia de los fenómenos periódicos en tanto se puede predecir su comportamiento, tal como sucede con las fases lunares, las cosechas de granos de café, el ciclo menstrual, etc.

Al finalizar la situación 1 se encuentra que frente a los desempeños esperados (tabla 3) los estudiantes logran reconocer las fases de la luna y la cosecha de granos de café como fenómenos periódicos. Lo anterior se deduce a partir del análisis de las diferentes tareas donde los jóvenes identifican patrones y regularidades asociadas tanto a la duración de los meses sinódico y sidéreo, como a cada fase lunar (7 días aproximadamente). Sin embargo, se puede afirmar que en general no hay un reconocimiento o nivel de comprensión del periodo como un patrón regular de tiempo aproximado que permite a un fenómeno volver a su punto inicial, es decir que se repita. En este sentido, la respuesta a la pregunta 6b (tarea 2) donde se le pide a los estudiantes denominar la regularidad relacionada con días transcurridos entre cada fase lunar aparece la frase periodo de tiempo ligada a la duración (7 días) para el cambio de fase lunar.

Esta concepción de periodo condiciona las respuestas de los estudiantes, en tanto al cuestionárseles sobre el periodo de: la cosecha de granos de café (preguntas 1b y 3b, tarea 3), las estaciones del año (pregunta 3b, tarea 3) y el día y la noche (pregunta 3b, tarea 3), estas respuestas giran en torno al intervalo de duración de las fases que caracterizan cada fenómeno.

A partir de los anteriores señalamientos, se puede asegurar que los estudiantes comprenden un fenómeno periódico, pero su concepción de periodo se limita a un uso “social” o “cotidiano” de la palabra donde se vincula con la duración de un acontecimiento o la duración de una de las fases de un ciclo. En este sentido, la interacción con los estudiantes en la plenaria permitió contrastar, confrontar e intercambiar estrategias de solución y respuestas que abrieron el debate acerca del periodo de un fenómeno, lo que contribuyó a la reflexión sobre lo llevado a

cabo por cada equipo y por ende a aumentar el nivel de matematización de los jóvenes (Enfoque de la EMR).

Por otro lado, en cuanto al uso de modelos, es decir las herramientas para representar y organizar la situación surge el conteo como estrategia para la matematización de la situación problemática. Este conteo se relaciona con la elaboración del calendario lunar del segundo trimestre de 2014 y la predicción de las fechas tanto de las fases lunares del segundo semestre de 2014 como de la cosecha de los granos de café. A través de la plenaria se pudieron establecer dos procedimientos: el primero iniciando el conteo desde la última fecha de cada fase lunar (estudiantes que consideran 29 días) y el segundo contando a partir de la última fase lunar (estudiantes que consideran 7 días). El uso del conteo y el hecho de que para la mayoría de estudiantes la caracterización de un fenómeno periódico estuviera referida al contexto de las fases lunares, es coherente con el nivel situacional propuesto para esta primera situación desde la EMR. El desarrollo de la situación, también permitió identificar otros aspectos que surgen en los estudiantes como son: el uso de estructuras aditivas y multiplicativas (operaciones de multiplicación y división), notación mixta y decimal de un racional y el método de ensayo y error.

La plenaria deja claro que partir de situaciones cotidianas o realistas, como lo proponen los Lineamientos (1998), los Estándares (2006) y el enfoque de la EMR constituye un rompimiento con la manera tradicional de abordar la actividad matemática en el aula, como lo manifiesta una estudiante: “iniciar de esta manera es más analítica, en tanto puedo dar el porqué de mi respuesta, como es el procedimiento, ya que uno mismo lo analiza y no se limita a la presentación de fórmulas, sin saber de dónde salen”.

3.4.2 Resultados y Análisis de Resultados de la Situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas

Un deportista de alto rendimiento realiza una práctica en una escalera partiendo de un lugar A (ubicado en la base de la escalera) hacia la cima, ubicada en un lugar B a 6,9 metros de altura y hace el recorrido en 3 segundos. Regresa a su punto de partida, pero al regresar decide ir nuevamente a B y continúa esta trayectoria de A a B . La tabla 1 muestra los valores del tiempo

(t) en segundos de cada desplazamiento del deportista y la altura (h) en metros de la posición del deportista:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h(m)$	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0

Tabla 1. Valores del tiempo y altura en metros de la posición del deportista.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto y la tabla anterior, solucione las siguientes actividades:

1. Bosqueje un gráfico de la situación.

Tabla 33. Tipos de respuestas $P_1T_1(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que representan la situación por medio de una esquematización de la realidad (dibujo de personas, escaleras).	16	57,1%
Tipo 2	Estudiantes que representan la situación por medio de una esquematización de la realidad (dibujo del deportista, escaleras) y de la representación en el plano cartesiano de la tabla 1.	4	14,3%
Tipo 3	Estudiantes que bosquejan la situación combinando la representación cartesiana (tabla 1) y de la esquematización de la realidad (dibujo del deportista, escaleras).	6	21,4%
Tipo 4	Estudiantes que no realizan representación.	2	7,1%

Al iniciar esta tarea los estudiantes manifiestan inquietud frente a la expresión bosquejo gráfico de la situación, en tanto no tenían claridad sobre la actividad a realizar, de esta manera se orientó hacia la visualización del fenómeno (movimiento del deportista) y que intentaran plasmarlo haciendo uso de cualquier tipo de representación gráfica, quedando a criterio de cada equipo.

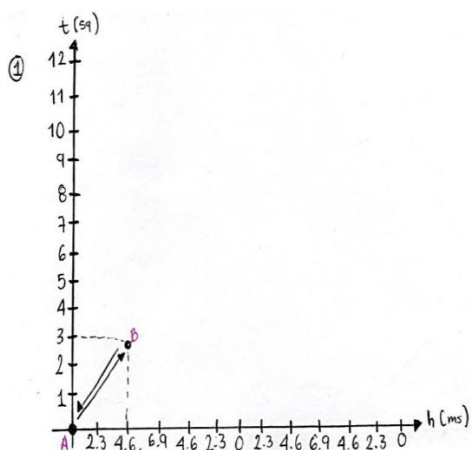
La tabla 33 muestra que un alto porcentaje de estudiantes (57,1%) del grupo realiza un bosquejo gráfico de la situación sin involucrar representaciones cartesianas, sino que buscan expresar de forma esquemática una situación realista, un modelo de la realidad, entendido este

como una herramienta para representar el contexto de la situación problemática, es decir como un intermediario para idealizar la situación planteada (Freudenthal, 1991, p. 34, citado por Bressan y Gallego, 2011, p. 4). Dos de los equipos (clasificación tipo 2) además efectúan junto con la esquematización, la gráfica en el plano cartesiano de los valores dados en la tabla 1, lo que deja ver que dentro de las estrategias que surgen en los estudiantes para bosquejar la situación aparecen modelos propios de la matemática formal.

Se puede afirmar que la situación propuesta es realista, desde el enfoque de la EMR, dado que se presenta razonable o puede ser imaginada por todos los estudiantes, desde el fenómeno físico involucrado (movimiento del deportista), como lo establecen (Freudenthal, 1991; Panhuizen, 1996; Streefland, 1991; citados por Bressan y Gallego, 2011, p. 3). En este sentido, el planteamiento de la situación en lenguaje verbal, retórico y por medio de la representación tabular brinda un contexto que permite a algunos estudiantes hacer uso de métodos matemáticos desde su propia experiencia (Dekker y otros, 2001, citados por Bressan y Gallego, 2011, p. 3).

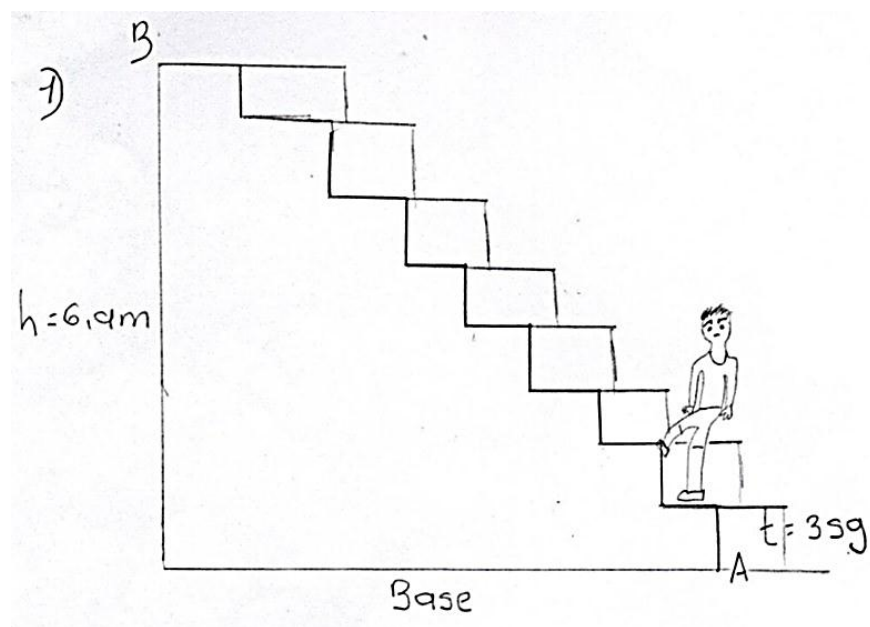
Particularmente, una pareja de estudiantes (clasificación tipo 3) realiza una representación en el primer cuadrante del plano cartesiano que muestra una dificultad en la asociación de las magnitudes: tiempo y altura con los ejes de coordenadas, a lo que subyace la noción de variable independiente y dependiente. Además esta representación tiene un inadecuado manejo numérico de la escala sobre el eje nombrado $h(m)$, de lo que se puede inferir que los jóvenes extraen los valores de la tabla y los asignan en el orden dado sobre el eje³¹. No relacionan la igualdad de la altura para diferentes valores del tiempo, así como la ubicación de la componente $x = 0$ de la pareja ordenada $(0,0)$ en el plano.

³¹ Esta consideración de “trasladar” los valores en el orden establecido en la tabla al eje de coordenadas, es válida para los valores asociados al tiempo.

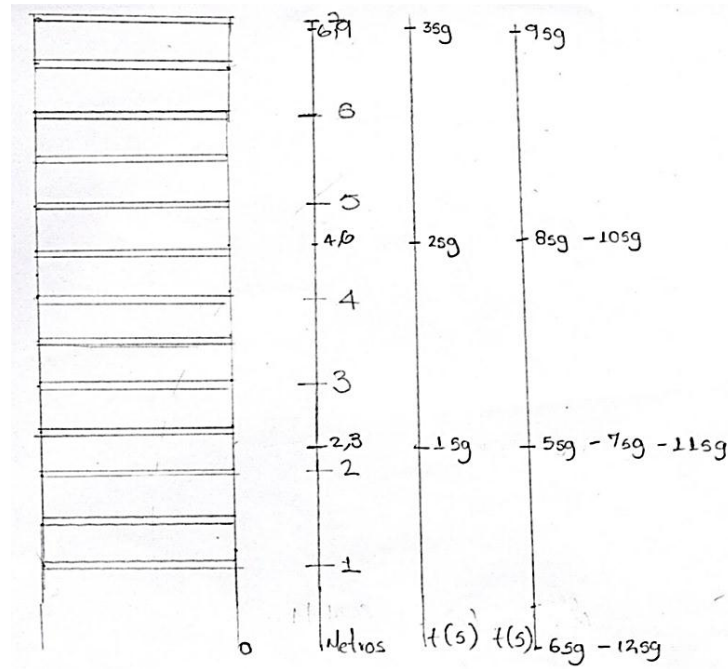


Algunos de los gráficos bosquejados por los estudiantes son:

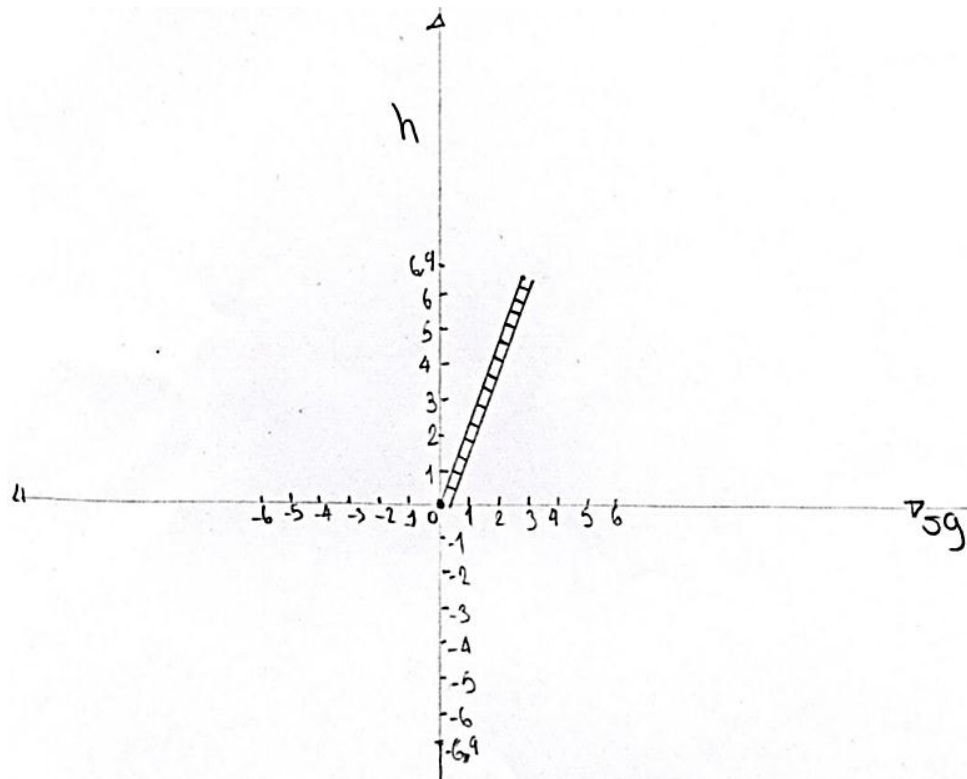
Evidencias de respuesta $P_1T_1(S_2)$ Tipo 1



Evidencias de respuesta $P_1 T_1(S_2)$ Tipo 2



Evidencias de respuesta $P_1 T_1(S_2)$ Tipo 3



2. Escriba el significado que tiene el punto (0,0) en la relación entre tiempo y altura (posición en metros del deportista).

Tabla 34. Tipos de respuestas $P_2T_1(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	El punto (0,0) indica que el deportista se encuentra en reposo, ya que ese es su posición inicial (punto de partida).	8	28,6%
Tipo 2	El punto (0,0) señala que el deportista se encuentra en reposo.	18	64,3%
Tipo 3	El punto (0,0) marca el punto de inicio de donde parte el deportista.	2	7,1%

La tabla 34 evidencia que el mayor porcentaje de estudiantes (64,3%) reconoce el punto (0,0) en el contexto de la situación, es decir como estado de reposo del deportista, no ha iniciado su desplazamiento. Sin embargo de algunas de las respuestas dadas por los jóvenes se deduce que además de interpretar el punto (0,0) desde la caracterización del fenómeno, estado de reposo, realizan una identificación del origen del sistema de coordenadas con la base de la escalera (punto de partida), como se muestra a continuación:

Evidencias de respuesta $P_2T_1(S_2)$ Tipo 1

2° En el plano cartesiano, el punto (0,0) es la aquella coordenada neutra en la cual x y y equivalen 0. En el caso, se puede observar que en el punto A el deportista se encuentra en reposo, o neutro; por tanto este sería el punto (0,0)

Evidencias de respuesta $P_2T_1(S_2)$ Tipo 2

2.) la relación que tiene el punto (0,0) es que en la posición inicial que se encuentra el deportista son 0s en 0m por que en ese momento el deportista apenas va a empezar a desplazarse empezando de la base de la escalera.

Evidencias de respuesta $P_2T_1(S_2)$ Tipo 3

2) El significado que tiene el punto (a,c) en relación entre el tiempo y la altura es que el deportista se encuentra en el punto A. (Punto de partida), y no está en movimiento se puede decir ¡QUIETO!

Para finalizar, los estudiantes dentro de sus explicaciones involucran términos como “cuerpo” en reposo o “posición inicial”, terminología usada en el área de Ciencias Naturales (Física) dentro del estudio de los movimientos. Lo anterior indica que los jóvenes abordan la situación no solo con herramientas matemáticas sino también de otras disciplinas provenientes de su propia experiencia, por tanto la tarea 1 responde al principio de interconexión del enfoque de la EMR donde se aboga por una integración curricular que permita diferentes maneras de matematizar una situación.

3. Indique el número de metros que recorre el deportista cada segundo.

Tabla 35. Tipos de respuestas $P_3T_1(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que indican 2,3 metros por segundo.	28	100%

La respuesta a la pregunta 3, confirma que el 100% de los estudiantes comprenden que el deportista, independiente si sube o baja por la escalera, recorre 2,3 metros por cada segundo, es decir hay un reconocimiento adecuado de la relación funcional entre el tiempo dado en segundos y la altura en metros a partir de la representación tabular; por tanto esta interpretación de la dependencia entre las variables tiempo y altura expresada en una tabla de valores se constituye como lo afirman los Estándares (2006, p. 68) en uno de los medios que contribuye al desarrollo del pensamiento variacional en la escuela. Lo anterior se puede verificar en el siguiente texto escrito por uno de los equipos al cual se aplicó la situación:

3^o Entre Cada Segundo Hay 2,3m de diferencia
 Por ello en el Primer segundo recorre 2,3m, en
 el segundo se aumento 2,3m más. Por eso recorre
 4,6m y en el tercero Pasa Igual y recorre 6,9m
 Pero al llegar a los 4sg disminuye 2,3m o sea quiere
 decir que está bajando, y continúa así Hasta llegar
 al Punto de Inicio (0,0) a los 6sg. Allí vuelve a subir
 Hasta llegar a los 9sg recorriendo la Misma distancia
 que en el Primer segmento de 3sg, luego de los 10sg
 a los 12sg Pasa lo mismo que en el segmento
 de 4sg a 6sg

Es evidente la descripción de un patrón para los tramos de ascenso y descenso del deportista, al establecer el mismo comportamiento, igual distancia recorrida, para diferentes intervalos de tiempo y la identificación de una dependencia periódica de la altura con respecto al tiempo; es decir que cada 6 segundos llega al punto de partida. Si bien en la respuesta hay una imprecisión con respecto al punto de llegada (0,0) después del primer ascenso, pues matemáticamente correspondería a la pareja ordenada (6,0), es pertinente mencionar que este equipo asocia en la pregunta 2 de esta misma tarea el punto A (base de la escalera) con el punto (0,0). Por tanto se puede decir que están entendiendo el regreso del deportista a la base de la escalera y no desde la interpretación cartesiana de la situación (regreso al origen del sistema de coordenadas).

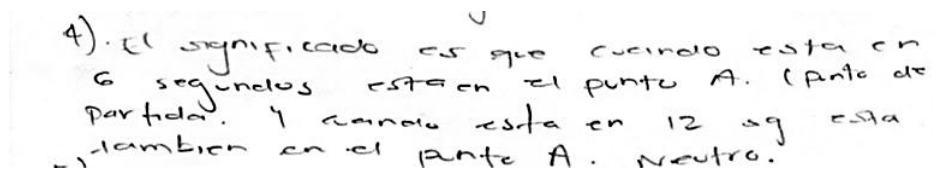
4. Explique el significado de las parejas ordenadas (6,0) y (12,0).

Tabla 36. Tipos de respuestas $P_4T_1(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Las parejas ordenadas (6,0) y (12,0) significan que el deportista retorna a su posición inicial, después de haber transcurrido un determinado tiempo (6 y 12 segundos).	18	64,3%
Tipo 2	Las parejas ordenadas (6,0) y (12,0) significan que el deportista regresa a su punto de inicio para comenzar de nuevo su movimiento (constante).	6	21,4%
Tipo 3	Las parejas ordenadas (6,0) y (12,0) significan que han transcurrido 6 y 12 segundos y el deportista no ha recorrido ninguna altura (distancia en metros).	4	14,3%

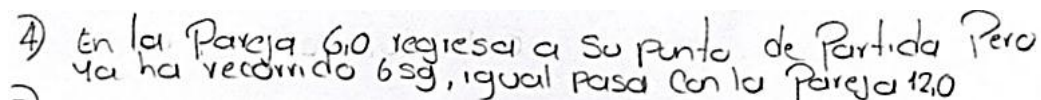
De la tipificación de respuestas a la pregunta 4, se puede inferir que el 64,3 % de los estudiantes interpreta las parejas ordenadas (6,0) y (12,0) desde el fenómeno (movimiento del deportista) como una variación de la posición (altura) del deportista hasta regresar a su punto de partida mientras transcurre un intervalo de tiempo de 6 segundos, de este modo los jóvenes identifican no solo una dependencia funcional entre la altura y el tiempo, sino una variación periódica entre sus valores al asociar la misma posición cada 6 segundos. Por medio de la interacción con los diferentes equipos durante el desarrollo de la tarea se pudo establecer en su totalidad el número de estudiantes referenciados en la clasificación tipo 1 (tabla 36), pues solo 10 de estos registran de forma escrita en la hoja de solución el intervalo de tiempo de 6 segundos; los otros 8 lo expresan de manera verbal al discutir³² con ellos la justificación de la solución dada. El interactuar con los jóvenes permite determinar además que las frases la posición inicial (punto de inicio) mencionada por los estudiantes se refiere a la base de la escalera (punto de partida) y no al origen del sistema de coordenadas. Estos estudiantes logran deducir que el deportista recorre una distancia cada 6 segundos, así regrese a la base de la escalera.

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 1



4). El significado es que cuando esta en 6 segundos esta en el punto A. (punto de partida). Y cuando esta en 12 sg esta tambien en el punto A. neutro.

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 2



4) En la Pareja 6,0 regresa a su punto de Partida Pero ya ha recorrido 6sg, igual pasa con la Pareja 12,0

En este sentido, el 21,4% de estudiantes que no hace referencia explícita al intervalo de tiempo transcurrido, ni escrito ni verbal, caracteriza que el deportista retorna a su punto de partida para continuar con su movimiento constante (subir y bajar la escalera), siendo relevante el reconocimiento por parte de los jóvenes de la repetición del movimiento del deportista transcurrido un intervalo de tiempo de 6 segundos así no lo relacionen.

³² La palabra se usa en el contexto del Principio de Interacción establecido por el enfoque de la EMR.

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 1

1) Significa que llega al punto de partida que no tiene altura pero está en su movimiento Constante.

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 2

4) 12.07
6.0 J Indica que el deportista empieza a regresar al punto de inicio para comenzar de nuevo.

En cuanto a los 4 estudiantes que argumentan que el deportista no ha recorrido ninguna altura (distancia en metros) al cabo de 6 y 12 segundos, se puede establecer que no están tomando en consideración que el deportista al subir y bajar la escalera recorre una distancia de 13,8 metros, es decir confunden los conceptos de desplazamiento y distancia. Lo que difiere de algunas explicaciones dadas por otros equipos donde especifican que el punto de partida (base de la escalera) se encuentra a una altura de 0 metros. A continuación se anexan estos registros:

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 1

4° Cuando el Corredor se encuentra en Las Coordenadas (6,0) y (12,0) quiere decir que en ese momento el deportista volvió a la base de la Escalera o al Punto de Inicio lo que significa que el 6 y el 12 es el tiempo y el 0,0 es la distancia.

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 2

4. Cuando el deportista se encuentra en los puntos (6,0) y (12,0) observamos que el bajo y por lo tanto no tiene metros recorridos.

Se puede observar que las respuestas de los estudiantes, en general, se encuentran mediadas por términos físicos: como trayectoria, desplazamiento, cambios de posición, reposo, posición inicial que no siempre son interpretados adecuadamente en el contexto de la situación como se presenta a continuación:

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 1

④ (6,0) en este punto entra en reposo después de haber recorrido una distancia, o sea que vuelve a su punto de inicio; en (12,0) sucede lo mismo que en el punto anterior recorre una distancia y entra en reposo.

Evidencias de respuesta $P_4T_1(S_2)$ Tipo 2

④ (6,0) El deportista está en 6 sg y llega al punto de inicio que es 0, pero volvió a subir y otra vez a bajar por eso quedó en (12,0) que este caso sería 12 sg que bajó y quedó en reposo en el punto 0

Los estudiantes asocian un estado de reposo al deportista por el hecho de regresar a la base de la escalera. Si bien las respuestas dejan ver que el deportista sube y baja, repitiendo su movimiento de A a B , los jóvenes asumen las parejas ordenadas $(6,0)$ y $(12,0)$ iguales a la pareja ordenada $(0,0)$.

De igual forma sucede, con la respuesta del siguiente equipo donde si bien no hay cambio de posición en el intervalo de 6 segundos, como lo argumentan, el desplazamiento debe ser cero en el mismo intervalo de tiempo ya que el punto de partida y el punto final coinciden.

4) Eso significa que a pasado un tiempo de 6sg pero el deportista se devolvió a su posición original, así que hay desplazamiento pero no cambio de posición

Lo anterior, no descarta el hecho de que los jóvenes intentan matematizar la situación no solo con herramientas propias de la disciplina. Lo que les permite movilizar diferentes conocimientos y estrategias de solución de otras áreas.

5. Determine el tiempo que tarda el deportista en regresar, por primera vez, al punto de partida. Argumente su respuesta.

Tabla 37. Tipos de respuestas $P_5T_1(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Argumentación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	El tiempo que el deportista tarda en regresar por primera vez al punto de partida es 6 segundos.	El deportista tarda 3 segundos para llegar a la cima y tarda otros 3 segundos para regresar al punto inicial.	10	35,7%
		No hay argumentación.	10	35,7%
Tipo 2	El tiempo que el deportista tarda en regresar por primera vez al punto de partida es 4,6 segundos.	No hay argumentación.	4	14,3%
Tipo 3	El tiempo que el deportista tarda en regresar por primera vez al punto de partida es 13,8 ³³ .	Multiplicamos 2,3 por 6, es decir el número metros recorridos por los 6 segundos transcurridos.	4	14,3%

De los 28 estudiantes, 20 reconocen que el tiempo transcurrido para que el deportista regrese por primera vez al punto de partida es 6 segundos. La argumentación realizada solo por 10 estudiantes (tipo 1, tabla 37), gira en torno al reconocimiento de un patrón a partir del texto y/o representación tabular asociado con la regularidad que caracteriza el tiempo para el recorrido de A a B (ascenso) y de B a A (descenso). Así, la identificación, por parte de los jóvenes, de este patrón se relaciona con diversos aspectos ligados a la variación, como son: lo que varía, lo que permanece constante, la dependencia funcional entre variables, etc., ámbitos que contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional. El reconocimiento de esta regularidad para el tiempo de ascenso y descenso, permite a los estudiantes establecer un intervalo regular de tiempo de 6 segundos que se corresponde con el periodo de la situación, como se observa en la siguiente respuesta:

5) Mirando el tiempo que se demora de A a B que son 3sg
 nos imaginamos que de B a A tarda lo mismo
 eso quiere decir que para que el deportista
 regrese a su punto de partida se demora 6sg

De otro lado, la argumentación dada por los estudiantes en la clasificación tipo 3 (tabla 37), pone de manifiesto que sus respuestas no solo están mediadas por lenguaje (terminología)

³³ Los estudiantes no relacionan unidad de tiempo.

propia de las Ciencias Naturales (Física) sino también sus estrategias, es decir el modo de hacer uso de las herramientas con que cuentan para resolver una situación problema. Así, el procedimiento descrito hace referencia al cálculo de la distancia recorrida por el deportista al cabo de 6 segundos, a partir de la expresión $distancia = velocidad \times tiempo = 2,3 \frac{m}{s} \times 6s = 13,8 m$, donde se evidencia confusión con respecto al enunciado de la pregunta y al manejo de las unidades para las magnitudes de tiempo y velocidad.

6. Si el deportista a los 2 segundos se encuentra a una altura de 4.6 metros, explique porque al cabo de 5 segundos su altura es de 2.3 metros.

Tabla 38. Tipos de respuestas $P_6T_1(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	El deportista al cabo de 5 segundos se encuentra a una altura de 2,3 m ya que está descendiendo o devolviéndose (su altura disminuye).	22	78,6%
Tipo 2	El deportista al cabo de 5 segundos está descendiendo a su punto de partida. Su explicación conlleva argumentos inadecuados.	4	14,3%
Tipo 3	Respuesta incoherente.	2	7,1%

El 78,6% de los estudiantes identifica para las variables involucradas en la situación tiempo y altura (posición del deportista) que mayor tiempo transcurrido no implica mayor altura, es decir expresan adecuadamente la dependencia funcional entre las magnitudes al establecer que a los 5 segundos el deportista está descendiendo por la escalera. De este modo, los jóvenes interpretan una variación funcional a partir de un registro de representación tabular, que les permite identificar como argumentan los Lineamientos (1998, p. 98) “elementos básicos” de la situación original, las magnitudes tiempo y altura con las variables, como objetos matemáticos, pero sobre todo las relaciones entre estos objetos, es decir el tipo de variación que caracteriza el movimiento del deportista. Las diferentes herramientas usadas por los estudiantes matemáticas y de otras disciplinas, sus procedimientos, sus hipótesis, sus deducciones, etc., relacionadas con la situación a partir de la cual se originaron (movimiento del deportista) les brindan la posibilidad de sintetizar el problema, ubicándolos en un nivel referencial dentro del principio de niveles del enfoque de la EMR.

Evidencias de respuesta $P_6T_1(S_2)$ Tipo 1

6) Por que el deportista se esta devolviendo, haciendo disminuir el numero de metros, pero aumentando el numero de tiempo

Evidencias de respuesta $P_6T_1(S_2)$ Tipo 2

6) por que el deportista sube en 3 segundos a una altura de 6.9 metros y al llegar a este punto se regresa y al hacerlo su altura comienza a disminuir. es por eso que a los 5 segundos se encuentra a una altura de 2.3 metros

Pese a que algunos equipos dan una solución correcta a la pregunta (tipo 2, tabla 38), su explicación conlleva argumentos inadecuados:

6) Porque si dividimos $4.6m \div 2$ nos da 2.3m, esto da porque al cabo de 5 seg el deportista esta descendiendo a su punto de partida

Particularmente este equipo al realizar la división están determinando la rapidez (magnitud de la velocidad) del deportista, lo que demuestra la tendencia de los estudiantes a operar con las cantidades numéricas involucradas en la pregunta como medio de validación de los 2,3 metros de altura dados para la posición del deportista a los 5 segundos, sin tomar en consideración las unidades de medida involucradas.

Tarea 2: Representando y describiendo funciones periódicas

1. a. Escriba cómo varía el tiempo en esta situación.

Tabla 39. Tipos de respuestas $P_{1a}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que responden: el tiempo varía segundo a segundo.	20	71,4%
Tipo 2	Estudiantes que responden: el tiempo varía segundo a segundo y/o el movimiento del deportista se repite cada 6 segundos.	6	21,4%
Tipo 3	Estudiantes que no responden.	2	7,1%

1. b. Escriba cómo varía la posición del deportista (altura en metros).

Tabla 40. Tipos de respuestas $P_{1b}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que responden: la posición del deportista varía 2,3 metros cada segundo.	22	78,6%
Tipo 2	Estudiantes que responden: la posición del deportista varía 1 metro cada segundo.	2	7,1%
Tipo 3	Estudiantes que responden: en cada segundo el deportista se mueve el doble de lo que recorrido.	2	7,1%
Tipo 4	Estudiantes que no responden.	2	7,1%

Con base en las respuestas de las tablas 39 y 40, se deduce que los estudiantes reconocen y comprenden la variación de las magnitudes involucradas en la situación a partir de la lectura de una representación aritmética (discreta) de la función, estableciendo la relación entre la variable independiente (tiempo) y la variable dependiente (altura). Se puede afirmar que los jóvenes avanzan dentro del pensamiento variacional en la apropiación del concepto de función en tanto interpretan representaciones matemáticas como la tabular (Estándares, 2006) que les permite describir el tipo de variación o cambio de la situación. En esta dirección, el 21,4% (tabla 39) logran describir el movimiento del deportista como periódico al argumentar que se repite cada seis segundos, valor que corresponde al periodo del fenómeno y por ende de la función.

Evidencias de respuesta $P_{1a}T_2(S_2)$ Tipo 1

1. a) la tabla está organizada cada segundo a segundo y podemos observar que el movimiento del deportista se repite cada seis segundos.

Evidencias de respuesta $P_{1a}T_2(S_2)$ Tipo 2

1. b) El deportista cumple su trayectoria entre el punto A y B cada 6 segundos y vuelve y se repite, entonces la variación es periódica.

La tabla 40, deja ver que el mayor porcentaje de estudiantes identifica que la posición del deportista varía 2,3 metros cada segundo, independiente si este asciende o desciende por la

escalera, estableciendo una regularidad que define un patrón para el movimiento del deportista, que incluso algunos equipos perciben, interpretan y expresan (escriben) la variación de otra forma, pero matemáticamente equivalente, evidenciando que los contextos realistas al ser abiertos permiten estrategias variadas y/o varias soluciones (Bressan y otros, 2006, p. 11 – 33, citadas por Bressan y Gallego, 2011, p. 3 – 4).

B) Varía Cada 6.9 m cada 3sg

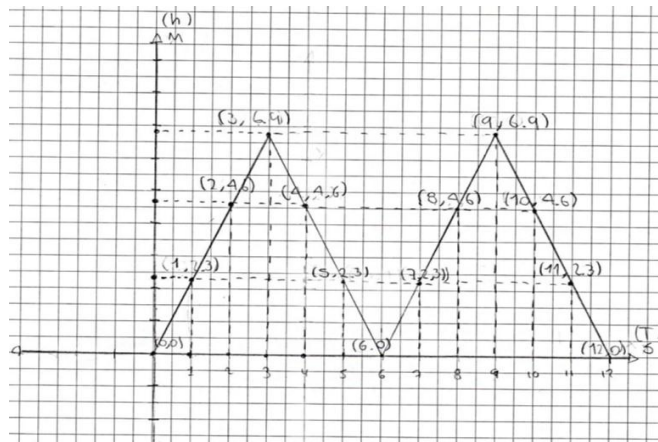
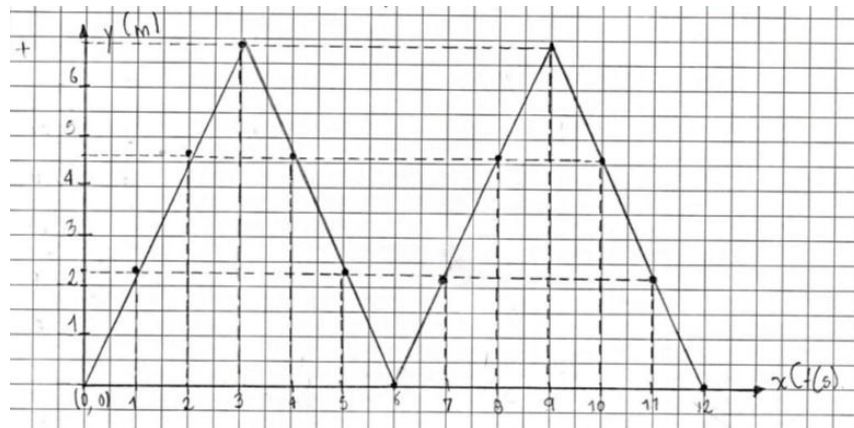
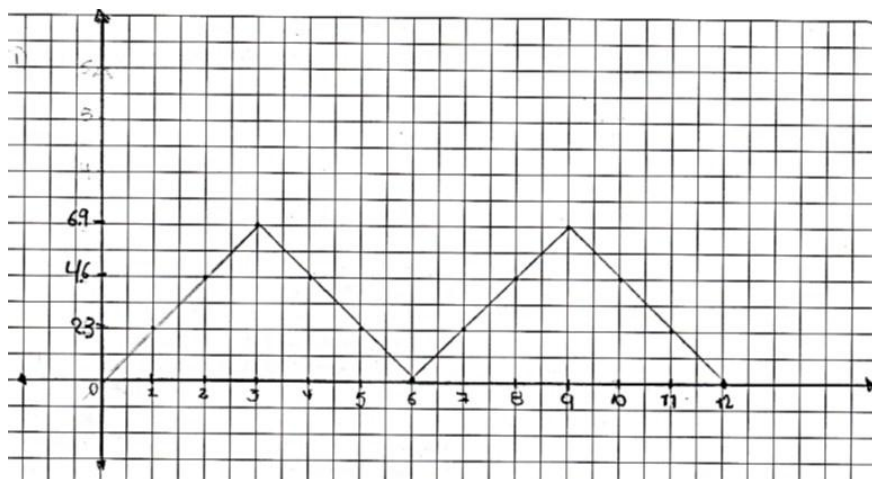
Si bien la respuesta tipo 3 (tabla 40) no es acertada, es un acercamiento de los estudiantes a la conjeturación de la variación entre el tiempo y altura para el movimiento del deportista, que no toma en cuenta el comportamiento de las variables para todos los instantes de tiempo transcurridos.

2. Represente en el plano cartesiano, las parejas ordenadas dadas en la tabla 1.

Tabla 41. Tipos de respuestas $P_2T_2(S_2)$

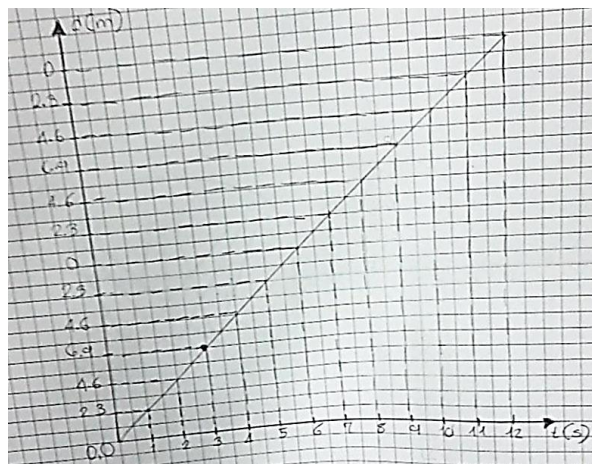
Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que realizan adecuadamente la representación en el plano cartesiano.	20	71,4%
Tipo 2	Estudiantes que no realizan de forma adecuada la representación en el plano cartesiano.	8	28,6%

La gráfica que efectúan los estudiantes en el plano cartesiano deja ver que la mayoría hace un uso adecuado de este sistema simbólico de representación matemática para la dependencia funcional establecida por la tabla 1. En este sentido los jóvenes ubican apropiadamente los ejes de coordenadas aunque no siempre denotan las magnitudes involucradas para el eje x tiempo (segundos) y para el eje y altura (metros), sin embargo por la gráfica resultante se puede asegurar que los alumnos comprenden la noción de variable dependiente e independiente. De igual forma, se observa un manejo conveniente de las escalas numéricas en cada uno de los ejes con respecto a la selección e interpretación de la unidad de medida elegida, al margen si es o no la misma para los dos ejes, como se muestra a continuación:

Evidencias de respuesta $P_2T_2(S_2)$ Tipo 1Evidencias de respuesta $P_2T_2(S_2)$ Tipo 2Evidencias de respuesta $P_2T_2(S_2)$ Tipo 3

Al observar la tabla 41 (tipo 1, 71,4%) así como las representaciones cartesianas anteriores se puede afirmar con base en los Lineamientos (1998) y Estándares (2006) que los estudiantes además de reconocer, identificar y caracterizar el fenómeno de variación, logran modelarlo y representarlo en un sistema gráfico. De esta forma, los jóvenes manejan relaciones entre los sistemas de representación tabular y cartesiana para determinar la dependencia funcional periódica entre las variables.

En cuanto a las dificultades surgidas en los estudiantes al elaborar la representación cartesiana, uno de los equipos al inicio de la actividad transcribe de forma literal los valores de la altura dados en la tabla 1 al eje de las ordenadas. Esta consideración los conlleva a representar el movimiento del deportista por medio de una recta en el plano cartesiano, es decir una función de variación lineal.



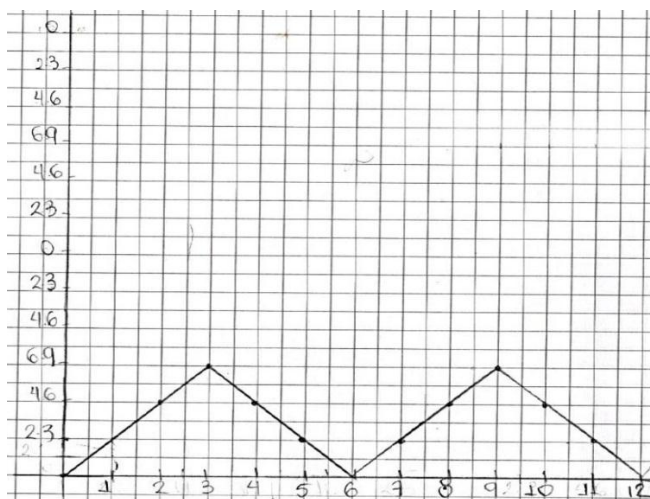
Al interactuar con este equipo de estudiantes se les cuestiona acerca de la ubicación de los valores en el eje de las ordenadas y la forma de la gráfica, a lo que responden que es una recta resultante de unir todas las parejas ordenadas representadas en la tabla 1. Ante esta afirmación se les solicita que lean nuevamente el planteamiento del problema e interpreten en el contexto de la situación la recta obtenida; los jóvenes se centran en el ascenso y descenso del deportista para argumentar que la gráfica no corresponde con este movimiento.

Al indagar con ellos sobre la posición de los valores en el eje y , específicamente la ubicación de la ordenada $y = 0$ y su relación con la pareja $(0,0)$, en un principio asocian el orden numérico del eje por el “orden” dado en la tabla 1 para estos valores de la altura, sin embargo reconocen luego que no habían tomado en consideración que para diferentes valores del

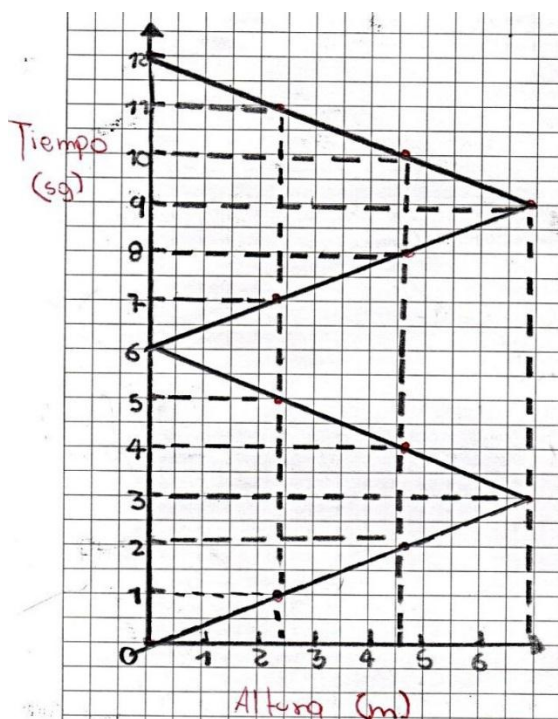
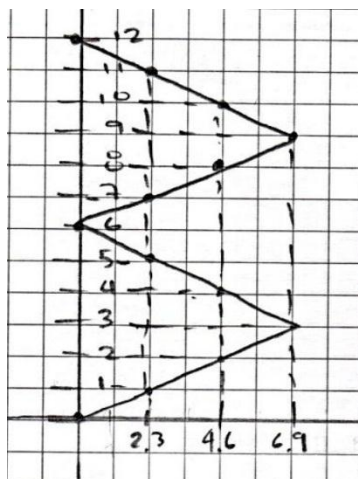
tiempo los valores de las ordenadas se repiten (son iguales) y por ende no era necesario volverlos a representar. Finalmente, elaboran de manera adecuada la gráfica.

Este dialogo (principio de interacción) permite a los estudiantes reflexionar sobre su representación gráfica, la relación de orden semieje positivo del eje y y la identificación de una variación periódica del movimiento del deportista. No obstante, es adecuado señalar que frente a la ubicación inadecuada de la ordenada $y = 0$ a los jóvenes se les dificulta reconocer que este valor ubicaría cualquier pareja ordenada sobre el eje x , es decir cualquiera pareja de la forma $(x, 0)$.

Si bien algunos equipos transcriben de manera literal los valores de la altura dados en la tabla 1 al eje de las ordenadas, la representación gráfica no corresponde a una función lineal como se describió anteriormente.



En cuanto a los equipos que no representan adecuadamente la función en el plano cartesiano, su dificultad gira principalmente alrededor del cambio de posición de los ejes, es decir eje x para la altura y eje y para el tiempo, que se podría relacionar con una falta de comprensión de las nociones de variable dependiente e independiente.

Evidencias de respuesta $P_2T_2(S_2)$ Tipo 1Evidencias de respuesta $P_2T_2(S_2)$ Tipo 2

Sin embargo al dialogar con los distintos equipos que efectúan esta representación, los estudiantes reconocen la dependencia de la altura con respecto al tiempo, al mencionar que al transcurrir un determinado tiempo la posición del deportista varía. Así señalan por ejemplo que al llevar 2 segundos la posición del deportista es 4,6 metros, a los 3 segundos es 6,9 metros, etc., por tanto los jóvenes logran expresar de forma verbal la variación funcional aunque no es coherente con su representación matemática en el plano cartesiano.

La dificultad presentada por los estudiantes se asocia entonces con la inversión en el orden de las coordenadas como lo han identificado Azcárate y Deulofeu (1996) con respecto a la lectura e interpretación de representaciones gráficas cartesianas.

En términos generales, como lo afirman los Lineamientos (1998) y Estándares (2006), los estudiantes al caracterizar y relacionar la representación aritmética (discreta) de una función con su representación cartesiana (continua), demuestran un desarrollo del pensamiento variacional dado que usan de manera apropiada este tipo de representaciones para el tratamiento de situaciones de variación y dependencia, para este caso periódica.

3. Escriba Falso (*F*) o Verdadero (*V*), según el caso.

a. Al transcurrir 6, 12 y 18 segundos el deportista se encuentra en el sitio de partida ().

Tabla 42. Tipos de respuestas $P_{3a}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que escriben verdadero.	22	78,6%
Tipo 2	Estudiantes que escriben falso.	6	21,4%

3. Escriba Falso (*F*) o Verdadero (*V*), según el caso.

b. A los 3 y 9 segundos el deportista se encuentra en la cima ().

Tabla 43. Tipos de respuestas $P_{3b}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que escriben verdadero.	28	100%

De las tablas 42 y 43 se deduce que los estudiantes reconocen periodicidad en el movimiento del deportista, en el primer caso (tabla 42) al afirmar que cada 6 segundos regresa al sitio de partida (base de la escalera). Esta afirmación la realizan a partir de la tabla 1 y/o de la gráfica que elaboraron en el plano cartesiano, en tanto pueden predecir su comportamiento para el segundo 18. Para el segundo caso (tabla 43), al identificar que transcurrido este mismo intervalo de tiempo de 6 segundos, el deportista se encuentra en la misma posición (altura).

3. Escriba Falso (F) o Verdadero (V), según el caso.
 c. A los 4 segundos el deportista se encuentra subiendo de A hacia B ().

Tabla 44. Tipos de respuestas $P_{3c}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que escriben verdadero	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que escriben falso.	22	78,6%

Un alto porcentaje (78,6%) de estudiantes comprende el movimiento de ascenso y descenso del deportista, al identificar que a los 4 segundos se encuentra descendiendo de B hacia A . En dialogo con los diferentes equipos se comprueba que la estrategia fundamental para tal determinación es la lectura e interpretación de la gráfica, es decir su forma (pendiente negativa)³⁴ y la ubicación de la pareja ordenada (4, 4,6).

3. Escriba Falso (F) o Verdadero (V), según el caso.
 d. El periodo de esta situación es 3 segundos ().

Tabla 45. Tipos de respuestas $P_{3d}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que escriben verdadero	12	42,9%
Tipo 2	Estudiantes que escriben falso.	16	57,1%

De la tabla 45 se puede establecer que un mayor porcentaje de estudiantes señala como falso el periodo de 3 segundos en la situación, en concordancia con las respuestas a las afirmaciones 3a y 3b, no obstante es pertinente resaltar que 12 de los jóvenes aún comprende el periodo como una de las etapas, ascenso o descenso, dentro del movimiento del deportista, similar a lo sucedido con las fases de la luna, la cosecha de granos de café, etc., (situación 1)³⁵. De este modo, no conciben el periodo como el intervalo de tiempo transcurrido desde que el deportista parte de la base de la escalera y regresa a ella, es decir el ascenso y descenso para volver a iniciar su movimiento (repetición del fenómeno).

³⁴ Este término no es usado por los estudiantes, se escribe para aclarar la inclinación del segmento de recta comprendido entre los 3 segundos y 6 segundos.

³⁵ Donde el periodo se asociaba al intervalo de tiempo transcurrido entre cada fase lunar y no al tiempo que tarda la luna en pasar de una fase a su similar.

El análisis de la pregunta tres, refleja que los estudiantes pueden reconocer regularidades que caracterizan el fenómeno, desde diferentes representaciones, aunque no siempre logren identificar un patrón regular de tiempo, es decir el periodo. De esta forma, persiste en algunos jóvenes una acepción de periodo vinculada a un uso cotidiano, duración de una fase de cualquier fenómeno, para este caso el tiempo de ascenso (descenso) del deportista.

4. Teniendo en cuenta que en el plano cartesiano se pueden unir los puntos, describa en el contexto de la situación (movimiento del deportista) el significado de la gráfica resultante.

Tabla 46. Tipos de respuestas $P_4T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	El deportista sube y baja la misma distancia. La gráfica tiene esta forma ya que el tiempo transcurre (no se detiene).	6	21,4%
Tipo 2	El movimiento del deportista es de ascenso (cima) y descenso (punto de partida). El tiempo transcurrido entre ascenso y descenso es de 6 segundos.	8	28,6%
Tipo 3	La gráfica se repite constantemente (cambia de la misma forma), el movimiento del deportista sigue un patrón.	6	21,4%
Tipo 4	La gráfica muestra el desplazamiento del deportista en cada instante. El tiempo no se detiene (se debe graficar).	4	14,3%
Tipo 5	No responden.	4	14,3%

De la tabla 46 se puede concluir que los estudiantes describen la gráfica en el contexto de la situación, identificándola con los tramos de ascenso y descenso del deportista. Algunas de las respuestas especifican – explícita o implícitamente – que la forma de la gráfica resultante se debe al paso del tiempo, al preguntarles por esta afirmación los jóvenes contestan que a diferencia de la observación directa del fenómeno³⁶ la gráfica resultante para el movimiento del deportista en el plano cartesiano se va “desplazando” en tanto el tiempo transcurre, no se detiene.

³⁶ Al hablar de observación directa del fenómeno los estudiantes aseguran que si vieran al deportista subiendo y bajando las escaleras, su movimiento sería entre los dos mismos puntos (base y cima).

Evidencias de respuesta $P_4T_2(S_2)$ Tipo 1

4 La grafica nos ilustra el desplazamiento que hace el deportista en cada momento, ya que el tiempo no se detiene y nos muestra su desplazamiento en cada instante.

Evidencias de respuesta $P_4T_2(S_2)$ Tipo 2

4) En la grafica se ve diferente que en la vida real porque tambien hay que graficar el tiempo

Evidencias de respuesta $P_4T_2(S_2)$ Tipo 3

4 El deportista sube y baja la misma distancia pero el plano nos queda así por que lo hace en diferente tiempo.

Se puede afirmar que los estudiantes identifican y diferencian la representación cotidiana del fenómeno (imaginación) de la representación con herramientas matemáticas (plano cartesiano) logrando dentro del proceso de modelación descrito en los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006), no solo una formulación del problema, en tanto reconocen por un lado características esenciales de la situación original y por otro lado esquematizaciones (bosquejos gráficos, tabulares y cartesianos) que les permiten abordar la situación con elementos matemáticos; sino también la producción de un modelo matemático de la situación real. Es decir logran establecer la relación de dependencia entre las variables y el señalamiento de una regularidad de tiempo para el cual la representación gráfica que representa el movimiento del deportista se repite.

Así, la representación matemática del movimiento del deportista, a partir de la aplicación de métodos y herramientas matemáticas ya conocidas como por ejemplo el plano cartesiano, se constituye para los estudiantes en parte fundamental del proceso de resolución del problema. Donde la validación se origina en el contexto de la situación mediante el reconocimiento de los tramos de ascenso y descenso del deportista, así como en el patrón regular de tiempo establecido para estos tramos (6 segundos). En este sentido, un grupo de estudiantes (tipo 3, tabla 46) generaliza el comportamiento de la gráfica al afirmar que se repite de manera

constante, es decir varía de la misma forma, asociando el movimiento del deportista con una función periódica.

Es importante señalar que a diferencia de la situación 1, la palabra “constantemente” no se limita solo a que el fenómeno no se detiene o siempre se da, sino que en el caso de la representación cartesiana adquiere un significado funcional para los estudiantes, donde la dependencia de las variables no altera la forma de la gráfica.

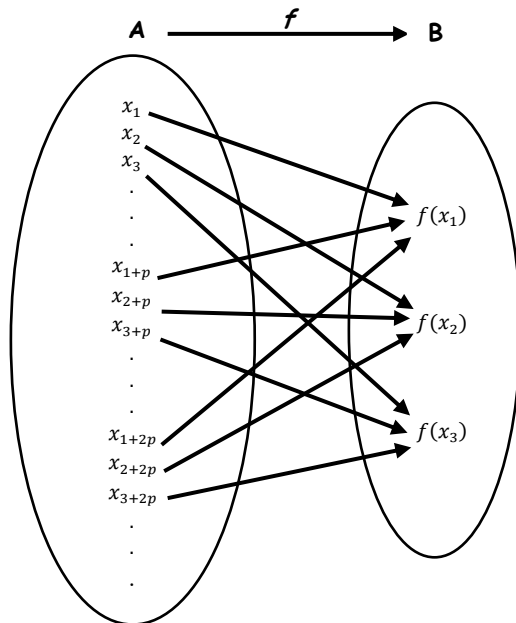
Finalmente, es posible deducir que el uso de las diferentes representaciones y sus relaciones por parte de los jóvenes, les permite el análisis de una situación de variación periódica en un contexto realista y el desarrollo de actividades como la conjeturación y la predicción al momento de solucionar las tareas.

Se puede afirmar que el movimiento del deportista se describe mediante una **función periódica**.

Una función f es periódica con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga a x y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x del dominio de f .

La representación gráfica de una función periódica se repite a intervalos regulares. El intervalo menor para el cual se repita la gráfica se llama periodo de la función.³⁷

El siguiente diagrama sagital muestra una representación de la función periódica:



³⁷ Definición tomada de Apostol, Tom. Calculus (Vol. 1). 2ed. Barcelona: Reverté, 1988. Pág. 117 y Espiral 10. Grupo Editorial Norma, 2004. Pág. 67.

Las preguntas 5, 6 y 7 generan numerosas inquietudes ya que toman en consideración las definiciones y conceptos dados en el recuadro con respecto a la función periódica. Se hizo necesaria la intervención del docente, mediante una socialización con todo el grupo. Los estudiantes no reconocen la notación simbólica y el lenguaje matemático utilizado, además los conceptos de dominio y rango de una función y su representación sagital. Al indagar al respecto manifiestan no haber desarrollado en sus cursos de matemáticas, hasta el momento, estas definiciones y este tipo de representación, así como el nivel de formalización matemática empleado.

Esta situación se genera a partir de la planeación institucional donde hasta grado décimo se estudian las funciones: polinómicas (lineal – afín – cuadrática), exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, privilegiando un trabajo que se centra en la representación gráfica de estas funciones a partir de la ecuación, la tabla de valores y finalmente el plano cartesiano, dejando de lado en el aula no solo el planteamiento de una expresión algébrica desde la gráfica, sino también la interpretación de una función como un tipo particular de relación, que conllevaría al estudio de representaciones sagitales y los conceptos de dominio y rango tanto para relaciones como para funciones.

Es decir hasta grado décimo los estudiantes de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón se han limitado – con referencia al estudio de las funciones – al proceso:

Ecuación $\longrightarrow$ Representación tabular $\longrightarrow$ Representación cartesiana.

Si bien en la Institución hasta grado décimo se hace uso de representaciones tabulares, gráficas y algébricas, que como lo expresan los Lineamientos son sistemas de representación asociados a la variación (1998, p. 73) es indispensable enfrentar a los estudiantes de grado noveno³⁸ a situaciones que aborden el concepto de relación, de función, sus diversas notaciones y representaciones, así como sus características (dominio, codominio y rango)³⁹. Dado que este mismo marco de referencia curricular establece que si bien la noción de función se relaciona con mundos cambiantes, patrones de variación entre variables, etc. “A la conceptualización de la

³⁸ Institucionalmente el estudio de las funciones inicia en este grado.

³⁹ En la actualidad, la planeación del área de matemáticas de la Institución, deja el estudio de las relaciones y las funciones desde un punto de vista conjuntista (correspondencia) para el grado undécimo.

función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial,... (Lineamientos, 1998, p. 74).

En este sentido, proponer una situación en un contexto realista en torno a la función periódica y sus diversas representaciones, enriquece el estudio de la noción general de función en el aula y se constituye en una forma de expresar la periodicidad; que tradicional y exclusivamente ha sido atribuida en el sistema escolar a las funciones trigonométricas como lo argumentan Buendía 2004 (citada por Montiel, 2005, p. 109) y Montiel (2005, p. 109).

Después de la orientación dada por el docente y la discusión con los estudiantes, estos proceden a responder las preguntas 5, 6 y 7.

5. a. Con base en la gráfica del punto 2 (tarea 2) y la definición anterior, determine lo que sucede con la gráfica a partir de los 12 segundos.

Tabla 47. Tipos de respuestas $P_{5a}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	A partir de los 12 segundos la gráfica se repite, el movimiento es periódico.	18	64,3%
Tipo 2	El deportista regresa al punto inicial.	2	7,1%
Tipo 3	El deportista se encuentra en reposo.	4	14,3%
Tipo 4	El deportista comienza a descender.	4	14,3%

El mayor porcentaje de estudiantes (64,3%) indica que a partir de los 12 segundos la gráfica se repite, es decir que el deportista empieza a subir nuevamente desde el punto de partida, lo que permite establecer que los jóvenes reconocen la variación periódica de la gráfica y del movimiento del deportista; prediciendo el comportamiento de la función que modela el movimiento del deportista para cualquier instante de tiempo. Esta predicción se fundamenta en la forma de la gráfica, acompañada de una interpretación adecuada de lo que significa la representación gráfica de una función periódica dada en el recuadro.

Evidencias de respuesta $P_{5a}T_2(S_2)$ Tipo 1

A partir de los 12 segundos el movimiento que realiza el deportista se seguirá repitiendo.

Evidencias de respuesta $P_{5a}T_2(S_2)$ Tipo 2

5º Como se muestra en el gráfico cada 6sg vuelve al Punto de Inicio Es quiere decir que vuelve a Iniciar, y a los 12sg llega al mismo Punto Es quiere decir que Continúa el mismo Movimiento en un determinado periodo de 6sg.

Evidencias de respuesta $P_{5a}T_2(S_2)$ Tipo 3

5º lo que sucede con la gráfica a partir de los 12 seg. es que se sigue repitiendo el mismo patrón indefinidamente.

En cuanto a los tipos de respuesta 2 y 3, se percibe que los estudiantes no generalizan el comportamiento de la gráfica para valores del tiempo después de los 12 segundos, sino que se ubican exactamente en $t = 12$ segundos deduciendo que el deportista regresa al punto de partida. Si bien los jóvenes relacionan adecuadamente la posición del deportista en la base de la escalera para este valor de t , asumen de manera errónea que se encuentra en reposo. De lo anterior, se puede concluir que algunos de los estudiantes intentan generalizar que cada vez que el deportista pasa por la base de la escalera ($h = 0$ m) está en reposo.

5. b. Indique el periodo (p) de tiempo a partir de la gráfica. Explique su respuesta.

Tabla 48. Tipos de respuestas $P_{5b}T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Explicación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que indican como periodo 6 segundos.	Al transcurrir 6 segundos, el movimiento del deportista se repite (vuelve a retomar su movimiento inicial). Es un movimiento periódico.	14	50%
		Seis segundos es el tiempo que tarda el deportista en regresar al punto de partida.	6	21,4%
		Seis segundos es el tiempo que el deportista tarda en subir y bajar las escaleras.	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que indican como periodo 3 segundos.	Tres segundos es el tiempo que se demora en subir la escalera.	2	7,1%
		No hay explicación.	2	7,1%
Tipo 3	Estudiantes que indican como periodo 12 segundos.	El deportista va ascendiendo y descendiendo en este intervalo de tiempo (12 segundos).	2	7,1%

Los resultados de la tabla 48, confirman que los estudiantes describen a partir de la gráfica la variación periódica entre las variables tiempo y altura (posición del deportista) permitiéndoles identificar 6 segundos como periodo. Así, la representación gráfica corrobora las respuestas dadas en la pregunta 3 (a, b, y d) de esta tarea, ya que la forma y repetición de la gráfica cada 6 segundos les deja asegurar que el deportista se encuentra yendo de A a B y de B a A en ese intervalo de tiempo, como se puede apreciar en las explicaciones descritas en la tabla 48 (tipo 1).

En contraste con la pregunta 3 (d), se observa que el porcentaje de estudiantes que determina 3 segundos como el periodo de la función disminuye, constituyéndose la representación gráfica en un medio para probar o demostrar regularidades, específicamente un patrón regular de tiempo (periodo).

Evidencias de respuesta $P_{5b}T_2(S_2)$ Tipo 1

b. El periodo es igual a 6 segundos.
Ya que despues de transcurrir este tiempo
el movimiento vuelve a repetirse.

Evidencias de respuesta $P_{5b}T_2(S_2)$ Tipo 2

b. El periodo de tiempo segun la grafica es de 6 segundos
ya que es lo que se demora el deportista para volver
al mismo punto.

Evidencias de respuesta $P_{5b}T_2(S_2)$ Tipo 3

b. Cada seis segundos segun la grafica el vuelve al mismo
sitio.

6. Compruebe, por lo menos para tres valores de t , que el periodo p obtenido en 5 (b), verifica: $h(t + p) = h(t)$.

Tabla 49. Tipos de respuestas $P_6T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que comprueban adecuadamente la expresión: $h(t + p) = h(t)$.	28	100%

Como se mencionó anteriormente fue necesaria la intervención del docente en las tres últimas preguntas de esta tarea. Particularmente, en la pregunta 6 se hizo indispensable verificar la expresión $h(t+p) = h(t)$ con todo el grupo, tomando como ejemplo otra función de variación periódica. En la interacción con los estudiantes se enfatizó en la relación entre la representación cartesiana de la función y los valores obtenidos por medio de la expresión⁴⁰. En esta socialización se discute por tanto el periodo de la función que modela el movimiento del deportista, sin embargo se les pide a los 6 estudiantes que no contestaron correctamente a la pregunta 5(b) que no alteren su respuesta. De esta forma, el 100 % de los estudiantes verifica la expresión adecuadamente.

Evidencias de respuesta $P_6T_2(S_2)$ Tipo 1

$$\begin{array}{ll}
 6. & \\
 \bullet & h(t+p) = h(t) \\
 & h(3+6) = 9 \\
 & 9 = 6 \cdot 9 \\
 \bullet & h(t+p) = h(t) \\
 & h(5+6) = 11 \\
 & 11 = 2 \cdot 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \bullet & h(t+p) = h(t) \\
 & h(4+6) = 10 \\
 & 10 = 4 \cdot 6
 \end{array}$$

Evidencias de respuesta $P_6T_2(S_2)$ Tipo 2

$$\begin{array}{l}
 6^\circ \quad h(3+6) = h(3) = 6,9 \\
 \quad \quad h(9) = 6,9 \\
 6) \quad h(7+6) = h(7) = 2,3 \\
 \quad \quad h(13) = 2,3 \\
 0) \quad h(2+6) = h(2) = 4,6 \\
 \quad \quad h(8) = 4,6
 \end{array}$$

Evidencias de respuesta $P_6T_2(S_2)$ Tipo 3

$$\begin{array}{lll}
 6 \quad h=(t+p) & h=(t+p) & h=(t+p) \\
 h=(2+6) & h=(3+6) & h=(10+6) \\
 h=8 & h=9 & h=16
 \end{array}$$

⁴⁰ Por este motivo la culminación de la tarea 2 conlleva dos sesiones de clase, cada una de dos horas.

Los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes muestran que se limitan a tomar 3 valores para t y no todos logran interpretar la igualdad $h(t + p) = h(t)$. Es decir aunque reemplazan valores para t y para p de manera adecuada por ejemplo $h(2 + 6) = h(8)$ se les dificulta reconocer que $h(2) = h(8)$, de lo anterior se puede inferir que si bien hay una operatividad (manejo algorítmico) correcta no comprenden que las imágenes (posición del deportista) para los valores del tiempo $t = 2$ segundos y $t = 8$ segundos son iguales. En dialogo con los diferentes equipos se constata que en un principio los alumnos se están restringiendo al cálculo numérico, sin embargo al cuestionarlos sobre la igualdad $h(2) = h(8)$ expresan, verbalmente, su veracidad recurriendo a la representación gráfica que realizaron. Se observa además en algunos equipos un manejo inadecuado del lenguaje matemático y el concepto de igualdad.

Dentro del proceso de matematización vertical, la gráfica les permite probar la validez de la expresión, siendo esta representación un modelo que conlleva a los estudiantes a mayores niveles de formalización matemática (Freudenthal, 1991, citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004, p. 7) en tanto vincula la elaboración, interpretación y relación entre los sistemas de representación matemática: gráfico y algebraico como lo estipulan los Lineamientos (1998) y Estándares (2006) para el desarrollo del pensamiento variacional.

En términos generales, se puede concluir que los estudiantes reconocen el comportamiento de una función periódica en el plano e indican su periodo tomando como criterio la repetición de su forma en la representación cartesiana. Además que utilizan la gráfica para argumentar y justificar la propiedad de periodicidad desde su expresión analítica, pese a la explicación dada para $h(t + p) = h(t)$.

7. Explique la representación sagital de una función periódica según la relación entre los x del dominio y los $f(x)$ del rango.

Tabla 50. Tipos de respuestas $P_7T_2(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Los dominios $(x_1, x_{1+p} \text{ y } x_{1+2p})$, $(x_2, x_{2+p} \text{ y } x_{2+2p})$ y $(x_3, x_{3+p} \text{ y } x_{3+2p})$ tienen el mismo rango que son: $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$ respectivamente.	18	64,3%
Tipo 2	Al completarse un periodo se obtienen los mismos valores del rango.	4	14.3%
Tipo 3	x_1, x_{1+p} y x_{1+2p} se dirigen hacia la misma dirección $f(x_1)$.	2	7,1%
Tipo 4	No realizan explicación.	4	14.3%

Es pertinente precisar, que si bien se dio la orientación a los estudiantes sobre los conceptos de dominio, rango y representación sagital; con el fin de no interferir en las soluciones el docente encargado de este trabajo se ausenta de la sesión donde los jóvenes abordan esta última pregunta. El grupo está acompañado con el profesor que les orienta el área de matemáticas.

De acuerdo con los análisis realizados hasta el momento, es evidente que los estudiantes reconocen la variación periódica del movimiento del deportista, el comportamiento gráfico de una función periódica y el periodo de esta desde su gráfica. Sin embargo, para la mayoría la verificación algebraica de la propiedad $h(t + p) = h(t)$ adquiere validez solo a partir de la representación cartesiana.

La explicación predominante del diagrama sagital (tipo 1, tabla 50) deja ver que los estudiantes consideran particiones del conjunto A (Dominio), es decir agrupan los elementos que tienen la misma imagen. En este sentido cada subconjunto de la forma $(x_a, x_{a+p}, x_{a+2p}, \dots, x_{a+np})$ cuya imagen es $f(x_a)$ se designa como un dominio, de lo cual se puede inferir que los jóvenes establecen subdominios del dominio de la función. Si bien interpretan adecuadamente la representación sagital de una función periódica, al determinar que todos los elementos de la forma $(x_a, x_{a+p}, x_{a+2p}, \dots, x_{a+np})$ tienen la misma imagen; la agrupación realizada no les deja ver claramente que para cada uno de los elementos del conjunto A existe una única imagen. A esta última afirmación subyace el desconocimiento, por parte de los estudiantes, de terminología básica de la teoría de conjuntos y de la función como una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de A un único elemento de B .

Al respecto, es pertinente señalar que la respuesta de 4 estudiantes (tipo 2, tabla 50) alude a la determinación de una única imagen para cada elemento del dominio, dado que los elementos x_a y x_{a+p} tendrán una imagen, para este caso la misma, dado que es una función periódica. Precisamente el periodo p que transcurre o se completa como dicen los jóvenes entre los elementos x_a y x_{a+p} garantiza el mismo valor del rango.

En cuanto a la interpretación de las imágenes de los elementos x_{1+np} ; x_{2+np} ; x_{3+np} del dominio, los estudiantes consideran nuevamente particiones del conjunto B , al identificar respectivamente cada imagen $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$ como un rango. Es decir cada $f(x_a)$ constituye un subconjunto del rango de la función, dado que el valor de $f(x_a)$ es el mismo para el dominio $(x_a, x_{a+p}, x_{a+2p}, \dots, x_{a+np})$. De las respuestas se infiere que los jóvenes no perciben $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$ como elementos del conjunto B y por ende como el rango de f , sino como subconjuntos unitarios que definen cada uno un rango.

Si bien el rango de una función es un subconjunto propio del codominio ($Ran\ de\ f \subseteq Cod\ de\ f$) relacionado con el conjunto de imágenes de los elementos del dominio y para esta representación sagital dada en el recuadro de la tarea 2, el *Codominio de f = Rango de f* ; la dificultad radica en la partición e interpretación de tres rangos para la función, de igual manera se puede concebir para el dominio.

Así durante la plenaria los estudiantes no logran identificar como dominio el conjunto $\{x_1, x_{1+p}, \dots, x_2, x_{2+p}, \dots, x_3, x_{3+p}\}$ y como rango el conjunto $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$, lo que evidencia que no hay claridad en cuanto a lo nominal y a la designación de los términos dominio y rango de una función. Sin embargo, lo anterior no contradice el razonamiento de los jóvenes en torno a la correspondencia de los elementos dominio $x_a, x_{a+p}, x_{a+2p}, \dots, x_{a+np}$ con la misma imagen $f(x_a)$.

Por tanto, se puede señalar que a los argumentos de los estudiantes subyace la caracterización de una función periódica como aquella que asigna a x_a del dominio y a los infinitos valores de la forma x_{a+np} del dominio, la misma imagen, donde p se identifica con el periodo de la función⁴¹.

⁴¹ Se incluye en esta categoría de análisis las respuestas clasificadas como tipo 2 y tipo 3 de la tabla 50.

Evidencias de respuesta $P_7T_2(S_2)$ Tipo 1

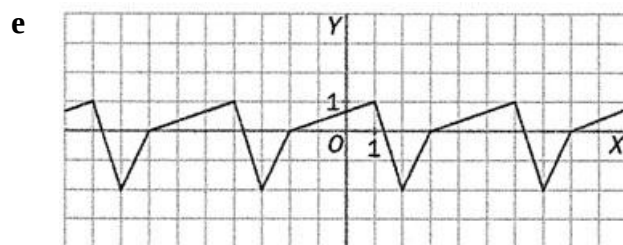
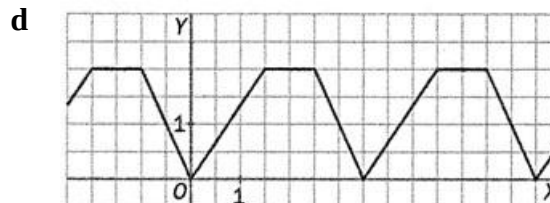
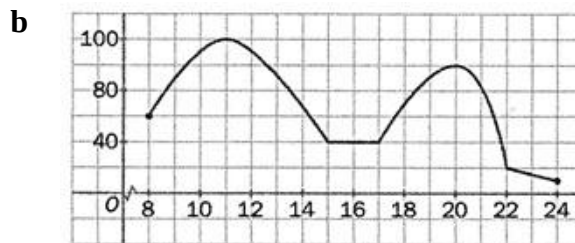
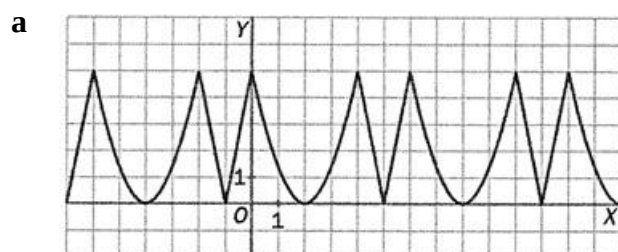
la representación gráfica de una función periódica es la relación que tiene el dominio, donde se encuentran los elementos x y el codominio donde al cumplirse un periodo se repiten los números del rango.

Evidencias de respuesta $P_7T_2(S_2)$ Tipo 2

7 los dominios $(x_1, x_1+p, x_1+2p \cup x_1+n)$ tienen su mismo rango que es $f(x_1)$
 los dominios $(x_2, x_2+p, x_2+2p \cup x_2+n)$ tienen su mismo rango que es $f(x_2)$
 los dominios $(x_3, x_3+p, x_3+2p \cup x_3+n)$ tienen su mismo rango que es $f(x_3)$

Tarea 3: Reconociendo gráficas de funciones periódicas

Observe las siguientes representaciones gráficas de algunas funciones:⁴²



⁴² Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

<i>Representación gráfica</i>	a	b	c	d	e
<i>Función Periódica</i>					
<i>Periodo</i>					

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

Tabla 51. Tipos de respuestas $T_3P_{1,2}(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Explicación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que clasifican como periódicas las funciones (a, c, d y e) y no periódica (b). Determinan correctamente el periodo para al menos tres de las seleccionadas como periódicas.	Contando la cuadrícula (eje x – tiempo en segundos) y teniendo en cuenta la escala numérica en que estaba graduada cada una de las gráficas.	6	21,4%
		Como la gráfica se repite cada determinado tiempo, contamos el tiempo que se demora en cumplir un ciclo.	4	14,3%
		Teniendo en cuenta el tiempo que se tarda en llegar a su punto final y volver a partir.	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que clasifican como periódicas las funciones (a, c, d y e) y no periódica (b). Determinan correctamente el periodo máximo para dos de las seleccionadas como periódicas.	Tomando en consideración desde donde comienza el movimiento hasta que se repite.	2	7,1%
		Teniendo en cuenta el tiempo que se tarda en llegar a su punto final y volver a partir.	2	7,1%
		Analizando el tiempo desde el punto de partida hasta el punto final.	2	7,1%
Tipo 3	Estudiantes que clasifican como periódicas las funciones (a, d y e) y no periódicas (b y c). Determinan el periodo correcto para todas las seleccionadas como periódicas.	La gráfica se repite (forma) en un determinado intervalo de tiempo. El fenómeno se repite.	2	7,1%
Tipo 4	Estudiantes que clasifican como periódicas las funciones (a, d y e) y no periódicas (b y c). Determinan el periodo incorrecto para todas las seleccionadas como periódicas.	Contando la cuadrícula y teniendo en cuenta la escala numérica en que estaba graduada cada una de las gráficas.	4	14,3%
Tipo 5	Estudiantes que clasifican como periódicas las funciones (a, c y d) y no periódicas (b y e). Determinan correctamente el periodo máximo para dos de las seleccionadas como periódicas.	Contando la cuadrícula y tomando en consideración que la gráfica se repite.	2	7,1%
		Observando y detallando la gráfica.	2	7,1%

El análisis de las respuestas a la tarea 3 revela que 18 (64,3 %) de los estudiantes (clasificación tipo 1 y tipo 2) clasifica de forma adecuada las funciones a, c, d y e como periódicas, lo que confirma un nivel de comprensión de la función periódica a partir del comportamiento de la gráfica como se estableció en la tarea 2 de esta situación. Para la determinación del periodo, 12 de estos estudiantes, toman como aspectos fundamentales: la forma de la gráfica y el conteo.

El primero referido a la identificación de un intervalo en el cual la forma de la gráfica se repite, estableciendo así un ciclo de la curva. Este intervalo es asociado por los estudiantes con el periodo de la función, razón por la cual surge el conteo (segundo aspecto) como herramienta matemática usada para asignar el valor numérico al periodo. La estrategia toma en cuenta la cuadrícula y la escala numérica en que se encuentra graduada cada representación gráfica.

Se puede asegurar que al margen de la clasificación de las funciones como periódicas o no, el conteo es la herramienta generalizada por los estudiantes. No obstante, el manejo de una escala numérica diferente para el eje x y para el eje y en la misma gráfica (representación c) o una escala diferente para el eje x en comparación con las otras gráficas como es el caso de las representaciones a y d, se constituye en un obstáculo para hallar el valor acertado del periodo.

De esta forma, las dificultades se presentan en las representaciones gráficas c y d, donde los alumnos indican 70 como periodo para la función c, es decir asumen este valor como el del intervalo desde el cual se empieza a repetir la gráfica.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 1

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	SI	NO	SI	SI	SI
Periodo	65g		705g	3,55g	55g

Tabla 2.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 2

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	si	no	si	si	si
Periodo	6		70	3.5	5

Tabla 2.

Se puede apreciar, que los estudiantes no conciben el intervalo $(70, 80)$ como parte de la gráfica al asumir que se encuentra sobre el eje x ($y = 0$). Esta lectura de la gráfica puede derivarse de la interpretación dada a las parejas ordenadas $(6,0)$ y $(12,0)$ en el contexto del movimiento del deportista (tarea 1, situación 2), donde algunos estudiantes señalan que al regresar al punto de inicio el deportista se encuentra en reposo. Así, $p = 70$ y la pareja ordenada $(70,0)$ significaría para los jóvenes, en el caso del recorrido de un cuerpo, que este regresa a su punto de partida, se encuentra en reposo e inicia nuevamente su recorrido ignorando que permanece detenido en el intervalo $(70, 80)$.

Un equipo de estudiantes argumenta que no es posible asegurar que la función c sea periódica a partir de la representación dada⁴³, en tanto no se puede predecir que el comportamiento de la gráfica sea el mismo (se repita) a partir de $x = 90$:

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	si	no	no	si	si
Periodo	6			3.5	5

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

porque las líneas de las gráficas se repiten cada ciertas cifras y eso nos da a

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

entender que el fenómeno se repite

* En la gráfica (c) no podemos afirmar que es periódica porque la gráfica nos pone a suponer, porque para poder determinar si es periódica la Gráfica tendría que seguir con la secuencia (un intervalo de 80)

⁴³ Al momento de diseñar la tarea se tuvo en cuenta este aspecto, sin embargo se decidió dejar esta representación gráfica a la interpretación de los estudiantes.

La respuesta evidencia la determinación adecuada del periodo ($p = 80$), sin embargo el no poder visualizar la forma de la gráfica a partir de la abscisa 90 conlleva a la categorización de la función como no periódica. Durante la plenaria se socializa con todo el grupo la solución dada por este equipo, el resto de estudiantes manifiesta no haber realizado un análisis global de la gráfica y afirman que al ser una actividad de matemáticas entonces no puede haber dos repuestas distintas (ambigüedad). Al respecto se aclara que las dos interpretaciones son válidas en tanto hay argumentación que sustenta los razonamientos y procesos llevados a cabo.

Lo anterior deja ver que el planteamiento de actividades que involucran cierto grado de indeterminación frente a la respuesta permite a los estudiantes la reflexión y el desarrollo de procesos del pensamiento matemático (Lineamientos, p. 76) tales como: la conjeturación y la argumentación verbal o escrita y por consiguiente la validación de sus respuestas; procesos inherentes a la formulación y solución de problemas.

Por otro lado, vinculado al periodo de esta misma función, algunos estudiantes no toman en cuenta la escala numérica en que se encuentra graduado el eje de las abscisas y realizan un conteo por unidad, como se expone a continuación:

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 1

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	Si	No	Si	Si	Si
Periodo	6 sg		14 sg	7 sg	7 sg

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

El tiempo que se demora en llegar a su destino final y volver a partir.

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialism/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 2

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	SI	NO	SI	SI	SI
Periodo	6sg		16sg	12sg	7sg

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.
lo determinamos analizando el tiempo de punto de partida hasta llegar al final

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Este conteo sin tomar en consideración la graduación del eje x , se repite en la determinación del valor numérico para el periodo de la representación gráfica d, donde es asignado de forma inadecuada 7 (ver registros).

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 1

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	SI	NO	NO	SI	SI
Periodo	(3,5)	NO	NO	7	(3,5)

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 2

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	Si	No	Si	Si	No
Periodo	6		70	7	

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

R: porque contamos cada cuadrado y se repite.

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Es interesante resaltar que para la determinación del periodo, los estudiantes efectúan el conteo a partir del punto $(0,0)$, es decir que para las representaciones a, d y e visualizan las gráficas solo para el primer cuadrante. Esta discusión se lleva a cabo durante la plenaria pero los estudiantes no expresan argumentos válidos o coherentes para tal decisión, un grupo menciona que el periodo es un número mayor que cero, por tanto no puede ubicarse en la parte negativa del eje x . Ante esto, la reflexión se centra en la noción de distancia entre dos puntos ya sea en la recta numérica o en el plano cartesiano.

Hayamos el Periodo Partiendo del Punto Cero y Continuando el número sigue en una determinada secuencia y eso lo hicimos contando los cuadros guías de cada gráfica y con ayuda del número que se muestra en la figura.

Dentro del proceso de matematización vertical del enfoque de la EMR, la tarea 1 y la tarea 2 de la situación 2, ubica a los estudiantes en un nivel referencial dado que emplean diversas representaciones: lengua natural, tabular, gráfica; conceptos y procedimientos para sintetizar el problema, todas estas relacionadas con el movimiento del deportista, es decir a partir de la situación de la cual se originaron.

La tarea 3, los sitúa en un nivel general dentro del proceso de matematización vertical, pues la lectura y el análisis de las representaciones gráficas supera el contexto de la situación planteada (movimiento del deportista), permitiéndoles reflexionar sobre las estrategias, conceptos y modelos usados en el nivel referencial, particularmente el reconocimiento de una función periódica a partir del comportamiento repetitivo de su gráfica y la determinación del periodo desde la identificación de un intervalo definido para que se repita la gráfica (tarea 2, pregunta 5(a,b)), proceso al cual subyace el conteo. Así, los estudiantes pueden concluir que el comportamiento repetitivo de la gráfica, la definición de un intervalo para que se repita la gráfica y el conteo; son aspectos generalizables que se pueden aplicar en otro tipo de situaciones.

Sin embargo, como se puede ver a través de las explicaciones de los estudiantes (tabla 51) y algunos de los registros escaneados, prevalece la tendencia de los jóvenes a asociar el valor numérico del periodo de una función con una unidad de medida como es el tiempo, concretamente los segundos. En este sentido, se puede inferir que el contexto de la situación abordada (movimiento del deportista) incide sobre la concepción de periodo, ya que el eje x de las diferentes representaciones gráficas de la tarea 3, no tiene asignado la magnitud tiempo.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 1

Al observar las graficas nos dimos cuenta que hay unas que el punto llega cada determinado tiempo al mismo sitio. Osea cada tiempo vuelve a ocurrir.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 2

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	Si	No	Si	Si	Si
Periodo	6		10	3,5	5

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

Contando la secuencia de cada segundo

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Evidencias de respuesta $T_3P_{1,2}(S_2)$ Tipo 3

1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	SI	NO	SI	SI	SI
Periodo	6sg		70sg	3,5sg	5sg

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

Contando el tiempo en el cual se demora en cumplir un ciclo.

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Tarea 4: Aproximándonos a la expresión algebraica

Para obtener una expresión algebraica que describa el movimiento del deportista, Valentina y Juan inician una discusión al respecto. Valentina asegura que la variación de la altura del deportista en función del tiempo corresponde a una función lineal dada por la expresión: $h(t) = 2,3t$.

Sin embargo, Juan argumenta que esta expresión es válida solo para el primer tramo de la gráfica, $k = 0$, es decir cuando el deportista sube por primera vez a la cima de la escalera.

1. De este modo, Juan propone a Valentina que la expresión algebraica que describe el movimiento del deportista para los tramos de ascenso en la gráfica es $h(t) = 2,3(t - 6k)$, donde k indica el número de veces en que sube el deportista. Por ejemplo, para $k = 1$ la expresión es:

$$h(t) = 2,3(t - 6).$$

a. Determine la validez de esta afirmación para $k = 3$.

Al iniciar el desarrollo de esta tarea, los estudiantes manifiestan inquietudes frente a la solución de la misma, en tanto no logran interpretar una expresión algebraica por partes, que

involucre tantas letras⁴⁴ y parámetros. Se hizo necesario la socialización con todo el grupo de cada ítem que compone la tarea 4.

En la interacción con los jóvenes se pudo establecer que las dificultades no solo giran en torno a la representación algebraica para $h(t)$ dada en la pregunta 3, sino también en las expresiones de variación lineal que modelan los tramos de ascenso y descenso del deportista. Esta discusión reafirma el poco énfasis que dentro de la enseñanza de las funciones al interior del aula, reciben las actividades en las cuales los estudiantes deben plantear una expresión algebraica a partir de la representación gráfica de una función.

Tabla 52. Tipos de respuestas $T_4P_{1a}(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan la expresión algebraica $h(t) = 2,3(t - 18)$ y comprueban su validez evaluando cada valor del tiempo ($t = 18$ s, 19 s, 20 s y 21 s) adecuadamente.	18	64,3%
Tipo 2	Estudiantes que determinan la expresión algebraica $h(t) = 2,3(t - 18)$, sin embargo no comprueban su validez para el tramo correspondiente ($k = 3$).	4	14,3%
Tipo 3	No responden.	6	21,4%

1. b. Valentina encuentra que para $k = 4$, la expresión algebraica es $h(t) = 2,3(t - 24)$ y establece que: $h(24) = 0$; $h(25) = 2,3$; $h(26) = 4,6$ y $h(27) = 6,9$. Verifique los valores dados por Valentina.

Tabla 53. Tipos de respuestas $T_4P_{1b}(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que verifican adecuadamente en la expresión, para $k = 4$, todos los valores del tiempo ($t = 24$ s, 25 s, 26 s y 27 s).	22	78,6%
Tipo 2	Estudiantes que verifican máximo con dos errores, la expresión para $k = 4$.	2	7,1%
Tipo 3	No responden.	4	14,3%

⁴⁴ La palabra letras es usada por los estudiantes.

Se observa de la tabla 52, que el 64,3% de los estudiantes además de hallar la expresión algebraica $h(t) = 2,3(t - 18)$ evaluando en $h(t) = 2,3(t - 6k)$ el valor $k = 3$, comprueban la validez de la expresión $h(t) = 2,3(t - 18)$ para cada uno de los valores del tiempo, es decir reemplazando punto por punto, como se evidencia en algunos de los procedimientos elaborados por los jóvenes:

Evidencias de respuesta $T_4P_{1a}(S_2)$ Tipo 1

$$\begin{aligned}
 &1) \quad a) \quad h(t) = 2,3(t - 6 \cdot 3) = h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(18) = 2,3(18 - 18) = 2,3(0) = 0 \\
 &\quad h(19) = 2,3(19 - 18) = 2,3(1) = 2,3 \\
 &\quad h(20) = 2,3(20 - 18) = 2,3(2) = 4,6 \\
 &\quad h(21) = 2,3(21 - 18) = 2,3(3) = 6,9
 \end{aligned}$$

Evidencias de respuesta $T_4P_{1a}(S_2)$ Tipo 2

$$\begin{aligned}
 &1) \quad R/\quad a) \quad h(t) = 2,3(t - 18) \quad \star \quad h(t) = 2,3(t - 18) \quad \star \quad h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(t) = 2,3(19 - 18) \quad h(t) = 2,3(18 - 18) \quad h(t) = 2,3(20 - 18) \\
 &\quad h(19) = 2,3(1) = 2,3 \quad h(18) = 2,3(0) = 0 \quad h(20) = 2,3(2) = 4,6 \\
 &\quad \star \quad h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(t) = 2,3(21 - 18) \\
 &\quad h(21) = 2,3(3) = 6,9
 \end{aligned}$$

Evidencias de respuesta $T_4P_{1a}(S_2)$ Tipo 3

$$\begin{aligned}
 &1) \quad a) \quad h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(t) = 2,3(18 - 18) = 0 \\
 &\quad h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(t) = 2,3(19 - 18) = 2,3 \\
 &\quad h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(t) = 2,3(20 - 18) = 4,6 \\
 &\quad h(t) = 2,3(t - 18) \\
 &\quad h(t) = 2,3(21 - 18) = 6,9
 \end{aligned}$$

Si bien la mayor parte de los estudiantes responde de manera acertada, en la interacción inicial con los diferentes equipos se pudo constatar que no todos comprenden, en términos algorítmicos, como evaluar la expresión algebraica que modela una función en un punto, situación que se hace más compleja en tanto para la expresión $h(t) = 2,3(t - 6k)$ además de considerar el valor de t , se debe tener en cuenta el parámetro k para el respectivo tramo de ascenso del deportista.

El dialogo equipo por equipo y la plenaria, confirman que a los estudiantes se les dificulta reconocer la variación de t en la expresión algebraica, pese a tener claro que el tiempo transcurre (varia) conforme el deportista asciende por la escalera y que la gráfica que representa el movimiento del deportista se “desplaza” en el plano cartesiano en tanto el tiempo no se detiene (pregunta 4, tarea 2). Se puede afirmar que los jóvenes identifican visualmente la traslación horizontal de la gráfica debido al transcurso del tiempo, pero se les dificulta asociar los cambios que produce este movimiento de traslación en la ecuación o expresión algebraica.

Es precisamente la representación gráfica la que les permite a los jóvenes confrontar y validar cada valor hallado de $h(t)$ en el tramo de ascenso correspondiente ($k = 3$); consiguiendo relacionar las representaciones gráfica y algebraica para el movimiento del deportista, lo que se constituye como lo expresan los Lineamientos (1998) dentro del pensamiento variacional en eje fundamental para el estudio y comprensión de la función (periódica). Este uso de la gráfica como medio de validación del proceso algebraico es consecuente con la verificación de la propiedad $h(t + p) = h(t)$ la cual se ratifica solo a partir de la representación cartesiana (pregunta 6, tarea 2).

Aunque los estudiantes logran relacionar las dos representaciones en términos de la verificación y la validación de valores, la plenaria corrobora que a los jóvenes les resulta complejo asociar a una representación gráfica su expresión algebraica. En general, para este caso, no reconocen que las líneas rectas que representan el movimiento del deportista en el plano cartesiano corresponden a funciones de la forma $f(x) = mx + b$ y el cambio producido por el signo de m en la inclinación de la recta (tramos de ascenso y descenso). En este ámbito, la escuela ha contribuido poco al limitar el estudio de las funciones a su representación gráfica a partir de su representación discreta (tabular) y ecuación, dejando de lado el planteamiento de la

expresión algebraica desde el análisis gráfico asociado a los cambios producidos por los parámetros, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los cortes con los ejes, etc.⁴⁵.

En cuanto a la pregunta 1b, la tabla 53 presenta un porcentaje de 78,6% de estudiantes que verifican de manera adecuada los valores de $h(t)$ correspondiente al tramo de ascenso $k = 4$. Al igual que 1a, la estrategia consiste en reemplazar y evaluar cada valor del tiempo, no obstante para esta pregunta la validación se efectúa teniendo en cuenta los cálculos numéricos realizados sin acudir a la representación gráfica. Esto se debe quizá a que los jóvenes asumen la veracidad o afirmación dada en la pregunta, es decir no deben ni deducir la expresión ni los valores como en la pregunta 1a.

Evidencias de respuesta $T_4P_{1b}(S_2)$ Tipo 1

b.) $k = 4$
 $h(t) = 2,3(t - 24)$
 $h(24) = 2,3(24 - 24) = 0$
 $h(25) = 2,3(25 - 24)$
 $h(26) = 2,3(26 - 24) = 4,6$
 $h(27) = 2,3(27 - 24) = 6,9$

Evidencias de respuesta $T_4P_{1b}(S_2)$ Tipo 2

1) $h(24) = 2,3(24 - 24) = 2,3(0) = 0$
 $h(25) = 2,3(25 - 24) = 2,3(1) = 2,3$
 $h(26) = 2,3(26 - 24) = 2,3(2) = 4,6$
 $h(27) = 2,3(27 - 24) = 2,3(3) = 6,9$

⁴⁵ Aunque inicialmente la tarea 4 se planteó de esta forma, la complejidad de la expresión algebraica resultante de la situación problema, conlleva a la aproximación, es decir al reconocimiento por parte de los estudiantes de la expresión algebraica vía verificación y validación.

Evidencias de respuesta $T_4P_{1b}(S_2)$ Tipo 3

b) $h(t) = 2,3(t - 6)$ $h(t) = 2,3(25 - 24)$ $h(t) = 2,3(26 - 24)$ $h(t) = 2,3(27 - 24)$
 $h(t) = 2,3(24 - 24)$ $h(t) = 2,3(1)$ $h(t) = 2,3(2)$ $h(t) = 2,3(3)$
 $h(t) = (0)$ $h(t) = 0,1$ $h(t) = 2,3$ $h(t) = 6,9$ ✓
 $= 0$ $= 2,3$ $= 4,6$ ✓

En cuanto aquellos estudiantes que no dan solución a la pregunta 1 (a, b), sus argumentos giran en torno a la falta de claridad con respecto a las operaciones o cálculos que deben realizar para la verificación de las expresiones.

①

$$a \cdot k = 3$$

$$h(t) = 2,3 \cdot (21 - 3)$$

No entendí porque no me quedaron claros los conceptos de las operaciones que se deben hacer para comprobar el problema.

2. Ahora, Valentina decide buscar una expresión algebraica que permita modelar los tramos de descenso del deportista y propone: $h(t) = -2,3(t - 6k)$.

- a. Decida si para $k = 1$ la expresión dada por Valentina representa el primer tramo de descenso del deportista.

Tabla 54. Tipos de respuestas $T_4P_{2a}(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que al decidir la validez de la expresión para $k = 1$, verifican esta para cada valor del tiempo ($t = 3$ s, 4 s, 5 s y 6 s) adecuadamente.	16	57,1%
Tipo 2	Estudiantes que al decidir la validez de la expresión para $k = 1$, verifican esta de forma incorrecta ya sea tomando valores inadecuados para el tiempo u otra expresión algebraica.	4	14,3%
Tipo 3	No responden.	8	28,6%

Al comprobar $h(t) = -2,3(t - 6k)$ para $k = 1$, el mayor porcentaje de estudiantes verifica nuevamente la expresión para cada valor de t . Los valores obtenidos para $h(t)$ son contrastados, en pos de la validación, con la representación tabular y la representación gráfica, según se pudo establecer en la plenaria.

Evidencias de respuesta $T_4P_{2a}(S_2)$ Tipo 1

$$\begin{array}{l}
 2. \bullet h(t) = -2,3(t-6k) \\
 \quad h(t) = -2,3(t-6) \\
 \quad h(3) = -2,3(3-6) \\
 \quad h(3) = -2,3(-3) \\
 \quad h(3) = 6,9 \\
 \bullet h(6) = -2,3(6-6) \\
 \quad h(6) = -2,3(0) \\
 \quad h(6) = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \bullet h(4) = -2,3(4-6) \\
 \quad h(4) = -2,3(-2) \\
 \quad h(4) = 4,6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \bullet h(5) = -2,3(5-6) \\
 \quad h(5) = -2,3(-1) \\
 \quad h(5) = 2,3
 \end{array}$$

Evidencias de respuesta $T_4P_{2a}(S_2)$ Tipo 2

$$\begin{array}{l}
 2 a) h(3) = -2,3(3-6) = -2,3(-3) = 6,9 \\
 h(4) = -2,3(4-6) = -2,3(-2) = 4,6 \\
 h(5) = -2,3(5-6) = -2,3(-1) = 2,3 \\
 h(6) = -2,3(6-6) = -2,3(0) = 0
 \end{array}$$

Evidencias de respuesta $T_4P_{2a}(S_2)$ Tipo 3

$$\begin{array}{l}
 2 a) \times h(t) = -2,3(t-6) \\
 \quad h(t) = -2,3(3-6) \\
 \quad h(3) = -2,3(-3) \\
 \quad = 6,9 \\
 \times h(t) = -2,3(t-6) \\
 \quad h(t) = -2,3(6-6) \\
 \quad h(6) = -2,3(0) \\
 \quad = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \times h(t) = -2,3(t-6) \\
 \quad h(t) = -2,3(4-6) \\
 \quad h(4) = -2,3(-2) \\
 \quad = 4,6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \times h(t) = -2,3(t-6) \\
 \quad h(t) = -2,3(5-6) \\
 \quad h(5) = -2,3(-1) \\
 \quad = 2,3
 \end{array}$$

Por otro lado, se identifican algunos cálculos inadecuados, relacionados con valores de t que no corresponden al tramo de descenso ($k = 1$), sino al tramo de ascenso ($k = 1$), como se aprecia en el registro del equipo Tipo 1. Así como, con el planteamiento de una expresión algebraica diferente para el tramo de descenso ($k = 1$), como se observa en el registro del equipo Tipo 2.

Evidencias de respuesta $T_4P_{2a}(S_2)$ Tipo 1

2. $h(t) = -2,3(t + 6k)$

a.) $h(9) = -2,3(9 + 6) = -6,9$
 $h(8) = -2,3(8 + 6) = -4,6$
 $h(7) = -2,3(7 + 6) = -2,3$
 $h(6) = -2,3(6 + 6) = 0$

Evidencias de respuesta $T_4P_{2a}(S_2)$ Tipo 2

2.

a) $h(3) = -2,3(3 - 3) = 6,9$ $h(5) = -2,3(5 - 3) = 2,3$
 $h(4) = -2,3(4 - 3) = 4,6$ $h(6) = -2,3(6 - 3) = 0$

Este último registro, deja claro que los integrantes de este equipo no llevan a cabo ningún tipo de operación, ya que los cálculos numéricos realizados no satisfacen la igualdad propuesta, es decir no establecen argumentos válidos para probar los valores de $h(t)$.

2. b. Si $k = 0$ no representa este primer tramo, explique cuál es el valor mínimo que debe tomar k para que la expresión tenga sentido.

Tabla 55. Tipos de respuestas $T_4P_{2b}(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Explicación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que responden: el valor mínimo para que la expresión tenga sentido es $k = 1$.	De esta manera se verifican los valores de la altura para $k = 1$. No hay verificación algebraica por parte de los estudiantes.	4	14,3%
		El deportista ya lleva un recorrido (desplazamiento) y un tiempo determinado.	4	14,3%
		El deportista no empieza a descender desde $k = 0$, sino desde la altura máxima.	2	7,1%
		$k = 0$ es un punto de ascenso, a partir de $k = 1$ el deportista iniciara el descenso.	2	7,1%
		No hay.	2	7,1%
Tipo 2	Estudiantes que no especifican el valor mínimo para k .	$k = 0$ no representa este primer tramo ya que el descenso del deportista no inicio desde cero.	2	7,1%
Tipo 3	No responden		12	42,9%

La tipificación de respuestas a la pregunta 2b, pone de manifiesto que el 50% de los jóvenes indica $k = 1$ como valor mínimo para que $h(t) = -2,3(t - 6k)$ tenga sentido en el contexto de la situación, es decir como expresión que modela el primer tramo de descenso del deportista. Las explicaciones de los estudiantes giran en torno a la verificación de valores efectuada en el punto 2a de esta tarea, razón por la cual no comprueban algebraicamente la expresión dada para $k = 0$, lo anterior fue manifestado por los jóvenes durante la plenaria.

Los estudiantes reconocen que el ascenso ($k = 0$) del deportista o el hecho de que descienda desde la altura máxima conlleva al desplazamiento de la gráfica, lo que es coherente con la respuesta a la pregunta 4 de la tarea 2, donde los jóvenes argumentan que la gráfica del movimiento del deportista en el plano cartesiano toma esa forma debido al transcurso del tiempo. Se puede inferir que la identificación de un desplazamiento visual de la gráfica incide sobre la determinación de $k = 1$ como valor mínimo para la expresión que modela este primer tramo de descenso del deportista.

Evidencias de respuesta $T_4P_{2b}(S_2)$ Tipo 1

bº La expresión mínima que debe tomar k es $k=1$ ya que $k=0$ es un punto de ascenso a partir de $k=1$ iniciaría el descenso

Evidencias de respuesta $T_4P_{2b}(S_2)$ Tipo 2

b. no puede empezar desde cero ya que el deportista no comienza a descender desde cero sino desde que llega a la altura máxima.

Es oportuno señalar que solo uno de los equipos realiza una verificación algebraica que justifica la elección del valor $k = 1$ en lugar de $k = 0$ para este primer tramo de descenso. Así, su argumentación se fundamenta en demostrar que los valores hallados en la expresión $h(t) = -2,3(t - 6k)$ usando $k = 0$ no coinciden con los de la representación gráfica.

b) $h(t) = -2,3(t - 6k)$ $h(t) = -2,3t$
 $h(3) = -2,3 \cdot 3 = -6,9$ El valor mínimo es $k=1$
 $h(4) = -2,3 \cdot 4 = -9,2$ No se cumple con $k=0$ ya que
 $h(5) = -2,3 \cdot 5 = -11,5$ el deportista ya lleva un recorrido
 $h(6) = -2,3 \cdot 6 = -13,8$ y un tiempo

Por medio de la socialización al final de la situación 2, se pudo establecer que algunos estudiantes tomaban el valor de k de forma consecutiva, sin discriminar los tramos de ascenso y descenso, por lo cual se hizo necesario centrar la discusión en el valor del parámetro k en la ecuación de acuerdo a la traslación horizontal de la gráfica. De igual forma, se analizó la variación de la gráfica desde la inclinación de los tramos de ascenso (descenso) del deportista, es decir la pendiente positiva (pendiente negativa) y su caracterización en las respectivas ecuaciones. De este análisis se deduce que no hay una conceptualización de los modelos de

variación lineal por parte de los alumnos dado que no interpretan los cambios producidos por los diferentes parámetros en la gráfica y por ende en la expresión algebraica.

3. Al final de la discusión Valentina y Juan deciden que la expresión algebraica que modela la altura del deportista en función del tiempo es de la forma:

$$h(t) = \begin{cases} 2,3(t - 6k); k = 0,1,2,3, \dots; 6n \leq t \leq 3p \text{ donde } n = 0,1,2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \quad \textbf{(Tramos de ascenso)} \\ -2,3(t - 6k); k = 1,2,3, \dots; 3p \leq t \leq 6n \text{ donde } n = 1,2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \quad \textbf{(Tramos de descenso)} \end{cases}$$

Compruebe la validez de esta expresión para al menos dos valores de k y de t , para cada tramo (ascenso y descenso).

Tabla 56. Tipos de respuestas $T_4P_3(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que comprueban adecuadamente la validez de la expresión algebraica $h(t)$ para tramos de ascenso tomando dos valores de k y un valor para el tiempo.	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que comprueban adecuadamente la validez de la expresión algebraica $h(t)$ para tramos de ascenso tomando dos valores para el tiempo y un valor de k .	2	7,1%
Tipo 3	No responden/ No lo resuelven.	22	78,6%

El alto porcentaje de jóvenes que no responden/no resuelven esta pregunta, es coherente con las dificultades señaladas desde el inicio de la actividad y los resultados de los análisis llevados a cabo hasta ahora. Pocos estudiantes logran comprobar la expresión para $h(t)$ y si lo hacen es de forma parcial, usando algunos de los valores para k y t que han verificado en las preguntas anteriores.

Durante la plenaria el grupo en general manifiesta inconvenientes, aparte de los ya señalados, ligados con la expresión algebraica a trozos para la función $h(t)$ y las desigualdades. Para ambos aspectos dejan claro que sus cursos de matemática escolar no han hecho énfasis en este tipo de expresiones y operaciones. Algunos estudiantes en la interpretación de las variables que condicionan el valor de t asumen p como el periodo de la función, debido al uso de esta letra para simbolizarlo en las diversas tareas. Aunque se comprueba con todo el grupo de manera operativa (cálculos numéricos) la expresión algebraica para $h(t)$, esta toma sentido para los jóvenes cuando los valores encontrados para cada tramo de ascenso y descenso se confrontan con la gráfica que han elaborado, es decir nuevamente la representación cartesiana se constituye en el medio de validación de la expresión $h(t)$ para el movimiento del deportista.

Teniendo en cuenta los Lineamientos (1998) con respecto al pensamiento variacional se puede afirmar que los estudiantes reconocen, identifican y caracterizan un fenómeno de variación periódica como es el movimiento del deportista, al elaborar desde la representación tabular la gráfica de una función periódica e identificar su comportamiento en el plano. De esta manera, logran relacionar la representación discreta y cartesiana para este tipo de variación, sin embargo no interpretan la representación algebraica (ecuación) que captura la dependencia funcional establecida entre las variables: tiempo y altura. Se utiliza la palabra “interpretan” ya que la tarea no giraba en torno al planteamiento y escritura de la expresión algebraica; sino a la verificación y validación de la fórmula presentada.

4. Teniendo en cuenta las diferentes tareas llevadas a cabo en esta situación, escriba como define una función periódica.

Tabla 57. Tipos de respuestas $T_4P_4(S_2)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Una función periódica representa un fenómeno que se repite constantemente en un determinado intervalo de tiempo. Está caracterizada por un periodo.	14	50%
Tipo 2	Una función periódica es una gráfica que se repite en un periodo determinado de tiempo.	4	14,3%
Tipo 3	Una función periódica es el intervalo de tiempo que se tarda una acción en repetirse de igual forma.	4	14,3%
Tipo 4	Una función es periódica si determina una distancia en un tiempo.	2	7,1%
Tipo 5	Una función periódica es el tiempo exacto en el que se realiza algo.	2	7,1%
Tipo 6	No responden.	2	7,1%

Los diferentes significados de función periódica expuestos por los estudiantes dejan ver que el 50% relaciona esta clase de función con fenómenos, concepción que desde el enfoque de la EMR identifica la matemática como una disciplina que organiza diversos aspectos del entorno social y cultural. El hacer referencia a “una función periódica representa un fenómeno” permite deducir que hay un reconocimiento y comprensión de la modelación, por parte de los jóvenes, de fenómenos (independiente de su naturaleza) a través de este tipo particular de variación o cambio funcional, es decir logran superar el contexto de las situaciones problema planteadas: fases lunares y movimiento del deportista.

Al cuestionar a los estudiantes en la plenaria sobre la expresión “que se repite constantemente” estos aluden no solamente a una caracterización continua del fenómeno, es decir que “no se detiene o siempre se da”⁴⁶ sino que avanzan hacia una conceptualización de la repetición del fenómeno bajo las mismas condiciones. En este ámbito, la situación 2: Acerquémonos a las funciones periódicas brinda a los alumnos un contexto realista, donde la representación tabular y gráfica les permite identificar el periodo y predecir el comportamiento

⁴⁶ Esta caracterización fue dada por los estudiantes en la situación 1 a partir de las fases lunares y las cosechas de granos de café.

similar del fenómeno y por ende de la función que lo modela, reflejado en la gráfica en el plano cartesiano.

Al finalizar la situación 2 se encuentra que frente a los dos primeros desempeños esperados (tabla 4), los estudiantes en general interpretan una variación periódica desde la tabla de valores, describiendo aspectos fundamentales de este cambio funcional como es la dependencia entre variables e identificando patrones y regularidades para los tramos de ascenso y descenso del deportista. Además son capaces de representar a partir del registro tabular gráficamente una función periódica, esta afirmación se realiza teniendo en cuenta las representaciones cartesianas que para el movimiento del deportista efectúan los estudiantes (tarea 2, pregunta 2).

Con respecto al tercer desempeño propuesto, los jóvenes determinan el periodo de la función que modela el movimiento del deportista a partir de su representación gráfica. Particularmente la representación cartesiana (pregunta 5b, tarea 2) les permite a muchos estudiantes replantear la respuesta dada al ítem d (pregunta 3d, tarea 2), donde afirman que el periodo de la función es 3 segundos. Sin embargo, el análisis de resultados de la tarea 3 revela que pese a que los estudiantes reconocen el comportamiento de una variación periódica en el plano, es decir la forma repetitiva de la gráfica, no todos logran identificar el periodo de las funciones, esto debido en gran medida a dificultades asociadas con la graduación del eje de las abscisas.

En este ámbito, es pertinente resaltar que la determinación del periodo, por parte de los alumnos, se asocia directamente con el tiempo; es decir el valor numérico de p para cada función se acompaña de segundos como unidad de medida. Si bien esto se debe al contexto planteado: movimiento del deportista (tarea 1 y tarea 2), no se puede desconocer que las pocas situaciones que circulan en la Educación Básica y Media y hacen referencia a la variación periódica, se limitan a fenómenos relacionados con el tiempo.

Por otro lado, en cuanto a la verificación de la expresión algebraica de una función periódica (desempeño 4, tabla 4), se puede concluir que los estudiantes no validan $h(t)$ (tarea 4, pregunta 3) para el movimiento del deportista. Los registros, la interacción durante el desarrollo de la tarea y la plenaria permiten establecer que el estudio de las funciones llevado a cabo por este grupo, ha dejado de lado actividades en el aula que promuevan el planteamiento de una representación algebraica a partir de la tabla de valores y la gráfica. Así, los jóvenes manifiestan

un desconocimiento de este tipo de expresiones (a trozos), de las desigualdades para t y de los parámetros que caracterizan a $h(t)$.

En esta dirección, verificación de una expresión algebraica, se pudo determinar que la representación gráfica se convierte en el medio de validación de cualquier ecuación o fórmula dada; es decir tanto para la propiedad de periodicidad (pregunta 6, tarea 2) como para los tramos de ascenso y descenso del deportista (tarea 4, pregunta 1a, 2a). De lo contrario las expresiones carecen de sentido para los estudiantes, limitándose a un algoritmo que permite cálculos operativos.

De lo anterior, se puede deducir que los jóvenes de grado 10 – 1 a través de la situación 2 avanzan en la apropiación del concepto de función periódica, pues logran reconocer su comportamiento en el plano e indicar su periodo tomando como criterio la repetición de su forma en la representación cartesiana; así como relacionar las representaciones tabular y gráfica. Pero no se logra su formalización en tanto hay una designación inadecuada para el dominio y el rango de una función (desde la correspondencia entre dos conjuntos) y el modelo funcional periódico expresado algebraicamente no se puede desligar de su registro gráfico.

Se hace indispensable, ante los anteriores señalamientos, un replanteamiento del plan de área de matemáticas y de los planes de aula de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón que considere el estudio de patrones y regularidades periódicas desde los primeros grados de la Educación Básica como lo estipulan los Lineamientos (1998) y Estándares (2006) para la variación, así mismo que se implementen actividades que susciten el estudio de las funciones desde la modelación de situaciones cercanas a la realidad de los estudiantes, la articulación entre las diferentes representaciones simbólicas y el paso entre cada una de estas, sin desligar la perspectiva conjuntista. Así, se deben propiciar situaciones que conlleven a los estudiantes al análisis de representaciones cartesianas y tabulares de diversos modelos de funciones – incluyendo el periódico – que permitan el planteamiento de su ecuación a partir de la identificación de relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas (Estándares 2006, p. 87), por ejemplo el cambio del parámetro m (pendiente) para una dependencia lineal.

Desde el enfoque de la EMR, la situación 2, les permite a los estudiantes transitar entre el nivel referencial y el nivel general dentro del proceso de matematización vertical, ya que en las tareas 1, 2 y 4 hacen uso de las representaciones gráfica, tabular y algebraica, el conteo –

como modelo – y la repetición de la forma de la gráfica para sintetizar y solucionar el problema; todos estos aspectos relacionados con la situación a partir de la cual se originaron: el movimiento del deportista. Por su parte, en la tarea 3, los jóvenes pueden generalizar⁴⁷ el conteo, la forma de la gráfica y la determinación del periodo para cualquier representación cartesiana de una función periódica, es decir concluyen que estas estrategias se pueden utilizar en otras situaciones ubicándolos en un nivel general. A lo anterior se suma la caracterización de las diversas situaciones propuestas, fases lunares y movimiento del deportista, sin importar su naturaleza, como fenómenos de variación periódica.

3.4.3 Resultados y Análisis de Resultados de la Situación 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno

A partir de las inquietudes de Valentina y Juan con respecto a las funciones periódicas, el profesor de matemáticas decide proponerles una situación en un contexto de medida. Para esto partiendo de una circunferencia unitaria (*radio* = 1) cuya longitud es $L = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$, centrada en el origen del sistema de coordenadas relaciona a cada longitud de arco t un único punto $p(t) = (x, y)$ asociado al extremo del arco⁴⁸, estableciendo una correspondencia entre las longitudes de los arcos y parejas ordenadas de números reales (ver figura 1).

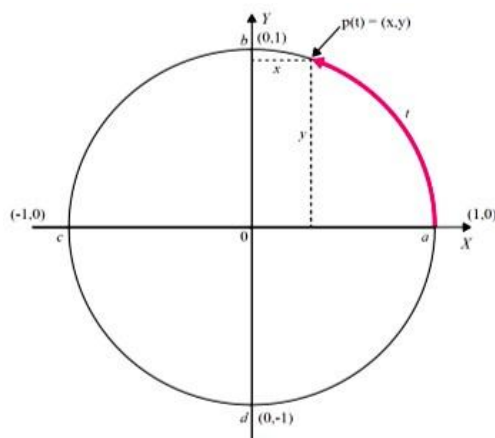


Figura 1.

⁴⁷ Esta palabra se usa en el sentido dado por el enfoque de la EMR.

⁴⁸ Un arco determinado en el sentido contrario a las manecillas del reloj se considera positivo; si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj el arco se considera negativo.

Por ejemplo, si el arco es de $\frac{1}{4}$ de circunferencia unitaria se tiene que: $t = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ entonces $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, como se observa en la figura 2.⁴⁹

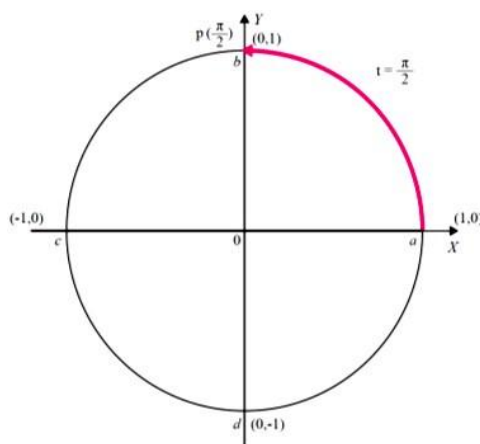


Figura 2.

Tarea 1: Caracterizando las funciones circulares seno y coseno como funciones periódicas

1. a. Teniendo en cuenta el texto inicial y las figuras 1, 2 y 3, complete la tabla, para los arcos de circunferencia dados.

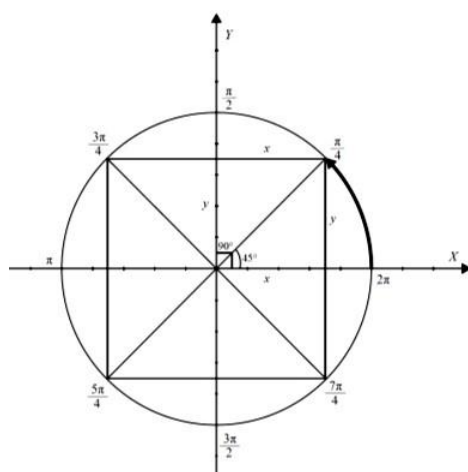


Figura 3.

⁴⁹ Las figuras 1 y 2 son tomadas del libro: Matemática Moderna y Estructurada 5. Editorial Norma, 1978. Pág. 46 – 47. El texto inicial es una adaptación de las definiciones dadas en este mismo libro (Pág. 45 – 46).

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0		
$\frac{1}{8}$ de circunferencia		
$\frac{3}{8}$ de circunferencia		
$\frac{1}{2}$ de circunferencia		
$\frac{5}{8}$ de circunferencia		
$\frac{3}{4}$ de circunferencia		
$\frac{7}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta completa		
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia		
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia		
2 vueltas completas		

Tabla 1.

La lectura de la situación 3, genera en los estudiantes inquietudes con respecto a la expresión $L = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$ para la longitud de la circunferencia unitaria, así como con el término longitud de arco. Al cuestionárseles, manifiestan desconocer el término longitud de arco y no recordar la expresión $L = 2\pi r$, aunque si haberla aplicado en sus cursos de matemáticas. De igual forma, la interpretación de las figuras 1, 2 y 3 se dificulta para el grupo en general, así es necesario el acompañamiento tanto en la lectura del texto, la explicación de la correspondencia entre las longitudes de los arcos y parejas ordenadas de números reales desde las gráficas (figuras 1 y 2) y el proceso algorítmico.

A diferencia de las situaciones 1 y 2 de esta propuesta de aula, la situación 3 se ubica en un contexto de medida dentro del mismo ámbito de la matemática (Panhuizen, 2003, p. 2) lo que

pudo ocasionar los interrogantes expresados por los estudiantes. Lo anterior evidencia además que el estudio de las funciones trigonométricas Seno y Coseno en su curso escolar de matemática, el cual partió desde las razones en el triángulo rectángulo hacia las funciones circulares, señalada en el capítulo 2 como una de las perspectivas predominantes en la enseñanza de esta disciplina, favoreció poco la comprensión de la dependencia y variación que las caracteriza, dado que para la fecha de implementación de la situación 3 los estudiantes ya habían abordado el concepto de función trigonométrica y su representación cartesiana.

Tabla 58. Tipos de respuestas $T_1P_{1a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que completan adecuadamente la tabla, para todos los valores de longitud de arco (t).	12	43%
Tipo 2	Estudiantes que completan adecuadamente la tabla, al menos para 12 valores de longitud de arco (t).	16	57%

Tabla 59. Tipos de respuestas $T_1P_{1a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que completan adecuadamente la tabla, para todas las parejas ordenadas.	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que completan adecuadamente la tabla, al menos para 12 parejas ordenadas.	12	43%
Tipo 3	Estudiantes que completan adecuadamente la tabla, máximo para 11 parejas ordenadas.	10	35,7%
Tipo 4	No responden.	2	7%

De la tabla 58 se puede establecer que el 43% de los jóvenes logra completar adecuadamente todos los valores para la longitud de arco t en contraste con el 14,3% (tabla 59) que completa adecuadamente la tabla 1 para la columna de parejas ordenadas. No obstante, se observa tanto en la tabla 58 como en la tabla 59 que 16 estudiantes y 12 estudiantes respectivamente, completan al menos la tabla 1 con un alto porcentaje (al menos doce valores) para la longitud de arco t y pareja ordenada $p(t)$.

Al efectuar el análisis de estos resultados es necesario considerar que durante el desarrollo de esta primera pregunta se presentan dificultades en la determinación de las parejas ordenadas para longitudes de arco asociadas a arcos que no coinciden con los ejes cartesianos,

por ejemplo $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$ de circunferencia y por ende a aquellos arcos mayores a 1 vuelta, que coinciden con los anteriores.

Si bien los estudiantes a partir de la figura 3, deducen que la circunferencia unitaria se encuentra dividida en ocho partes iguales y relacionan $\frac{1}{8}$ de circunferencia con la longitud de arco $t = \frac{\pi}{4}$ no logran establecer numéricamente las componentes x y y de la pareja ordenada. Se hace indispensable la socialización con todo el grupo para hallar el valor de estas componentes.

Al iniciar la explicación los jóvenes no identifican el triángulo rectángulo isósceles formado por esta longitud de arco ($t = \frac{\pi}{4}$) en el primer cuadrante y por tanto no comprenden la aplicación del Teorema de Pitágoras para el cálculo de las componentes de la pareja ordenada. Además las consideraciones: $x = y$ (por ser un triángulo isósceles); valor de la *hipotenusa* = 1, así como la racionalización del denominador (procedimiento algorítmico) en $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para llegar a la solución de los valores de x y y pasan desapercibidas para la mayoría de estudiantes en tanto manifiestan no entender en su totalidad lo realizado en el tablero.

Esta circunstancia genera una limitación de los estudiantes a los valores encontrados, dado que no se apropiaron del proceso de resolución; en sus propias palabras “profe, lo que nos interesa son los valores para determinar la pareja ordenada”.

Uno de los equipos reconoce y define las razones Seno, Coseno y Tangente, en el triángulo isósceles formado por $t = \frac{\pi}{4}$; como se presenta a continuación:

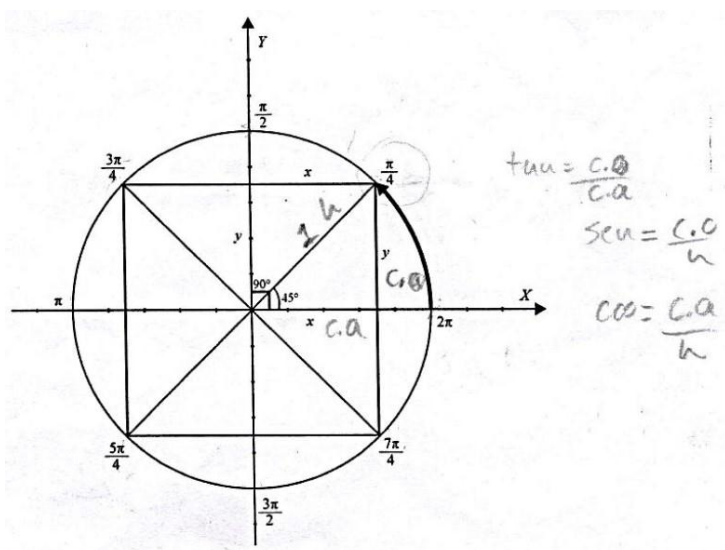


Figura 3.

De lo anterior se puede deducir que no hay conceptualización en los estudiantes de razón trigonométrica, en tanto no reconocen los cocientes entre los lados del triángulo rectángulo.

Una vez definida la pareja ordenada para $t = \frac{\pi}{4}$, se cuestiona a los estudiantes acerca de los valores de x y y para $t = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, la mayoría manifiesta que deben ser iguales, motivo por el cual se hace necesaria la discusión de la variación de los signos de la abscisa y de la ordenada de acuerdo a su ubicación en los cuadrantes.

Los siguientes son dos de los registros de los estudiantes al completar la tabla 1, el primero de estos con todos los valores de t las parejas $p(t)$ correctas; en el segundo se presentan algunas dificultades en los valores de las columnas t y $p(t)$:

Evidencias de respuesta $T_1P_{1a}(S_3)$ Tipo 1

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	$t = 0$	$P(t) = (1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	$t = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$	$P(t) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{5}{8}(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{7}{8}(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta completa	$t = 2\pi$	$P(t) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{9\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{5\pi}{2}$	$P(t) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{11\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$t = 3\pi$	$P(t) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{13\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{7\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{15\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2 vueltas completas	$t = 4\pi$	$P(t) = (1, 0)$

Evidencias de respuesta $T_1P_{1a}(S_3)$ Tipo 2

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$p(t) = (1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$p(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$p(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$p(t) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$p(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$p(t) = (\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$p(t) = (\frac{7\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	$p(t) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$p(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{2}$	$p(t) = (2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{4}$	$p(\frac{11\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	12π	$p(12\pi) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$p(\frac{13\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{2}$	$p(\frac{11\pi}{2}) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$p(\frac{15\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	16π	$p(16\pi) = (1, 0)$

Las dificultades de los estudiantes al completar las longitudes de arco en la tabla 1, radican en una asignación errónea de t a partir de un mal conteo de los arcos alrededor de la circunferencia unitaria y en una inadecuada aplicación de la expresión $t = arco \times (2\pi)$; como se puede apreciar en los registros dados a continuación:

Evidencias de respuesta $T_1P_{1a}(S_3)$ Tipo 1

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$(1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$P = \left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$P = (\pi) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$P = \left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$P = \left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$P = \left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta completa	2π	$P = (2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$P = \left(\frac{9\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{10\pi}{2}$	$P = \left(\frac{10\pi}{2}\right) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{4}$	
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$\frac{12\pi}{2}$	
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{14\pi}{2}$	
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	
2 vueltas completas	4π	

Evidencias de respuesta $T_1P_{1a}(S_3)$ Tipo 2

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$(1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$P = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$P = \left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$P = (\pi) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$P = \left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$P = \left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$P = \left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta completa	2π	$P = (2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$P = \left(\frac{9\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{10\pi}{2}$	$P = \left(\frac{10\pi}{2}\right) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{4}$	$P = \left(\frac{11\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$\frac{12\pi}{2}$	$P = \left(\frac{12\pi}{2}\right) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$P = \left(\frac{13\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{14\pi}{2}$	$P = \left(\frac{14\pi}{2}\right) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$P = \left(\frac{15\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2 vueltas completas	4π	$P = (4\pi) = (1, 0)$

El registro del equipo Tipo 1 deja ver, pese a que borraron, que los estudiantes llevan a cabo de manera adecuada el proceso de resolución para hallar los valores de t hasta el arco de $\frac{7}{8}$ de circunferencia, para el arco de 1 vuelta y 1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia no es coherente. Para el resto de arcos no especifican su procedimiento.

La siguiente tabla resume el proceso de resolución para determinar t donde se deduce la dificultad que muestran los equipos Tipo 1 y Tipo 2 anteriores al completar la tabla 1:

Arco	Longitud del arco (t)
0	0
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	$\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5}{8}(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7}{8}(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$
1 vuelta completa	2π
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9}{8}(2\pi) = \frac{9\pi}{4}$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{10}{4}(2\pi) = \frac{10\pi}{2}$

Es decir, para un arco de 1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia asumen $\frac{10}{4}$ en lugar de $\frac{10}{8}$, confundiendo la longitud del arco con el arco. Lo mismo sucede con:

$$1 \text{ vuelta y } \frac{1}{2} \text{ de circunferencia: } t = \frac{12}{4}(2\pi) = \frac{12\pi}{2}$$

$$1 \text{ vuelta y } \frac{3}{4} \text{ de circunferencia: } t = \frac{14}{4}(2\pi) = \frac{14\pi}{2}$$

Los anteriores resultados evidencian que estos 4 estudiantes no identifican este patrón de comportamiento – con base en el conteo – para los valores de t a partir de los arcos dados.

Por otro lado, se observa que algunos estudiantes (ver registro) dan como respuesta:

$$1 \text{ vuelta y } \frac{1}{2} \text{ de circunferencia: } t = 12\pi$$

$$1 \text{ vuelta y } \frac{3}{4} \text{ de circunferencia: } t = \frac{11\pi}{2}$$

$$2 \text{ vueltas completas: } t = 16\pi$$

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$P(0) = (1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$P(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$P(\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$P(\pi) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$P(\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$P(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$P(\frac{7\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	$P(2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$P(\frac{9\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{2}$	$P(\frac{5\pi}{2}) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{4}$	$P(\frac{11\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	12π	$P(12\pi) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$P(\frac{13\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{2}$	$P(\frac{11\pi}{2}) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$P(\frac{15\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	16π	$P(16\pi) = (1, 0)$

Durante la plenaria, al indagar acerca de sus resultados mencionan que siguen la regularidad en los valores de las longitudes de arco, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ vuelta y } \frac{3}{8} \text{ de circunferencia: } t &= \frac{11\pi}{4} \\
 1 \text{ vuelta y } \frac{1}{2} \text{ de circunferencia: } t &= \frac{12\pi}{4} \\
 1 \text{ vuelta y } \frac{5}{8} \text{ de circunferencia: } t &= \frac{13\pi}{4} \\
 1 \text{ vuelta y } \frac{3}{4} \text{ de circunferencia: } t &= \frac{14\pi}{4} \\
 1 \text{ vuelta y } \frac{7}{8} \text{ de circunferencia: } t &= \frac{15\pi}{4} \\
 2 \text{ vueltas completas: } t &= \frac{16\pi}{4}
 \end{aligned}$$

No obstante aunque los jóvenes admiten haber omitido el denominador en dos de sus respuestas, no pueden argumentar $t = \frac{11\pi}{2}$ de acuerdo a la regularidad establecida, motivo por el cual realizan el conteo alrededor de la circunferencia unitaria obteniendo para este valor de t , 2 vueltas y $\frac{3}{4}$ de circunferencia, que si bien corresponde al mismo punto $p(t)$ sobre la

circunferencia que $t = \frac{14\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}$, razón por la cual determinan adecuadamente la pareja ordenada, no se asocia con el arco de 1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia.

En cuanto a las dificultades presentadas en la determinación de las parejas ordenadas para cada longitud de arco (tabla 59), estas giran en torno al manejo inapropiado de los signos para x y y en cada uno de los cuadrantes y a valores erróneos de t debidos a un mal conteo de los arcos sobre la circunferencia unitaria, ver los siguientes registros.

Evidencias de respuesta $T_1P_{1a}(S_3)$ Tipo 1

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$p: (0) = (1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$p: (\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$p: (\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$p: (\pi) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$p: (\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$p: (\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$p: (\frac{7\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	$p: (2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$p: (\frac{9\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{2}$	$p: (\frac{5\pi}{2}) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{8}$	$p: (\frac{13\pi}{8}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	12π	$p: (12\pi) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$p: (\frac{13\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{2}$	$p: (\frac{11\pi}{2}) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$p: (\frac{15\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	16π	$p: (16\pi) = (1, 0)$

Evidencias de respuesta $T_1P_{1a}(S_3)$ Tipo 2

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$p: (0) = (1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$p: (\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$p: (\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$p: (\pi) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$p: (\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$p: (\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$p: (\frac{7\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	$p: (2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$p: (\frac{9\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{2}$	$p: (\frac{5\pi}{2}) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{8}$	$p: (\frac{13\pi}{8}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	12π	$p: (12\pi) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$p: (\frac{13\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{2}$	$p: (\frac{11\pi}{2}) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$p: (\frac{15\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	16π	$p: (16\pi) = (1, 0)$

Finalmente, es pertinente mencionar que aparecen en los registros de los estudiantes dos tipos de expresión para longitudes de arco mayores a 1 vuelta completa. La primera de ellas, vinculada al reconocimiento de $t = 2\pi$ para un arco de 1 vuelta, es decir una expresión mixta (parte entera – parte fraccionaria) para las longitudes de arco mencionadas. En este sentido, los estudiantes argumentan que esta notación les permite reconocer que ya han dado 1 vuelta sobre la circunferencia y haciendo uso de los primeros resultados de la tabla 1 ($0 \leq t \leq 2\pi$) pueden inferir que vuelven a los mismos puntos $p(t)$, por ende las parejas ordenadas son iguales aunque no siempre las determinen correctamente.

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	0
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$2 = \frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$	$P(t) = (1, 0)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$2 = \frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	$2 = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$	$P(t) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$2 = \frac{5}{8}(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$	$P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$2 = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$2 = \frac{7}{8}(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	$P(t) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	$P(t) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{3\pi}{4}$	$P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$2\pi + \pi$	$P(t) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{5\pi}{4}$	$P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{3\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{7\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	4π	$P(t) = (1, 0)$

La segunda notación, integra en una expresión fraccionaria el valor de t para arcos mayores a 1 vuelta completa. Esta expresión de t conlleva a los estudiantes a realizar conteo para determinar las parejas ordenadas asociadas al extremo de cada uno de estos arcos, sin desconocer que deben llegar al mismo punto, aunque no siempre lo concreten adecuadamente.

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	(1, 0)
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	(-1, 0)
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	(0, -1)
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	(1, 0)
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	3π	(-1, 0)
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{2}$	(0, -1)
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	4π	(1, 0)

El uso de las dos expresiones, no limita al menos la identificación por parte de los estudiantes de una variación periódica entre las longitudes de los arcos y las parejas ordenadas sobre la circunferencia unitaria.

Ante algunos cuestionamientos, por parte de los estudiantes se discute durante la socialización final (plenaria), la equivalencia entre estas expresiones, desde la operatividad, es decir $2\pi \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

b. Explique cómo determinó las longitudes de los arcos y las parejas ordenadas.

Tabla 60. Tipos de respuestas $T_1P_{1b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Explicación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Longitudes de los arcos	Efectuando $t = arco \times (2\pi)$ para arcos entre 0 y 1 vuelta completa. Para arcos mayores a 1 vuelta, considerando $2\pi = 1$ vuelta más la longitud correspondiente al arco de circunferencia establecido.	12	43%
		A partir de la figura 3, teniendo en cuenta el punto final de cada arco, contando y dando vueltas.	14	50%
Tipo 2	Longitudes de los arcos	Sin explicación.	2	7%

Tabla 61. Tipos de respuestas $T_1P_{1b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Explicación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Parejas ordenadas	A partir de la figura 3, teniendo en cuenta el punto final de cada arco, contando y dando vueltas.	16	57%
		Al determinar las parejas ordenadas para cada arco entre 0 y 1 vuelta, dábamos vueltas y caíamos en las mismas coordenadas.	4	14,3%
Tipo 2	Parejas ordenadas	Sin explicación.	8	28,6%

De las tablas 60 y 61, se puede establecer que el mayor porcentaje de estudiantes, 50% y 57% respectivamente, privilegia el conteo y las vueltas sobre la circunferencia unitaria como

estrategias para determinar tanto las longitudes de los arcos como las parejas ordenadas, tomando como referencia el punto final de cada arco, como lo confirman las siguientes respuestas:

Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 1

b. lo determinamos visualizando la grafica que el profesor nos dio. dando vueltas

Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 2

b. Explique cómo determinó las longitudes de los arcos y las parejas ordenadas.
Determinamos con el grafico q el Profe nos dio, dando vueltas y contando.

Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 3

b) Contamos cada coordenada semejante, hasta llegar al punto que nos pedia, despues cuando teniamos las coordenadas, sumabamos cada vuelta que daba, pero siempre cayendo en el mismo punto de las coordenadas, pero cambiando la longitud de cada arco.

De esta manera, el conteo prevalece como herramienta matemática usada por los estudiantes en el proceso de resolución de las tres situaciones planteadas en esta propuesta de aula, sin importar el contexto en que se encuentra inscrita cada situación.

Los resultados de la tabla 60, dejan ver además que 12 estudiantes hacen uso de la expresión $t = arco \times (2\pi)$, para arcos entre 0 y 1 vuelta. Para arcos mayores a 1 vuelta asocian directamente t con la porción (fracción) de la circunferencia dada en la columna 1, de la tabla 1. Es preciso aclarar que las respuestas dadas por los jóvenes en la determinación de las longitudes de arco, se limitaron a aquellos arcos comprendidos entre 0 y 1 vuelta, para arcos mayores a 1 vuelta se realizó una interpretación de sus registros; confirmados durante la plenaria.

Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 1

b. 0 como esta en cero no tiene longitud

- $\frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$
- $\frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$
- $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$
- $\frac{5}{8}(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$
- $\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$
- $\frac{7}{8}(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$

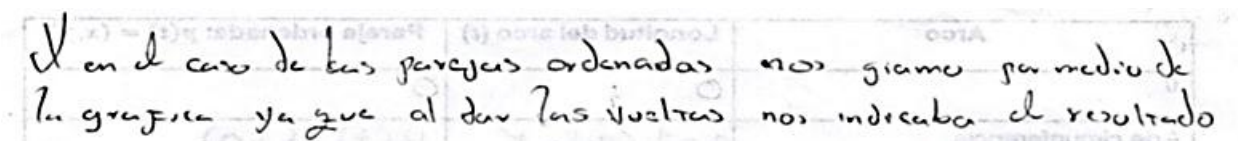
Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 2

bien el caso de los arcos lo determinamos por medio de una explicación del profesor Omar, y haciendo la operación indicado que $z = \frac{1}{8}(2\pi)$ dado que 2π pasa a simplificar a $\frac{1}{8}$ eso da $\frac{\pi}{4}$ y así salió la operación

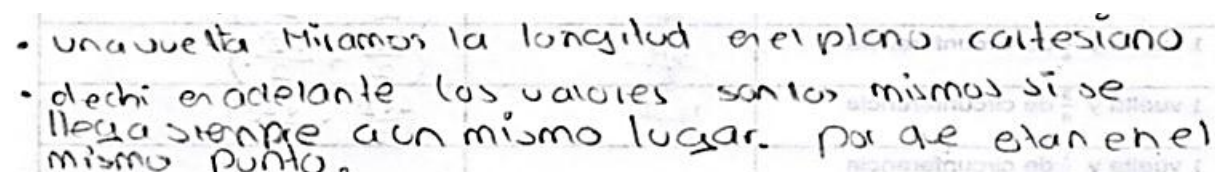
Justificación

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	0
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$z = \frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$	$P(t) = (1, 0)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$z = \frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	$z = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$	$P(t) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$z = \frac{5}{8}(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$	$P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$z = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$z = \frac{7}{8}(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta completa	2π	$P(t) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	$P(t) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{3\pi}{4}$	$P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$2\pi + \pi$	$P(t) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{5\pi}{4}$	$P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{3\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{7\pi}{4}$	$P(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2 vueltas completas	4π	$P(t) = (1, 0)$

Para la tabla 61, se observa que 20 estudiantes utilizan la representación gráfica (figura 3) para especificar las parejas ordenadas, aun teniendo definidas las coordenadas cartesianas dos de los equipos para longitudes de arco entre 0 y 2π . Lo anterior muestra que subyace la noción de periodicidad y una noción intuitiva del periodo (2π) en los estudiantes, aunque recurran a la circunferencia unitaria para dar veracidad a sus resultados.

Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 1


En el caso de las parejas ordenadas nos damos por medio de la grafica ya que al dar las vueltas nos indicaba el resultado

Evidencias de respuesta $T_1P_{1b}(S_3)$ Tipo 2


- una vuelta Miramos la longitud en el plano cartesiano
- de ahí en adelante los valores son los mismos si se llega siempre a un mismo lugar por que es en el mismo punto.

Durante la plenaria se cuestiona a los estudiantes sobre el uso del conteo en esta primera pregunta y la mayoría señala – por ejemplo – que un arco de $\frac{1}{8}$ de circunferencia y un arco de 1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia se ubican en el mismo punto $p(t)$ sobre la circunferencia unitaria, definiendo la misma pareja ordenada. Sin embargo, al igual que en la situación 2, la representación gráfica dada en la figura 3 corrobora estas afirmaciones. Si bien los estudiantes asumen, aunque no la hagan explícita, una variación periódica cada 2π verifican sobre la circunferencia unitaria a través del conteo, sus respuestas. Así, la representación cartesiana se constituye en el medio de validación tanto de las longitudes de arco como de las parejas ordenadas, lo que es coherente con los resultados indicados en las tablas 60 y 61.

Al margen de las dificultades relacionadas con respecto al uso del conteo, los signos para la abscisa y la ordenada en los cuadrantes, la aplicación de la expresión $t = arco \times (2\pi)$, así como la regularidad establecida para las longitudes de arco en la tabla 1; los estudiantes logran – al menos gráficamente – asociar un arco dado sobre una circunferencia unitaria con su respectiva longitud y pareja ordenada de reales, además de identificar un comportamiento periódico en esta correspondencia.

2. A partir de la tabla 1, establezca para cuáles longitudes de arco la pareja $p(t) = (x, y)$ es igual. Argumente su respuesta.

Tabla 62. Tipos de respuestas $T_1P_2(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Argumentación	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que establecen la pareja $p(t) = (x, y)$ igual al menos para 4 longitudes de arco.	Al dar una vuelta completa se vuelve al mismo punto, es decir se empiezan a repetir los mismos valores.	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que establecen la pareja $p(t) = (x, y)$ igual máximo para 3 longitudes de arco.	Al dar una vuelta completa se vuelve al mismo punto, es decir igual pareja ordenada.	10	35,7%
		Las parejas ordenadas iguales son aquellas donde el denominador es el mismo.	2	7,1%
Tipo 3	Estudiantes que establecen de manera no adecuada la pareja $p(t) = (x, y)$ para las longitudes de arco /No responden.	Los valores son iguales ya que al dar una vuelta quedan en el mismo lugar y las coordenadas se repiten.	2	7,1%
		Al ser diferentes los arcos, su longitud es distinta y por ende las parejas ordenadas.	2	7,1%
		Sin argumentación.	6	21,4%

La tabla 62 muestra que ninguno de los equipos establece en su totalidad las longitudes de arco para las cuales la pareja $p(t) = (x, y)$ es igual. Si bien hay un equipo que completa adecuadamente las columnas 2 y 3 de la tabla 1, se limita a una igualdad para dos valores de t . Los aspectos que más influyen en el bajo porcentaje de aciertos en esta pregunta, como ya se mencionó anteriormente, son los valores incorrectos para las componentes de $p(t) = (x, y)$ y los signos de la pareja ordenada dependiendo del cuadrante donde de esta se ubique. Por una parte, los estudiantes omiten el signo ya sea de la abscisa o de la ordenada, asumiendo que los valores de las coordenadas no varían de acuerdo a su posición en el plano cartesiano. Por otro lado, añaden un signo negativo cuando el valor de la abscisa o de la ordenada es negativo, así para

$t = \frac{3\pi}{4}$, $p(t) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ escribiendo $p(t) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, como se observa en el siguiente registro:

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	0
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{\pi}{4}$	$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{4}$	$P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	π	$P(\pi) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{4}$	$P\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{3\pi}{2}$	$P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{4}$	$P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta completa	2π	$P(2\pi) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$\frac{9\pi}{4}$	$P\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{5\pi}{2}$	$P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$\frac{11\pi}{4}$	$P\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	3π	$P(3\pi) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$\frac{13\pi}{4}$	$P\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$\frac{7\pi}{2}$	$P\left(\frac{7\pi}{2}\right) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$\frac{15\pi}{4}$	$P\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2 vueltas completas	4π	$P(4\pi) = (1, 0)$

No obstante, el 57,1% (clasificaciones tipo 1 y tipo 2, tabla 62) argumenta que las parejas ordenadas son iguales ya que al completarse una vuelta se vuelve al mismo punto de coordenadas y por ende se empiezan a repetir los valores de estas parejas, lo que deja ver una interpretación de la periodicidad en términos de la repetición de los parejas ordenadas para diferentes longitudes de arco. Ver los siguientes registros.

Evidencias de respuesta $T_1P_2(S_3)$ Tipo 1

2. On $\frac{1}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 1 vuelta, $\frac{1}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A un $\frac{1}{8}$ le sumas una vuelta, lo cual va a dar el mismo valor de las parejas ordenadas, lo que cambia es el arco

coordenadas cada vuelta (2π) con el periodo de esta situación de medida y correspondencia entre las longitudes de arco y las parejas ordenadas. Tal como sucede en la pregunta 1 de esta tarea. En dialogo con algunos de los equipos al plantearles la posibilidad de seguir dando vueltas sobre la circunferencia unitaria y que pasaría con las parejas ordenadas, reconocen que los valores de las parejas ordenadas serían iguales para aquellos arcos que tienen el mismo punto final y que al dar infinitas vueltas lo que varía es la longitud del arco. Al respecto, solo una pareja de estudiantes interpreta que no hay longitudes de arco para las cuales una pareja ordenada sea igual, ya que toda variación de t genera variación de $p(t)$.

2. Ninguna pareja es igual ya que cada uno de los arcos son diferentes lo que hace que la longitud sea distinta y las parejas ordenadas tambien.

Uno de los equipos intenta generalizar un comportamiento para la igualdad de las parejas ordenadas asociado al mismo denominador en algunas de las fracciones, lo que permite ver nuevamente que excluyen la variación del signo de las componentes de $p(t)$ según su posición en los cuadrantes del plano cartesiano.

2) R/= las parejas ordenadas las cuales dicen igual valor, fueren donde su denominador era el mismo.
Eje $\sim \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \text{etc}$

3. Indique entre qué valores varía la coordenada x y entre qué valores varía la coordenada y de la pareja ordenada $p(t) = (x, y)$.

Tabla 63. Tipos de respuestas $T_1P_3(S_3)$

Clasificación	Variación de la coordenada x	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Entre -1 y 1 .	10	35,7%
Tipo 2	Otro valor.	6	21,4%
Tipo 3	No responden.	12	42,9%

Tabla 64. Tipos de respuestas $T_1P_3(S_3)$

Clasificación	Variación de la coordenada y	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Entre -1 y 1 .	8	28,6%
Tipo 2	Otro valor.	8	28,6%
Tipo 3	No responden.	12	42,9%

Es necesario precisar que esta pregunta no es clara para los estudiantes, manifiestan no comprender el enunciado “entre qué valores varía la coordenada x y entre qué valores varía la coordenada y de la pareja ordenada $p(t) = (x, y)$ ”. Se debe socializar con el grupo la expresión variación de la coordenada x (y), para esto se les indica que observen en la tabla 1 la columna pareja ordenada $p(t)$ e identifiquen los distintos valores numéricos que toman x y y .

En esta identificación se percibe que los jóvenes conciben la variación numérica de las coordenadas x y y , aludiendo que pueden existir infinitos valores para estas, sin embargo como lo muestran las tablas 63 y 64, el 64,3% y el 71,5% respectivamente asignan otro valor o no responden. La dificultad radica en que los estudiantes no definen 1 y -1 como valores extremos que acotan esta variación numérica de x y y , es decir no los concretan como valor máximo y valor mínimo. En este sentido, la caracterización del rango de la dependencia funcional periódica entre longitud de arco y pareja ordenada de números reales expresada mediante la tabla 1 (Situación 3: tarea 1(a)) se hace compleja – para los estudiantes – en tanto para cada t hay una variación independiente de las componentes de la pareja ordenada (x, y) en el intervalo $[-1, 1]$. A esto se añade que algunas de las parejas ordenadas dadas por los equipos en la pregunta 1(a) son incorrectas.

Los registros presentan las diferentes respuestas dadas por los estudiantes, se resalta la referencia de infinitos valores entre -1 y 1 (equipo Tipo 1), donde subyace la idea de variación numérica para cada una de las coordenadas de $p(t)$.

Evidencias de respuesta $T_1P_3(S_3)$ Tipo 1

3 la coordenada menor de x es -1 la coordenada menor de y es -1
 la coordenada mayor de x es 1 la coordenada mayor de y es 1

Teniendo en cuenta que entre estos dos números $(-1 \leftrightarrow 1)$ hay una infinita cantidad de números

Evidencias de respuesta $T_1P_3(S_3)$ Tipo 2

3) Para x viene cuando la siguiente es: $1, -1, 0$ donde 1 viene siendo el de mayor valor y -1 es el de menor.
 Para y viene cuando la siguiente es: $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1$. donde 1 es el de mayor valor y -1 es el de menor valor.

Evidencias de respuesta $T_1P_3(S_3)$ Tipo 3

mayor de $x = -1$
 menor de $x = 1$
 mayor de $y = 0$
 menor de $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Evidencias de respuesta $T_1P_3(S_3)$ Tipo 4

-El valor que vemos lo coordinado x el eje 0 y $\sqrt{2}$
 -El valor que vemos lo coordinado y es eje 0 y $\sqrt{2}$

Tomando en consideración que a cada longitud de arco t se le puede asociar una pareja ordenada $p(t) = (x, y)$ se puede definir la función circular seno como la coordenada y del punto $p(t)$ y la función circular coseno como la coordenada x del punto $p(t)$, de tal manera que:

$$p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t).$$

A continuación se presentan algunos valores para $p(t)$ asociados a diferentes longitudes de arco t .

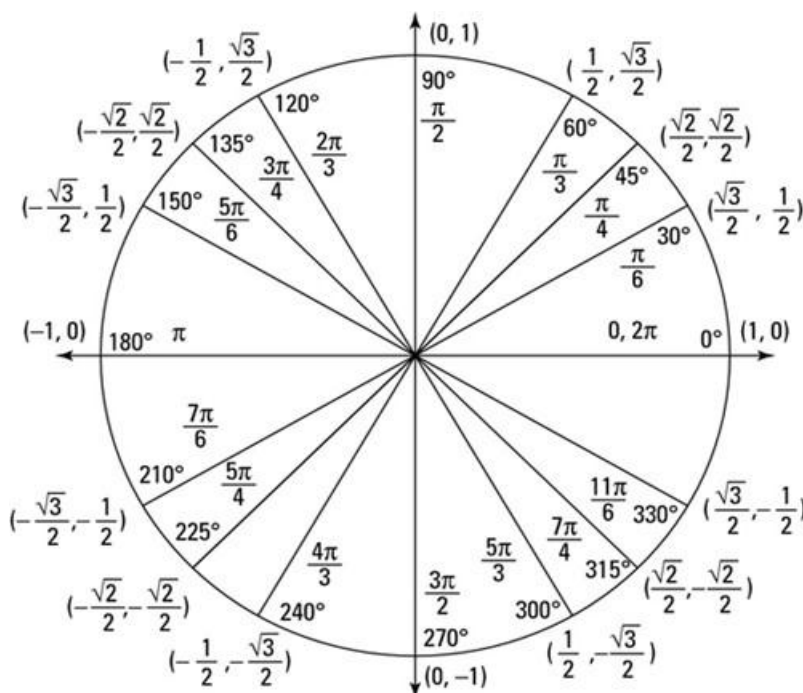


Figura 4. Círculo Trigonométrico⁵⁰.

4. A partir de la figura 4, indique cómo determinar el valor de *seno t* y *coseno t*, para longitudes de arco mayores a 2π .

Tabla 65. Tipos de respuestas $T_1P_4(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	A partir de los valores dados en la circunferencia, dando vueltas y contando se pueden conocer los valores para longitudes mayores a 2π .	16	57,1%
Tipo 2	Contando y sumando $\frac{\pi}{6}$ o 30° .	2	7,1%
Tipo 3	No responden.	10	35,7%

Un primer acercamiento a la lectura tanto del enunciado como de la figura 4 que enmarcan las preguntas 4 y 5 de esta tarea, deja ver que los estudiantes pese a percibir la correspondencia entre las longitudes de arcos y las parejas de números reales se les dificulta asociar la abscisa y la ordenada de la pareja $p(t) = (x, y)$ con las funciones circulares Coseno y

⁵⁰ Figura tomada de <https://sites.google.com/site/portafolioisainsaenz/-quinto-parcial/1-círculo-unitario>.

seno, respectivamente. Con base en el análisis de la pregunta 3 (situación 3) se puede inferir que el hecho de que t defina una variación independiente para cada coordenada de $p(t) = (x, y)$ obstaculiza la comprensión de la relación funcional:

$$t \rightarrow p(t) = x(\text{coseno } t) \text{ y } t \rightarrow p(t) = y(\text{seno } t)$$

Durante el desarrollo de esta parte de la tarea se discute con los estudiantes la interpretación de la pareja ordenada $p(t) = (x, y)$; para la mayoría $p(t) = (x, y)$ constituye una pareja donde x representa la variable independiente y y la variable dependiente, tal como se aborda en la enseñanza de las matemáticas escolares y se abarca en la situación 2 de esta propuesta de aula.

Esta concepción limita la visualización de t como variable independiente y las componentes x y y como variables dependientes dentro de la pareja $p(t) = (x, y)$, donde cada una de ellas determina una función circular caracterizada por un tipo particular de variación. Es indispensable señalar que el uso tradicional en la notación matemática de x para la variable independiente y su ubicación en el eje horizontal del plano cartesiano, contribuye a la restricción señalada ya que los valores del Coseno t (x) para la función $t \rightarrow p(t) = x$ se representan sobre el eje de las ordenadas.

Una vez resueltas las inquietudes de los estudiantes en torno al significado de la expresión $p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$, manifiestan que la figura 4 se encuentra “llena” de valores que no asocian con la tabla 1 que ellos han completado en la pregunta 1(a) de esta tarea. Se percibe complejidad para relacionar la representación tabular y la representación cartesiana de la dependencia entre las longitudes de arco y los valores de las parejas ordenadas. Es preciso indicar al grupo que contrasten algunos de los valores tanto para t como $p(t)$ de la tabla 1 y la figura 4.

De esta forma la tabla 65 muestra que la comparación con la tabla 1 les permite a los estudiantes deducir que el procedimiento para determinar el valor de Seno t y Coseno t para $t > 2\pi$ es el mismo usado para definir las parejas ordenadas en la pregunta 1(a), es decir efectuando conteo y giros sobre la circunferencia unitaria, donde es posible dar infinitas vueltas. De este modo validan (ver análisis pregunta 2, tarea 1) estas estrategias como herramientas matemáticas para dar solución al cuestionamiento planteado y reafirman el reconocimiento de la

variación periódica entre longitudes de arco y parejas ordenadas y por ende de los valores de las coordenadas x y y . A partir de este reconocimiento se esperaría que los jóvenes caracterizan la periodicidad de las funciones circulares Coseno t y Seno t sin estar ligada a la representación cartesiana (repetición de la gráfica).

Evidencias de respuesta $T_1P_4(S_3)$ Tipo 1

4. Con los valores de la circunferencia dando vueltas se pudo conocer los demás valores.

Evidencias de respuesta $T_1P_4(S_3)$ Tipo 2

4) Apartir de los resultados que me dan Coseno y Seno se puede dar 1 Vuelta.

Evidencias de respuesta $T_1P_4(S_3)$ Tipo 3

4. despues de tener algunos valores en la circunferencia lo que hicimos fue dar vueltas

Evidencias de respuesta $T_1P_4(S_3)$ Tipo 4

4) Según los resultados dados dividi en 2 uno Seno y el otro Cos, y empezase a contar, Según el Cuarto, medio Vuelta, me pedian y me daban un resultado.

Así, en virtud de los resultados obtenidos en la pregunta 3 (situación 3) con relación a la variación de las coordenadas x y y se cuestiona a los diferentes equipos tomando como referencia la figura 4, sobre este rango de variación. Las respuestas, en un principio, dejan claro que la interpretación realizada por los jóvenes del punto $p(t)$ sobre el círculo trigonométrico no

favorece la definición del intervalo $[-1,1]$, en tanto no reconocen que las coordenadas x y y crecen y decrecen entre estos dos valores. En este ámbito, influye un inadecuado orden en el conjunto de los números reales donde algunos estudiantes consideran válidas las desigualdades: $\frac{\sqrt{3}}{2} > 1$ y $\frac{\sqrt{2}}{2} > 1$. Se realiza con todo el grupo la verificación de la relación de orden no solo desde la representación gráfica dada en la figura 4 (posición del valor en el plano cartesiano) sino también con la calculadora.

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t																	

b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t																	

Tabla 66. Tipos de respuestas $T_1P_{5a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que completan en su totalidad y de manera adecuada la tabla para la función seno.	22	78,6%
Tipo 2	Estudiantes que no completan adecuadamente la tabla para la función seno.	6	21,4%

Tabla 67. Tipos de respuestas $T_1P_{5b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que completan en su totalidad y de manera adecuada la tabla para la función coseno.	10	35,7%
Tipo 2	Estudiantes que no completan adecuadamente la tabla para la función coseno.	18	64,3%

Los resultados de las tablas 66 y 67 evidencian una mayor dificultad en la determinación de los valores para la función Coseno t . Se esperaría que los estudiantes

completaran adecuadamente las dos tablas pues los primeros 9 valores para cada función estaban dados en el círculo trigonométrico y teniendo en cuenta que hay un reconocimiento de los jóvenes de la periodicidad en términos no solo de la repetición de las parejas ordenadas para diferentes arcos cuyo extremo final coincide, sino también cada vuelta (ver análisis preguntas 1 y 2, situación 3). No obstante, como ya se ha mencionado, esta identificación de una dependencia periódica y un periodo⁵¹ no garantiza su uso al momento de especificar los valores para Seno t y Coseno t , razón por la cual recurren al conteo de las longitudes de arco alrededor del círculo trigonométrico. Esta estrategia no siempre es aplicada correctamente, generando valores erróneos en las tablas 5a y 5b para estas funciones circulares.

Evidencias de respuesta $T_1P_{5a,b}(S_3)$ Tipo 1

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

⁵¹ Es pertinente recordar que los estudiantes no asocian, no hacen explícito, ni designan 2π con el término periodo. La interpretación se realiza a partir de los registros de los estudiantes, la socialización durante la actividad y la plenaria.

Evidencias de respuesta $T_1P_{5a,b}(S_3)$ Tipo 2

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Evidencias de respuesta $T_1P_{5a,b}(S_3)$ Tipo 3

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Evidencias de respuesta $T_1P_{5a,b}(S_3)$ Tipo 4

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

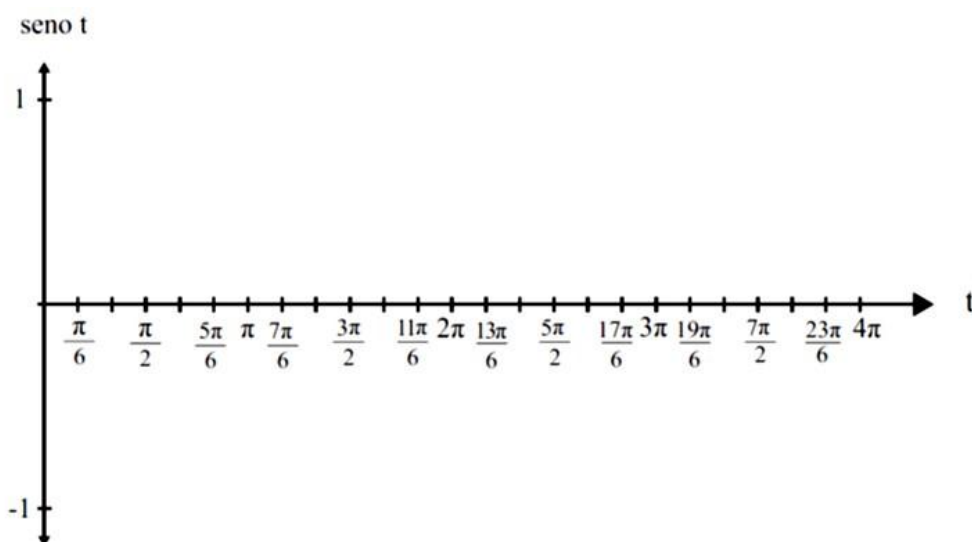
b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tarea 2: Aproximación gráfica de las funciones circulares seno y coseno

Dado que $p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$, lo que significa que a cada longitud de arco le corresponde un único valor $\text{seno } t$ y un único valor $\text{coseno } t$, realice las gráficas de estas funciones teniendo en cuenta las tablas de la pregunta 5 (a, b) de la tarea 1.

1. a. Gráfica de la Función Seno



b. Gráfica de la Función Coseno

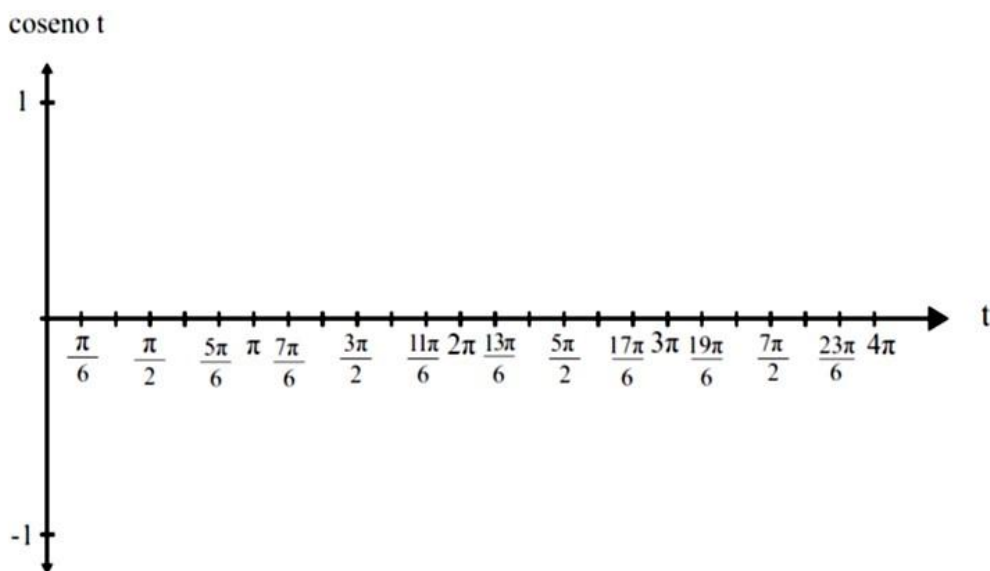


Tabla 68. Tipos de respuestas $T_2P_{1a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que realizan adecuadamente la gráfica para la función seno.	20	71,4%
Tipo 2	Estudiantes que no realizan adecuadamente la gráfica para la función seno.	8	28,6%

Tabla 69. Tipos de respuestas $T_2P_{1b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que realizan adecuadamente la gráfica para la función coseno.	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que no realizan adecuadamente la gráfica para la función coseno.	22	78,6%

Los resultados de las tablas 68 y 69 evidencian coherencia con las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 5a y 5b de la tarea 1. En este sentido, un mayor porcentaje 71,4% (tabla 68) representa adecuadamente la gráfica para la función circular Seno t , en tanto solo el 21,4% (tabla 69) para la función circular Coseno t . Hay incidencia de los valores erróneos dados en la tabla b (pregunta 5, tarea 1) sobre la aproximación gráfica de esta última función.

Con respecto a esta aproximación gráfica es indispensable reiterar, por una parte, que al momento de implementación de esta tarea los estudiantes ya habían efectuado el estudio de las funciones trigonométricas y sus representaciones cartesianas, sin embargo parece – al menos para la función circular Coseno t – que no hay movilización ni conexión de saberes previos en torno a la forma de la curva de esta función en el plano cartesiano. De esta manera, como lo señalan Santacruz (2005) y Montiel (2005) el enfoque tradicional en la enseñanza de la trigonometría escolar de las razones trigonométricas hacia las funciones trigonométricas contribuyó poco a la comprensión de la variación y dependencia periódica para estas funciones trascendentes y por ende a la concepción de función trigonométrica.

Por otra parte, como se mencionó con anterioridad, los estudiantes no utilizan el reconocimiento de la periodicidad que han caracterizado para la dependencia entre longitudes de arco y parejas ordenadas desde la tarea 1 para la representación gráfica de las funciones circulares Seno t y Coseno t . Es decir aunque la mayoría de jóvenes alude que cada vuelta los valores de las componentes de las parejas ordenadas se repiten, no designan $1 \text{ vuelta} = 2\pi$ como el periodo de las relaciones funcionales Seno t y Coseno t .

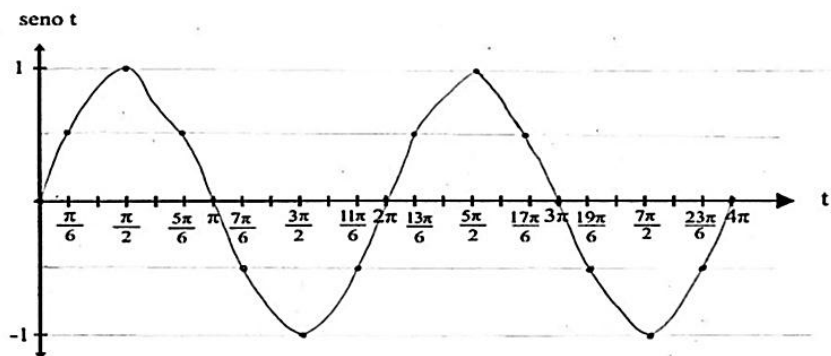
En términos generales, la asignación de valores incorrectos en las tablas a y b (pregunta 5, tarea 1) ligada a la no identificación del periodo de estas funciones y al inadecuado conteo de las longitudes de arco dificultan el paso de la representación discreta (tabular) a la representación continua (cartesiana), obstaculizando la aproximación gráfica para las funciones circulares $\text{Seno } t$ y $\text{Coseno } t$ y su tratamiento como funciones de variación periódica en términos de su forma en el plano cartesiano.

En la elaboración de las gráficas cartesianas la mayoría de los estudiantes usa la calculadora para aproximar aquellos valores de $\text{Seno } t$ y $\text{Coseno } t$ que involucran raíces cuadradas.

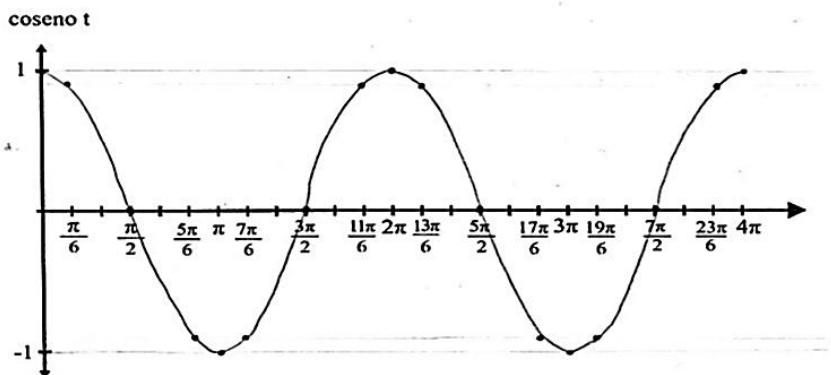
Las aproximaciones gráficas dadas a continuación se corresponden con las tablas presentadas para cada equipo en la pregunta 5a y 5b de la tarea 1 de esta situación.

Evidencias de respuesta $T_2P_{1a,b}(S_3)$ Tipo 1

1. a. Gráfica de la Función Seno

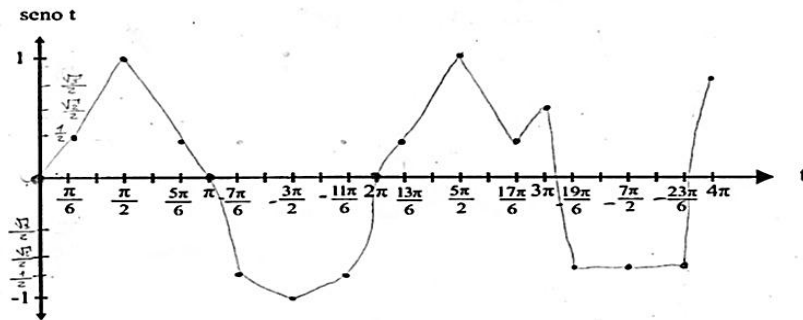


b. Gráfica de la Función Coseno

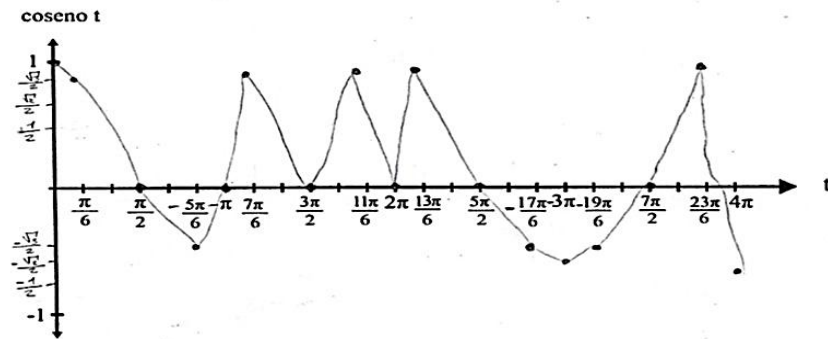


Evidencias de respuesta $T_2P_{1a,b}(S_3)$ Tipo 2

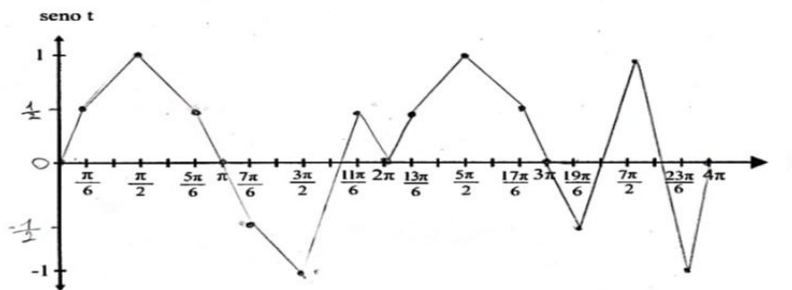
1. a. Gráfica de la Función Seno



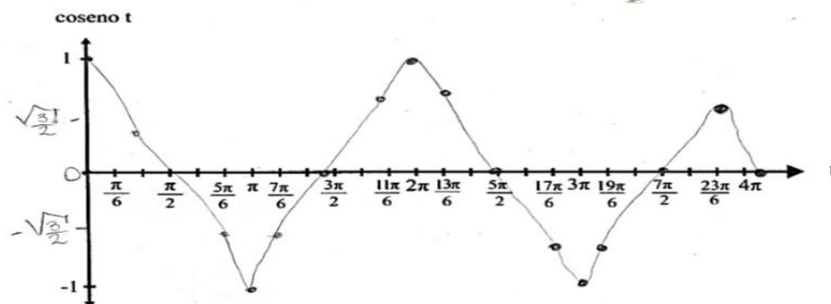
b. Gráfica de la Función Coseno

Evidencias de respuesta $T_2P_{1a,b}(S_3)$ Tipo 3

1. a. Gráfica de la Función Seno

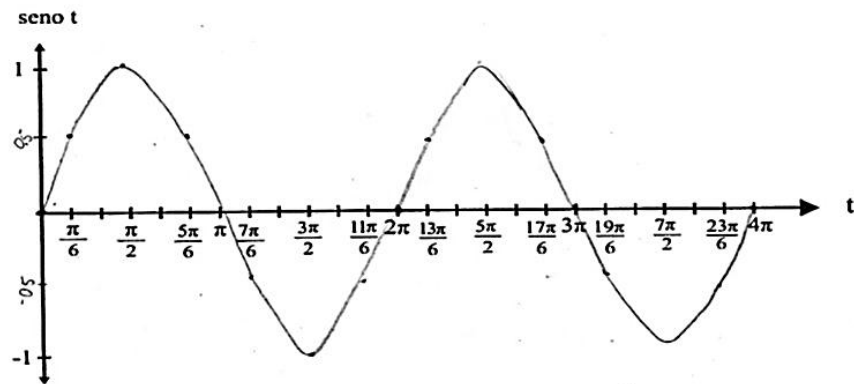


b. Gráfica de la Función Coseno

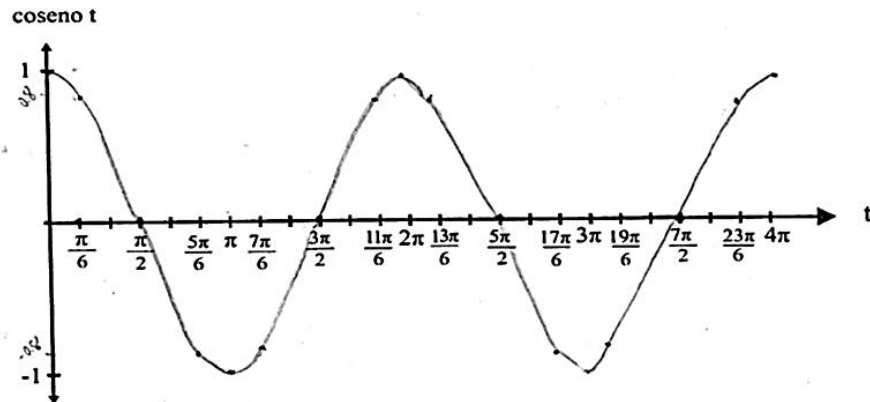


Evidencias de respuesta $T_2P_{1a,b}(S_3)$ Tipo 4

1. a. Gráfica de la Función Seno



b. Gráfica de la Función Coseno



2. Con base en las gráficas anteriores determine:

- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función coseno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función coseno.

Tabla 70. Tipos de respuestas $T_2P_{2a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan las longitudes de arco asociadas al valor máximo para la función seno.	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que mencionan únicamente el valor máximo para la función seno.	14	50%
Tipo 3	No responden.	10	35,7%

Tabla 71. Tipos de respuestas $T_2P_{2b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan las longitudes de arco asociadas al valor mínimo para la función seno.	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que mencionan únicamente el valor mínimo para la función seno.	14	50%
Tipo 3	No responden.	10	35,7%

Tabla 72. Tipos de respuestas $T_2P_{2c}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan las longitudes de arco asociadas al valor máximo para la función coseno.	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que mencionan únicamente el valor máximo para la función coseno.	14	50%
Tipo 3	No responden.	10	35,7%

Tabla 73. Tipos de respuestas $T_2P_{2d}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan las longitudes de arco asociadas al valor mínimo para la función coseno.	4	14,3%
Tipo 2	Estudiantes que mencionan únicamente el valor mínimo para la función coseno.	12	42,9%
Tipo 3	Estudiantes que mencionan como valor mínimo para la función coseno: cero.	2	7,1%
Tipo 4	No responden.	10	35,7%

El análisis de los resultados de la pregunta 2 (a, b, c y d) evidencia en primer lugar, que en contraste con los resultados de la pregunta 3 (tarea 1) el número de estudiantes que determina el intervalo $[-1,1]$ como el rango de variación de las funciones circulares Seno t y Coseno t aumenta (clasificación tipo 1 y 2, tablas 70 – 73); así la discusión generada alrededor de la interpretación del círculo trigonométrico (pregunta 4, tarea 1) ayuda a puntualizar estos valores como mínimo y máximo. En segundo lugar, con referencia a las aproximaciones gráficas elaboradas por los estudiantes en la pregunta 1 (tarea 2), estas les permiten a los jóvenes validar los valores al margen si son adecuadas o no, como es el caso de la función circular Coseno t donde el 78,6% (tabla 69) no realiza una representación cartesiana correcta.

De este modo, aunque la representación gráfica se constituye en un medio para validar -1 y 1 como valores mínimo y máximo no favorece la determinación de las longitudes de arco asociadas a estos (clasificación tipo 1, tablas 70 – 73), en gran parte por las dificultades generadas en la pregunta 5 de la tarea 1 (ver análisis). En general pese a que los estudiantes han asociado a cada longitud de arco una pareja ordenada (situación 3, tarea 1), errores tanto en la interpretación y asignación de las coordenadas de las componentes de $p(t)$ a partir del círculo trigonométrico impide que identifiquen los valores de t para los cuales las funciones circulares Seno t y Coseno t alcanzan su punto máximo y mínimo.

Evidencias de respuestas $T_2P_{2a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 1: Realiza una adecuada aproximación gráfica solo para la función Seno t .

2.) R/ * El valor mayor en el seno es 1
Se repite en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

El de menor valor en el seno es -1
Se repite en $\frac{3\pi}{2}$

* El de mayor valor en el coseno es 1
Se repite $\frac{\pi}{2}, 2\pi,$
El menor valor en el coseno es 0
Se repite en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, 4\pi$

Evidencias de respuestas $T_2P_{2a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 2: Realiza una adecuada aproximación gráfica solo para la función Seno t .

- longitud del arco para el max de función Seno es 1
- longitud del arco para el min de función Seno es -1
- longitud del arco para el max de función Coseno es 1
- longitud del arco para el valor min de función Coseno es -1

Se observa por la respuesta, que esta pareja de estudiantes identifican -1 y 1 con las longitudes del arco y no con los valores mínimo y máximo para las funciones Seno t y Coseno t .

Evidencias de respuestas $T_2P_{2a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 3: Realiza una adecuada aproximación gráfica solo para la función Seno t .

- 2. a. Las longitudes de arco asociadas al valor máximo para la función seno son $\frac{\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2}$
- b. Las longitudes de arco asociadas al valor mínimo para la función seno son $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{2}$
- c. Las longitudes de arco asociadas al valor máximo para la función coseno $0, 2\pi, 4\pi$
- d. Las longitudes de arco asociadas al valor mínimo para la función coseno $\pi, 3\pi$

Evidencias de respuestas $T_2P_{2a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 4: Realiza aproximaciones gráficas inadecuadas tanto para la función Seno t como para la función Coseno t (Equipo Tipo 3: pregunta 1, situación 3).

- 2 a. el valor máximo asociado para la función seno es 1
el valor mínimo asociado para la función seno es -1
- b. el valor máximo asociado para la función coseno es 1
el valor mínimo asociado para la función coseno es -1

Evidencias de respuestas $T_2P_{2a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 5: Realiza aproximaciones gráficas adecuadas tanto para la función Seno t como para la función Coseno t .

- 2) a) El Valor Máximo Corresponde a 1 ^{SENO} que se repite en:
 $\checkmark \frac{\pi}{2}$ $\checkmark \frac{5\pi}{2}$
- b) El Valor mínimo Corresponde a -1 ^{SENO} que se repite en:
 $\checkmark \frac{3\pi}{2}$ $\checkmark \frac{7\pi}{2}$
- c) El Valor máximo Corresponde a 1 ^{COSENO} que se repite en:
 $\checkmark 0$ $\checkmark 2\pi$ $\checkmark 4\pi$
- d) El Valor mínimo Corresponde a -1 ^{COSENO} que se repite en:
 $\checkmark \pi$ $\checkmark 3\pi$

Los análisis llevados hasta el momento de la tarea 1 y tarea 2, de esta tercera situación, ratifican el uso del círculo trigonométrico como elemento tradicional para dotar a la trigonometría de carácter funcional (Montiel, 2005, p. 124) pues los alumnos logran identificar una dependencia periódica entre las longitudes de arco y las parejas ordenadas en términos de la repetición de los valores de las coordenadas cada vuelta, pero el hecho de que los jóvenes en su mayoría no asocien este patrón regular de medida con el periodo y el tipo de variación que caracteriza la función: $t \rightarrow p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)^{52}$ obstaculizan la construcción de las funciones trigonométricas en un contexto analítico (Montiel, 2005, p 125). Se puede concluir además que a diferencia de la situación 2, la aproximación gráfica (pregunta 1, tarea 2) para la mayoría de equipos no propicia la comprensión de la dependencia periódica de las funciones circulares Seno t y Coseno t , ligada a la forma repetitiva (en intervalos regulares) de una gráfica en el plano cartesiano.

⁵² Ver análisis pregunta 3, tarea 1. Situación 3.

3. Determine el valor de:

- a. $\text{seno } \frac{7\pi}{6} =$
- b. $\text{coseno } \frac{5\pi}{3} =$
- c. $\text{coseno } 3\pi =$
- d. $\text{seno } \frac{\pi}{6} =$
- e. $\text{coseno } \frac{5\pi}{2} =$

Tabla 74. Tipos de respuestas $T_2P_{3a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan el valor correcto de $\text{seno } \frac{7\pi}{6}$.	24	85,7%
Tipo 2	Estudiantes que determinan el valor incorrecto de $\text{seno } \frac{7\pi}{6}$.	2	7,1%
Tipo 3	No responden.	2	7,1%

Tabla 75. Tipos de respuestas $T_2P_{3b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan el valor correcto de $\text{coseno } \frac{5\pi}{3}$.	12	42,9%
Tipo 2	Estudiantes que determinan el valor incorrecto de $\text{coseno } \frac{5\pi}{3}$.	14	50%
Tipo 3	No responden.	2	7,1%

Tabla 76. Tipos de respuestas $T_2P_{3c}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan el valor correcto de $\text{coseno } 3\pi$.	18	64,3%
Tipo 2	Estudiantes que determinan el valor incorrecto de $\text{coseno } 3\pi$.	8	28,6%
Tipo 3	No responden.	2	7,1%

Tabla 77. Tipos de respuestas $T_2P_{3d}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan el valor correcto de $\text{seno } \frac{\pi}{6}$.	26	92,9%
Tipo 2	No responden.	2	7,1%

Tabla 78. Tipos de respuestas $T_2P_{3e}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan el valor correcto de $\text{coseno } \frac{5\pi}{2}$.	24	85,7%
Tipo 2	Estudiantes que determinan el valor incorrecto de $\text{coseno } \frac{5\pi}{2}$.	2	7,1%
Tipo 3	No responden.	2	7,1%

Es importante indicar que en la solución de esta pregunta, los estudiantes recurren al círculo trigonométrico (figura 4) y no a la aproximación gráfica (pregunta 1, tarea 2) para obtener los valores del Seno y del Coseno, el motivo de esta selección según manifiestan obedece a que la representación cartesiana de la figura 4 les permite visualizar de manera más sencilla y precisa los valores numéricos.

En general, aunque un mayor porcentaje de jóvenes (tablas 74, 76, 77 y 78) da el valor correcto para el Seno y el Coseno, los resultados de la tabla 75 muestran dificultades para $\coseno \frac{5\pi}{3}$, estas radican en un error de asignación de la coordenada que representa la función Coseno t en la pareja ordenada $p(t)$. Es decir la mayoría de estudiantes asume para el $\coseno \frac{5\pi}{3}$ el valor del Seno e incluso suprimen para este valor ($\seno \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) el radical. Frente al porcentaje de valor incorrecto para $\coseno 3\pi$ en la tabla 76 se observa que no toman en cuenta el signo, resultado de un mal conteo que los ubica en 2π , razón por la cual señalan 1. Este argumento fue expresado durante la plenaria.

Evidencias de respuestas

$T_2P_{3a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 1

3. Determine el valor de:

- a. $\seno \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- b. $\coseno \frac{5\pi}{3} = -\frac{3}{2}$
- c. $\coseno 3\pi = -1$
- d. $\seno \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- e. $\coseno \frac{5\pi}{2} = 0$

Evidencias de respuestas

$T_2P_{3a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 2

3. Determine el valor de:

- a. $\seno \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- b. $\coseno \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- c. $\coseno 3\pi = 1$
- d. $\seno \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- e. $\coseno \frac{5\pi}{2} = 1$

Evidencias de respuestas

$T_2P_{3a,b,c,d}(S_3)$ Tipo 3

3. Determine el valor de:

- a. $\seno \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- b. $\coseno \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- c. $\coseno 3\pi = -1$
- d. $\seno \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- e. $\coseno \frac{5\pi}{2} = 0$

- 4. a. Indique las razones por las cuales la función seno es periódica y determine su periodo.
- b. Indique las razones por las cuales la función coseno es periódica y determine su periodo.

Tabla 79. Tipos de respuestas $T_2P_{4a}(S_3)$

Clasificación	Razones	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Tiene un periodo de tiempo, el cual al terminar se vuelve a repetir.	8	28,6%
Tipo 2	Su movimiento se repite (vuelve al mismo lugar).	12	42,9%
Tipo 3	Su movimiento es constante y curvilíneo.	2	7,1%
Tipo 4	No responden.	6	21,4%

Tabla 80. Tipos de respuestas $T_2P_{4a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan de forma correcta el periodo para la función seno.	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que determinan de forma incorrecta el periodo para la función seno.	8	28,6%
Tipo 3	No responden.	14	50%

Tabla 81. Tipos de respuestas $T_2P_{4b}(S_3)$

Clasificación	Razones	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Se repite en un determinado tiempo para llegar al valor final de donde inicio.	6	21,4%
Tipo 2	Su movimiento se repite (vuelve al mismo lugar). Tiene un ciclo.	14	50%
Tipo 3	Su movimiento es constante y curvilíneo.	2	7,1%
Tipo 5	No responden.	6	21,4%

Tabla 82. Tipos de respuestas $T_2P_{4b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que determinan de forma correcta el periodo para la función coseno.	6	21,4%
Tipo 2	Estudiantes que determinan de forma incorrecta el periodo para la función coseno.	8	28,6%
Tipo 3	No responden.	14	50%

Las razones expuestas por los estudiantes para indicar la periodicidad de las funciones Seno t y Coseno t (tablas 79 y 81) deja ver que para algunos jóvenes el periodo de una función, tal vez por la naturaleza de los fenómenos propuestos en la situación 1 y la situación 2, continúa ligado al tiempo. Es decir, no hay comprensión del periodo en un contexto de medida de arcos y longitudes de arco (situación 3). Lo anterior evidencia desde del enfoque de la EMR, que para estos estudiantes la noción de periodo se ubica en el nivel referencial, en tanto como concepto sigue ligado al contexto de las situaciones en las cuales se originó: fases de la luna y movimiento del deportista.

Lo anterior no contradice que la situación 2, les haya permitido a los estudiantes transitar entre el nivel referencial y el nivel general dentro del proceso de matematización

vertical, pues como lo establece Gravemeijer (2002, citado por Bressan, Gallego y Zolkower, 2004, p. 7) los niveles de comprensión situacional, referencial, de generalización y formalización no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada.

Los resultados de la tabla 79, muestran que la función Seno t es periódica a partir del movimiento repetitivo de su aproximación gráfica, donde los estudiantes especifican que vuelve al punto desde el cual inicio. Esta validación gráfica se justifica en tanto el 71,4% (tabla 68) efectúa una adecuada representación cartesiana de esta función. Sin embargo, para el caso de la función Coseno t (tabla 81) donde solo 6 estudiantes (tabla 69) llevan a cabo una correcta representación gráfica, el argumento de los jóvenes gira alrededor del reconocimiento de la periodicidad en términos de la repetición de las parejas ordenadas (ver análisis tarea 1, situación 3). Esta afirmación se realiza a partir de la discusión e interacción con los jóvenes durante la plenaria.

En cuanto al periodo de estas funciones circulares, el porcentaje que determina correctamente su valor (tablas 80 y 82) no varía pese al número de estudiantes (tabla 68) que realizan una adecuada aproximación gráfica de la función seno. En este sentido, se puede deducir que si bien la repetición de la gráfica válida la periodicidad de Seno t , no les permite identificar el valor numérico del periodo a partir de esta. A diferencia de la situación 2 (tarea 3) donde las dificultades se asocian con la graduación del eje de las abscisas, en el caso de la función Seno t conciernen con la imposibilidad de reconocer que la variación periódica de las longitudes de arco y las coordenadas x y y de la pareja ordenada $p(t)$ sobre el círculo trigonométrico es la misma que caracteriza las funciones Seno t y Coseno t ; es decir los estudiantes asignan la dependencia periódica a las coordenadas x y y pero no a las funciones definidas por estas componentes en: $t \rightarrow p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$.

Por tanto el transito círculo trigonométrico $\rightarrow$ función trigonométrica, como lo afirma Montiel (2005, p. 125) no es evidente, aun cuando la propuesta de aula aquí desarrollada no aborda el enfoque clásico de las razones hacia las funciones trigonométricas ni se centra en la discusión de la unidad de medida (ángulos y radianes).

Evidencias de respuesta $T_2P_{4a,b}(S_3)$ Tipo 1

4. a: El seno es periodico porque se ve un movimiento constante y curvilíneo, su periodo es de 2π , osea un círculo o circunferencia entera.
- b: El coseno es periodico tambien, porque hay un movimiento constante y rectilíneo, su periodo es de 2π , osea un círculo entero

La respuesta de este equipo al punto b, hace referencia a un movimiento constante y rectilíneo dado que en la aproximación gráfica del Coseno t realizan trazos rectos, lo anterior no limita el reconocimiento del valor para el periodo.

Evidencias de respuesta $T_2P_{4a,b}(S_3)$ Tipo 2

- 4) a) Es periodica por que tiene un periodo de tiempo en el que cuando termina se vuelve a repetir y su periodo es de 2π
- b) Es periodica porque tiene un ciclo de 2π en el que vuelve y se repite

Evidencias de respuesta $T_2P_{4a,b}(S_3)$ Tipo 3

- 1) La función de seno es periodica, porque se repite en un determinado tiempo para llegar al valor final de donde inicio. Su periodo es de 3 tiempos.
- * La función coseno es periodica, porque se repite en un determinado tiempo para llegar al valor final de donde inicio. Su periodo es de 3 tiempos.

A partir de la aproximación gráfica efectuada por este grupo de estudiantes se infiere que los tres tiempos hacen referencia a la repetición de la gráfica a partir del valor asociado a π . Para el Seno este valor es 0 y para el Coseno -1 , es decir que tanto para el Seno t como para el Coseno t la gráfica se empieza a repetir solo a partir de 3π .

Evidencias de respuesta $T_2P_{4a,b}(S_3)$ Tipo 4

4a. seno es periodico por que siempre vuelve al mismo lugar
 osea se repite y su periodo es cada π
 b. coseno es periodico porque siempre vuelve al mismo punto
 y se repite cada $\frac{\pi}{2}$

Esta respuesta deja ver que persiste, como se presentó en la situación 1 y la situación 2, en algunos estudiantes la comprensión de periodo ligada a las etapas o fases que caracterizan una situación, para este caso la forma de un tramo de la gráfica y no a la repetición de la gráfica de la función cada 2π .

5. Compruebe para al menos dos valores de t que el periodo p obtenido en la pregunta 4, verifica:

- a. $\text{seno}(t + p) = \text{seno } t$
- b. $\text{coseno}(t + p) = \text{coseno } t$

Tabla 83. Tipos de respuestas $T_2P_{5a}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que comprueban la expresión $\text{seno}(t + p) = \text{seno } t$.	6	21,4%
Tipo 2	No responden.	22	78,6%

Tabla 84. Tipos de respuestas $T_2P_{5b}(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Estudiantes que comprueban la expresión $\text{coseno}(t + p) = \text{coseno } t$.	4	14,3%
Tipo 2	No responden.	24	85,7%

De las tablas 83 y 84 se observa que un bajo porcentaje de estudiantes comprueba las expresiones $\text{seno}(t + p) = \text{seno } t$ y $\text{coseno}(t + p) = \text{coseno } t$, debido fundamentalmente a la dificultad para determinar el periodo p , como se mostró en la pregunta 4 de esta tarea. Si bien la interacción y discusión con los estudiantes revela que el proceso de verificación de la propiedad de periodicidad es entendido, pues lo relacionan con la expresión $h(t + p) = h(t)$ de

la pregunta 6 (tarea 2, situación 2) que comprobaron adecuadamente; la no asignación o asignación errónea de p , como se señaló en las tablas 80 y 82, obstaculiza la validación de estas igualdades para las funciones Seno t y Coseno t .

Los equipos que verifican la propiedad de periodicidad $\text{seno}(t + p) = \text{seno } t$ y $\text{coseno}(t + p) = \text{coseno } t$ son aquellos que han definido apropiadamente el valor de p . No obstante, estos estudiantes no recurren a las representaciones gráficas para dar veracidad a los valores encontrados, es decir especifican el proceso algorítmico de resolución. Aunque en un bajo porcentaje, en comparación con la situación 2, estos jóvenes logran describir la propiedad de periodicidad sin hacer uso del registro gráfico, en este sentido validan la variación periódica en un registro algebraico, aspecto que desde los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) promueve el desarrollo del pensamiento variacional.

Evidencias de respuesta $T_2P_{5a,b}(S_3)$ Tipo 1

$$\begin{aligned}
 &5 \\
 &a) * \text{Seno} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{1} \right) = \text{Seno} \frac{\pi}{2} \quad \text{Seno} \frac{\pi}{2} = 1 \\
 &\quad \text{Seno} \left(\frac{5\pi}{2} \right) = \text{Seno} \frac{\pi}{2} \\
 &* \text{Seno} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{1} \right) = \frac{3\pi + 4\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} \\
 &b) \text{Coseno} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{1} \right) = \frac{13\pi}{6} \\
 &* \text{Coseno} \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{1} \right) = \frac{19\pi}{6}
 \end{aligned}$$

Evidencias de respuesta $T_2P_{5a,b}(S_3)$ Tipo 2

$$\begin{aligned}
 &5 \\
 &a) \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{1} = \frac{12 + 1}{6} = \frac{13\pi}{6} \\
 &b) \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{1} = \frac{5\pi + 12}{6} = \frac{17\pi}{6}
 \end{aligned}$$

6. Después de haber realizado las tres situaciones propuestas, describa que es una función periódica.

Tabla 85. Tipos de respuestas $T_2P_6(S_3)$

Clasificación	Respuesta	Número de estudiantes	Porcentaje
Tipo 1	Es una expresión matemática en la que se puede observar un periodo de tiempo determinado en el que transcurre un fenómeno y se repite un número x de intervalos.	2	7,1%
Tipo 2	Es una función que se repite de manera constante (valores numéricos) en un determinado tiempo.	8	28,6%
Tipo 3	Una función periódica es un movimiento constante.	8	28,6%
Tipo 4	No responden.	10	35,7%

De los resultados de la tabla 85 se infiere con respecto a la descripción de una función periódica que para los estudiantes esta hace referencia a una función que se repite dado que asigna valores numéricos iguales, al margen del fenómeno que se esté modelando, en un determinado intervalo de tiempo. Solo uno de los equipos (clasificación tipo 1) señala este patrón regular (de tiempo) como el periodo que transcurre para que el fenómeno se repita. Las respuestas de los jóvenes indican la persistencia de la concepción de periodo al tiempo, impidiéndoles concebir esta noción en un contexto de medida, según el enfoque de la EMR, propio de la matemática. Además los términos de las descripciones abarcan las diversas representaciones desarrolladas a lo largo de esta propuesta de aula, así expresión matemática alude a la expresión algebraica, valores numéricos tanto a la representación discreta (tabla) como a la representación continua (cartesiana) y movimiento constante a la representación gráfica.

Esta interpretación de los registros de los estudiantes considera la discusión generada durante la plenaria alrededor de esta pregunta. Al cuestionárseles acerca de la expresión movimiento constante, los jóvenes afirman que se encuentra relacionado no solo con la repetición indefinida de la gráfica, sino también del fenómeno en las mismas circunstancias.

Evidencias de respuesta $T_2P_6(S_3)$ Tipo 1

Una función periódica es algo que repite durante un determinado tiempo siendo constante y no varia.

Evidencias de respuesta $T_2P_6(S_3)$ Tipo 2

6. la función periódica es un movimiento constante.

Evidencias de respuesta $T_2P_6(S_3)$ Tipo 3

6. Una función periódica es aquel proceso o función el cual se repite de manera constante ya sea numérica, sucesiva, etc.

Evidencias de respuesta $T_2P_6(S_3)$ Tipo 4

6.) R/ Una función periódica es aquella que se repite constantemente, * un valor en un determinado tiempo.

Evidencias de respuesta $T_2P_6(S_3)$ Tipo 5

6. Es una expresión matemática, en la que se puede observar en periodo de tiempo determinado, en el que transcurre un fenómeno y se repite cada un número n de intervalos

Al finalizar la situación 3 se encuentra que frente al primer desempeño esperado (tabla 5) prevalece en los estudiantes, para la identificación de la correspondencia entre las longitudes de arcos y las parejas ordenadas de números reales, la representación gráfica sobre la representación retórica, en tanto hay dificultad en la lectura de los textos que enmarcan la situación. En este aspecto, los jóvenes no solo identifican esta correspondencia sino que

reconocen una dependencia periódica en términos de la repetición de las parejas ordenadas cada vuelta y para los arcos cuyo extremo final coincide. Sin embargo, la representación gráfica (círculo trigonométrico) valida el valor de las componentes x y y de $p(t)$.

Frente al segundo desempeño, en general, los estudiantes reconocen las funciones Seno t y Coseno t como la ordenada y la abscisa de la pareja $p(t) = (x, y)$ aunque en un inicio se les haya dificultado su comprensión. En este sentido el contraste entre la tabla 1 y el círculo trigonométrico dado en la figura 4, los conlleva no solo a reafirmar la variación periódica entre longitudes de arco y parejas ordenadas sino también a asociar este tipo de dependencia a los valores de las coordenadas x y y .

No obstante, la mayoría de estudiantes no interpreta el Seno t y el Coseno t como funciones de variable real y sus propiedades desde sus diversas representaciones (gráfica, tabular y cartesiana), es decir el tercer desempeño esperado, pues aunque los jóvenes reconocen una dependencia periódica entre t y $p(t)$ donde aluden (no escriben) 2π como periodo, no logran asignar esta variación y sus características a las funciones definidas por estas componentes. Se puede concluir que para los jóvenes en la relación funcional $t \rightarrow p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$ el Coseno t y el Seno t quedan restringidas a la abscisa y a la ordenada respectivamente, de este modo no las conciben como funciones periódicas donde la variación de t produce una dependencia específica para cada una de ellas.

Tomando en cuenta los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006), con relación al desarrollo del pensamiento variacional, se puede afirmar que los estudiantes hacen uso de diversas representaciones simbólicas, pero no logran relacionar la representación gráfica (círculo trigonométrico), la representación tabular, la representación cartesiana y la representación algebraica (propiedad de periodicidad) para Seno t y Coseno t , por tanto no se constituyen las funciones Seno t y Coseno t como modelos particulares de variación periódica, dado que este tipo de dependencia entre variables se restringe a la representación en el círculo trigonométrico.

Desde el enfoque de la EMR, la situación 3, permite a los estudiantes generalizar⁵³ el conteo como herramienta matemática para organizar y dar solución a las situaciones problemáticas planteadas (principio de actividad). El uso de esta estrategia es transversal a los distintos contextos propuestos en cada una de las situaciones, ubicando a los jóvenes en un nivel general dentro del principio de niveles planteado por este marco teórico. Así, el conteo se

⁵³ Palabra usada en el sentido dado por el enfoque de la EMR.

constituye en un modelo generalizable que pueden utilizar para la solución de diversas situaciones en tanto han reconocido la dependencia periódica como característica similar, que les brinda la posibilidad de clasificarlas como fenómenos de variación periódica.

Por su parte el concepto de periodo no es interpretado por la mayoría de estudiantes en un contexto dentro de la misma matemática, ubicando esta noción en un nivel referencial, pues queda limitado al contexto donde se originó: fases de la luna (calendario lunar) y movimiento del deportista, pese a haber desarrollado la situación 2 donde se trabajó dicha noción desde registros tabulares, algebraicos y gráficos.

Dado el carácter relativo del concepto de contexto realista dentro del enfoque de la EMR, se puede aseverar que la situación 3, no constituye tal contexto para este grupo de estudiantes en tanto no resulta significativo para los jóvenes ya sea por su experiencia previa y/o su capacidad para imaginarlo o visualizarlo; en términos de los resultados aquí expuestos, como se mencionó anteriormente, debido a la complejidad de la relación funcional $t \rightarrow p(t) = (\coseno t, seno t)$. Lo anterior impide dentro del proceso de matematización vertical que los estudiantes alcancen el nivel formal.

Capítulo 4.

Conclusiones Generales y Algunas Reflexiones

Didácticas

Capítulo 4. Conclusiones Generales y Algunas Reflexiones Didácticas

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de este trabajo a partir de los objetivos planteados, el marco teórico establecido y el análisis de los resultados de la propuesta de aula implementada con los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón. Se realizan algunas reflexiones de tipo didáctico alrededor de los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas y de forma específica sobre las funciones Seno y Coseno. Al finalizar el capítulo se listan las referencias bibliográficas.

4.1 Conclusiones generales

En relación con objetivo específico 1 a partir del cual se planteó la articulación en una propuesta de aula bajo el enfoque de la EMR de perspectivas curriculares, didácticas y matemáticas, se puede concluir que:

- El enfoque de la EMR, como marco teórico y metodológico, articuló a través del diseño e implementación de tres situaciones problema una propuesta de aula en torno a las funciones periódicas y a las funciones Seno y Coseno como casos concretos de este tipo de variación, que parte de la consideración de fenómenos de naturaleza periódica en contextos realistas.
- El principio de actividad y el principio de realidad proporcionan un escenario para la caracterización y modelación de fenómenos de naturaleza periódica, en tanto permiten el acercamiento de los estudiantes a fenómenos de variación periódica cercanos a su cotidianidad. El principio de interacción, durante la fase de implementación, promueve en los estudiantes el trabajo en equipo, la socialización y discusión alrededor de los diversos procedimientos y soluciones durante el desarrollo de las tareas, así como la plenaria al finalizar cada situación. De esta manera, se favorecen las interacciones de tipo social entre docentes – estudiantes y estudiantes – estudiantes alrededor de la actividad matemática en el aula lo que potencia la comunicación, la predicción, la argumentación verbal, la refutación y validación de las estrategias y herramientas matemáticas, habilidades asociadas al paso de los

jóvenes entre los niveles de comprensión con respecto a situaciones de variación periódica en contextos realistas matemáticos y no matemáticos.

- La correspondencia entre el principio de interconexión y los referentes curriculares colombianos, Lineamientos (1998) y Estándares (2006), posibilita a los estudiantes la interpretación, empleo y relación de sistemas de representación tabular, retórico, verbal, gráfico y algebraico, como aspectos asociados al desarrollo del pensamiento variacional y el proceso general de modelación en la matematización de las situaciones planteadas, desde procedimientos informales y formales de las matemáticas (numéricos, geométricos, gráficos, etc.) y de otras disciplinas; lo que contribuye a la integración de los sistemas conceptuales y simbólicos propios del pensamiento matemático.
- El referente matemático constituye un eje transversal que permea y da coherencia a la propuesta de aula, en tanto vincula el lenguaje simbólico y formal de las matemáticas por medio de conceptos y representaciones propias de esta área del conocimiento, que proveen elementos teóricos para el análisis de las producciones de los estudiantes desde lo disciplinar. En este sentido la propuesta apropia: función periódica, pareja ordenada, dominio y rango de una función, traslación de gráficas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, propiedad de periodicidad, representación sagital y cartesiana de una función, círculo trigonométrico, funciones trigonométricas, etc., (ver capítulo 3: tablas 3, 4 y 5).

Con relación al segundo objetivo específico asociado a la caracterización desde el enfoque de la EMR y los Lineamientos (1998) y Estándares (2006) como políticas curriculares colombianas, de las producciones de los estudiantes se puede concluir que:

- Los estudiantes desarrollan algunos aspectos del pensamiento variacional en tanto reconocen fenómenos cotidianos de variación periódica, identifican patrones y regularidades que caracterizan un fenómeno y una variación funcional periódica y modelan situaciones de dependencia periódica. Las producciones de los estudiantes dejan ver con relación a este tipo de pensamiento: la interpretación de una variación periódica desde su representación tabular (discreta), la identificación de la dependencia entre variables en una relación funcional

periódica, la representación gráfica de una función periódica a partir de su registro tabular, la determinación del periodo de una función desde su representación cartesiana, el reconocimiento de la forma repetitiva de una gráfica – para un intervalo definido – como comportamiento de una variación periódica en el plano cartesiano, el uso de la representación gráfica para validar expresiones algebraicas, la interpretación de la correspondencia entre longitudes de arco y parejas ordenadas de números reales en un registro tabular y gráfico y la identificación de la dependencia periódica entre longitudes de arco y parejas ordenadas de números reales en el contexto del círculo trigonométrico.

- En el proceso de matematización progresiva, es decir el paso del conocimiento informal al formal, surge como herramienta matemática para interpretar y organizar las distintas situaciones, el conteo, constituyéndose en el modelo para el tratamiento y solución de situaciones de variación periódica al margen del contexto que enmarca cada una de estas. De esta forma, el conteo es una estrategia generalizable desde un contexto particular en el que emerge (fases lunares) hasta un contexto matemático (de medida), pasando como lo señala Streefland (1985) citado por Panhuizen (2003, p. 5) de un “modelo de” a un “modelo para”, es decir de un “modelo de” una situación particular a un “modelo para” diferentes situaciones dentro o fuera de la matemáticas.
- La matematización de las tres situaciones planteadas permitió a los estudiantes el paso de niveles en el proceso de matematización vertical, en tanto la reflexión sobre sus diversas estrategias de solución los conlleva no solo a mayores niveles de representación, cálculo y formalización matemática al establecer el periodo, la repetición de un fenómeno bajo los mismos parámetros, la forma repetitiva de la gráfica en el plano cartesiano, etc., como criterios generales que caracterizan situaciones de variación periódica, sino también a reconocer las matemáticas como el medio para organizar la realidad y asumir un pensamiento crítico a partir de la interrelación entre la cotidianidad y esta disciplina.
- Desde el principio de niveles, de la EMR, la situación 1: fases lunares y cosecha de granos de café, permitió la matematización horizontal, lo que ubica a los estudiantes en el nivel situacional en tanto reconocen e interpretan la situación problema dada en un contexto real y

mediante la aplicación de estrategias relacionadas totalmente con el contexto mismo de la situación, es susceptible de tratamiento matemático. La situación 2: acerquémonos a las funciones periódicas, les permitió a los jóvenes transitar entre el nivel referencial y el nivel general dentro del proceso de matematización vertical, en tanto hacen uso de diferentes sistemas de representación y el conteo para sintetizar y solucionar la situación, ligados con el contexto de la misma y determinan el periodo de una función a partir de cualquier representación cartesiana (se supera el contexto). Finalmente la situación 3: algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno, ubica a los jóvenes en un nivel general con respecto al conteo, pero en un nivel referencial para el concepto de periodo, pues continua ligado al contexto de las situaciones donde se originó, es decir al tiempo.

- Con respecto a los propósitos esperados en cada situación, la etapa de implementación y análisis de la propuesta dejó ver que los fenómenos de las fases lunares y la cosecha de granos de café, potencian el acercamiento de los estudiantes a situaciones de cambio periódico en contextos reales, lo que se constituye en eje fundamental para iniciar el estudio de la variación, la dependencia entre variables, la comprensión del concepto de función y por ende la modelación de situaciones. Por su parte el movimiento del deportista, permitió a los estudiantes modelar una situación de naturaleza periódica y avanzar en la apropiación del concepto de función periódica a través del uso y la relación entre las representaciones tabular, gráfica, tanto cartesiana como sagital y algebraica, desarrollos propios del pensamiento variacional. Finalmente, la última situación planteada posibilitó a los jóvenes la identificación de la variación periódica en un contexto matemático entre las longitudes de arco y las parejas ordenadas de reales y por ende de las coordenadas x y y en la pareja ordenada $p(t)$.

El análisis de los resultados dejó ver algunas limitaciones en los estudiantes frente a los desempeños esperados en cada situación:

- En la situación 1, la acepción de periodo, se vincula a un uso “cotidiano” de la palabra como la duración de una etapa o fase del fenómeno, más no a un patrón regular de tiempo (contexto de la situación) que permite a un fenómeno repetirse.
- En la situación 2, no hay una formalización del concepto de función periódica, en tanto hay designación inadecuada para el dominio y rango, aspectos fundamentales en la definición del concepto. A lo anterior se suma, que no hay identificación y validación de la ecuación que captura la variación periódica entre variables, es decir no hay comprensión de la expresión algebraica, en sí misma, como representación que modela la situación.
- En la situación 3, los estudiantes no logran designar 2π como periodo de la dependencia entre longitudes de arco y parejas de números reales, por tanto se les dificulta reconocer las funciones Seno y Coseno como casos particulares de variación periódica. El análisis de las producciones de los jóvenes evidenció que en la relación funcional: $t \rightarrow p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$ $\text{coseno } t$ y $\text{seno } t$ quedan definidas como la abscisa y la ordenada de la pareja $p(t)$, coordenadas que se repiten cada vuelta en el círculo trigonométrico, más no como funciones reales de variación periódica. Se asocia esta dificultad con la complejidad para comprender que una variación de la longitud de arco (t) en la función circular $t \rightarrow p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$ genera dos funciones periódicas independientes, pero de periodo 2π .

La implementación de la propuesta de aula evidencia que el partir de fenómenos cotidianos de variación periódica favorece el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional y la aproximación al concepto de función periódica, sin embargo una “escasa” conceptualización de la noción de función en cuanto al dominio, rango y representación sagital, limitan la formalización de la función periódica y el reconocimiento en la función $t \rightarrow p(t)$ de las funciones Seno y Coseno como tipos particulares dependencia periódica en los números reales.

4.2 Algunas reflexiones didácticas

En relación al tercer objetivo específico, como resultado del análisis de la propuesta de aula enmarcada dentro del enfoque de la EMR, es posible establecer algunas reflexiones de tipo didáctico que contribuyan a fortalecer el estudio de la variación, el cambio y la modelación en los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje al interior del aula de las funciones periódicas y del Seno y del Coseno como casos particulares de este tipo de dependencia funcional, principalmente en la Institución donde se llevó a cabo la implementación, así como a la comunidad de educadores matemáticos en formación y en ejercicio. En este ámbito se puede señalar que:

- En la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones en general y particularmente de las funciones periódicas, han desligado el acercamiento previo de los estudiantes a situaciones y fenómenos de cambio y variación cotidianos, así como del estudio de patrones y regularidades periódicas de forma numérica, geométrica o gráfica, desde el primer conjunto de grados de la Educación Básica, donde el énfasis se centra como lo establecen los Estándares (2006, p. 81) en la descripción cualitativa de este tipo de situaciones a través de registros de representación gráfico y lengua natural, entre otros. De esta forma, aunque hay conocimiento y apropiación en la planeación institucional del área de matemáticas, de las políticas curriculares colombianas estas no median las prácticas de los docentes en cuanto al inicio del estudio de la variación y del desarrollo del pensamiento variacional.
- Las prácticas de enseñanza de los docentes de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, que pueden ser generalizadas a otras instituciones, con relación al estudio de las funciones privilegia un enfoque que parte de la definición formal del concepto desde su expresión algebraica para los diferentes modelos elementales de variación: lineal, afín, cuadrático, exponencial, etc., hacia la representación cartesiana, pasando por su registro tabular, es decir el esquema:

Ecuación $\longrightarrow$ Representación tabular $\longrightarrow$ Representación cartesiana.

Así, a la luz de los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) no se promueve en la Institución el proceso de modelación, en tanto no se toman como punto de partida situaciones problemáticas del entorno de los estudiantes, reduciendo este proceso general de la actividad matemática a la aplicación de los modelos particulares de función en la solución de determinados problemas al interior de las matemáticas y de otras disciplinas.

- Es necesario el replanteamiento del plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, de tal manera que considere para el estudio de la variación desde la Educación Básica los patrones y regularidades en situaciones del diario vivir, particularmente los periódicos, de igual modo que se implementen actividades que susciten el estudio de las funciones periódicas desde la modelación de situaciones cercanas a la realidad de los estudiantes, la puesta en juego de las diferentes representaciones simbólicas, su relación y el tránsito entre cada una de estas, sin dejar de lado concepciones como dominio, rango y representación sagital, propias de la perspectiva conjuntista. Lo anterior implica que las prácticas de los docentes, en tanto mediadores entre el conocimiento matemático, las situaciones problemas y los estudiantes, deben propiciar la identificación de las matemáticas como una actividad humana y de carácter social que permite entender y explicar la realidad natural y cultural del entorno.
- Las políticas curriculares colombianas, Lineamientos (1998) y Estándares (2006), si bien enfatizan en la modelación de fenómenos periódicos del mundo real, limitan este proceso general a la variación periódica particular que caracteriza a las funciones trigonométricas Seno y Coseno, dejando de lado – o al menos no se hace explícito – situaciones cotidianas de diversa naturaleza periódica cercanas al contexto de los estudiantes que como las expuestas en este trabajo: los latidos del corazón, las fases lunares, las estaciones del año, el ciclo menstrual, el funcionamiento de un semáforo, etc., permitirían iniciar la descripción y reconocimiento de un modelo de variación periódica en el aula, lo que contribuye a una aproximación y apropiación del modelo general de función periódica.
- El diseño e implementación de propuestas de aula en contextos realistas que giran alrededor de la modelación, como proceso que le permite a los estudiantes acceder al conocimiento

matemático a partir de su realidad social y natural, potencializa el aprendizaje ya que les brinda la posibilidad de trabajar en distintos niveles de conceptualización, hacer uso de su sentido común, movilizar y poner en juego saberes previos e informales durante los procesos de resolución que emergen en su actividad matemática.

- En los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones trigonométricas la dependencia periódica entre las longitudes de arco y las parejas ordenadas de números reales en el círculo trigonométrico no se “hereda” para el tratamiento del Seno y del Coseno como funciones periódicas de variable real. Así, se puede afirmar que al margen del enfoque seleccionado para la enseñanza de las funciones trigonométricas en el aula, de las funciones circulares hacia el triángulo rectángulo, de las funciones trigonométricas entre los lados de un triángulo rectángulo (razones) hacia las funciones circulares y desde las razones trigonométricas hacia las razones en una circunferencia no unitaria (Santacruz 2005, p. 189); el uso del círculo trigonométrico como estrategia gráfica obstaculiza el aprendizaje y la construcción analítica de estas funciones en los estudiantes (Montiel, 2005, p. 125), es decir al margen de la discusión de la unidad de medida, grados y radianes, como lo afirma (Montiel, 2005, p. 125) no es evidente el tránsito del círculo trigonométrico a las funciones trigonométricas.
- Si en las instituciones educativas los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas continúan vinculados exclusivamente a las funciones trigonométricas Seno y Coseno en grado décimo, la dependencia periódica como tipo particular de cambio entre variables no se constituye en objeto de aprendizaje en ambientes escolares, ya que como afirma Buendía (2006, p. 234) el discurso matemático escolar para las funciones periódicas ha propiciado una identificación de la periodicidad como propiedad exclusiva de las funciones trigonométricas, dejando por fuera otros modelos funcionales caracterizados por esta variación, lo que implica que se privilegien los modelos funcionales elementales. Además, si el estudio de las funciones en el aula no toma en consideración la modelación de situaciones cotidianas de cualquier tipo de variación y su presentación se reduce a un contenido específico para un conjunto de grados, octavo y noveno de la Educación Básica, a partir de su forma general (expresiones algebraicas) se puede afirmar que en la escuela con relación al desarrollo del pensamiento variacional no se conceptualiza

la función, dado que no hay articulación ni interrelación entre los cinco tipos de pensamiento y los procesos generales que deben mediar en la actividad matemática de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Apostol, T. (1988). Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Vol. 1. Barcelona: Reverté.
- Ardila, R., Pérez, M., Serrano, C. & Samper, C. (2004). Espiral 10. Santafé de Bogotá: Norma.
- Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.
- Bressan, A. & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.
- Bressan, A., Zolkower, B., Gallego, M. (2004). La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.
- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9 (2), 227 – 251.
- Calendario lunar 2014. (2014). Disponible en: <http://www.pac.com.ve/contenido/calendario-lunar-2014-imprimir/10989>. Consultado el 05/05/2015.
- Henao, S. M. & Vanegas, J. A. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: Un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos. Tesis de licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. Tesis de maestría en ciencias en la especialidad de matemática educativa, Centro de Investigación y de

Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: Departamento de matemática educativa, México D.F.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Gobierno de España. (2001 – 2012). Proyecto biosfera. Disponible en: <http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido11.htm>. Consultado el 04/05/2015.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de doctorado en ciencias en matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional: Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México D.F.

Movimientos de la luna (s.f.). Disponible en: <http://www.astromia.com/tierraluna/movluna.htm>. Consultado el 04/05/2015.

Panhuizen, M. (2003). El uso didáctico de modelos en la educación matemática realista: Un ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9 – 35.

Pérez, I. (2012). Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica. Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá.

Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal. México: CINVESTAV.

Restrepo, G. (1995). Funciones de una variable real: Teoría elemental. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Restrepo, G. (1995). Matemáticas fundamentales. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Sáenz, I. (2015). Quinto parcial. Círculo unitario. Disponible en: <http://sites.google.com/site/portafolioisainsaenz/-quinto-parcial/1-círculo-unitario>. Consultado el 23/07/2015.

Sánchez, H. (2014). Las funciones trigonométricas Seno y Coseno a partir de sus aplicaciones. Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá.

Santacruz, O. (2005). Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros. Tesis de licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Torres, A. (2012). Determinar la influencia de la luna en la agricultura. Tesis de ingeniería agronómica, Universidad de Cuenca, Cuenca. Disponible en: <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/3078>. Consultado el 10/05/2015.

Vizmanos, J. (2008). Funciones. En: SM (Ed), Matemáticas 3º ESO. Proyecto Esfera. Problemas resueltos. Lección12. Madrid: SM. Disponible en: http://platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf. Consultado el 12/06/2015.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N. & Gómez, R. (1978). Matemática Moderna Estructurada 5: Nueva Serie. Santafé de Bogotá: Norma.

Anexo 1. Situación aplicada a los estudiantes



**PROYECTO DE GRADO UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS SENO Y COSENO
DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL¹**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO COMERCIAL HERNANDO NAVIA VARÓN
SEDE CENTRAL**

NOMBRES: _____

GRADO: _____ **JORNADA:** _____

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

SITUACIÓN 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos

Fases de la luna y calendario lunar

La luna es el único satélite natural de la Tierra. Su diámetro es de unos 3.476 km, aproximadamente una cuarta parte del de la Tierra. La luna gira alrededor de su eje (*rotación*) en aproximadamente 27 días, 7 horas, 43 minutos y 11,5 segundos – **27.32 días** – (mes sidéreo) y se traslada alrededor de la Tierra (*traslación*) en el mismo intervalo de tiempo, de ahí que siempre nos muestra la misma cara. Además, nuestro satélite completa una revolución relativa al sol en aproximadamente 29 días, 12 horas, 44 minutos y 2,8 segundos (mes sinódico), es decir para cambiar de una fase a otra similar, o mes lunar, la luna necesita **29.53 días**.²

A medida que la luna gira alrededor de la Tierra, y la Tierra gira alrededor del sol, la zona de la luna iluminada va cambiando de posición de manera que unas veces vemos toda la cara visible de la luna iluminada por el sol, cuando la Tierra está en alguna posición entre el sol y la luna, y otras veces vemos la cara visible oscura, ya que el sol se encuentra al otro lado de la luna e ilumina la cara oculta. Esta variación en la cantidad de superficie lunar que vemos iluminada recibe el nombre de **FASES DE LA LUNA**, y son cuatro (*luna nueva, cuarto creciente, luna llena y cuarto menguante*) que se van alternando a lo largo del mes lunar.³

A continuación se presenta el calendario lunar para los meses de enero, febrero y marzo de 2014, y las fechas correspondientes a las diferentes fases de la luna.⁴

¹ Elaborado por Omar Alexander Santacruz Lenis bajo la asesoría de Ligia Amparo Torres Rengifo.

² Tomado de www.astromia.com/tierraluna/movluna.htm

³ Tomado de recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido11.htm

⁴ Este calendario se ha modificado de acuerdo al propósito de las tareas, relacionadas con los fenómenos periódicos. Ver un ejemplo de calendario real en www.pac.com.ve/contenido/calendario-lunar-2014-imprimir/10989

Calendario lunar 2014

enero							febrero							marzo						
lu	ma	mi	ju	vi	sa	do	lu	ma	mi	ju	vi	sa	do	lu	ma	mi	ju	vi	sa	do
		1	2	3	4	5					1	2						1	2	
6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	8	9	3	4	5	6	7	8	9
13	14	15	16	17	18	19	10	11	12	13	14	15	16	10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26	17	18	19	20	21	22	23	17	18	19	20	21	22	23
27	28	29	30	31			24	25	26	27	28			24	25	26	27	28	29	30
														31						

Fases Lunares

Fases Lunares

 Luna nueva
  Cuarto creciente
  Luna llena
  Cuarto menguante

Mes	Enero					Febrero			Marzo				
Fecha	1	8	16	24	31	7	15	23	2	9	17	25	31
Fase Lunar													

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto anterior, responda las siguientes preguntas:

- Indique en qué consiste el mes sidéreo y cuál es su valor aproximado.
- Explique en qué consiste el mes sinódico y cuál es su valor, según la lectura.
- Explique que es el calendario lunar y cómo se divide el mes sinódico para determinar cada fase de la luna.
- Para dos rotaciones de la luna, enuncie el tiempo en días transcurridos.
- a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27.32	13.66	81.96	109.28	163.92	204.9	259.54	327.84	273.2

- Escriba la manera como determino la relación entre el número de rotaciones de la luna y los días transcurridos.

SOLUCION

- 1 El mes siderico se considera cuando la Luna gira al rededor de su eje, tambien llamado Rotación y su valor aproximado es de 27.32 dias. y se traslada al Rededor de la Tierra en el mismo intervalo de tiempo
- 2 El mes sinódico es considerado el Tiempo en que La Luna Cambia de una fase a otra similar y su valores de 29.53 dias.
- 3 El Calendario Lunar es en el que podemos encontrar las diferentes fases de la Luna en un día determinado. En Calendario Lunar el mes sinodico se divide en 4 pases necesita 4 fases para llegar a una similar con la que empieza.
- 4 Para dos Rotaciones necesita 54.64 dias. Aquí multiplicamos 27.32 que es lo que dura una Rotación por 2
- 5 Multiplicamos el valor de una sola Rotación por el número de días transcurridos que nos pidian.
Otra forma de encontrar el nro de rotaciones es tomar el número de días transcurridos y dividirlo por 27,32. El resultado sera el número de días transcurridos

Tarea 2: Estableciendo regularidades periódicas

Observe el calendario lunar para los meses de enero a marzo de 2014 y conteste:

1. Cuánto tiempo ha transcurrido entre cada fase de luna nueva en el mes de enero. Compárelo con el mes sinódico y saque una conclusión.
2. Transcurre para el cuarto menguante entre los meses de febrero y marzo la misma cantidad de días que para la luna nueva en el mes de enero. Explique su respuesta.
3. Podrías dar la razón por la cual durante el mes de febrero de 2014, no se presenta luna nueva y durante los meses de enero y marzo hay dos días de esta fase. Justifique su respuesta.
4. Realice el calendario lunar para el siguiente trimestre del año 2014 (Abril, Mayo y Junio).
5. a. Complete la siguiente tabla.

Fecha	Abril 8	Junio 15	Mayo 2	Junio 23	Abril 16	Mayo 8	Abril 24	Mayo 25	Junio 9
Fase Lunar									

b. Indique los aspectos que tuvo en cuenta para realizar este calendario.

6. a. Con base en el calendario lunar del primer semestre del año 2014, determine la manera de predecir las fases lunares y fechas, pertenecientes al segundo semestre del 2014.
- b. Indique la regularidad relacionada con días transcurridos entre cada fase lunar. ¿Cómo la podrías denominar?

1. Ha transcurrido un mes exactamente 31 días.
 En conclusión: Este es un claro ejemplo de el mes sinódico ya que la luna nueva sale el primero de enero y vuelve a presentarse el 31 de enero.

2. El cuarto menguante entre los meses de febrero y marzo sale el 23 de febrero y vuelve a presentarse el 25 de marzo cumpliendo un mes al igual que la luna nueva en enero. Esto implica que el mes sinódico se presenta en cada fase de la luna.

3. Febrero no logra tener luna nueva pues la última fue el 31 de enero y como febrero tiene solo 28 días, no alcanza a que se complete el mes sinódico.

MES	Abril				Mayo				Junio				
fecha	1	8	16	24	2	9	17	25	2	9	17	25	31
fase lunar													

5.b) nos guiamos con el calendario que hicimos.

6.a) contar los días de los siete meses de ocho en ocho.

b) la podríamos denominar como un periodo de tiempo

Tarea 3: Validando fenómenos periódicos

Las fases lunares y la agricultura

Como bien sabes, Colombia es uno de los principales países a nivel mundial en la siembra, cultivo y producción de café, procesos caracterizados por las prácticas tradicionales de los campesinos de las distintas regiones del país.

El desarrollo de la caficultura comprende una serie de tareas para las cuales los pequeños productores consideran, en la mayoría de los casos, las diferentes fases lunares para ejecutarlas, es así como la mejor fase lunar para cosechar granos de café con la finalidad de producir semillas es el *cuarto menguante* hacia la *luna nueva* (Torres, 2012).

Con ayuda del calendario lunar construido en la tarea anterior y tomando como referencia el texto las fases lunares y la agricultura, determine:

1. a. ¿Cuáles fueron las fechas en el primer semestre del año 2014 donde los pequeños productores de café pudieron cosechar los granos de café?
b. Identifique la regularidad de las cosechas de granos de café.
2. Caracterice de acuerdo a las actividades realizadas en las tareas anteriores un fenómeno periódico.
3. a. Clasifique los siguientes fenómenos en periódicos o no periódicos e indique el ¿por qué?
 - Estaciones del año.
 - Movimiento telúrico (Temblor).
 - El día y la noche.
 - Funcionamiento de un semáforo.
 - Los latidos del corazón.b. Indique el periodo en los fenómenos clasificados como periódicos. Escriba una reflexión al respecto.
4. Identifique el periodo o regularidad aproximada de:
 - a. Mes sinódico.
 - b. Mes sidéreo.
 - c. Cosecha de granos de café.
5. De ejemplos, aparte de los ya mencionados, de algunos fenómenos que tienen un periodo o regularidad en su comportamiento.

SOLUCIÓN

- 1 • Del 24 al 31 de enero
- Del 23 de febrero al 2 de Marzo
- Del 25 al 31 de Marzo
- Del 24 de abril al 2 de Mayo
- Del 25 de Mayo al 2 de junio
- Del 25 al 31 de junio

b) Todos tienen casi la misma regularidad o duración de tiempo a excepción de febrero pues nomás tiene 28 días, mientras que los demás tienen de 30 a 31

2 La explosión de los heces de vapor que demoran unos cuantos segundos para volver a lanzar su vapor de agua. El horario es cíclico pues cada semana vuelve a ser igual y siempre termina en el mismo orden y duración de tiempo

3 ESTACIONES DEL AÑO: Fenómeno periódico ya que se repite en los mismos meses todos los años

MOVIMIENTO TELÚRICO (TEMBLOR): No periódico por que esto no se repite constantemente, este es inesperado

EL DÍA Y LA NOCHE: Fenómeno periódico ya que cambia y se repiten cada 24 horas

FUNCIONAMIENTO DE UN SEMAFORO: Fenómeno periódico por que cambia cada minuto de color y si esperamos un poco más volveremos al color que empezamos

LOS LATIDOS DEL CORAZÓN: Fenómeno periódico si por que los latidos se repiten constantemente

b) ESTACIONES DEL AÑO: Se demora aproximadamente 3 meses cada una

EL DÍA Y LA NOCHE: 24 horas aproximadamente dura en cambiar cada una

EL FUNCIONAMIENTO DEL SEMAFORO: dura aproximadamente 1 min y en medio de este tiempo aparece el color amarillo y así sucesivamente se repite

LATIDOS DEL CORAZÓN: Se repite aproximadamente cada segundo

Los periodos de tiempo se pueden presentar en cualquier momento de la vida cotidiana.

4) Mes sinódico: Dura aproximadamente 29,53 días

Mes sidéreo: Dura aproximadamente 27,32 días

Ciclo de cosecha de granos de café: Su duración es de 7 días y se repite al transcurso de un mes

5) - El movimiento de las manecillas del Reloj su movimiento es constantemente y cada 60 seg vuelve al punto en que empezó, dando una vuelta al rededor de su eje de 360°

- El Cambio de las hojas de los árboles en las estaciones del año pues ellas florecen, se marchitan y caen cada vez que pasa una estación y vuelve y retoma cada año



**PROYECTO DE GRADO UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS SENO Y COSENO
DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL ¹**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO COMERCIAL HERNANDO NAVIA
VARÓN SEDE CENTRAL**

NOMBRES: _____

GRADO: _____ **JORNADA:** _____

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

SITUACIÓN 2: Acerquémonos a las funciones periódicas

Un deportista de alto rendimiento realiza una práctica en una escalera partiendo de un lugar *A* (ubicado en la base de la escalera) hacia la cima, ubicada en un lugar *B* a 6,9 metros de altura y hace el recorrido en 3 segundos. Regresa a su punto de partida, pero al regresar decide ir nuevamente a *B* y continúa esta trayectoria de *A* a *B*. La tabla 1 muestra los valores del tiempo (*t*) en segundos de cada desplazamiento del deportista y la altura (*h*) en metros de la posición del deportista:

<i>t(s)</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>h(m)</i>	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0

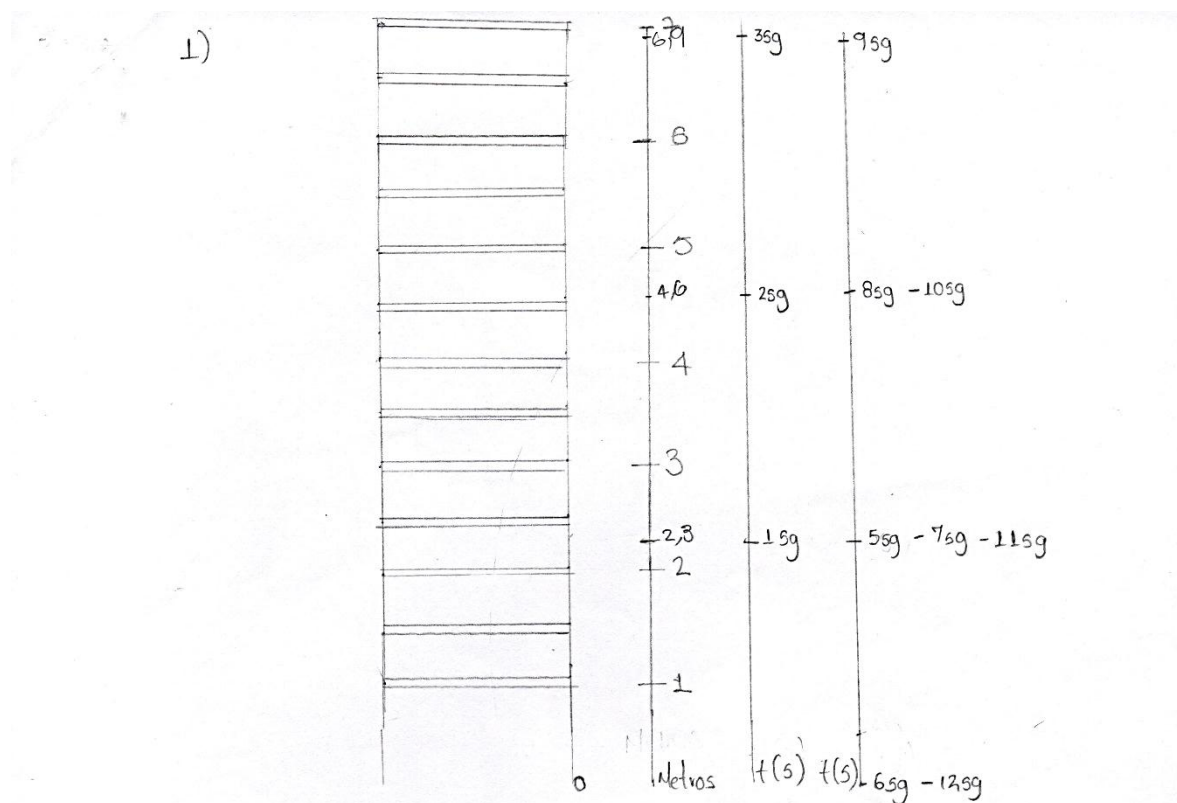
Tabla 1. Valores del tiempo y altura en metros de la posición del deportista.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto y la tabla anterior, solucione las siguientes actividades:

1. Bosqueje un gráfico de la situación.
2. Escriba el significado que tiene el punto (0,0) en la relación entre tiempo y altura (posición en metros del deportista).
3. Indique el número de metros que recorre el deportista cada segundo.
4. Explique el significado de las parejas ordenadas (6,0) y (12,0).
5. Determine el tiempo que tarda el deportista en regresar, por primera vez, al punto de partida. Argumente su respuesta.
6. Si el deportista a los 2 segundos se encuentra a una altura de 4.6 metros, explique porque al cabo de 5 segundos su altura es de 2.3 metros.

¹ Elaborado por Omar Alexander Santacruz Lenis bajo la asesoría de Ligia Amparo Torres Rengifo.



2) En el punto (0,0) de la grafica el deportista aun no se desplaza (esta en reposo) y el tiempo no se a empezado a contar.

3) El deportista sube y baja la escalera a 2.3 m/s

4) Eso significa que a pasado un tiempo de 6 s pero el deportista se devolvio a su posición original, así que hace desplazamiento pero no cambio de posición

5) 6 s por lo podemos observar que al pasar los 6 s el deportista vuelve al punto de partida

6) Por que el deportista se esta devolviendo, haciendo disminuir el numero de metros, pero aumentando el numero de tiempo

Tarea 2: Representando y describiendo funciones periódicas

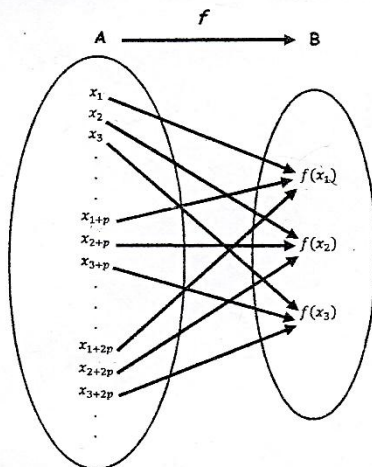
- Escriba cómo varía el tiempo en esta situación.
 - Escriba cómo varía la posición del deportista (altura en metros).
- Represente en el plano cartesiano, las parejas ordenadas dadas en la tabla 1.
- Escriba Falso (F) o Verdadero (V), según el caso.
 - Al transcurrir 6, 12 y 18 segundos el deportista se encuentra en el sitio de partida (V).
 - A los 3 y 9 segundos el deportista se encuentra en la cima (V).
 - A los 4 segundos el deportista se encuentra subiendo de A hacia B (F).
 - El periodo de esta situación es 3 segundos (3).
- Teniendo en cuenta que en el plano cartesiano se pueden unir los puntos, describa en el contexto de la situación (movimiento del deportista) el significado de la gráfica resultante.

Se puede afirmar que el movimiento del deportista se describe mediante una **función periódica**.

Una función f es periódica con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga a x y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x del dominio de f .

La representación gráfica de una función periódica se repite a intervalos regulares. El intervalo menor para el cual se repita la gráfica se llama periodo de la función.²

El siguiente diagrama sagital muestra una representación de la función periódica:



² Definición tomada de Apostol, Tom. Calculus (Vol. 1). 2ed. Barcelona: Reverté, 1988. Pág. 117 y Espiral 10. Grupo Editorial Norma, 2004. Pág. 67.

5. a. Con base en la gráfica del punto 2 (tarea 2) y la definición anterior, determine lo que sucede con la gráfica a partir de los 12 segundos.

b. Indique el periodo (p) de tiempo a partir de la gráfica. Explique su respuesta.

6. Compruebe, por lo menos para tres valores de t , que el periodo p obtenido en 5 (b), verifica: $h(t+p) = h(t)$.

7. Explique la representación sagital de una función periódica según la relación entre los x del dominio y los $f(x)$ del rango.

1. a) la tabla está organizada cada segundo a Segundo y podemos observar que el movimiento del deportista se repite cada seis segundos.

b) Varía 2,3m cada segundo

4. Que la gráfica se repite constantemente con las mismas cifras de cambio

* Si se puede afirmar que es una función periódica por que son continuas y llevan el mismo valor cambiando cada 6 segundos.

5 a) A los doce segundos el movimiento del deportista (Como lo podemos observar en la gráfica vuelve a retomar en su punto de partida

b) El periodo de tiempo son seis segundos ya que cuando llega a ese tiempo el deportista vuelve a retomar su ruta inicial

$$6 \quad h=(t+p) \quad h=(t+p) \quad h=(t+p)$$

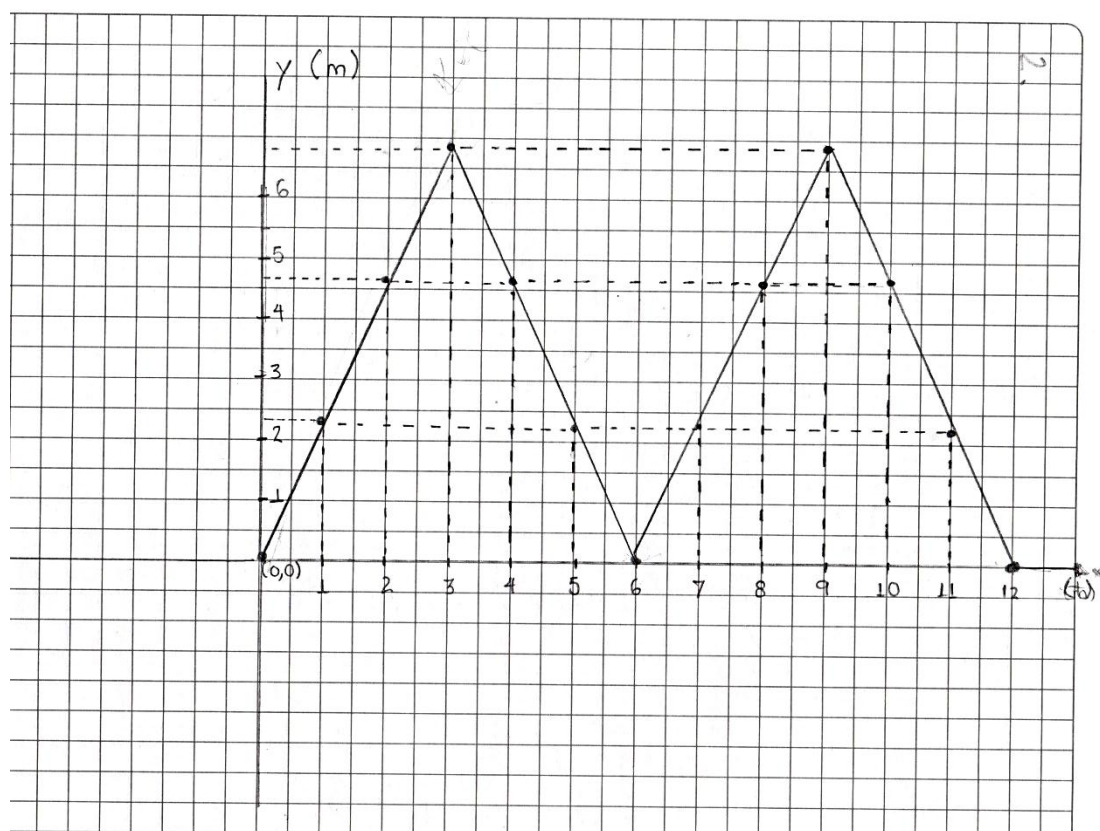
$$h=(2+6) \quad h=(3+6) \quad h=(10+6)$$

$$h=8 \quad h=9 \quad h=16$$

7 los dominios $(x_1, x_1+p, x_1+2p \text{ y } x_1+n)$ tienen su mismo rango que es $f(x_1)$

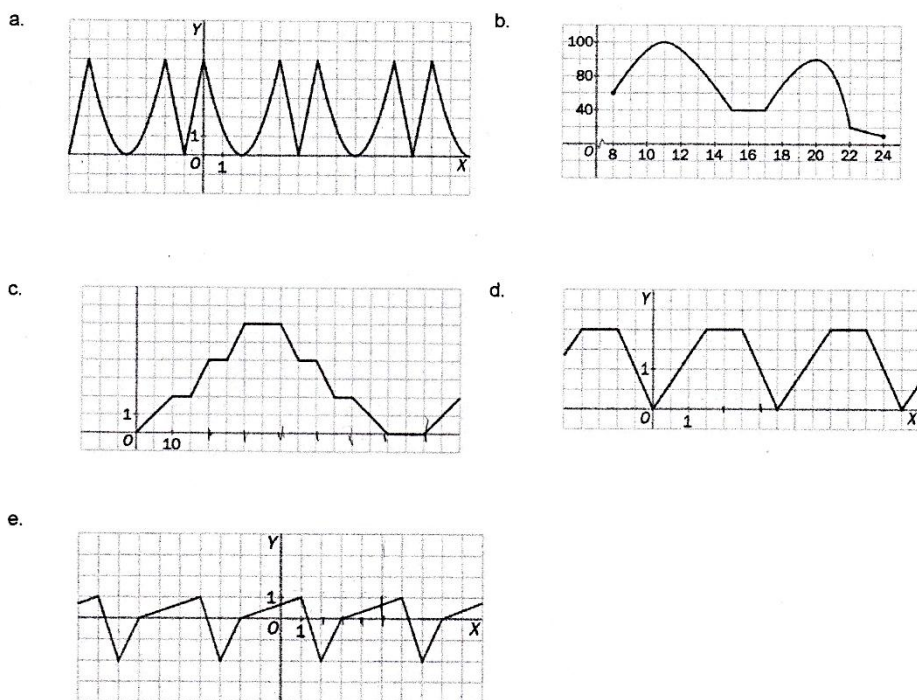
los dominios $(x_2, x_2+p, x_2+2p \text{ y } x_2+n)$ tienen su mismo rango que es $f(x_2)$

los dominios $(x_3, x_3+p, x_3+2p \text{ y } x_3+n)$ tienen su mismo rango que es $f(x_3)$



Tarea 3: Reconociendo gráficas de funciones periódicas

Observe las siguientes representaciones gráficas de algunas funciones:³



1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	si	no	no	si	si
Periodo	1			3.5	5

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

porque las líneas de las gráficas se repiten cada ciertas cifras y eso nos da a

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

entender que el fenómeno se repite

* En la gráfica (c) no podemos afirmar que es periódica porque la gráfica nos pone a suponer, porque para poder determinar si es periódica la gráfica tendría que seguir con la secuencia (un intervalo de 80)

Tarea 4: Aproximándonos a la expresión algebraica

Para obtener una expresión algebraica que describa el movimiento del deportista, Valentina y Juan inician una discusión al respecto. Valentina asegura que la variación de la altura del deportista en función del tiempo corresponde a una función lineal dada por la expresión: $h(t) = 2,3t$.

Sin embargo, Juan argumenta que esta expresión es válida solo para el primer tramo de la gráfica, $k = 0$, es decir cuando el deportista sube por primera vez a la cima de la escalera.

1. De este modo, Juan propone a Valentina que la expresión algebraica que describe el movimiento del deportista para los tramos de ascenso en la gráfica es $h(t) = 2,3(t - 6k)$, donde k indica el número de veces en que sube el deportista. Por ejemplo, para $k = 1$ la expresión es:

$$h(t) = 2,3(t - 6).$$

- Determine la validez de esta afirmación para $k = 3$.
- Valentina encuentra que para $k = 4$, la expresión algebraica es $h(t) = 2,3(t - 24)$ y establece que: $h(24) = 0$; $h(25) = 2,3$; $h(26) = 4,6$ y $h(27) = 6,9$. Verifique los valores dados por Valentina.

2. Ahora, Valentina decide buscar una expresión algebraica que permita modelar los tramos de descenso del deportista y propone: $h(t) = -2,3(t - 6k)$.

- Decida si para $k = 1$ la expresión dada por Valentina representa el primer tramo de descenso del deportista.
- Si $k = 0$ no representa este primer tramo, explique cuál es el valor mínimo que debe tomar k para que la expresión tenga sentido.

3. Al final de la discusión Valentina y Juan deciden que la expresión algebraica que modela la altura del deportista en función del tiempo es de la forma:

$$h(t) = \begin{cases} 2,3(t - 6k); k = 0, 1, 2, 3, \dots; 6n \leq t \leq 3p \text{ donde } n = 0, 1, 2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \text{(Tramos de ascenso)} \\ -2,3(t - 6k); k = 1, 2, 3, \dots; 3p \leq t \leq 6n \text{ donde } n = 1, 2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \text{(Tramos de descenso)} \end{cases}$$

Compruebe la validez de esta expresión para al menos dos valores de k y de t , para cada tramo (ascenso y descenso).

4. Teniendo en cuenta las diferentes tareas llevadas a cabo en esta situación, escriba como define una función periódica.

$$1 \text{ R/ } a) h(t) = 2,3(t - 18)$$

$$h(t) = 2,3(19 - 18)$$

$$h(19) = 2,3(1)$$

$$= 2,3$$

$$* h(t) = 2,3(t - 18)$$

$$h(t) = 2,3(18 - 18)$$

$$h(18) = 2,3(0)$$

$$= 0$$

$$* h(t) = 2,3(t - 18)$$

$$h(t) = 2,3(20 - 18)$$

$$h(20) = 2,3(2)$$

$$= 4,6$$

$$* h(t) = 2,3(t - 18)$$

$$h(t) = 2,3(21 - 18)$$

$$h(21) = 2,3(3)$$

$$= 6,9$$

$$b) * h(t) = 2,3(t - 24)$$

$$h(t) = 2,3(25 - 24)$$

$$h(25) = 2,3(1)$$

$$= 2,3$$

$$* h(t) = 2,3(t - 24)$$

$$h(t) = 2,3(24 - 24)$$

$$h(24) = 2,3(0)$$

$$= 2,3$$

$$* h(t) = 2,3(t - 24)$$

$$h(t) = 2,3(26 - 24)$$

$$h(26) = 2,3(2)$$

$$= 4,6$$

$$h(t) = 2,3(t - 24)$$

$$h(t) = 2,3(27 - 24)$$

$$h(27) = 2,3(3)$$

$$= 6,9$$

$$2 \text{ a) } * h(t) = -2,3(t - 6)$$

$$h(t) = -2,3(3 - 6)$$

$$h(3) = -2,3(-3)$$

$$= 6,9$$

$$* h(t) = -2,3(t - 6)$$

$$h(t) = -2,3(4 - 6)$$

$$h(4) = -2,3(-2)$$

$$= 4,6$$

$$* h(t) = -2,3(t - 6)$$

$$h(t) = -2,3(5 - 6)$$

$$h(5) = -2,3(-1)$$

$$= 2,3$$

$$* h(t) = -2,3(t - 6)$$

$$h(t) = -2,3(6 - 6)$$

$$h(6) = -2,3(0)$$

$$= 0$$

b) K mínimo tiene que ser 1 porque anteriormente debió haber tenido un desplazamiento * que integralmente llamamos como punto 0

4R/ Una función periódica es un sistema en el cual podemos observar que el fenómeno se repite constantemente en un intervalo de tiempo

3R/ No la resolvimos porque no entendimos muy bien las expresiones

$$\begin{aligned} (A\pi - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * \\ (A\pi - 2\pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (\pi) \varepsilon_{1,2} &= (2\pi) d \\ \partial, A &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A\pi - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * \\ (A\pi - A\pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (0) \varepsilon_{1,2} &= (A\pi) d \\ \varepsilon_{1,2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A\pi - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * (d) \\ (A\pi - 2\pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (\pi) \varepsilon_{1,2} &= (2\pi) d \\ \varepsilon_{1,2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A\pi - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (A\pi - A\pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (\pi) \varepsilon_{1,2} &= (A\pi) d \\ P, \partial &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * \\ (2 - 2) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (\pi) \varepsilon_{1,2} &= (2) d \\ \varepsilon_{1,2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * \\ (2 - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (\pi - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (A) d \\ \partial, A &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * (d) \\ (2 - 2) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (\pi - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ P, \partial &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 - \pi) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d * \\ (2 - 2) \varepsilon_{1,2} &= (\pi) d \\ (0) \varepsilon_{1,2} &= (2) d \\ \partial &= \end{aligned}$$



**PROYECTO DE GRADO UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS SENO Y COSENO
DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL¹**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO COMERCIAL HERNANDO NAVIA
VARÓN SEDE CENTRAL**

NOMBRES: _____

GRADO: _____ **JORNADA:** _____

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

SITUACIÓN 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno

A partir de las inquietudes de Valentina y Juan con respecto a las funciones periódicas, el profesor de matemáticas decide proponerles una situación en un contexto de medida. Para esto partiendo de una circunferencia unitaria (*radio* = 1) cuya longitud es $L = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$, centrada en el origen del sistema de coordenadas relaciona a cada longitud de arco t un único punto $p(t) = (x, y)$ asociado al extremo del arco², estableciendo una correspondencia entre las longitudes de los arcos y parejas ordenadas de números reales (ver figura 1).

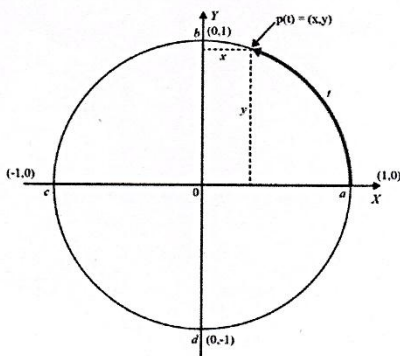


Figura 1.

¹ Elaborado por Omar Alexander Santacruz Lenis bajo la asesoría de Ligia Amparo Torres Rengifo.

² Un arco determinado en el sentido contrario a las manecillas del reloj se considera positivo; si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj el arco se considera negativo.

Por ejemplo, si el arco es de $\frac{1}{4}$ de circunferencia unitaria se tiene que: $t = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ entonces $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, como se observa en la figura 2.

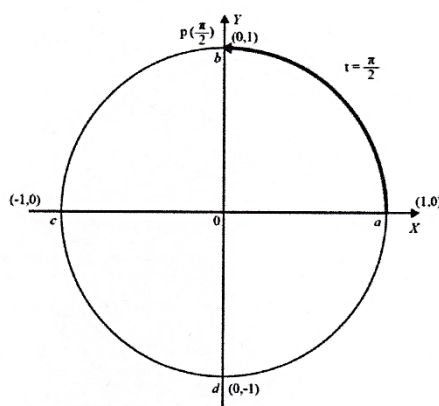


Figura 2.

Tarea 1: Caracterizando las funciones circulares seno y coseno como funciones periódicas

1. a. Teniendo en cuenta el texto inicial y las figuras 1, 2 y 3, complete la tabla, para los arcos de circunferencia dados.

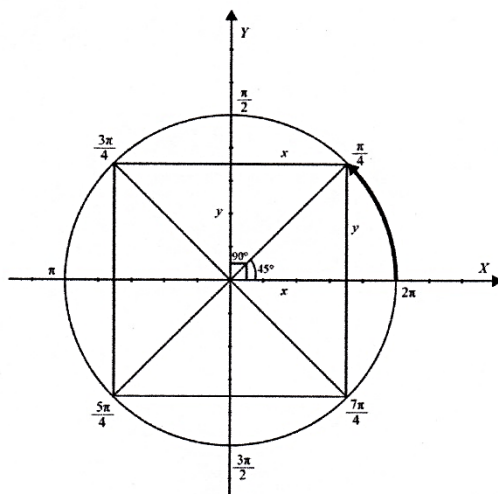


Figura 3.

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	$t = 0$	$P(t) = (1, 0)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	$t = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$	$P(t) = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{5}{8}(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{7}{8}(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta completa	$t = 2\pi$	$P(t) = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{9\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{5\pi}{2}$	$P(t) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{11\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$t = 3\pi$	$P(t) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{13\pi}{4}$	$P(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{7\pi}{2}$	$P(t) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{15\pi}{4}$	$P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2 vueltas completas	$t = 4\pi$	$P(t) = (1, 0)$

Tabla 1.

- b. Explique cómo determinó las longitudes de los arcos y las parejas ordenadas.
2. A partir de la tabla 1, establezca para cuáles longitudes de arco la pareja $p(t) = (x, y)$ es igual. Argumente su respuesta.
3. Indique entre qué valores varía la coordenada x y entre qué valores varía la coordenada y de la pareja ordenada $p(t) = (x, y)$.

b) Contamos cada coordenada semejante, hasta llegar al punto que nos pedia, después cuando teníamos las coordenadas, sumábamos cada vuelta que daba, pero siempre cayendo en el mismo punto de las coordenadas, pero cambiando la longitud de cada arco.

2. On $\frac{1}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1 Vuelta, $\frac{1}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A un $\frac{1}{8}$ le sumas una vuelta, lo cual va a dar el mismo valor de las parejas ordenadas, lo que cambia es el arco

3 la coordenada menor de x es -1 la Coordenada menor de y es -1
la Coordenada mayor de x es 1 la Coordenada mayor de y es 1

Teniendo en cuenta que entre estos dos números $(-1 \leftrightarrow 1)$ hay una infinita cantidad de números

Tomando en consideración que a cada longitud de arco t se le puede asociar una pareja ordenada $p(t) = (x, y)$ se puede definir la función circular seno como la coordenada y del punto $p(t)$ y la función circular coseno como la coordenada x del punto $p(t)$, de tal manera que:

$$p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t).$$

A continuación se presentan algunos valores para $p(t)$ asociados a diferentes longitudes de arco t .

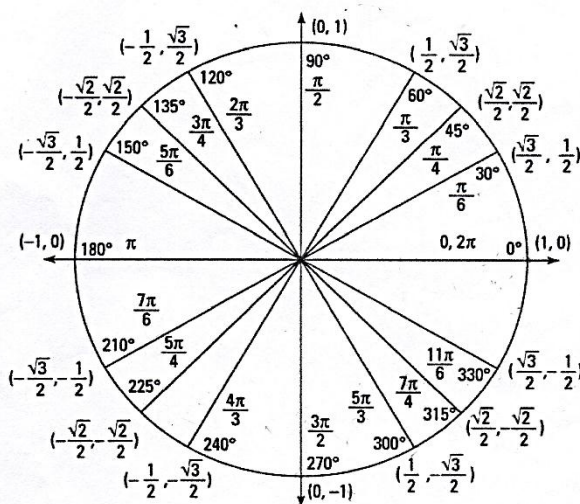


Figura 4. Círculo Trigonómico³.

4. A partir de la figura 4, indique como determinar el valor de $\text{seno } t$ y $\text{coseno } t$, para longitudes de arco mayores a 2π . *R/ Contamos y sumamos $\frac{\pi}{6}$ a cada 30 grado*

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

³ Figura tomada de <https://sites.google.com/site/portafolioisainsaenz/-quinto-parcial/1-circulo-unitario>

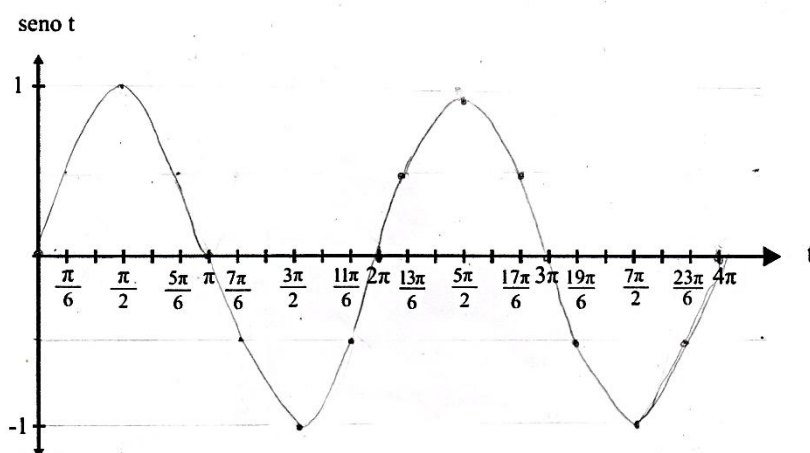
b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

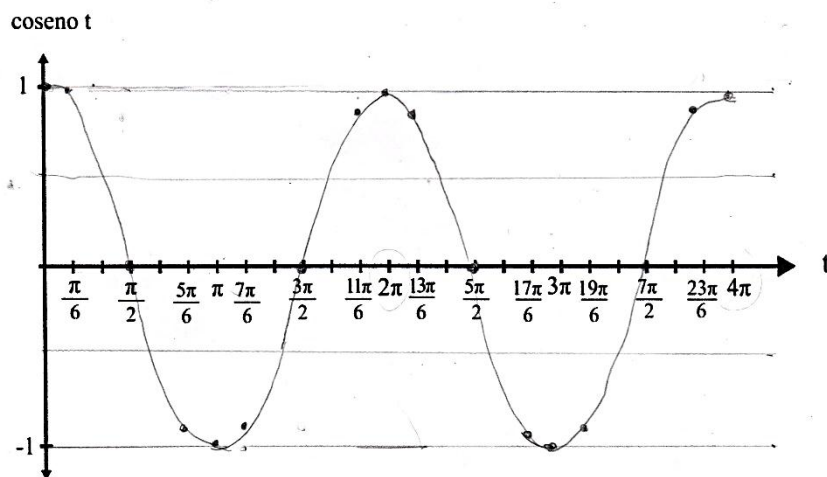
Tarea 2: Aproximación gráfica de las funciones circulares seno y coseno

Dado que $p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$, lo que significa que a cada longitud de arco le corresponde un único valor $\text{seno } t$ y un único valor $\text{coseno } t$, realice las gráficas de estas funciones teniendo en cuenta las tablas de la pregunta 5 (a, b) de la tarea 1.

1. a. Gráfica de la Función Seno



b. Gráfica de la Función Coseno



2. Con base en las gráficas anteriores determine:

- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función coseno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función coseno.

3. Determine el valor de:

- $\text{seno } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\text{coseno } \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\text{coseno } 3\pi = 0$
- $\text{seno } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\text{coseno } \frac{5\pi}{2} = 0$

- Indique las razones por las cuales la función seno es periódica y determine su periodo.
- Indique las razones por las cuales la función coseno es periódica y determine su periodo.

5. Compruebe para al menos dos valores de t que el periodo p obtenido en la pregunta 4, verifica:

- $\text{seno } (t + p) = \text{seno } t$
- $\text{coseno } (t + p) = \text{coseno } t$

6. Después de haber realizado las tres situaciones propuestas, describa que es una función periódica.

5

$$a) * \text{seno } \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{1} \right) = \text{seno } \frac{\pi}{2} \quad \text{seno } \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{seno } \left(\frac{5\pi}{2} \right) = \text{seno } \frac{\pi}{2}$$

$$* \text{seno } \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{1} \right) = \frac{3\pi + 4\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$b) \text{coseno } \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{1} \right) = \frac{13\pi}{6}$$

$$* \text{coseno } \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{1} \right) = \frac{19\pi}{6}$$

6 Es una expresión matemática en la que se puede observar un periodo de tiempo determinado en el que transcurre un fenómeno y se repite cada un número n de intervalos

2) a) El Valor Maximo Corresponde a 1 que se repite en:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$$

b) El Valor minimo Corresponde a -1 que se repite en:

$$\sqrt{\frac{3\pi}{2}} \quad \sqrt{\frac{7\pi}{2}}$$

c) El Valor maximo Corresponde a 1 que se repite en:

$$\sqrt{0} \quad \sqrt{2\pi} \quad \sqrt{4\pi}$$

d) El Valor minimo Corresponde a -1 que se repite en:

$$\sqrt{\pi} \quad \sqrt{3\pi}$$

4) a) Es periodica por que tiene un periodo de tiempo en el que cuando termina se vuelve a repetir y su periodo es de 2π

b) Es periodica porque tiene un ciclo de 2π en el que vuelve y se repite



**PROYECTO DE GRADO UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS SENO Y COSENO
DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL¹**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO COMERCIAL HERNANDO NAVIA VARÓN
SEDE CENTRAL**

NOMBRES: _____

GRADO: _____ **JORNADA:** _____

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

SITUACIÓN 1: Reconozcamos fenómenos naturales periódicos

Fases de la luna y calendario lunar

La luna es el único satélite natural de la Tierra. Su diámetro es de unos 3.476 km, aproximadamente una cuarta parte del de la Tierra. La luna gira alrededor de su eje (*rotación*) en aproximadamente 27 días, 7 horas, 43 minutos y 11,5 segundos – **27.32 días** – (mes sidéreo) y se traslada alrededor de la Tierra (*traslación*) en el mismo intervalo de tiempo, de ahí que siempre nos muestra la misma cara. Además, nuestro satélite completa una revolución relativa al sol en aproximadamente 29 días, 12 horas, 44 minutos y 2,8 segundos (mes sinódico), es decir para cambiar de una fase a otra similar, o mes lunar, la luna necesita **29.53 días**.²

A medida que la luna gira alrededor de la Tierra, y la Tierra gira alrededor del sol, la zona de la luna iluminada va cambiando de posición de manera que unas veces vemos toda la cara visible de la luna iluminada por el sol, cuando la Tierra está en alguna posición entre el sol y la luna, y otras veces vemos la cara visible oscura, ya que el sol se encuentra al otro lado de la luna e ilumina la cara oculta. Esta variación en la cantidad de superficie lunar que vemos iluminada recibe el nombre de **FASES DE LA LUNA**, y son cuatro (*luna nueva, cuarto creciente, luna llena y cuarto menguante*) que se van alternando a lo largo del mes lunar.³

A continuación se presenta el calendario lunar para los meses de enero, febrero y marzo de 2014, y las fechas correspondientes a las diferentes fases de la luna.⁴

¹ Elaborado por Omar Alexander Santacruz Lenis bajo la asesoría de Ligia Amparo Torres Rengifo.

² Tomado de www.astromia.com/tierraluna/movluna.htm

³ Tomado de recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/1ESO/Astro/contenido11.htm

⁴ Este calendario se ha modificado de acuerdo al propósito de las tareas, relacionadas con los fenómenos periódicos. Ver un ejemplo de calendario real en www.pac.com.ve/contenido/calendario-lunar-2014-imprimir/10989

Calendario lunar 2014

enero	febrero	marzo
lu ma mi ju vi sa do	lu ma mi ju vi sa do	lu ma mi ju vi sa do
1 2 3 4 5	1 2	1 2
6 7 8 9 10 11 12	3 4 5 6 7 8 9	3 4 5 6 7 8 9
13 14 15 16 17 18 19	10 11 12 13 14 15 16	10 11 12 13 14 15 16
20 21 22 23 24 25 26	17 18 19 20 21 22 23	17 18 19 20 21 22 23
27 28 29 30 31	24 25 26 27 28	24 25 26 27 28 29 30
	31	

Fases Lunares

 Luna nueva
  Cuarto creciente
  Luna llena
  Cuarto menguante

Mes	Enero					Febrero			Marzo				
Fecha	1	8	16	24	31	7	15	23	2	9	17	25	31
Fase Lunar													

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta el texto anterior, responda las siguientes preguntas:

- Indique en qué consiste el mes sidéreo y cuál es su valor aproximado.
- Explique en qué consiste el mes sinódico y cuál es su valor, según la lectura.
- Explique que es el calendario lunar y cómo se divide el mes sinódico para determinar cada fase de la luna.
- Para dos rotaciones de la luna, enuncie el tiempo en días transcurridos.
- a. Complete la siguiente tabla, para las distintas rotaciones de la luna.

Nº. de rotaciones	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	12	10
Días transcurridos	27.32	40.98	81.96	109.28	163.92	232.22	259.54	327.84	273.2

- Escriba la manera como determino la relación entre el número de rotaciones de la luna y los días transcurridos.

Respuesta

1. El mes Siderico consiste en la rotación de la luna alrededor de la tierra y su valor aproximado es de 27.32 días.
2. El mes Sinódico consiste en el cambio de una fase lunar a otra similar, y su valor es 29.53 días.
3. El calendario lunar es el proceso en el cual la luna realiza la rotación alrededor de la tierra y hace los cambios de fase lunar. El mes sinódico es un lapso de 29.53 días y se divide en 3 fases (Creciente, Llena, Menguante) y cada fase tiene un tiempo aproximado de 7 días hasta cambiar de fase, y al completar los 29.53 días hasta llegar a la fase Inicial (luna nueva).
4. Para dos rotaciones de la luna, multiplicamos 27.32×2 para que nos de los días transcurridos del tiempo de 2 rotaciones el cual da el resultado de 54.64 días.
5. lo determine multiplicando y sumando ej de la respuesta de $\frac{1}{2}$, 327.84, rotación $1 = 27.32 \leftarrow$ días Transcurridos

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \rightarrow 27.32 \\ \frac{1}{2} \rightarrow 27.32 \div 2 = 13.66 \\ \frac{1}{2} \rightarrow 27.32 + 13.66 = 40.98 \end{array} \right\} \text{ es } \frac{1}{2} \text{ N}^\circ \text{ rotaciones} = 40.98$$

$$27.32 \times 12^{\text{rotaciones}} = 327.84 \left. \vphantom{27.32} \right\} \text{ días transcurridos } 327.84 = \text{N}^\circ \text{ rotaciones de 12}$$

Tarea 2: Estableciendo regularidades periódicas

Observe el calendario lunar para los meses de enero a marzo de 2014 y conteste:

1. Cuánto tiempo ha transcurrido entre cada fase de luna nueva en el mes de enero. Compárelo con el mes sinódico y saque una conclusión.
2. Transcurre para el cuarto menguante entre los meses de febrero y marzo la misma cantidad de días que para la luna nueva en el mes de enero. Explique su respuesta.
3. Podrías dar la razón por la cual durante el mes de febrero de 2014, no se presenta luna nueva y durante los meses de enero y marzo hay dos días de esta fase. Justifique su respuesta.
4. Realice el calendario lunar para el siguiente trimestre del año 2014 (Abril, Mayo y Junio).
5. a. Complete la siguiente tabla.

Fecha	Abril 8	Junio 15	Mayo 31	Junio 23	Abril 16	Mayo 8	Abril 24	Mayo 29	Junio 7
Fase Lunar									

- b. Indique los aspectos que tuvo en cuenta para realizar este calendario.
- a. Con base en el calendario lunar del primer semestre del año 2014, determine la manera de predecir las fases lunares y fechas, pertenecientes al segundo semestre del 2014.
- b. Indique la regularidad relacionada con días transcurridos entre cada fase lunar. ¿Cómo la podrías denominar?

1. En el mes de enero hay 31 días, el 1 de enero estuvo la fase luna nueva, y para cada fase se transurre en 29 días, entonces si inicio fase de luna nueva el 1 de enero, contamos desde ahí 29 días para que se vuelva a dar la fase y finalmente el 31 de enero vuelve a dar.
2. Si transcurre para el cuarto menguante la misma cantidad días, por que da la fase en el mes de febrero 23 Cuarto menguante, se vuelve a dar lo mismo lapso de tiempo y el 25 de marzo vuelve y se da la fase, fue el fase de luna nueva.
3. Porque luna nueva empezó el 1 de enero, de ahí nuevamente sucede después de 29 días y volvió el 31 de enero nuevamente la fase, pero no sucede en febrero, porque este mes es muy corto y por eso la fase vuelve y se da el 2 de marzo que es un mes de 31 días y que realmente nos damos cuenta que 29 días después vuelve y se aparece la fase el 31 de marzo.

4.

Abril						
Lo	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Mayo						
Lo	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Junio						
Lo	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

5. lo analice, pero no puede realizarlo porque en los días que hay no aparece ninguna fase lunar. Hay una luna nueva el día 1 de mayo.

6. muy sencillo, como ya tengo el conocimiento de las fases lunares, sigo el transcurso, y como constantemente estamos cambiando de fases, es solo estar pendiente, contar los días, y ya no creo que haya problema.

7. Según la información.

Tarea 3: Validando fenómenos periódicos

Las fases lunares y la agricultura

Como bien sabes, Colombia es uno de los principales países a nivel mundial en la siembra, cultivo y producción de café, procesos caracterizados por las prácticas tradicionales de los campesinos de las distintas regiones del país.

El desarrollo de la caficultura comprende una serie de tareas para las cuales los pequeños productores consideran, en la mayoría de los casos, las diferentes fases lunares para ejecutarlas, es así como la mejor fase lunar para cosechar granos de café con la finalidad de producir semillas es el *cuarto menguante* hacia la *luna nueva* (Torres, 2012).

Con ayuda del calendario lunar construido en la tarea anterior y tomando como referencia el texto las fases lunares y la agricultura, determine:

1. a. ¿Cuáles fueron las fechas en el primer semestre del año 2014 donde los pequeños productores de café pudieron cosechar los granos de café?
b. Identifique la regularidad de las cosechas de granos de café.
2. Caracterice de acuerdo a las actividades realizadas en las tareas anteriores un fenómeno periódico.
3. a. Clasifique los siguientes fenómenos en periódicos o no periódicos e indique el ¿por qué?
 - Estaciones del año.
 - Movimiento telúrico (Temblor).
 - El día y la noche.
 - Funcionamiento de un semáforo.
 - Los latidos del corazón.b. Indique el periodo en los fenómenos clasificados como periódicos. Escriba una reflexión al respecto.
4. Identifique el periodo o regularidad aproximada de:
 - a. Mes sinódico.
 - b. Mes sidéreo.
 - c. Cosecha de granos de café.
5. De ejemplos, aparte de los ya mencionados, de algunos fenómenos que tienen un periodo o regularidad en su comportamiento.

1)

- a) 24 enero
 31 enero
 23 febrero
 2 marzo
 25 marzo
 31 marzo

b) La regularidad de esos periodos de tiempo es de 6 días de cuarto menguante hacia luna nueva.

2)

a) Podríamos decir que un fenómeno periódico muy importante es el de las fases de la luna, ya que ocurre cada 29 días.

3) a) • Eclipses del Año = No periódico, porque son irregulares porque cada eclipsis del año.

- Movimiento Tectónico = No periódico, porque es irregular por que se da al choque de placas tectónicas
- El día y la noche = periódico, porque siempre se da en un lapso de tiempo de 24 horas
- Funcionamiento de un semáforo = periódico, porque siempre están sincronizados
- Las latidas del corazón = periódico, porque un latido por segundo y es constante

b.

• el periodo de el día y la noche es de 24 horas, que se divide en 12 horas de día y 12 de noche.

• el periodo de funcionamiento de un semáforo es de 1 min. y se divide en los 30 segundos verde, 25 segundos rojo y 5 segundos amarillo

• el periodo de funcionamiento de los latidos del corazón es por segundo



**PROYECTO DE GRADO UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS SENO Y COSENO
DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL ¹**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO COMERCIAL HERNANDO NAVIA
VARÓN SEDE CENTRAL**

NOMBRES: _____

GRADO: _____ **JORNADA:** _____

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

SITUACIÓN 2: Acerquémonos a las funciones periódicas

Un deportista de alto rendimiento realiza una práctica en una escalera partiendo de un lugar *A* (ubicado en la base de la escalera) hacia la cima, ubicada en un lugar *B* a 6,9 metros de altura y hace el recorrido en 3 segundos. Regresa a su punto de partida, pero al regresar decide ir nuevamente a *B* y continúa esta trayectoria de *A* a *B*. La tabla 1 muestra los valores del tiempo (*t*) en segundos de cada desplazamiento del deportista y la altura (*h*) en metros de la posición del deportista:

<i>t(s)</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>h(m)</i>	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0	2.3	4.6	6.9	4.6	2.3	0

Tabla 1. Valores del tiempo y altura en metros de la posición del deportista.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

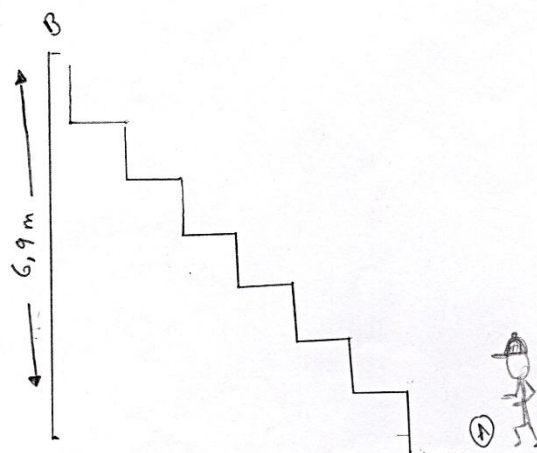
Teniendo en cuenta el texto y la tabla anterior, solucione las siguientes actividades:

1. Bosqueje un gráfico de la situación.
2. Escriba el significado que tiene el punto (0,0) en la relación entre tiempo y altura (posición en metros del deportista).
3. Indique el número de metros que recorre el deportista cada segundo.
4. Explique el significado de las parejas ordenadas (6,0) y (12,0).
5. Determine el tiempo que tarda el deportista en regresar, por primera vez, al punto de partida. Argumente su respuesta.
6. Si el deportista a los 2 segundos se encuentra a una altura de 4.6 metros, explique porque al cabo de 5 segundos su altura es de 2.3 metros.

¹ Elaborado por Omar Alexander Santacruz Lenis bajo la asesoría de Ligia Amparo Torres Rengifo.

RESPUESTA

①



$$T = 3 \text{ sg}$$

② el punto 0,0 representa el momento en donde el cuerpo está en reposo

③ El deportista recorre 2,3 metros cada segundo

④ El significado de las paradas 6,0 y 12,0 es que ambas están en el punto A, que vale 0 metros, es decir que ya cumplió trayectoria y volvió a su punto de partida.

⑤ El deportista se demora 6 segundos en regresar al punto de partida porque si se demora 3 segundos en subir, tardará el mismo tiempo en regresar con un total de 6 segundos, es decir que la trayectoria se cumple.

⑥ el deportista en cada segundo recorre 2,3 metros, esto nos ayuda a entender de que al segundo 3 el llega a la cima es decir 6,9 metros, entonces al segundo 4 el deportista va en descenso, es decir que va restando el tiempo que ya había recorrido al subir y es por eso que en el segundo 5 el tiene una altura de 2,3 metros.

Tarea 2: Representando y describiendo funciones periódicas

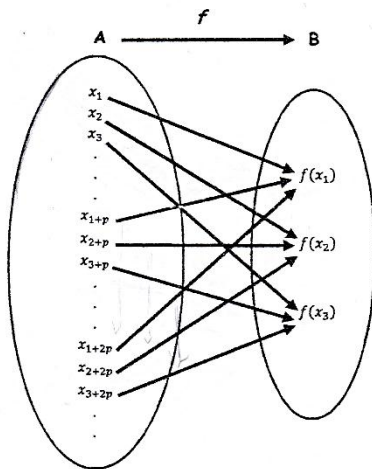
1. a. Escriba cómo varía el tiempo en esta situación.
b. Escriba cómo varía la posición del deportista (altura en metros).
2. Represente en el plano cartesiano, las parejas ordenadas dadas en la tabla 1.
3. Escriba Falso (F) o Verdadero (V), según el caso.
 - a. Al transcurrir 6, 12 y 18 segundos el deportista se encuentra en el sitio de partida (V).
 - b. A los 3 y 9 segundos el deportista se encuentra en la cima (V).
 - c. A los 4 segundos el deportista se encuentra subiendo de A hacia B (F).
 - d. El periodo de esta situación es 3 segundos (F).
4. Teniendo en cuenta que en el plano cartesiano se pueden unir los puntos, describa en el contexto de la situación (movimiento del deportista) el significado de la gráfica resultante.

Se puede afirmar que el movimiento del deportista se describe mediante una **función periódica**.

Una función f es periódica con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x + p$ siempre que contenga a x y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x del dominio de f .

La representación gráfica de una función periódica se repite a intervalos regulares. El intervalo menor para el cual se repite la gráfica se llama periodo de la función.²

El siguiente diagrama sagital muestra una representación de la función periódica:



² Definición tomada de Apostol, Tom. Calculus (Vol. 1). 2ed. Barcelona: Reverté, 1988. Pág. 117 y Espiral 10. Grupo Editorial Norma, 2004. Pág. 67.

5. a. Con base en la gráfica del punto 2 (tarea 2) y la definición anterior, determine lo que sucede con la gráfica a partir de los 12 segundos.
- b. Indique el periodo (p) de tiempo a partir de la gráfica. Explique su respuesta.
6. Compruebe, por lo menos para tres valores de t , que el periodo p obtenido en 5 (b), verifica: $h(t+p) = h(t)$.
7. Explique la representación sagital de una función periódica según la relación entre los x del dominio y los $f(x)$ del rango.

RESPUESTA

1

(A) El deportista cumple su trayectoria entre el punto A y B. Cada 6 segundos y vuelve y se repite, entonces la variación es periódica.

(B) la posición del deportista varía cada segundo 2.3 hasta que llega a la cima, de ahí, comienza a descender.

A El movimiento del deportista se describe bajo una función periódica ya que el deportista se está moviendo de un lado u otro determinadamente siguiendo un patrón.

5 a: lo que sucede con la gráfica a partir de los 12 seg. es que se sigue repitiendo el mismo patrón indeterminadamente.

b. El periodo de tiempo según la gráfica es de 6 segundos ya que es lo que se demora el deportista para volver al mismo punto.

6. $p = 6$.

$$T = 3 = 6.9.9$$

$$h = (3 + 6) = 9$$

$$T = 9 = 6.9.9$$

$$T = 2 = 4.6$$

$$h = (2 + 6) = 8$$

$$T = 8 = 4.6$$

$$T = 5 = 2.3$$

$$h = (5 + 6) = 11$$

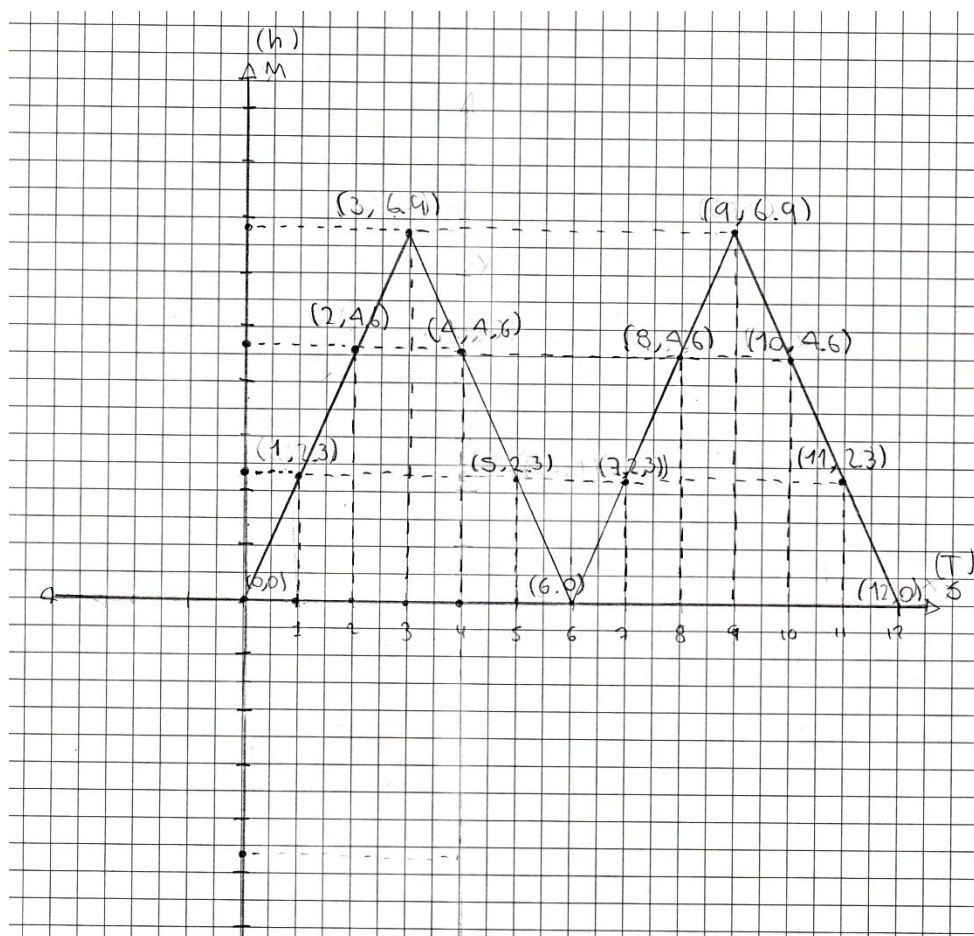
$$T = 11 = 2.3$$

7 la representación sagital es:

$(x_1, x_1 + p, x_1 + 2p)$ son del rango $f(x_1)$

$(x_2, x_2 + p, x_2 + 2p)$ son del rango $f(x_2)$

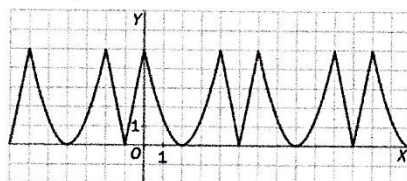
$(x_3, x_3 + p, x_3 + 2p)$ son del rango $f(x_3)$



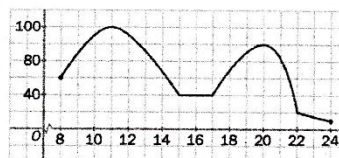
Tarea 3: Reconociendo gráficas de funciones periódicas

Observe las siguientes representaciones gráficas de algunas funciones:³

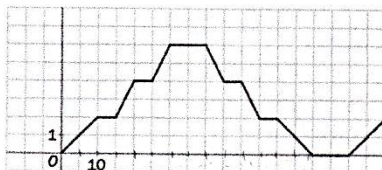
a.



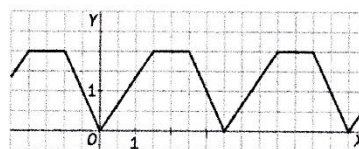
b.



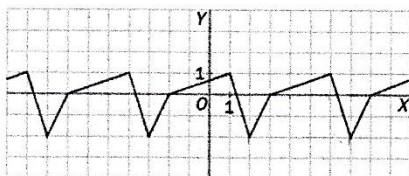
c.



d.



e.



1. Complete la tabla 2, indicando **si** para las funciones periódicas y **no** para aquellas no periódicas.

Representación gráfica	a	b	c	d	e
Función Periódica	si	no	si	si	si
Periodo	6		70	3.5	5

Tabla 2.

2. Explique cómo determinó el periodo p de aquellas funciones clasificadas como periódicas.

determine el periodo contando los cuadrículos y teniendo en cuenta el factor de cada uno

³ Representaciones gráficas tomadas de Lección 12. Funciones. Disponible en: platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_12.pdf.

Tarea 4: Aproximándonos a la expresión algebraica

Para obtener una expresión algebraica que describa el movimiento del deportista, Valentina y Juan inician una discusión al respecto. Valentina asegura que la variación de la altura del deportista en función del tiempo corresponde a una función lineal dada por la expresión: $h(t) = 2,3t$.

Sin embargo, Juan argumenta que esta expresión es válida solo para el primer tramo de la gráfica, $k = 0$, es decir cuando el deportista sube por primera vez a la cima de la escalera.

1. De este modo, Juan propone a Valentina que la expresión algebraica que describe el movimiento del deportista para los tramos de ascenso en la gráfica es $h(t) = 2,3(t - 6k)$, donde k indica el número de veces en que sube el deportista. Por ejemplo, para $k = 1$ la expresión es:

$$h(t) = 2,3(t - 6).$$

- Determine la validez de esta afirmación para $k = 3$.
- Valentina encuentra que para $k = 4$, la expresión algebraica es $h(t) = 2,3(t - 24)$ y establece que: $h(24) = 0$; $h(25) = 2,3$; $h(26) = 4,6$ y $h(27) = 6,9$. Verifique los valores dados por Valentina.

2. Ahora, Valentina decide buscar una expresión algebraica que permita modelar los tramos de descenso del deportista y propone: $h(t) = -2,3(t - 6k)$.

- Decida si para $k = 1$ la expresión dada por Valentina representa el primer tramo de descenso del deportista.
- Si $k = 0$ no representa este primer tramo, explique cuál es el valor mínimo que debe tomar k para que la expresión tenga sentido.

3. Al final de la discusión Valentina y Juan deciden que la expresión algebraica que modela la altura del deportista en función del tiempo es de la forma:

$$h(t) = \begin{cases} 2,3(t - 6k); k = 0, 1, 2, 3, \dots; 6n \leq t \leq 3p \text{ donde } n = 0, 1, 2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \text{(Tramos de ascenso)} \\ -2,3(t - 6k); k = 1, 2, 3, \dots; 3p \leq t \leq 6n \text{ donde } n = 1, 2, \dots \text{ y } p \text{ impar} \\ \text{(Tramos de descenso)} \end{cases}$$

Compruebe la validez de esta expresión para al menos dos valores de k y de t , para cada tramo (ascenso y descenso).

4. Teniendo en cuenta las diferentes tareas llevadas a cabo en esta situación, escriba como define una función periódica.

Solución

1

a. $k=3$

$$h(t) = 2,3(t - 18)$$

$$h(18) = 2,3(18 - 18) = 0$$

$$h(19) = 2,3(19 - 18) = 2,3$$

$$h(20) = 2,3(20 - 18) = 4,6$$

$$h(21) = 2,3(21 - 18) = 6,9$$

6

$$h(24) = 2,3(24 - 24) = 0.$$

$$h(26) = 2,3(26 - 24) = 4,6$$

$$h(25) = 2,3(25 - 24) = 2,3$$

$$h(27) = 2,3(27 - 24) = 6,9$$

2.

$$a) h(3) = -2,3(3 - 3) = 6,9$$

$$h(5) = -2,3(5 - 3) = 2,3$$

$$h(4) = -2,3(4 - 3) = 4,6$$

$$h(6) = -2,3(6 - 3) = 0.$$

6. El valor mínimo que debe tomar k para que la expresión tenga sentido es 1.

3.

$$6 \leq t \leq 9$$

$$h = 1$$

$$p = 3$$

$$2,3(7 - 6) = 2,3$$

$$12 \leq t \leq 15$$

$$h = 2$$

$$p = 5$$

$$2,3(13 - 12) = 2,3$$

4. Una función periódica se define como el intervalo de tiempo en que se repite un acción en repetitivo de la misma manera.



**PROYECTO DE GRADO UNA PROPUESTA DE AULA PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS SENO Y COSENO
DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL¹**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO COMERCIAL HERNANDO NAVIA
VARÓN SEDE CENTRAL**

NOMBRES: _____

GRADO: _____ **JORNADA:** _____

A continuación encontrará una serie de actividades desarróllelas junto con un compañero de curso.

SITUACIÓN 3: Algunas funciones de variación periódica: El caso de las funciones circulares seno y coseno

A partir de las inquietudes de Valentina y Juan con respecto a las funciones periódicas, el profesor de matemáticas decide proponerles una situación en un contexto de medida. Para esto partiendo de una circunferencia unitaria (*radio* = 1) cuya longitud es $L = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$, centrada en el origen del sistema de coordenadas relaciona a cada longitud de arco t un único punto $p(t) = (x, y)$ asociado al extremo del arco², estableciendo una correspondencia entre las longitudes de los arcos y parejas ordenadas de números reales (ver figura 1).

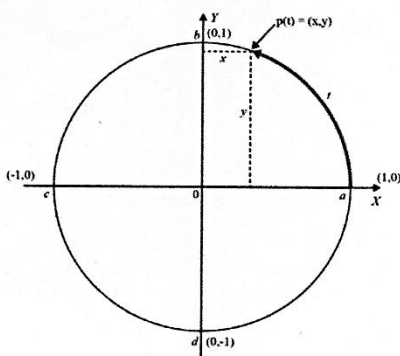


Figura 1.

¹ Elaborado por Omar Alexander Santacruz Lenis bajo la asesoría de Ligia Amparo Torres Rengifo.

² Un arco determinado en el sentido contrario a las manecillas del reloj se considera positivo; si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj el arco se considera negativo.

Por ejemplo, si el arco es de $\frac{1}{4}$ de circunferencia unitaria se tiene que: $t = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ entonces $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, como se observa en la figura 2.

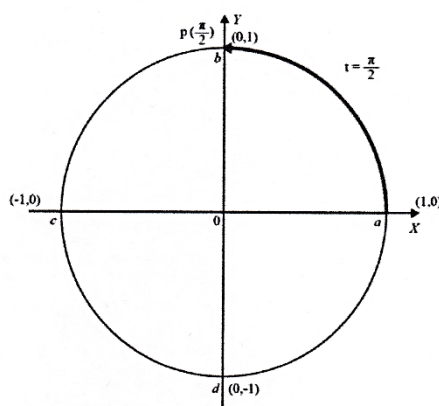


Figura 2.

Tarea 1: Caracterizando las funciones circulares seno y coseno como funciones periódicas

1. a. Teniendo en cuenta el texto inicial y las figuras 1, 2 y 3, complete la tabla, para los arcos de circunferencia dados.

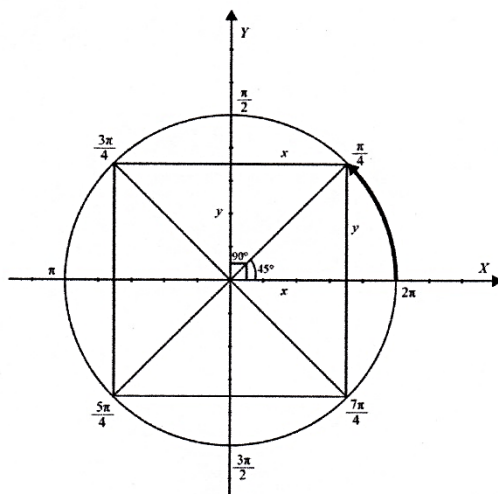


Figura 3.

Arco	Longitud del arco (t)	Pareja ordenada: $p(t) = (x, y)$
0	0	$P: 0 = (0, 1)$
$\frac{1}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{1}{8} (2\pi) = \frac{\pi}{4}$	$P: \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
$\frac{3}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{3}{8} (2\pi) = 3\frac{\pi}{4}$	$P: \frac{3\pi}{4} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
$\frac{1}{2}$ de circunferencia	$t = \frac{1}{2} (2\pi) = \pi$	$P: \pi = (-1, 0)$
$\frac{5}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{5}{8} (2\pi) = \frac{5\pi}{4}$	$P: \frac{5\pi}{4} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
$\frac{3}{4}$ de circunferencia	$t = \frac{3}{4} (2\pi) = \frac{3\pi}{2}$	$P: \frac{3\pi}{2} = (0, -1)$
$\frac{7}{8}$ de circunferencia	$t = \frac{7}{8} (2\pi) = \frac{7\pi}{4}$	$P: \frac{7\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
1 vuelta completa	2π	$P: 2\pi = (1, 0)$
1 vuelta y $\frac{1}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{\pi}{4}$	$P: 2\pi + \frac{\pi}{4} =$
1 vuelta y $\frac{1}{4}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	$P: (t) = (0, 1)$
1 vuelta y $\frac{3}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{3\pi}{4}$	$P: (t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
1 vuelta y $\frac{1}{2}$ de circunferencia	$2\pi + \pi$	$P: (t) = (-1, 0)$
1 vuelta y $\frac{5}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{5\pi}{4}$	$P: (t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
1 vuelta y $\frac{3}{4}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{3\pi}{2}$	$P: (t) = (0, -1)$
1 vuelta y $\frac{7}{8}$ de circunferencia	$2\pi + \frac{7\pi}{4}$	$P: (t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
2 vueltas completas	4π	$P: (t) = (1, 0)$

Tabla 1.

b. Explique cómo determinó las longitudes de los arcos y las parejas ordenadas.

2. A partir de la tabla 1, establezca para cuáles longitudes de arco la pareja $p(t) = (x, y)$ es igual. Argumente su respuesta.

3. Indique entre qué valores varía la coordenada x y entre qué valores varía la coordenada y de la pareja ordenada $p(t) = (x, y)$.

b determine las longitudes de los arcos por medio de los gráficos

Tomando en consideración que a cada longitud de arco t se le puede asociar una pareja ordenada $p(t) = (x, y)$ se puede definir la función circular seno como la coordenada y del punto $p(t)$ y la función circular coseno como la coordenada x del punto $p(t)$, de tal manera que:

$$p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t).$$

A continuación se presentan algunos valores para $p(t)$ asociados a diferentes longitudes de arco t .

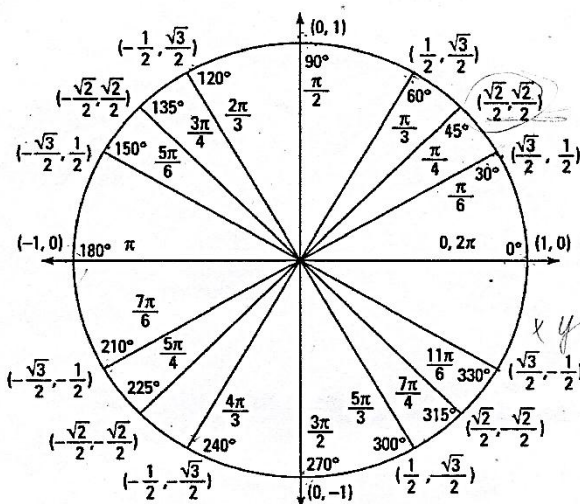


Figura 4. Círculo Trigonómico³.

4. A partir de la figura 4, indique como determinar el valor de $\text{seno } t$ y $\text{coseno } t$, para longitudes de arco mayores a 2π .

5. Complete las siguientes tablas:

a.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Seno t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

³ Figura tomada de <https://sites.google.com/site/portafolioisainsaenz/-quinto-parcial/1-circulo-unitario>

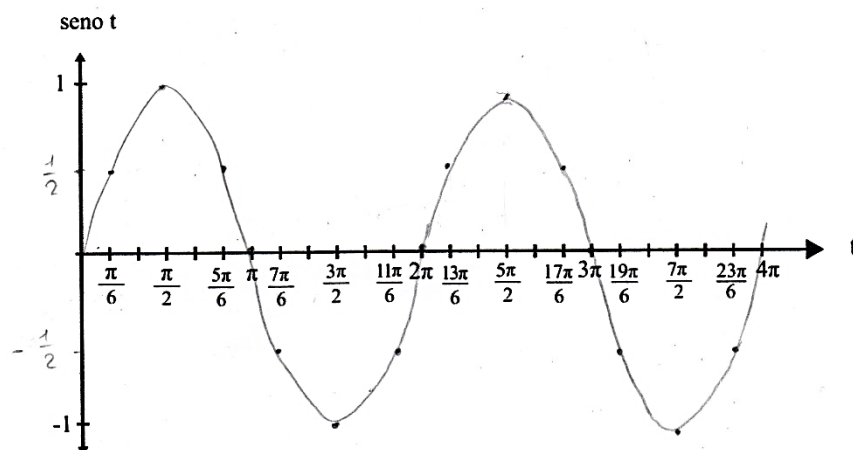
b.

Longitud del arco (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Coseno t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

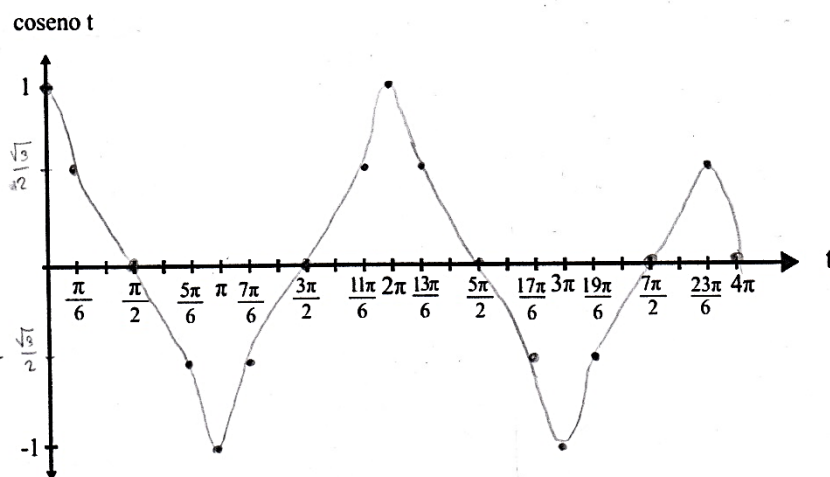
Tarea 2: Aproximación gráfica de las funciones circulares seno y coseno

Dado que $p(t) = (\text{coseno } t, \text{seno } t)$, lo que significa que a cada longitud de arco le corresponde un único valor $\text{seno } t$ y un único valor $\text{coseno } t$, realice las gráficas de estas funciones teniendo en cuenta las tablas de la pregunta 5 (a, b) de la tarea 1.

1. a. Gráfica de la Función Seno



b. Gráfica de la Función Coseno



2. Con base en las gráficas anteriores determine:

- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función seno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor máximo para la función coseno.
- La(s) longitud(es) de arco asociada(s) al valor mínimo para la función coseno.

3. Determine el valor de:

- $\text{seno } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\text{coseno } \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\text{coseno } 3\pi = -1$
- $\text{seno } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\text{coseno } \frac{5\pi}{2} = 0$

- Indique las razones por las cuales la función seno es periódica y determine su periodo.
- Indique las razones por las cuales la función coseno es periódica y determine su periodo.

5. Compruebe para al menos dos valores de t que el periodo p obtenido en la pregunta 4, verifica:

- $\text{seno } (t + p) = \text{seno } t$
- $\text{coseno } (t + p) = \text{coseno } t$

6. Después de haber realizado las tres situaciones propuestas, describa que es una función periódica.