

ENERGÍA OSCURA CON CAMPOS VECTORIALES DE GAUGE

por

MELISSA VARELA ÁLVAREZ



DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE
CIUDAD UNIVERSITARIA MELÉNDEZ, SANTIAGO DE CALI, COLOMBIA

ENERGÍA OSCURA CON CAMPOS VECTORIALES DE GAUGE

MELISSA VARELA ÁLVAREZ

TESIS DIRIGIDA POR:
Prof. CÉSAR ALONSO VALENZUELA TOLEDO

TESIS CO-DIRIGIDA POR:
Msc. JOHN BAYRON ORJUELA QUINTANA



TRABAJO DE GRADO PRESENTADO AL PROGRAMA ACADÉMICO DE
FÍSICA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICA

Dedicatoria

Son tantas las personas a la cuales quiero agradecer por ayudarme y acompañarme en este largo camino...

Primero, agradecer a Dios por darme la fortaleza y sabiduría durante todo este tiempo, por permitirme levantarme en los momentos difíciles. Agradezco también inmensamente a mis papás y a mi hermano, por ser tan incondicionales conmigo siempre, por apoyarme y darme los alientos que necesito, ellos no saben lo afortunada que me siento de tenerlos; mi familia en general, que de una u otra forma han aportado un granito de arena en mí durante este proceso.

A Juan le agradezco por creer siempre en mí, incluso cuando yo no lo hacía, por apoyarme y recordarme lo fuerte y capaz que soy, es una bendición haber podido encontrar una persona como él...

Agradezco también al profe César, por ser un excelente director y una excelente persona, su apoyo siempre ha sido incondicional; a Bayron por ser un gran co-director y compañero. A la universidad del Valle junto con sus profesores, por brindar la mejor educación y las mejores herramientas; a ICETEX y al programa Ser Pilo Paga, por permitirme cumplir el sueño de estudiar una carrera de ciencias en una universidad pública fuera de mi ciudad natal.

Mis amigos también han sido esenciales en este camino y afortunadamente tengo muchos; agradezco a Natalia Candado, por ser esa hermana que siempre quise tener, por abrazarme en mis momentos de tristeza y angustia; a Jorge Escobar, por ser el mejor compañero de carrera y amigo que una mujer como yo podría tener; a Isabella Aguilera y Camila Jiménez, por su amistad y compañía desde el inicio. También quiero resaltar el gran apoyo de mis compañeros durante cada semestre, agradezco a Diego Velasco por ser ese cómplice y consejero que siempre sabe qué decir.

A Tara, nuestra hermosa Pitbull, por acompañarme en todas las veces que trasnoché estudiando y esperarme para irnos a dormir, por acercarse para que la abrazara cuando sabía que estaba iniciando un ataque de ansiedad, ella es la mejor mascota del mundo.

Y por último, pero no menos importante, agradezco a los amigos que me dejó el colegio; Stefania Mosquera, Dayanna Veloza, Daniela Zamora, Diana Rendón, Mayra Henao, Andrés Aguilera, ellos siempre han sido ese escape de la rutina donde uno siempre se puede refugiar.

Esto es solo una etapa culminada, con la ayuda de Dios podré seguir cumpliendo todos mis sueños.

Resumen

Uno de los desafíos más importantes de la cosmología moderna es explicar, desde el punto de vista fundamental, las razones por las cuales el universo hoy en día se expande de forma acelerada. Desde el punto de vista teórico, se han propuesto diversos modelos que se pueden clasificar en dos grupos: aquellos que adicionan un fluido exótico denominado energía oscura y aquellos que modifican la teoría de la gravedad. Dado que, la mayoría de modelos del segundo grupo ha tenido problemas observacionales, en el presente trabajo se estudia un modelo de energía oscura basado en campos vectoriales de gauge acoplado a la materia oscura. Para el análisis respectivo se usa el método de los sistemas dinámicos, encontrando así los puntos críticos del sistema y estudiando su estabilidad. Además, se realiza la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales y se obtiene la evolución cósmica de los parámetros de densidad y las ecuaciones de estado efectivas, encontrando una ecuación de estado dinámica para la energía oscura, la cual depende fuertemente de uno de los parámetros involucrados en la función que acopla a la energía oscura y la materia oscura.

Palabras clave: energía oscura, campos vectoriales, campos de gauge, sistemas dinámicos, expansión acelerada, cosmología.

Índice general

Dedicatoria	I
1. Introducción	1
2. Expansión acelerada del universo	3
2.1. Λ CDM: Modelo cosmológico estándar	5
2.2. Energía oscura	6
3. Método de los sistemas dinámicos	8
4. Modelo con campos vectoriales de Gauge	10
4.1. Modelo	11
4.2. Ecuaciones de campo	11
4.3. Ecuaciones de movimiento	14
4.4. Ecuaciones con el fondo	15
4.4.1. Ecuaciones de campo	16
4.4.2. Ecuaciones de movimiento	18
4.5. Formas del potencial y la función de acople	20
5. Sistema dinámico	22
5.1. Variables adimensionales	22
5.2. Ecuaciones diferenciales	23
5.3. Puntos críticos	24
5.4. Espacio de parámetros	26
6. Solución Numérica	27
7. Conclusiones	32
Appendices	33
A. Variación del escalar de Ricci	33
Bibliografía	35

Capítulo 1

Introducción

Actualmente se sabe, gracias a las observaciones, que el universo se expande de forma acelerada [1, 2]; puesto que, a finales del siglo XX realizando la medición del corrimiento al rojo de la longitud de onda de radiación de supernovas tipo IA, se determinó que dichas mediciones tenían sentido si el universo se encontraba en expansión acelerada. Esta idea es totalmente contraria a la que tenía Einstein durante el desarrollo de su teoría de la gravedad a principios del siglo XX, pues pensaba que el universo era estático; pero para su sorpresa, las ecuaciones de dicha teoría predecían un comportamiento dinámico por parte del universo. Para contrarrestar el comportamiento dinámico del universo, Einstein introdujo la constante cosmológica Λ a sus ecuaciones. Sin embargo, en el año 1928, las observaciones realizadas por Edwin Hubble muestran que el universo se encontraba en expansión. Este descubrimiento obligó a Einstein a prescindir de la constante cosmológica y a considerar esta idea como uno de sus más grandes errores. No obstante, en 1998, se descubre que el universo no solo se expandía, sino que lo hacía de forma acelerada [1, 2]. La explicación más sencilla a este fenómeno, es considerar la existencia de una densidad de energía constante, con presión negativa, y que justamente se logra mediante la reintroducción de la constante cosmológica [3, 4]. Este modelo se conoce actualmente como el modelo Λ CDM y es el que mejor se ajusta a las observaciones actuales [3, 5]. Sin embargo, este modelo tiene algunos problemas o tensiones: el primero, es el denominado de “ajuste fino” [6], ya que dicha constante se asociaba a la energía del vacío, pero al momento de compararla con esta energía obtenida mediante observaciones, se llega a una discrepancia de 120 órdenes de magnitud. El segundo problema corresponde al de la tensión H_0 [7, 8], donde H es el parámetro de Hubble, la tensión resulta porque al medir esta cantidad hoy en día, utilizando los datos de la radiación cósmica de fondo (CMB por sus siglas en inglés), resulta ser diferente a la cantidad obtenida si se realizan medidas locales. Finalmente, está el entendimiento del origen fundamental de la constante cosmológica [9], o en últimas, el origen fundamental de la expansión acelerada del universo. Desde el descubrimiento de dicha expansión acelerada, diferentes grupos de investigación e investigadores han propuesto diversos modelos intentando explicar este fenómeno del universo. Estos modelos se pueden clasificar en dos grandes grupos, de acuerdo a la forma en que se “incluye” el fenómeno de la expansión tardía del universo en las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y corresponde a la parte geométrica de las ecuaciones, G es la constante de gravitación universal y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso y corresponde al contenido energético del universo. Por lo tanto, el primer grupo de modelos corresponde a aquellos que modifican la parte izquierda de la ecuación (1.1), es decir, son modificaciones a la geometría o en últimas a la teoría de la gravedad [3, 10]. Inicialmente, había una gran variedad de modelos de este tipo, pero a medida que se realizaban proyectos observacionales, las predicciones de dichos modelos debían corresponder a los resultados de las mediciones realizadas, hecho que no resultó exitoso para algunos de estos modelos [11, 12, 13], ya que, por ejemplo, predecían que la velocidad de las ondas gravitacionales era mayor a la obtenida experimentalmente. Por tal razón, en el contexto de la expansión acelerada tardía, los modelos vigentes actualmente de gravedad modificada son los llamados modelos $f(R)$. Estos modelos consisten en la modificación de la acción de Einstein-Hilbert, donde esta ya no será una función lineal del escalar de curvatura R , sino que tendrá otros términos que dependan de dicho escalar.

En el segundo grupo de modelos se encuentran aquellos que modifican la parte derecha de la ecuación (1.1); es decir, adicionan un contenido material exótico, con presión negativa, llamado energía oscura [14, 15]. Este fluido será el responsable de la expansión acelerada del universo. En este grupo se encuentra la mayoría de propuestas planteadas; entre ellas, modelos de quintaesencia que usan campos escalares con sus respectivos potenciales, modelos de k-esencia similares a los de quintaesencia con la diferencia de que el término cinético de los campos no es canónico, modelos acoplados entre energía oscura y materia oscura, entre otros (ver [14, 15]).

Las propuestas más populares son aquellas que usan campos escalares en modelos de energía oscura; sin embargo, no se deben descartar otras opciones como los campos vectoriales (ver por ejemplo [16, 17, 18, 19, 20]), las formas (ver por ejemplo [21, 22, 23]), etc. Es por esto que, en el presente trabajo se propone un modelo para la energía oscura basado en campos vectoriales con un acople no mínimo a la materia oscura. El documento se divide en 7 capítulos: en el capítulo 2, se realiza un repaso de la teoría sobre la expansión acelerada del universo, junto con el modelo cosmológico estándar y la energía oscura. En el capítulo 3, se presenta la base teórica del método de los sistemas dinámicos, el cual es usado para analizar el modelo de este trabajo. En el capítulo 4, se estudia el modelo propuesto partiendo desde su acción, derivando así sus respectivas ecuaciones usando la métrica FRLW. En el capítulo 5, se obtiene el sistema dinámico asociado al modelo, junto con sus puntos críticos y el análisis de estos. En el capítulo 6, se presenta la solución numérica del sistema de ecuaciones y las gráficas correspondientes a la evolución de los parámetros de densidad y las ecuaciones de estado. Finalmente, en el capítulo 7, se muestran las conclusiones obtenidas.

Expansión acelerada del universo

A principios del siglo XX, cuando Einstein se encontraba desarrollando su teoría de la gravedad, introdujo la constante cosmológica Λ en sus ecuaciones para seguir manteniendo la idea de un universo completamente estático. Sin embargo, en ese mismo tiempo, de Sitter al resolver las mismas ecuaciones de Einstein para un universo sin materia, mostró que la introducción de dicha constante cosmológica conducía a un período de expansión acelerada, muy diferente al que imaginaba Einstein. Es así como inicialmente se encuentra una discrepancia entre la introducción y la omisión de dicha constante en las ecuaciones de Einstein. Años después, Edwin Hubble demostró que efectivamente el universo se expande, dejando aún abierta la incógnita sobre la constante cosmológica.

Finalizando el siglo XX se empezaron a obtener las primeras evidencias observacionales de la expansión acelerada del universo [15], entre estas se tienen:

- Supernova tipo IA (SN Ia): cuando una enana blanca alcanza una masa de 1,4 masas solares, la gravedad aumenta y dicha estrella explota. Inicialmente se pensaba que dichas estrellas tenían siempre la misma luminosidad y de esta forma podían ser usadas como unas luces fijas o estándar en el universo, estas son tan brillantes como una galaxia. Pero cuando se realizaron las primeras observaciones se encontró que su luz se volvía más débil con la distancia, lo que llevó a pensar a los científicos que se debía a una posible extinción, pero finalmente se dedujo que esto sucedía por la expansión cósmica.
- Radiación de fondo de microondas (CMB): el fondo cósmico de microondas es una captura instantánea del universo, cuando tenía aproximadamente 380000 años de edad, antes de la época de desarrollo de estructuras y tiene anisotropías en la temperatura. El espectro angular de potencias del CMB implica que este está dominado por unos picos y que estos presentan cierto corrimiento debido a la expansión cósmica. Teniendo en cuenta la evidencia de las observaciones tratadas hasta este punto, se puede inducir que el universo es espacialmente plano y que también, el contenido material del universo corresponde a aproximadamente un cuarto de la densidad crítica, siendo entonces las otras tres cuartas partes otro contenido desconocido, el cual se denomina energía oscura y será tratado en el próximo capítulo.

- **Oscilaciones acústicas bariónicas (BAO):** hace muchos años, toda la materia (incluyendo la materia oscura) y la radiación estaban condensadas formando un plasma. Los fotones, que no interactúan con la materia oscura, solo interactúan con la materia bariónica colindante. Dicha materia oscura se encuentra en grumos y genera atracción gravitatoria sobre la materia bariónica actuando como centros y a su vez, la presión de radiación al ser tan grande ejerce fuerza hacia afuera, produciéndose así las oscilaciones de bariones. Estas se denominan acústicas por la similitud que existe con la expansión y compresión del aire en la atmósfera, lo que genera el sonido. En este caso, se tienen ondas de presión propagándose en dicho plasma. Dichas oscilaciones dejaron de propagarse en la época de recombinación, debido al desacople de la luz y la materia; las cuales se detectan en la distribución de galaxias por la alta probabilidad de encontrar dos galaxias separadas por la distancia característica de las oscilaciones acústicas, la cual se puede medir y comparar con las predicciones teóricas.
- **Lente gravitacional débil (WL):** la presencia de estructuras en el universo genera una flexión gravitacional de la luz lo cual distorsiona las imágenes de las galaxias. De esta forma, podemos hacer un mapeo de la materia oscura y su agrupamiento que muestra la influencia de la energía oscura en el crecimiento de estructuras a gran escala. Las estructuras masivas deflecan la luz (efecto fuerte) y en el caso del efecto débil distorsiona los tamaños, formas y brillo; este último es el que se estudia, pero solo se genera aproximadamente 1 % de distorsión, por lo tanto se deben estudiar una gran cantidad de galaxias para detectar dicho efecto.

Las observaciones descritas anteriormente son solo una muestra de todas las posibilidades que existen y que sirven de base para poner a prueba los diferentes modelos teóricos.

A pesar de que ya se sabe que el universo se expande de forma acelerada, aún no se tiene la total certeza del origen y la explicación fundamental de la misma. Es por esto que, se ha venido proponiendo una gran cantidad de modelos que intentan explicar la expansión acelerada del universo, estos modelos pueden ser de dos tipos: aquellos que modifican el contenido material del universo, adicionando un fluido exótico denominado energía oscura, el cual es responsable de dicho comportamiento dinámico del universo y los demás que modifican de forma geométrica el espacio-tiempo. Estos últimos pueden surgir de efectos cuánticos como correcciones de curvatura en la acción de Einstein Hilbert.

En el caso del segundo grupo de modelos, uno de estos es el modelo $f(R)$ o de gravedad modificada. Estos modelos se pueden describir por medio de una acción de la siguiente forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (2.1)$$

donde $f(R)$ es una función del escalar de Ricci R , de manera que no se tiene el término usual que depende de R , sino otro tipo de funciones, variando dicha métrica se obtienen las ecuaciones de campo, las cuales generalmente resultan siendo ecuaciones de movimiento de órdenes superiores al segundo [15], que es el usual que se obtiene.

Otro modelo existente en este grupo es el modelo Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP), el cual es un modelo basado en branas [15]. En este caso, se considera una brana incrustada en

un hiperespacio (o “bulk” en inglés) de Minkowski 5-dimensional. Entre otros modelos de modificación de la gravedad.

SECTION 2.1

Λ CDM: Modelo cosmológico estándar

El modelo Λ CDM fue el primero en proponerse para explicar la expansión acelerada del universo. Inicialmente fue introducida por Einstein, para conservar su idea de un universo estático, pues, debido a la atracción gravitatoria, el universo tiende a contraerse, de manera que, usando Λ se podría contrarrestar este hecho. Es así como Einstein de esta forma, modifica la ecuación (1.1) adicionando un término y teniendo en cuenta que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, obteniendo así:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

El **problema de la constante cosmológica** radica en que se desconoce el origen fundamental de la misma, lo más natural es que dicha constante esté relacionada o asociada a la energía del vacío, pero justo allí es donde aparece la discrepancia [9, 24]. Desde el punto de vista de la física de partículas, el origen de la constante cosmológica surge por la densidad de energía del vacío [14]. Esta se calcula teóricamente usando el efecto Casimir, obteniendo un valor estimado y se mide también usando observaciones cosmológicas, obteniendo de esta forma una discrepancia entre estos dos resultados de 120 órdenes de magnitud, a esto se le conoce como **problema de ajuste fino**, pues no se sabe por qué la energía del vacío es tan pequeña. Cuando recién se conoció este hecho, se intentó analizar y proponer alternativas para explicar o subsanar esta discrepancia. Una de estas era usar supersimetría, pues en este tipo de teorías cada grado de libertad bosónico tiene su contra parte fermiónica; de manera que, los grados bosónicos contribuyen al punto de energía cero de forma positiva y los grados fermiónicos lo hacen de forma negativa, es así como se cancelan entre sí y dicha energía se anula. Sin embargo, esto implica que la energía del vacío debe ser cero, lo cual no es cierto de acuerdo a las observaciones cosmológicas y además, se sabe que el universo no se encuentra en un estado de vacío supersimétrico.

Otro de los problemas que tiene el modelo Λ CDM es el llamado **problema de coincidencia**, pues la densidad de energía de Λ es del mismo orden de la densidad de masa del universo hoy en día, es decir, el universo inicia su proceso de expansión justo ahora, no en el pasado ni en el futuro. Si esta densidad de energía fuera mucho mayor y dominante en una época temprana no hubiera sido posible el proceso de formación de estructuras y entre otras cosas, no existiría el universo.

Otro problema de este modelo es la llamada **tensión** H_0 , donde H es el parámetro de Hubble y su índice indica que es medido hoy en día. El problema radica en que, el valor de dicha constante depende del método de medición; pues si se realiza una extrapolación usando los datos observacionales de la CMB, se obtiene un resultado diferente a cuando se estima dicho valor mediante la escalera de distancias usando supernovas.

Por los problemas observacionales que presenta el modelo Λ CDM listados anteriormente, se hace necesaria la búsqueda de otras alternativas que puedan explicar de forma acertada la expansión acelerada del universo y no presente este tipo de problemas o tensiones con las observaciones.

SECTION 2.2

Energía oscura

Como alternativa al modelo Λ CDM se han propuesto, a lo largo de la historia, muchos modelos de energía oscura (adicionando un fluido exótico al tensor de energía impulso) para explicar la expansión acelerada del universo. Entre estos modelos hay algunos basados en campos escalares, campos vectoriales, formas, entre otros [14]. Algunos de los más conocidos son:

- **Quintaesencia:** este es un modelo que usa un campo escalar ordinario mínimamente acoplado a la gravedad [25, 26], el cual cuenta con una presión negativa que se encarga de generar la expansión acelerada del universo. Su acción tiene la siguiente expresión:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.3)$$

donde el primer término del integrando es el término cinético del campo escalar ϕ y el segundo término es su respectivo potencial. A pesar de que esta es una buena propuesta para la energía oscura, uno de sus problemas es encontrar estos potenciales de quintaesencia en física de partículas.

- **K-esencia:** este modelo es muy similar al modelo anterior de quintaesencia, con la excepción de que su término cinético es no canónico en este caso, la idea de esta teoría es pensar en la posibilidad de existencia de alguna solución dinámica que obligue a los términos no lineales a permanecer no despreciables. La acción tiene la siguiente forma [14, 27]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} p(\phi, X), \quad (2.4)$$

donde $p(\phi, X)$ corresponde a una densidad de presión y $X = -1/2(\nabla\phi)^2$. Una de las motivaciones por las cuales se consideran este tipo de lagrangianos se origina en la teoría de cuerdas.

Ambos modelos, quintaesencia y k-esencia resuelven el problema de coincidencia, pero no resuelven el problema de ajuste fino. Los datos observacionales de supernovas son más consistentes con el modelo de k-esencia que con el de quintaesencia.

- **Campo taquiónico:** se ha pensado que los condensados taquiónicos en una clase de la teoría de cuerdas podría tener consecuencias cosmológicas interesantes. Los

taquiones tienen una ecuación de estado interesante cuyo parámetro se interpola suavemente entre -1 y 0 ; de manera que, esto abre la posibilidad de tener una gran cantidad de intentos para construir modelos cosmológicos viables usando el campo taquiónico como un candidato apropiado para inflación a altas energías. Pero, el taquión solo puede usarse como una fuente de energía oscura dependiendo de la forma de su potencial; de esta forma, se usa esta alternativa con una forma correcta de potencial.

El lagrangiano efectivo para este modelo taquiónico es descrito por la siguiente expresión [14]:

$$S = - \int d^4x V(\phi) \sqrt{-\det(g_{ab} + \partial_a \phi \partial_b \phi)}, \quad (2.5)$$

donde $V(\phi)$ es el campo taquiónico.

- **Campo fantasma:** los datos observacionales recientes indican que el valor de la ecuación de estado está en un intervalo estrecho alrededor de -1 . Los modelos mencionados anteriormente tienen un valor para la ecuación de estado ≥ -1 , la región en la que dicho valor es menor que -1 se dice que es debida a una forma de energía oscura fantasma. Este modelo se basa en un campo escalar con energía cinética negativa, de esta forma su acción tiene la siguiente forma [14, 28, 29, 30]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.6)$$

Sin embargo, los campos fantasmas generalmente cuentan con inestabilidades cuánticas ultra-violetas y además, la densidad de energía de estos campos no está acotada desde abajo.

- **Gas de Chaplygin:** este es un caso interesante de energía oscura donde el fluido exótico es el denominado gas de Chaplygin, el cual tiene la siguiente forma para su ecuación de estado [14]:

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (2.7)$$

donde A es una constante positiva y es similar a la forma que se tiene para el campo taquiónico, siendo este un caso especial de dicho modelo, el cual tiene un potencial constante. Este modelo puede ser una propuesta interesante para la unificación de la energía oscura y la materia oscura, puesto que, en épocas tempranas se comporta como un polvo sin presión y en épocas tardías se comporta como constante cosmológica produciendo así expansión acelerada.

Además de estos hay muchos más modelos de energía oscura que se han propuesto como alternativa a la constante cosmológica.

Capítulo 3

Método de los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos pertenecen al grupo de los sistemas autónomos, los cuales juegan un papel muy importante en la cosmología a la hora de solucionar ecuaciones y analizar el comportamiento de cada uno de los sistemas [14, 19, 31, 32, 33]. Generalmente, en modelos cosmológicos es común enfrentarse a sistemas de ecuaciones diferenciales, los cuales no son fáciles de solucionar; es por esto que, se debe acudir a algún método para resolverlos, uno de estos métodos es el denominado método de los sistemas dinámicos.

En este caso, se realiza el análisis para un sistema de orden 2 (dos ecuaciones diferenciales de primer orden), pero dicho análisis se puede aplicar para un sistema de cualquier orden, siempre y cuando todas las ecuaciones diferenciales sean de primer orden. Suponiendo entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, donde estas dos ecuaciones están acopladas entre sí, de forma que:

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t), \quad (3.1)$$

donde f y g son funciones de x , y y t ; pero, el sistema es autónomo si f y g no dependen explícitamente de t [34], se asume esto de aquí en adelante. Como las funciones f y g no se pueden solucionar de forma directa, lo que sí se puede hacer es analizar su comportamiento y para esto, se buscan sus puntos críticos y se analiza la estabilidad de cada uno de estos para ver cómo es su comportamiento y hacia dónde tiende el sistema.

Un punto crítico o fijo es un punto de la función en la cual esta se anula [35]; en este caso, el punto crítico (x_c, y_c) satisface lo siguiente:

$$f(x_c, y_c) = \dot{x}(x_c, y_c) = 0, \quad (3.2)$$

$$g(x_c, y_c) = \dot{y}(x_c, y_c) = 0. \quad (3.3)$$

Para analizar dicho punto se realiza una pequeña perturbación alrededor de este para analizar su comportamiento:

$$x = x_c + \delta x, \quad y = y_c + \delta y. \quad (3.4)$$

De manera que, sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones (3.1) se obtienen las siguientes ecuaciones a primer orden:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

la matriz $\mathcal{M}$ depende del punto crítico (x_c, y_c) y está dada por:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x=x_c, y=y_c)}. \quad (3.6)$$

La solución general para la ecuación (3.5), la cual da cuenta de la evolución de las perturbaciones lineales [14], es:

$$\delta x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}, \quad (3.7)$$

$$\delta y = Ce^{\alpha_1 t} + De^{\alpha_2 t}, \quad (3.8)$$

donde α_1, α_2 son los valores propios de la matriz $\mathcal{M}$ y A, B, C, D son las constantes de integración. De esta forma, se puede clasificar dicho punto crítico de acuerdo a los valores que puedan tomar los valores propios, teniendo en cuenta que un punto crítico es un atractor si:

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x_c, y_c) \quad \text{para } t \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Los puntos críticos se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Punto estable: todos los valores propios son negativos, en este caso $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 < 0$.
- Punto inestable o fuente: todos los valores propios son positivos, en este caso $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.
- Punto de silla: algunos valores son positivos y los demás son negativos, en este caso $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$ o viceversa.
- Espiral estable: el determinante de la matriz $\mathcal{M}$ es negativo y las partes reales de los valores propios α_1 y α_2 son negativas.

Teniendo en cuenta la clasificación anterior, los puntos estables y las espirales estables son atractores y los puntos inestables y los puntos de silla no son atractores.

En el capítulo 5 se usa la aplicación de esta teoría del método de los sistemas dinámicos para el caso del modelo que se estudia en este trabajo.

Capítulo 4

Modelo con campos vectoriales de Gauge

Como se vio en el capítulo 2, existe una gran variedad de modelos que intentan explicar el fenómeno de la expansión acelerada del universo. Más específicamente, en el caso de los modelos de energía oscura, los cuales cuentan con la presencia de un fluido exótico que da cuenta de dicha expansión acelerada, hay diversos tipos de modelos; entre estos, modelos basados en campos escalares [36, 37, 38, 39], campos vectoriales [40, 41, 42, 43, 44], formas [22, 45] y campos vectoriales de Gauge [46, 19, 47, 48, 49]. Estos últimos empezaron a ser utilizados en el área de la cosmología hace poco, inicialmente fueron usados en la física de partículas trayendo consigo buenos resultados; es por esto que, surgió la idea de incluirlos en la cosmología como posibles modelos para la energía oscura.

Una de las principales razones a favor de dichos campos de Gauge, es que, en la naturaleza es más probable contar con la presencia de campos vectoriales que con la de campos escalares fundamentales. Además, estos campos tienen la posibilidad de relacionar la cosmología con la fenomenología de la física de partículas. Pero, una de las razones que pueden tener estos campos en su contra, es la posible anisotropía que los campos vectoriales pueden inducir debido a su naturaleza. Además, también se debe tener especial cuidado con las patologías que pueden presentar sus lagrangianos. Algunos trabajos se han realizado estudiando estos campos, como en las referencias [47, 19, 48, 50], donde sus lagrangianos efectivamente están libres de patologías y no cuentan con anisotropías. Una de las alternativas para evitar dichas anisotropías es el uso de la denominada “triada cósmica”, donde se tienen tres campos vectoriales ortogonales entre sí, cuya norma es igual.

A pesar de que estos campos son muy buenos candidatos para ser usados como modelos de energía oscura, no han sido lo suficientemente estudiados; es por esto que, en este trabajo se plantea estudiar un modelo para la energía oscura basado en campos vectoriales de Gauge acoplado a la materia oscura.

SECTION 4.1

Modelo

En este trabajo se analiza el modelo cosmológico descrito por la siguiente acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \sum_a V(X) + f(X, Y) \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_b \right], \quad (4.1)$$

donde g corresponde al determinante de la métrica, M_P es la masa reducida de Planck, R es el escalar de Ricci, $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de esfuerzos del campo electromagnético, $V(X)$ es el potencial correspondiente al campo, $f(X, Y)$ es la función de acople entre la energía oscura y la materia oscura, $\mathcal{L}_{mat}$ es el lagrangiano de materia oscura y $\mathcal{L}_r$, $\mathcal{L}_b$ son el lagrangiano de radiación y materia bariónica respectivamente. También se tienen las siguientes definiciones, donde A^a son los campos:

$$X = A_\mu^a A_a^\mu, \quad (4.2)$$

$$Y = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (4.4)$$

En este caso se tienen tres campos vectoriales, cuyas componentes diferentes de cero son las componentes (1, 1), (2, 2) y (3, 3), las cuales tienen la misma magnitud. Se mostrará que estos campos son los responsables de la expansión acelerada tardía del universo.

SECTION 4.2

Ecuaciones de campo

Para determinar las ecuaciones de campo se varía la acción (4.1) respecto a la métrica. Dado que dicha ecuación se compone del producto de dos términos, la raíz del negativo del determinante de la métrica (asociado al elemento de volumen) y los términos que se encuentran entre corchetes, esto corresponde a la variación de un producto, es decir:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \left\{ \delta(\sqrt{-g}) \left[\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \sum_a V(X) + f(X, Y) \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_b \right] \right. \\ & \left. + \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_P^2 \delta R - \frac{1}{4} \delta(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) - \sum_a \delta(V(X)) + \delta[f(X, Y) \mathcal{L}_{mat}] + \delta(\mathcal{L}_r) + \delta(\mathcal{L}_b) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A continuación se realiza cada una de las variaciones por separado y después se reemplazan todas en la ecuación anterior. Se inicia entonces con la variación de la raíz del negativo del determinante de la métrica:

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

La variación del escalar de Ricci se presenta en el apéndice A y su resultado es:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \Delta. \tag{4.7}$$

Ahora, se calcula la variación del término $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g}(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) &= \frac{\delta}{\delta g}(F_{\mu\nu}^a F_{a\lambda\rho} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}) \\
&= \frac{\delta}{\delta g}[(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial_\lambda A_{a\rho} - \partial_\rho A_{a\lambda})g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}] \\
&= F_{\mu\nu}^a F_{a\lambda\rho}(\delta_\mu^\gamma \delta_\lambda^\eta g^{\nu\rho} + \delta_\nu^\gamma \delta_\rho^\eta g^{\mu\lambda}) \\
&= F_{\mu\nu}^a F_{a\lambda\rho} \delta_\mu^\gamma g^{\nu\rho} + F_{\mu\nu}^a F_{a\lambda\rho} \delta_\nu^\gamma \delta_\rho^\eta g^{\mu\lambda} \\
&= F_{\gamma\nu}^a F_{a\eta\rho} g^{\nu\rho} + F_{\mu\gamma}^a F_{a\lambda\eta} g^{\mu\lambda} \\
&= 2F_{\gamma\nu}^a F_{a\eta\rho} g^{\nu\rho} \\
&= 2F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

De esta forma, se procede con el cálculo de $\frac{\partial}{\partial g}V(X)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g}V(X) &= \frac{dV}{dX} \frac{\partial}{\partial g}(A_\mu^a A_a^\nu) \\
&= \frac{dV}{dX} \frac{\partial}{\partial g}(A_\mu^a A_{a\gamma} g^{\gamma\nu}) \\
&= V_{,X} A_\mu^a A_{a\gamma}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por último, se realiza el cálculo de $\frac{\delta}{\delta g}[f(X, Y)\mathcal{L}_M]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g}[f(X, Y)\mathcal{L}_M] &= \frac{\delta}{\delta g}[f(X, Y)]\mathcal{L}_M + f(X, Y)\frac{\delta}{\delta g}\mathcal{L}_M \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial X} \frac{\delta}{\delta g}(A_\mu^a A_a^\nu) + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\delta}{\delta g}(F_{\mu\nu}^a)\right]\mathcal{L}_M + f(X, Y)\frac{\delta}{\delta g}\mathcal{L}_M \\
&= [f_{,X} A_\mu^a A_{a\gamma} + f_{,Y}(2F_{\gamma\mu}^a F_{a\eta}^\nu)]\mathcal{L}_M + f(X, Y)\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \\
&= [f_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} + 2f_{,Y} F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma]\mathcal{L}_M + f(X, Y)\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora, usando las ecuaciones (4.7), (4.7), (4.9), (4.10) y (4.11) en la ecuación (4.6) y usando el principio de mínima acción se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \sum_a V(X) + f(X, Y) \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_b \right] \\
& + \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_P^2 R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (2 F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma) - \sum_a V_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} \right. \\
& \left. + [f_{,X} A_\mu^a A_{a\gamma} + 2 f_{,Y} F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma] \mathcal{L}_M + f(X, Y) \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right].
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Ordenando los términos y usando la ecuación del tensor de Einstein ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$) la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{M_P^2}{2} G_{\mu\nu} = & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_a V(X) \right] g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(X, Y) \mathcal{L}_M + \frac{1}{2} F_{\gamma\nu}^a F_{a\eta}^\nu \\
& + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_b + \sum_a V_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} - [f_{,X} A_\mu^a A_{a\gamma} + 2 f_{,Y} F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma] \mathcal{L}_M \\
& - f(X, Y) \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}.
\end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora, para simplificar un poco la ecuación anterior se calculan los tensores de energía impulso correspondientes a los campos y a la materia oscura:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^a &= -2 \frac{\delta \mathcal{L}_a}{\delta g_{\mu\nu}} + \mathcal{L}_a g_{\mu\nu} \\
&= -2 \left[-\frac{1}{4} 2 F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma - \sum_a V_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - \sum_a V(X) g_{\mu\nu} \\
&= F_{\mu\sigma}^a F_{a\nu}^\sigma + 2 \sum_a V_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} - \left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} + \sum_a V(X) \right) g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Para el siguiente cálculo se usa la abreviatura $\tilde{\mathcal{L}}_M = f \mathcal{L}_M$.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\mu\nu}^M &= -2 \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + \tilde{\mathcal{L}}_M g_{\mu\nu} \\
&= -2 \left[(f_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} + 2 f_{,Y} F_{\mu\eta}^a F_{a\nu}^\eta) \mathcal{L}_M + f \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right] + f \mathcal{L}_M g_{\mu\nu} \\
&= 2 \left[-f_{,X} A_\mu^a A_{a\nu} \mathcal{L}_M - 2 f_{,Y} F_{\mu\eta}^a F_{a\nu}^\eta \mathcal{L}_M + \frac{1}{2} f T_{\mu\nu}^M \right].
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalmente, la ecuación (4.14) se convierte en la siguiente ecuación mucho más condensada:

$$\boxed{M_P^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^a + \tilde{T}_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^b.} \quad \text{Ecuaciones de campo.} \quad (4.15)$$

SECTION 4.3

Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento, se varía la acción (4.1) ahora respecto a los campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu^a)} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Se calcula el primer término teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial A_\mu}(R) = \frac{\partial}{\partial A_\mu}(\mathcal{L}_r) = \frac{\partial}{\partial A_\mu}(\mathcal{L}_b) = 0$:
Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \sqrt{-g} \left[\sum_a \left[-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) - \frac{\partial}{\partial A_\mu} V(X) + \mathcal{L}_M \frac{\partial}{\partial A_\mu} [f(X, Y)] \right] \right], \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\mu} [(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)] = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu} V(X) = \frac{dV}{dX} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (A_\nu^a A_a^\nu) = V_{,X} A_a^\nu, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu} f(X, Y) = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (A_\nu^a A_a^\nu) + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) = f_{,X} A_a^\nu. \quad (4.20)$$

De esta forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \sqrt{-g} (-3V_{,X} A_a^\nu + \mathcal{L}_M f_{,X} A_a^\nu). \quad (4.21)$$

Ahora, para el segundo término de la ecuación (4.16):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \sqrt{-g} \sum_a \left[\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - 3V(X) + f(X, Y) \mathcal{L}_M \right]. \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} [(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)] \\ &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} [\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A_a^\nu - \partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A_a^\mu - \partial_\nu A_\mu^a \partial^\mu A_a^\nu + \partial_\nu A_\mu^a \partial^\nu A_a^\mu] \\ &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} [\partial_\mu A_\nu^a F_a^{\mu\nu} + \partial_\nu A_\mu^a F_a^{\nu\mu}] \\ &= 2F_a^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} f(X, Y) \mathcal{L}_M &= \left[\frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (A_\nu^a A_a^\nu) + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) \right] \mathcal{L}_M \\ &= f_{,Y} (2F_a^{\mu\nu}) \mathcal{L}_M. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} (2F_a^{\mu\nu}) + 2f_{,Y} F_a^{\mu\nu} \mathcal{L}_M \right] \\ &= \sqrt{-g} F_a^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial_\mu A_\nu} \right) = \partial_\mu \left[\sqrt{-g} F_a^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right) \right]. \quad (4.26)$$

De esta forma, se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\sqrt{-g} A_a^\nu (-V_{,X} + \mathcal{L}_M f_{,X}) = \partial_\mu \left[\sqrt{-g} F_a^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right) \right]. \quad (4.27)$$

SECTION 4.4

Ecuaciones con el fondo

Teniendo en cuenta que se usa la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW), esto es,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.28)$$

y definiendo la forma que tienen los campos,

$$A_\mu^a = A(t) \delta_\mu^a, \quad (4.29)$$

se obtienen las ecuaciones (4.15) y (4.27) que dan la dinámica del universo en este modelo particular.

4.4.1 Ecuaciones de campo

Para la componente 00 ($\mu = \nu = 0$) de la ecuación (4.15):

$$M_P^2 G_{00} = \sum_a \left[T_{00}^a + \tilde{T}_{00}^M + T_{00}^r + T_{00}^b \right]. \quad (4.30)$$

Para el primer término:

$$T_{00}^a = \sum_a \left[F_{0\sigma}^a F_{a0}^\sigma + 2V_{,X} A_0^a A_{a0} - \left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} + V(X) \right) g_{00} \right]. \quad (4.31)$$

■

$$\begin{aligned} F_{0\sigma}^a F_{a0}^\sigma &= F_{0\sigma}^a F_{a0\alpha} g^{\alpha\sigma} = (\partial_0 A_\sigma^a - \partial_\sigma A_0^a)(\partial_0 A_{a\alpha} - \partial_\alpha A_{a0}) \\ &= (\partial_0 A_\sigma^a)(\partial_0 A_{a\sigma}) g^{\alpha\sigma} \\ &= (\dot{A})^2 (g^{11} + g^{22} + g^{33}) \\ &= \frac{3}{a^2} (\dot{A})^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

■

$$\begin{aligned} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} &= F_{\rho\sigma}^a F_{a\alpha\beta} g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} = (\partial_\rho A_\sigma^a - \partial_\sigma A_\rho^a)(\partial_\alpha A_{a\beta} - \partial_\beta A_{a\alpha}) g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \\ &= \left[\partial_\rho(A(t)) \delta_\sigma^a - \partial_\sigma(A(t)) \delta_\rho^a \right] \left[\partial_\alpha(A(t)) \delta_{a\beta} - \partial_\beta(A(t)) \delta_{a\alpha} \right] g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \\ &= (\dot{A})^2 \delta_\sigma^a \delta_{a\beta} g^{00} g^{\beta\sigma} + (\dot{A})^2 \delta_\rho^a \delta_{a\alpha} g^{\alpha\rho} g^{00} \\ &= 2(\dot{A})^2 (g^{11} + g^{22} + g^{33}) \\ &= -\frac{6}{a^2} (\dot{A})^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Así, el primer término tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_{00}^a &= \frac{3}{a^2} (\dot{A})^2 - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{6}{a^2} (\dot{A})^2 \right) + 3V \right] (-1) \\ &= \frac{3}{2} \frac{(\dot{A})^2}{a^2} + 3V. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00}^M &= -2f_{,X} A_0^a A_{a0} \mathcal{L}_M - 4f_{,Y} F_{0\eta}^a F_{a0}^\eta \mathcal{L}_M + 3f T_{00}^M \\ &= -4f_{,Y} \frac{(\dot{A})^2}{a^2} \rho_M + 3f \rho_M. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para los tensores energía-impulso para la materia oscura, radiación y materia bariónica, respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{00}^M &= \rho_M, \\ T_{00}^r &= \rho_r, \\ T_{00}^b &= \rho_b. \end{aligned} \quad (4.36)$$

De esta forma, la ecuación de campo para la componente (00) queda como:

$$3M_P^2 H^2 = \frac{3}{2} \frac{(\dot{A})^2}{a^2} + 3V + 3\tilde{\rho}_M - 4f_{,Y} \frac{(\dot{A})^2}{a^2} \frac{\tilde{\rho}_M}{f} + \rho_r + \rho_b. \quad (4.37)$$

Donde se define $\tilde{\rho}_M = f\rho_M$.

Para las otra componentes diagonales, es decir para $\mu = \nu = i$:

$$M_P^2 G_{ii} = \sum_a \left[T_{ii}^a + \tilde{T}_{ii}^M + T_{ii}^r + T_{ii}^b \right]. \quad (4.38)$$

Para el primer término:

$$T_{ii}^a = \sum_a \left[F_{i\sigma}^a F_{ai}^\sigma + 2V_{,X} A_i^a A_{ai} - \left(\frac{1}{4} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} + V(X) \right) g_{ii} \right]. \quad (4.39)$$

■

$$\begin{aligned} F_{i\sigma}^a F_{ai}^\sigma &= F_{i\sigma}^a F_{ai\alpha} g^{\sigma\alpha} \\ &= (\partial_i A_\sigma^a - \partial_\sigma A_i^a)(\partial_i A_{a\alpha} - \partial_\alpha A_{ai}) g^{\sigma\alpha} \\ &= (-\partial_\sigma A_i^a)(-\partial_\alpha A_{ai}) g^{\sigma\alpha} \\ &= -(\dot{A})^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

■

$$A_i^a A_{ai} = A^2. \quad (4.41)$$

Así:

$$\begin{aligned} T_{ii}^a &= -(\dot{A})^2 + 2V_{,X} A^2 - \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{6}{a^2} (\dot{A})^2 \right) + 3V \right] a^2 \\ &= \frac{1}{2} (\dot{A})^2 + 2V_{,X} A^2 - 3V a^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para el segundo término:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ii}^M &= -2f_{,X} A_i^a A_{ai} \mathcal{L}_M - 4f_{,Y} F_{i\eta}^a F_{ai}^\eta \mathcal{L}_M + f T_{ii}^M \\ &= -\frac{2}{3} \frac{f_{,X}}{f} \frac{A^2}{a^2} \tilde{\mathcal{L}}_M - \frac{4}{3} \frac{f_{,Y}}{f} \frac{(\dot{A})^2}{a^2} \tilde{L}_M. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} T_{ii}^r &= p_r = \frac{1}{3}\rho_r, \\ T_{ii}^b &= p_b = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Y además, sabiendo que:

$$G_{ii} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a} = -3H^2 + 2\dot{H}, \quad (4.45)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} -3M_P^2 - 2M_P^2\dot{H} &= \frac{1}{2}\frac{(\dot{A})^2}{a^2} + 2V_{,X}\frac{A^2}{a^2} - 3V - \frac{2}{3}\frac{A^2}{a^2}\tilde{\mathcal{L}}_M + \frac{4}{3}\frac{f_{,Y}}{f}\frac{(\dot{A})^2}{a^2}\tilde{\mathcal{L}}_M \\ &+ \frac{1}{3}\rho_r. \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} -2M_P^2 &= \frac{1}{2}\frac{(\dot{A})^2}{a^2} + 2V_{,X}\frac{A^2}{a^2} - 3V - \frac{2}{3}\frac{A^2}{a^2}\tilde{\mathcal{L}}_M + \frac{4}{3}\frac{f_{,Y}}{f}\frac{(\dot{A})^2}{a^2}\tilde{\mathcal{L}}_M \\ &+ \frac{1}{3}\rho_r + 3M_P^2H^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\boxed{-2M_P^2\dot{H} = 2\frac{(\dot{A})^2}{a^2} + 2V_{,X}\frac{A^2}{a^2} - \frac{2}{3}\frac{f_{,X}}{f}\frac{A^2}{a^2}\tilde{\mathcal{L}}_M - \frac{8}{3}\frac{f_{,Y}}{f}\frac{(\dot{A})^2}{a^2}\tilde{\mathcal{L}}_M + 3f\rho_M + \frac{4}{3}\rho_r + \rho_b.} \quad (4.48)$$

4.4.2 Ecuaciones de movimiento

Usando el fondo y la forma de los campos en la ecuación (4.27) se tiene: primero, para el lado izquierdo de dicha ecuación, como ya se mencionó, g es el determinante de la métrica, en este caso la representación matricial de la métrica es diagonal, por lo tanto su determinante es el producto de los elementos de la diagonal:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-(-g)(a^2)(a^2)(a^2)} = \sqrt{a^6} = a^3. \quad (4.49)$$

Los campos tienen la forma:

$$A_a^\nu = A_{\mu a}g^{\mu\nu} = \frac{A}{a^2}, \quad (4.50)$$

así, el lado izquierdo de la ecuación (4.27) se escribe como:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} A_a^\nu (-V_{,X} + \rho_M f_{,X}) &= a^3 \frac{A}{a^2} (V_{,X} + \rho_M f_{,X}) \\
&= a A (-V_{,X} + \rho_M f_{,X}).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Se procede con el lado derecho de la ecuación (4.27):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[\sqrt{-g} F^{\mu i} \left(-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right) \right] &= \partial_\mu \left[a^3 F_{a\alpha j} g^{\mu\alpha} g^{ij} \left(-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right) \right] \\
&= \partial_\mu \left[a^3 (\partial_\alpha A_{aj} - \partial_j A_{a\alpha}) g^{\mu\alpha} g^{ij} \left(-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right) \right] \\
&= \partial_\mu \left[a^3 \dot{A} g^{00} g^{11} \left(-\frac{1}{2} + 2f_{,Y} \mathcal{L}_M \right) \right] \\
&= \partial_0 \left[\frac{1}{2} a \dot{A} - 2a \dot{A} f_{,Y} \mathcal{L}_M \right] \\
&= \frac{1}{2} \dot{a} \dot{A} + \frac{1}{2} a \ddot{A} - 2\dot{a} \dot{A} f_{,Y} \mathcal{L}_M - 2a \ddot{A} f_{,Y} \mathcal{L}_M \\
&\quad - 2a \dot{A} [f_{,YY} (\partial_0 F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) + f_{,YX} (\partial_0 A_\nu^a A_a^\nu)] \mathcal{L}_M \\
&\quad - 2a \dot{A} f_{,Y} \dot{\mathcal{L}}_M.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

■

$$\begin{aligned}
\partial_0 F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} &= \partial_0 [F_{\mu\nu}^a F_{a\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}] \\
&= \partial_0 \left[-\frac{6}{a^2} (\dot{A})^2 \right] \\
&= -\frac{12}{a^2} \dot{A} \ddot{A} + \frac{12}{a^3} \dot{a} \dot{A}^2.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

■

$$\begin{aligned}
\partial_0 A_\nu^a A_a^\nu &= \partial_0 [A_\nu^a A_{a\alpha} g^{\alpha\nu}] \\
&= \partial_0 \left[\frac{A^2}{a^2} \right] \\
&= 2 \frac{A \dot{A}}{a^2} - 2 \frac{A^2 \dot{a}}{a^3}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

De esta forma, las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned}
aA(-V_{,X} + \rho_M f_{,X}) &= \frac{1}{2}\dot{a}\dot{A} + \frac{1}{2}a\ddot{A} - 2\dot{a}\dot{A}f_{,Y}\mathcal{L}_M - 2a\ddot{A}f_{,Y}\mathcal{L}_M \\
&- 2a\dot{A}\mathcal{L}_M\left[f_{,YY}\left(-\frac{12}{a^2}\dot{A}\ddot{A} + \frac{12}{a^3}\dot{A}^2\right) + f_{,YX}\left(2\frac{A\dot{A}}{a^2} - 2\frac{A^2}{a^3}\dot{a}\right)\right] \\
&- 2a\dot{A}f_{,Y}\dot{\mathcal{L}}_M \\
&= \frac{1}{2}\dot{a}\dot{A} + \frac{1}{2}a\ddot{A} - 2\dot{a}\dot{A}f_{,Y}\mathcal{L}_M - 2a\ddot{A}f_{,Y}\mathcal{L}_M + 24\frac{\dot{A}^2}{a}\ddot{A}\mathcal{L}_M f_{,YY} \\
&- 24\dot{a}\frac{\dot{A}^3}{a^2}\mathcal{L}_M f_{,YY} \\
&- 4A\frac{\dot{A}^2}{a}\mathcal{L}_M f_{,YX} + 4\frac{A^2}{a^2}\dot{A}\dot{a}f_{,YX}\mathcal{L}_M - 2a\dot{A}f_{,Y}\dot{\rho}_M.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Dividiendo el lado derecho de la ecuación (4.56) por el factor de escala a del lado izquierdo de la misma ecuación, recordando que $\dot{\rho}_M = -3H\rho_M$, $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y multiplicando y dividiendo por $3f$ en los términos que tienen $\mathcal{L}_M$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\ddot{A}}{a} + H\frac{\dot{A}}{a} + 2V_{,X}\frac{A}{a} + \frac{2}{3}\frac{A}{a}\frac{f_{,X}}{f}\tilde{\rho}_M - \frac{8}{3}H\frac{\dot{A}}{a}\frac{f_{,Y}}{f}\tilde{\rho}_M + \frac{4}{3}\frac{\ddot{A}}{a}\frac{f_{,Y}}{f}\tilde{\rho}_M \\
&+ \frac{8}{3}\left[\frac{f_{,XY}}{f}\left(\frac{A\dot{A}}{a^2} - \frac{HA^2}{a^2}\right) - 2\frac{f_{,YY}}{f}\left(\frac{\dot{A}\ddot{A}}{a^2} - \frac{H\dot{A}^2}{a^2}\right)\right]\frac{\dot{A}}{a}\tilde{\rho}_M.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

SECTION 4.5

Formas del potencial y la función de acople

En este caso se elige convenientemente la siguiente forma para el potencial y también se presenta su derivada respecto a X :

$$\begin{aligned}
V(X) &= V_0 e^{-\lambda\frac{X}{M_P^2}}, \\
V_{,X} &= -\frac{\lambda}{M_P^2}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Ahora, se presenta la forma de la función de acople entre la energía oscura y la materia oscura, de igual forma sus derivadas respecto a X e Y :

$$\begin{aligned}
f(X, Y) &= f_0 \left(\frac{Y}{M_P^4}\right)^{-n} e^{\mu_0 X/M_P^2}, \\
f_{,X}(X, Y) &= \frac{\mu_0}{M_P^2} f(X, Y), \\
f_{,Y}(X, Y) &= -\frac{n}{Y} f(X, Y).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Usando estas ecuaciones en la ecuación (4.37), esta última queda escrita como:

$$3M_P^2 H^2 = \frac{3}{2} \frac{\dot{A}^2}{a^2} + 3V + \tilde{\rho}_M(1 + 2n) + \rho_b + \rho_r. \quad \text{Ecuación de Friedmann 1.} \quad (4.59)$$

Y usando dichas definiciones de la función de acople y el potencial en la ecuación (4.48), esta queda como:

$$-2M_P^2 \dot{H} = 2 \frac{\dot{A}^2}{a^2} - 2 \left(\frac{\lambda}{M_P^2} V - \frac{1}{3} \tilde{\rho}_M \frac{\mu_0}{M_P^2} \right) \frac{A^2}{a^2} + (3 + 4n) \frac{\tilde{\rho}_M}{3} + \frac{4}{3} \rho_r + \rho_b. \quad (4.60)$$

Ecuación de Friedmann 2.

Capítulo 5

Sistema dinámico

Ahora, se procede a resolver y analizar el sistema, teniendo en cuenta las ecuaciones que se obtuvieron en el capítulo anterior. Estas ecuaciones son muy complicadas y extensas, por lo tanto, se debe usar alguna estrategia para dicha solución. En este caso, se adopta el método de los sistemas dinámicos, el cual fue descrito anteriormente en el capítulo 3. Para esto, se definen unas variables adimensionales para reescribir las ecuaciones del sistema y obtener un sistema autónomo, cuyas ecuaciones se cierran entre sí y de esta forma poder realizar el análisis correspondiente.

En el contexto cosmológico, una solución apropiada debe contener al menos tres puntos críticos: uno de radiación, el cual debe ser una fuente o un punto de silla; un punto de materia, correspondiente a un punto de silla y por último, un punto de energía oscura, el cual debe ser el único punto atractor del sistema, indicando que este tiende a dicho punto.

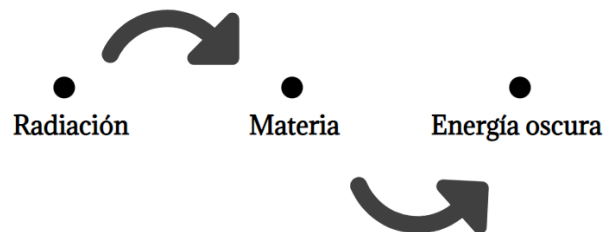


Figura 5.1: Esquema representativo de los puntos críticos mínimos en un sistema dinámico.

SECTION 5.1

Variables adimensionales

Con el objetivo de reescribir la ecuación (4.59) en términos de otras variables, de forma que su expresión sea un poco más sencilla, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\dot{A}}{a} \frac{1}{\sqrt{2}M_P H}, & y &= \frac{\sqrt{V}}{M_P H}, \\
\tilde{\Omega}_M &= \frac{\tilde{\rho}_M}{2M_P^2 H^2}, & \Omega_b &= \frac{\rho_b}{2M_P^2 H^2}, \\
\Omega_r &= \frac{\rho_r}{3M_P^2 H^2}, & z &= \frac{A}{\sqrt{2}M_P a}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

De esta forma, la ecuación (4.59) se puede reescribir como:

$$\boxed{1 = x^2 + y^2 + \tilde{\Omega}_M(1 + 2n) + \Omega_b + \Omega_r.} \quad \text{Ligadura de Friedmann} \tag{5.2}$$

SECTION 5.2

Ecuaciones diferenciales

Para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales, se realiza la derivada de cada variable adimensional respecto al número de e-folds; es decir, por ejemplo:

$$f_x = \frac{dx}{dN} = \frac{1}{H} \frac{dx}{dt}. \tag{5.3}$$

Y reescribiendo el resultado en términos de las variables definidas en las ecuaciones (5.2), para así tener un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se obtiene:

$$\begin{aligned}
f_x &= xq + \frac{-x^3 + 2\lambda y^2 x^2 z + 2n\tilde{\Omega}_M x(1 - 4x^2) - 2\mu_0 x^2 z \tilde{\Omega}_M - 4\mu_0 n x z \tilde{\Omega}_M (x + z)}{x^2 + n\tilde{\Omega}_M(1 - 8x^2)}, \\
f_y &= -2\lambda y z (x - z) + y(q + 1), \\
f_b &= 2\Omega_b \left(q - \frac{1}{2}\right), \\
f_r &= 2\Omega_r (q - 1), \\
f_z &= x - z.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Donde, q es el parámetro de desaceleración:

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2} \left[1 + x^2 - 3y^2 \left(1 + \frac{4}{3} \lambda z^2 \right) + 4\mu_0 \tilde{\Omega}_M z^2 - 2n\tilde{\Omega}_M + \Omega_r \right]. \tag{5.5}$$

Se calcula también la ecuación de estado efectiva:

$$w_{ef} = \frac{p_T}{\rho_T} = \frac{-M_P^2(3H^2 + 2\dot{H})}{3M_P^2 H^2} = \frac{1}{3}(2q - 1). \tag{5.6}$$

Por último, se calcula la ecuación de estado de la energía oscura:

$$w_{DE} = \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}}, \quad (5.7)$$

la presión de la energía oscura se obtiene de la ecuación (4.15) para las componentes $\mu = \nu = i$:

$$-2M_P^2\dot{H} - 3M_P^2H^2 = p_{DE} + \frac{1}{3}\rho_r. \quad (5.8)$$

De esta forma, la ecuación de estado de la energía oscura toma la siguiente forma:

$$w_{DE} = \frac{-M_P^2(2\dot{H} + 3H^2) - \frac{1}{3}\rho_r}{\frac{3}{2}\frac{\dot{A}^2}{a^2} + 3V}. \quad (5.9)$$

Reorganizando la expresión anterior y escribiéndola en términos de las variables adimensionales ya definidas, se obtiene:

$$w_{DE} = \frac{2q - 1 - \Omega_r}{3\Omega_{DE}}. \quad (5.10)$$

SECTION 5.3

Puntos críticos

Para estudiar el sistema dinámico en cuestión, se calculan sus respectivos puntos críticos y se analiza la estabilidad de cada uno de ellos:

■ Primer punto crítico:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3+2\mu}}, \quad y = 0, \quad z = x, \quad \Omega_r = 0, \quad q = \frac{1}{2}, \quad w_{ef} = 0, \\ \Omega_b &= \frac{-18 + 216n - 75\mu + 336n\mu - 48\mu^2 + 128n\mu^2}{8(3+2\mu)(12n-3\mu+8n\mu)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Este punto corresponde a un punto de escalamiento entre la materia bariónica y la energía oscura, donde la ecuación de estado efectiva es $w_{ef} = 0$, por lo que el escalamiento ocurriría durante la época de materia. Los valores propios de este punto son muy largos, por lo tanto no se exponen aquí, pero al realizar el respectivo estudio de dichos valores propios se llega a la conclusión de que este es un punto de silla.

■ Segundo punto crítico:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{-1+\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad z = x, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_b = 0, \\ q &= -1, \quad w_{ef} = -1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Este es un punto de energía oscura. Ya que la ecuación de estado es $w_{ef} = -1$, este punto corresponde a un universo en expansión acelerada tipo de Sitter. En los valores propios hay algunos positivos, algunos negativos, por lo tanto este es un punto de silla.

■ Tercer punto crítico:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3(1+2n)}}{4\sqrt{n\mu}}, \quad z = x, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_b = 0, \quad q = -1, \\ y &= \frac{\sqrt{-9-24n+36n^2+96n^3+48n\mu+288n^2\mu+256n^3\mu}}{4\sqrt{n}\sqrt{3\lambda}+12n\lambda+12n^2\lambda+3\mu+18n\mu+16n^2\mu}, \\ w_{ef} &= -1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Este es también un punto de energía oscura con $w_{ef} = -1$; es decir, asintóticamente se tiene un universo de de Sitter. Los valores propios correspondientes a este punto también son muy extensos, hay cantidades reales e imaginarias, pero todas son negativas, por lo que se concluye que este punto corresponde a un atractor.

■ Cuarto punto crítico:

$$y = 0, \quad z = x, \quad \Omega_r = 1 - x^2, \quad \Omega_b = 0, \quad q = 1, \quad w_{ef} = \frac{1}{3}. \quad (5.14)$$

Dado que la ecuación de estado efectiva en este punto es $w_{ef} = \frac{1}{3}$, entonces corresponde a un universo dominado por radiación. Sin embargo, se nota que el valor de Ω_r depende de x . Se dice entonces que, en este punto coexisten la radiación y la *radiación oscura*; que es la forma como se denomina a la radiación que proviene del fluido asociado al campo propuesto para explicar la expansión acelerada tardía del Universo. Los valores propios de este punto tienen cantidades positivas y negativas, por lo tanto corresponde a un punto de silla.

■ Quinto punto crítico:

$$x = -1, \quad y = 0, \quad z = -1, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_b = 0, \quad q = 1, \quad w_{ef} = \frac{1}{3}. \quad (5.15)$$

En este punto sucede algo similar al punto anterior, pues el fluido oscuro se comporta similar a la radiación, ya que su ecuación de estado efectiva $w_{ef} = \frac{1}{3}$ es de radiación. En este caso Ω_r no depende de x , de hecho puede notarse que este punto es un caso especial del punto anterior, donde $x = -1$ y $\Omega_r = 0$. Este es un punto de silla, debido a que los valores propios de la matriz de Jacobi en este punto son algunos positivos y algunos negativos.

▪ **Sexto punto crítico:**

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, & z &= 0, & \Omega_r &= 0, & \Omega_b &= 0, \\ q &= \frac{1}{2+4n}, & w_{ef} &= -\frac{2n}{3+6n}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

En este caso el único componente material es la de materia oscura. Dado que $n \geq 0$, por lo tanto $w_{ef} \leq 0$. Sin embargo, se nota que $q > 0$ por lo que no habrá expansión acelerada en este punto. Este es un punto de silla.

▪ **Séptimo punto crítico:**

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_b = 0, \quad q = 1, \quad w_{ef} = \frac{1}{3}. \quad (5.17)$$

Este punto también corresponde a un caso especial del punto cuarto donde $\Omega_r = 0$ y $x = 1$. Así como el punto quinto, la estabilidad de este punto corresponde a una silla.

▪ **Octavo punto crítico:**

$$y = 0, \quad z = z, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_b = 0. \quad (5.18)$$

Las expresiones para x , q , w_{ef} , Ω_{DE} y los valores propios son demasiado extensas y no se exponen aquí; pero al realizar el respectivo análisis a este punto se concluye que es un punto de energía oscura, para $\mu > 0$ y para $\mu < 0$ es un punto de silla, pero para valores positivos muy grandes de μ puede ser un atractor

SECTION 5.4

Espacio de parámetros

Al realizar el análisis de los puntos críticos usando el programa Mathematica [51], este nos arroja a su vez condiciones para los parámetros μ , λ y n ; de esta forma, dichos puntos existirán y tendrán sentido. Agrupando todas estas condiciones y analizándolas se llega a un consenso para el rango de valores permitidos que puede tomar cada parámetro. De esta forma, al momento de realizar la solución numérica del sistema de ecuaciones (5.5) los valores que pueden tomar los parámetros son:

- $n > 0$,
- $1,73 > \lambda \geq 1$,
- $\mu > \frac{3}{8}$.

Capítulo 6

Solución Numérica

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (5.5) se utiliza el software Mathematica [51] y se realiza dicha solución de forma numérica; para esto, se deben fijar condiciones iniciales para las variables adimensionales x , y , z , Ω_M , Ω_r y Ω_b y además de esto, se deben fijar los valores de los parámetros μ , λ y n .

De esta forma, se usan las siguientes condiciones iniciales, las cuales están en la época de radiación profunda:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, \\ \mu &= 2,7, \\ n &= 0,001, \\ x_0 &= 1 \times 10^{-19}, \\ y_0 &= 6,14 \times 10^{-15}, \\ z_0 &= 1,52 \times 10^{-10}, \\ \Omega_{b0} &= 0,7 \times 10^{-5}, \\ \Omega_{r0} &= 0,999994.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Y así se obtiene la siguiente gráfica que contiene la evolución de los parámetros de densidad, la ecuación de estado efectiva y la ecuación de estado de la energía oscura:

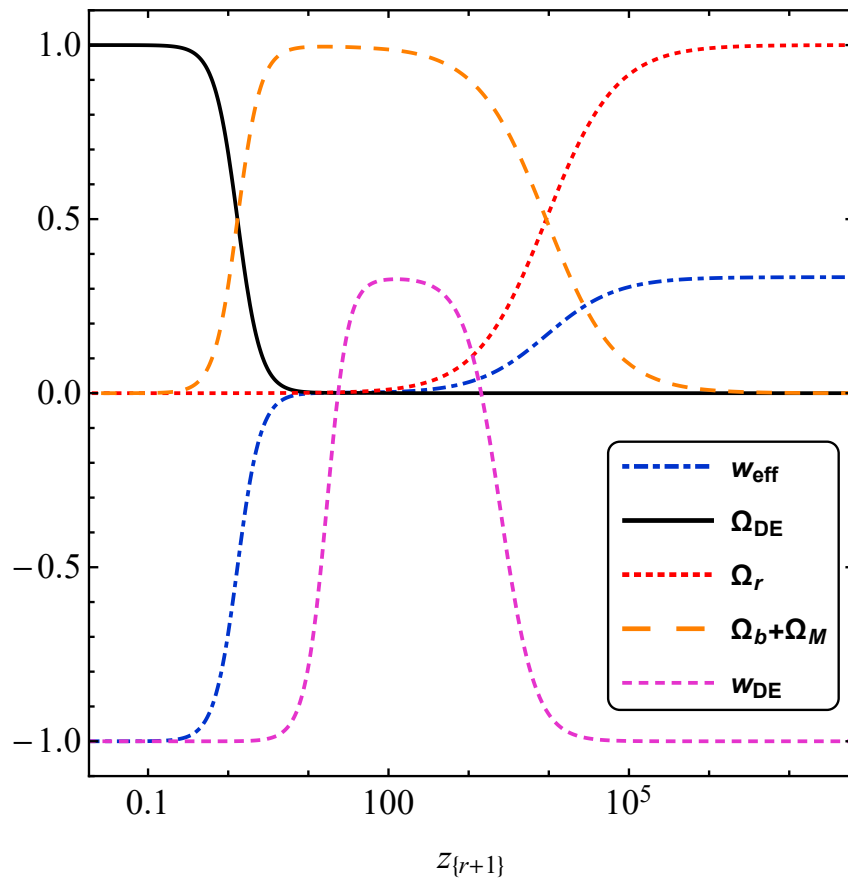


Figura 6.1: Evolución de los parámetros de densidad, la ecuación de estado efectiva y la ecuación de estado de la energía oscura con condiciones iniciales en la época de radiación profunda.

Se puede observar en la figura anterior que la ecuación de estado de la energía oscura (w_{DE}) tiene una forma bastante novedosa y esto se debe a la función de acople que se plantea en este trabajo, más explícitamente por el parámetro n en dicha función. Por lo tanto, si se varía n así mismo cambiará w_{DE} como se puede ver en la siguiente gráfica:

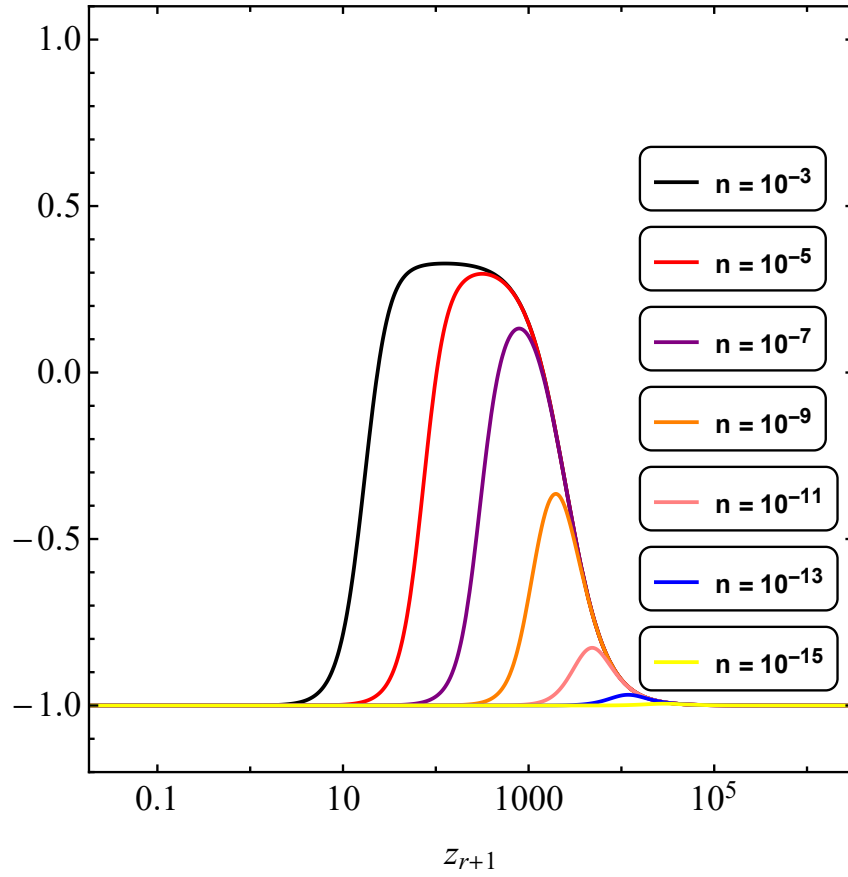


Figura 6.2: Evolución cosmológica de la ecuación de estado de la energía oscura para diferentes valores del parámetro n .

Se puede observar entonces que, a medida que n va decreciendo, la curva de la gráfica anterior se va cerrando y se va aplanando, acercándose cada vez más a -1 .

Según el espacio de parámetros que se obtuvo en la sección 5 n debe ser mayor que cero, esta es la única restricción que se tiene para este parámetro, pero al realizar la solución numérica se encuentra que se obtiene mejores resultados para $n \lesssim 10^{-3}$.

Como se puede ver en la ecuación (4.58), la función de acople cuenta con dos parámetros, n que ya se vio en qué forma modifica la ecuación de estado de la energía oscura y μ . Para el caso de μ , los cambios que produce en w_{DE} son prácticamente insignificantes; incluso si fijamos $\mu = 0$ no se observan cambios en la evolución de los parámetros de densidad y las ecuaciones de estado:

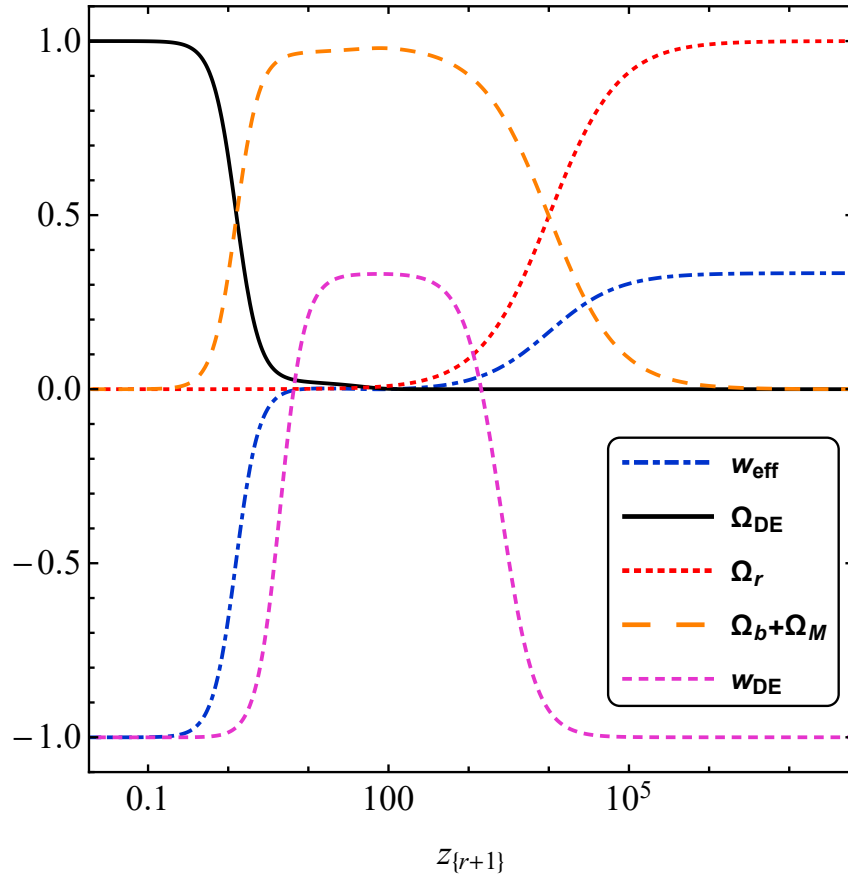


Figura 6.3: Evolución de los parámetros de densidad, la ecuación de estado efectiva y la ecuación de estado de la energía oscura con condiciones iniciales en la época de radiación profunda para $\mu = 0$.

Sin embargo, solamente se obtienen cambios en w_{DE} , por parte de μ , si se realizan variaciones altas en dicho parámetro y además, los cambios no son tan apreciables como los observados en la figura 6.2.

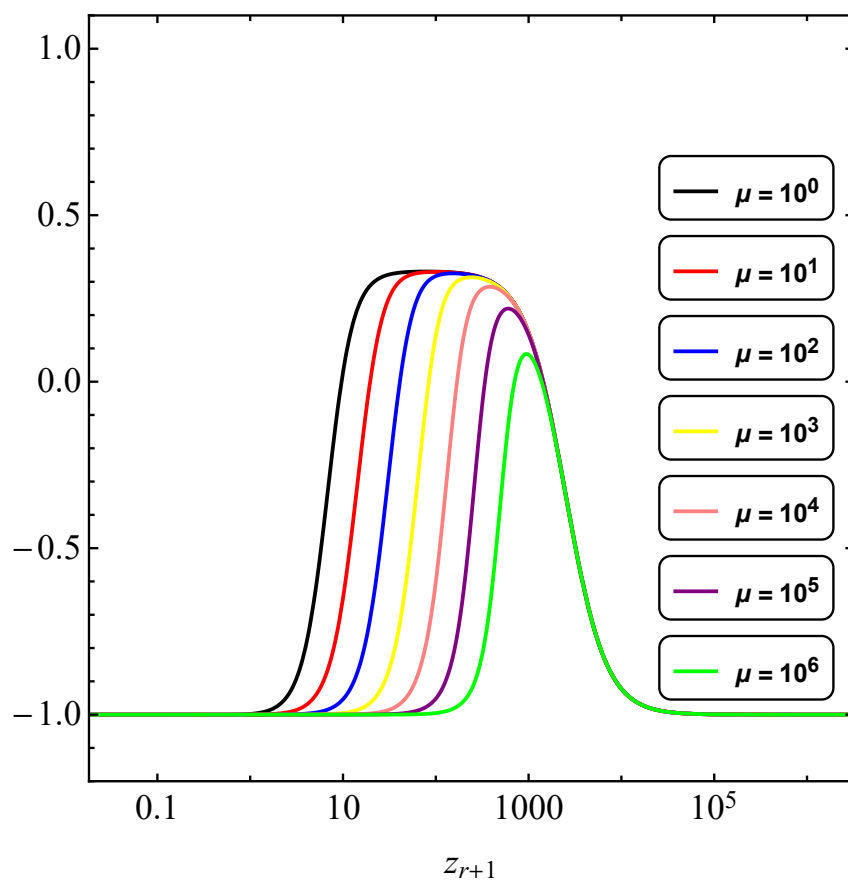


Figura 6.4: Evolución cosmológica de la ecuación de estado de la energía oscura para variaciones altas en el parámetro μ .

Conclusiones

De acuerdo a lo obtenido en la figura 6.1, se puede concluir que el modelo planteado en este trabajo reproduce satisfactoriamente la historia de la expansión del universo; de manera que, es una buena opción para explicar la expansión acelerada del mismo y a su vez, es una alternativa viable al modelo Λ CDM. Además de esto, de acuerdo a los resultados de la evolución de los parámetros de densidad y las ecuaciones de estado, con relación a la función de acople, se tiene una fuerte dependencia de dicha función con el parámetro n , de manera que, para cambios pequeños de dicha variable se obtiene variaciones altas en la ecuación de estado de la energía oscura. A medida que el valor de dicho parámetro se hace cada vez más pequeño, w_{DE} se va acercando cada vez más a -1 ; es decir, cuando n tiende a cero el modelo se comporta como si estuviera desacoplado obteniendo una ecuación de estado para la energía oscura constante e igual a -1 .

En cuanto al parámetro μ , se concluye que no es muy relevante con respecto a la función de acople, pues sus variaciones no tienen algún efecto en la ecuación de estado de la energía oscura y de hecho, aún fijando $\mu = 0$ se obtiene el mismo resultado que para un valor de μ diferente de cero. Solo se obtienen cambios en w_{DE} para variaciones muy altas de μ , cambios que se pueden obtener de una manera más rápida y eficaz haciendo solo pequeñas variaciones en el parámetro n .

Apéndice **A**

Variación del escalar de Ricci

Para calcular la variación del escalar de Ricci se calcula primero la variación del tensor de Riemann, el cual se define como:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}. \quad (\text{A.1})$$

De esta forma, su variación está dada por:

$$\delta(R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}) = \delta(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) - \delta(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) + \delta(\Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa}) - \delta(\Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}). \quad (\text{A.2})$$

Teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}, \\ \delta\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} &= \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}, \\ \delta(\Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa}) &= \delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa}, \\ \delta(\Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}) &= -\delta\Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se obtiene la expresión:

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa} - \delta\Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}. \quad (\text{A.4})$$

Ahora, como $\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$ es la diferencia de dos conexiones y es un tensor, por lo tanto, se puede calcular su derivada covariante:

$$\nabla_{\epsilon}(\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) = \partial_{\epsilon}(\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) + \Gamma_{\beta\kappa}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\epsilon}^{\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\beta}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

De esta forma, la ecuación (A.4) se puede reescribir como:

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}). \quad (\text{A.6})$$

Ahora, se puede obtener la variación del tensor de curvatura de Ricci haciendo la contracción de dos índices de la variación del tensor de Riemann y llegar a la identidad de Palatini [52]:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \\ &= \nabla_\alpha(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha).\end{aligned}\tag{A.7}$$

El escalar de Ricci se define como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.\tag{A.8}$$

Así, su variación se calcula como:

$$\begin{aligned}\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\nabla_\beta(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\beta - \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha).\end{aligned}\tag{A.9}$$

Como $\nabla_\beta g^{\mu\nu} = 0$, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\beta(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\beta - g^{\mu\beta}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha).\tag{A.10}$$

El último término de la ecuación anterior al ser multiplicado por $\sqrt{-g}$ es una derivada exacta y usando el teorema de Stokes se obtiene únicamente un término de frontera al integrar; así, cuando la variación de la métrica se anula este término es despreciable. De esta forma:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}.\tag{A.11}$$

Bibliografia

- [1] A. G. Riess *et al.*, “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant,” *The Astronomical Journal* **116** no. 3, (1998) 1009. <http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=3/a=1009>.
- [2] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, [arXiv:astro-ph/9812133](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9812133).
- [3] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, 7 ed., 2010.
- [4] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, “Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests,” *Astrophys. Space Sci.* **342** (2012) 155–228, [arXiv:1205.3421](https://arxiv.org/abs/1205.3421) [gr-qc].
- [5] **Planck** Collaboration, N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” [arXiv:1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [astro-ph.CO].
- [6] S. Carroll, “The Cosmological Constant,” *Living Reviews in Relativity* **4** no.~1, (2001) . <https://doi.org/10.12942/lrr-2001-1>.
- [7] A. G. Riess *et al.*, “A 2.4 % Determination of the Local Value of the Hubble Constant,” *Astrophys. J.* **826** no.~1, (2016) 56, [arXiv:1604.01424](https://arxiv.org/abs/1604.01424) [astro-ph.CO].
- [8] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1 % Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM,” *Astrophys. J.* **876** no.~1, (2019) 85, [arXiv:1903.07603](https://arxiv.org/abs/1903.07603) [astro-ph.CO].
- [9] J. Martin, “Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask),” *Comptes Rendus Physique* **13** (2012) 566–665, [arXiv:1205.3365](https://arxiv.org/abs/1205.3365) [astro-ph.CO].
- [10] S. Tsujikawa, “Modified gravity models of dark energy,” *Lect. Notes Phys.* **800** (2010) 99–145, [arXiv:1101.0191](https://arxiv.org/abs/1101.0191) [gr-qc].
- [11] H. Nersisyan, N. A. Lima, and L. Amendola, “Gravitational wave speed: Implications for models without a mass scale,” 2018.
- [12] P. Creminelli and F. Vernizzi, “Dark Energy after GW170817 and GRB170817A,” *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251302, [arXiv:1710.05877](https://arxiv.org/abs/1710.05877) [astro-ph.CO].

-
- [13] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, “Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead,” *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251304, [arXiv:1710.05901 \[astro-ph.CO\]](#).
 - [14] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753–1936, [arXiv:hep-th/0603057](#).
 - [15] J. Yoo and Y. Watanabe, “Theoretical Models of Dark Energy,” *Int. J. Mod. Phys. D* **21** (2012) 1230002, [arXiv:1212.4726 \[astro-ph.CO\]](#).
 - [16] T. Koivisto and D. F. Mota, “Anisotropic Dark Energy: Dynamics of Background and Perturbations,” *JCAP* **06** (2008) 018, [arXiv:0801.3676 \[astro-ph\]](#).
 - [17] T. Koivisto and D. F. Mota, “Vector Field Models of Inflation and Dark Energy,” *JCAP* **08** (2008) 021, [arXiv:0805.4229 \[astro-ph\]](#).
 - [18] M. Thorsrud, D. F. Mota, and S. Hervik, “Cosmology of a Scalar Field Coupled to Matter and an Isotropy-Violating Maxwell Field,” *JHEP* **10** (2012) 066, [arXiv:1205.6261 \[hep-th\]](#).
 - [19] A. Guarnizo, J. B. Orjuela-Quintana, and C. A. Valenzuela-Toledo, “Dynamical analysis of cosmological models with non-Abelian gauge vector fields,” *Phys. Rev. D* **102** no.~8, (2020) 083507, [arXiv:2007.12964 \[gr-qc\]](#).
 - [20] J. B. Orjuela-Quintana and C. A. Valenzuela-Toledo, “Anisotropic k-essence,” *Phys. Dark Univ.* **33** (2021) 100857, [arXiv:2106.06432 \[gr-qc\]](#).
 - [21] J. P. Beltrán Almeida, A. Guarnizo, R. Kase, S. Tsujikawa, and C. A. Valenzuela-Toledo, “Anisotropic 2-form dark energy,” *Phys. Lett. B* **793** (2019) 396–404, [arXiv:1902.05846 \[hep-th\]](#).
 - [22] A. Guarnizo, J. P. B. Almeida, and C. A. Valenzuela-Toledo, “*p*-form quintessence: exploring dark energy of *p*-forms coupled to a scalar field,” in *15th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories*. 10, 2019. [arXiv:1910.10499 \[gr-qc\]](#).
 - [23] J. B. Orjuela-Quintana and C. A. Valenzuela-Toledo, “Anisotropic Dark Energy from a Coupled 2-form Field,” [arXiv:2202.07546 \[gr-qc\]](#).
 - [24] S. Weinberg, “The Cosmological Constant Problem,” *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1–23.
 - [25] M. P. Rajvanshi and J. S. Bagla, “Reconstruction of Dynamical Dark Energy Potentials: Quintessence, Tachyon and interacting models,” [arXiv:1905.01103 \[astro-ph.CO\]](#).
 - [26] L. Amendola, “Coupled Quintessence,” *Phys. Rev. D*. **62** no.~043511, (2000) 18. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.043511>.
 - [27] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer, and G. Zahariade, “From k-essence to generalised Galileons,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 064039, [arXiv:1103.3260 \[hep-th\]](#).

-
- [28] M. Biswas and U. Debnath, “Analysis of Generalized Ghost Dark Energy in LQC and Galileon Gravity,” *Commun. Theor. Phys.* **65** (2016) 121–126.
 - [29] W. Li, “A unifying framework for ghost-free Lorentz-invariant Lagrangian field theories,” *arXiv:1508.03247 [gr-qc]* (2015) .
 - [30] V. Sivanesan, “Generalized multiple-scalar field theory in Minkowski space-time free of Ostrogradski ghosts,” *Phys. Rev.* **D90** (2014) 104006, [arXiv:1307.8081 \[gr-qc\]](#).
 - [31] J. Wainwright and G. F. R. Ellis, *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, New York, 2009.
 - [32] A. A. Coley, *Dynamical systems and cosmology*, vol. 291. Kluwer, Dordrecht, Netherlands, 2003.
 - [33] J. F. Rodriguez and Y. Rodriguez, “Analysis of Vector-Inflation Models Using Dynamical Systems,” *Nucl. Part. Phys. Proc.* **267-269** (2015) 257–259, [arXiv:1504.02433 \[gr-qc\]](#).
 - [34] I. Percival, *Introduction to Dynamics*. Press Syndicate of the University of Cambridge, Great Britain, 1982.
 - [35] E. Copeland, A. Liddle, and D. Wands, “Exponential potentials and cosmological scaling solutions,” *Phys. Rev. D.* **57** (1998) 6.
 - [36] S. Tsujikawa, “Quintessence: a review,” *Classical and Quantum Gravity* **30** no.~21, (2013) .
 - [37] E. Allys, “New terms for scalar multi-galileon models, application to SO(N) and SU(N) group representations,” [arXiv:1612.01972 \[hep-th\]](#).
 - [38] T. Kobayashi, “Cosmic expansion and growth histories in Galileon scalar-tensor models of dark energy,” *Phys. Rev.* **D81** (2010) 103533, [arXiv:1003.3281 \[astro-ph.CO\]](#).
 - [39] Y. Rodríguez and A. A. Navarro, “Scalar and vector Galileons,” *J. Phys. Conf. Ser.* **831** no.~1, (2017) 012004, [arXiv:1703.01884 \[hep-th\]](#).
 - [40] R. C. G. Landim, “Dynamical analysis for a vector-like dark energy,” *Eur. Phys. J. C* **76** no.~9, (2016) 480, [arXiv:1605.03550 \[hep-th\]](#).
 - [41] L. G. Gomez and Y. Rodriguez, “Coupled Multi-Proca Vector Dark Energy,” [arXiv:2004.06466 \[gr-qc\]](#).
 - [42] E. Allys, P. Peter, and Y. Rodríguez, “Generalized Proca action for an Abelian vector field,” *JCAP* **1602** (2016) 004, [arXiv:1511.03101 \[hep-th\]](#).
 - [43] E. Allys, J. P. Beltrán Almeida, P. Peter, and Y. Rodríguez, “On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field,” *JCAP* **1609** no.~09, (2016) 026, [arXiv:1605.08355 \[hep-th\]](#).

-
- [44] C. Armendariz-Picon, “Could dark energy be vector-like?,” *JCAP* **0407** (2004) 007, [arXiv:astro-ph/0405267](#).
 - [45] T. S. Koivisto and N. J. Nunes, “Inflation and dark energy from three-forms,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 103509, [arXiv:0908.0920 \[astro-ph.CO\]](#).
 - [46] A. Mehrabi, A. Maleknejad, and V. Kamali, “Gaugessence: a dark energy model with early time radiation-like equation of state,” *Astrophys. Space Sci.* **362** (2017) 53, [arXiv:1510.00838 \[astro-ph.CO\]](#).
 - [47] E. Allys, P. Peter, and Y. Rodríguez, “Generalized SU(2) Proca Theory,” *Phys. Rev. D* **94** no.~8, (2016) 084041, [arXiv:1609.05870 \[hep-th\]](#).
 - [48] A. Gallego, Y. Rodríguez, and L. Gómez, “Generalized SU(2) Proca theory reconstructed and beyond,” *Physical Review Letters* **102** no.~104066, (2020) . <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.104066>.
 - [49] L. G. Gómez and Y. Rodríguez, “Stability Conditions in the Generalized SU(2) Proca Theory,” *Phys. Rev. D* **100** no.~8, (2019) 084048, [arXiv:1907.07961 \[gr-qc\]](#).
 - [50] A. Gallego, C. M. Nieto, and Y. Rodríguez, “Towards the extended SU(2) Proca theory,” *Physical Review Letters* **105** no.~124060, (2022) . <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.124060>.
 - [51] W. R. Inc., “Mathematica, Version 12.1.” <https://www.wolfram.com/mathematica>. Champaign, IL, 2020.
 - [52] Guarnizo, “Cosmological Models in Modified f(R) Gravity Theories,” (2012) , [arXiv:1211.2444](#).