



**Una propuesta Didáctica en torno a simetrías y razón áurea en grado décimo:
resignificación de la práctica docente desde perspectivas sociocultural y Análisis
Didáctico**

José Humberto Arcila Atehortúa

Juan Carlos Manzano Ríos

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática y Ciencias Experimentales

2018



Propuesta metodológica de enseñanza en el aula de matemáticas desde una perspectiva didáctica, resignificación de los conocimientos y las prácticas del docente y atendiendo a aspectos socioculturales del contexto

José Humberto Arcila Atehortúa Cód. 201605879

Juan Carlos Manzano Ríos Cód. 201605907

Director:

PhD. Evelio Bedoya Moreno

Trabajo de Investigación Presentado Como Requisito Para Optar al Título de:

Magister en Educación

Universidad del Valle - Tuluá

2018

Nota de Aceptación

Director

Evelio Bedoya Moreno

Jurado

Nelson Henrique Hoyos

Jurado

David Benítez Mojica

Santiago de Cali, Octubre de 2018

DEDICATORIA

A mis padres Fredy Manzano y Martha Elena Ríos, esposa Diana Marcela Marín, hijos y a mis
hermanos por su apoyo incondicional.

Manzano R. Juan C.

A mi madre Esperanza Atehortúa y Hermanas las cuales son excelentes y han sido un gran apoyo
en el camino de mi formación.

José H. Arcila A.

AGRADECIMIENTOS

Expresamos el más sincero agradecimiento a todas las personas que de forma directa o indirecta contribuyeron a la realización de este trabajo de investigación.

En primer lugar al Doctor Evelio Bedoya Moreno por su experta, oportuna y excelente labor de dirección durante el desarrollo de este trabajo de investigación, por su gran disponibilidad, por compartir diversas posturas complejas respecto a la Educación.

A todos los profesores que han realizado importantes aportes durante los seminarios de la maestría, y en particular a los docentes Lisbeth Alvarado, Nelson Hoyos gracias por sus correcciones y sugerencias durante la realización de este trabajo de grado.

A todos los compañeros y compañeras de la Maestría en Educación Matemática, por sus experiencias y contribuciones, muchas de ellas generadas en el marco de lo dialógico.

A la Universidad del Valle por poner a nuestra disposición más de lo necesario para una formación integral.

Al Ministerio de Educación Nacional y su programa Becas para la Excelencia Docente, por generar espacios de formación e investigación en Educación Matemática y Ciencias Experimentales.

A la Secretaria de Educación Municipal de Tuluá Valle del Cauca, por apoyar la formación posgradual y generar espacios pertinentes dentro de las instituciones educativas que permiten la investigación en educación.

A las Instituciones Educativas Moderna y Jovita Santacoloma de Tuluá, sus correspondientes rectores Esp. Sandro Villegas Álzate y Esp. Luz Aida Grisalez Rendón y comunidad educativa por apoyar y abrir sus puertas, salones, etc., a las miradas microcurriculares realizadas en esta investigación. Así mismo, gracias a los estudiantes de grados décimos de las I.E. por sus aportaciones y participaciones que ayudaron a las resignificaciones realizadas en el aula de matemáticas.

A los invitados Lic. José Arvey Camargo Ossa y Lic. Orlando Millán por sus aportes o miradas socioculturales relativos al entorno de los estudiantes, realizados en el marco de la entrevista.

Finalmente, pero no menos importantes, a nuestras familias por los grandes esfuerzos realizados para que todo esto fuera posible.

CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	ix
ÍNDICE DE TABLAS.....	xi
RESUMEN	xii
1. CAPÍTULO	3
APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. NATURALEZA Y DIMENSIÓN DEL PROBLEMA	3
1.1.1. Planteamiento del problema	3
1.1.2. Pregunta principal	5
1.1.3. Tabla de parámetros de investigación.....	6
1.2. OBJETIVOS	9
1.2.1. Objetivo General.....	9
1.2.2. Objetivos Específicos	9
1.3. JUSTIFICACIÓN	9
1.3.1. Una mirada a los actuales estudios sobre el rol del docente en el aula de matemáticas	10
1.3.2. El currículo y la enseñanza de la geometría 3D con tecnologías digitales TD	12
1.3.3. Aspectos socioculturales de la geometría espacial.....	15
1.4. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN	18
2. CAPÍTULO	27
MARCO TEÓRICO	27
2.1. Marco Teórico	27
2.1.1. Aspectos Socioculturales	29
2.1.2. Dimensión epistemológica	35
2.1.3. Dimensión matemática	52
2.1.4. Dimensión cognitiva.....	74
2.1.5. Dimensión didáctica (instruccional)	78
2.1.6. Currículo Integrado.....	98
2.2. Propuesta metodológica de clase (<i>Propuesta microcurricular</i>)	103
2.2.1. Relaciones entre las componentes o vértices que constituyen el modelo microcurricular de tipo sociocultural	104
2.2.2. Propuesta microcurricular de tipo sociocultural	110

3. CAPÍTULO	115
DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	115
3.1. Lineamientos metodológicos	115
3.2. Técnicas e instrumentos de análisis	127
3.3. Unidad didáctica la belleza de mi colegio	136
4. CAPÍTULO	157
PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	157
4.1. Sobre la propuesta microcurricular (y los conocimientos del docente)	159
4.2. Sobre la unidad didáctica: <i>la belleza de mi colegio</i>.....	189
5. CONCLUSIONES	196
6. REFERENCIAS.....	202
6.1. Referencias (citas en este documento).....	202
6.2. Referencias (citadas en documentos anexos o de actividades introductorias).....	207
ANEXOS	209
Anexo A: GLOSARIO.....	209
Anexo B: PROPUESTA MICROCURRICULAR EN EL MARCO DEL MACRO, MESO Y MICROCURRÍCULO	214
B.1. El microcurrículo según el macrocurrículo	217
B.2. El microcurrículo según el mesocurrículo en la institución educativa Jovita Santacoloma ...	221
B.3. Aportes de la propuesta metodológica al microcurrículo de matemáticas de la institución educativa Jovita Santacoloma	226
B.4. El microcurrículo según el mesocurrículo en la institución educativa Moderna de Tuluá	229
B.5. Aportes de la propuesta metodológica al microcurrículo de matemáticas de la institución educativa Moderna de Tuluá	231

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1: <i>MODELO PARCIAL DE LOS ORGANIZADORES</i>	44
ILUSTRACIÓN 2: <i>ESTRUCTURA ESQUEMÁTICA DE LA ORGANIZACIÓN Y CONTENIDOS DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO</i>	46
ILUSTRACIÓN 3: <i>POLIEDRO CÓNVEJO</i>	56
ILUSTRACIÓN 4: <i>ESFERA</i>	56
ILUSTRACIÓN 5: <i>CIRCUNFERENCIA ALREDEDOR DE UN EJE Y SOBRE UN PLANO QUE SE UBICA EN EL ESPACIO</i>	57
ILUSTRACIÓN 6: <i>POLÍGONO (CASO DE PENTÁGONO NO REGULAR)</i>	58
ILUSTRACIÓN 7: <i>TRIÁNGULO RECTÁNGULO O DE PITÁGORAS</i>	59
ILUSTRACIÓN 8: <i>PATRÓN DE FIGURAS GENERADO CON TRANSFORMACIONES DE ISOMETRÍA EN EL ESPACIO</i>	60
ILUSTRACIÓN 9: <i>PROPORCIÓN ÁUREA EN UN SEGMENTO AB</i>	63
ILUSTRACIÓN 10: <i>PROPORCIÓN ÁUREA VISUALIZADA EN LA FACHADA DE ESTRUCTURA</i>	64
ILUSTRACIÓN 11: <i>ESPIRAL ÁUREA</i>	65
ILUSTRACIÓN 12: <i>FLOR (PENTÁGONO REGULAR Y RAZÓN ÁUREA)</i>	67
ILUSTRACIÓN 13: <i>PIRÁMIDE DE BASE CUADRADA</i>	89
ILUSTRACIÓN 14: <i>REPRESENTACIÓN PLANA DE UNA ESFERA O SÓLIDOS</i>	90
ILUSTRACIÓN 15: <i>ALTURA (ES EXTERNA) DEL CONO POR EL CENTRO DEL CÍRCULO</i>	91
ILUSTRACIÓN 16: <i>MODELO MICROCURRICULAR DE TIPO SOCIOCULTURAL EN RELACIÓN CON LOS CONOCIMIENTOS DEL DOCENTE</i>	103
ILUSTRACIÓN 17: <i>MODELO DE ESTRUCTURA ÁRBOL- SILLA</i>	164
ILUSTRACIÓN 18: <i>MODELO DE ESTRUCTURA DE COLUMNAS</i>	167
ILUSTRACIÓN 19: <i>ESTRUCTURA REALES CAPILLA, CAFETERÍA Y COLISEO</i>	167
ILUSTRACIÓN 20: <i>MODELO DE ESTRUCTURA CANCHA-EDIFICACIÓN- TIENDA</i>	169
ILUSTRACIÓN 21: <i>MODELO DE ESTRUCTURA SALÓN DE DANZAS</i>	171
ILUSTRACIÓN 22: <i>MODELO DE ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE AL AULA MÁXIMA</i>	172
ILUSTRACIÓN 23: <i>MODELO DE ESTRUCTURA CANCHA-EDIFICACIÓN</i>	173
ILUSTRACIÓN 24: <i>MODELO DE ESTRUCTURA DE SALÓN DE DANZAS</i>	174
ILUSTRACIÓN 25: <i>MODELO DE ESTRUCTURA DE SALÓN DE DANZAS</i>	175
ILUSTRACIÓN 26: <i>MODELO DE ESTRUCTURA TIENDA ESCOLAR</i>	176
ILUSTRACIÓN 27: <i>MODELO DE ESTRUCTURA DE CAFETERÍA</i>	181
ILUSTRACIÓN 28: <i>ESTRUCTURA EDIFICIO 1</i>	185

ILUSTRACIÓN 29: <i>MODELO DE ESTRUCTURA EDIFICIO 1 (I.E. JOVITA)</i>	186
ILUSTRACIÓN 30: <i>MODELO EN GEOGEBRA DE ESTRUCTURA EDIFICIO 1(I.E. MODERNA)</i>	186
ILUSTRACIÓN 31: <i>ERROR DOMINIO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN POLIEDROS</i>	187
ILUSTRACIÓN 32: <i>ERROR DOMINIO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN POLIEDROS</i>	194

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: <i>PARÁMETROS DE LA INVESTIGACIÓN</i>	6
TABLA 2: <i>UNIDADES DE ANÁLISIS Y CRITERIOS QUE EVIDENCIAN ASPECTOS DE LA GESTIÓN DE CLASE POR PARTE DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS.</i>	134

RESUMEN

Este trabajo de investigación propone realizar el desarrollo, implementación y sistematización de una estrategia metodológica en el aula de matemáticas. El análisis de dicha estrategia se realiza por medio de una rejilla, la cual atiende principalmente a la dimensión didáctica y curricular del proceso educativo. A su vez, dicha investigación propone que su análisis arroja resultados que permite a los docentes reflexivos, continuar generando la resignificación de sus prácticas y conocimientos, a través de la sistematización de experiencias, la metareflexión y posturas críticas. Así como, generar avances académicos en el área de matemáticas dentro de la comunidad de las Instituciones Educativas Jovita Santacoloma y Moderna de Tuluá Valle del Cauca.

La estrategia metodológica denominada Propuesta Microcurricular implementada, hace uso del diseño de una Unidad Didáctica, realizada en el marco del Análisis Didáctico. En la misma, se proponen problemas abiertos los cuales son resueltos por las microsociedades de estudiantes utilizando ambientes de geometría dinámica, en particular para la construcción de modelos 3D. Modelos que dan cuenta de imbricaciones o relaciones entre aspectos socioculturales reales o realistas y contenidos matemáticos como el número áureo y simetrías. Encontrando que una Propuesta Microcurricular de tipo sociocultural, resultado de la convergencia de Organizadores Locales del Currículo asociados a los conocimientos del docente, resulta enriquecida cuando se imbrica a problemas de modelación matemática.

PALABRAS CLAVES

Propuesta Microcurricular, Gestión en aula, Geogebra 3D, Unidad Didáctica, conocimientos del docente, Didáctica Matemática, Análisis Didáctico, Currículo, Organizadores Locales del Currículo, modelación, resolución de problemas y Sociocultura.

INTRODUCCIÓN

Dentro de las comunidades educativas se encuentran unas prácticas vinculadas con el contexto, con la sociocultura en la cual se encuentra inmersa una institución educativa. En particular, el siguiente trabajo de investigación se desarrolla en dos instituciones educativas públicas: la I.E. Moderna, es una institución pública ubicada en el perímetro urbano de la ciudad de Tuluá Valle, y la I.E. Jovita Santaloma, de tipo rural plano en el corregimiento de Nariño y cercana a la institución Moderna. De ellas, la I.E. Moderna aún no cuenta con jornada única. La población estudiantil de las instituciones educativas mencionadas pertenece principalmente a estratos socioeconómicos 1 y 2. En los entornos de ambas instituciones se localizan espacios dedicados al cultivo de la caña de azúcar así como un ingenio azucarero.

Ello permite que los estudiantes y docentes de matemáticas continuamente observen espacios verdes, así como también algunas construcciones arquitectónicas existentes, estas últimas del tipo casas unifamiliares, edificios de la institución y torre de control de un aeropuerto cercano entre otras. Lo cual posibilita afirmar que tanto los docentes como sus estudiantes tienen algunas cosmovisiones sobre su entorno, y posibles de ser llevadas al aula. En esa dirección, el docente puede investigar, reflexionar, y diseñar propuestas microcurriculares que hagan uso de diversas investigaciones existentes; no solo respecto a los conocimientos matemáticos escolares, como los objetos geométricos, sino también sobre Conocimientos Didácticos, etc. Conocimientos que le permitan al docente estructurar sus propuestas curriculares, en estrecha relación con sus experiencias y prácticas del aula, y que en líneas posteriores referenciamos como Organizadores Locales del Currículo O.L.C. Buscando además que sus propuestas propicien, por ejemplo, la

resolución de problemas abiertos de geometría 3D vía modelación. Modelos que se pueden generar usando diversos mediadores en el marco de las actividades microcurriculares, y simultáneamente dando cuenta de patrones del modelo que se pueden estudiar utilizando objetos matemáticos, como simetrías y/o razones. Es decir, simetrías y razón áurea se pueden proponer como dos posibles objetos matemáticos que permiten modelar las estructuras naturales o artificiales del entorno, y que además pueden dar cuenta de aspectos socioculturales del contexto relativos a dichos modelos.

Adicionalmente, es pertinente decir que ambas poblaciones de estudiantes se caracterizan por tener afinidad con actividades artísticas como el baile o el canto, las cuales practican por ejemplo en espacios abiertos o verdes pertenecientes a las instituciones. Desde lo académico, es posible afirmar que los estudiantes de grado décimo de ambas, por lo general en años anteriores, han abordado geometría desde otros enfoques, distintos al de geometría 3D con ambientes de geometría dinámica. Exceptuando el caso de los estudiantes del Jovita los cuales realizaron unas pocas actividades con geometría espacial en un Ambiente de Geometría Dinámica. Actualmente, se cuenta con una población de 43 estudiantes de décimo en la I.E. Jovita Santacoloma, y de 38 en la I.E. Moderna.

1. CAPÍTULO

APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. NATURALEZA Y DIMENSIÓN DEL PROBLEMA

1.1.1. Planteamiento del problema

El uso creciente de las tecnologías digitales TD permite que los estudiantes tengan acceso a simuladores con los cuales interactuar e incluso modificar parámetros; por ejemplo a fin de conseguir ganar un juego. Pensamos que de forma similar un Ambiente de Geometría Dinámica o también AGD 3D puede permitir que las alumnas y alumnos generen modelos y/o soluciones a problemas de tipo matemático como es el caso de construcciones geométricas en el espacio.

Lo anterior se observó durante la implementación de las situaciones de problemas abiertos realizadas con docentes en formación matemáticas, denominadas columpio, colisión de esferas, cancha de básquet, pasando el muro y sistema planeta satélite (Arcila, Bonilla & Cardona, 2012, p. 81 - 95). El trabajo de Arcila, et al., está centrado en la resolución de problemas abiertos de construcción geométrica en el espacio, y con el uso de Geogebra se caracteriza el papel de las construcciones 3D en relación con conocimientos de geometría 2D que es la generalmente utilizada en las escuelas. En dicho trabajo surgieron algunos cuestionamientos por profundizar, de los cuales nos proponemos retomar o abordar especialmente el segundo, a partir de la pregunta problema a investigar durante este trabajo de maestría. Estos son: ¿Es posible caracterizar la evolución de los esquemas sociales de uso ESU a la hora de realizar, por parte de los estudiantes,

construcciones geométricas del espacio al espacio, tal vez sin haber pasado por el plano? ¿Cuál es el papel de Geogebra 3D u otro AGD 3D en los procesos de modelación?

A propósito de lo anterior, nos proponemos investigar la *modelación* vía resolución de problemas abiertos en la cual se considere aspectos socioculturales, como por ejemplo algunas de las concepciones que tienen los estudiantes de su entorno en términos estéticos, artísticos, geográfico, demográfico y/o arquitectónicos, entre otros. La modelación se realizará con el uso de tecnologías como geogebra 3D por parte de estudiantes de décimo grado de las Instituciones Educativas Jovita Santacoloma y Moderna de Tuluá Valle. Y aunado con las modelaciones que generen los estudiantes, es de especial interés el caracterizar las dinámicas de enseñanza del docente en su gestión de las clases de matemática, abordando problemas abiertos.

La relevancia de dicha propuesta deriva de la necesidad de realizar aportes microcurriculares de tipo metodológico desde lo didáctico y lo curricular, a partir de la resignificación de los conocimientos profesionales y de las prácticas del docente. Es decir, resignificaciones que propendan por realizar acercamientos a la formación profesional de los docentes, apuntaladas en los desarrollos teóricos que existen sobre educación o formación, en propuestas curriculares locales e internacionales, así como en las experiencias de aula del docente. En particular, es de interés para los docentes que realizan esta investigación, aproximar posibles resignificaciones de los conocimientos y prácticas, en términos de formación, que redunden en desarrollos microcurriculares en dos maestros que enseñan matemáticas escolares con formaciones profesionales diferentes. En un caso el docente tiene formación pregrado en licenciatura en educación matemática y física, en el otro el docente es ingeniero industrial. Lo anterior, con una

mirada que integre lo sociocultural a los avances académicos que se proponen seguir realizando las Instituciones Educativas Jovita Santacoloma y Moderna. Ello, con el fin de contribuir a las exigencias en términos de educación y tecnologías digitales TD propuestos en la región, Colombia y el mundo. A continuación planteamos el interrogante a investigar.

1.1.2. Pregunta principal

La cuestión a resolver durante esta investigación es:

¿Qué aporta el Análisis Didáctico concretado en el diseño y desarrollo de Unidades Didácticas a la formación (teórica, práctica) profesional docente y a la innovación curricular?

Con el fin de abordar el anterior interrogante, este trabajo se inscribe en un enfoque metodológico de investigación de carácter cualitativo. Y como guía durante la investigación proponemos las siguientes dos preguntas orientadoras:

1.1.2.1. Pregunta Orientadora 1

¿Cuáles son los conocimientos (teóricos, prácticos) que requiere un docente de matemáticas escolares para diseñar propuestas microcurriculares, principalmente en términos Didácticos, reflexivos y que considere aspectos socioculturales de la misma?

1.1.2.2. Pregunta Orientadora 2

¿Cuáles son las posibles resignificaciones de los conocimientos (teóricos, prácticos) del contenido por parte de los docentes, que se generan en el marco de la gestión de una Unidad Guía Didáctica en el aula?

1.1.3 Tabla de parámetros de investigación

A continuación, presentamos un recuadro de los aspectos centrales al trabajo de investigación

TABLA 1: PARÁMETROS DE LA INVESTIGACIÓN

Título de la Investigación	Una propuesta Didáctica en torno a simetrías y razón áurea en grado décimo: resignificación de la práctica docente desde perspectivas sociocultural y Análisis Didáctico
Pregunta problema	¿Qué aporta el Análisis Didáctico concretado en el diseño y desarrollo de Unidades Didácticas a la formación (teórica, práctica) profesional docente y a la innovación curricular?
Preguntas orientadoras	1) ¿Cuáles son los conocimientos (teóricos, prácticos) que requiere un docente de matemáticas escolares para diseñar propuestas microcurriculares, principalmente en términos Didácticos, reflexivos y que considere aspectos socioculturales de la misma? 2) ¿Cuáles son las posibles resignificaciones de los conocimientos (teóricos, prácticos) del contenido por parte de los docentes, que se generan en el marco de las gestiones de una Unidad Guía Didáctica en el aula?
Objetivos	Objetivo General Caracterizar y resignificar los conocimientos del docente a través de la Sistematización de sus experiencias escolares.

	Objetivo específico 1 Caracterizar el conocimiento (teórico, práctico) que un docente requiere para planificar una propuesta microcurricular. (unidad guía didáctica U.G.D)
	Objetivo específico 2 Resignificar el conocimiento Didáctico del contenido a través de la implementación de la unidad guía didáctica (U.G.D).
Hipótesis de estudio en la investigación	Es posible proponer una metodología de gestión y prácticas de enseñanza del docente de matemáticas en el aula, a partir de resignificar sus prácticas en términos didácticos, reflexivos y apropiando aspectos socioculturales de la misma. El diseño de una unidad didáctica centrada en la modelación matemática para la resolución de problemas abiertos y su implementación en el aula de matemáticas, dentro de trabajo colaborativo posibilitará el integrar aspectos socioculturales así como la generación construcciones geométricas, usando AGD 3D.
Hipótesis derivadas de la investigación	Es posible continuar enriqueciendo las propuestas microcurriculares de forma permanente vía resignificación de conocimientos y prácticas de los docentes reflexivos por medio de la sistematización de experiencias y la metareflexión centrada en el Análisis Didáctico. Es posible identificar y caracterizar algunos campos de problemas abiertos de matemáticas, imbricados a la sociocultura en la cual se encuentran inmersos los participantes del aula, vía enriquecer la modelación usando Ambientes de Geometría Dinámica. Es posible dar cuenta de una propuesta microcurricular en la cual los estudiantes trabajen de forma colaborativa y generen heurísticas microsociales que les permita identificar, reflexionar, dialogar y generar acuerdos que den solución sobre las prácticas y las metaprácticas emergentes en el aula y relativas a la resolución de problemas matemáticos.
Categorías del marco teórico	Dimensión epistemológica • Conocimientos de Contenido Matemático • Conocimientos de la Disciplina Didáctica de las Matemáticas D.M & Análisis Didáctico A.D. • Conocimiento de Aspectos Socioculturales, puestos en juego en el aula • Metas y creencias, que tiene el docente respecto al microcurrículo.
	Dimensión matemática • Objetos matemáticos razón áurea y simetrías, relativas a objetos geométricos del espacio, relaciones y propiedades geométricas utilizados en la puesta en aula del docente y/o que emergen durante la resolución de problemas abiertos de los estudiantes.
	Dimensión cognitiva • Heurísticas asociadas a la resolución de Problemas y Modelación, en el marco del aprendizaje sociocultural de microsociedades (objetivación).

	<i>Dimensión didáctica</i> • Errores presentes durante la resolución de problemas, por parte de los estudiantes. • Los medios y el papel del docente como generador de espacios dialógicos
Metodología de investigación	En este trabajo de investigación, proponemos realizar la obtención de datos y su análisis siguiendo una Sistematización de Experiencias, abordada a partir de cuatro líneas de fuerza relacionadas en las categorías anteriores y sus respectivas unidades de análisis. Ello significa que si bien las cuatro líneas de fuerza que parten de las experiencias previas de prácticas en el aula de los docentes reflexivos se esbozan como un derrotero, están abiertas a nuevas direcciones que pueden surgir durante las reflexiones y análisis en el proceso de sistematizar. En la misma sistematización la grabación de la clase en video y la reflexión que los docentes realizan se constituyen en una de las fuentes pertinentes permitiendo una mirada reflexiva a la gestión del microcurrículo. Unidad didáctica: enfocada en la modelación relacionada con la resolución de problemas abiertos, y que intenta poner en juego elementos matemáticos, con otros aspectos socioculturales del entorno de los estudiantes. Esta contiene la situación problema denominada <i>La Belleza de mi Colegio</i>, y se proponen para un aula que intente favorecer la negociación y construcción dialógica de saberes. El problema es abierto de geometría 3D y es posible darle solución modelando con el uso de simetrías o razón áurea o con los dos objetos matemáticos.

1.2.OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo General

Caracterizar y resignificar los conocimientos del docente a través de la Sistematización de sus experiencias escolares.

1.2.2. Objetivos Específicos

- a) Caracterizar el conocimiento (teórico, práctico) que un docente requiere para planificar una propuesta microcurricular. (unidad guía didáctica U.G.D)
- b) Resignificar el conocimiento Didáctico del contenido a través de la implementación de la unidad guía didáctica (U.G.D).

1.3.JUSTIFICACIÓN

Es pertinente mencionar elementos que pensamos muestran la relevancia de abordar el problema de investigación planteado en líneas anteriores. Ello lo realizaremos desde las siguientes tres apreciaciones: en primera instancia con una mirada a los actuales estudios sobre el rol del docente en el aula de matemáticas, seguido abordaremos el currículo y la enseñanza de la geometría 3D con TD, y la tercera considera los aspectos socioculturales de la geometría espacial.

1.3.1. Una mirada a los actuales estudios sobre el rol del docente en el aula de matemáticas

El docente de matemática en el marco de la modernidad Colombiana, está sujeto a exigencias de índole social y política que lo conducen a nuevos desafíos y situaciones cada vez más complejas de abordar. Ello en tanto que invitan al docente a propiciar espacios, prácticas y diálogos con el saber y con sus estudiantes con un carácter innovador, y además en entornos escolares en los cuales intervienen cada vez más elementos a considerar que aunque pueden aumentar la complejidad, también pueden enriquecer las prácticas educativas en el aula de matemáticas en tanto docentes reflexivos. En esta dirección, en los Estándares Básicos de Competencias (2006) se afirma:

Desde hace tres décadas, la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. (p.46)

Mostrando así que los modelos tradicionales de educación o los métodos de enseñanza aplicados por los docentes, no están dando repuesta a todas las necesidades educativas de las nuevas generaciones. Tal vez, ello se debe a la rigidez de la relación entre el docente que maneja todo el saber con estudiantes dispuestos en espacios delimitados y casi impensables en otras distribuciones, y cuya función es solo la de recibir conocimientos. Pero, es en el aula de matemáticas donde el profesor puede crear un espacio propicio para emprender procesos de investigación, que fortalezcan y proyecten su práctica docente dirigidas hacia la consecución de estrategias que optimicen el proceso de enseñanza y aprendizaje. Ello remite a pensar en cual sería un posible modelo de la clase de matemáticas que haga parte de los conocimientos del docente, o que por lo menos el mismo se esté cuestionando e investigando sobre el asunto. Y que al

implementarlo en su aula genere en sus estudiantes ciertas prácticas de aula fructíferas en términos de la relación con el conocimiento matemático, con sus conocimientos y con los de otros estudiantes que también hacen parte de dicho espacio.

Las variables a considerar por parte del docente en la gestión de aula son diversas en relación con el saber, con los estudiantes y con el entorno. Por ejemplo, se puede estudiar su rol desde lo epistemológico, cognitivo, didáctico, instrumental y la variable sociocultural que es inherente a toda actividad humana y por ende a la actividad matemática del aula, conocimientos que se convierten en estructuradores u organizadores del currículo, por ejemplo vía análisis didáctico y que permitan estructurar unidades didácticas. En esa dirección, los organizadores del currículo, toman sentido en un contexto local o de la institución educativa en la medida que entren a hacer parte de las resignificaciones de los conocimientos del docente y de sus prácticas. Docente que, como veremos más adelante, instalado en los organizadores locales del currículo puede diseñar e implementar propuestas microcurriculares que propendan por abordar problemáticas de la comunidad de la escuela, desde la matemática escolar.

Además, es necesario resaltar que en la medida que el docente considere los conocimientos socioculturales como relevantes, en tanto que le pueden aportar a la clase e incluso le dan significado a los constructos matemáticos de los estudiantes, es probable que las prácticas de aula de matemáticas sean cada vez más dinámicas en sus relaciones. Según Valero (2012):

Que el aprendizaje de las matemáticas se enfoque exclusivamente en los procesos cognitivos individuales contrasta con las visiones que toman al sujeto y al objeto de conocimiento en relación con otras personas y con el contexto de interacción entre personas y los contextos. (p.189)

El elemento sociocultural puede aportar dinamismo en términos de las relaciones con el conocimiento, con el profesor y con otros estudiantes e incluso con los miembros de la comunidad. Donde en diferentes momentos el conocimiento puede ser gestionado por diversos participantes, generando espacios de trabajo de tipo colaborativo. En acuerdo con lo anterior Vivier, Gómez-Chacón & Kuzniak, (2016) exponen:

El profesor puede observar el bloqueo en el trabajo de algún estudiante y pedir a otro que no lo tenga que hable sobre ello; o él puede ver un buen potencial de génesis de un estudiante y pedirle que lo comparta con el resto. (p.19)

1.3.2. El currículo y la enseñanza de la geometría 3D con tecnologías digitales TD

Actualmente, en los lineamientos Curriculares Colombianos se plantea el pensamiento espacial y sistemas geométricos, como uno de los ejes que permiten generar actividad matemática en el aula en relación a contextos de la vida diaria y otras ciencias, por medio de procesos como son la resolución de problemas de modelación y la comunicación, entre otros. Entonces, ¿cómo abordar la geometría de tal forma que se potencien las nociones sobre el espacio y el movimiento que traen los alumnos al aula, e incluso que comparten por pertenecer a un mismo medio sociocultural? Es de observar que un docente que se apropia de una cuestión tal tiene o está en la vía de una concepción dinámica de la geometría. A continuación, intentaremos proponer una respuesta desde el uso de las tecnologías digitales TD, en particular la puesta en aula a través del currículo de un ambiente de geometría dinámica 3D como Geogebra. Veamos.

En relación a la geometría en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) se expone que:

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. (p.37)

De lo anterior, se sigue que es apropiado considerar dentro del currículo de matemáticas aquellos entornos de trabajo que permitan a los estudiantes la exploración y manipulación dinámica de objetos geométricos, así como realizar modelos cada vez más elaborados que permitan dar soluciones a problemas haciendo uso de propiedades geométricas y transformaciones. Y más, si nos referimos a niños, niñas y jóvenes con propuestas e ideas creativas que reflejan sus intereses, y a docentes que profundizan en nuevas propuestas de aula desde los actuales referentes teóricos. En relación al trabajo en el espacio, es de observar que cuando en el aula de clase se abordan situaciones problemas correspondientes a la geometría 3D, se pueden presentar dificultades a la hora de realizar las representaciones respectivas, principalmente cuando en la escuela se ha favorecido el trabajo en el plano o lápiz y papel. Por lo cual, se hace necesario contar con herramientas apropiadas que le permitan al estudiante el generar soluciones no solo en el espacio, sino en el espacio pensado de forma dinámica. Una posible propuesta consiste en hacer uso del Ambiente de Geometría Dinámica 3D. En apoyo a dicho planteamiento encontramos que Córdoba, Castrillón & Rojas (2015) proponen:

En el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se presenta a veces una dificultad para modelar matemáticamente determinados problemas o situaciones puesto que a veces no se dispone de un medio adecuado que permita una correcta representación y visualización del problema mismo. Esta representación se puede convertir en un primer paso para llegar a la formulación matemática del problema y su solución. GeoGebra se presenta entonces como una poderosa herramienta que permite ese primer acercamiento visual al problema. (p. 1725)

También, es pertinente indicar que en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), hacen referencias a las transformaciones de isometría solamente para los grados 6°-7°, y solo para objetos del plano: “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte” (p.84). En el mismo referente curricular nacional aluden a las razones en repetidas ocasiones para los diversos grados. Además, en la Matriz de Referencia de Matemáticas (2016) se proponen las transformaciones de isometría para todos los grados centradas en la componente de pensamiento métrico y espacial; y las razones aparecen relacionados con el pensamiento aleatorio y variacional en 5°, y para 9° las refieren en los pensamientos aleatorio y espacial métrico.

Por último, abordamos elementos de los resultados de algunas pruebas censales, las cuales contienen preguntas de geometría plana y espacial, con el fin de referenciar la necesidad de generar otras prácticas geométricas en el aula y/o mejorar las actuales. En los resultados de las pruebas Saber 9° del 2016, en particular en el reporte para la Entidad Territorial Certificada de Tuluá Colombia, se observa que el 55% de los estudiantes evaluados en matemáticas se encuentran en un nivel de desempeño mínimo en el año 2015, y el 3% en avanzado. En el cuadernillo Saber 9°

de Matemáticas se observa preguntas sobre pensamiento espacial y sistemas geométricos como uno de los objetos de conocimiento evaluado. Adicionalmente, de acuerdo con los resultados del ISCE (Índice Sintético de Calidad Educativa) de 2015 de 4,85 comparado con 2016 con 5,04 se observa un ligero aumento en los resultados de las Instituciones educativas públicas. Es pertinente identificar que el resultado del ISCE da cuenta del progreso, desempeño, eficacia y ambiente escolar, parámetros que a su vez tienen cierta relación con la gestión del docente en relación al contrato didáctico. Entonces, es posible conjeturar que es necesario estudiar, resignificar y proponer estrategias metodológicas que atiendan las prácticas pedagógicas y su relación con el saber matemático en aula.

1.3.3. Aspectos socioculturales de la geometría espacial

En la actualidad se están realizando esfuerzos por considerar e integrar lo sociocultural con los saberes académicos en las aulas de clase. Para ello, es oportuno y necesario el concebir a la educación matemática bajo el rigor científico, y paso seguido, abordar los requerimientos de índole sociocultural dentro un currículo que considere concepciones de la realidad, y por tanto del espacio, en el aula de matemáticas. Pensamos que desde esta postura un docente reflexivo puede apuntar a prácticas de aula que propicien un mejoramiento continuo que impacte significativamente la clase. Brown, Ell, Sáenz-Ludlow & Zellweger (parafraseados por Gallardo, J., y Quintanilla, V. 2016) piensan que “los procesos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas transcurren en entornos esencialmente interpretativos, donde los alumnos y el profesor son intérpretes de una actividad matemática, propia y ajena, mediada por un contexto social y cultural”. (p.626).

El valor de la interpretación dentro del aula de clase toma gran importancia para cada uno de los participantes presentes en el proceso de educativo. Por un lado está el docente, quien pone a disposición de la clase y con una intencionalidad determinada, una serie de elementos tanto curriculares como didácticos. Por otro lado, está el estudiante quien interactúa con el profesor y con sus demás compañeros haciendo uso de sus conocimientos previos, creencias, costumbres e intereses. Los saberes puestos en aula entonces discurren como acuerdos que surgen en un diálogo de significados de la realidad, es decir, en un diálogo de interpretaciones de su entorno sociocultural. De acuerdo con Valero (2012): “La manera como los estudiantes pueden llegar a tener competencia sobre cualquier noción depende de cómo se desarrolla una cadena de actividades e intercambios en la que el maestro y estudiantes negocian el significado de tal noción” (p.190).

Entonces, pensamos que las nociones de espacio que traen los alumnos al salón de clase pueden jugar un papel relevante en construcciones geométricas del espacio o modelaciones, en tanto que los participantes del aula entren a negociar sus concepciones matemáticas. Ello debido a que los estudiantes pueden dialogar sobre como modelar e incluso mejorar la arquitectura de, por ejemplo, el parque más significativo de su entorno, el templo histórico, el colegio y sus orígenes, su institución educativa, por no mencionar otros aspectos que también pueden enriquecer dichas construcciones. Propuestas que los sujetos del aula pueden sustentar incluso haciendo uso de contenidos matemáticos como las simetrías y/o las razones, en particular la razón áurea. Objetos matemáticos que suelen ser utilizados en la arquitectura, arte, biología, etc., para estudiar o crear modelos matemáticos de estructuras artificiales o naturales; estructuras que usualmente son consideradas de gran importancia y belleza para diversas culturas. Es en ese sentido que, las

simetrías, como se menciona en líneas anteriores, en el currículo nacional se propone el estudio de transformaciones de isometría (simetrías). Y aunque la razón se plantea para diversos grados no es así para la razón áurea (ver 1.3.2); la cual proponemos, que al igual que las simetrías, son objetos matemáticos que permiten concatenar modelos geométricos con aspectos socioculturales de diversas estructuras del entorno de los escolares. Ello quiere decir que es posible buscar concatenaciones entre las estructuras artificiales o estructuras naturales con las simetrías o con la razón áurea o con ambas presentes en un modelo geométrico 3D. En este trabajo, proponemos simetrías y razón áurea como dos objetos matemáticos escolares de los cuales pueden hacer uso los estudiantes para dar solución a un problema abierto de geometría 3D. Es decir, en tanto que problema abierto dichos modelos deberían tener la posibilidad de ser construidos o explicados con diversos objetos matemáticos, en este caso por simetrías o por medio de razón áurea o ambas. Como se menciona líneas atrás, las simetrías y la razón áurea suelen emplearse por diversas culturas para dar cuenta de estructuras naturales o artificiales que usualmente se consideran hermosas. Además, de propiciar posibles aportes a la competencia de resolución de problemas en geometría 3D en el aula, requeridos como se menciona en las siguientes líneas.

Desde un enfoque internacional el resultado de las pruebas TERCE (Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo), publicado en el 2016, para grado sexto Colombia es similar al promedio establecido como referencia de 700 puntos, donde el tipo de preguntas aludieron al reconocimiento de objetos y elementos, solución de problemas simples y solución de problemas complejos. A su vez, lo geométrico se enfoca en la geometría plana y solo aborda lo espacial por medio de cubo, prisma y cilindro. Aunque tocan las transformaciones lo hacen también en el plano.

Así mismo, el TERCE indica la pertinencia de considerar las características del entorno social y económico, lo rural o urbano como elementos que influyen en los resultados de las pruebas, y por tanto han influido en los procesos de aprendizaje.

1.4. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En el año 2005 Alan Bishop publicó su libro titulado *Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática*, y en el capítulo 6 denominado *Las Respuestas a la Exigencia de Efectividad en la Enseñanza de las Matemáticas*, respecto a las investigaciones teóricas en educación menciona la pertinencia de que las investigaciones teóricas se enfoquen en los problemas y preguntas que presentan los profesores en su práctica. Resaltamos el apunte de Bishop en el sentido que en dicha década reciente, y dentro de los diferentes enfoques de investigación, propone a los investigadores una mirada a las prácticas de los docentes en su aula pensada desde las experiencias e interrogantes mismas de los profesores.

Ello porque los docentes continuamente se encuentran en el marco de diversas situaciones problemas en lo relacionado a la enseñanza de las matemáticas, generándose una serie de interrogantes que bien pueden tener respuesta dentro de los conocimientos de contenido, de los conocimientos didácticos o tal vez el mismo docente no encuentra respuestas y requiere de referirse a investigaciones recientes y reflexionar su práctica.

Es muy posible que en la actualidad así como sucedía en el 2005, se encuentren docentes pertinentemente formados, pero que a su vez adolecen de prácticas en el aula que redunden en la

participación activa de los estudiantes en las construcciones de conocimientos. Acorde con lo anterior Desforges y Cockburn (1987) citados en Bishop, A. (2005. p.98) encontraron como resultado de su investigación sobre docentes:

Se trataba, sin duda, de profesores cualificados. Aun así, se quedaban cortos frente a un aspecto importante de las aspiraciones de los educadores matemáticos, aspiraciones a las que ellos mismos les otorgaban total énfasis y adhesión. ¿Cómo surgió este fracaso relativo? ¿porque hubo tanto trabajo de papel y lápiz y tan poca investigación significativa? ¿por qué hubo tan poca discusión entre profesor y alumno y entre alumnos? ¿por qué hubo tan poco trabajo de diagnóstico? ¿Por qué estuvo el currículo tan dominado por esquemas de matemáticas formales y tan poco influido por los intereses espontáneos de los niños? ¿por qué profesores que tienen una visión tan elaborada del pensamiento de los niños asignan a sus alumnos, en tanto aprendices, papeles pasivo-receptivos o les permiten adoptar dichos papeles? (p. 125)

De lo anterior, se puede observar que con las interrogantes planteadas por estos investigadores no solo se está destacando los conocimientos de contenido y sobre las formas como aprenden los alumnos, considerados como pertinentes y, que para la fecha poseían los docentes de matemáticas, sino que además subyace un modelo o método de enseñanza presente en las aulas el cual se puede calificar aun como de carácter tradicional.

Así mismo, en el 2002 encontramos que Evelio Bedoya, dentro de las conclusiones de su tesis doctoral *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*, expone como una de las conclusiones la necesidad de enfatizar en cuestiones relativas al conocimiento didáctico y análisis didáctico relacionados a los contenidos matemáticos.

Ello en cuanto al papel que juega la formación inicial recibida por el docente, y de que las prácticas del docente en ejercicio, suelen estar intrínsecamente ligadas a la formación del mismo y al tipo de prácticas en las cuales se han enmarcado sus experiencias. Al respecto:

Las concepciones de los estudiantes para profesor sobre la enseñanza del contenido matemático, sobre la estructura conceptual y el conocimiento matemático escolar, sobre los errores y dificultades, sobre la evaluación y otras cuestiones didácticas están basadas fundamentalmente en sus propias experiencias como estudiantes de secundaria y universidad y en sus creencias, intuiciones y opiniones al respecto. (Bedoya, 2002, p.433)

De ello es posible derivar cuestionamientos como ¿la formación en conocimientos didácticos y análisis didáctico aportarán a unas prácticas de aula del docente que propendan por otorgar papeles más activos a sus estudiantes?

Entendiendo que otorgar papeles activos a los estudiantes en el aula, y gestionados por el docente, posiblemente puede favorecer unas prácticas que redunden en una mayor comprensión de los contenidos matemáticos propuestos, en tanto que discurran en un marco dialógico de relaciones microsociales. Así por ejemplo, un gran número de propuestas curriculares reconocidas vienen planteando, de un tiempo acá, la importancia de la enseñanza de la matemática basada en la comprensión. Propuestas que promueven que los estudiantes, por ejemplo en microsociedades, sean protagónicos en la generación de sus soluciones, sus diálogos, convalidando sus argumentos, construcciones, etc. Acorde con lo anterior, Carpenter, Franke & Levi (2003) citados por National Council of Teachers of Mathematics (2015) exponen:

Los estudiantes que aprenden a articular y justificar sus propias ideas matemáticas, a razonar mediante explicaciones matemáticas propias y ajenas y a ofrecer una exposición razonada de sus

respuestas, desarrollan una comprensión profunda que resulta fundamental para su éxito futuro, tanto en las matemáticas como en áreas relacionadas. (NCTM, 2015, p.31)

De ello deriva la pertinencia por cuestionar las prácticas del profesor en el aula, y el cómo puede un profesor en formación o en ejercicio llegar a resignificarlas, en términos de favorecer la experiencia comprensiva de los contenidos por parte de los alumnos en la microsociedad del aula de matemáticas. Al respecto, investigadores en didáctica de las matemáticas, y en particular en la formación docente, proponen algunas vías de acercamiento. Es el caso del modelo propuesto por Schoenfeld denominado the teaching for robust understanding framework (TRU)¹. En esta propuesta se le da un papel central a la gestión del docente que favorece las prácticas comprensivas de los estudiantes, es decir la relación dinámica del alumno con el contenido. En particular, se graban en video y observan las gestiones de tres clases de distintos docentes poniendo la mirada en el papel dado a los estudiantes. Papel que, de acuerdo a TRU, discurre en términos de sus relaciones con las siguientes cinco dimensiones: el contenido; los requerimientos cognitivos; acceso equitativo al conocimiento; agenciar, apropiar y dotar de identidad; evaluación formativa². Se observa que solo una dimensión está centrada en los contenidos matemáticos, y las otras cuatro en las prácticas propositivas de los estudiantes, en el marco de una gestión microcurricular pertinente por parte del docente.

¹ “la enseñanza para la estructuración de una comprensión robusta” (Traducción realizada por Arcila J. & Manzano, J., 2018).

² Traducción realizada por Arcila, J. y Manzano, J. (2018) de: “The five dimensions of powerful classrooms: the content, cognitive demand, equitable access to content, agency, ownership and identity, formative assessment” (Schoenfeld, 2017, p.3).

Sobre TRU, Schoenfeld (2017) enuncia que: *“If one or more of the dimensions in Fig. 1 are not well represented in classroom activity, students will not emerge from that classroom as knowledgeable and flexible thinkers and problems solvers; if all are well represented, students will”*³ (p.2). Indicando así, en el marco de TRU, la pertinencia de que los estudiantes den cuenta de las cinco dimensiones en el aula, y de la necesidad de una formación docente o resignificación de las prácticas docentes que propendan por dar un papel más activo a los estudiantes en su actividad microsocial de conocer. Pero ¿Cómo abordan la formación docente, Schoenfeld y su grupo de investigadores? Comencemos diciendo que Schoenfeld propone que TRU más que ser una herramienta es una perspectiva, y que proporciona al docente de un lenguaje que le permite problematizar su instrucción en el aula en términos de por ejemplo ¿Cómo me va en esta dimensión? ¿Cómo puedo mejorar?

Como se menciona líneas atrás, Schoenfeld propone lograr la formación docente vía grabaciones en video de algunas clases, y reflexiones en comunidades de docentes e investigadores realizadas sobre segmentos de las mismas. Previo a la visualización de los videos, los docentes cuentan con una serie de cuestiones que les permite poner su mirada sobre aspectos en los cuales se muestra un papel activo o no del estudiante, el cual es propiciado por el docente. Cuestiones como: ¿Quién genera las ideas que se discuten? ¿Quién evalúa y/o responde las ideas de los demás? ¿Cómo responde el maestro? ¿Qué tan profundamente pueden los estudiantes explicar sus ideas? ¿Quién es el público, el maestro o los compañeros estudiantes? ¿Qué estudiantes son invitados a la conversación? Por último, es de anotar que estos investigadores hacen uso de diversas sesiones,

³ *“Si una o más de las dimensiones de la figura 1 no están bien representadas en las actividades del aula, los estudiantes no logran surgir como conocedores, pensadores flexibles y resolutores de problemas; si todas están bien representadas, si lo logran”* (Traducción realizada por Arcila J. & Manzano, J., 2018).

así como herramientas durante el análisis de la clase, y que más que análisis de tipo evaluativo de las prácticas del docente en el aula lo proponen para la formación de docentes. Es decir, en esta perspectiva, la formación docente se logra propiciando comunidades docentes, que reflexionan sobre sus clases en videos, con el uso de unas problemáticas y referentes estudiados o presentes en las teorías, pero también estrechamente relacionadas con las propuestas curriculares locales, nacionales, etc., presentes en su aula.

El uso de videos lo retomamos en la metodología de esta investigación, en tanto que una de las formas empleadas para la sistematización de experiencias consiste en grabar videos de la gestión de clase por parte de los docentes en el aula (ver 3.1. Lineamientos metodológicos). Por otro lado, en España en años anteriores, en un trabajo denominado *Los Videos como Instrumento Metodológico en la Formación Inicial de Profesores*, investigadores como Llinares, S. & Sanchez, V. (1998) también hicieron uso de la grabación y reflexión sobre videos de la gestión de clase, como parte de la formación de docentes. A su vez, como una forma de hacer visibles teorías implícitas o explícitas implementadas por los docentes en el aula.

Trasladándonos a la fecha actual, y al caso de las aulas de matemáticas en Colombia, cabe preguntarse cuántas de estas interrogantes tienen vigencia en tanto que problemáticas presentes en las prácticas de los docentes y que se pueden identificar como aun no resueltas. Es a partir de la década de los 90 cuando en Colombia se comienzan a realizar propuestas que permitan repensar el modelo tradicional de enseñanza, por unas propuestas que entregan un papel activo a los estudiantes en la construcción de conocimientos. Reflejando entonces la necesidad que los docentes de matemáticas reflexionemos sobre dichos cuestionamientos, e incluso los

problematicemos y generemos o propongamos otros; pertinentes a los cambios que se presentan en el siglo XXI y que a su vez consideren los aspectos del entorno sociocultural de los educandos. Ello con miras a una aproximación hacia un modelo de aula de matemáticas considerada como un micromodelo de la sociedad, que denominaremos microsociedad, y en el cual se forma al estudiante para la sociedad.

Paso seguido, nos remitiremos a la forma como se concibe un modelo de aula de matemáticas en los referentes curriculares en Colombia. Entre ellos encontramos los Lineamientos Curriculares de matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje v.2, Matriz de Referencia de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas , Guía Metodológica Evaluación Anual de Desempeño Laboral Docentes y Directivos Docentes ley 1278 de 2002 actualmente vigentes, así como también otros autores que han investigado sobre la educación en nuestro país. En relación al papel del docente en los Lineamientos Curriculares (1998) encontramos:

El profesor debe pues simular en su clase una micro sociedad científica, si quiere que los conocimientos sean medios económicos para plantear buenos problemas y para solucionar debates, si quiere que los lenguajes sean medios de dominar situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas.

Pero debe también dar a los alumnos los medios para encontrar en esta historia particular que les ha hecho vivir lo que es el saber cultural y comunicable que ha querido enseñarles. Los alumnos deben a su turno redescontextualizar y redespertar su saber con el fin de identificar su producción con el saber que se utiliza en la comunidad científica y cultural de su época. (p. 15)

Ello permite determinar que el docente de matemáticas deberá tener en cuenta, en su metodología o ejercicio de la clase, aquellos aspectos propios de las interacciones entre alumnos y del docente con los estudiantes. Lo anterior, en función de propiciar, por parte de los estudiantes,

la acción o ejercicio de crear, formular, construir modelos y comprobar dichos modelos entre otras, así como el que los estudiantes comuniquen sus constructos o ideas matemáticas con el uso del expresiones pertinentes matemáticamente hablando. Es pertinente que el docente diseñe o implemente actividades o situaciones problema que fortalezcan la microsociedad en términos de que los estudiantes al dar solución a los mismos, estén poniendo en juego saberes, estrategias competencias que requieren en la sociocultura a la cual pertenecen; ello para que el salón se proponga como un espacio dialógico de construcciones matemáticas y de determinaciones de sentido.

Pensar el aula de clase como una microsociedad conlleva a reflexionar sobre los objetos de conocimiento que pueden circular en el salón. Una microsociedad tendrá también unas reglas, acuerdos valores sociopolíticos puestos en juego en el aula de clases. Entonces el docente, en educación matemática, que se plantea una metodología de enseñanza deberá considerar el papel formador de un sujeto político que tiene dicho espacio matemático. Un sujeto que se cuestiona y puede dar cuenta o comunicar argumentos a favor o no de ciertas decisiones que se tomen en la microcultura de la microsociedad, y por extensión se estaría formando para vivir las matemáticas en su papel socio político como ciudadano participativo. Ello se deja ver en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) en:

Agrega a las demás funciones de la formación matemática una nueva función política: la preocupación por la formación en valores democráticos y por el ejercicio de la ciudadanía crítica. Por lo tanto, es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos. Para lograrlo hay que hacer énfasis en los actos comunicativos, de tal suerte que se le permita al grupo deliberar sobre las razones o la falta de ellas, sobre las

conjeturas, opiniones o juicios y sobre las ventajas o desventajas de las posibles decisiones que deban tomarse dentro y fuera de la clase y que tengan resonancia colectiva. (p.48)

Con el propósito de intentar dar cuenta de una Propuesta Microcurricular que considere los anteriores puntos de cuestionamientos, proponemos a continuación una caracterización teórica.

2. CAPÍTULO

MARCO TEÓRICO

2.1. Marco Teórico

El marco teórico de este trabajo de investigación considera cuatro dimensiones teóricas, las cuales son: la dimensión epistemológica, la dimensión matemática, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. En conjunto, estas dimensiones constituyen una directriz para abordar los objetivos planteados en líneas anteriores, y guiaran la propuesta metodológica de investigación a llevarse a cabo. También, realizamos una mirada general a lo curricular, por un lado desde una visión de currículo integrado, así como a lo que entendemos como sociocultural; y por el otro, se caracteriza el macro, meso y microcurrículo, identificando posibles aportes, que realiza esta investigación, al meso y microcurrículo (Anexo B). Y paso seguido, presentamos una propuesta microcurricular de tipo sociocultural y que se estructura a partir del análisis didáctico.

Antes de iniciar la descripción de cada una de las dimensiones, es pertinente mencionar que en ellas se abordan elementos que intentan aproximar un estudio del papel que desempeña una metodología o propuesta de enseñanza de clase diseñada e implementada por el docente de matemáticas. El cual se propone resignificar, implementar e interpretar un micro currículo desde un *enfoque sociocultural* en su aula de clase, y apoyado en el uso de TD como lo es el Ambiente de Geometría Dinámica Geogebra 3D.

Proponemos que este trabajo se inscribe en el *enfoque sociocultural*. Ello en el sentido que entendemos el aula como una microsociedad con sus propias evoluciones socioculturales, en la cual cobra mucha relevancia las intersubjetividades de los participantes del salón de clases, y con estrecha relación con la macrocultura en la cual se inscribe relativa a la institución educativa, la región, el país, etc. También, las propuestas microcurriculares realizadas por el docente⁴ como las unidades didácticas, etc., consideran la generación o evolución del conocimiento en el aula, en el sentido Vigotskiano, como un constructo que se da en el marco de las intersubjetividades, y de las mediaciones producidas por sistemas semióticos, artefactos como geogebra, etc. O como lo propone Radford⁵ el conocimiento surge como las objetivaciones realizadas por los sujetos, en este caso en el aula. En esa dirección, es pertinente para el docente el hacer uso, reflexionar e incluso resignificar las cristalizaciones o conocimientos didácticos producidos por la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, así como sus propias prácticas. Conocimientos que le permiten por ejemplo, a través del análisis didáctico vía los organizadores locales del currículo O.L.C, el realizar concatenaciones inextricablemente relacionadas al contexto, entre: los conocimientos de contenido matemático; errores y dificultades asociadas a dichos contenidos; relaciones en el aula entre los contenidos matemáticos, estudiantes y docente; el papel de las creencias de los sujetos, en particular las del docente en relación a la enseñanza aprendizaje, etc., todas ellas convergiendo en objetivaciones de por ejemplo unidades didácticas para el aula.

⁴ En este punto es pertinente mencionar que, aunque en este trabajo de investigación se hace uso de los términos docente, maestro, profesor, etc., los mismos los estamos entendiendo más próximos a *maestro*. Ello en el sentido que en el aula (taller) convergen sujetos, artefactos entorno a actividades y surgen unas creaciones denominadas *objetivaciones*. Es decir, pensamos que en el espacio del aula se constituyen las microsociedades, las cuales gravitan en torno a unas actividades. Y es en el marco de los diseños, gestiones y evaluaciones microcurriculares realizadas, por el sujeto denominado maestro, que los estudiantes objetivan unos conocimientos y discurren en imbricaciones que aportan a sus conformaciones como sujetos.

⁵ Ver la dimensión didáctica del presente trabajo de investigación.

También, los organizadores locales del currículo, enriquecen las objetivaciones de unidades didácticas en cuanto que en las propuestas del docente para el aula, convergen las decantaciones producto del análisis didáctico, tanto curricular como socioculturalmente. Es decir, en las unidades didácticas propuestas en este trabajo se plantea a los participantes del aula la resolución de problemas abiertos vía modelación geométrica 3D con geogebra 3D. Dichos modelos están relacionados con legados de conocimientos culturales que tienen las comunidades de su sector, en este caso las comunidades de la I.E. Moderna y la I.E. Jovita Santacoloma.

Dado al enfoque sociocultural del presente trabajo es pertinente aproximar respuestas a lo que entendemos como sociocultura. Veamos.

2.1.1. Aspectos Socioculturales

Iniciamos la aproximación a los aspectos socioculturales en el aula de clase, primero explorando que entendemos por lo sociocultural en el aula. En algunos diccionarios definen cultura como el *“conjunto de modos de vida y costumbres, conocimientos y grado de desarrollo artístico, científico, industrial, en una época, grupo social, etc”*. También expone sobre lo social, que proviene del latín *socialis* y corresponde a lo *“perteneciente o relativo a una compañía o sociedad, o a los socios o compañeros, aliados o confederados”*. De lo anterior, se puede entender y dar una aproximación a la sociocultura como la referida a todo el conjunto de dimensiones o aspectos relativos a los constructos de tipo simbólico, científico, tecnológico, cognitivo, funcional, ideológico, creencias, etc., que le dan identidad a una comunidad de personas, y a la vez rigen los

modos de vida y costumbres, pero permite que dichas costumbres y modos evolucionen. Es decir, la cultura es dinámica.

Aunque expresar conjunto puede llevar a significar erradamente a la sociocultura como si esta fuera la suma de las partes. Es decir, ello puede inducir a creer que es posible hacer la separación entre los grupos de personas y todos aquellos aspectos que les rodea y que generan precisamente esa identidad como sociedad, la cual se llama cultura.

Los aspectos socioculturales que determinan a los grupos humanos son inseparables de los grupos mismos y la forma como estos emergieron a través de la secuencia evolutiva. Por un lado, en las etapas iniciales con las agregaciones grupales de los Australopítec, Pitecántropos y los Neanderthales, y como resultado de la evolución que les preparó adaptaciones como caminar erguido, y otras adaptaciones anatómicas surgen algunas formas de comunicación incipiente en principio, el uso de herramientas rudimentarias y la colaboración en el trabajo (Leontiev, 1969). Con ellos se observa el nacimiento de unas características relacionadas con el sentido gregario, las cuales son las bases de la sociocultura.

Y en segunda instancia, con la aparición del Homo sapiens se observa una complejización progresiva de las relaciones de los sujetos gregarios en términos de las formas de participar en trabajos o actividades, en las diversas formas simbólicas o lenguajes de comunicación. E incluso en la actualidad en las formas de iniciar la exploración para cambiar el ritmo y dirección de la evolución biológica a través del manejo de los genes. Es de anotar que, con el homo sapiens se

observa un gran incremento en las modificaciones y complejización de los aspectos socioculturales, mientras que los biológicos tuvieron una tasa de variación menor. Es decir, con “*la hominización, como proceso que implica importantes modificaciones en la organización física del hombre, concluye con el advenimiento de la historia social de la humanidad*” (Leontiev, 1969, p. 6).

Entonces vemos dos formas de evolución, una de tipo biológica y otra de tipo sociocultural. Y en el *homo sapiens* moderno convergen todas las características biológicas y socioculturales acumuladas y delegadas de generación en generación. Por tanto, este está preparado a su vez para ser actor de dicha *evolución sociocultural* e identificar sus características en las agregaciones de sujetos, dado que ya han sido fijadas en su herencia sociocultural.

Las adquisiciones acumuladas durante la evolución se han transmitido de generación en generación, que era lo único que podía asegurar la continuidad del progreso histórico. Y esas adquisiciones han sido, por lo tanto, fijadas. Pero si ello no pudo ocurrir bajo la acción de la herencia biológica, como ya vimos, ¿de qué modo puede explicarse la fijación? Pues porque se produjo de una manera absolutamente nueva, que apareció por primera vez con la sociedad humana. (Leontiev, 1969, p.6)

En los párrafos anteriores, expresamos lo que entendemos como sociocultura de forma general. Ahora bien, con el fin de aproximar el como el docente de matemáticas posiblemente puede entender los aspectos socioculturales asociados a su clase, y que derivan de sus estudiantes, es pertinente tratar de acotar que puede entender un profesor como la sociocultura inherente a sus estudiantes. Y por último, esbozar el papel indisociable que juega la sociocultura, la matemática y la metodología de clase que el docente emplea en sus aulas, el cual desarrollaremos más adelante

en el apartado denominado Propuesta Metodológica de Clase o Propuesta Microcurricular. Indisociable en el sentido que no es posible separar la cultura de las formas como se relacionan o interactúan los sujetos, por ejemplo entorno al abordaje de un conocer un conocimiento. Máxime en un aula que propende por considerar, de forma reflexiva por parte del docente gestor, lo sociocultural como uno de los aspectos de la clase.

El pensar en la actividad reflexiva del docente en relación a los aspectos socioculturales de su aula, puede afirmarse que se puede dar con cierta naturalidad en tanto que él mismo hace parte de la cultura. Natural no implica que no requiera de afianzar sus reflexiones en investigaciones pertinentes. Ello, porque como afirma Leontiev (1969) refiriéndose a la aparición y desarrollo de la cultura en los grupos humanos, *“las generaciones desaparecen y se suceden, pero lo que crean pasan a las siguientes, que, a su vez, multiplican y perfecciona la herencia de la humanidad”* (p.9). En este caso dicha herencia se refiere a la cultura de una sociedad.

Lo anterior, lleva a pensar en que una propuesta en la cual dicho profesor reflexiona sobre la cultura aisladamente de la misma sería un desatino. Es más bien, porque la evolución cultural de muchas generaciones lo ha preparado para dicha reflexión sobre la sociocultura, desde la sociocultura y como sujeto que está dentro de tal sociocultura.

Entonces, el docente que reflexiona sobre los aspectos socioculturales del aula, no está haciendo otra cosa más que siendo sujeto de una cultura que evoluciona y que estará potenciando la evolución sociocultural de la microsociedad formada por los actores presentes en el aula. En este

punto entendemos el reflexionar como una actividad que no se puede separar de la acción en las prácticas del aula. Así, de acuerdo con la cita anterior de Leontiev las generaciones se comparten el legado cultural, podemos entonces afirmar que la generación de estudiantes está apropiando y transformando un legado sociocultural. Entonces, es pertinente para el docente, que por ejemplo a través de una relación dialógica maestro estudiantes, genere una comprensión sobre las negociaciones de significado que tienen los estudiantes sobre los aspectos socioculturales que caracterizan al grupo y su entorno. Veamos.

Los alumnos tienen unas nociones o concepciones sobre diversos aspectos socioculturales. Mencionando algunos de ellos: a) respecto a su entorno físico pueden describir la *topología de la región* cercana y algunas veces un entorno geográfico más abierto; b) descripciones de *grupos* de personas, o pueblos y su historia, relacionadas con aquellas características o roles que puede observar e influyen en él a la hora de decidir hacer parte de equipos deportivos, equipos de trabajo escolar, grupos con los cuales disfrutar de actividades lúdicas, etc. Inherente a muchas de las decisiones que los escolares suelen tomar está el hecho de que estas están mediadas por los rasgos de creencias o axiológicos del entorno sociocultural, o tienen que ver con los tipos de saberes, que posee el sujeto a la hora de jugar un papel como parte de un grupo social.

También, c) es posible observar en los grupos de escolares el uso de diversos *juegos de lenguaje*, en los cuales reconocen de forma explícita o implícita el papel que tiene el otro a la hora de compartir y construir significados. Respecto a los juegos de lenguaje Wittgenstein (1988), citado por Granes, J., Caicedo, L. & Morales, M. (n.d), que afirma:

Cada juego se práctica en un contexto de comunicación y acción que le es propio. Un juego, con su conjunto particular de signos y reglas implícitas y explícitas, puede carecer totalmente de sentido si se traslada a un contexto de comunicación distinto de aquél para el que fue construido. (p. 7).

Los estudiantes también d) pueden expresar, reconocer o dar cuenta de forma nocional o conceptual del *papel que juega la tecnología* en sus vidas. Por mencionar un ejemplo, el uso de celulares en términos de conformación de grupos sociales, en la posibilidad de acceder a constructos de conocimientos puestos en la red. Ello no reemplaza la concepción que pueden tener de otras tecnologías, como el cuaderno, más bien las pueden llegar a resignificar. Así mismo, e) es posible que en algún momento de sus vidas los escolares hayan tenido acceso a películas, documentales, etc., sobre los *avances científicos* y posibles conexiones con los avances tecnológicos, económicos, sociales, políticos entre otros, observados a lo largo de la historia de la humanidad.

Todos estos significados negociados por los grupos sociales, que en este caso está conformado por los estudiantes, y tal vez otros no mencionados se pueden revelar a un docente reflexivo en un aula de clase pensada socioculturalmente. Y por tanto, pueden hacer parte de la forma como el maestro puede significar los aspectos socioculturales en su aula de matemáticas.

2.1.2. Dimensión epistemológica

Los salones de matemáticas son espacios donde se producen encuentros de estudiantes y docente en relación a un conocimiento puesto en juego, dentro de una triada relacionada didácticamente. Es pertinente resaltar que la anterior es una simplificación de las relaciones que se producen, dado que también interviene el contexto sociocultural, metas y creencias de los sujetos, así como los espacios, tiempos, medios (contextos, materiales y recursos), actividades de aprendizaje, el currículo, entre otros. A continuación, centraremos el interés en realizar una mirada más cercana al docente en tanto que su rol en el aula, y que es quien gestiona la metodología de clase en el salón de matemáticas.

La actividad o metodología de clase del docente esta mediada por una serie de prácticas que pueden tener relación con la apropiación que el mismo tiene de investigaciones en educación. O puede ser el fruto de una serie de experiencias que él ha acopiado, e implícita o explícitamente validado, durante su práctica y a su vez ha reinterpretado a la luz de los conocimientos que tiene sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Las propuestas de clase que el docente de matemática realiza en su aula suelen contener tanto conocimientos prácticos como los validados en investigaciones a través de marcos teóricos. Así, en relación a la enseñanza de las matemáticas esta

Tiene los rasgos epistemológicos básicos de una actividad científica, ya que inicia y desarrolla en los jóvenes sus capacidades para explicar, predecir y controlar los fenómenos naturales, físicos y sociales mediante el conocimiento y empleo de una familia de procedimientos y estructuras formales (Bedoya, 2016, p.6).

Así, para un investigador o docente reflexivo, que quiere realizar un zoom sobre la metodología de clase, puede ser pertinente dar respuesta al siguiente cuestionamiento: ¿Cuáles son las componentes o dimensiones, conocimientos o competencias que deben ser inherentes al docente de matemáticas, y que a su vez convergen en la metodología de clase (microcurrículo) que este explicita en sus prácticas de aula? Entendiendo como componentes aquellas variables didácticas, aspectos, competencias que hacen parte del sujeto denominado profesor, o que son relativas al papel del docente en el aula de clase; si bien se habla de componentes éstas se encuentran integradas entre sí. A continuación acercamos una respuesta.

Iniciamos proponiendo tres componentes, que consideramos, deben ser parte de la formación profesional del docente, y que en la práctica se pueden visualizar en la forma como este gestiona el microcurrículo. Las tres no aisladas, sino consideradas como inextricablemente ligadas con conocimientos sobre la sociocultura relativa al aula y el entorno de los sujetos del salón. Ellas son:

- a) Conocimientos de Contenido Matemático (*ampliado en el ítem 2.1.2.1.*)
- b) Conocimientos de la Disciplina Didáctica de las Matemáticas & Análisis Didáctico (*ampliado en el ítem 2.1.2.2.*)
- c) Metas y creencias (que tiene el docente, por ejemplo respecto a cómo enseñar o como aprenden los alumnos, etc.) (*ampliado en el ítem 2.1.2.3.*)

Si bien presentamos las componentes en cierto orden, ello no necesariamente alude a que unas sean más relevantes que otras dado que se considera que hacen parte del sujeto, y por tanto se

puede observar más una integración no fraccionada de ellas a la actividad profesional del docente, que un orden jerárquico.

Seguidamente, exponemos cada componente y su papel dentro de la metodología de clase que el docente implementa en su práctica.

2.1.2.1. Conocimientos de contenido matemático

Comenzamos identificando el modelo MKTS, derivado del modelo MKT (Mathematics Teacher's Knowledge), desde el cual abordamos el conocimiento de contenido matemático. Dinazar, I., Escudero, E., Flores-Medrano, E., Nuria, C., Carrillo, J., Contreras, M., Montes, M., Aguilar, A & Rojas, N (2014) definen su propuesta MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) de la siguiente manera:

El MTSK es un modelo analítico que considera al conocimiento especializado del profesor de matemáticas como un cúmulo que contempla conocimientos de distintas naturalezas.

Considera dos dominios de conocimiento provenientes de Shulman (1986, 1987): el dominio de Conocimiento Matemático y el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido. Además, se caracterizan tres subdominios de distinta naturaleza para cada uno de los dominios. (p.1861)

En primera instancia, el termino dominio lo entenderemos como componente, y por tanto un subdominio puede verse como un subcomponente. Y en segunda, se dice conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK, y no MKT como lo proponía Shulman en su

modelo, en el sentido que el docente debe dar cuenta tanto de los objetos matemáticos, sus operaciones, relaciones y transformaciones en por ejemplo una solución a un problema propuesto por uno o varios estudiantes, sino que además puede dar cuenta, en algunos casos requiere hacerlo en acto y de forma reflexiva, sobre el posible pensamiento que su alumno está realizando durante la resolución de dicho problema. Ello dice que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas es un conocimiento “que no es un conocimiento matemático en si” (Dinazar et al., 2014, p. 1865), sino más bien que es un conocimiento que conjuga los contenidos matemáticos con unas estrategias de pensamiento continuo, dinámico y reflexivo por parte del docente sobre su gestión de aula; en relación a las formas como los estudiantes están construyendo o compartiendo el conocimiento y las formas como las intervenciones dialógicas del docente direccionan dichos conocimientos.

A continuación, la componente de Conocimientos de Contenido Matemático del MTSK propone la existencia de los siguientes tres subcomponentes.

- *Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)*: conocimiento de conceptos, procedimientos, fenomenología y fundamentación teórica del tema. E incluso es posible anexar el conocimiento del campo de problemas de tipo real y realistas asociados a un concepto.
- *Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM)*: sobre el contenido matemático en las conexiones, asociado con visualizar generalidades en lo simple, dar cuenta de forma simple de contenidos complejos.

- *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*: conocimiento matemático de tipo sintáctico. Ejemplo, de ello es saber que es demostrar, que es definir, construir contraejemplos, etc.

2.1.2.2. Conocimientos de la Disciplina Didáctica de las Matemáticas & Análisis Didáctico

En el apartado anterior, se afirmó que a partir del modelo MKST es posible considerar los conocimientos matemáticos de contenido y los conocimientos didácticos de contenido como conocimientos que deben estar presentes en la estructura profesional del docente de matemáticas, cuando gestiona la clase de matemáticas. En este espacio nos centramos en determinar como el MKST aborda los segundos, y estudiar la propuesta que hace la disciplina Didáctica de las Matemáticas al respecto.

El modelo MKST propuesto por Dinazar et al. (2014), afirma que el Conocimiento Didáctico del Contenido se corresponden con los siguientes tres subcomponentes:

- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMH)*. Alude a conocimientos que den cuenta de las formas como los estudiantes aprenden.
- *Conocimiento de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*: como ejemplo, el conocimiento de la generalización habitual de los estudiantes del procedimiento estándar para sumar fracciones de distintos denominadores a otras operaciones con fracciones de distinto denominador.

- *Conocimientos de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS) (p.1886).

Afirma que el docente de matemáticas requiere de tener cierto dominio sobre las diversas propuestas curriculares, así como las formas de evaluar el conocimiento.

A partir de las subcomponentes anteriores, es posible enunciar que estas se relacionan con el dominio que debe tener un docente sobre los procesos de enseñanza, las formas como aprenden los estudiantes en relación a otros sujetos y al conocimiento mismo. Proponemos también que, con el uso reflexivo, investigativo y propositivo que realice de diversos referentes curriculares y teorías de la educación matemática que se producen en diversos puntos del orbe. A continuación, abordamos otro enfoque: el de la **Didáctica de las Matemáticas**.

Por otro lado desde la línea, de nivel internacional, de formación de profesores e investigación denominada “Pensamiento Numérico y Algebraico” (PNA) y en relación al tipo de conocimientos o campo de problemas que debe caracterizar la actividad del docente y su formación a la hora de proponer y realizar propuestas curriculares, por ejemplo en el aula, plantea que es a través de la disciplina Didáctica de las Matemáticas, y más específicamente del Análisis Didáctico que se puede dar respuesta a los cuestionamientos sobre cuáles son los conocimientos, habilidades o competencias que debe tener un maestro.

La Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica social, en tanto que responde a problemas de la educación matemática. En términos de Bedoya (2016):

La Didáctica de las Matemáticas se propone delimitar y abordar los problemas que surgen durante los procesos de comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático, indagar metódicamente sobre dichos problemas y, en su caso, proponer soluciones a tales situaciones problemáticas (p.8).

Además, en la línea de investigación PNA se observa que se consideran las matemáticas como producto de construcciones socioculturales. Y que son una forma pertinente de construir o problematizar sobre significados respecto a diversos fenómenos como las tecnologías digitales TD, los avances científicos y en general las diversas facetas relacionadas con el conocimiento humano o como resultado del mismo.

También es pertinente abordar el cómo se concibe al profesor de matemáticas profesionalmente hablando, desde la línea PNA. Como respuesta, se piensa en el profesor formado y que se forma continuamente, con capacidad crítica, de reflexión continua, con conocimientos didácticos, pedagógicos, con conocimientos matemáticos, similares a lo que el modelo MKST denomina conocimientos de contenido matemático. De ello se sigue que el PNA está aproximando a un docente profesional con capacidad de investigación, el cual problematiza e impulsa la búsqueda innovadora de respuestas a situaciones relativas a la educación matemática.

A partir del grupo PNA, Bedoya (2016) propone el modelo de Análisis Didáctico de tipo local, dentro del cual postula deben ser del dominio del docente en formación y en ejercicio: *Conocimiento Didáctico, los Organizadores y modelos organizadores del currículo y el dominio del Análisis Didáctico*. A continuación, determinamos cada uno de ellos y la forma como hacen parte de la formación, reflexión y la práctica profesional del docente reflexivo.

2.1.2.2.1. Conocimiento Didáctico

Sobre el primero, Bedoya (2016) afirma que:

El **Conocimiento Didáctico (CD)** constituye la principal fuente de información y formación didáctica profesional, así como el instrumento que permite al profesor de matemáticas diseñar y desarrollar las distintas actividades de planificación curricular (macro y micro) y unidades didácticas que le competen. En términos generales consiste en el conocimiento producido en la disciplina Didáctica de las Matemáticas. (p. 20)

El Conocimiento Didáctico se relaciona con conocer conceptualmente y generar unas prácticas de análisis sobre: el currículo macro, meso y micro así como el **análisis curricular**; dar cuenta de los fundamentos teóricos que abordan la enseñanza y el aprendizaje, en este caso de las matemáticas, y las diversas formas evaluativas de dichos procesos a través de lo que Bedoya denomina **análisis de instrucción**; un conocimiento del currículo en cuanto a los contenidos y la forma como está organizado relacionada con el **análisis de contenido**; y unos conocimientos relacionados con los aspectos cognitivos propios de los contenidos, lo cual es denominado por Bedoya como **análisis cognitivo**.

También, es posible mencionar, desde la propuesta de Didáctica de las Matemáticas (Bedoya, 2016), que los Conocimientos Didácticos que deben hacer parte del compendio de conocimientos del docente comprenden además otros dominios. Es el caso de la semiótica, las matemáticas realistas y el campo de problemas relacionados con un objeto de conocimiento matemático, la epistemología de cada variable presente en la didáctica, reconocimiento de los contextos y negociación de significados, reconocimiento de materiales, tecnologías disponibles en relación con

contenidos curriculares. Todos ellos convergen en las propuestas curriculares, que puede realizar el docente reflexivo, haciendo uso del Análisis Didáctico y a través de unos Organizadores de Currículo.

2.1.2.2.2. Los organizadores y modelos organizadores del currículo

El modelo local de los organizadores del currículo plantea que un organizador es un tipo conocimiento o “marco teórico-práctico que sostiene el análisis didáctico” (Bedoya, 2016, p.15). Dichos conocimientos son del dominio del docente, permitiéndole dar cuenta de las variables didácticas presentes en un contexto escolar para el cual se ha planteado una propuesta curriculares; y a través del cual el docente puede realizar, reflexionar o repensar curricularmente hablando, unos análisis, diseños, propuestas y evaluaciones de esas propuestas. Pertenecen a los organizadores locales: el análisis conceptual o de contenido, el análisis cognitivo, análisis de sistemas de representación y modelación, y el análisis de tecnologías computacionales. Más adelante, en la propuesta microcurricular generada en el marco del presente trabajo de investigación proponemos que el análisis de los aspectos socioculturales también es un potencial organizador local del currículo.

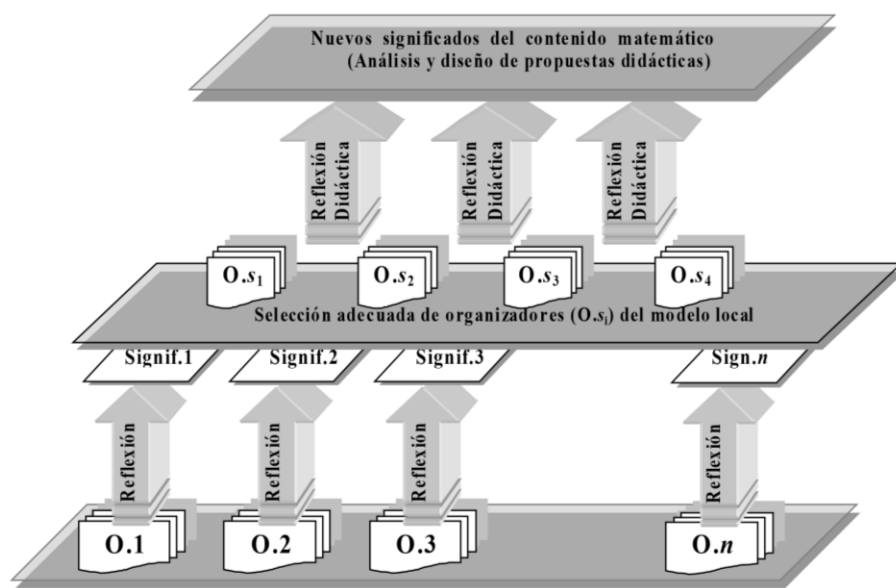


ILUSTRACIÓN 1: *MODELO PARCIAL DE LOS ORGANIZADORES*

Consiste de tres niveles de reflexión o análisis; el segundo corresponde con la selección adecuada de organizadores ($O.s_i$), con base en los cuales se realiza el análisis didáctico dirigido al diseño y planificación de propuestas microcurriculares (Ilustración tomada de Bedoya, 2016, p. 18).

La anterior ilustración 1 muestra un modelo de organizadores en el cual se visualizan tres niveles, los que permiten al docente a través de la reflexión, el seleccionar o generar conocimientos relativos a las variables didácticas sobre las cuales desea enfatizar en sus diseños curriculares. Es decir, toma lo general y lo concretiza reflexivamente en lo local. En forma general, los organizadores según Luis Rico (1997), citado por Bedoya (2016), son:

Aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo. Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y comprensión del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad (p. 15, en cursiva en el documento citado).

2.1.2.2.3. El Análisis Didáctico

Se refiere a la forma ideal de generar diseños curriculares de tipo local. Es decir, “se caracteriza como un proceso y resultado de la articulación y concreción en la práctica de las competencias profesionales relacionadas con los conocimientos disciplinares, curriculares, epistemológicos, cognitivos e instruccionales, o en pocas palabras, los conocimientos didácticos” (Bedoya, 2016, p. 21).

En la siguiente ilustración 2 (adaptada de Gómez y Rico, 2002 citada por Bedoya 2016, p.22) muestra que el análisis didáctico hace uso de toda la estructura de Conocimientos Didácticos. E incluso, es posible pensar que en tanto que análisis por parte del docente reflexivo, este puede llegar a enriquecer dicha estructura y posiblemente innovar.

Además, en términos de diseño o implementación de unidades didácticas y propuestas microcurriculares es posible hacer uso de sus dimensiones y de las relaciones entre ellas, así como su evaluación a través de realizar un zoom reflexivo sobre sus dimensiones. El tetraedro central representa un sistema, y cada vértice del tetraedro representa un subsistema constituyendo así un patrón fractal. Y es el docente quien se instala en conocimientos didácticos y que tengan sentido en su contexto local, por ejemplo los presentados en dicha figura, para realizar análisis e incluso síntesis de ellos y generar, gestionar y evaluar propuestas microcurriculares.

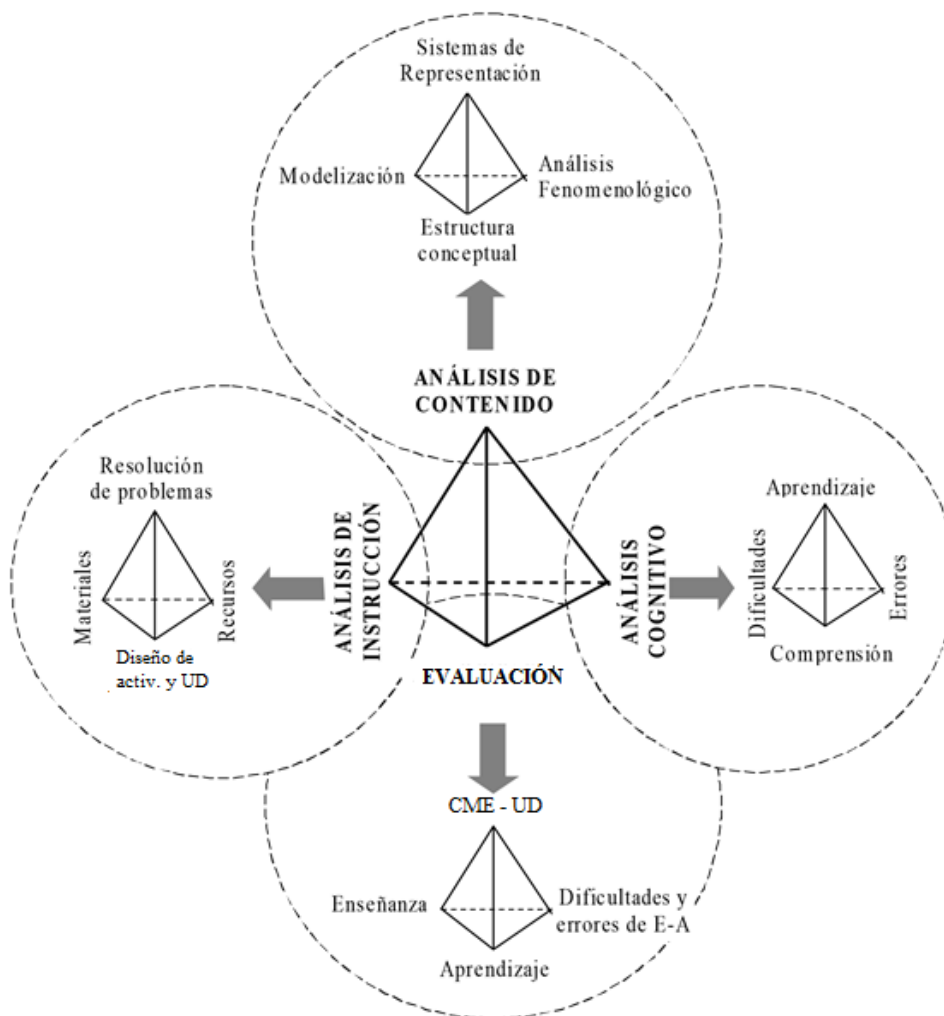


ILUSTRACIÓN 2: ESTRUCTURA ESQUEMÁTICA DE LA ORGANIZACIÓN Y CONTENIDOS DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Cada vértice del tetraedro se constituye organizador curricular (Ilustración tomada de Bedoya, 2016, p. 22).

2.1.2.2.4. El análisis didáctico y el MKST

Tanto el modelo de Análisis Didáctico como el MKST son propuestas de tipo analítico, que abordan los conocimientos, habilidades o competencias que deben caracterizar las reflexiones, propuestas y la práctica de los docentes. Ello significa que, el docente plantea unos diseños

curriculares ‘ideales’ basado en conocimientos de tipo didáctico y de contenidos, así como también unos medios de evaluar la puesta en práctica de los mismos.

El modelo MKST habla de los conocimientos de contenido matemático y conocimientos didácticos, así como de la especificidad de los conocimientos relacionados a los profesionales de la educación. Y el modelo del Análisis Didáctico plantea también la pertinencia de que el docente domine los conocimientos matemáticos aunados a los didácticos; y es más plantea que la forma de gestionar dicho conocimiento es a través de los organizadores del currículo. Hace explícito cuales son las características de un organizador y plantea cuatro de ellos para un análisis de currículo de tipo local: el análisis conceptual o de contenido, el análisis cognitivo, análisis de sistemas de representación y modelación, y el análisis de tecnologías computacionales. Y es a través de la reflexión sobre la estructura didáctica de las matemáticas que el docente pone en el aula la especificidad del conocimiento de su profesión. Similar a lo que el modelo MKST propone como conocimiento especializado del profesor, excepto que en este modelo no se deja ver la forma como el docente puede reflexionar y diseñar basado en dicha especialización.

Retomando los conocimientos de contenido matemático, es pertinente, mencionar que en el modelo MKST propuesto por Dinazar et al. (2014) ellos se refieren a los subcomponentes del conocimiento matemático de una forma muy específica, lo cual consideramos pertinente haga parte de las reflexiones, o formación continua, que el docente puede hacer acerca del carácter y la solidez de sus conocimientos.

2.1.2.3. Metas y creencias.

Muchas de las acciones humanas están inmersas dentro de las interacciones de unos sujetos con otros en un contexto, o cuando un sujeto o equipo de ellos se ven abocados a resolver situaciones problema, suelen estar mediadas por una mezcla de metas, creencias y conocimientos institucionalizados. Es el caso del docente que se propone gestionar cierta metodología de clase en el aula de matemáticas, donde no solo los conocimientos de contenido, socioculturales y didácticos se dejan visualizar en sus prácticas, sino también que las creencias del docente influyen en el acto educativo. Habría que cuestionarse hasta qué punto las creencias del docente tienen relación con los aspectos socioculturales de su entorno, cuestionamiento que dejamos abierto a posteriores investigaciones.

Continuando, aclaramos que al abordar las creencias no queremos significar que son las que primordialmente dominan o deberían dominar el acto educativo o metodología gestionada por el docente. Es más bien, con el propósito de indicar que dado que las creencias tienen un rol dentro de las prácticas del docente, es necesario que este reflexione sobre sus creencias y las resignifique con prácticas basadas en la investigación académica llevada al aula.

Nos permitiremos por unos momentos generar un ejemplo de tipo realista de un aula de clase, con el propósito de reflexionar sobre posibles creencias existentes en las prácticas del docente. Pensemos en un docente que observa su clase en un momento posterior y a través de un video filmado. En el mismo visualiza que sus estudiantes, a los cuales se les ha propuesto el solucionar un problema matemático al inicio de clase y que requieren entregar el modelo o soluciones al final

de la clase, están distribuidos de forma aleatoria dentro del aula. Seguido, el docente les indica que deben estar estrictamente organizados en filas y que el trabajo debe ser individual, no pueden hacer uso del celular o tecnologías relacionadas y el docente dedica media clase en explicar las soluciones de los problemas. De la anterior situación podemos seleccionar, de una amplia gama, algunos cuestionamientos a realizar al docente que estudia sus prácticas en video, como:

- ¿Consideras que tus estudiantes están aprendiendo el conocimiento matemático propuesto?
- ¿Consideras que tu metodología es pertinente en términos de enseñanza?
- ¿Consideras que tus estudiantes están utilizando heurísticas conocidas o creando nuevas?
- ¿Consideras que los estudiantes están ordenados u organizados en tu clase?
- ¿Qué papel juegan las interacciones entre sujetos en tu clase en términos de conocimientos?

Mencionamos que existen o se pueden construir muchas otras preguntas similares que pueden dar luces sobre las creencias del docente, respecto a: su metodología de clase o el cómo concibe que deben ser dirigidas las variables relativas a la educación. En relación a las cinco cuestiones enunciadas, es muy posible, y así se espera de un docente reflexivo de sus prácticas, que todas las preguntas anteriores tengan una o más respuestas. Por un lado, las respuestas del docente indicarán que tipo de creencias y metas tiene respecto a cómo considera que aprenden sus estudiantes, como cree que se debe enseñar las matemáticas, lo que considera como ordenado en su clase y como los sujetos hacen uso de heurísticas e incluso si considera que los estudiantes aprenden más trabajando individualmente o compartiendo y construyendo saberes en grupos dialógicos.

Y por otro lado, más allá de las respuestas del docente a los cuestionamientos, proponemos que es relevante el uso que de ellas puede hacer el docente, o comunidad de docentes en algunos casos, en términos de inferir sobre sus propias creencias y el papel que ellas cumplen en el modelo de clase que ha puesto en práctica.

A propósito de la fuerza de las creencias, que suelen converger en una determinada metodología de clase puesta en práctica por parte del docente:

Si *creemos* que el conocimiento consta explícitamente de fragmentos de información almacenados en el cerebro, entonces tiene sentido empaquetar esta información en unidades bien diseñadas, reunir a los futuros destinatarios de esta información en un aula donde estén perfectamente quietos y aislados de cualquier distracción y entregar esta información de la manera más sucinta y articulada posible. Desde esta perspectiva, lo que ha llegado a simbolizar el epítome de un evento de aprendizaje tiene sentido: un profesor que diserta ante una clase, sea en una escuela, en un centro de formación empresarial o en el cuarto trasero de una biblioteca.

Pero, si *creemos* que la información almacenada de maneras explícitas sólo es una parte pequeña de conocer y que conocer supone principalmente una participación activa en comunidades sociales, entonces el formato tradicional no parece tan productivo. Lo que sí parece prometedor son las maneras inventivas de hacer que los estudiantes participen en prácticas significativas, de proporcionar acceso a recursos que refuercen su participación, de ampliar sus horizontes para que se puedan situar en trayectorias de aprendizaje con las que se puedan identificar y de hacer que participen en acciones, discusiones y reflexiones que influyan en las comunidades que valoran. (Wenger, n.d, p.7)

Entonces, vemos que el modelo de clase que pone en práctica el profesor está asociado a las creencias que este tiene de los estudiantes, del conocimiento matemático, de los procesos de aprendizaje, la enseñanza, la didáctica, etc. De lo anterior, proponemos que la reflexión del docente sobre las creencias no debe ser una reflexión por la reflexión. Sino que debe llevarlo a

resignificarlas desde las investigaciones, y así hacer que estas converjan en unas metodologías de clase posiblemente más pertinentes. En otros términos, diríamos que es necesario que el docente genere otra historia sobre sus prácticas y sobre sus creencias en el aula a partir de investigaciones fundamentadas para que ello lo lleve a generar otras prácticas. Como afirman Joshua & Jean (2005, p.9): *“El profesor desarrolla concepciones precisas, derivadas de su propia historia, sobre la manera en que un alumno aprende, sobre las finalidades de la enseñanza que prodiga, sobre los fundamentos epistemológicos de las ciencias”*

Para finalizar, mencionaremos que en relación a las creencias consideramos pertinente hacerles mención dentro de la epistemología de las prácticas metodológicas del docente de matemáticas, en virtud de que descansan en algunas convicciones filosóficas y suelen ser una componente que influye la dirección de las prácticas. Al respecto, se hace alusión a ello en una investigación realizada por Goldin (2010) donde afirma:

The term ‘epistemology’ is rarely mentioned explicitly but is appropriate for any discussion of beliefs, since the teacher’s knowledge, goals and actions ultimately rest on some philosophical convictions, and more specifically on their epistemology of what it means to know mathematics. (p.417)⁶

⁶ *“El término ‘epistemología’ rara vez se menciona explícitamente, pero es apropiado para cualquier discusión de las creencias, ya que el saber, los objetivos y las acciones del profesor descansan en última instancia en algunas convicciones filosóficas y más específicamente en su epistemología de lo que significa conocer las matemáticas”* (Traducción realizada por Arcila J. & Manzano, J., 2017).

2.1.3. Dimensión matemática

En esta dimensión, proponemos un acercamiento a los objetos matemáticos considerados centrales: las simetrías y la razón áurea. Y en tanto que resolución de problemas referimos otros objetos matemáticos, en particular los atinentes a la geometría espacial y trigonometría, que en principio consideramos posiblemente pueden surgir en el aula en el marco de esta investigación. Ellos son algunos elementos de geometría espacial en relación con la trigonometría y la resolución de problemas.

También, se proponen algunas conexiones o apreciaciones sobre belleza matemática vista por medio de la razón áurea y las simetrías abordadas como transformaciones geométricas, vistas por ejemplo en teselas y frisos. Los elementos de geometría espacial, razón áurea y simetrías aluden al tipo de propiedades, transformaciones y objetos geométricos que es probable se movilicen dentro de los modelos geométricos que realicen los estudiantes, en respuesta al tipo de problemas abiertos planteados por el docente. También, aludiremos al uso de objetos matemáticos trigonométricos como una de las posibles estrategias que pueden seguir los estudiantes en la resolución de problemas de tipo realista.

Es de acotar, que aunque en lo subsiguiente se propone principalmente una geometría de tipo euclidiana, una de las presentes en especial en Geogebra 3D, en este trabajo de investigación dejamos abierta la posibilidad de pensar en los objetos geométricos, propiedades y relaciones entre ellos desde otros marcos geométricos.

Por otro lado, la resolución de problemas abiertos vía modelación la proponemos como una de las estrategias metodológicas de clase que puede gestionar el docente dentro del aula de matemáticas.

2.1.3.1. Elementos de geometría 3D y Geogebra

A lo largo de la historia del hombre se encuentran diversos desarrollos del pensamiento matemático, el cual suele estar ligado a prácticas relacionadas con la conmensurabilidad de terrenos, de caminos, etc. En la mayoría de los constructos matemáticos la geometría ha jugado un papel relevante en tanto que permitió, a las culturas que las desarrollaron, no solo avances teóricos sino el solucionar problemas prácticos o reales.

Es así como la realidad espacial física empieza a ser percibida o más bien construida como realidad geométrica por diversas culturas, como relaciones entre cuerpos geométricos, con unas propiedades y que aceptan ciertas transformaciones.

En este punto, es pertinente mencionar que Geogebra se constituye en uno de los artefactos que permite a un grupo de sujetos el generar interacciones con representaciones de objetos matemáticos. En particular, geométricos en el plano y el espacio. Donde entendemos artefacto en el sentido que propone Radford, como resultado de las producciones o construcciones de unos sujetos. Artefacto el cual desde un enfoque Vigotskiano, es decir socio-histórico del conocimiento, viene a modificar las relaciones de los sujetos en cuanto a las actividades que se gestionan en el aula. Y por tanto, modifican las funciones psicológicas mismas, es decir los conocimientos de los

involucrados en la actividad. Se dice entonces, que los artefactos y en este caso Geogebra se constituye en un mediador de las actividades de los sujetos. En términos de Radford, aludiendo a lo cognitivo en Vigotski, afirma que: “*within this conception of cognition, artifacts are considered cultural devices that modify our cognitive functioning*⁷” (Radford, 2014, p.285).

Ello indica que los artefactos no son solo extensiones de los sentidos de las personas que los usan sino más bien que estos, y en el caso de la clase, Geogebra entra a dialogar con los participantes y a su vez es modificado por estos dentro del marco de las actividades que se realizan en la clase. Así, epistemológicamente Geogebra puede ser entendido como herramienta cultural, la cual contiene y genera unas dinámicas en el aula que negocian significados con estudiantes y profesor; significados que tiene por ser un constructo humano y por entrar a hacer parte de unas actividades humanas dotadas de diálogos intersubjetivos en torno a unos objetos de conocimiento.

Por último, desde lo ontológico es posible decir por un lado que Geogebra es un artefacto que viene a hacer parte inseparable de la actividad matemática de los sujetos, es decir, de los estudiantes que realizan las construcciones geométricas. Y por otro, pensando la actividad matemática como negociaciones intersubjetivas de significados, representaciones y operaciones con las representaciones de objetos matemáticos, pero no aisladas ni de un medio sociocultural ni de las voces impresas por el artefacto a telón de fondo de la clase. Así, las matemáticas son en tanto que construcciones humanas, de carácter representacional, que evolucionan en cada nuevo

⁷ “*dentro de esta concepción de cognición, los artefactos se consideran herramientas culturales que modifican nuestras funciones cognitivas*” (Traducción realizada por Arcila J. & Manzano, J., 2018).

contexto en el cual se ponen a dialogar con unos sujetos y unos artefactos en el marco de unas actividades; intencionadas en el caso del aula, por el profesor. O, como expone Radford (2014):

Thus, I want to argue, in the same way that music resides in its performance, mathematics resides in the activity of its enactment. In this sense, mathematics is always new and different, in the sense that each event is always unique and singular⁸. (p. 286-287)

A continuación, planteamos algunos de estos elementos del espacio geométrico que pensamos posiblemente serán parte de los conocimientos de contenido del docente y que este a su vez pondrá en juego, en su metodología de enseñanza, en el diseño y aplicación de la unidad didáctica con el uso de Geogebra. Es de resaltar nuevamente que principalmente abordamos objetos considerados en el plano y el espacio euclidiano, pero también algunas transformaciones dejando abierta la posibilidad a otras geometrías. Para ello nos aventuramos en algunas definiciones geométricas, desde lo planteado en Coxeter (1971) y Hemmerling (2002) y otros.

- ✓ Poliedro Convexo: considerado como región finita del espacio rodeada por un número finito de planos, donde se llama *cara* al resultado de la intersección de uno de los planos con respecto a los otros, y se denomina *aristas* a las intersecciones entre las caras. Algunos ejemplos de poliedro son las pirámides y los prismas. Ello no excluye la posibilidad de construir poliedros cóncavos.

⁸ “Así, argumento que, de la misma forma en que la música reside en su ejecución, las matemáticas residen en la actividad de sus representaciones. En el mismo sentido, las matemáticas siempre son nuevas y diferentes, en el sentido que cada evento siempre es único y singular” (Traducción realizada por Arcila J. & Manzano, J., 2018).

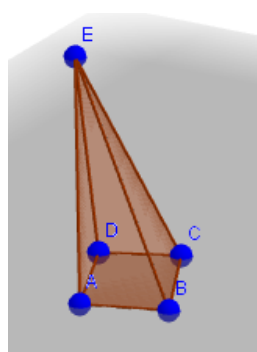


ILUSTRACIÓN 3: *POLIEDRO CÓNCAVO*

Esta ilustración 3 es de elaboración propia (ejemplifica la definición de poliedro de Coxeter (1971) y Hemmerling (2002)).

- ✓ Esfera: Es el conjunto de todos los puntos en el espacio, los cuales son equidistantes de un punto fijo llamado centro. El *radio* de una esfera es el segmento rectilíneo que une el centro y cualquier punto de la esfera. El *diámetro* de la esfera es un segmento rectilíneo que pasa por el centro y que tiene sus extremos sobre la esfera, este es el doble del radio. Dos esferas son congruentes si sus radios son congruentes.

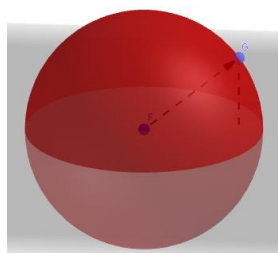


ILUSTRACIÓN 4: *ESFERA*

Esta ilustración 4 es de elaboración propia (ejemplifica la definición de esfera de Coxeter (1971) y Hemmerling (2002)).

- ✓ Círculo: Es el conjunto de los puntos en un plano, cada uno de los cuales es equidistante de un punto dado del plano. El punto dado se denomina *centro* del círculo. El *radio* del

círculo es un segmento rectilíneo, uno de cuyos puntos extremos es el centro del círculo y el otro es un punto del círculo. En algunos documentos de matemáticas se hace diferencia entre círculo como el interior de puntos, y circunferencia como los puntos que equidistan del centro.

- ✓ **Ángulos y arcos:** Un ángulo central de un círculo es un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo. En la siguiente figura $\angle CAD$ es un ángulo central. Se dice que el ángulo $\angle CAD$ intercepta el arco CD y que el arco CD subtiende o tiene el ángulo central $\angle CAD$.

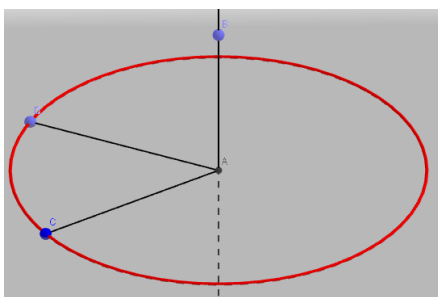


ILUSTRACIÓN 5: CIRCUNFERENCIA ALREDEDOR DE UN EJE Y SOBRE UN PLANO QUE SE UBICA EN EL ESPACIO

Esta ilustración 5 es de elaboración propia (ejemplifica la definición de ángulos de Coxeter (1971) y Hemmerling (2002)).

- ✓ **Medición de ángulos centrales y arcos:** El grado es una de las unidades utilizadas para la medición de los ángulos, existiendo un número igual a 360 grados para el arco equivalente a un círculo. La unidad para medir arcos es el arco interceptado por un ángulo central de un grado. Otra unidad de medida es el radian, donde un arco tiene como medida de su ángulo central un radian si la longitud del arco es igual a la longitud del radio del círculo.

- ✓ **Polígonos:** Un polígono es un conjunto de puntos el cual es la unión de los segmentos tales que: (1) cada punto extremo es el punto extremo de precisamente dos segmentos; (2) ningún par de segmentos se intercepta excepto en un punto extremo; y (3) ningún par de segmentos con el mismo punto extremo son colineales. Los segmentos se llaman *lados* del polígono y los puntos extremos se llaman *vértices*. Si se extienden cada uno de los lados de un polígono y las extensiones no interceptan a otro lado, el polígono es un polígono *convexo*.

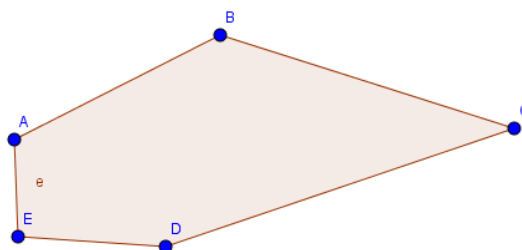


ILUSTRACIÓN 6: POLÍGONO (CASO DE PENTÁGONO NO REGULAR)

Esta ilustración 6 es de elaboración propia (ejemplifica la definición de polígono de Coxeter (1971) y Hemmerling (2002)).

- ✓ **Triángulo rectángulo:** La unión de los tres segmentos AB, BC y AC se llama triángulo si, y sólo si, A, B y C son tres puntos no colineales. El símbolo para el triángulo es Δ . Por lo tanto, en la figura 7, $\Delta ABC = AB \cup BC \cup AC$. Cada uno de los puntos no colineales se llama vértice del triángulo, y cada uno de los segmentos rectilíneos es una arista del triángulo. En particular, un triángulo es un triángulo rectángulo si, y sólo si, tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto del triángulo se denominan catetos (adyacente y opuesto) y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa. En la figura 7, AB y BC son los catetos y AC es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC:

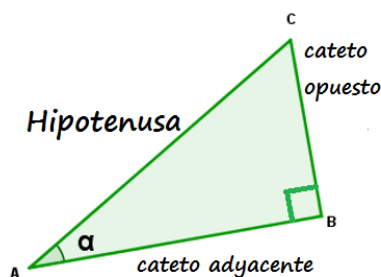


ILUSTRACIÓN 7: TRIÁNGULO RECTÁNGULO O DE PITÁGORAS

Esta ilustración 7 es de elaboración propia (ejemplifica definición de un triángulo rectángulo propuesto en Coxeter (1971) y Hemmerling (2002)).

Razón trigonométrica: La razón de una cantidad a otra cantidad semejante es el cociente de la primera dividida por la segunda. Dado un triángulo rectángulo y referido uno de los ángulos no rectos que llamaremos alpha α (ver figura 7), se definen las razones trigonométricas como:

$$\text{Seno de } A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Cotangente de } A = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$$

$$\text{Coseno de } A = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Secante de } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

$$\text{Tangente de } A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

$$\text{Cosecante de } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$$

2.1.3.1.1. Isometrías

Una isometría en el espacio es una transformación que preserva la longitud, de forma tal que el segmento de recta PQ resulta, al ser transformado, en un segmento congruente P'Q'. Ejemplos de estas transformaciones (Ilustración 8) son las rotaciones, traslaciones, reflexiones y torceduras. Las rotaciones de una figura F en el espacio se realizan respecto a un eje y considerando un ángulo

determinado, obteniéndose una F' , las traslaciones de F utilizan para tal fin unas direcciones o vectores definidos, y las reflexiones pueden realizarse respecto a un punto, a una recta o a un plano. Una reflexión es una clase especial de isometría que conserva invariante todo un plano de puntos.

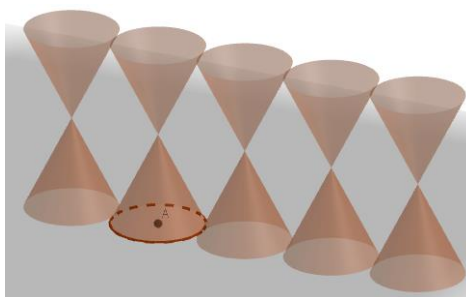


ILUSTRACIÓN 8: *PATRÓN DE FIGURAS GENERADO CON TRANSFORMACIONES DE ISOMETRÍA EN EL ESPACIO*

Esta ilustración 8 es de elaboración propia (ejemplifica la definición de transformaciones de isometría de Coxeter (1971) y Hemmerling (2002)).

A la composición de rotaciones y traslaciones suelen denominarse torceduras. Y los tres tipos de transformación se pueden utilizar para generar patrones como los frisos y las teselas.

2.1.3.1.2. Análisis fenomenológico de las isometrías

En Moreno (1998), encontramos que “*las transformaciones geométricas, (dentro de las cuales están inmersas las de isometría), están relacionadas con movimientos físicos de figuras geométricas*” (p.146). Es decir, es posible abordar por medio de dichas transformaciones algunos fenómenos como la rotación de un planeta, crecimiento de seres vivos, proyección de luz sobre un objeto, pintar un cuadro a escala, etc.⁹

⁹Moreno (1998) afirma que el término más general que engloba el estudio de dichos fenómenos es el de la transformación.

Pero, ¿es posible afirmar que las transformaciones geométricas y las transformaciones espaciales de los movimientos guardan exactamente las mismas propiedades? De acuerdo con Freudenthal, citado por Moreno (1998), existen algunas diferencias entre ellas:

El movimiento es de *un objeto*, se realiza *dentro del espacio*
 Y sucede *en el tiempo*, a la *largo de un recorrido*
 Mientras que
 La transformación (geométrica) es *del espacio*, se realiza *sobre el espacio*
 Y sucede *de golpe*, *sin recorrido intermedio*. (p.147)

2.1.3.1.3. Isometrías en el Currículo Nacional.

En los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006) se plantean las transformaciones de forma explícita para el ciclo sexto a séptimo, de la siguiente forma: “*predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte*” (p.88). Por un lado, solo enfocan las transformaciones en 2D dejando de lado el espacio. Y por otro lado, en el ciclo de décimo a once no se propone de forma explícita el trabajo con transformaciones geométricas, por ejemplo las de isometría; dentro del cual se localizan los estudiantes a los cuales se les realizará la propuesta de resolver problemas abiertos haciendo uso de la modelación en geogebra 3D y las isometrías.

Es en este marco, tanto fenomenológico como curricular, en el cual se instala la situación problema abierto planteada en la Unidad Didáctica, la que invita a los equipos de estudiantes a elaborar un modelo de tres sitios reales elegidos de su institución. Lo cual es acorde con la

propuesta de Moreno (1998), cuando afirma que el proceso de modelación de dichas transformaciones puede girar en torno a “*elementos decorativos a base de frisos, rosetones, mosaicos contruidos, bien con figuras de plástico o cerámica, bien extraídos de contextos reales*” (p.150). Y agregaremos en esta investigación “o bien contruidos en geogebra 3D”.

2.1.3.1.4. La proporción áurea y razón áurea

Tanto en la naturaleza como en los constructos humanos, expresión de la cultura como el arte, biología, la música, la arquitectura, etc., se encuentran fenómenos que se suelen considerar como hermosos. Muchos de ellos se refieren a ciertos patrones de los cuales se puede dar cuenta por medio de relaciones matemáticas. Uno de los abordajes matemáticos a la belleza se relaciona con la denominada proporción áurea, de la cual se deriva en número de oro.

Respecto a la percepción, desde diversas teorías, sobre papel de dicha proporción en los fenómenos del universo y expresiones culturales Toledo (s.d) afirma que:

Muchos autores apoyan estas teorías y otros tantos no ven en ellas sino casualidad y coincidencia, yo me he limitado a exponerlas, pero la realidad es que hay demasiadas cosas en el mundo (flores, galaxias, peces, conchas de mar, insectos, hombres...) que poseen un crecimiento armónico basado en una proporción tan rebuscada. (p. 6)

Veamos una propuesta para obtener dicha razón. Sea un segmento dado AB, y un punto F sobre AB, se dice que la sección áurea, del *sectio áurea* es una proporción áurea cuando se dividen estos en media y extrema razón.



ILUSTRACIÓN 9: PROPORCIÓN ÁUREA EN UN SEGMENTO AB

Esta ilustración 9 corresponde a la representación, en geogebra, del segmento relativo a la proporción áurea (segmento que aparece en Toledo, s.d, p.10)

Es decir, la proporción áurea se genera cuando un segmento AB es dividido por un punto F, por ejemplo utilizando regla y compás, tal que el segmento mayor AF es al menor FB, como el todo AB es al mayor AF. Solo existe un punto F que relaciona de tal forma los segmentos y que a su vez cumple con:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF + FB}{AF} = \Phi$$

De la anterior expresión se puede suponer que $AF = x$ y $FB = 1$, y se obtiene una ecuación cuadrática para x , con dos soluciones. Reescribiendo la ecuación, obtenemos:

$$\frac{x}{1} = \frac{x + 1}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

A la solución positiva se le denomina el número de oro, generalmente simbolizado por la letra griega Φ , y que se obtiene como: $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$. El número de oro es irracional o lo que es lo mismo es inconmensurable respecto a la unidad. Si bien, un estudio más profundo sobre el número $\Phi = +(\sqrt{5} + 1) / 2 = 1,6180339885 \dots$ y las relaciones con figuras geométricas planas, espaciales, las espirales, sucesiones, etc., presentes en diversos fenómenos ofrece una amplia mirada a la belleza, en este trabajo solo aludiremos a algunos ejemplos; los cuales pensamos que pueden ser orientadores de acuerdo a los propósitos de esta investigación.



FIGURA 106: Villa Imperial Katsura, fachada sudeste.

ILUSTRACIÓN 10: PROPORCIÓN ÁUREA VISUALIZADA EN LA FACHADA DE ESTRUCTURA

La fachada de la construcción denominada Villa Imperial Katsura, cumple la proporción áurea (figura tomada de Toledo, s.d, p.106)

Es posible comprobar que la fachada de la casa observada cumple con parámetros de belleza matemática áurea, en el sentido que dicho número surge al medir su largo y dividirlo a la parte representada por las columnas.

Continuando con la razón áurea, y con miras a determinar su relación con la espiral áurea, tómese un segmento AB y divídase por un punto F en proporción áurea, como vemos en la Ilustración 11. Seguido, constrúyase un cuadrado de lado AF y un rectángulo de longitudes FB y FD. Análogamente, divida el rectángulo BEDF en un cuadrado y un rectángulo, donde el punto G cumple con proporción áurea respecto al segmento AE. Es posible continuar iteradamente con dicho procedimiento, y construir los arcos de circunferencia observados tomando como centros los puntos F, H, etc., que a su vez generan la espiral áurea.

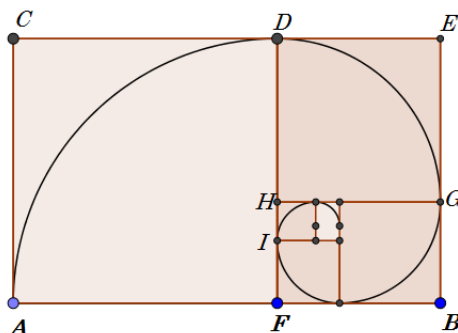


ILUSTRACIÓN 11: ESPIRAL ÁUREA

Esta ilustración 11 corresponde a la representación, en geogebra, de la espiral áurea (espiral que aparece como figura 18 en Toledo, s.d, p.34, representación que elaboran Arcila & Manzano 2018 utilizando geogebra)

También, a título de nota es pertinente mencionar que existe una relación entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo. En tanto que una de las formas de obtener el número áureo es como el límite de las razones entre los términos sucesivos F_{n+1}/F_n cuando n tiende a infinito.

2.1.3.1.5. Análisis fenomenológico de la razón

Este análisis de razón áurea lo realizamos desde Moreno (1998), y en términos de proporcionalidad de magnitudes. Más que las razones entre números o magnitudes, este tipo de objeto matemático permite al sujeto dar cuenta de “a es a b” como “c es a d” por medio de la relación de equivalencia “tener la misma razón que”. La proporción siempre deviene en una función lineal. Y según la fenomenología didáctica “*en el camino hacia la constitución del objeto mental razón y proporción, desempeñan un papel importante los objetos mentales precursores*” (Moreno (1998), p.120). Así, un sujeto puede dar cuenta de situaciones como *esta sopa contiene*

menos sabor cítrico que. Algunos fenómenos asociados a la proporcionalidad directa son situaciones económicas, recetas, escalas de mapas, mezclas químicas, problemas de sombras, etc.

2.1.3.1.6. Razón áurea (proporcionalidad) en el Currículo Nacional

En los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006) se plantea para el ciclo sexto a séptimo: “resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas)” (p.85), y también propone el análisis de situaciones con proporcionalidad directa e inversa en contextos geométricos y numéricos. Para el ciclo décimo a once contempla “resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes” (p.89). Propuestas curriculares dentro de las cuales tiene cabida un trabajo con número áureo como proporciones por ejemplo.

2.1.3.1.7. Relación de las simetrías con la razón áurea

Como se hizo mención en líneas anteriores, existen muchos ejemplos de la naturaleza y las estructuras u objetos artificiales contruidos por diversas culturas, que han sido estudiados, modelados haciendo uso de diversos objetos matemáticos, por ejemplo de la geometría. Objetos matemáticos que incluso guardan ciertas relaciones estructurales, y que permiten enriquecer las miradas o aproximaciones sobre las cosmovisiones que imprimen los sujetos de una cultura a los objetos modelados o contruidos.

En particular, en este trabajo es de especial interés aproximar algunas posibles relaciones entre la razón áurea, y las simetrías (propuestas como transformaciones). Estos dos objetos matemáticos

en muchos de los casos suelen estar asociados a los modelos de fenómenos, de los cuales a su vez en muchas culturas se suele tener también una caracterización estética o de belleza.

Por ejemplo, la siguiente ilustración 12 muestra una flor de cinco pétalos. Para la cual, es posible aproximar un modelo de pentágono regular a partir de unir los extremos de los pétalos tomados como vértices.

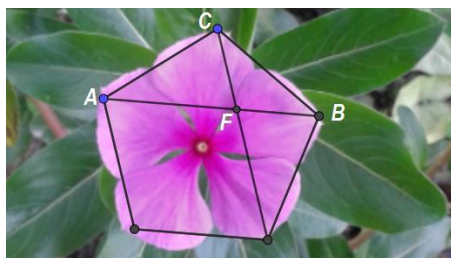


ILUSTRACIÓN 12: FLOR (PENTÁGONO REGULAR Y RAZÓN ÁUREA)

Foto de flor tomada en la I.E. Jovita Santacoloma por Arcila, J. (2018).

Para el pentágono regular es posible demostrar que los segmentos AC y AF son congruentes en tanto que pertenecen a un triángulo isósceles. Ahora, supongamos que $AC = 1$ y $AB = x$, entonces $AF = 1$. Es posible demostrar que las razones generadas respecto a la ilustración 9, también se cumplen para la comparación de la diagonal y las aristas del pentágono regular. Y en ese sentido, las dimensiones modeladas de la flor contienen tal razón de oro, permitiendo afirmar que ciertas propiedades geométricas de dicha flor dan cuenta de criterios de belleza áurea.

A su vez, la misma flor presenta simetrías, por ejemplo contiene cierto número de simetrías axiales, y por rotación. Veamos. Sea P un pétalo de la flor, es posible obtener o modelar los otros pétalos rotando P un múltiplo de veces un ángulo determinado theta, con ángulos de rotación dados

por $\frac{2\pi \cdot n \cdot rad}{5}$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Pero también es posible encontrar que existen unas mediatrices a las aristas del pentágono y que estas tienen la propiedad geométrica de ser ejes de simetría para la flor, permitiendo obtener un pétalo P' a partir de reflejar P respecto a la mediatriz.

Entonces, en ciertos fenómenos o estructuras se observa la existencia de simetrías y razón áurea gravitando en el modelo, en tanto que las propiedades geométricas, numéricas, etc., configuran una danza coexistiendo matemáticamente en los modelos de ciertas estructuras que permiten a las culturas el dar interpretaciones simultáneas de lo bello matemáticamente hablando en la flor.

En este punto, es pertinente cuestionar ¿si el modelo de un fenómeno, estructura artificial o natural contiene simetrías entonces también da cuenta de razón áurea? Y ¿si contiene razón áurea entonces contiene simetrías? En relación al primer cuestionamiento, existen modelos geométricos como el octógono el cual contiene simetrías axiales, puntuales, de rotación. Pero en cuanto a razones, este se deja estudiar por medio de la razón de plata, vía rectángulo de plata, y no por el número de oro¹⁰. En relación a la segunda pregunta, encontramos que los modelos geométricos que contienen razón áurea usualmente también dan cuenta de algún tipo transformación de isometría. Es el caso del rectángulo áureo. Por ejemplo, algunos modelos matemáticos de fenómenos espirales contienen rectángulos áureos o polígonos (cuadrados) que cumplen con la sucesión de Fibonacci. Pero, que incluso van más allá en tanto que como se menciona en líneas

¹⁰ Es posible ampliar la razón áurea en el marco de las proporciones notables dentro de las cuales se encuentran raíz de dos, raíz de tres, áurea, plata, cordobesa, como lo plantea Encarnación Reyes (s.d) en *Arte y Naturaleza en clave geométrica*.

anteriores (ilustración 11) el límite de las razones entre sucesivos términos de dicha sucesión es precisamente la razón áurea, conteniendo además algunas simetrías.

Se observa que existen innumerables fenómenos reales naturales y estructuras artificiales, cuyos modelos matemáticos muestran la existencia e incluso complemento de sus propiedades en términos tanto de razones áureas como transformaciones de isometría. Dando indicios de la estrecha relación que existe entre los fenómenos u objetos de la naturaleza con las creaciones artificiales de diversas culturas, y su apreciación por las simetrías y patrones relacionados con la razón áurea. Incluso, estos dos objetos matemáticos ponen en juego unas relaciones entre lo geométrico con lo numérico y lo algebraico en una danza que en los modelos presenta a ciertas simetrías inextricablemente ligadas a la razón de oro.

2.1.3.2. Resolución de problemas y modelación

Una de las constantes, presente en las diversas facetas de la vida del ser humano, consiste en abordar problemas diversos y buscar soluciones pertinentes. Y muchas de las veces, la resolución de un problema se potencia o se realiza de una forma más adecuada cuando intervienen diversos sujetos en función de encontrar heurísticas óptimas de solución. En particular, en las aulas de clase de matemáticas, la resolución de problemas es uno de los posibles enfoques de presentación de la clase, que puede adoptar un docente en un determinado periodo de tiempo y según una intencionalidad didáctica. Máxime si es un aula de clase de matemáticas, en la cual el docente y estudiantes, propuestos en la clase como una microsociedad, deben crear estrategias para dar cuenta de soluciones a diversas situaciones problema, en especial aquellas de tipo realista; ello

dado que los alumnos se están preparando para desempeñarse como ciudadanos propositivos de la sociedad a la cual pertenecen. Desde este enfoque, es pertinente entonces que el docente diseñe o implemente situaciones problema y genere unas dinámicas de aula que favorezcan los procesos de enseñanza aprendizaje considerando los aspectos socioculturales presentes en el salón de clases. En otros términos un estudiante aprende, de todos los integrantes del aula, a resolver problemas de matemáticas en la medida que la gestión del docente genere en los alumnos la motivación respecto a resolver o crear modelos de situaciones problema realistas. Ello dentro de unas relaciones didácticas, que si bien son muy propias del contexto escolar, consideren en el aula los aspectos socioculturales que posiblemente puedan potenciar la generación de competencias en los estudiantes no solo las de tipo matemática sino también ciudadanas.

De acuerdo con las líneas anteriores, a continuación nos proponemos realizar una aproximación a lo que consideramos como resolución de problemas y su relación con la modelación, y en particular la *resolución de problemas abiertos de geometría espacial*. Ello dado que como parte de la investigación nos planteamos implementar en el aula de matemáticas, con los estudiantes, una Unidad Didáctica con problemas de este tipo. Para ello nos remitimos a varios autores o investigadores que han realizado diversas propuestas sobre resolución de problemas en educación matemática.

En relación a lo que es un problema encontramos que Krulik & Rudnik (1987) citados por Rodríguez, M. (2013, p.154-155) afirman que: “un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”. El hecho de que el

estudiante o grupo resolutor del problema no vislumbre una solución indica que una clase de matemáticas pensada desde la resolución de problemas y gestionada por el docente reflexivo debe considerar, entre otros aspectos, elementos como unos tiempos, medios y espacios en los cuales los estudiantes interactúen con otros estudiantes y reconozcan las variables presentes en el problema a fin de generar o utilizar heurísticas conocidas previamente o creadas en el momento de abordar el problema.

A continuación, abordaremos algunos aspectos que se pueden identificar en la relación entre el resolutor o los resolutores de un problema y el problema mismo, algunos de ellos tomados desde Allan Schoenfeld (referenciado en Barrantes, 2006) son: a) Este se debe apropiar del enunciado y las variables del problema; b) trazar una o varias estrategias de solución o abordaje del problema entendidas como heurísticas; c) se espera que los resolutores, y como parte de la resolución, comuniquen la solución validando el conocimiento construido; como fruto del proceso de encontrar estrategias que pueden ser o no óptimas pero que dieron una o varias soluciones al problema. Así como: d) Es de anotar que los sujetos resolutores no necesariamente siguen los elementos mencionados de forma lineal, sino más bien que pueden incluso moverse entre ellos en forma espiral retomando, autoevaluando, una y otra vez, reinterpretaciones del problema, incluso pueden partir de la solución y regresar para evaluar sus heurísticas. Por último, e) las creencias y prácticas relacionadas con el origen, es decir con los aspectos contextuales, fenomenológicos o socioculturales del problema también juegan un papel dentro de los procesos de solución, dado que muchas de las veces están afianzadas en experiencias previas o hacen parte de la tradición que su entorno sociocultural le ha legado.

En muchos casos es posible considerar que existen problemas con una única vía de solución o única solución. Es pertinente aclarar que no centraremos la atención en este tipo de situaciones, nos enfocaremos más bien en aquellos problemas que admiten múltiples respuestas o soluciones, e incluso múltiples estrategias de solución; conocidos generalmente como *problemas abiertos*. Al respecto Artigue & Houdement (2007) afirman:

Open problems are there defined as problems with a short text, which induces neither a method nor a solution; their solving does not reduce to the direct application of known results or tools; they situate in a context familiar enough to the students to make the problem meaningful, and allow them to engage in trials, conjecture... (p. 7-9). They are used for proposing to students learning situations inducing them to “explore – conjecture – test – prove”¹¹, that is to say, in short, according to the authors, to behave as mathematicians. (p. 373)

Entonces, es posible afirmar que un problema abierto es aquel que cumple con considerar elementos socioculturales relativos a los estudiantes, que en nuestro caso se situará dentro de la geometría entendida como cualquiera de las que estudian el espacio en el nivel de estudiantes de secundaria, y que puede tener varias soluciones y heurísticas relacionadas. Además, el considerar a los estudiantes realizando un trabajo de matemáticos lleva necesariamente a cuestionarse sobre el papel que puede jugar la *modelación* dentro de la resolución de problemas abiertos de tipo espacial. Ello porque una de las principales prácticas en los resolutores de problemas es la de generar modelos de muchas de las situaciones que intentan resolver.

¹¹ “Los problemas abiertos se definen como problemas con un texto corto, los cuales no inducen a ningún método o solución; su solución no se reduce a la aplicación directa de conocimientos o herramientas; ellos se sitúan en un contexto suficientemente familiar para los estudiantes propiciando que estos les sean significativos, y les permita comprometerse con los objetivos, conjeturas... (p-7-9). Estos se utilizan con el propósito que las situaciones de aprendizaje de los estudiantes les induzca a “explorar- conjeturar – comprobar - demostrar”, es decir, brevemente, de acuerdo a los autores, actuar como matemáticos” (Traducción realizada por Arcila J. & Manzano, J., 2018).

Seguidamente, consideramos un *modelo* como lo propone Doerr & English (2003), citados por English & Sriraman (2010), los cuales afirman que este: “*es un sistema de elementos, operaciones, relaciones, y reglas que pueden utilizarse para describir, explicar o predecir el comportamiento de algún otro sistema considerado como familiar*” (p. 273). Ello lleva a plantear que la modelación es una posible propuesta potente en el aula en relación a la resolución de problemas abiertos del espacio. Dado que en la medida que los equipos¹² de estudiantes generan o construyen modelos están estableciendo relaciones entre sistemas e incluso poniendo en juego diversos sistemas de representación semiótica que les permite validar heurísticas e incluso determinar si una solución, o si un modelo, hallado es óptimo. Y finalmente, sobre la forma de trabajar la resolución de problemas, en el aula de clase, a partir de modelos Doerr e English (2003, 2006), English & Watters (2005), Lesh et al., (2003a) citados por Sriraman & English (2010), exponen como:

Ejemplo el abordar secuencias de actividades de modelización que fomenten la creación de modelos aplicables a una gama de situaciones relacionadas. Se presenta a los estudiantes unos problemas que les confronte con la necesidad de desarrollar modelos a fin de describir, explicar o predecir el comportamiento de un sistema dado (problema el cual debe provocar el modelo). (p.274).

Seguidamente, abordamos aspectos relativos a la actividad de conocer en el aula y que permiten proponer la modelación geométrica dentro de los diseños y gestiones microcurriculares que puede realizar un docente de matemáticas escolares.

¹² El término trabajo en equipo lo estamos asumiendo como sujetos que conforman grupos centrados en el trabajo colaborativo. En el presente trabajo de investigación. Ello en cuanto a que (Parcerisa, 1996) “el trabajo colaborativo conlleva una estructura global fuerte, donde el alumnado diseña cooperativamente las actividades que el mismo debe realizar” (p. 23), diferente a unos sujetos que conforman un agregado pero trabajando individualmente.

2.1.4. Dimensión cognitiva

Una de las formas de aproximarse al aprendizaje de los estudiantes, es pensar que este se puede generar a partir de situaciones propuestas en un entorno de diálogo de intersubjetividades, en las cuales tengan la oportunidad de usar sus capacidades, como las discursivas, heurísticas, etc., para lograr dar solución a situaciones problema. Por un lado, aparece la autonomía en el educando de poder realizar constructos de manera individual, y en segunda instancia se cuenta con la orientación o colaboración respectiva que se recibe desde dos tipos de interacciones sociales en el aula: docente con estudiante, y estudiante respecto a otros estudiantes. Dicho desarrollo de pensamiento o aprendizaje para Lev Vigotsky, referenciado en RedesIB (2016), se encuentra determinado en la zona de desarrollo próximo (ZDP), la cual él define como:

La distancia entre el Nivel de Desarrollo Real (determinado por la capacidad de resolver problemas de manera independiente) y el Nivel de Desarrollo Potencial (determinado por la capacidad de resolver problemas bajo la orientación de un adulto o en colaboración con pares más capacitados). (p.6).

El estudiante llega al aula de clase presentando determinados conocimientos propios, que han sido adquiridos en otras experiencias tanto escolares como extraescolares, estos lo sitúan en un nivel de desarrollo llamado por Vigotsky real, y que le permitirán abordar situaciones acordes a este desarrollo. Dichos conocimientos pueden ser enriquecidos o modificados con la ayuda de las interacciones sociales, a fin de alcanzar a desarrollar cada vez más las funciones superiores del pensamiento, y como consecuencia de ello el adquirir la capacidad de resolver cuestiones que demandan un mayor grado de conocimiento. Lev Vigotsky, referenciado en RedesIB (2016), concibe estas interacciones de la siguiente manera:

La educación formal era un instrumento esencial de enculturación. Dentro del contexto de una interacción activa y sistemática entre los niños y el maestro, a los primeros se les van proporcionando, de manera organizada, las herramientas psicológicas que determinarán la reorganización de sus funciones mentales. (p. 5).

Dichas relaciones e interacciones que se generan en la clase, brindan aportes significativos en el proceso de aprendizaje en el educando, a partir de la evolución de los conocimientos iniciales con los cuales llega al salón. Dicha evolución está determinada por el progreso en el estudiante, a través de la variación en el nivel de desarrollo, lo que implica fortalecer los procesos psicológicos elementales (PPE), pero principalmente los procesos psicológicos superiores (PPS). Para Lev Vigotsky, referenciado en Papeles de Sociedad (2018), en relación a las características de los PPE y los PPS enuncia:

Podemos citar entre los ejemplos de PPE a la memoria y la atención. En cambio, los procesos psicológicos superiores (PPS), que se caracterizan por ser específicamente humanos, se desarrollan en los niños a partir de la incorporación de la cultura. (p.5)

Ello, indica que si bien los estudiantes cuentan con características propias relativas a los procesos psicológicos elementales, en tanto que en gran medida estos suelen ser derivados por ejemplo de aspectos genéticos o desarrollo físico, es relevante considerar el papel que juega la cultura en la cual los sujetos se inscriben en el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Complementando, Riviére, referenciado por Salas A. L. C. (2001), se apoya en Vigotsky para abordar las funciones superiores, así: “para él (vigotsky) las funciones superiores eran el resultado de la enculturación, de la influencia cultural en el aprendizaje y el desarrollo, y solo podían ser explicadas en su génesis, por su historia, situándolas en su contexto originante” (p. 61).

Acorde a lo anterior, en las interacciones sociales en el aula, se contempla de manera implícita lo cultural inherente en el estudiante y el docente. Elemento que los maestros podemos identificar y potencializar, a partir de por ejemplo las distintas facetas y nociones que el educando trae consigo y que emergen en la clase, en un salón propuesto dialógicamente. Resultando estos aspectos socioculturales de los sujetos del aula relevantes a la hora de iniciar un diálogo de saberes, que posiblemente dé origen a constructos cada vez más elaborados, y que puedan ser convalidados por las distintas comunidades que influyen el contexto del aula de clase¹³. Es decir, la educación en el aula nace de la cultura y para la cultura en la cual discurren las reflexiones, diálogos y constructos intersubjetivos e intrasubjetivos.

Por ende para el docente de la actualidad, resulta pertinente poder articular el conocimiento que se genera durante el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del aula de clase, con el contexto que caracteriza la vida cotidiana del estudiante. En particular, en el aula de matemáticas conformada como microcultura donde suelen discurrir diversas formas de percibir nuestro entorno, propuestas por diversas culturas o grupos humanos. Donde uno de los propósitos de lo cultural en el aula es el de generar interés en el alumno y alumna en el sentido que pueda comprender o negociar los significados, desde el sujeto y sus interacciones con la sociocultura, de los fenómenos y situaciones que ocurren a su alrededor a partir de su papel en dicha sociocultura. Por tal razón, es posible considerar la educación como el motor sociocultural que promueve en el estudiante procesos de aprendizaje, en los cuales se busca favorecer el desarrollo del pensamiento, que fortalecen tanto los procesos psicológicos elementales como los de tipo superior. Y que a su vez,

¹³ Vygotski citado por Vergel, R. (2014) sugiere: “la cultura origina formas especiales de conducta, modifica la actividad de las funciones psíquicas, edifica nuevos niveles en el sistema de comportamiento humano del desarrollo. En el proceso de desarrollo histórico, el hombre social modifica los modos y procedimientos de su conducta, transforma sus inclinaciones naturales y funciones, elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales” (p.74).

dichos estudiantes se visualicen o identifiquen en un papel a desempeñar en la microsociedad, en unos roles que desarrollan y fortalecen habilidades, conocimientos, heurísticas, etc., de las cuales puedan hacer uso en la búsqueda de soluciones a problemáticas en diversos contextos. En relación con lo anterior, encontramos que:

El reto de hacer una educación matemática cercana a las experiencias de los estudiantes no es fácil. Si la vida de los maestros es complicada de por sí, esta demanda la llena de mucha más complejidad. Sin embargo, poder hacer la matemática escolar tangible y cercana a la vida de los estudiantes es la gran ilusión que mueve a muchos maestros a entrar en el aula cada día, con la esperanza de ver brillar los ojos de aquellos estudiantes que, casi desde antes de empezar la vida escolar, ya se habían declarado derrotados por el ente etéreo de las matemáticas. (Valero, 2012, p. 189)

Lo cual da indicaciones sobre la importancia de la sociocultura en el aula en términos de experiencias de los estudiantes. Por un lado, como aglutinante enculturador en el salón de clase, pero también como espacio en el cual los sujetos de la misma pueden identificarse como parte integrante con unos roles que pueden evolucionar. Además, como aportadores a la generación de nuevas propuestas, resolutores de situaciones e incluso generadores de capacidades que les permitan poner a dialogar diversos desarrollos socioculturales.

Seguidamente, proponemos elementos que pueden aportar a las gestiones microcurriculares realizadas por el docente, y en el marco de un aula propuesta como microsociedad.

2.1.5. Dimensión didáctica (instruccional)

En esta dimensión abordamos elementos de la teoría de la objetivación con el fin de dar una mirada a la microsociedad¹⁴ del aula; en términos de los sujetos que discurren entorno a unas actividades asociadas a unos conocimientos matemáticos escolares. Y también, referiremos algunos errores y dificultades asociados a los objetos matemáticos escolares: razón y simetrías. Ello, en el sentido que los conocimientos del docente sobre estos objetos matemáticos, caracterizados en la dimensión matemática, y en este caso sobre errores y dificultades también le permiten al maestro generar propuestas que posiblemente lleva a los estudiantes a superar dichos errores.

En la ilustración 2, encontramos que uno de los organizadores curriculares propuestos por el análisis didáctico (A.D.) de Bedoya, corresponde al análisis de instrucción. Análisis que, alude a los conocimientos didácticos que tiene el docente y pone en juego en el aula, sobre el diseño e implementación de actividades y unidades didácticas; así como al papel que le otorga a los medios: materiales, contextos y recursos¹⁵ en las propuestas microcurriculares; donde Geogebra se

¹⁴ La clase cumple con criterios que le permiten caracterizarse con una sociedad, de acuerdo con Robertson (1977) citado por D'Amore (2017), dado que: *Ocupan un territorio común (el aula); interactúan entre ellos; saben que pertenecen al mismo grupo; tienen, al menos en parte, una cultura común (o, por lo menos, esto es lo que se supone)*. En el mismo documento el D'Amore enuncia que en las sociedades se presentan dos tipos de grupos: los primarios, que se acogen a las reglas, actividades propuestas; y los secundarios que no necesariamente se acogen a ellas, en cuyo caso se afirma que los integrantes secundarios generan metaprácticas o prácticas no afines con los propósitos de la sociedad de la clase. Así “una clase normal tiende a ser un grupo secundario, pues no está dicho que todos los individuos que forman parte del grupo acepten exactamente los mismos fines y que tengan las mismas perspectivas” (D'Amore, 2017, p.34)

¹⁵ En relación a *recurso pedagógico* encontramos que Garzón, Pabón, & Vega, (2013) afirman:

“entendemos como *recurso pedagógico* a lo que congrega en una sola unidad de análisis el uso de materiales, artefactos educativos o documentos que los maestros traen a clase y los *actos discursivos* en los cuales toman un sentido y significación particulares”. (p.10)

Así, tanto los análisis didácticos, realizados por el docente y llevados al aula, sobre obstáculos epistemológicos asociados a la razón y simetrías, como los artefactos geogebra, triángulo isósceles, decámetro, etc., se constituyen en recursos

configura en uno de los mediadores pertinentes en esta propuesta. Es en ese sentido de análisis de instrucción que proponemos la mirada del aula desde la objetivación, pero también de los errores y dificultades.

En las siguientes líneas, se abordan las propuestas microcurriculares gestionadas por el profesor de matemáticas, que suelen derivar de los conocimientos que debe tener como docente reflexivo y como profesional en su ejercicio, las cuales se configuran como el objeto de estudio de esta investigación. Y como se menciona antes, el abordaje o caracterización de dicho objeto lo realizamos a partir de las ideas de objetivación propuestas por Luis Radford. Veamos.

2.1.5.1. Objetivación y propuestas microcurriculares

Los conocimientos surgen en las distintas culturas necesariamente enlazados a unas formas a través de las cuales estas se significan su medio social y físico. Dichos significados, que no preexisten antes que unos sujetos los generen, surgen de las praxis de los sujetos en el marco de las actividades que estos realizan. A su vez, los saberes se imprimen como conocimiento en la

pedagógicos en el sentido que no están acabados sino que evolucionan (también en el sentido de Garzón et al. 2013) en tanto que el docente los está resignificando continuamente en el aula.

Otra propuesta, sobre recursos y materiales la realiza Flores (2016), en términos de que los primeros son “los materiales no diseñados específicamente para el aprendizaje” (p.279). Y los segundos “son diseñados con fines educativos” (p.276). Estos últimos también llamados materiales didácticos. Ejemplos correspondientes son: tiza, el ábaco, Matlab, etc., son recursos, y cabri geometri, geogebra, geoplanos son materiales didácticos.

Es posible observar que materiales y recursos en el sentido de Flores está inmersa en la propuesta de recursos pedagógicos de Garzón et al.

memoria histórica de las culturas, conocimientos que también tienden a evolucionar en nuevos constructos cognitivos; por ejemplo, a medida que se heredan de generación en generación.

De acuerdo con lo anterior, es posible resaltar la existencia de una riqueza propia a cada cultura que constituye el crisol en el cual toman forma las reflexiones y cosmovisiones de sus sujetos, condensada en lo que Luis Radford denomina sistema cultural semiótico SCS. Según Radford (2004) “los *Sistemas Culturales Semióticos* son sistemas de significación en relación estrecha con la ontología de la cultura” (p.11).

Entonces, entre las actividades de los sujetos y los conocimientos que se generan producto de las reflexiones que estos realizan en el marco de sus prácticas, existe una relación recíproca, enriquecedora e inseparable. Por un lado, las actividades que realizan los sujetos propician reflexiones intersubjetivas, dialógicas y mediatizadas que los lleva a objetivar nuevos conocimientos, que permitan completar los objetivos trazados de la actividad. Reflexiones que están necesariamente estructuradas dentro de dicho *sistema cultural semiótico*. Acorde con lo anterior, pensamos actividad como lo propone Leontiev citado por Radford (2004) cuando afirma que:

El concepto de actividad no hace referencia, pues, simplemente a un espacio donde los individuos se congrega para pensar juntos. No es simplemente interactuar como sugiere, por ejemplo, el interaccionismo. Una actividad, en el sentido de Leontiev, es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objetivo que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas. Una actividad es una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se

relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana (ver Leontiev, 1978/1993). (p.10)

Además, la actividad presenta un estrecho vínculo con la teoría de la objetivación. Radford (2014) enuncia respecto a la teoría de la objetivación que su “principio principal es la idea de labor” (p.137) en el sentido de Leontiev y otros autores relacionados al materialismo dialéctico. En las relaciones que suceden en la labor realizada por los sujetos, se generan las mutuas e inextricables relaciones de creación de la cultura por parte de los sujetos y de los objetos o conocimientos creados por la cultura.

Por otro lado, los conocimientos existentes en la historia de una sociocultura se ponen en juego en el marco de las actividades de los sujetos, y el sistema cultural semiótico no solo cumple la función representacional de los objetos, sino que es el estructurante mismo de las objetivaciones o producciones de conocimiento de los sujetos. Es decir, en la forma como el uso de artefactos, los recursos, en las actividades modifican las estructuras mentales de los sujetos inmersos en la actividad, los objetos cognitivos existentes en una sociocultura y su sistema cultural semiótico modifican las estructuras mentales de estos, configurando lo que se puede denominar la zona de desarrollo próximo de los objetos conceptuales¹⁶. Así, entendemos como medios a todos aquellos recursos, contextos, materiales, sistemas semióticos culturales, etc., que median la actividad de los

¹⁶ Kozulin citado por Vergel, R. (2014) indica que: “Hegel vincula la aparición de la conciencia y la autoconciencia del ser humano con el proceso de actividad mediada que es el trabajo. La noción filosófica de *mediación* ya sugiere toda una gama de posibles agentes mediadores. En primer lugar, el trabajo presupone unos instrumentos materiales interpuestos entre el individuo y el objeto natural. Aunque estos instrumentos están dirigidos a objetos naturales, también tienen una influencia recíproca en el individuo, modificando así su tipo de actividad y de cognición. En segundo lugar, como el trabajo siempre es un trabajo para alguien más, las características sociales y psicológicas de esa otra persona también entran en la ecuación. Por último, puesto que el trabajo es imposible sin representaciones simbólicas, estos símbolos y sus medios de transmisión pasan a ser dos agentes mediadores más”. (p.69)

sujetos estructurando sus conocimientos. Una vez, que los sujetos se posicionan en dicha zona están en posición de generar nuevos objetos que vienen a enriquecer el legado de conocimientos culturales y las actividades de los sujetos. La objetivación se constituye en el paso que dan los sujetos, de una cultura, de la zona de desarrollo potencial hacia la zona de desarrollo próximo en la creación de nuevos objetos. Radford (2004) afirma que:

Objetivar el conocimiento es la acción de convergencia del signo y del pensamiento que lleva a hacer aparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial. Objetivar es toparse con el objeto (con eso que objeta a la conciencia) en el encuentro entre lo subjetivo y lo cultural. (p.2)

Entonces, la objetivación da cuenta del pensamiento mismo generando conocimientos necesariamente inmersos en una sociocultura, producto de diálogos intersubjetivos, reflexivos de los sujetos dentro de las prácticas o actividades que producen en su cultura. En este punto, es pertinente mencionar que la propuesta de objetivación del conocimiento de Radford en relación a los objetos matemáticos se diferencia del idealismo y el realismo. Donde en estas dos últimas, se considera a los signos como el *punte* que permite ver los objetos los cuales se encuentran en un plano más allá de la actividad humana.

En relación al papel del signo Radford (2004) expone lo siguiente:

La actividad humana produce el objeto. El signo y la forma en que este es usado (esto es, su sintaxis) – *forma* necesariamente cultural en tanto que inmersa en *Sistemas Semióticos Culturales* de significación – son considerados como constitutivos del objeto conceptual: estos objetivan al objeto. (p.14)

2.1.5.2. Propuestas microcurriculares en términos de objetivación

Desde la perspectiva anterior, es posible afirmar que las propuestas microcurriculares creadas y gestionadas por el profesor de matemáticas emergen o se objetivan producto de reflexiones, hechas sobre sus prácticas, las cuales convergen en nuevos constructos conceptuales. Es decir, son producto de las actividades que modelan las estructuras de pensamiento, que el docente realiza, enriquecidas por el marco del sistema cultural semiótico al cual pertenece, que forma parte de los objetos creados y dentro del cual tienen sentido.

Y en tanto que dichos objetos, denominados propuestas microcurriculares, no solo son objetivaciones inseparablemente ligadas a sus actividades en el aula de matemáticas sino que a su vez propenden por una actividad reflexiva, dialógica y crítica de los sujetos del aula, estas son fuente de nuevas objetivaciones por parte de todos los participantes del salón. En ese sentido, la influencia de la generación del conocimiento por parte de los participantes del aula hace que se impriman nuevos objetos en su microcultura; propuestas microcurriculares en el caso del docente y conocimientos en el caso de los estudiantes del aula de matemáticas. Estas objetivaciones que surgen, incluso llegan a hacer parte de la historia y de las cristalizaciones conceptuales¹⁷ que posee la sociocultura.

¹⁷ En Radford (2004) se dice que “los conceptos son concebidos como *reflexiones* que reflejan el mundo de acuerdo con cristalizaciones conceptuales (científicas, éticas, estéticas, etc.) que son disponibles a los individuos en cierta época y cultura”

Las propuestas microcurriculares producto de objetivaciones atienden necesariamente a unas actividades de aula que tienen relación con unos objetivos trazados; siendo también cristalizaciones de las cosmovisiones dinámicas socioculturales de los sujetos que la integran. Y por tanto, estas aulas se convierten en microculturas pertinentes para y por los estudiantes, docente y sociedad. Ello en términos de que los sistemas semióticos culturales y las actividades propias de un entorno social local se condensan y se dejan fluir en relaciones, dinámicas discursivas, espacios dentro de los cuales los sujetos reflexionan sobre los objetos propuestos en actividades o situaciones problema con el fin de alcanzar el objetivo propuesto en términos de objetivaciones.

En particular, los sujetos que conforman el aula convergen en la realización de unas labores conjuntas donde la enseñanza y aprendizaje no ocurren de forma separada. Es decir, tanto docente como estudiantes discurren en el aula como “*conociendo (Knowing)*” y como “*voviendose (becoming)*”, términos propuestos por Radford¹⁸. Donde los sujetos en la microcultura del aula conocen en tanto que objetivan unos conocimientos, unas condensaciones históricas puestas en el aula e inextricablemente relacionadas con la cultura. Y se forman como seres (becoming), realizando aportes que pueden evolucionar desde la microcultura hacia la macrocultura; ello en tanto que contacto con la labor, el sistema semiótico cultural en una microcultura intersubjetiva.

En ese marco de ideas es posible significar un aula conformada por microculturas o equipos colaborativos, los cuales mas halla de reunirse en torno a unos conocimientos se proponen como

¹⁸ Al respecto de los estudiantes o sujetos en el aula, Radford (2014) propone que “en la enseñanza y aprendizaje deben estudiarse tanto los conocimientos en juego (es decir, el *conociendo* o ‘Knowing’ de los alumnos), como la formación del alumno en tanto que sujeto humano (es decir, el *volviéndose* o “becoming,” esto es, la transformación perpetua del sujeto” (p.135).

sujetos que objetivan intersubjetivamente elementos de la sociocultura los cuales les permite formarse en el ser.

2.1.5.3. Microcurrículo y Zona de Desarrollo Próximo

Un docente reflexivo en función de objetivador de propuestas microcurriculares requiere reflexionar sobre el microcurrículo actual. Dicha reflexión lo prepara, tanto cognitivamente como en su práctica, para realizar avances hacia una zona de desarrollo próximo en el sentido de Vygotsky. Pero, ¿porque decir una zona y no la zona? Porque esta zona de desarrollo próximo alude a posibles objetivaciones microcurriculares locales, y puede tener tantas posibilidades de convergencia o desarrollo (de propuestas microcurriculares) como las prácticas, las actividades y el sistema semiótico cultural lo perfilen.

Entonces, las actividades o prácticas en el aula puestas en diálogo reflexivo con unos objetos conceptuales cristalizados en la didáctica de las matemáticas, en las matemáticas mismas y en el sistema semiótico cultural preparan al docente para previsualizar las posibles objetivaciones microcurriculares. Son esas cristalizaciones, tomadas en otros apartados como organizadores locales del currículo, las que configuran los microcurrículos que requiere un grupo sociocultural, por ejemplo de tipo local, y que estarán en la zona de desarrollo próximo del docente.

En otros términos, la objetivación de propuestas microcurriculares está prefigurada en los cambios culturales mismos. Así, decir que la educación, o más concretamente las formas como

actualmente se presentan las clases en las aulas de matemáticas, está atrasada respecto a los cambios que se gestan en el mundo actual con sus avances en diversas ramas equivale a decir que en el sistema cultural semítico se están prefigurando nuevas propuestas microcurriculares a ser objetivadas. Propuestas que más que dar respuesta temporal a los requerimientos de los estudiantes en términos cognitivos, también configuren actividades en las cuales las microsociedades aporten avances a la sociocultura a la que pertenecen.

Es más, en tanto que las propuestas microcurriculares se objetivan dentro de las actividades microcurriculares a partir de reflexiones de los sujetos, estas tienden a imprimirse y seguir evolucionando en la historia sociocultural. Y por el carácter dinámico y continuo de las objetivaciones de propuestas microcurriculares, a partir de actividades reflexivas de los sujetos, estas darán respuesta incluso a avances en las diversas cristalizaciones que se estén dando en tiempo real en el mundo, y por tanto la educación comenzará no solo a dar respuesta a necesidades educativas sino tal vez a perfilar nuevas vías de innovación en la sociocultura.

Para finalizar, tanto las actividades en el aula como los conocimientos del docente se movilizan en el marco de los sistemas semióticos inherentes a la cultura a la cual pertenecen. Y es mediante la actividad reflexiva que el docente realiza continuamente, la que le permite avanzar en la objetivación de propuestas microcurriculares no estáticas e incluso innovadoras; las cuales serán continuamente enriquecidas en tanto que dicha reflexión se mueve sobre las prácticas de sujetos con cosmovisiones dinámicas y que se resignifican en contextos sociales.

2.1.5.4. Errores y dificultades

En la dimensión matemática se caracterizan la razón áurea, las simetrías y las posibles conexiones entre ellos; así como se identifica la presencia de estos contenidos matemáticos en el currículo nacional, y se realiza un análisis fenomenológico. Es entonces pertinente indicar que en esta sección proponemos un acercamiento a los posibles errores y dificultades, relativos a la razón y las simetrías. Veamos.

El conocimiento surge de y en la experiencia humana. Experiencia que se presenta de diversas formas en el aula de matemáticas, la cual suele contener las cosmovisiones, conocimientos previos, generación de propuestas, etc., en una mezcla de conocimientos válidos y errores. Estos últimos, juega un papel en las experiencias de conocer de los sujetos, tanto a través de la historia como en las aulas escolares de matemática. Pero ¿qué es el error?¹⁹

Abordamos el error y la dificultad desde la propuesta de Luis Rico. Entendemos que “*el error es conocimiento deficiente e incompleto*” (Rico, 1995, p.1). Ello en el sentido de que en lo referente a los conocimientos matemáticos escolares, suelen existir unos conocimientos presentes en el currículo o propuestas de una comunidad y que se aspira alcancen los educandos; que a su vez sirven de comparación con los conocimientos erróneos generados por los estudiantes, vistos a través de respuestas erróneas a problemas planteados.

¹⁹ Otra explicación, de la aparición inevitable de los errores la realiza Bachelard, citado por Rico (1995), desde lo que denomina los obstáculos epistemológicos. Él dice: “en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde discernimos causas de inercia que llamamos obstáculos epistemológicos”.

Una característica de los errores es su presencia como conocimientos erróneos combinados con prejuicios y con otros conocimientos considerados válidos, presentes en la experiencia humana de conocer. Es decir, podemos pensar que la presencia del error en el aula de matemática se constituye en fuente de conocimiento que surge de los mismos sujetos del salón. Conocimiento que requiere de ser continuamente revisado, reflexionado; tanto por estudiantes en el sentido de su experiencia de aprender, como por el docente en la identificación de los errores generados por los estudiantes y el generar prácticas de diseño y gestión de propuestas microcurriculares de validación de los conocimientos por medio de continuas y necesarias aproximaciones de los errores en el aula. Es decir, el error tiene un papel en el aula en tanto que *“las organizaciones insuficientes o claramente deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte legítima de nuestro acceso al conocimiento, forman parte de nuestro modo de conocer”* (Rico, 1995, p.3). Además, Luis Rico también menciona que es pertinente reconocer que los errores *son función* de diversas variables, incluso inseparables, como el docente, el currículo, el entorno socio cultural y sus relaciones.

Si bien, el error se manifiesta como conocimiento incompleto, en la experiencia de conocer suele tener relación con unas dificultades. Entendemos como dificultades a *“los factores que obstaculizan los procesos de comunicación entre el profesor y el alumno, o la propia interacción del profesor con el conocimiento matemático, pueden repercutir directa o indirectamente en la relación del estudiante con el conocimiento matemático”* (Fernández, 2016, p.195). En el mismo documento José Fernández propone una aproximación a las dificultades, identificando: dificultades debidas a la relación entre el alumno y el contenido, dificultades debidas a la presentación por el profesor del contenido, dificultades debidas a las condiciones cognitivas del

alumnado y dificultades debidas a condiciones afectivas del alumnado. A su vez, “errores y dificultades, conjuntamente, constituyen un organizador curricular de *denominamos limitaciones para el aprendizaje*” (Fernández, 2016, p.195).

Por último, proponemos una caracterización de errores, dentro de los cuales buscamos hacer más énfasis a los relacionados con razones y simetrías. Radatz, citado por Rico (1995), propone la siguiente clasificación general basada en el procesamiento de la información.

1. *Errores debidos a dificultades de lenguaje.* Este tipo de error refiere al dominio, o más bien falta de dominio, de los diversos registros de representación semiótica de los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos. Así el paso de un problema propuesto en lengua natural puede representar dificultades para el estudiante si por ejemplo no domina la representación algebraica del mismo manifestándose en la generación de expresiones erradas. En geometría al enunciar una pirámide de base cuadrada. Ello puede llevar al estudiante a considerar que si la representación de la pirámide siempre se encuentra apoyada sobre la cara cuadrada entonces es pirámide de base cuadrada, pero si se apoya en una de las caras triangulares no se logra reconocer como tal. Asociando erradamente al registro natural una cierta orientación de la pirámide en el espacio.

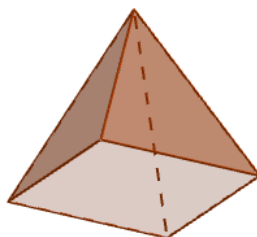


ILUSTRACIÓN 13: PIRÁMIDE DE BASE CUADRADA

Esta ilustración 13 es de elaboración propia (ejemplifica *errores debidos a dificultades de lenguaje* propuesto por Radatz, citado por Rico (1995)).

2. *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.* Son errores que se presentan en las construcciones, modelos, soluciones, interpretaciones geométricas realizadas por los escolares. Los cuales pueden ser producto de las formas como el sujeto interpreta, visualiza o piensa en imágenes espaciales y sus relaciones; formas que suelen diferir de un estudiante a otro. Por ejemplo, es el caso de una de las representaciones usuales de la esfera con lápiz y papel. Donde el estudiante más que observar una esfera puede estar visualizando una circunferencia con una especie de figura elíptica inscrita y el radio solo es un segmento que intersecta tanto a la elipse como a la circunferencia así percibida. Una posible ayuda para el estudiante, en términos de superar este tipo de error, puede ser la de presentar al alumno un objeto esférico como un balón; o realizar la representación de la esfera en un ambiente de geometría dinámica en el cual se permita rotar o visualizar desde distintos puntos de vista en el espacio.

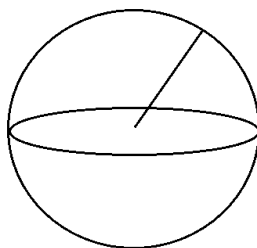


ILUSTRACIÓN 14: REPRESENTACIÓN PLANA DE UNA ESFERA O SÓLIDOS

Esta ilustración 14 es de elaboración propia (ejemplifica *errores debidos a dificultades para obtener información espacial* propuesto por Radatz, citado por Rico (1995)).

Otro error asociado a la dificultad de pensar mediante imágenes visuales es el de determinar la altura de un cono no recto (ilustración 15) coincidiendo con aquella de un cono recto.

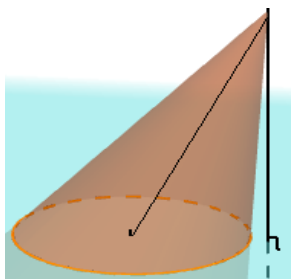


ILUSTRACIÓN 15: ALTURA (ES EXTERNA) DEL CONO POR EL CENTRO DEL CÍRCULO

Esta ilustración 15 es de elaboración propia (ejemplifica errores debidos a dificultades para obtener información espacial propuesto por Radatz, citado por Rico (1995)).

3. *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Así por ejemplo, para el estudiante que ha tenido un mínimo y regularmente estructurado contacto con sucesiones o patrones geométricos es más probable que dichas carencias surjan como errores a la hora de crear modelos geométricos de estructuras reales. Así como, el expresar el patrón de formación de una sucesión como una combinación de elementos matemáticos correctos e incorrectos.*

4. *Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Persisten en la mente (de estudiante) algunos aspectos del contenido o del proceso de solución (aplicado a problemas anteriores), inhibiendo el procesamiento de nueva información. Pertenecen a este tipo de errores:*
 - ✓ *Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.*
 - ✓ *Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.*

- ✓ *Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.*
- ✓ *Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.*

Un caso asociado a la medición, y uso pertinente de unidades de medición surge por ejemplo cuando se le solicita al estudiante el realizar dos mediciones de longitudes distintas en un segmento, plano o sólido, usando una herramienta llamada “metro”. Una de las medidas es mayor a un metro y la otra es menor. Es probable que el estudiante por un lado determine una de las medidas en unidades de metros, y la otra en cm. Y paso seguido, tiene dificultades para identificar la relación entre las dos longitudes, más aun si se le solicita determinar la razón entre estas.

5. *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.* Se suele presentar cuando se aplican estrategias que tuvieron éxito en la resolución de cierto tipo de problemas a otros que aluden a unos conocimientos de contenido matemático muy diferentes. Por ejemplo, una heurística carente de relevancia es la de considerar la respuesta encontrada como correcta, sin someterla a revisión o reflexión. Lo cual puede derivar de una falsa comparación entre dos problemas que aparentemente son similares, y dentro de los cuales la solución del primero fue válida, por tanto el estudiante puede errar en asumir la validez de la respuesta del segundo problema por analogía directa. O también, aplicar la misma regla de formación de los números pares a la sucesión de Fibonacci.

Por otro lado, y más específicamente en relación a las simetrías y la razón áurea encontramos una propuesta de Moreno. En cuanto a errores y dificultades asociadas a las transformaciones. Según Moreno (1998), el trabajo por parte de los estudiantes sobre las isometrías suelen presentar dos tipos de errores. El primero se origina en el concepto mismo de simetría. Por ejemplo, en el caso de la simetría axial pueden aparecer errores asociados a la equidistancia respecto a la recta; o a la no perpendicularidad de la recta que une dos puntos de la figura y su correspondiente en la imagen respecto al eje de simetría. El segundo, está más relacionado con una dificultad debida a la forma de presentación o gestión del conocimiento, cuando por ejemplo el docente o los libros de textos suelen representar los ejes de simetrías siempre de forma paralela, perpendicular o diagonal a los lados del tablero o el texto de notas. Lo mismo, se puede afirmar respecto a las simetrías especulares y las centrales. Además, como se relaciona en el trabajo de investigación también existen otros errores asociadas con el trabajo de objetos en el espacio y las vistas, etc.

En cuanto a errores y dificultades, que se suelen identificar en el trabajo realizado por estudiantes, asociadas a la proporcionalidad y por tanto al tratamiento que le estamos dando al número áureo. Es Moreno (1998), quien nos aporta luces al tema. Una de ellas se relaciona con la identificación de criterios que permitan determinar si la relación entre dos magnitudes es de tipo proporcional directa o inversa o ninguna de las dos, en contextos reales. Otro error que se suele observar es el de utilizar la diferencia entre valores dados (estrategia aditiva) y no las relaciones multiplicativas. Adicionalmente, se encuentra el invertir la relación (de producto a división o recíprocamente). Y agregaríamos, el tratamiento pertinente o con sentido, al fenómeno que se estudia con proporciones, de las magnitudes y las escalas relacionadas.

2.1.5.5. Posibles aportaciones a los estudiantes, al docente investigador y a las instituciones educativas.

Siendo las instituciones educativas ricas en fenómenos como estructuras naturales (flores, árboles, espacios verdes, etc.) o artificiales (aulas, ventanas, pisos, techos, canchas, coliseo, etc.) susceptibles de estudios como la creación de modelos en las cuales se requiera dar cuenta de isometrías, escalas y de criterios como la proporción áurea relacionada con la belleza de patrones, espiral áurea, etc.

Es posible que este tipo de propuestas de resolución de problemas abiertos de construcción geométrica por medio de la modelación y su relación con el número áureo y/o isometrías permita por un lado enriquecer el aula de clase, las resignificaciones y las prácticas del docente investigador. Ello, en términos de gestionar un currículo donde pueden confluir aspectos socioculturales (entorno), creencias de los integrantes, conocimientos traídos al aula, y otorgando un papel más protagónico a las posturas, decisiones, argumentos, modelaciones que realizan los estudiantes. Y en el caso de los estudiantes, estarán por un lado poniendo sus propios conocimientos sus relaciones intersubjetivas en el aula en favor de generar creaciones o modelos de fenómenos cercanos a sus comunidades, y por tanto generando conocimiento crítico y formal en el aula. Entonces, es probable que dichos estudiantes fortalezcan las competencias argumentativas, y de resolución de problemas que posiblemente les lleve a ser propositivos, críticos y analíticos en sus entornos escolares, familiares, comunitarios, y al país.

2.1.5.6. Medios: materiales y recursos

En relación a la modelación geométrica 3D, planteada en la unidad didáctica de este trabajo, proponemos a los estudiantes el uso de varios materiales y recursos. Considerando que en el marco de una propuesta microcurricular sociocultural son tan relevantes las relaciones entre los sujetos así como los mediadores puestos en el aula para realizar una actividad. Es decir, como se ha mencionado en la dimensión cognitiva los diálogos intersubjetivos permiten negociar significados por parte de los estudiantes, aportándole a la experiencia de aprender. Así mismo, los medios seleccionados por el docente configuran las objetivaciones que se producen en el aula, dan forma a los significados de los sujetos en torno a unos objetos matemáticos.

Es en esa dirección que, Geogebra 3D llevado al aula toma sentido y le aporta al sentido de las actividades presentes en la propuesta microcurricular de este trabajo. Ello en tanto que, por un lado el docente seleccione los materiales y recursos a partir de unos criterios dados por el análisis didáctico correspondiente, en este caso a la TD Geogebra. Considerando que “los materiales y recursos son medios facilitadores que contribuyen a mejorar y ampliar las oportunidades de aprendizaje” (Flores, 2016, p.287). Por ejemplo, en términos de modelación con geogebra 3D el análisis de instrucción y el fenomenológico sobre simetrías permiten proponer que Geogebra 3D favorece oportunidades para utilizar registros de representación gráficos de objetos geométricos, así como registros algebraicos relacionados a estos. Lo cual puede favorecer que los estudiantes superen entre otros, algunos *errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento*, por ejemplo haciendo uso de la herramienta *arrastre* de geogebra que permite explorar, validar o replantear la existencia de posibles relaciones entre los objetos geométricos, y

también del modelo en Geogebra con la estructura real que representa. Geogebra 3D facilita el que los estudiantes conjeturen y prueben acerca de las isometrías presentes en sus modelos, mostrando que dichas transformaciones se obtienen como producto del movimiento continuo de una figura en un espacio, en este caso geométrico (ver p.66). Adicionalmente, Geogebra 3D se presenta como un mediador con el cual los estudiantes pueden dar cuenta de propiedades geométricas de sus modelos, pero pueden surgir limitaciones por ejemplo derivadas de conocimientos previos incompletos. Tal vez derivadas de gestiones microcurriculares no pertinentes por parte del docente o no instaladas en un análisis didáctico, etc. Es pertinente mencionar una restricción, Geogebra 3D carece de una herramienta que permita modelar la ventana en una pared por sustracción de poliedros; en Geogebra necesariamente se debe realizar por adición de poliedros, lo cual torna más densa la construcción de modelos de estructuras artificiales.

Y por otro lado, Geogebra en sí es producido por comunidades humanas, y por lo tanto contiene intencionalidades de los autores, impresas en estructuras semióticas que entran a configurar las posibles zonas de desarrollo potencial de los estudiantes. Es decir, “al ser una actividad humana, la elaboración de simuladores con Geogebra lleva consigo una componente social que coadyuva a la producción de conocimiento en este contexto” (Castillo, 2018, p. 273). El término simulador de este autor contiene similitudes con nuestra propuesta de *modelo* con Geogebra. Entonces durante la modelación con Geogebra, de estructuras artificiales o naturales del entorno escolar, los estudiantes requieren comprometerse por un lado con la resolución misma del problema, y por el otro con las participaciones pertinentes o prácticas de cada sujeto hacia el problema y hacia los otros sujetos vía a completar la actividad propuesta.

Adicionalmente, durante la implementación de la unidad didáctica, proponemos a los equipos de estudiantes hacer uso de otros materiales y recursos. Por ejemplo, de una tabla que contiene datos históricos, geográficos, contextuales, etc., de las instituciones educativas correspondientes y sus entornos. Tabla que se ve enriquecida con los aportes de una persona invitada a una entrevista semiestructurada y en la cual los estudiantes están invitados a participar dialógicamente²⁰. También, cuentan con una guía en la cual se da una introducción y ejemplos de frisos, teselas y número áureo en situaciones artificiales y naturales. Una actividad sobre proporción áurea y uso de cintas de papel y cintas métricas, para aproximar el número áureo a partir de dicha proporción. Un video corto descargado de YouTube que contiene información sobre la sucesión de Fibonacci, y a partir de la cual se les solicita a los equipos de estudiantes que descubran el número áureo como tendencia de la razón entre dos términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.

Otros materiales y recursos son: el uso del salón de clases, el auditorio, sala de sistemas con computadores portátiles para cada estudiante y cuya distribución física es rígida, uso de celulares, tabletas, decímetros o metros, y una herramienta creada por los docentes investigadores llamada “triángulo semejante”. Dicho triángulo rectángulo e isósceles se realizó con palitos de balsa, un pitillo sobre la hipotenusa y una cuerda sobre uno de los catetos (plomada para lograr perpendicularidad). Triángulo que tiene el propósito, unido a una cinta métrica, que los estudiantes puedan medir desde el suelo las alturas de algunas estructuras altas, que se proponen modelar en geogebra 3D. A continuación, y a propósito de la instrucción proponemos algunas reflexiones sobre un currículo integrado.

²⁰ Díaz, Torruco, Martínez & Varela (2013) proponen que una entrevista semiestructurada “parten de preguntas planeadas, que pueden ajustarse a los entrevistados. Su ventaja es la posibilidad de adaptarse a los sujetos con enormes posibilidades para motivar al interlocutor, aclarar términos, identificar ambigüedades y reducir formalismos” (p.163).

2.1.6. Currículo Integrado

Todas las culturas tienen unas formas de compilar, gestionar, construir, reflexionar, perpetuar de sí mismas aquellos conocimientos, técnicas, habilidades, constructos, valores y aspectos que permiten que los sujetos de dicho grupo cultural den cuenta de su identidad, y a su vez piensen y actúen en pro del desarrollo de ciertas prácticas. Es decir, los sujetos en tanto que sociales se proponen unas formas de gestionar y hacer evolucionar sus saberes, y los que obtienen en interacción con otras culturas, por medio de diversas prácticas que se pueden denominar educación. Entonces, la educación esta intrínsecamente relacionada con unas estructuras u organizaciones de los saberes y las prácticas que permiten ponerlos a disposición de las nuevas generaciones. A dichas estructuras referidas al campo de la educación, en algunos casos más dinámicas que en otros, se les suele denominar currículo. En otras palabras, el currículo atiende a cuestiones del “que educación, para que educar, como educar, y como valorar los resultados” (Rico & Lupiáñez, 2008, p.159).

Desde dicho punto de vista, en una región o país el currículo permite visualizar posibles concepciones que tienen los sujetos respecto a la educación, en términos de cosmovisiones y el papel de lo subjetivo y objetivo en las mismas. En otras palabras, permiten dar cuenta de que herencia cultural, desde los saberes, quieren legar a sus niñas y niños con el fin de que estos puedan dar cuenta en un futuro de posibles construcciones dialógicas del saber, de aportes y avances para los sujetos que conforman su sociocultura.

Lo anterior, nos acerca a un currículo que lejos de dar cuenta de unas formas fraccionadas del conocimiento y las prácticas, es más una rica o compleja red de relaciones dinámicas que deben dar cuenta de saberes; que deben tener sentido para las alumnas y alumnos en relación con las realidades de las cuales hacen parte. En lo que respecta a los docentes, cuando se dice prácticas como parte del currículo no se está proponiendo en el sentido estricto de técnicas, sino más bien a unas formas en que los profesores y profesoras reflexionan críticamente, investigan e incluso se inscriben en la apuesta por proponer currículo a partir de análisis realizados sobre fuentes o referentes internacionales, nacionales y locales, y/o de dotar de categoría de saber a sus experiencias en el aula.

El docente, o comunidad de docentes, es quien a partir de su dominio sobre los referentes curriculares nacionales, respecto a las propuestas de la institución educativa que en Colombia se visualizan en el Proyecto Educativo Institucional PEI, y sobre las características de su aula de clase, gestiona o dinamiza propuestas y diseños microcurriculares. Pero, ¿cuáles son las posibles miradas que puede dar un docente al currículo, visto como conjunto rico de interrelaciones de saberes socioculturales? Una posible respuesta se puede encontrar en el currículo integrado.

Las construcciones del conocimiento y sus formas de estructurarlo en los actuales currículos educativos permiten a los docentes tener un conocimiento, una visión de los saberes que su sociocultura desea poner en juego en los constructos cognitivos de los educandos. Ello le dice por un lado, y en líneas generales, cual es el compendio de saberes a poner en juego en el aula y que permitirán desarrollar habilidades en sus estudiantes para que sean sujetos que aportan en su entorno; en términos por ejemplo de resolución de problemas o de plantear posturas dialógicas

críticas y reflexivas a diversas situaciones. Y por otro, debe invitarlo a pensar críticamente sobre diseñar e implementar posibles propuestas curriculares con otras estructuras que partan desde el diálogo inter o transdisciplinar o que cuestionen las raíces epistémicas mismas del saber en tanto que las formas que han llevado a tan particular estructuración del currículo. Y como los conocimientos no son aislados de los sujetos, o los grupos de personas que los producen, las formas de crear currículo necesariamente están intrínsecamente ligadas a las dinámicas propias de la cultura que los crea, de los desarrollos, de las evoluciones conceptuales y prácticas, de las cosmovisiones de los sujetos y de las posibles líneas hacia las cuales se perfilan avances de la humanidad a futuro.

Una forma tal de acercarse al currículo parece dar cuenta de una concepción dinámica del mismo. Donde, todos los actores de una sociocultura construyen o deconstruyen currículo en la medida que se piensan unos saberes como legado de culturas anteriores, los cuales tienen características maleables que permiten diseñar nuevas relaciones entre conocimientos, formas de producir conocimiento de los sujetos, entre otras.

Entonces, el currículo debe dar cuenta de los conocimientos y habilidades que se desean desarrollar en los sujetos de un país o región. En dicho proceso de enculturación llamado educación, es pertinente que el mismo currículo de cuenta de las producciones cognitivas propias de cada alumna y alumno, las cuales están necesariamente relacionadas tanto con aspectos ontogenéticos como culturales. Es decir, respecto a lo cultural los conocimientos y creencias que tienen los estudiantes producto de sus relaciones en el entorno familiar, el sector que habitan, la

ciudad e incluso el conocimiento sobre otras regiones o culturas juegan un papel en el aula de clase.

Lo anterior parece tener cierta afinidad con la propuesta de currículo integrado realizada por Jurjo Torres Santomé, el cual se estructura a partir de considerar aspectos *interdisciplinarios*; la *globalización*, en términos de tener en cuenta en el aula las características cognitivas y experiencia e historia de los niños y niñas; y la *sociedad global* desde la cual se le presenta al estudiante diversas situaciones de otras culturas. Y en este último, se busca en todos los sujetos próximos al acto educativo, la reflexión y análisis sobre las interrelaciones culturales, el rol de la paz, y fenómenos de tipo local que posiblemente pueden influir sobre otras culturas o desde lo global y su rol en lo local.

Acorde con lo anterior, Torres (1996) afirma que:

Es desde la atención a las dimensiones personales, comunitarias, a la preocupación por los problemas sociales de actualidad y de los desarrollos de la ciencia y tecnología como se llega a calibrar la funcionalidad y valor de los contenidos culturales del currículo, de las teorías, conceptos, procedimientos y valores que se seleccionan para trabajar en las aulas.

Por consiguiente, una buena enseñanza integrada es mucho más que la aplicación de una determinada metodología o una técnica. (p.42)

Por su parte, actualmente en Colombia los lineamientos curriculares de matemáticas, propuestos como un conjunto de criterios u orientaciones generales plantean que estos: “han de generar procesos de reflexión, análisis crítico y ajustes progresivos por parte de los maestros, las

comunidades educativas y los investigadores educativos, hacen posible iniciar un cambio profundo hacia nuevas realidades” (MEN, 1998, p.2).

Con ello se invita, al maestro a visualizar relaciones ricas de sentido, de nuevos significados y de contrastes o diálogos teóricos. Lo cual requiere ir en consonancia con la propuesta de centrar la educación de nuestras alumnas y alumnos en el desarrollo de competencias. Además, significa que el docente primero debe dar cuenta de una reflexión y significación del papel de dichas competencias en el aula, para subsecuentemente realizar propuestas microcurriculares que generen tanto la eclosión como el fortalecimiento de las mismas. En este punto del discurso, es pertinente decir que las competencias presentes en el currículo de matemáticas aluden a la habilidad para resolver problemas, dar cuenta dialógicamente o mediante diversos registros de representación de los conocimientos, habilidades desarrolladas y también el poder esgrimir diversas estrategias de argumentación en términos de construir o dominar conceptos e ideas propuestas.

Para finalizar, es posible inferir que dichas competencias no solo tocan al campo de las matemáticas escolares, sino también a otras formas de conocimiento o contextos en los cuales discurren los sujetos tocantes a la educación.

2.2. Propuesta metodológica de clase (*Propuesta microcurricular*)

Modelo microcurricular de tipo sociocultural

A continuación, proponemos en la siguiente ilustración 16 un modelo microcurricular tomando como referencia las dimensiones, abordadas en páginas anteriores, sobre los conocimientos que se espera sean parte de los docentes en formación permanente, ya sea de tipo inicial o en ejercicio. Ellos son conocimientos de contenido matemático, conocimiento didáctico (de instrucción), medios (contextos, materiales y recursos), y creencias y metas.

Conocimiento Didáctico & Análisis Didáctico

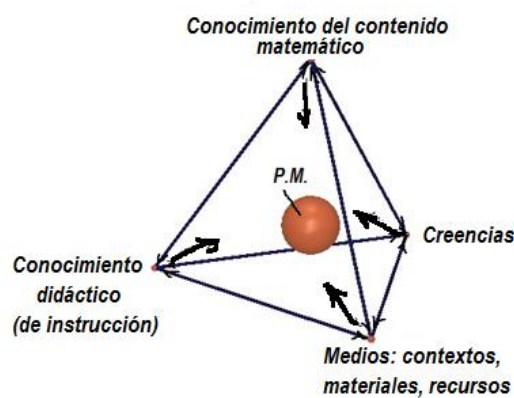


ILUSTRACIÓN 16: MODELO MICROCURRICULAR DE TIPO SOCIOCULTURAL EN RELACIÓN CON LOS CONOCIMIENTOS DEL DOCENTE

Ilustración 16 es de elaboración propia, y fue inspirado para esta propuesta microcurricular a partir de realizar un zoom a la propuesta de la Ilustración 2 tetraedro fractal relativa a la tomada de Bedoya, 2016, p. 22.

En este modelo se observa que los cuatro vértices o componentes le aportan a los otros. Es decir, todos ellos, así como las relaciones dinámicas que se generan entre ellos en el marco de la disciplina Didáctica de las Matemáticas, convergen en el aula de matemáticas a través del análisis de currículo y la reflexión realizados por el docente en el diseño, implementación y evaluación de

unidades didácticas, propuestas metodológicas de clase; es decir, el diseño, análisis, gestión y evaluación de propuestas microcurriculares (P.M). Donde, la Didáctica de las Matemáticas así como el Análisis Didáctico constituyen todo el universo dentro del cual están los cuatro tipos de conocimiento interactuando entre sí en los constructos que el docente propone. Es pertinente mencionar que aunque los cuatro vértices y las aristas consideradas parecen dar cuenta de relaciones estáticas entre ellos, por las características geométricas mismas del tetraedro regular, nuestro modelo se piensa de forma dinámica donde cada elemento del tetraedro y sus interrelaciones, y por tanto las propuestas microcurriculares del docente, evolucionan en la medida que el docente reflexiona y aporta a las soluciones de las problemáticas presentes en la disciplina Didáctica de las Matemáticas. Es decir, cada vértice, cada relación presente entre los vértices del tetraedro nutre, enriquece continuamente a los otros en la medida que el docente apropia y les realiza Análisis Didáctico reflexivo, crítico, propositivo con miras a construir o resignificar sus diseños de propuestas microcurriculares. A su vez, las propuestas microcurriculares puestas en práctica generan nuevos conocimientos en el docente que también nutrirán a los cuatro vértices del tetraedro.

2.2.1. Relaciones entre las componentes o vértices que constituyen el modelo microcurricular de tipo sociocultural

La caracterización de los vértices del modelo ya ha sido expuesta en dimensiones del marco teórico, como la epistemológica de los conocimientos del docente y la didáctica. A continuación, nos proponemos abordar algunas relaciones entre los vértices en términos de aportarle a propuestas o diseños microcurriculares de tipo sociocultural.

Es pertinente poner la mirada en el vértice de los conocimientos didácticos. Realizando un zoom en dicho vértice se encuentra el modelo de los contenidos de Análisis Didáctico Bedoya (2016) referenciado en la figura 2, haciendo claridad que la ‘Estructura Conceptual’ en Bedoya correspondería a los ‘Conocimientos de Contenido Matemático’ del modelo MKST.

A partir de lo anteriormente expuesto, en el siguiente apartado proponemos una aproximación a los aspectos relativos a una propuesta microcurricular enfocada desde lo atinente al docente que gestiona la clase de matemáticas. Es decir, intentamos hacer converger en la metodología de clase todos aquellos aspectos que se esperan estén presentes en el docente de matemáticas a la hora de diseñar unidades didácticas o diseñar propuestas de clase, partiendo del Análisis Didáctico.

Para ello, proponemos por un lado, que para tal fin los docentes requieren conocer y estar conociendo sobre los Conocimientos de Contenido Matemático, conocimientos relativos a Didáctica de las Matemáticas o Conocimientos de Contenido Didáctico, conocimientos sobre aspectos socioculturales, medios y recursos, y conocimientos sobre metas y creencias. Seguido, esbozamos el papel de los Organizadores de Currículo y el Análisis Didáctico como aquellos de los cuales hace uso el docente para hacer converger todos los componentes en una Propuesta Microcurricular, y a su vez analizar la puesta en práctica, evolución y evaluación de dicha propuesta. Pensando en los vértices y sus relaciones como Organizadores Locales de Currículo, en tanto que las propuestas de aula atienden a un contexto determinado (Ilustración 16).

Veamos. Si bien las creencias hacen parte de los aspectos socioculturales que comprenden a los participantes del aula, en el caso del docente se espera que dichas creencias estén constantemente

evolucionando en tanto que el docente reflexiona sobre las mismas, poniendo a dialogar los Conocimientos de Contenido Matemático, con los Conocimientos Didácticos y la sociocultura. Dicha reflexión la proponemos en un intento por relacionar las creencias del docente, con los aportes científicos o matemáticos y de la Disciplina Didáctica de las Matemáticas, inherentes a la sociocultura. El diálogo entre las diversas dimensiones, entre ellas y los conocimientos matemáticos o disciplinas científicas, es posible dado que todos ellos devienen de constructos socioculturales, es decir humanos. En este caso pensando lo sociocultural desde lo macro: comunidad científica, académica, económica, comunidades, etc., y lo micro constituido por profesor y estudiantes. Así por ejemplo, el docente puede poner a dialogar sus creencias respecto a la didáctica, al macro, meso y microcurrículo, a los sujetos que integran su aula, a los constructos científicos, etc. Producto dinámico de dicha reflexión es el que sus creencias tienden entonces a sustentarse en un mayor juego de dimensiones que constituyen lo sociocultural, y por tanto puede hacerlas converger en una clase concebida de forma sociocultural. Se enuncia, producto dinámico en el sentido que cada reflexión genera unas nuevas visiones o creencias, las cuales se piensa que seguirán evolucionando en el docente y para el docente reflexivo. Nótese que ello no excluye las creencias de los estudiantes o del mismo docente relativas a otros aspectos de sus culturas, más bien dichas creencias se verán enriquecidas dado que producto del diálogo, antes mencionado, el docente puede generar en su aula de clase una puesta de actividades o unidades didácticas que tienen en cuenta no solo las creencias sino también las otras componentes de la sociocultura. A su vez, ello invita al estudiante a construir conocimiento en la intersubjetividad, donde pondrán en diálogo los aspectos de la sociocultura generando conocimiento matemático a partir del diálogo de intersubjetividades.

Así como los estudiantes aprenden en las interacciones sociales, según la propuesta de Vygotski mostrada en párrafos anteriores en la dimensión cognitiva, también es posible pensar que el docente aprende, y a su vez enseña, producto del diálogo reflexivo entre dimensiones de la sociocultura. Así, la reflexión dinámica toma sentido cuando se piensa que toda la sociocultura evoluciona o cambia constantemente como lo afirma Leontiev. Por ejemplo, un grupo de estudiantes de un salón de clase tiene sus propias características socioculturales producto de dicha evolución, las cuales pueden diferir de otro grupo aunque ambos pertenezcan al mismo ciclo escolar e incluso a la misma institución educativa.

Entonces el docente que reflexiona, en el sentido que hace Análisis Didáctico, sobre la sociocultura, requiere continuamente cuestionarse sobre diversos aspectos. Por ejemplo, sobre ¿Qué es lo que conozco de mis o de las creencias sobre como aprenden mis estudiantes? ¿Cuál creo que es el papel que se le otorga a los conocimientos movilizados en el aula en términos de que estos posiblemente puedan realizar aportes a la sociocultura? ¿Qué es lo que conozco respecto de aspectos socioculturales generales y en mi aula? ¿Qué interrogantes están actualmente abiertos o se están investigando en el marco de la Didáctica de las Matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje? ¿Qué interrogantes aún no se han realizado sobre la Didáctica de las Matemáticas? ¿Qué interrogantes se pueden generar respecto al papel de los aspectos socioculturales en una propuesta microcurricular de tipo sociocultural? Más que resolver estas cuestiones, en esta investigación proponemos de forma abierta estas preguntas para generar en los lectores posibles vías de reflexión.

Lo anterior permite que los conocimientos socioculturales, y sobre las creencias que evolucionan a partir de la investigación, puedan aportar a los Organizadores de Currículo. Ello, dado que por un lado es imposible separar las creencias del docente y lo sociocultural de las prácticas en el aula, y por otro son conocimientos que permiten analizar y organizar diversidad de unidades didácticas y/o propuestas microcurriculares aunados con otros organizadores presentes en el Análisis Didáctico.

A continuación, proponemos un ejemplo en el cual intentamos poner a jugar los conocimientos de los cuatro vértices. Tomemos el caso de los objetos matemáticos que se relacionan con resolución de situaciones problema en el espacio y los conocimientos de los estudiantes. Los estudiantes suelen traer al aula unas nociones o formas de percibir, entender o pensar el espacio, e incluso sobre el significado físico o matemático del mismo, etc.

Dichas nociones muy probablemente pueden tener relación con las prácticas cotidianas presentes en su comunidad, y las creencias que tienen sobre la validez de los saberes que les ha sido entregado por otros miembros y generaciones de la comunidad. Así, un niño que requiere movilizarse en una ciudad suele tener nociones o conocimientos de como ubicarse en el espacio respecto a diversos objetos fijos y en movimiento, y las formas seguras de trasladarse por las calles. Aunque, tal vez no puede dar cuenta de dicho desplazamiento a través de diversos registros de representación semiótica. Por otro lado, un estudiante cuyo entorno geográfico es lo campestre, puede tener nociones del espacio más relacionadas con que tan pendiente es una montaña respecto a otra. Tal vez puede dar cuenta de cuál es el camino óptimo para ir del sitio A al sitio B, si entre estos existen ciertos accidentes geográficos con características de flora y fauna específicas. Donde

para el niño, óptimo no necesariamente signifique el camino más corto, sino más bien el que facilita su movilidad de acuerdo, por ejemplo, al medio de locomoción, etc.

Ambos niños tienen nociones, resuelven problemas o modelan situaciones del espacio basados en conocimientos que pueden derivar de las formas como en su comunidad se relacionan con el espacio, y haciendo el uso de la herencia sociocultural. Así mismo, es posible preguntarse por otros objetos matemáticos que están en la zona de nociones o saberes explícitos o implícitos, socioculturalmente hablando, de los estudiantes.

La cuestión en el aula de clase radica en que el docente identifique y realice Análisis Didáctico de variables como lo son las posibles nociones, conocimientos, creencias, saberes que hacen parte de los constructos socioculturales de los estudiantes. Ello, con el fin de implementar diseños microcurriculares que apunten a potenciar los conocimientos matemáticos de los escolares. También, sobre las posibles heurísticas de resolución de problemas y discursivas, argumentativas que derivan de la sociocultura de los escolares. Proponemos que un Análisis Didáctico, que considera como uno de sus Organizadores Curriculares a este tipo de enfoque, posiblemente le permite al docente proponer un tipo de clase que potencie dichos constructos socioculturales en torno a las matemáticas reales y realistas. Seguidamente, esbozamos una propuesta que intenta recoger todos estos aspectos.

2.2.2. Propuesta microcurricular de tipo sociocultural

La siguiente propuesta tiene la intencionalidad de dar algunos parámetros o lineamientos, sobre los aspectos presentes en el diseño e implementación de unidades didácticas o metodologías de clase de matemáticas, considerando los aspectos socioculturales. Ello no pretende ser un recetario, sino más bien unos conocimientos sobre los cuales se invita a los docentes, a reflexionar de forma dinámica y en el marco del Análisis Didáctico. Un ejemplo de unidad didáctica diseñada haciendo uso de esta propuesta microcurricular se puede observar en la metodología del presente trabajo.

La siguiente estructura, aunque se presenta secuencial, la pensamos como un todo integrado que se puede estar presentando simultáneamente durante la clase, da unos parámetros que pueden guiar una clase de matemáticas bajo el Análisis Didáctico y considerando los aspectos socioculturales:

2.2.2.1. Diseño de Unidades Didácticas

Consideramos de importancia identificar el tiempo aproximado de aplicación de la misma en el aula de clase, así como el seguimiento o reflexión a la pertinencia de dicha unidad didáctica diseñada por el docente. Para la implementación en aula de una unidad didáctica no necesariamente se estipula una sola clase, pero si se da a conocer a los estudiantes un tiempo estimativo y flexible. La misma contiene situaciones problema, problemas abiertos o actividades, con unos objetivos trazados en tanto al contenido para los escolares, y a lo atinente a la puesta en práctica de la misma por parte del docente. El maestro realiza la unidad didáctica a partir de un Análisis Didáctico sobre los objetos de conocimiento, la cual también contiene unas propuestas de evaluación de las

prácticas del docente y de los estudiantes. La unidad didáctica se constituye en un medio rico a través del cual el docente puede generar la motivación en los y las estudiantes hacia la negociación de saberes que interesen a la clase, que a su vez tengan pertinencia curricular y sociocultural.

2.2.2.2. Disposición de la clase

Atiende a las dinámicas que permiten las interacciones entre estudiantes en función de favorecer la enculturación, la negociación de significados. Por ejemplo, la distribución en el aula de los estudiantes en trabajos grupales y colaborativos en el espacio del aula, el juego de roles, la orientación guiada, permanente y dialógica entre estudiantes y a su vez de estos con el docente.

2.2.2.3. Papel del docente en relación a los estudiantes, el saber y la sociocultura

El docente se propone como un sujeto político, que integre saber y estudiantes a partir del contexto propio al grupo de alumnos con los cuales trabaja. Lo cual deberá apuntar a motivar relaciones discursivas en el aula donde los estudiantes puedan realizar propuestas, acordar estrategias del trabajo y de relaciones microsociales; y realizar sugerencias o crear ideas que deriven desde el conocimiento referido a su familia, barrio, amistades etc.

El docente será orientador o más bien uno de los integrantes del aula con los cuales se pueden negociar significados. A través de sus propuestas discursivas presentes en el diálogo con los estudiantes, este puede identificar las concepciones o nociones de tipo sociocultural que los estudiantes tienen respecto a los conocimientos que va a presentarles, o que ya les ha presentado a

través de por ejemplo unidades didácticas. Aunque esta no es la única fuente dado que también puede referirse a estudios relacionados por investigadores, a documentales, conocimientos ancestrales, etc., sobre otras culturas foráneas, y sus posibles interrelaciones con la sociocultura de o próxima al estudiante. Referentes que le permiten al docente reflexionar sobre los avances de los estudiantes, así como sobre los aspectos socioculturales matemáticos, y potenciarlos incluyéndolos en las unidades didácticas. Estas últimas y las propuestas microcurriculares que el docente diseña e implementa, evolucionarán producto de la reflexión o el Análisis Didáctico continuo realizado por el docente sobre sus prácticas.

2.2.2.4. Evaluación o acompañamiento

En relación a la evaluación, aludimos al registro y seguimiento de las objetivaciones o avances en conocimientos, heurísticas y constructos matemáticos alcanzados o realizados por los estudiantes a partir de las modelaciones o resoluciones a las situaciones problema propuestas, en por ejemplo unidades didácticas. En el papel de autoevaluación de las prácticas del docente, la evaluación es continua en tanto que proceso de reflexión que realiza el docente a la hora de diseñar e implementar propuestas microcurriculares, las cuales se verán enriquecidas a partir de las reflexiones que realiza en y a posteriori a la implementación. Propuestas que ponen en juego las cuatro dimensiones y sus interrelaciones dinámicas: conocimiento didáctico, conocimiento de contenido matemático, medios, creencias y conocimientos sobre la sociocultura. Y una de las formas de abordar dicha autoevaluación es a partir de una estructuración o sistematización de sus experiencias en el de aula.

Algunas de las formas de evaluación de las objetivaciones generadas por los estudiantes, en particular sobre resolución de problemas, refieren a utilizar diversos instrumentos como portafolios, rúbricas, listas de cotejo y diarios, etc. A través de estos instrumentos es posible enfocarse, entre otras, en la relación entre los objetivos propuestos en las situaciones problema y las heurísticas y procedimientos que generan los estudiantes durante el proceso de modelación. Es decir, en el aula

Se requiere utilizar instrumentos que permitan evaluar este tipo de habilidades más complejas al mismo tiempo que evaluar el proceso de aprendizaje dado que es en este que por ejemplo, se ponen de manifiesto el uso de heurísticas más allá de que la resolución alcanzada sea correcta (Rodríguez, 2013, p. 164).

Ello pone la mirada de la evaluación sobre la eclosión o uso de heurísticas más que en una respuesta válida, acabada y que muy posiblemente no permite ver la gama de procesos o de acuerdos dialógicos de los estudiantes en torno a las construcciones realizadas. A su vez, dichas heurísticas pueden dar cuenta de diversos conocimientos movilizados durante las búsquedas de resoluciones a problemas abiertos de matemáticas.

Otro papel que cumplen estos instrumentos de evaluaciones es el de permitir al docente el generar procesos de convalidación de los significados, negociados en los grupos, y simultáneamente llevar registro de los avances obtenidos por los estudiantes. Los mismos instrumentos de evaluación permiten que los estudiantes puedan visualizar en cualquier momento sus avances en las soluciones propuestas, compartir conocimientos y contrastar con las posturas de sus compañeros e incluso reflexionar sobre sus avances en conocimientos y la validez de sus modelaciones. Pensar en evaluaciones de la forma tradicional, en la cual el estudiante

individualmente resuelve o da respuesta a unos cuestionarios que buscan una única respuesta correcta, se consideran más cercanas a generar heurísticas relacionadas con este tipo de prácticas y preguntas que suelen aparecer en algunas pruebas, por ejemplo de tipo censales.

Por último, la evaluación en el aula de clase es un instrumento que permite organizar, dar cuenta de unas evoluciones negociadas del conocimiento, construido dialógicamente. Y en tanto, que es una forma de regresar sobre los constructos de los participantes del aula, los cuales conforman una microcultura, la evaluación debe ser también una forma en la que en dicho espacio se puede reflexionar críticamente sobre las culturas y las formas en las cuales se puede hacer contribuciones al entorno. Es decir, los estudiantes no solo deben conocer lo que se espera de ellos en términos de saber, sino que también pueden negociar nuevos saberes y hacer evolucionar su microcultura en la medida que evolucionan sus reflexiones críticas en la clase. Ello acorde con un currículo pensado dinámicamente.

3. CAPÍTULO

DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Lineamientos metodológicos

En este trabajo se propone como estrategia metodológica general la sistematización de experiencias, cuyos momentos o tiempos enunciamos en líneas más adelante. La cual tiene sus referencias y estrategias metodológicas (diseño metodológico), que en nuestro caso consulta métodos, técnicas, instrumentos de las metodologías de investigación cualitativa investigación acción participativa (I.A.P) y estudios de casos. Consideramos pertinente el uso de la sistematización de experiencias en tanto que, acorde con las hipótesis de estudio de este trabajo, ésta permite registrar los diseños, implementaciones en el aula de propuestas microcurriculares. Así como, la reflexión y diálogo sobre los conocimientos y las prácticas de los sujetos del aula. La sistematización de experiencias permite que dos docentes funjan simultáneamente como investigadores y gestores de unidades didácticas o propuestas microcurriculares, en tanto que por ejemplo analizan los casos de las clases grabadas en video instalados en el análisis didáctico. También, permite que los docentes revisen, y continuamente replanten sus propuestas microcurriculares. Es en el marco de las sistematizaciones que se puede observar el papel que se le da en el aula a las cosmovisiones de los sujetos y como estas se concatenan con modelos de geometría 3D, en una propuesta sociocultural. Dicha sistematización se lleva a cabo por parte de los dos docentes, sobre aspectos evidenciados en sus propias metodologías de la gestión de la clase

de matemáticas. Ello en el marco de la implementación de la una unidad didáctica (U.D)²¹, realizada durante aproximadamente dos meses correspondientes a parte del tercer y cuarto periodo académico del año 2017. Los profesores pertenecen a dos instituciones educativas oficiales distintas: Moderna y Jovita Santacoloma de Tuluá; e intentan poner en diálogo reflexivo los resultados sistematizados en cada institución. Docentes que tienen formación profesional pregrado de ingeniería industrial en el caso de la I.E. Moderna; y licenciatura en educación matemáticas en el caso de la I.E. Jovita Santacoloma.

A su vez, la unidad didáctica es diseñada por los docentes, para los propósitos de esta investigación. Es decir, a) mostrar que es posible proponer una metodología de gestión y prácticas de enseñanza del docente de matemáticas en el aula, a partir de resignificar sus prácticas en términos didácticos, reflexivos y apropiando aspectos socioculturales de la misma. Y que b) el diseño de una unidad didáctica centrada en la modelación matemática para la resolución de problemas abiertos y su implementación en el aula de matemáticas, dentro de trabajo colaborativo posibilitará el integrar aspectos socioculturales así como la generación construcciones geométricas, usando AGD 3D. Estas dos hipótesis nos llevaron a hacer uso de la sistematización de experiencias en tanto que el diseño y gestión en aula de una propuesta microcurricular se realiza por unos sujetos (docentes) que resignifican teórica y prácticamente sus conocimientos, y por tanto gestiones de aula. Es decir, la sistematización de experiencias propicia la organización y reflexiones sobre estas apoyándose en diversos registros (videos de clase, unidades guía didáctica,

²¹ Inicialmente los docentes comenzaron el diseño de una Unidad Didáctica denominada “Creando Ciudades” que tuviera en cuenta diversos aspectos de la región del Valle del Cauca, Colombia. Posteriormente, y atendiendo a situaciones problemas más cercanos al entorno de los estudiantes se diseña e implementa en el aula la Unidad Didáctica la “Belleza de mi Colegio” ; dejando la otra Unidad en la etapa de construcción la cual posiblemente en posteriores investigaciones permita objetivar otros potenciales problemas abiertos y relacionados con la sociocultura susceptibles de llevar al aula.

archivos geogebra, etc.) de las actuaciones y cosmovisiones de los sujetos en el aula, identificar relaciones intersubjetivas de las microsociedades del aula como las que propicia el maestro para generar por ejemplo conocimientos, en nuestro caso modelos geométricos 3D de estructuras del entorno, de forma mediada.

En particular, los registros sistematizados se toman a partir de las clases gestionadas con grados 10° de las correspondientes instituciones. En la institución Jovita Santacoloma se cuenta con 43 estudiantes distribuidos en dos grupos 10-1 y 10-2, y en la Moderna se registran 38 estudiantes en el grado 10-4, con una asignación de 4 horas semanales por grado.

3.1.1. Sistematización de las experiencias

Como se menciona líneas atrás, este trabajo de investigación consiste en una sistematización de experiencias educativas, específicamente de las prácticas del docente. Dicha estrategia de sistematización es de carácter investigativo, y el diseño metodológico se basa en aspectos particulares de la investigación cualitativa denominada Investigación Acción Participativa IAP, completada con estudios de caso. Entendemos que este trabajo consulta a la I.A.P. en tanto que los docentes que identifican problemáticas de la microsociedad del aula y plantean posibles diseños o soluciones, las implementan y dan cuenta de diálogos y reflexiones respecto a las evoluciones de sus implementaciones en el aula, cumplen también el papel dual de ser investigadores de sus propias prácticas. Ello está en resonancia con lo propuesto por Sampieri, R., Fernandez, C. & Baptista, P. (2014) en relación a la investigación acción participativa: *“los participantes pueden*

fungir como coinvestigadores ya que necesitan interactuar de manera constante con los datos” (p. 501). Y entendemos que es completada con estudio de casos en el sentido que los dos docentes pretenden realizar un zoom o mirada profunda a sus propias prácticas microcurriculares y validarlas, vía reflexiones realizadas sobre las sistematizaciones, de forma concatenada con conocimientos. Al respecto del estudio de casos, líneas más adelante realizamos una ampliación la cual incluso pone la mirada en el uso de los videos registrados de la microsociedad del aula.

De acuerdo con lo anterior, entonces es pertinente determinar el cómo entendemos la sistematización de experiencias y cuál es el marco metodológico propuesto y relacionado para esta investigación. Veamos. Proponemos realizar la obtención de datos y su análisis siguiendo una sistematización de experiencias, abordada a partir de cuatro líneas de fuerza. Una línea de fuerza se puede considerar como un derrotero, y que permiten configurar unas preguntas y objetivos, que guían el proceso metodológico de investigación, en tanto que constituyen ideas o conocimientos fundamentales; los cuales pueden emerger durante las prácticas y a partir del análisis de las prácticas del docente en su gestión de aula. Las líneas de fuerza, en el caso que atañe a este trabajo, están relacionadas con los conocimientos que debe tener un docente, crítico y reflexivo a la hora de realizar y/o gestionar diseños microcurriculares.

En este trabajo también consideramos que las líneas de fuerza encuentran resonancia en los conceptos de organizadores curriculares a nivel local planteados en la Didáctica de las Matemáticas. Ello en la medida que una línea de fuerza se pueda visualizar como un constructo o estructura de conocimiento que permita, a los docentes reflexivos el organizar sus propias prácticas en función de resignificar sus propuestas curriculares a nivel local.

Desde esta perspectiva, en términos de docentes que nos proponemos sistematizar nuestras propias experiencias y que a su vez tenemos varias experiencias vividas en las aulas de matemáticas, planteamos unos conocimientos que consideramos debe tener el docente. Dichos conocimientos permiten crear una rejilla con unidades de análisis y con unos criterios de evidencias respecto a las prácticas del profesor (tabla 2). La rejilla se constituye en el zoom a las prácticas del docente en el aula de matemáticas y se convierte en referente para identificar las dinámicas que sigue el docente en términos de los conocimientos que debe poseer. Es pertinente mencionar que dichas líneas de fuerza se nutren de los hallazgos realizados durante el análisis periódico y espiral de los datos recogidos durante las experiencias de los docentes en el aula.

Para hacer uso de la sistematización como método de investigación es necesario identificar en que consiste la sistematización de experiencias dentro de la educación, y más específicamente dentro del aula de clase. La sistematización de experiencias se constituye como uno de los métodos de investigación cualitativa en el cual se dota a las prácticas relativas a los sujetos, que conforman un conjunto social y cultural, de un carácter de saber validado. Dicha validación la logran los sujetos en tanto que acopian sus propias prácticas, crean estructuras que las organicen y en dicho proceso de análisis se descubren ante unos conocimientos propios a las prácticas que están organizando. Más aún, los sujetos *“logran hacer una elaboración propia evitando la separación objeto-sujeto y a través del camino de subjetivación-objetivación convierte a éstos actores en productores de saber, retornando la integralidad humana (teórico-práctica) a sus vidas”* (Mejía, 2005, p. 113).

Lo anterior, permite aproximar una definición de sistematización de experiencias en el contexto del aula, como una forma en que los sujetos del salón de clase visualizan y estructuran sus prácticas, en tanto que reflexionan y validan los saberes que discurren o evolucionan en las mismas. En particular, en el aula de matemáticas se observa que el docente se encuentra continuamente en y ante un contexto rico en saberes en tanto que diversas prácticas de los estudiantes con los estudiantes y con el docente en torno a unos objetos matemáticos. Objetos que, para los sujetos, a su vez posiblemente pueden tener relaciones con saberes socioculturales. Mencionando que en estas líneas, al decir saberes estamos haciendo alusión a las prácticas, dado que los sujetos del aula como el docente puede estructurarlas a través de sistematización poniendo en evidencia saberes inherentes a las prácticas de su aula. La sistematización de experiencias en el ámbito escolar tiene entonces un carácter dinámico dado que las interrelaciones e interacciones en el aula cambian; y así se espera que sea en términos de una educación que va en la dirección de buscar formar sujetos críticos y reflexivos. Dinámico porque el proceso de sistematización permite a los sujetos caracterizar sus saberes en tanto que prácticas, pero a su vez la reflexión misma sobre dichos saberes les permite proponer variaciones en las prácticas, las cuales producirán nuevos saberes o potenciarán los anteriores; e incluso se puede decir que toda práctica de una cultura produce saberes para los sujetos, máxime cuando estas se sistematizan. En otros términos, las prácticas son inherentes a los sujetos en el aula en tanto que interacciones sociales y por tanto con los cambios, en mayor o menor grado que se producen en la cultura del aula de clase y en los conocimientos objetivados o generados durante la sistematización. Así, la sistematización se constituye entonces en algo más que un método de investigación, en una forma de generar conocimientos y resignificar prácticas, en por ejemplo el docente.

En la reflexión o análisis realizado por el docente es pertinente que se dé respuesta a cuestiones como ¿para qué sistematizamos? Y a través de las soluciones que se encuentren posiblemente se puede dar otras direcciones a los análisis de la investigación presente o generar nuevas interrogantes que orienten futuros saberes, conocimientos o prácticas. Ello permite a los investigadores, los cuales son los mismos profesores que sistematizan sus propias prácticas, realizar reflexiones continuas que pongan en diálogo la subjetividad y objetividad de sus prácticas de aula en función de estar abiertos a saberes presentes o emergentes de las mismas.

Adicionalmente, en cuanto a los tiempos presentes en una sistematización de experiencias encontramos elementos en una propuesta planteada por Oscar Jara (2013), presente en el artículo *Orientaciones teórico-prácticas para la sistematización de experiencias*, en términos de: a) se requiere haber participado de la experiencia y/o tener registros de ella, lo cual inherentemente está relacionado con una planificación de la sistematización y recuperación de las experiencias; b) dar cuenta de para que se sistematiza (preguntas, objetivos), que experiencia se sistematiza, determinar las fuentes de información y los procedimientos a seguir; c) reconstruir la historia ordenando y clasificando la información; d) reflexionar críticamente (análisis y síntesis) sobre ¿Por qué pasó lo que pasó?; y por último e) formular conclusiones y comunicar los aprendizajes obtenidos. Tiempos que dentro del proceso de sistematización en tanto que pretende generar conocimientos, son guiados por la pregunta, los objetivos y el problema, en el marco de reflexiones en espiral realizadas por los docentes.

Acorde con lo anterior, Mejía (2005) presenta la función y desarrollo de las líneas de fuerza dentro de una sistematización, considerando lo siguiente:

Las diferentes líneas de fuerza que comienzan a convertirse en los contenidos de la práctica, luego la forma de enunciados mostrando los primeros trazos de elaboración y que es el principio del camino de la experiencia, siguen atravesando la realidad para transformarla y modificarla en coherencia con los sentidos que tienen los actores de ella. (p.120)

En ese orden de ideas y asumiendo en el presente trabajo la línea fuerza como un elemento que marca la pauta y muestra caminos dentro de la investigación, se ha optado por utilizar las siguientes líneas de fuerza: a) *Conocimientos del docente*, vistos desde la dimensión epistemológica en relación con los conocimientos de contenido matemático, conocimiento de la didáctica matemática, conocimientos y aspectos socioculturales, metas y creencias; b) *Relación docente con el currículo y el estudiante*, en torno a un saber matemático, errores y dificultades asociados a unos objetos matemáticos, y se encuentran en la dimensión didáctica; c) *Modelación y resolución de problemas matemáticos* en términos de heurísticas, perteneciendo a la dimensión cognitiva la cual se plantea desde un enfoque sociocultural, y por último d) *Geometría espacial (simetrías y/o razón áurea)*, atendiendo a la dimensión matemática del marco teórico y se refiere a los objetos matemáticos presentes en la unidad didáctica a gestionar.

Es decir, la sistematización de experiencias planteada en este trabajo de investigación tiene referencias y estrategias metodológicas (diseño metodológico). Y como se menciona antes, en nuestro caso estas consultan métodos, técnicas e instrumentos de la Investigación acción participativa I.A.P, y estudio de casos. Veamos. En relación a la I.A.P., en el libro *Metodología de la investigación* de Sampieri et. al. (2014, p. 498) encontramos que se proponen tres fases: observar, pensar y actuar. Las cuales se ven concretadas en los siguientes procesos: a) *detectar el problema de investigación, clarificarlo y diagnosticarlo (recolección de datos sobre la problemática)*; b) *formulación de un plan o programa para resolver el problema o introducir el cambio (plantarse objetivos,*

estrategias, acciones y unos tiempos); c) implementar el plan o programa y evaluar los resultados (Recolección de datos, ajustes , redefiniciones, toma de decisiones, comunicar plan a comunidad); y d) realimentación, la cual conduce a un nuevo diagnóstico y a una nueva espiral de reflexión y acción (nuevas redefiniciones, decisiones, y comunicar resultados).

3.1.2. El Estudio de Casos

Como se menciona líneas atrás, esta investigación propone la sistematización de las prácticas de los docentes. Ello, en términos de observar y reflexionar sobre los conocimientos del docente a fin de resignificar el microcurrículo. Recordando que en esta investigación, los docentes cumplen un papel dual, son a la vez investigadores y gestores del microcurrículo de matemáticas. Y es el docente en su aula gestionando microcurrículo de matemáticas, con el uso de una unidad didáctica también diseñada por estos, el que se constituye en el caso de estudio. Entonces, dicho docente debe generar propuestas sobre cómo gestionar el microcurrículo y a su vez observar y registrar sus propias prácticas. Ello lo exponemos más adelante en lo referido al papel del video en el aula, refiriéndonos a continuación sobre el estudio de casos.

Veamos el estudio de caso. El estudio de casos es un método de investigación cualitativa que permite a los investigadores centrar la mirada en unas situaciones de interés, y donde por ejemplo se puede hacer dialogar las posturas del investigador con las propuestas de los sujetos que constituyen el caso. Según Lafrancesco (2003) un estudio de casos “*asume que los actores van a desarrollar sus propias representaciones y que estas son tan significativas como las del*

investigador” (p.91). Es decir, en el papel dual que realizan los docentes se hacen pertinentes las prácticas metareflexivas de los mismos.

Del estudio de casos presentados a docentes en formación, o generados por estos, o en el caso de esta investigación relativo a las prácticas, se puede afirmar que: *“esta es una de las ventajas más destacadas del estudio de caso su contribución al desarrollo de pensamiento estratégico, del análisis crítico, o de resolución de problemas”* (Marcelo, C., Parrilla, A., Mingorance, P., Estebaranz, A., Sanchez, M. & Llinares, S., 1991). En particular, Marcelo et. al. (1991) refieren al estudio de casos vía el uso de clases previamente filmadas en video, y las cuales se presentan a profesores en formación con el fin de analizarlos de forma crítica reflexiva y formativa. En otros términos, el estudio de casos invita a los docentes reflexivos a generar o fortalecer competencias profesionales como las mencionadas, que graviten en relación a metareflexiones y generen nuevos conocimientos sobre las creencias, conocimientos de contenido y didácticos en el marco de su contexto sociocultural. En lo siguiente abordamos el uso de video como una de las estrategias que permite realizar miradas a las prácticas del docente.

A continuación planteamos el diseño metodológico propuesto para esta investigación, el cual considera cuatro fases que guían la sistematización de experiencias. Fases que consultan la I.A.P así como el estudio de casos.

Primera fase: Descripción del contexto. En términos de las dinámicas seguidas por los sujetos, de los cuales el docente también hace parte, y las problemáticas identificadas por dicho profesor. Dicha caracterización del contexto es realizada por parte de los dos docentes (en su papel dual

como profesores y a su vez como sujetos investigadores, que propenden por reflexionar sobre sus prácticas). Ello en el marco de encuentros dialógicos respecto a experiencias o prácticas previas e información relativa de las Instituciones Educativas, el currículo así como la formación profesional de pregrado de los docentes. En particular, con miras a problematizar las prácticas y conocimientos de los dos docentes en el marco de las propuestas y gestiones microcurriculares, y de elementos comunes o no comunes a las instituciones educativas respecto a las aulas de matemáticas de grados décimo.

Segunda fase: Formulación de un plan. El cual incluye tanto plantear o acotar el problema (pregunta), unos objetivos y acordar las técnicas (gestiones de aula, recogida de la información, tablas, registros, videos, etc.). También, se acuerdan los medios disponibles y pertinentes así como tiempos para la sistematización de las experiencias asociadas a las actividades que serán diseñadas y propuestas, vía a alcanzar los objetivos y dar respuesta al problema. Es pertinente indicar que cada fase de esta investigación hace parte de la sistematización de experiencias, y entonces esta no comienza ni se agota en la segunda o tercera fase. Surge un plan que permita gestionar o caracterizar los encuentros dialógicos y reflexivos de los docentes que investigan. También, incluye el diseño de la propuesta introductorias o de exploración que permita realizar ajustes al diseño de la microcurricular central (unidad didáctica), soportada en teorías que se configuren en nuestro caso en organizadores locales del currículo, en unos conocimientos de contenido matemático y en posibles aspectos socioculturales relativos a la mesosociedad.

Tercera fase: Implementación y evaluación de las actividades. Inicia con puesta en el aula de las actividades introductorias y continua con la unidad didáctica principal (denominada la belleza de mi colegio), posterior a las reflexiones y resignificaciones surgidas de la sistematización de los resultados introductorios. Reflexiones relacionadas con la pertinencia de las propuestas

microcurriculares diseñadas tanto en contenido como en la forma; también de aspectos logísticos como la disponibilidad o funcionabilidad de recursos como portátiles, etc. Entonces, la evaluación reflexiva de las actividades gestionadas por los docentes en el aula permite abordar posibles elementos de convergencia o divergencia en las dos aulas de las instituciones, y perfilar líneas de fuerza que guían o proponen nuevas reorientaciones de la sistematización. Así mismo, la grabación y análisis de videos de la gestión del microcurrículo por parte de los docentes, permite realizar una mirada crítica reflexiva a cada caso apoyada en los criterios de análisis (Tabla 2).

Cuarta fase: Análisis y comunicación de resultados. Evaluación realizada en el marco de metareflexiones producidas por y en encuentros dialógicos de los dos docentes. Es decir, la producida sobre todos los registros obtenidos (tablas, grabaciones, archivos electrónicos e impresos, etc.) generados en la sistematización de experiencias y de las reflexiones en espiral que han realizado los docentes. Dicha evaluación se propone generar unas condensaciones y resignificaciones, en nuestro caso relativas a las gestiones microcurriculares del docente, que buscan dar respuesta a la pregunta problema. En esta fase, se objetivan condensaciones que emergen de las reflexiones continuas realizadas en el proceso de sistematización, de las fases anteriores, y se configuran en conclusiones. Por último, la comunicación de las posibles soluciones al problema contextual planteado es puesta a consideración, y a posibles reflexiones de comunidades con el propósito de realizarles aportes. Comunidades como la microcurricular (dos docentes investigadores), la comunidad de formación, investigación e innovación curricular de la maestría la cual realiza continuas aportaciones durante todo el proceso de investigación (Universidad del Valle), y también comunicación a las correspondientes instituciones educativas.

3.2. Técnicas e instrumentos de análisis

3.2.1. Los videos aportan a la formación del docente

En esta investigación, se realiza la sistematización de las experiencias de los docentes haciendo uso de la grabación en video, de la clase de matemáticas, y recopilando otros documentos producto de las actividades que realizaron los estudiantes (durante la resolución de los problemas abiertos de geometría propuestos en la unidad didáctica y con el uso de Geogebra).

Los videos se grabaron durante varias clases. Iniciando con la implementación en el aula de los problemas introductorios: *Partición del segmento en proporción áurea*, *Sucesión de Fibonacci* y *número áureo*, modelo de *Edificio 1*. Y terminando con la clase en la cual los estudiantes crean un video corto, publicando hallazgos en relación a la solución al problema *la Belleza de mi colegio*. Donde, los problemas introductorios además de propiciar conocimientos o heurísticas relacionadas con artefactos²², también permiten a los participantes generar unas prácticas pertinentes en relación a la cámara en el aula. Las grabaciones tienen una duración de una hora o menos, acorde a la duración de la clase y/o a las dinámicas de gestión microcurricular y de investigación por parte del docente. En algunas ocasiones el docente o un estudiante hace las veces de camarógrafo; en otras se ubicó la cámara en una posición fija estratégica en el aula.

Los documentos recopilados durante la sistematización se organizan bajo la siguiente notación:

²² Uso de Geogebra el cual no era conocido por los estudiantes, uso de decámetro y un “triángulo rectángulo isósceles” realizado con palitos y pitillo que permite aplicar semejanza de triángulos, y así medir estructuras altas desde el suelo.

Audios (A), videos (V), archivos Geogebra (G), se denominaran $n^{\circ}Ai_fecha(k)_I.E$ ó $n^{\circ}Vi_fecha(k)_I.E[00:00-00:00]$, $n^{\circ}Vi_fecha(k)_I.E$. Donde I.E. diferencia un archivo generado en la Institución Educativa Moderna o en Jovita; n° es el número del equipo de estudiantes o el grado según el archivo sea realizado por los estudiantes o de toda la clase; $i= 1,2,3\dots$ representa la clase transcurrida durante la implementación de la Unidad Didáctica; $k: 1,2,3\dots$ se utiliza para indicar la existencia de más de un archivo registrado en la misma fecha. Además, en el caso de los videos o audios de clase se anexa el intervalo de tiempo en minutos $[00:00-00:00]$. Solo a manera de ejemplo, 10-2V3_12102017(2)_Jovita $[30:23-42:14]$ indicaría un video grabado con grado el 10-2, la tercer clase el 12 de octubre de 2017, en la institución Jovita Santacoloma y del cual es relevante resaltar un evento que se observa entre el minuto 30 con 23 segundos al minuto 42 con 14 segundos.

En el caso de requerir identificar aportes de un estudiante en particular, se usará la siguiente notación: $E\ jk$, donde E denota que es un estudiante; $j, k \in N$ y j corresponde al número del equipo, K es el número del estudiante en dicho equipo. Ejemplo: $E32$ indica que el estudiante 2 del equipo3 realiza el aporte citado. El profesor se identifica con el literal P.

Los videos, audios, archivos geogebra etc., se referencian en las Tablas 5, 6 y 7 de sistematización de experiencias; en las cuales los docentes registran las reflexiones y observaciones de las prácticas observadas. Los videos permiten regresar sobre la clase y resignificarla. Ello, en el marco de las líneas de fuerza o unidades de análisis siguientes: conocimientos del docente, relación docente con el currículo y el estudiante en torno a un saber matemático, errores, resolución de problemas abiertos de matemáticas y modelación, y geometría

espacial. Es decir, dichos registros permitirán a los docentes realizar la observación de la gestión de la Propuesta Microcurricular. Poner la mirada en la microsociedad y el diálogo intersubjetivo a fin de generar heurísticas, por parte de los estudiantes, que den solución a un problema matemático abierto por medio de la modelación en Geogebra 3D.

Por otro lado, refiero al carácter de los videos en el marco de la formación de profesores reflexivos y críticos. Las experiencias previas del docente en formación o en ejercicio, sus conocimientos y concepciones explícitas o implícitas suelen emerger en la propuesta microcurricular que este gestiona²³. Es así, que se hace relevante el que el docente reflexione sobre lo que conoce, practica o cree; así como sobre las características contextuales socioculturales, a fin de no solo conocer, si no también realizar propuestas reflexionadas del cómo se aplica ese conocimiento en el aula y metareflexiones que le permitan crear nuevos conocimientos a partir de sus experiencias.

Es en ese marco que los videos grabados de clase de matemáticas, y más específicamente dentro del estudio de casos, es uno de los medios que permite al docente generar y realizar revisiones críticas. E incluso le permite registrar, analizar y reflexionar sobre aspectos de la microsociedad, prácticas o conocimientos del docente que de otra forma talvez se escapen a su mirada de investigador, toda vez que en el aula puede estar más centrado en el rol de docente.

²³ Marcelo, C., Parrilla, A., Mingorance, P., Estebaranz, A., Sanchez, M. & Llinares, S. (1991) afirma que en relación al pensamiento práctico de los docentes y su influencia sobre las prácticas de enseñanza “los profesores poseen teorías (teorías prácticas, implícitas, de acción) sobre lo que es la enseñanza” (p.34). La pertinencia de estudiar las imbricaciones sobre la práctica de los docentes está en hacer explícitas dichas teorías vía a resignificar el microcurrículo producto de reflexionar sobre los conocimientos y prácticas del docente.

Más concretamente, el uso de videos en el marco de esta investigación permite:

- Un encuentro dialógico crítico de los dos docentes reflexivos en relación a sus prácticas en el aula. Ello, en tanto que en el video se puede repetir la observación de la clase, realizarle nuevos cuestionamientos, proponer otras formas de solución a las situaciones microsocioculturales presentes, determinar las heurísticas, conocimientos, errores o dificultades movilizados, etc.
- Aproximar el papel del docente a la hora de gestionar una Propuesta Microcurricular, y de los estudiantes en el marco de esta nueva propuesta para el aula de matemáticas. Es decir, observar los encuentros de intersubjetividades en relación a la solución de un problema abierto de geometría propuesto. También, se puede reflexionar sobre artefactos puestos en el aula y su relación con los sujetos que la conforman en tanto que conocimiento.
- Realizar un estudio de caso en la cual el docente juega el papel dual (investigador y maestro). El video facilita que los docentes conformen comunidades reflexivas críticas. Y que generen o potencien el pensamiento estratégico, el análisis crítico o metaanálisis y la resolución de problemas, en la medida que resignifiquen dialógicamente las prácticas registradas en el video. Referida la resolución de problemas, a la gama de problemas relacionados con los Conocimientos de Contenido, Didácticos, o derivados de Creencias que circular en el aula o Aspectos Socioculturales de la microsociedad, dentro de la gestión de microcurrículo.
- Le permite a los docentes (en formación o en ejercicio), *“la generación entre un determinado conocimiento científico y situaciones reales que le dotan de significado”* (Llinares & Sanchez, 1998). Máxime si las reflexiones y resignificaciones que se

realizan, están acompañadas de otros referentes como investigaciones, videos en otros contextos (como es el caso de esta investigación: I.E Moderna y Jovita Santacoloma de Tuluá), etc.

El análisis de la información generada a partir de los registros obtenidos, se propone a través de un instrumento que permita compilar y procesar dicha información. Ello, con el fin de contrastar la estrategia metodológica empleada por los docentes con respecto a los conocimientos que deben tener y poner en práctica en sus aulas de matemáticas. Ello posiblemente facilite determinar la existencia o no de un distanciamiento de esas prácticas con relación a otras metodologías de enseñanza tradicionales.

Con dicho propósito, planteamos o diseñamos la siguiente rejilla de análisis (tabla 2) la cual contiene las unidades de análisis seleccionadas a partir del marco teórico, y los criterios que evidencian aspectos de la gestión de aula del docente el cual aborda el microcurrículo desde una mirada sociocultural.

Las siguientes son las técnicas e instrumentos de registros/recogidas de la información vía sistematización:

- a) Una Tabla 5 de sistematización por clase que atiende a los conocimientos del docente, los errores, los tipos de objetos matemáticos que emergen durante la clase, heurísticas generadas por los estudiantes durante la modelación en la resolución de problemas y a los posibles espacios de construcción dialógica presentes en la clase (Anexo G). Diferenciando los registros semanales originados en la Institución Educativa Jovita Santacoloma y

Moderna respectivamente así: Tabla 5 (fecha de semana) Jovita y Tabla 5 (fecha de semana) Moderna.

- b) Una Tabla 6 la cual contiene el análisis semanal realizado, en un encuentro dialógico de ambos docentes, sobre los registros tomados en las Tablas 5. Dichos análisis se relacionan con avances de la implementación de la Unidad Didáctica en las dos instituciones educativas en el marco de la gestión del docente de la Propuesta Microcurricular.
- c) Una Tabla 7 que atiende a un análisis sobre los registros de la tabla 6 y por ende de la tabla 5, el cual es realizado conjuntamente por ambos docentes. En esta se recoge las condensaciones generadas durante la sistematización de experiencias, obtenida durante toda la implementación de la Unidad Didáctica en el marco de la gestión de la Propuesta Microcurricular. Los registros, análisis y resultados obtenidos en esta tabla se constituyen en la base de los análisis de resultados y conclusiones del presente trabajo.

Conjuntamente, los documentos o registros que nutren la sistematización a través de las anteriores tablas, son:

- Unidad Guía Didáctica UGD, en formato texto electrónico e impreso, que dan cuenta de la unidad didáctica planteada. Así como de las posibles transformaciones que se le realizan a lo largo de la implementación y bajo el análisis de los docentes. Es propuesta para los estudiantes y contiene un espacio de soluciones en el cual se espera que los equipos de estudiantes propongan las soluciones, diálogos, hallazgos, etc. Dicha Unidad Didáctica corresponde a lo que se denomina plan de aula en el meso currículo.

- Geogebra, son archivos en formato electrónico correspondientes a los modelos elaborados por los estudiantes. Es decir, a las soluciones creadas como solución al tipo problemas abiertos presentes en la Unidad Didáctica.
- Videos y archivos de audio, realizados en el marco de las clases y que exponen aspectos de la metodología del docente y/o soluciones de los estudiantes. La revisión realizada de estos videos, y acorde a las unidades de análisis del presente trabajo, permite seleccionar algunos de ellos como representativos para esta investigación. De los mismos se realiza transcripción de algunos apartes, con el fin de nutrir las conclusiones. Incluye la grabación de entrevista conversatorio con una persona que pertenece a la comunidad, llevada a dialogar con los integrantes del aula en relación a puntos de vista sobre el entorno y su cultura; persona que vive en la región hace mucho tiempo.
- Registro fotográfico, de las construcciones, sitios hermosos, etc., obtenidas por los integrantes del aula y que nutren las soluciones a los problemas propuestos. También, se registraran en imagen algunas aportaciones de los estudiantes presentes en la UGD, con el fin de dar cuenta de ellos en las conclusiones.
- Tabla 3 relativa a una lista de cotejo. Presenta un análisis que realizan los docentes respecto al trabajo colaborativo de los estudiantes. En particular, identificando heurísticas, prácticas microsociales, aspectos socioculturales, reconocimiento de los parámetros del problema y gestión dialógica del conocimiento.

3.2.2. Unidades de análisis y criterios que evidencian aspectos de la gestión de clase por parte del docente de matemáticas

A continuación se presentan las unidades de análisis con líneas de fuerza de reflexión y sistematización a considerar por parte de los docentes, durante la gestión microcurricular en relación a la implementación de la unidad didáctica la belleza de mi colegio (ver 3.3.).

TABLA 2: UNIDADES DE ANÁLISIS Y CRITERIOS QUE EVIDENCIAN ASPECTOS DE LA GESTIÓN DE CLASE POR PARTE DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS.

DIMENSIÓN TEÓRICA	UNIDAD DE ANÁLISIS	CRITERIO QUE EVIDENCIA LA GESTIÓN DOCENTE DE UN MICROCURRÍCULO QUE CONSIDERA ASPECTOS SOCIOCULTURALES
Dimensión epistemológica	Conocimientos del docente	• Conocimientos de los docentes, presentes (o ausentes) en propuestas microcurriculares, diseño puesta en aula de unidades didácticas realizadas a través del Análisis Didáctico.
Dimensión didáctica (Instrucción)	Relación docente con el currículo y el estudiante en torno a un conocimiento matemático.	• Errores presentes durante la resolución de problemas, por parte de los estudiantes. • Papel del docente como generador de espacios dialógicos respecto a los estudiantes y a objetos matemáticos propuesto en el aula.
Dimensión cognitiva	Resolución de problemas abiertos de matemáticas y modelación.	• Heurísticas generadas por los estudiantes y/o con acompañamiento docente, respecto a la resolución de problemas abiertos de matemáticas dentro de un trabajo colaborativo.

Dimensión Matemática (Contenido matemático escolar)	Geometría espacial y trigonometría.	• Objetos matemáticos razón áurea y simetrías, como los geométricos del espacio, relaciones y propiedades utilizados en la puesta en aula del docente y/o que emergen en la resolución de problemas abiertos de los estudiantes.
--	---	--

3.3.Unidad didáctica la belleza de mi colegio

3.3.1. Presentación y descripción general

Las instituciones educativas suelen tener una historia, una serie de espacios, construcciones arquitectónicas, e incluso en algunos casos unas representaciones icónicas de tipo física o sociocultural. Es en las relaciones que establecen los educandos con estos espacios físicos o culturales, y el papel que juegan respecto a las microsociedades que evolucionan en la institución que incluso pueden pensar, significar o dar sentido a muchos de los conocimientos movilizados en el aula de matemáticas.

En ese sentido todos los sujetos de una institución educativa probablemente tienen respuesta a al cuestionamiento ¿Cuáles son las estructuras o espacios más hermosos de su institución? ¿Por qué consideras que son los sitios más hermosos? Un acercamiento al número áureo y la relación con figuras geométricas, así como las propiedades geométricas de los frisos, teselas o simetrías tal vez proporcionen a los escolares heurísticas y argumentos que nutran sus respuestas desde el punto de vista matemático. Ello, aunados con las concepciones que pueden derivar de la sociocultura y de sus creencias, e incluso de la historia de la institución. También, es probable que los estudiantes intenten hacer uso de diversas fuentes o medios para abordar dichos objetos de forma geométrica, como por ejemplo Geogebra 3D, etc.

3.3.2. Objetivos de la unidad didáctica

3.3.2.1. Objetivo general de la unidad didáctica

Propiciar en los estudiantes la negociación dialógica de significados, algunas heurísticas y análisis de resolución de problemas abiertos vía modelación, dentro de un aula de clase contextualizada socioculturalmente, a partir de la gestión del docente.

3.3.2.2. Objetivos específicos de la unidad didáctica

- Sistematizar la aplicación de la unidad didáctica dentro de una propuesta microcurricular con un zoom a la gestión del docente en la clase de matemáticas que propicie espacios dialógicos para la construcción del conocimiento y con el uso de diversos artefactos.
- Generación, por parte de los estudiantes, de modelos matemáticos que den soluciones a problemas abiertos a partir del uso de diversas heurísticas los cuales estén dotados de sentido realista.

A continuación, presentamos la situación problema, de tipo problema abierto planteada a los estudiantes y los análisis propuestos para la misma, como lo son el análisis sociocultural, análisis curricular, análisis cognitivo, análisis de contenido y análisis de instrucción.

Para ello, dentro de esta Unidad Didáctica invitamos a los estudiantes a que hagan uso el Ambiente de Geometría Dinámica Geogebra 3D que permite modelar el espacio.

3.3.3. Problema: *La belleza en mi colegio*

Su equipo conforma un grupo de guías turísticos, y tienen la posibilidad de presentar su colegio a un o una estudiante nueva. Para ello deben seleccionar tres de los sitios más hermosos física, históricamente y/o que tengan elementos en su estructura que los hagan hermosos. Entonces, deben diseñar una ruta por la cual llevar a su turista, mostrarle los tres sitios elegidos y explicarle matemáticamente porque ustedes consideran que son los sitios más hermosos.

3.3.4. Análisis de contenido

Es relevante considerar dentro de esta unidad didáctica el papel que juega la modelación. En particular, los modelos realizados para solucionar problemas abiertos relacionados con fenómenos del espacio físico por medio de la geometría del espacio, y considerando otros aspectos relacionados con contextos reales o realistas.

Consideramos un *modelo* cercano a como lo plantean Doerr & English (2003), citados por Sriraman & English (2010), como unos elementos que bajo ciertas operaciones y relaciones pueden dar cuenta o permitir explicar diversos fenómenos de tipo real o realista (p. 273). Adicionalmente, Zolkower & Bressan (2012, p.189) afirman que “*modelo* no alude a un artefacto o representación pre-construida o impuesta de antemano si no a una entidad que emerge y se va desarrollando durante un determinado proceso de reinención guiada”.

La pertinencia de modelo como constructo que surge de procesos de reinención guiada, y en este caso también dentro de trabajo colaborativo de los estudiantes, viene dada en el sentido que la actividad propuesta *La belleza en mi colegio* presenta las siguientes características.

En *La belleza en mi Colegio* se propone una situación, al equipo de estudiantes, de identificar y reflexionar sobre aspectos o sitios propios de su institución educativa, y se les suministra otras herramientas de las cuales pueden hacer uso con el fin de aportar argumentos matemáticos en sus decisiones, relativos a belleza con número áureo o con simetrías (Anexo F). Los alumnos y alumnas tienen acceso a un ejemplo presentado en un archivo geogebra 3D en el cual se muestra una estructura simple poliédrica de un salón con techo, un árbol y una simulación del sol denominado *Ejemplo de estructuras 3D*. También, una tabla con información general de la Institución Educativa (Tablas 9 y 10).

Los estudiantes deben crear un modelo de la ubicación de los tres sitios seleccionados, justificando todos los criterios que sustentan su elección. Entre ellos su modelo debe considerar condiciones que les permita llevar o guiar por unos caminos adecuados al nuevo estudiante, a fin de mostrarle los tres sitios. También, es posible que den cuenta de las distancias entre ellos o áreas usadas para actividades que consideren relevantes, como por ejemplo sitios de recreación. Adicionalmente, cada sitio está ubicado en el vértice de un triángulo y por tanto es posible hacerle un estudio geométrico, trigonométrico, o espacial en tanto que además ocupan un espacio.

Es probable que durante la búsqueda de modelos de solución, se presente que los estudiantes utilicen las herramientas suministradas. Además, se pueden apoyar en otras fuentes como el uso de Geogebra, la Web, etc. Dado que adicionalmente, se les permite pensar en unas reubicaciones pertinentes de los sitios elegidos es posible que en los modelos creados por los estudiantes surjan análisis que aludan a otros conocimientos socioculturales y/o matemáticos no previstos. Todo lo anterior, puede remitirlos a un análisis plano usando triángulos y optimización de las dimensiones del mismo; o al uso de modelos espaciales, donde por ejemplo pueden representar un edificio por medio de poliedros o un árbol con un tronco cilíndrico y follaje esférico o cónico, etc.

El papel del docente, durante toda la implementación de la unidad didáctica, es el de guiar cuestionamientos más que soluciones, el de abrir vías al descubrimiento de heurísticas; así como el de propender por un entorno de aula donde se generen aprendizajes dialógicos, críticos y realistas dentro de los equipos de trabajo.

3.3.5. Análisis curricular

Como ya se mencionó, la actividad de la Unidad Didáctica, referida como *La belleza en mi Colegio*, propone a los estudiantes el realizar o crear modelos que solucionen problemas abiertos. Por un lado, se espera que para y por los estudiantes el aula de clase se estructure como una microsociedad con sus propias reglas discursivas y de negociación de roles en la construcción dialógica de conocimientos. Donde, el maestro de matemáticas también hace parte de dicha microsociedad en tanto que gestiona dichos espacios dialógicos, orientando a los equipos de estudiantes hacia la reflexión, el cuestionamiento, el diálogo de posturas, la profundización de

argumentos, etc., en torno a las heurísticas y soluciones a los problemas abiertos propuestos por estudiantes.

Las actividades también permiten reflexiones sobre situaciones de tipo global y local, e incluso ponen a jugar aspectos que tienen que ver con la toma de decisiones. Ello se observa en las posibles representaciones del colegio pensado como un espacio geográfico, pero también con unas características que pueden influir en la toma de decisiones de sus integrantes, sus historias y las formas como estas se desarrollan en el tiempo y el espacio; es decir, cómo evolucionan sus culturas entrelazadas a unas características del entorno. También, es posible que lleve a los estudiantes a determinar que sus modelos no solo deben contener aspectos como el tamaño de los sitios del colegio, su color o forma general, sino que se requieren análisis sobre otras variables como las propiedades geométricas, historia de las estructuras, creencias relativas, etc. Entre otras cuestiones que posiblemente pueden surgir durante las actividades, es la de considerar cuáles son las percepciones o nociones que tienen los sujetos que habitan un país, región, ciudad o sector respecto a su colegio y el desarrollo de la misma y sus gentes, su cultura.

Adicionalmente, en términos de educación nuestro país adoptó el enfoque por competencias, con el cual se pretende que los estudiantes desarrollen una serie de habilidades y actitudes con el transcurrir del tiempo, cuando se vean enfrentados a situaciones de distinta índole, tomando como referencia aspectos centrales como lo conceptual, procedimental y actitudinal.

Una competencia ha sido definida como un saber hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad y sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas. (Estándares Básicos de competencias, 2006, p.12)

De lo anterior, y observando los Estándares de Competencias Básicas de Matemáticas es posible esperar que en las situaciones planteadas en la actividad *la belleza de mi colegio* los y las estudiantes desarrollen entre las competencias de comunicación, razonamiento, modelación y resolución de problemas, especialmente la de modelación y resolución de problemas. Dicha modelación se espera que surja de la puesta en juego de unos datos suministrados, unas heurísticas, unos conocimientos previos y unas creencias o intuiciones que pueden surgir en las dinámicas propias de los grupos resolutores.

Como objetos matemáticos en la Unidad Didáctica se suministran datos que en mayor o menor proporción pueden ser relacionados con los cinco tipos de pensamiento: el aleatorio, numérico, métrico, espacial, y el variacional. En particular, es posible que los estudiantes hagan uso de heurísticas relacionadas con la generalización de patrones numéricos, geométricos movilizandolos conceptos como proporcionalidad, simetrías, escala, análisis de datos estadísticos, optimización de distancias, e incluso usar análisis trigonométrico para caracterizar sus construcciones. En lo variacional y lo geométrico, se puede dar que piensen en los cambios producidos en las dimensiones o distancias entre los sitios y su relación con los criterios de belleza matemática

utilizados. Todo lo anterior visto desde las apreciaciones que tienen los sujetos que están generando sus modelos, imprimiendo su visión o impronta sociocultural en los mismos.

Por último, es pertinente mencionar que los parámetros dados en *Belleza de mi Colegio* se pueden enriquecer en futuras propuestas microcurriculares a partir de suministrar más datos estadísticos, estocásticos, cuestionarse por tres o más momentos, historias de la institución, ciudad, región, considerar aspectos más finos de la topografía, etc.

3.3.6. Análisis didáctico

En este apartado, entendemos el Análisis Didáctico como el referido a aquel que permite abordar los posibles errores o dificultades generados en los estudiantes y derivados de las prácticas del docente. Recordando que, en lo general, dentro de la Disciplina Didáctica de las Matemáticas el Análisis Didáctico es tocante a todas las reflexiones y situaciones propias de la educación matemática, de las cuales el maestro debe dar cuenta en sus propuestas microcurriculares.

La implementación y gestión de la actividad *La belleza de mi colegio*, se llevará a cabo con la guía del profesor investigador. Dentro de una dinámica de trabajos colaborativos se pretende que los mismos estudiantes propongan, negocien y gestionen aspectos como regulación de tiempos, uso del espacio y recursos disponibles, relaciones dialógicas, reflexivas, argumentativas y propositivas. También, se espera que durante la creación de los modelos que dan solución al problema propuesto, los estudiantes reconozcan en el docente un sujeto que guía discursos,

cuestiona y no necesariamente el que da las soluciones o que es el centro del conocimiento en el aula.

Dichas dinámicas del docente en el aula nos permiten, como sistematizadores de la experiencia, realizar dos tipos de acercamiento dentro del desarrollo de las actividades. Por un lado, estudiar el dominio de los conocimientos de contenido, didácticos, curriculares, y el posible papel que juegan sus creencias en el aula de clase. También, es posible vislumbrar la existencia o no de aspectos socioculturales dentro de las actividades y la forma en que estas son entrelazadas dentro de los conocimientos en el aula. Ello se espera lograr a través de las unidades de análisis propuestas en la metodología de este trabajo de investigación (ver 3.2.).

Por otro lado, y realizando un zoom a las prácticas, heurísticas y constructos de los estudiantes, es posible que surjan diversos errores y dificultades. En particular, los que se derivan de la forma en que el docente gestiona sus propuestas microcurriculares denominados limitaciones, configuradas por los errores y dificultades. Veamos.

Como errores que probablemente pueden surgir durante las construcciones son las de considerar que la modelación la pueden lograr usando un único marco conceptual como por ejemplo la trigonometría, o polígonos, etc. Ella puede derivar de una enseñanza segmentada donde los estudiantes solo ven aplicaciones parciales y a veces no realistas de los conceptos matemáticos.

El considerar el uso de solo ciertos objetos matemáticos de geogebra puede ser un indicador de la misma. Dificultades de tipo cálculos numéricos usando diversos registros de representación

entendiendo las relaciones entre las mismas y sus implicaciones en su modelo propuesto, derivados de nuevo de una enseñanza de conceptos u operaciones matemáticas no relacionadas entre sí. Restricciones a heurísticas solo presentes en las clases de matemáticas, indicando que perciben el currículo disgregado o particionado de conocimientos. Dificultades para realizar análisis variacional, gráfico o estocástico derivados de una enseñanza previa errada u omisiva de los mismos, por parte del docente. Y errores de tipo geométrico en el plano o en el espacio, algunas de ellas relacionadas en la dimensión matemática de esta investigación, que pueden emerger en las construcciones que propongan en Geogebra, lápiz y papel u otro medio que seleccionen.

En concordancia con lo anterior, este análisis didáctico permite a los sistematizadores, tener una perspectiva de las posibles direcciones que puede tomar la gestión de la Unidad Didáctica. Sin que ello agote otras posibilidades en cuanto a las limitaciones o variaciones en la gestión del microcurrículo que posiblemente serán observadas.

3.3.7. Análisis de instrucción

En párrafos anteriores, en el apartado del Análisis Didáctico se determinó que el docente investigador es gestor o busca propiciar un entorno de aula en el cual los estudiantes pueden resolver situaciones problema dentro del marco de relaciones dialógicas. Y a su vez, los equipos de estudiantes pueden asumir unos roles que aporten a fortalecer la microsociedad en la cual conocimientos como los socioculturales entran al entramado de saberes en el aula de matemáticas, en una rica red de interrelaciones, argumentaciones y reflexiones en torno a los conocimientos que se movilizan en la clase.

Seguidamente, en este marco de aula, queda entonces por abordar como entran a jugar los criterios o aspectos de los procesos de evaluación en dicha clase de matemáticas en la cual se gestiona la actividad de la unidad didáctica. Veamos.

En términos de evaluación existen a considerar dos formas diferenciadas y a su vez interrelacionadas. Por un lado, la evaluación referida a los aspectos mismos de la investigación que se está llevando a cabo. Donde esta adquiere un carácter de análisis reflexivo y abierto a conocimientos, líneas de fuerza, que pueden surgir dentro del proceso de sistematización de experiencias del aula durante el periodo de implementación de la unidad didáctica. Como se ha mencionado en la metodología de investigación, durante la sistematización se realiza la recogida de diversos registros de datos respecto a la clase de matemáticas, marco dentro del cual la evaluación de las prácticas será un diálogo reflexivo y crítico de todos los registros entre sí y respecto a algunos referentes teóricos. Dicha evaluación dará cuenta de constructos intersubjetivos de los participantes con miras a dotar de carácter investigativo y validado a las prácticas del docente en el aula.

Por otro lado, la evaluación gestionada respecto a los constructos cognitivos pero también dialógicos de los equipos de estudiantes propuestos en el aula como microsociedad. La evaluación de los modelos propuestos por los estudiantes al problema presente en la Unidad Didáctica, se realiza mediante el uso de lista de cotejo, revisión y reflexión de las sistematizaciones realizadas en las Tablas 5, 6 y 7.

El primero de estos instrumentos permite al docente realizar una evaluación continuada en relación a aspectos propuestos de los procesos de resolución del problema, actitudinales y las dinámicas dialógicas de las cuales hacen uso los equipos de estudiantes. Dada la situación *La belleza de mi colegio* se propone una lista de cotejo. Esta lista se plantea con el fin de que los docentes investigadores registren los avances pertinentes de los equipos de estudiantes. Así como, identificar aquellas propuestas que requieren seguirse trabajando, se les dificultó o no lograron concretar dentro del trabajo de resolución de problemas gestionado.

Adicionalmente, durante el desarrollo de la Unidad Didáctica, los estudiantes de cada equipo registran sus hallazgos en el diario o cuaderno de notas (que en la aplicación de esta unidad didáctica se realizará en hojas tamaño carta, organizadas en una carpeta denominada Unidad Guía Didáctica del equipo). Dicho registro busca que los estudiantes tengan su propio referente, desde el cual pueden hacer evolucionar sus reflexiones, argumentos y propuestas ante los otros miembros. Ello, les permite regresar sobre el mismo en cualquier momento y retomar o evaluar sus heurísticas consideradas o no previamente. Para el docente, es un medio de observación de las evoluciones de los modelos y reflexiones de los estudiantes.

La Unidad Guía Didáctica exhibirá parámetros o datos que los estudiantes consideren relevantes en sus propuestas de solución, por ejemplo:

- Fecha
- Ideas generadas, comentarios, conocimientos movilizados
- Dificultades o hallazgos
- Posible importancia, aplicación de lo aprendido, discursar dialógico e incluso conocimientos que deriven de la sociocultura

- Reflexiones sobre la metodología de clase, la gestión de la misma por parte del docente investigador, así como el dominio que este tiene respecto a los conocimientos

También, es pertinente mencionar que los anteriores instrumentos de evaluación de la Unidad Didáctica se complementan con registros propios de la investigación. Como archivos geogebra, audios, videos de los diálogos generados dentro de los equipos de estudiantes, centrando la atención en los momentos de su negociación de conocimientos. Dichos videos considerarán como instrumento para identificar heurísticas que no quedan registradas en otros registros.

En relación a los modelos con Geogebra estos permiten realizar cambios dinámicos y por tanto potencia la continua evolución dinámica de los mismos. Observando, que en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se presenta a veces una dificultad para modelar matemáticamente determinados problemas o situaciones; puesto que a veces no se dispone de un medio adecuado que permita una correcta representación y visualización del problema mismo. Esta representación se puede convertir en un primer paso o en el modelo para llegar a la formulación matemática del problema en términos de soluciones. GeoGebra se presenta entonces como una poderosa herramienta mediadora que permite ese primer acercamiento visual al problema. En otros términos “la estrategia de modelación en la clase de matemáticas con ayuda de las representaciones que permite Geogebra (visualización) se puede convertir en una alternativa motivadora que promueve la interacción y participación en clase de matemáticas”. (Córdoba, Castrillón & Rojas, 2015, p. 1726).

3.3.8. Unidad guía didáctica U.G.D.

PROBLEMA: LA BELLEZA DE MI COLEGIO

Docente:

Estudiantes:

Fecha inicio: _____ **Fecha de cierre:** _____

Tiempo: ____ días clases (aproximadamente de una hora c/u)

Elaborada por: Arcila José Humberto & Manzano Ríos Juan Carlos.

- 1) **Objetivo:** Aproximar a una comprensión de los parámetros matemáticos relacionados con la belleza de fenómenos naturales o artificiales, dando cuenta de modelos que consideran aspectos socioculturales en los mismos.

2) **Metodología**

- Formar equipos de 5 estudiantes y ubicarse en espacios que permitan el trabajo colaborativo, los cuales se preinscriben en la ficha de inscripción por roles (Tabla 4): *comunicador, escritor, diseñador, gestor de la palabra y materiales.*
- Compartir el enunciado del problema, determinar sus posibles elementos relevantes para construir soluciones.
- Inventar, o utilizar estrategias conocidas que permitan modelar y solucionar el problema.

- Durante todo el desarrollo de las actividades es necesario que como equipo **creen explicaciones** de sus elaboraciones, generando soluciones **pensadas y argumentadas**. Es decir, diálogo entre todos miembros del equipo.
- En la penúltima clase los equipos consolidaran sus soluciones, ideas y argumentos y prepararán una estrategia de presentación de sus modelos a los otros equipos del aula la cual se realizará entre la penúltima y última clase.

3) **Materiales y Recursos:** Es posible con el fin de solucionar el problema hacer uso de celular, tabletas, computadores portátiles, Geogebra, lápiz y papel, calculadoras, tablero, cuadernillo de notas, cartulina, marcadores, colores, plastilina, etc.

4) **Problema: La belleza de mi colegio**

Su equipo conforma un grupo de guías turísticos, y tienen la posibilidad de presentar su colegio a un o una estudiante nueva. Para ello deben seleccionar tres de los sitios más hermosos física, históricamente y/o que tengan elementos en su estructura que los hagan hermosos. Entonces, deben diseñar una ruta por la cual llevar a su turista, mostrarle los tres sitios elegidos y explicarle matemáticamente porque ustedes consideran que son los sitios más hermosos.

Las siguientes son algunas indicaciones que posiblemente ayuden a lograr tal propósito:

- Cada sitio puede estar ubicado en el vértice de un triángulo por lo que pueden hacer un estudio matemático del mismo para enriquecer sus argumentos.
- Es posible hacer uso de las tablas 9 y 10 con datos históricos del colegio (información demográfica, económica, uso de suelos, etc.).
- Pueden crear videos, imágenes, mapa, una guía en audio, un cartel, maqueta, etc., donde se indique la ruta, los sitios y sus argumentos de selección.
- Si es posible pueden usar mapas (google earth, google maps u otra fuente) donde se muestren la distribución física del colegio.

Hacer uso de las siguientes hojas de la Unidad Guía Didáctica para registrar sus ideas, cálculos, comentarios dudas y soluciones. Algunas cuestiones de las cuales pueden hacer uso durante todo su trabajo de construcción de soluciones, son:

- a) Ideas generadas, comentarios, dificultades o hallazgos
- b) ¿Qué conocimientos de nuestra comunidad aportan a las soluciones que proponemos?
- c) ¿Cómo manejó mi equipo el diálogo, reflexiones y argumentaciones respetando las opiniones de las compañeras y compañeros con fin a hallar las soluciones?
- d) Opiniones que tenemos de la forma como el profesor lleva a cabo esta clase

Preguntas o enunciados relacionados con el problema: la belleza de mi colegio²⁴

Las siguientes cuestiones guían la gestión Microcurricular, por parte del docente investigador, de la Unidad Didáctica.

1. En equipos, leer y socializar la problema y escribir en sus palabras, ¿qué es lo que les solicitan realizar o resolver? Y solucionar los problemas introductorios: *Partición del segmento en proporción áurea, Sucesión de Fibonacci y número áureo* (Anexo E).
2. Elegir por los menos tres de los lugares que ustedes consideran más bellos del colegio. Escribir.
3. ¿Qué cree su equipo que es la belleza? Escribir
4. ¿Cómo considera su equipo que se puede estudiar la belleza? Escribir
5. Abrir el archivo Geogebra *Ejemplo de Estructuras 3D* y realizar una corta exploración. *Observar* los objetos que lo constituyen dialogar sobre ¿cómo su equipo puede realizar una construcción similar?

Entrevista: Diálogo con invitado sobre aspectos socioculturales, históricos, creencias, relativos a la Institución Educativa y su entorno

En esta etapa del desarrollo del problema belleza de mi colegio se invita a una persona, de la comunidad que conoce y/o ha vivido en el entorno desde hace muchos años, a dialogar con los estudiantes. Ello con el objetivo de realizar una entrevista semiestructurada en la cual pueden

²⁴ También, relacionado con la Configuración Didáctica. Concepto expuesto por la profesora Zemanate, D. (2017) en relación al documento de Trouche (2016), en el marco del curso Concepciones Teóricas del Énfasis presentado en la Maestría en Educación de la Universidad del Valle Tuluá. La Configuración Didáctica incluye los ‘artefactos’ que selecciona el profesor para resolver una tarea en un entorno específico (las preguntas, la tecnología disponible, los elementos matemáticos y los modos de representación).

participar dialógicamente el docente investigador, el invitado y los estudiantes de grados 10°. Las preguntas que guían la entrevista se encuentran en el Anexo F. Se invita a los equipos de estudiantes a:

6. Registrar en la tabla 9 o 10 los aspectos (creencias, datos socio históricos, ubicación geográfica, etc.) que se dialoguen en la entrevista y que consideren son de interés para crear el modelo la belleza de mi colegio.

Modelación con Geogebra 3D

El siguiente problema sobre modelación de estructuras 3D en geogebra, se propone con el ánimo de motivar en los estudiantes el diálogo con el artefacto. Es decir, que ellos logren generar unas heurísticas de modelación relacionadas con las propiedades geométricas de los objetos espaciales que pretenden modelar y a partir del diálogo con el geogebra 3D. Con ese fin, los docentes investigadores crearon un video corto de una estructura arquitectónica que pertenece a la sede de la universidad del Valle Tuluá (Ilustración 20). Esta estructura fue elegida por sus propiedades geométricas espaciales (simetrías, espacios abiertos) la cual parece ser la composición de diversos objetos geométricos.

7. Abrir el video “*Edificio 1*” seguido en diálogo con su equipo y/o el profesor, describir o enunciar cuales son las propiedades geométricas que posee la estructura espacial *Edificio 1*. Escribir.

8. Su equipo debe hacer uso de Geogebra 3D, y crear un modelo de la estructura (geométrica) observada en el video *Edificio 1*, apoyándose en las propiedades geométricas previamente identificadas.

El docente investigador gestiona las actividades relativas a la resolución de problemas realizadas conjuntamente con los equipos de estudiantes, propiciando lo dialógico. Identificando posibles obstáculos, errores, prácticas y metaprácticas de los estudiantes, creencias y conocimientos socioculturales que pueden enriquecer la resolución de la situación problema propuesta, objetos matemáticos utilizados, heurísticas, generación intersubjetiva del conocimiento. Todo ello en el marco de la propuesta microcurricular P.M., y sus unidades de análisis referenciadas en el marco teórico y metodológico del trabajo de investigación.

Al igual que en la gestión del docente durante la generación del modelo *Edificio 1*, por parte de los equipos de estudiantes, en la siguiente construcción de un modelo que solucione “la belleza de mi colegio” el docente propiciará la generación dialógica del conocimiento por medio de cuestionamientos, las respuestas que se esperan registrar en los diversos documentos de sistematización:

9. Ahora, ustedes conforman un equipo de guías turísticos, y deben solucionar la situación problema “la belleza de mi colegio”. Es decir deben crear un modelo en geogebra 3D. Unas orientaciones posibles que les puede orientar durante la construcción de su modelo solución, están dadas por las preguntas siguientes:

10. ¿Cuáles son las dimensiones reales de la ruta entre las estructuras y/o de las estructuras (objetos del espacio) elegidos por su equipo como hermosos? Para ello se les invita a grabar un video corto de las mismas usando tableta, etc., y posteriormente realizar medición (con decímetros, transportadores o metros) de longitudes.
11. ¿Cuál es la escala que relaciona las dimensiones de su modelo en geogebra 3D con los objetos reales elegidos por su equipo como hermosos?
12. ¿Cuáles son los criterios de belleza matemática que utilizan o utilizarán en la construcción de su modelo “belleza matemática”? Escribir
13. ¿Cuáles son los criterios históricos, estadísticos, geográficos, poblacionales, paisajísticos, socioculturales, creencias o de belleza matemática que los llevó a elegir los tres sitios del colegio que están proponiendo en su modelo? Escribir.

Para finalizar y una vez creado un modelo de “La Belleza de mi Colegio” en geogebra 3D imaginen que llega el o la estudiante nuevo(a) a la Institución Educativa y desea conocer la propuesta de su equipo sobre “belleza de mi colegio” y aspectos relacionados con su construcción. Es decir, el equipo debe preparar la publicación de su modelo en geogebra 3D; incluso para tal propósito es posible apoyarse o crear videos, fotos, mapas, etc. También, deben escribir y publicar las respuestas a las siguientes preguntas que les realizará el estudiante nuevo:

- a) Presentemos (en video) la(s) estructuras elegidas del colegio, los modelos que logramos construir en Geogebra 3D, así como las propiedades o relaciones matemáticas de belleza (simetrías y/o proporción áurea) y las dificultades o hallazgos que realizaron.

- b) ¿Qué importancia creemos que tienen o tendrán para la comunidad del colegio, Nariño y Tuluá, los conocimientos construidos, durante la realización del modelo “la belleza de mi colegio”? Escribir/video.

- c) ¿Qué opiniones o reflexiones tenemos sobre esta propuesta y el como el profesor gestiona la clase o presenta las actividades o los conocimientos relacionados con las actividades “belleza de mi colegio”? Escribir/video.

4. CAPÍTULO

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación presentamos resultados obtenidos en el marco del presente trabajo de investigación, los cuales enunciaremos en dos sentidos. En primera instancia, referimos a los conocimientos y las prácticas de los docentes en tanto las resignificaciones que estos realizan sobre el microcurrículo, por medio del diseño y gestión de una propuesta metodológica a través del Análisis Didáctico, para el aula de matemáticas denominada propuesta microcurricular P.M. En esta última, se consideran aspectos socioculturales del entorno de los educandos. Mencionando que dichos resultados son el producto de las reflexiones críticas, resignificaciones y observaciones sistematizadas que realizan los docentes, que intentan fungir como investigadores. Profesores que como se dijo en la metodología son los mismos docentes que están gestionando la clase de matemáticas con grados 10°, y presentan formaciones profesionales de licenciatura en matemáticas en un caso (Arcila Atehortúa José Humberto), y en el otro de ingeniería industrial (Manzano Ríos Juan Carlos).

En segundo lugar, exponemos resultados relativos a las soluciones a los problemas abiertos, planteadas por los equipos de estudiantes, presentes en la unidad didáctica por medio de la modelación en geogebra 3D. Dicha unidad didáctica también es diseñada, gestionada en el aula y evaluada por el docente.

Adicionalmente, dichos análisis y resultados se generan como producto del diálogo reflexivo que realizan los docentes durante el proceso de gestionar y sistematizar la propuesta microcurricular P.M., en las Instituciones Educativas Jovita Santacoloma y Moderna de Tuluá respectivamente. Como se menciona en 3.2. sobre las *técnicas e instrumentos de análisis*, sistematizamos las experiencias de aula durante el diseño, gestión y evaluación de la propuesta microcurricular haciendo uso de grabación de video de la clase; también de videos, fotos y audios grabados por los equipos de estudiantes en las cuales publican sus posturas y hallazgos durante la modelación, recogida de archivos geogebra creados por los equipos de estudiantes; recogida de las unidades guía didáctica impresa en las cuales los estudiantes registraron algunas heurísticas, etc., uso de la grabación en audio de la entrevista a un invitado de la comunidad educativa (Camargo, J., 2002; Camargo, septiembre 25 2017). Se sigue de ello la necesidad de realizar análisis de dichas sistematizaciones producidas en los dos casos institucionales, es decir, triangular los resultados presentes en los diversos registros utilizados. Veamos.

Cada docente realiza un primer análisis de las experiencias registradas en los diversos formatos, en cada una de las clases, el mismo día que se realiza la clase y usando la Tabla 5. Ello lo hace, en correspondencia con la Tabla 2, vía a identificar o generar posibles resignificaciones, centrando su mirada en observar la presencia o ausencia de los conocimientos del docente, así como la gestión microcurricular dialógica y de los errores y dificultades asociados a los objetos matemáticos. También, las heurísticas presentes en la generación de modelos 3D que buscan solucionar el problema abierto de geometría, realizados por los equipos colaborativos de estudiantes, y la presencia de razón áurea y/o simetrías de dichos modelos. En un segundo momento, nos reunimos los dos docentes a intervalos de cada ocho días y realizamos una segunda revisión y reflexión

conjunta de los dos casos e instalándonos en los hallazgos registrados en las correspondientes Tablas 5 y en los otros formatos. Por último, una vez terminada toda la etapa de implementación de la unidad didáctica, los dos docentes nos reunimos a realizar un análisis global de los resultados hallados respecto a los criterios de esta investigación (Tabla 2), y que incluso están soportados en uno o varios registros de dos Instituciones Educativas diferentes.

La implementación y sistematización de la propuesta microcurricular se realizó aproximadamente durante 23 clases en la I.E Moderna de Tuluá y 30 en la I.E Jovita Santacoloma; lo que corresponde a cerca de 10 semanas. Dentro de las cuales, los estudiantes conformaron equipos colaborativos de trabajo por roles, de acuerdo con la Tabla 4. En la Moderna surgieron seis equipos de cinco integrantes, uno con cuatro y otro con tres integrantes. En el Jovita Santacoloma, surgieron tres equipos con seis integrantes, cuatro con cinco, uno con cuatro y otro con siete integrantes. En ambas Instituciones Educativas se asigna un número natural a cada equipo, el cual conservaron durante toda la implementación de la Propuesta Microcurricular y para efectos de los registros de sistematización.

4.1. Sobre la propuesta microcurricular (y los conocimientos del docente)

En cuanto a los conocimientos del docente, se observó que estos evolucionaron y se perfilaron como organizadores locales del currículo, desde los inicios del diseño de la propuesta microcurricular y de la unidad didáctica denominada *Belleza de mi Colegio*. También, durante la gestión, y sistematización de las experiencias, así como en la reflexión y resignificación de las

prácticas. Encontrándose, después de la implementación en el aula de matemáticas los siguientes hallazgos:

Se observan resignificaciones en los conocimientos y prácticas de los profesores, los cuales aportan a la formación y desarrollo profesional posgradual de los dos docentes, en dos sentidos. Formación y desarrollo considerados en términos de competencias teórico prácticas y capacidades para realizar análisis didáctico. En el caso del docente con formación de pregrado en ingeniería, se observa que las resignificaciones le permitieron formarse en competencias para enseñar matemáticas escolares, utilizando reflexivamente la revisión de documentos teóricos y propuestas curriculares existentes, haciendo uso del análisis didáctico A.D. Y para el docente licenciado en matemáticas, las resignificaciones están más orientadas al desarrollo de competencias tanto para realizar análisis didáctico como para formar docentes en innovación y desarrollo curricular. Entendiendo, que la innovación refiere a teorías, recursos estructurados que permitan fundamentar propuestas curriculares, las cuales no solo se basen en la experiencia.

También, en el sentido que los contenidos matemáticos discurren en el aula en términos de la propuesta de resolución de problemas vía modelación en la cual se hace uso de las propiedades de las simetrías y/o la razón áurea. Modelos que además se ven enriquecidos por cosmovisiones o creencias de los estudiantes, el docente e incluso otros miembros de la comunidad, posiblemente relacionadas con la belleza (matemática). En el aula, los conocimientos surgen en el marco de relaciones microsociales dialógicas y la resolución de problemas abiertos, observándose la resignificación del papel tradicional del docente que tiene todos los conocimientos (10-2V20_24102017 Jovita [00:00-29:37]; 10-2V28_16112017(2) Jovita [00:00-13:46]; (10-

4V11_19102017_Moderna_[09:11-10:07])). Adicionalmente, las creencias de los docentes se convierten en un conocimiento que evoluciona en tanto que permiten a los mismos reflexionar, resignificar y modificar parámetros del microcurrículo durante las prácticas.

A continuación, presentamos algunos registros e interpretaciones relacionados con la gestión y resignificación de las prácticas y conocimientos del docente. Lo cual, a su vez se visualiza también en las prácticas microsociales y de resolución de problemas de las que dan cuenta los equipos de estudiantes por medio de videos, archivos geogebra, audios y la correspondiente unidad guía didáctica. Archivos, que hacen parte de los anexos, que soportan la sistematización de experiencias realizada en documentos como las tablas 5, 6 y 7, y de los cuales se presentan algunos considerados como representativos de las unidades de análisis correspondientes al presente trabajo de investigación. Veamos.

En la I.E Jovita Santacoloma se propone un fragmento dentro del cual se genera la negociación de significados respecto a las simetrías y composición de transformaciones de isometría. Cuestionamiento que se origina dentro de uno de los equipos de estudiantes (10-2V28_16112017(2) Jovita):

P: Alcanzamos a hacerlo (refiriéndose a construir en geogebra) para que ustedes acoten esa diferencia, usted misma compruebe lo que dijiste (refiere a E83), fue una buena hipótesis: saber si una simetría puede ser una traslación

E81: de pronto si

P: o si una traslación puede ser una simetría. De pronto si (señalando a E81). Habría que mirar cuando si y cuando no [5:33-5:51].

(En diálogo entre docente, estudiantes y geogebra se procede a construir un vector y trasladar el polígono [5:51-8:01])

*P: Ahora, hágase la pregunta: este (señala al polígono final) se puede obtener también por reflexión
Que dice usted E81*

E83: si

E81. ¿Cuál?

P: Ese triángulo se puede obtener también por reflexión (nuevamente señala la figura final)?

E81: Obvio

E83: si porque es el mismo

P: pero que reflexión aplicarías, una puntual, una axial o sea una respecto a un eje?

E83: vea este refleja este, el de acá refleja este (señala los puntos imagen de los vértices y sus correspondientes puntos en la figura inicial)

P: Ese lo traslado pero que se refleje no sé. Por ejemplo yo voy a tratar de poner aquí una recta

E83: No, no se refleja

P: cierto que no se refleja?;

E83: No se refleja porque este punto, se supone que debería estar acá (señala la posición en la que estará ubicada la imagen de uno de los vértices por reflexión respecto a uno de las aristas)

*P: Excelente,. Si me hago entender. Entonces háganse la pregunta: una traslación será una simetría?
¿Qué dicen ustedes?*

E81. Yo digo que no

[5:51-8:44]

Adicionalmente, en la I.E. Moderna se relaciona un fragmento de la clase en la cual se genera un diálogo y negociación de significados, entre estudiantes del equipo 6 Moderna y el docente, en torno a propiedades o relaciones entre objetos geométricos presentes en las construcciones geogebra (10-4V11_19102017_Moderna_[09:11-10:07]).

P: ¿es una línea qué? (Refiriéndose a la herramienta utilizada de geogebra para realizar la construcción.)

E63: perpendicular.

P: ah perpendicular, ah.... eso te garantiza que la columna con la base te van a formar un ángulo de?.

E63: 90 grados.

P: 90 grados, porque estas trazando perpendiculares. Solo te hago una pregunta, ¿te toca hacer columna por columna, no habrá otra manera de yo poder decir ah es que yo me puedo ahorrar una serie de pasos y puedo hacerlo más rápido?.

E63: si (realiza un gesto con la cabeza).

P: lo que estás haciendo..., si porque estas empezando a conocer el programa, te estas empezando a familiarizar con él, pero pensemos en que otra manera me puede a mí, como facilitar el trabajo de tal manera que yo pueda trabajar, si?, si?. Vayamos pensando en eso.

En el caso de la I.E Moderna de Tuluá, otro ejemplo es evidenciado en el video en el cual el docente propone al equipo de estudiantes 7, socializar a todo el grupo las conclusiones y hallazgos acerca de la sucesión de Fibonacci y en torno a este objeto matemático se genera el siguiente diálogo (10-4V06_28092017(1)_Moderna_[00:01-03:07]):

P: en la clase pasada surgió una inquietud acerca de la aplicabilidad de los números de Fibonacci, entonces la compañera del equipo número... (mira a la E74_Moderna, quien dice 7) 7, nos va a socializar lo que ellos al interior del equipo ¡sí!, concluyeron acerca de los números de Fibonacci.

E74_Moderna: bueno (hace la venia), los números Fibonacci, osea cómo uno sabe cómo se realizan paque uno fácilmente, como se ven (señala los números escritos en el tablero). La sumatoria de uno y uno da dos y de dos más uno da tres y de tres más dos da cinco y de cinco más tres da ocho y de ocho más cinco da trece y de trece más ocho da veintiuno y así sucesivamente hasta el infinito que, hasta el infinito, eso quiere decir osea que cada número por lo menos el primero se suma por sí mismo por si solo y ya a partir del primero y el segundo se va sumando el segundo con el primero, el tercero con el segundo, el cuarto con el tercero y así sucesivamente.

P: otra preguntica, ustedes recuerdan que la primera actividad tuvo que ver con la proporción áurea, y dentro de esa actividad de los números de Fibonacci también se les proponía a ustedes que el último número lo dividieran entre el anterior, cierto?. ¿Qué relación, qué notaron ustedes, qué características, con respecto a la proporción áurea encontraron ustedes?. ¿si? O cualquiera de los equipos, si alguien desea participar está abierto el espacio, estamos cerrando la actividad que quedó allí el día... ¿qué día fue?.

E54_Moderna: viernes [00:03-01:49]

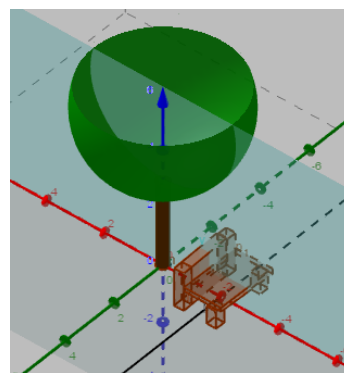
E74_Moderna: osea, que la sumatoria tanto de la división como... osea la sumatoria de la primera actividad que hicimos, tiene que dar el mismo resultado que la división (señala el tablero). [02:18-02:30]

De lo anterior, también se da cuenta en tanto que los docentes propusieron al aula, compuesta por microsociedades, el descubrimiento de nexos entre conocimientos o creencias relativas al entorno, las simetrías (como los frisos y teselas) y/o la proporción áurea, con estructuras naturales y/o artificiales. Estructuras que pertenecen a las Instituciones Educativas o el entorno de los educandos. Y que a su vez, están imbricadas con las cosmovisiones socioculturales que tienen tanto estudiantes como otros miembros de la comunidad a la hora de valorarlas como estructuras hermosas. Nexos que fueron descubriendo los estudiantes durante la resolución de los problemas abiertos presentes en la unidad didáctica, en el marco del trabajo dialógico y colaborativo de los equipos, gestionado por el profesor.

Así por ejemplo, en la Institución Educativa Jovita Santacoloma, el equipo de estudiantes número 9 Jovita modela, usando objetos geométricos espaciales, la estructura compuesta por un árbol y una silla (ubicadas frente a la cancha del colegio).



(c)



(b)

ILUSTRACIÓN 17: *MODELO DE ESTRUCTURA ÁRBOL- SILLA*

La Ilustración 17a corresponde a la Estructura real conformada por Árbol-Silla y 17b muestra el Modelo 3D de la Estructura Árbol-Silla realizada por el equipo 9 Jovita.

Se observa que el modelo árbol-silla guarda relación matemática con la estructura real (09G27_15112017_Jovita). Sobre el mismo la interpretación del modelo y las relaciones existentes, los estudiantes muestran tanto al modelo como la estructura real en un video corto, en el cual expresan lo siguiente (09V30_16112017_Jovita [00:00-7:35]):

E91: tenemos el plano hecho en geogebra, que tiene unos que tiene unas bellezas matemáticas. Esto nos parece hermoso porque podemos disfrutar de la sombra, podemos ver un partido de futbol, además que las flores cumplen con los números de Fibonacci ya que cada flor tiene de uno tres y cinco pétalos. La silla también, tiene belleza matemática ya que cuando la hicimos en geogebra utilizamos simetrías para hacer las plantas (base de la silla), y no corren el riesgo de que puedan salir torcidas o diferentes.

También, es un lugar tranquilo donde podemos tomar aire y compartir con los demás haciendo diferentes actividades y que se ajustan a este lugar [00:18-1:04].

E91: También vemos que la banca si tiene belleza de simetría axial, ya que esta herramienta construye planta que construimos las patas de la banca con el objetivo que con el objetivo de ayudarnos y ahorrar tiempo. La simetría más simple en esta reflectiva (refiriéndose al plano de simetría) es fácil reconocer porque una mitad es la imagen de un espejo de la otra mitad. Se requiere un objetivo desea se requiere el objetivo deseado el cual se quiere duplicar y luego en un eje de simetría [1:25-2:10].

Lo anterior, da cuenta de las concatenaciones que realizan los estudiantes entre criterios de belleza de estructuras asociados a la matemática. Pero también en conjugación con las apreciaciones e importancia que le asignan los sujetos de la comunidad educativa a dicha estructura modelada.

Similares propuestas se encuentran en 07V30_16112017 JOVITA [0:00-3:47]; 08V30_16112017 JOVITA [00:00-9:43] y 10V32_24112017 JOVITA [00:00-2:30]. Las cuales, puestas en contraste con las nociones sobre la belleza de estructuras naturales o artificiales, muestran las resignificaciones o negociaciones de significados producidos durante la

implementación de la propuesta microcurricular. A continuación, dos ejemplos de dichas nociones o creencias iniciales, que fueron expresadas como:

Tomado de: Unidad Guía Didáctica

8 Jovita

Para nosotros, la belleza es aquello que impacta con su Estructura, textura o color es eso que llama mucho la atención que causa curiosidad

Yo pienso que la belleza se puede estudiar observándola y usando la matemática.

es una emoción abstracta, algo Bonito, algo que a una persona le gusta, o algo material

se puede estudiar dentro de la disciplina filosófica y de la estética

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 10 Jovita

Veamos el caso del equipo 7 Jovita. Este realiza el modelo de una estructura conformada por cuatro columnas y una losa pequeña. Y la relación entre criterios de belleza y cosmovisiones que realizan al respecto es:

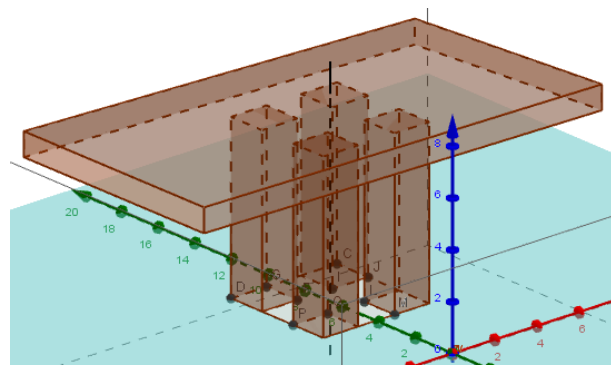
Importancia de las columnas sostenía un tanque de agua ya que el colegio tenía problemas con el agua y tiene 20 años que está construido ya que el problema se solucionó quitando el tanque de agua

la belleza matemáticamente tiene simetría respecto a una recta que pasa por el medio del rectángulo que constituye las columnas

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 7 Jovita



(c)



(b)

ILUSTRACIÓN 18: *MODELO DE ESTRUCTURA DE COLUMNAS*

La Ilustración 18a corresponde a la Estructura real conformada por cuatro columnas y 18b muestra el Modelo 3D de las columnas realizada por equipo 7 Jovita.

Adicionalmente, es pertinente mencionar que el quipo 8 Jovita inició estudiando y modelando la capilla, y equipo 10 Jovita lo hizo con el coliseo de la I.E, para finalmente realizar respectivamente el modelo de la cafetería y la tienda (kiosco) (Ilustración 19). Estas dos últimas estructuras son más complejas geométricamente que las modeladas por los equipos 7 y 9 Jovita, lo cual lleva a estos equipos a completar parcialmente sus modelaciones.



(a)



(b)



(c)

ILUSTRACIÓN 19: *ESTRUCTURA REALES CAPILLA, CAFETERÍA Y COLISEO*

La Ilustración 19a corresponde a la Capilla y 19b la Cafetería y 19c el coliseo de la I.E. Jovita Santacoloma.

En los modelos de todos los equipos se observa el uso de simetrías para sustentar la belleza matemática. Aunque en este trabajo se intentó conectar, encontrar o establecer posibles relaciones de la razón áurea con las simetrías, ello no se logró articular en los modelos geométricos 3D realizados por los equipos de estudiantes. Es decir, razón áurea y simetrías se constituyeron en objetos matemáticos con los cuales se le da solución al problema abierto de geometría vía modelación 3D, pero sin lograr encontrar nexos que indiquen relaciones directas entre estos más que la coexistencia o presencia simultánea en algunos modelos matemáticos que permiten estudiar estructuras que usualmente se consideran hermosas. En particular, el equipo 8 Jovita fue el único en hacer uso tanto de simetrías como razón áurea para dar cuenta de criterios de belleza matemática, explicando dicha belleza por un lado con simetrías y por el otro con razón áurea, pero sin lograr explicarlo simultáneamente con posibles relaciones entre ambos objetos matemáticos, como se observa a continuación.

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,63$$

$$\frac{L}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{L}{a} = 1,63$$

$$\frac{L}{a} = \frac{1414}{a} = 1,63$$

$$a = 867,5$$

Cafetería.
 elegimos la cafetería por su simetría y su belleza que aunque lleva poco tiempo de construido (2010) la institución es considerada hermosa por su estructura que posee varios criterios matemáticos tal como la belleza áurea.
 A sido muy útil este tiempo ya que la mayoría de los estudiantes les parece un sitio muy agradable para compartir.
 Los criterios de la cafetería para considerarla bella son la estructura que tiene ya que es diferente.

24 / 10 / 17
 Demostración de belleza ~~simetría~~ áurea capilla.

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,63$$

$$\frac{L}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \frac{L}{a} = 1,63$$

$$a = \frac{1,95m}{1,63} = 1,2m$$

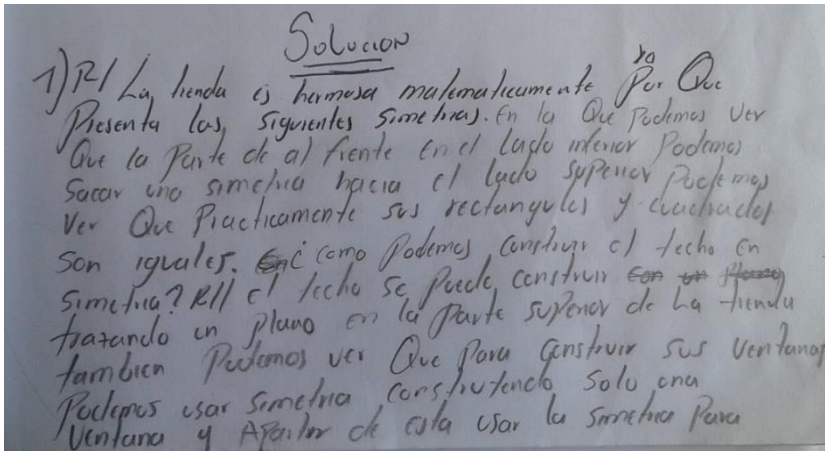
Otro.

$$1,95m = 1,63 \rightarrow 1,63 \cdot 1,95 = a$$

$$a = \frac{1,95 \cdot 1,63}{1,63} = 1,2m$$

Capilla.
 elegimos la capilla por su simetría y su belleza que aunque lleva poco tiempo de construido (2010) la institución es considerada hermosa por su estructura que posee varios criterios matemáticos tal como la belleza áurea.
 A sido muy útil este tiempo ya que la mayoría de los estudiantes les parece un sitio muy agradable para compartir.
 Los criterios de la capilla para considerarla bella son la estructura que tiene ya que es diferente.

Tomados de: Unidad Guía Didáctica 8 Jovita, y refieren al estudio realizado respecto a la cafetería y a la capilla utilizando razón áurea, así como sobre las creencias o conocimientos culturales que los estudiantes les asocian.



Tomado de: Unidad Guía

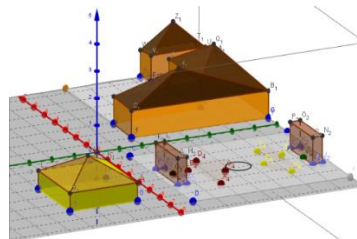
Didáctica 10 Jovita

Por otro lado, en la Institución Educativa Moderna se realizaron las observaciones a las resoluciones a los problemas, en las cuales se usa un gran número de figuras planas con geogebra 3D pero ubicadas en el espacio, que describiremos a continuación.

Los estudiantes del equipo 3 Moderna fueron los únicos que modelaron los tres sitios seleccionados. Estos corresponden a una estructura integrada por una cancha de microfútbol, una edificación perteneciente a salones de preescolar y una de las tiendas escolares.



(a)



(b)



(c)

ILUSTRACIÓN 20: MODELO DE ESTRUCTURA CANCHA-EDIFICACIÓN- TIENDA

La Ilustración 20a corresponde a la Estructura real conformada por Cancha-Edificación, 20b muestra el Modelo 3D de la Estructura Cancha-Edificación-Tienda y 20c pertenece a la estructura tienda escolar de la I.E. Moderna.

Se observa la existencia de relación matemática entre el modelo cancha-edificación-tienda con la estructura real (03G22_24112017_Moderna), lo anterior se evidencia en un video (03V23_27112017(3)_Moderna_[00:44-02:31]) realizado por el equipo de estudiantes y en el cual se afirma:

E35: ...la cancha tiene siete cuadros de aquí hacia allá (señala el largo de la cancha), lo cual nosotros representamos así mismo en el trabajo de geogebra (señala la sala de sistemas número 2), porque ya como un cuadrito entonces a allá también es un cuadrito, entonces lo representamos bien. De aquí hacia allá son 6 cuadritos (señala el ancho de la cancha), igual lo representamos allá (señala la sala de sistemas número 2), o sea que no tuvimos que remplazar ninguna medición, ni dada y aquí hay un metro (señala la cancha) allá también hay un metro (señala la sala de sistemas número 2) o sea que no cambiamos totalmente nada, la cancha tiene la misma medida que allá o sea que no cambiamos nada (realiza gesto con el dedo pulgar derecho, en señal de que ha terminado la explicación de lo correspondiente a la cancha de microfútbol) ya?.

E35: Bueno, aquí estamos en la pared de la escuelita, esta altura (señala la pared lateral izquierda de la escuela) mide cinco metros, en el plano nosotros cada cinco metros lo representamos por un centímetro, o sea que un centímetro equivale a cinco metros (hace un gesto con la mano derecha para representar un centímetro y señala la pared con la mano derecha para representar cinco metros), (luego se da la vuelta invitando a seguirlo) ¡vamos por acá! (se dirige hacia la escuela) esta es la escuela bien sabroso vos sabes... (Sigue invitando a que lo sigan) acá apenas están construyendo, esto no vale no vale (señala construcción), aquí son cinco metros de altura (señala con ambas manos la pared aledaña a la puerta de ingreso a la escuela) todo esto nosotros lo hicimos por ejemplo aquí está todo esto (señala) y todos los baños toda...

E35: Bueno, esta es la cafetería y tiene aproximadamente tres metros de altura en el plano geogebra y lo reemplazamos por un centímetro, así como reemplazamos allá (señala la escuela) los cinco metros por un centímetro, eso vamos a reemplazarlo por un centímetro también (señala la tienda escolar luego levanta los dedos pulgares de ambas manos como signo de terminación de la explicación).

A partir de la observación y análisis del aporte anterior, se evidencia que E35_Moderna muestra como su equipo a través del uso de una escala, da cuenta de la semejanza entre el modelo presentado en geogebra con la construcción real. Además utilizan como estrategia la cuadrícula

del plano x,y para el uso de dicha escala y aunque no son mencionadas directamente en el video, a partir de la heurística anterior aparecen simetrías y sus posibles relaciones con la proporción áurea, tanto en el modelo construido en geogebra como los objetos reales. En los demás equipos de la I.E. Moderna en forma general se encontraron los siguientes hallazgos:

El equipo de estudiantes 1 Moderna no terminó el modelo solicitado en el trabajo de investigación, a pesar de haber elegido algunos sitios por su belleza (presentaron el archivo 01G22-24112017 Moderna, que contiene una columna constituida a partir de cubos):

4- Uno de los lugares mas bellos del colegio es la cancha de voleibol, en donde esta el árbol inmenso y rodeando sus grandes y fuertes ramas.

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 1 Moderna.

Incluso los estudiantes pensaban en algunas ideas iniciales para construir su modelo en 3D:

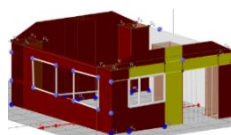
5- usando un patron de medidas y reglas de la matematica, con la tecnologia q' hoy poseemos para crear modelos en 3D es: si basados en las medidas, arquitectura para poder q' todo enaje y quede bien y seguro para vivir tranquilamente o permanecer.

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 1 Moderna.

Los estudiantes del equipo 2 Moderna modelaron la estructura correspondiente al salón de danzas:



(a)



(b)

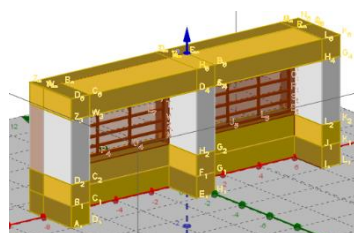
ILUSTRACIÓN 21: MODELO DE ESTRUCTURA SALÓN DE DANZAS

La Ilustración 21a corresponde a la Estructura real del salón de danzas y 21b muestra el Modelo 3D del salón de danzas.

Para responder a las soluciones, mediante un video de publicación de resultados, y dar cuenta de relaciones matemáticas de belleza, las estudiantes de los equipos 2 y 4 consultaron la información suministrada por el docente en la UGD. Cabe anotar que a pesar de no terminar el modelo y no contar con ideas propias a la hora de hacerlo público, utilizaron herramientas como polígonos interceptados por aristas que responden a propiedades geométricas presentes en la construcción de geogebra 3D, y que no son abordadas de manera explícita en el video como simetrías y/o proporción áurea. (02V23_27112017(3)_Moderna_[00:01-04:14], 02G23_27112017_moderna, 04V22_24112017_Moderna_[00:01-06:40] y 04G23-27112017_Moderna). El equipo de estudiantes 4 Moderna modeló parte de la estructura correspondiente al aula máxima:



(a)



(b)

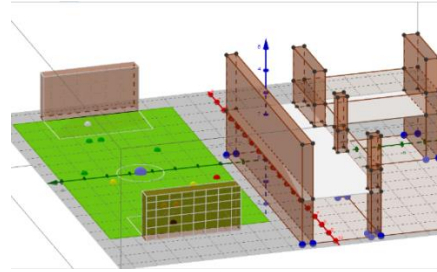
ILUSTRACIÓN 22: *MODELO DE ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE AL AULA MÁXIMA*

La Ilustración 22a corresponde a la Estructura real del aula máxima y 22b muestra el Modelo 3D del aula máxima.

El equipo 5 Moderna modeló la estructura integrada por una cancha de microfútbol y una edificación correspondiente al primer piso de la sede central:



(a)



(b)

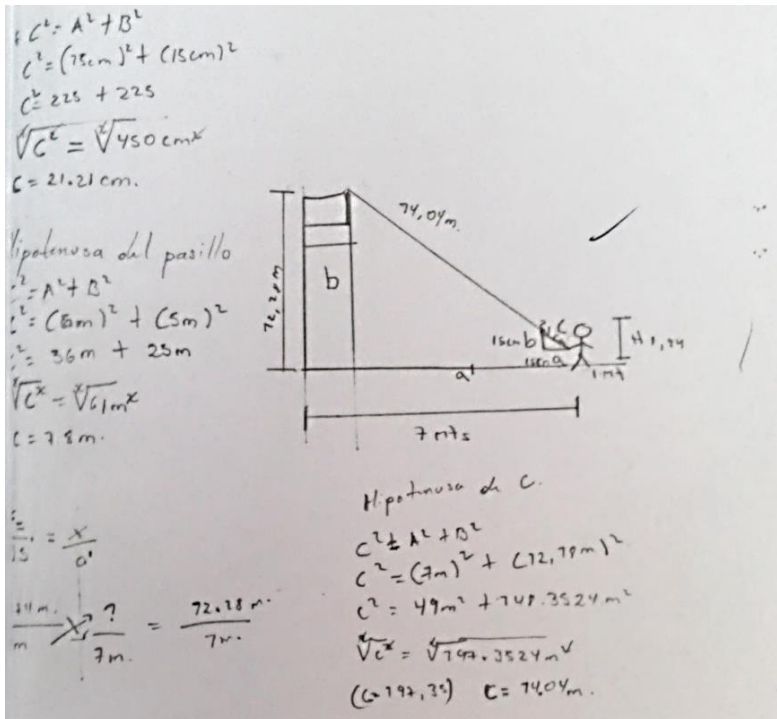


(c)

ILUSTRACIÓN 23: *MODELO DE ESTRUCTURA CANCHA-EDIFICACIÓN*

La Ilustración 23a corresponde a la Estructura real de la Cancha, 23b muestra el Modelo 3D de la Estructura Cancha-Edificación y c pertenece a la estructura real de la edificación.

Los estudiantes presentan un modelo en 3D que responde a las propiedades matemáticas de belleza, aunque en el video de publicación no realizan mención de dichas relaciones entre simetrías y proporción áurea (05G21_23112017_Moderna; 05V23_27112017_Moderna_[00:01-02:22]). Es importante destacar que este equipo es de los pocos que consignan (dibujo a lápiz y uso de los teoremas de Pitágoras y Tales) en la UGD, el uso del triángulo semejante (artefacto) para dar cuenta de la medida de grandes alturas:



Tomado de: Unidad Guía
Didáctica 5 Moderna.

Los estudiantes del equipo 6 y 7 Moderna modelaron la estructura del salón de danzas respectivamente:



ILUSTRACIÓN 24: MODELO DE ESTRUCTURA DE SALÓN DE DANZAS

La Ilustración 24 muestra el Modelo 3D del salón de danzas realizado por equipo 6 Moderna, de la Ilustración 21a.

Ambos equipos, buscan mostrar las propiedades matemáticas de su modelo, que dan cuenta de la estructura real y su belleza; por medio de la construcción en Geogebra, para ello presentan como evidencias el modelo 3D (el cual se apoya en paralelismo y perpendicularidad) y la UGD. En esta última el equipo 6 evidencia las medidas reales, la escala (1m:1cm) y figuras planas usadas en

dicha construcción (06G22_24112017_Moderna, 07G22_24112017_Moderna y 07V23_27112017_Moderna_[00:01-03:36]):

Salón de Danzas:
 Codo Rintros: 7,203 cm (12,03)
 Codo frontol: 7,251 cm (12,51)
 Alto 1: 243 cm (3,43)
 Alto 2: 290 cm (2,9)
 Ventana:
 Alto: 748 (7,48)
 Ancho: 207 (2,07)
 Puerta
 Alto: 207 (2,07)
 Ancho: 200 (2,0)

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 6 Moderna, refiere a las medidas reales de la estructura.

4- La escala relacionada de la dimension del modelo es segmento, Prisma, Rombos, Poligonos, Rectangulares.
 7a. La Estructura tiene triangulos, lo elegimos por sus diversas figuras geometricas, y su Geometria Matematica,
 Ademas de el Teorema de Pitagoras, y el teorema de Tales para Determinar su Altura.
 7b. las figuras o Estructuras de la Unidad son 4 Metros, al hacerlo en Geometria Reemplazamos los Metros a cm, Se toman los mismos formas y figuras geometricas y se trata de hacerlo de la misma forma q Geometria.
 es.
 la altura real es de 7 metros en Geometria es de 7 cm.

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 6 Moderna, refiere a la escala figuras utilizadas en el modelo 3D

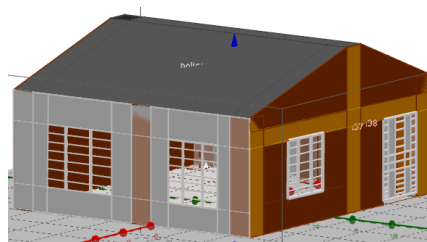


ILUSTRACIÓN 25: MODELO DE ESTRUCTURA DE SALÓN DE DANZAS

La Ilustración 25 corresponde al Modelo 3D del salón de danzas realizado por equipo 7 Moderna, relacionado en la Ilustración 21a.

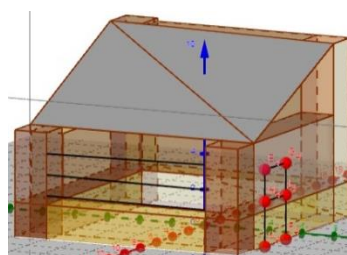
1) ingresamos al Programa geogebra, Tomamos Varios Poligonos Para formar las columnas y Paredes, despues Tomamos el Prisma Para darle Volumen

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 7 Moderna

Los estudiantes del equipo 8 Moderna modelan la estructura correspondiente a una de las tiendas escolares:



(c)

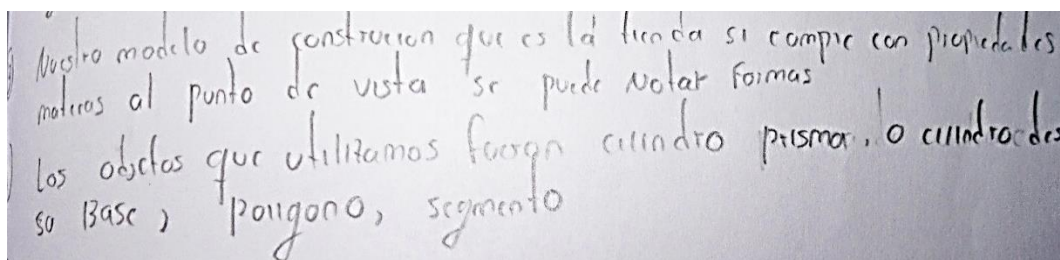


(b)

ILUSTRACIÓN 26: MODELO DE ESTRUCTURA TIENDA ESCOLAR

La Ilustración 26a corresponde a la Estructura real de la tienda escolar de la I.E. Moderna, y 26b muestra el Modelo 3D de la tienda escolar.

Para mostrar las relaciones matemáticas de belleza, en el modelo de un edificio elaborado en geogebra 3D, los estudiantes explican de forma sencilla en un el video la semejanza que existe entre su modelo con respecto al edificio real (08G23_27112017_Moderna; (08V23_27112017_Moderna [00:01-00:45])). Además en la UGD dejan ver las herramientas de geogebra utilizadas:



Tomado de: Unidad Guía Didáctica 8 Moderna

De acuerdo a lo anterior, durante la gestión de la propuesta microcurricular en el aula en las dos Instituciones Educativas, se observó la construcción dialógica de conocimientos otorgando papel protagónico a los saberes que surgen de todos los integrantes del aula. Favoreciendo el surgimiento intersubjetivo de heurísticas relativas tanto a la resolución de problemas abiertos de geometría por medio de la modelación, como otras de tipo microsociales presentadas al interior de los equipos a la hora de autogestionar las actividades realizadas. También, es pertinente decir que al interior de algunos equipos de estudiantes se observaron prácticas no pertinentes (metaprácticas) o alejadas de los objetivos de la resolución de situaciones problema propuestos, y que suelen ser inherentes a las microsociedades en tanto que no todos los participantes de una sociedad parecen identificarse en su totalidad con las situaciones, problemas o actividades propuestas. Estas fueron generadas por algunos estudiantes, los cuales participaron con papeles diferenciales en la realización de algunos de los objetivos ligados a los problemas propuestos. Lo cual les conllevó al requerimiento de emplear más tiempo en la implementación de la propuesta microcurricular y la creación de modelos. Estos estudiantes solían exhibir un papel similar en el aula antes de la implementación de esta propuesta curricular. En contraste, también se observó que algunos de estos estudiantes cuyo papel era pasivo en el aula, a priori a esta investigación, durante la modelación con la puesta

de GeoGebra 3D desempeñaron un papel principal, tanto en el diseño y construcción del modelo como en el análisis geométrico realizado.

Veamos. En la Tabla 6, el docente identifica propuestas en el aula relativas a metaprácticas identificadas durante algunas de las clases anteriores, así como a posibles errores y dificultades; algunos posiblemente asociados a prácticas evaluativas o de presentación de los contenidos por parte del docente a priori a la implementación de esta propuesta microcurricular. Ello se observa y registra en la Tabla 5 Jovita.

También, hizo (el docente) uso de una lista de cotejo a través de la cual identificó y visibilizo en el aula a los estudiantes que propician metaprácticas. Paso seguido, estos estudiantes procedieron a colaborar pertinentemente a sus equipos durante esta clase. Lo cual, muestra la dependencia de metaprácticas por parte de estos estudiantes, o talvez de un modelo en el cual su trabajo está más centrado en el reconocimiento de la calificación numérica obtenida, más que en los conocimientos que los estudiantes están generando de forma intersubjetiva. Este se plantea como un posible cuestionamiento a investigar en futuros estudios (Tabla6_Jovita 16-10-2017 a 20-10-2017, p. 19-20).

Análogamente, en el caso de la I.E Moderna de Tuluá, el docente también identifica algunos de los casos en los cuales aparecen metaprácticas (Tabla 6 Moderna, 09-10-2017 a 13-10-2017, p.20). Posteriormente y en el marco de la evaluación realiza aportes encaminados al uso de interacciones dialógicas al interior del el equipo 1, con el fin de reconocer las metaprácticas en algunos de sus integrantes y poder asumir compromisos (Tabla 6 Moderna, 03-11-2017 a 10-11-2017, p.12).

Por otro lado, la identificación y resignificación de las creencias presentes en las prácticas de los docentes dan cuenta de las reflexiones que estos realizan sobre su gestión del microcurrículo

en el aula de matemáticas; así como del papel dinámico que los docentes reflexivos le otorgan a un aula de tipo microsociocultural.

Algunas creencias observadas son:

- Creer que la modelación del sitio elegido necesariamente tenía que ser realizada por los estudiantes estrictamente usando GeoGebra3D; lo cual fue reevaluado por los docentes a la hora de observar que los equipos de estudiantes hicieron uso simultáneo tanto de la ventana 2D como 3D para potenciar sus construcciones (Tabla 6 Jovita, 22-09-2017 a 28-09-2017, p.8; Tabla 6 Jovita, 16-09-2017 a 20-09-2017, p.25; Tabla 6 Moderna, 16-10-2017 a 20-10-2017, p.27).

Así se observa cuando los estudiantes del equipo10 Jovita, expresan (10-2V20_24102017 Jovita [8:05-8:20]):

E103: (a la hora de construir un poliedro) ...el alto, el alto ocho.

P: ocho.

E103: Ehh laal

E101: No, no, no. No porque primero vamos a hacer la base

P: Excelente

E101: Primero hay que hacer la base y medir bien la base, y ya cuando estemos en el 3D hay si hacemos lo de la altura y todo eso.

TABLA 1: INFORMACIÓN GENERAL DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA MODERNA DE TULUA

Equipo: 5 Fecha: 9/10/17

Ubicación de la Institución Educativa o sitios de interés: Corredor principal de la Institución, Cancha de microfútbol, Bancas de la Sede S. Central.

Historia: Entre los años 1845 y 2002 era nuestra institución la central femenina, ya desde el 2002 hasta la actualidad es una institución mixta.

Creencias y cultura: (no se especifica)

Construcciones y Educación: Edificación de dos plantas, biblioteca, aulas de clases, sala de sistema, coordinación, audiovisuales, secretaría, coordinación Sede de preescolar, 3 Sedes básicas de primaria.

Espacios:

- cancha de microfútbol.
- Árboles de diversos tamaños.
- garajes de autos.

Belleza: Tiene una estructura muy estable, muy bien pintada. Las paredes de colores vivos y variados.

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 5 Moderna.

- Creer que el proponer a los equipos de estudiantes la resolución de los problemas introductorios posiblemente potenciaría en ellos, el establecer relaciones entre modelo geométrico en geogebra 3D con criterios de belleza matemática por simetrías y/o razón áurea presentes en los sitios reales. Los problemas introductorios se denominan *Partición del segmento en proporción áurea*, *Sucesión de Fibonacci* y *número áureo* y modelar *Edificio 1* (Anexo E). Así como, sistematizar las prácticas gestionadas y relacionadas con los problemas introductorios, con el fin de aportar a las resignificaciones microcurriculares. También, se propone a los estudiantes el publicar sus hallazgos haciendo uso de registros como video, audio, archivos geogebra y lengua natural en las UGD. Plantearles el modelar en geogebra 3D la estructura denominada *Edificio1* el cual contiene simetrías, frisos, teselas, espacios abiertos y cerrados, etc., con el fin de que los estudiantes tuvieran un primer encuentro con el artefacto Geogebra 3D.

Visualizándose en las resoluciones y criterios expuestos por los estudiantes, que dichos problemas introductorios si se constituyeron en propiciadores de heurísticas y resignificaciones de conocimientos, los cuales entraron a dialogar con el modelo geogebra 3D *la Belleza de mi Colegio* realizado por los estudiantes. Es pertinente, observar que en cuanto a Geogebra los estudiantes aún continúan apropiándose del diálogo con dicho artefacto. Ello en cuanto al uso de sus herramientas para realizar la construcción y el cómo identificar o establecer las relaciones geométricas necesarias para dar cuenta, por ejemplo de simetrías. Dificultades que también se derivan de conocimientos geométricos que continúan en construcción.

Lo anterior se observa por ejemplo, en los modelos creados por los equipos 8 y 10 de la I.E. Jovita. En particular el equipo 8, estudia la belleza matemática áurea de la capilla y la cafetería, así como las simetrías. Modelando paredes y zona interna de la estructura, aunque su modelo a un carece de techo y columnas frontales (8G23_02112017Jovita; 10G21_25102017 Jovita).

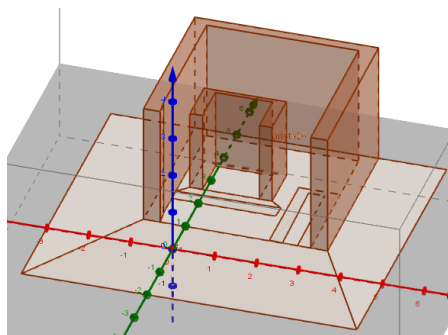


ILUSTRACIÓN 27: *MODELO DE ESTRUCTURA DE CAFETERÍA*

La Ilustración 27 corresponde al modelo de la cafetería de la I.E. Jovita visualizada en la Ilustración 19(b).

- Creer que al invitar un miembro de la comunidad con el objetivo de sostener una charla con los integrantes del aula, sobre aspectos socioculturales o del contexto de la comunidad (entrevista semiestructurada), posiblemente puede impulsar en estos la generación de conexiones entre sociocultura con la belleza matemática de las estructuras elegidas. Lo anterior, si se observó en la medida que los equipos de estudiantes consultaron nuevamente dichos aportes o cosmovisiones socioculturales; algunos de ellos registrados en las tablas 10 y 11 respectivamente. Además, propiciaron prácticas intersubjetivas que les permite abordar o dialogar sobre la belleza de las estructuras, no solo desde lo matemático sino también considerando el papel social, histórico, cultural, etc., que juegan dichas estructuras en la comunidad.

A partir de la entrevista, en la I.E. Jovita Santacoloma los equipos de estudiantes registraron aspectos relativos a los orígenes del corregimiento de Nariño como punto de paso para los viajeros que venían del río Cauca cerca de Rio Frio hacia Tuluá, su arquitectura inicial de bahareque, la arquitectura inicial del colegio sin rejas, entre otros.

Entrevistado: *Entonces el rio cauca lo tenemos muy cerca de aca, y era el medio para surtir a Tuluá. Imagínense que se traían baúles, se traían reces, mulas a través de pequeñas embarcaciones, que llegaba a donde hoy en día es todavía el municipio, el aca el rio cauca y se traían las recuas de mulas, se traían las mercancías pianos, paños todo lo que era mercancía. Y del rio cauca llegaban descargaban la gente y en las mulas los caballos organizaban las flotillas para llevar a Tuluá esa mercancía (10-1,10-2Ventrevista_ 25092017 Jovita [8:54-9:38]).*

Entrevistado: *¿Porque nace Nariño? Nariño nace, Nariño nace porque es un punto intermedio entre Tuluá y el rio cauca. Entonces, comenzaron a hacer casitas más que todo para que las mulas y los caballos descansaran (10-1,10-2Ventrevista_ 25092017 Jovita [9:54-10:14]).*

E incluso, se encuentran relaciones entre estructuras existentes en la I.E. Jovita Santacoloma como la capilla y otras de sitios como Cali. Capilla que además fue modelada con geogebra dando cuenta de su belleza matemática simétrica y/o áurea. Por ejemplo, el equipo 9 Jovita registra en su UGD:

los árboles, la iglesia que fue replica de la iglesia de cali

Adicionalmente, durante la gestión de la Propuesta Microcurricular se observaron algunos errores, como los siguientes:

- **a)** Algunos equipos, hacen uso de cm y m a la hora de medir longitudes, en el caso de *Partición del segmento en proporción áurea*, para obtener la razón entre dichas mediciones dando como resultado un escalar adimensional y no dan cuenta del análisis dimensional (Tabla6 Jovita 07-09-2017 a 14-09-2017, p.16). Como vemos a continuación el primero de los tres intentos realizados por parte de uno de los equipos del Jovita.

Medidas	Cálculos	Cálculos	Medidas
$\frac{AF}{FB} = \frac{1,40m}{80m}$	0,01	58.1	$\frac{81,4}{1,40} \frac{AF+FB}{AF}$
$\frac{AF}{FB} = \frac{1,20m}{1m}$	1,20	1,80	$\frac{2,20}{1,20} \frac{AF+FB}{AF}$
$\frac{AF}{FB} = \frac{1,40}{1m}$	1.40	1.70	$\frac{2,40}{1,40} \frac{AF+FB}{AF}$

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 9
Jovita.

Medidas	Cálculos	Cálculos	Medidas
$\frac{AF}{FB} = -$	$\frac{60\text{ cm}}{1\text{ m}} = 60\text{ cm}$	$\frac{60\text{ cm} + 1\text{ m}}{60\text{ cm}} = 1,0166$	$= \frac{AF+FB}{AF}$
$\frac{AF}{FB} = -$	$\frac{30\text{ cm}}{1\text{ m}} = 30\text{ cm}$	$\frac{30\text{ cm} + 1\text{ m}}{30\text{ cm}} = 1,0333$	$= \frac{AF+FB}{AF}$
$\frac{AF}{FB} = -$	$\frac{50\text{ cm}}{1\text{ m}} = 50\text{ cm}$	$\frac{50\text{ cm} + 1\text{ m}}{50\text{ cm}} = 1,0200$	$= \frac{AF+FB}{AF}$

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 7 Moderna.

Y en relación a *Sucesión de Fibonacci* y *número áureo* en la I.E. Moderna se observa a algunos estudiantes interpretando la regla de formación de dicha sucesión como contar de dos en dos y tres en tres (Tabla 6, 22-09-2017 a 28-09-2017, p.17). De forma muy similar, en la I.E Jovita Santacoloma, inicialmente algunos equipos identificaron correctamente el cómo generar el patrón, pero supusieron que el término inicial podía ser cualquiera. Así, el equipo 9 y 10 crearon la sucesión 2, 2, 4, 6, 10, ...

2, 4, 6, 10, 16, 26, 42,	
1, 3,	
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597	
0,5 0,6 0,618 0,618 0,618 0,618 0,618 0,618	
376154 470588 45281 7511 7869 0,6180338134	

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 9 Jovita.

2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, → error.	
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377	
$\frac{2}{1} = 2$	
$\frac{3}{2} = 1,5$	
$\frac{5}{3} = 1,66666666666667$	

Tomado de: Unidad Guía Didáctica 10 Jovita.

b)_En la Institución Educativa Moderna de Tuluá se presenta un error relativo a la visualización. La cual se produce al pensar que al tener abiertas simultáneamente las ventanas 2D y 3D de geogebra, y al construir un objeto plano en la primera ventana,

entonces simultáneamente geogebra construye en la ventana de 3D otro objeto con propiedades geométricas correspondientes a una figura del espacio. Dicho error fue resignificado por los mismos estudiantes durante la evolución del modelo y en el con docente (Tabla 6 Moderna, 09-10-2017 a 13-10-2017, p.20]). También, en la I.E. Jovita Santacoloma se evidenció un error similar, durante la construcción del modelo de la cafetería por parte de los estudiantes del equipo 8 (Tabla 5 Jovita, 2-11-2017, p.21).

c)_A la hora de realizar un primer análisis geométrico de una estructura tridimensional *Edificio1*, los estudiantes dieron cuenta solo de figuras planas como rectángulos, rectas, el color, las personas presentes, y el uso de dicho Edificio1. Acorde con propuestas metodológicas a priori centradas en la geometría plana. Después, de cuestionamientos, que surge en el diálogo con el docente, sobre ¿Qué otras propiedades estrictamente geométricas observan? Enunciaron ángulos de 90° , simetrías, paralelismo, “la vigas son todas iguales ya que son rectangulares”, tiene rejas o ventanas, entre otras. Dejándose ver que en estas primeras etapas reconocen más las figuras planas que de las del espacio. Y aunque hablan de simetrías no se reconoce a qué tipo de simetría se refieren.



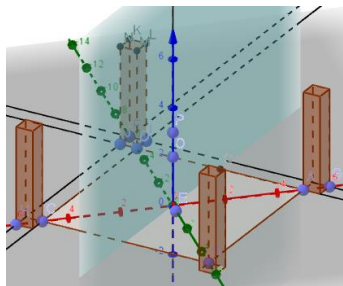
ILUSTRACIÓN 28: ESTRUCTURA EDIFICIO 1

El Edificio1 corresponde a una estructura presente en la Universidad del Valle Tuluá, y con funciones de cafetería.

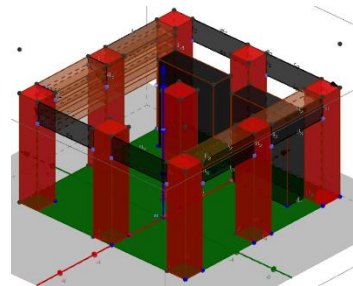
Tomado de: Unidad Guía Didáctica 1

Jovita.

✓ en el video encontramos poliedros, rectángulos, los arbores tienen forma circular, los sillón tienen forma ovalada, los mesas en la parte de los patos hacen un cuadrado, hay simetría en los contornos, también hay simetría en la parte de los patos de los sillón y mesas porque hay una distancia exacta entre cada pata.



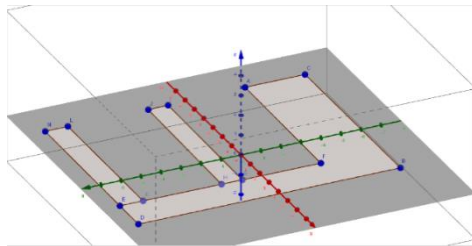
(a)



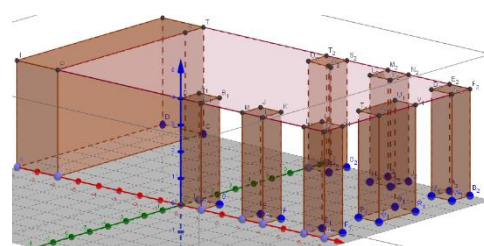
(b)

ILUSTRACIÓN 29: MODELO DE ESTRUCTURA EDIFICIO 1 (I.E. JOVITA)

La Ilustración 29a corresponde al Modelo 3D de la estructura edificio 1 elaborado por el equipo 1Jovita y 29b muestra el Modelo 3D de la estructura edificio 1 realizado por el equipo 10 Jovita.



(a)



(b)

ILUSTRACIÓN 30: MODELO EN GEOGEBRA DE ESTRUCTURA EDIFICIO 1(I.E. MODERNA)

La Ilustración 30a corresponde al Modelo 3D de la estructura edificio 1 elaborado por el equipo 3 Moderna y 30b muestra el Modelo 3D final de la estructura edificio 1 realizado por el mismo equipo de estudiantes.

Observándose en los modelos creados por los estudiantes, como resultado de la implementación de la unidad didáctica, que estos logran resignificar los objetos geométricos pasando de los planos a los espaciales y la relación con simetrías puntuales, axiales y especulares, etc. Por ejemplo (09V30_16112017 Jovita):

E91: (grabando en video la estructura real visualizada en la Ilustración 17a, enuncian) También, si tomamos referencia de un plano más lejano podemos ver el árbol, que también se construyó en geogebra. Este fue el árbol que nosotros construimos en geogebra que también tiene belleza y tiene simetría ya que el tronco tiene la misma distancia si tomamos un punto de referencia en la mitad. Así que este es el plano el que sale en geogebra. Podemos ver que si tenemos un punto o un eje central o una especie de espejo podemos construir un árbol y una banca similar. Con la estructura también podemos ver que tiene diferentes formas y los colores. [5:03-6:00].

d)_Error del tipo imaginar un objeto tridimensional, cuando los estudiantes construyen una columna en geogebra 3D usando “prisma o cilindro desde su base” a partir de un cuadrado, y el estudiante E95 afirma “*profe no me da*”. Ello, dado a que está observando la columna desde una vista superior o colineal al eje z. El error fue superado por los estudiantes, hasta el punto de incluso usar vista superior colineal al eje z para facilitar la elección visual del polígono o figura redonda que se constituye en base de un poliedro a construir, conociendo su altura (Tabla 5 Jovita 27-09-2017, p.16 (10-2V09_27092017 Jovita [24.30-25:28])).



(a)



(b)

ILUSTRACIÓN 31: ERROR DOMINIO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN POLIEDROS

La Ilustración 31a corresponde a la columna desde vista superior la cual parece un polígono, 31b es vista lateral de la columna.

Otro error de este tipo, aparece al intentar realizar una reflexión puntual en el espacio pero se está asumiendo al eje z, visto desde la parte superior, como dicho punto de simetría (Tabla5 Jovita 05-10-2017, p.18-19 y 10-2V12_05102017(1) Jovita [14:30-13:15]).

e)_Error asociado con las *Propiedades del rectángulo*, en relación a la posición en el plano. Al interpretar que para poder construir rectángulos, se requiere usar cuadrícula en la ventana gráfica de Geogebra. Ello con el fin que dichos rectángulos no queden “torcidos” (Tabla5 Jovita 05-10-2017, p.18).

- Como se mencionó en las creencias del docente, la propuesta de realizar el modelo de las estructuras solo usando Geogebra 3D, se constituyó inicialmente en una dificultad para los estudiantes por la forma en que el docente presentó en este caso el contenido con ciertas restricciones sobre el artefacto geogebra.
- Una dificultad similar a la anterior, presentada en la I.E. Jovita Santacoloma, lo constituyó la falta de revisión a priori de las capacidades o limitaciones de procesamiento de las tables, para realizar la modelación en geogebra 3D. Lo cual, causó que inicialmente los estudiantes intentaran animadamente en realizar el modelo, pero al observar que no avanzaban algunos tendieron a difuminarse en relación a las prácticas de resolución del problema. Un cambio al uso de computadores portátiles, posibilitó a los estudiantes avanzar en los modelos geogebra 3D (Tabla6 Jovita 22-09-2017 a 28-09-2017, p.18). En el caso de la I.E. Moderna no se observó dicha situación, puesto que los estudiantes contaron desde el inicio de la implementación con computadores portátiles. Aunque, se menciona que algunos computadores portátiles presentaron limitaciones de velocidad o

capacidad de procesamiento de información 3D como por ejemplo zoom. (Tabla 6 Moderna, 20-11-2017 a 24-11-2017, p.23).

- Una posible dificultad en la forma de presentación del contenido se evidencia en la I.E. Moderna, cuando el docente en una de las clases construye prismas en uno para uno de los equipos de estudiantes. Lo realizó, dejando ver el paso a paso o procedimiento sin dar posibilidad a aportaciones de los estudiantes, y observándose algunas huellas del modelo tradicional centrado en el docente (Tabla 6 Moderna, 23-10-2017 a 3-11-2017, dimensión didáctica p.21).

4.2. Sobre la unidad didáctica: *la belleza de mi colegio*

Con relación a los problemas presentes en la unidad didáctica, encontramos que la resolución de problemas abiertos por medio de la modelación, en este caso de tipo espacial geométrica, propicia un entorno de aula que permite la negociación de significados o conocimientos en el diálogo intersubjetivo entre integrantes del aula. Máxime si dentro del trabajo colaborativo de estudiantes se consideran el juego de roles y de competencias que domina cada estudiante del equipo, en términos de aportar heurísticas que permitan avanzar en la creación de modelos.

Además, la puesta en el aula de diversos artefactos como el decámetro, el “Triángulo Semejante”, Geogebra 3D, el uso de tables (usadas para publicar en video las soluciones y/o construcciones en Geogebra), computadores portátiles, la Unidad Guía Didáctica, videos *Edificio 1* y *la naturaleza y la matemática* aportaron al diálogo intersubjetivo de los estudiantes en términos de enriquecer sus modelos. Pero también, configuraron unos tiempos de creación de heurísticas,

análisis, revisión de las propuestas creadas, y consolidación de la solución a la situación problema *La Belleza de mi Colegio*.

Los modelos creados por los equipos de estudiantes, gravitaron en torno a las siguientes heurísticas generadas o utilizadas, las cuales son tanto de tipo microsocial como matemáticas.

Veamos:

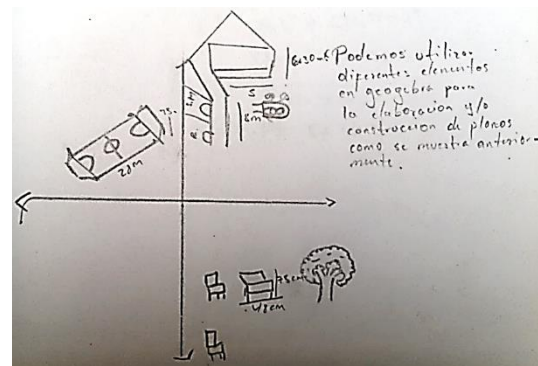
- Realizar aproximaciones numéricas: aproximación de la longitud registrada de la estructura real, al entero más próximo a la hora de crear el crear el modelo en Geogebra (Tabla6, 7-09-2017 a 14-09-2017, p.23; Tabla6, 7-09-2017 a 14-09-2017, p.29).
- En el caso del problema introductorio *Partición del segmento en proporción áurea*: Ubicar A en distintas posiciones, medir directamente y después calcular las razones a fin de aproximarse cada vez más al número áureo; otros equipos realizaron primero la búsqueda con calculadora y seguido, ubicaron el punto A en la posición hallada (Tabla6, 7-09-2017 a 14-09-2017, p.23; 10-2V01_11092017 Jovita [08:47-14:36]; Tabla 6 Moderna, 7-09-2017 a 14-09-2017, p.24).
- Uso de número áureo obtenido como razón entre longitudes para dar cuenta de la belleza áurea de algunas estructuras, por parte del equipo 8 Jovita (Tabla6, 23-10-2017 a 3-11-2017, p.26; Tabla5Jovita 13-09-2017, p.29; 10-2V20_24102017 Jovita [14:57-16:50] y [21:47-25:30]).
- A la hora de iniciar la modelación de la estructura denominada *Edificio 1*, y en las primeras interacciones que los equipos de estudiantes tienen con Geogebra, surge el

hacer uso de las ventanas vista 2D y vista 3D con el fin de potenciar su trabajo interrelacionando los registros geométricos producidos. (Tabla6, 23-10-2017 a 3-11-2017, p.26; Tabla 6, 16-10-2017 a 20-10-2017, p.25; (10-2V20_24102017 Jovita [8:05-8:20]; Tabla 6 Moderna, 16-10-2017 a 20-10-2017, p.27).

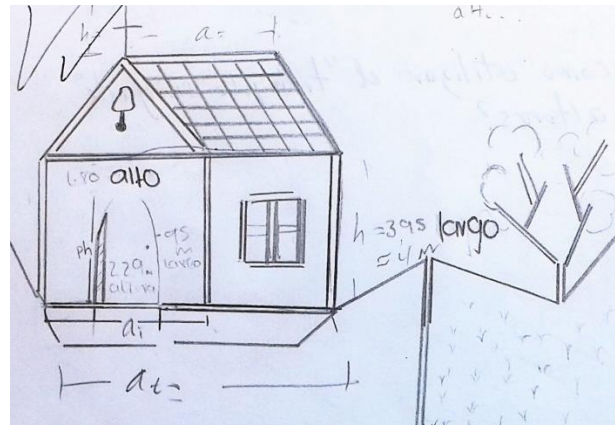
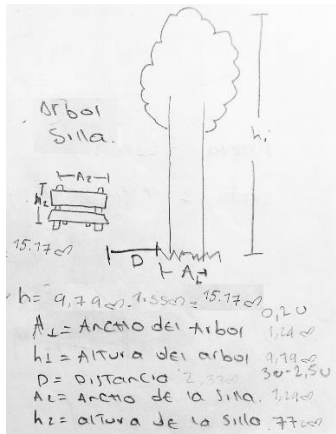
- Una vez eligen los sitios a modelar, crean un plan para registrar las dimensiones de los sitios, el cual realizan principalmente por medio de dibujo a lápiz en la Unidad Guía Didáctica. Y sobre el mismo o en una lista ubican los resultados de las medidas. Aunque también se observa que uno de los equipos realiza la descripción de los sitios en lengua natural sin dibujar. Todos, se enfocaron en las longitudes como el alto, ancho, profundidad, etc., y ningún equipo midió ángulos u otras propiedades geométricas (Tabla6, 23-10-2017 a 3-11-2017, p.25; Tabla 5 Moderna, 29-09-2017, p.25).

Como vamos presentar nuestro colegio a una estudiante.

- debemos escoger 3 lugares que una estructura hermosa
- diseñar una ruta por la cual la vamos a llevar
- mostrarle los 3 lugares, y explicarle matemáticamente
- ubicar el sitio de esos lugares,



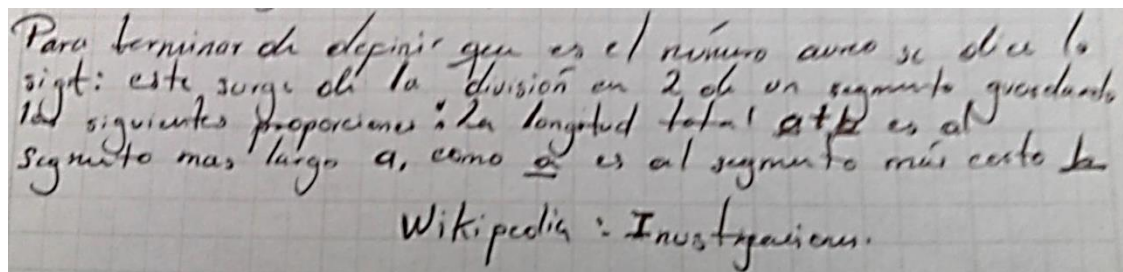
Tomados de: Unidad Guía Didáctica 5 Moderna.



Tomados de: Unidad Guía Didáctica 9 Jovita y Unidad Guía Didáctica 5 Jovita respectivamente.

- Uso de simetrías (reflexiones en Geogebra) tanto para optimizar la medición de longitudes de las estructuras reales, como para dar cuenta de ellas en los modelos, y criterios de belleza matemática, enunciándolas en algunos casos como frisos o teselas obtenidas por reflexiones, rotaciones, traslaciones y torceduras (Tabla6, 2-10-2017 a 6-10-2017, p.24; Tabla6, 23-10-2017 a 3-11-2017, p.26; Tabla6, 13-11-2017 a 17-11-2017, p.27; 07V30_16112017 Jovita [0:00-3:47]; 08V30_16112017 Jovita [00:00-9:43]; 09V30_16112017_Jovita [00:00-7:35] y 10V32_24112017 Jovita [00:00-2:30].).
- En ambas Instituciones, los equipos eligen una escala *longitud objetos reales: longitud en unidades de Geogebra*. Uso de cuadrícula del plano xy de 3D para modelar a escala la ruta Turística (Tabla6, 2-10-2017 a 6-10-2017, p.18; 10-2V20_24102017_Jovita [00:12-2:00]; Tabla 6 Moderna, 23-10-2017 a 03-11-2017, p.28).

- Algunos equipos, usaron internet para consultar sobre construcciones en geogebra 3D, aunque esta heurística no fue muy frecuente. En la I.E. Jovita Santacoloma, en algunas clases, los equipos presentaron la tendencia a esperar a que el profesor se aproxime a dialogar con su equipo para así realizar avances en el uso de Geogebra 3D. Requiriéndose por parte de estos más usos de la exploración en geogebra, como una heurística para interactuar con el artefacto. En la I.E Moderna se observa con más frecuencia el uso de internet, así como la práctica microsocial del diálogo de saberes entre integrantes de otros equipos (Tabla6, 09-10-2017 a 13-10-2017, p.24; Tabla 6, 7-09-2017 a 14-09-2017, p.24).



Tomado de: Unidad Guía Didáctica 5 Moderna.

- Los estudiantes de la I.E. Moderna modelan las estructuras 3D complejas haciendo uso principalmente de figuras 2D, pero ubicados en la ventana 3D de geogebra. Privilegiando en sus modelos, las intercepciones por las aristas entre polígonos en el espacio para modelar estructuras planas (paredes, techo, puertas, etc.). Y uso de cubo para construir columnas por medio de la agregación de cubos, o prisma desde su base.

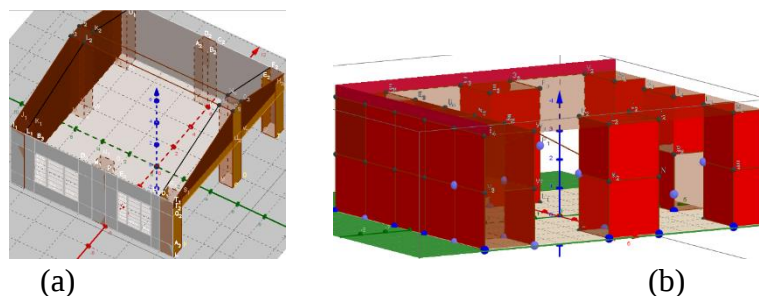


ILUSTRACIÓN 32: ERROR DOMINIO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN POLIEDROS

La Ilustración 32a corresponde a estructura basada en polígonos interceptados por aristas desde vista superior (07G20_20112017_Moderna), 32b es vista lateral de estructura basada en cubos (08G19_17112017(1)_Moderna).

Por otro lado, en el Jovita se observa la modelación de estructuras reales haciendo uso principalmente de objetos geométricos del espacio y del plano, como polígonos, cilindros, esferas, segmentos, rectas, reflexiones, etc. (Ilustraciones 17b, 18b y 20; 07G28_16112017 Jovita; 8G23_02112017 Jovita; 09G27_15112017 Jovita; 10G21_25102017 Jovita; Tabla 6 6-11-2017 a 10-11-2017, p.33).

- También, se observa que en el juego de roles (internamente a los equipos) algunos estudiantes que bajo el modelo tradicional presentaban mínimas competencias en resolución de problemas, aportaron a sus equipos con la generación de heurísticas, prácticas pertinentes o liderazgo. Aunque otros continuaron con metaprácticas, realizando aportes importantes solo en algunos de los problemas. Los estudiantes, que en el modelo anterior presentaban prácticas pertinentes en el aula, continuaron fortaleciendo sus competencias de resolución de problemas, comunicación y argumentación en el marco de la Propuesta Microcurricular. (Tabla6 Jovita 16-10-2017

a 20-10-2017, p.25; Tabla8 Jovita, 13-10-2017, p, 13; Tabla 3, p.6-11, 14; Tabla 6 Moderna, 23-10-2017 a 3-11-2017, p.28)

En relación a los objetos matemáticos movilizados durante las resoluciones propuestas por los equipos de estudiantes, se observa de forma global que en ambas instituciones educativas los estudiantes hacen uso principalmente de:

- Número Áureo
- Reflexión puntual, axial y especular, rotación, traslación, homotecias o semejanzas
- Puntos, rectas, planos, rectángulos, cuadrados, triángulos, segmentos, polígonos regulares e irregulares, ángulos, circunferencias en el plano y el espacio, vectores, segmentos, medir longitudes.
- Paralelismo, perpendicularidad, escalas,
- Cilindros, poliedros, cubos, pirámides, esferas.

Usos de dichos objetos que se encuentran sistematizados en las correspondientes Tabla 5 Jovita y Tabla 5 Moderna Tabla 6 y Tabla 7.

5. CONCLUSIONES

Es pertinente mencionar que en el marco de esta investigación y a partir de los análisis y resultados obtenidos, los docentes logramos proponer las siguientes conclusiones. Las cuales aportan respuestas por un lado a la pregunta orientadora 1: *¿cuáles son los conocimientos (teóricos, prácticos) que requiere un docente de matemáticas escolares para diseñar propuestas microcurriculares, principalmente en términos Didácticos, reflexivos y que considere aspectos socioculturales de la misma?* Respuestas que atienden a la resignificación de las prácticas, conocimientos del docente y del microcurrículo a través del diseño e implementación de una unidad didáctica, y la sistematización de experiencias generadas en el aula. Y por otro, proponen respuestas a la pregunta orientadora 2: *¿Cuáles son las posibles resignificaciones de los conocimientos (teóricos, prácticos) del contenido por parte de los docentes, que se generan en el marco de las gestiones de una Unidad Guía Didáctica en el aula?* Ello en el marco de la modelación para dar resolución a problemas abiertos en el aula de matemáticas, relativos a los contenidos matemáticos de simetrías y/o razón áurea, así como concatenando aspectos socioculturales a los modelos creados. Y en conjunto dichas conclusiones aportan respuestas a la cuestión principal de este trabajo de investigación: *¿Qué aporta el Análisis Didáctico concretado en el diseño y desarrollo de Unidades Didácticas a la formación (teórica, práctica) profesional docente y a la innovación curricular?* Veamos.

Como aportes al primer cuestionamiento, y por tanto a la pregunta principal, es posible decir que: las prácticas, conocimientos de contenido, conocimientos sobre medios, conocimientos didácticos (C.D) y análisis didáctico (A.D), constituyentes de la propuesta microcurricular, se

configuran en organizadores locales del currículo que dialogan con las creencias del docente y los aspectos socioculturales relativos al aula y su entorno. En este caso, del microcurrículo de matemáticas. La misma sistematización de experiencias, en el marco de la implementación simultánea de la propuesta microcurricular en dos instituciones, permite los encuentros dilógicos y reflexivos entre los dos docentes. Encontrando en esta investigación, que el encuentro interinstitucional y el microcurrículo, se ven enriquecidos por los puntos de convergencia y divergencia que surgen del análisis didáctico realizado a las clases registradas, particularmente en videos. Se observan resignificaciones de los conocimientos y prácticas de los docentes, las cuales aportan a la formación y desarrollo profesional considerados en términos de competencias teórico prácticas y capacidades para realizar análisis didáctico. En el caso del docente formado en ingeniería, las resignificaciones le permitieron formarse en competencias para enseñar matemáticas escolares, haciendo uso reflexivo de revisión de documentos teóricos y propuestas curriculares existentes, utilizando el análisis didáctico A.D. Y respecto al docente licenciado en matemáticas, estas resignificaciones se orientan más al desarrollo de competencias, tanto para realizar análisis didáctico como para formar docentes en innovación y desarrollo curricular. Entendiendo, que la innovación refiere a teorías, recursos estructurados que permitan fundamentar propuestas curriculares, las cuales no solo se basen en la experiencia.

La sistematización de experiencias en el aula de matemáticas, realizada por los docentes que a su vez fungen como investigadores les permite resignificar sus prácticas y conocimientos. Esto en el sentido que, la misma se constituye en un registro dinámico con el cual los docentes pueden dialogar, reflexionar y resignificar los organizadores locales del currículo. Organizadores que convergen en condensaciones dinámicas en el aula de matemáticas producto de las reflexiones y

resignificaciones continuas que el docente realiza sobre su práctica sistematizada. Así, las continuas metareflexiones y diálogos que realizan los dos docentes respecto a los organizadores locales del currículo, les permite diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas en el marco de la propuesta microcurricular, y que evolucionan o se enriquecen continuamente por las aportaciones de los sujetos del aula.

La sistematización de experiencias también permite, a los docentes reflexivos, visibilizar y resignificar las formas como presenta el conocimiento, registradas durante su gestión microcurricular. Algunos de estos conocimientos pueden ser derivados de propuestas a priori a esta implementación y que incluso se pueden manifestar como errores por parte de los estudiantes. Por ejemplo, se encuentra que un docente que conoce sobre los posibles errores y dificultades asociados a unos objetos matemáticos escolares, les puede otorgar un papel generador o potenciador de conocimiento en sus gestiones de aula. En particular, en esta investigación, en el uso de geogebra 3D surgen errores relativos a la visualización y posición relativa de los objetos respecto a sistemas de referencia (ejes, cuadrícula, etc.).

La gestión de la propuesta microcurricular en el aula de matemáticas vía equipos de estudiantes o microsociedades muestra favorecer la generación negociada de heurísticas, de conocimientos en torno a la resolución de problemas abiertos. Aportando así algunas respuestas a la pregunta orientadora 2, en cuanto que los conocimientos que evidencian los docentes durante el diseño y gestión microcurricular, sobre los objetos simetrías y razón áurea, así como sobre heurísticas, modelación asociados a la resolución de problemas abiertos geométricos y sobre geogebra apuntalados en análisis como el fenomenológico, e incluso representacional (asociado a errores)

muestran resignificaciones en sus conocimientos (teórico, prácticos) del contenido. Así, la heurística microsocial de compartir conocimientos, estrategias y cosmovisiones entre equipos de estudiantes, la cual se evidenció en mayor proporción en la I.E. Moderna, muestra favorecer la negociación y resignificación de conocimientos en el aula. Ello se observa en los modelos generados por los estudiantes de la I.E. Moderna, los cuales aunque corresponden a estructuras más complejas, que los logrados en la I.E. Jovita Santacoloma, se constituyen principalmente de figuras planas ubicadas en el espacio. En la I.E. Jovita Santacoloma aunque se observó en menor proporción dicha heurística de compartir conocimientos con otros equipos de estudiantes, estrategias o cosmovisiones con otros equipos de estudiantes, en los modelos construidos en geogebra principalmente hacen uso de figuras del espacio relacionadas con simetrías; aunque si dialogan internamente en el equipo colaborativo. En este punto resaltamos el papel de mediador pertinente de Geogebra, el cual no conocían los estudiantes pero que dialoga con ellos hasta lograr la generación de modelos geométricos relativamente elaborados. Algunas de las heurísticas más observadas asociadas a la resolución de problemas matemáticos corresponden a explorar diversos objetos y relaciones entre objetos en geogebra 2D y 3D, aproximación numérica, comparación entre figuras o cantidades, uso de simetrías. Y aunque, en la unidad didáctica propuesta y en tanto que problema abierto, se invita a los estudiantes a modelar las estructuras usando simetrías o razón áurea o ambas, se observa que la mayoría hace uso de simetrías para dar cuenta de sus construcciones en Geogebra 3D.

Además, en el mismo marco la modelación vía la resolución de problemas abiertos de geometría espacial, en particular la modelación en geogebra 3D, permite que los conocimientos y heurísticas generados por los equipos de estudiantes se concatenen con sus creencias y conocimientos

socioculturales. Máxime cuando en sus modelos (geométricos) se da cuenta de estructuras naturales o artificiales del entorno de los educandos a través de la apropiación, uso y resignificación de conocimientos matemáticos como número áureo y/o simetrías. Concatenando criterios o conocimientos matemáticos con otros de tipos sociocultural, que usualmente dan cuenta de criterios de belleza.

La implementación de la propuesta microcurricular permite visibilizar un incremento en el número de estudiantes que dan cuenta de prácticas pertinentes en el aula. Es decir, permite visibilizar una disminución en la fracción de los estudiantes que usualmente presentaban un papel pasivo en las propuestas de aula a priori a esta experiencia.

A título de recomendaciones y a partir de los aportes de esta investigación, y con el fin de continuar resignificando el microcurrículo de matemáticas dejamos abiertas algunas cuestiones o invitaciones, a los lectores, profesores, investigadores, diseñadores de currículo, autoridades educativas, etc. Sugerimos abordar en futuras investigaciones: ¿Cuál es un posible campo de problemas que permiten imbricar conocimientos matemáticos y sociocultura en el diseño e implementación de unidades didácticas, abordados desde la Didáctica de las Matemáticas? ¿Cuál puede ser una caracterización de las prácticas no pertinentes de los estudiantes, relativas a la resolución de problemas matemáticos, presentes en un microcurrículo en la cual los estudiantes trabajen de forma colaborativa y generen heurísticas microsociales que les permita identificar, reflexionar, dialogar y generar soluciones a las mismas?

Finalmente, posiblemente es posible invitar a diseñar libros de texto que contengan actividades, relacionadas con los contenidos matemáticos escolares, y que propendan por fortalecer competencias matemáticas en los educandos. Situaciones que fomenten la resolución de problemas abiertos por parte de los estudiantes, y que a su vez realicen unas introducciones al análisis didáctico que le permita a los docentes el implementar o reestructurar las propuestas microcurriculares. Por ejemplo, la modelación (geométrica) se muestra prometedora para diseñar unidades didácticas que permitan fomentar el trabajo por microsociedades científicas en el aula, y posibilitar concatenaciones de los objetos matemáticos con aspectos socioculturales. Entonces, es pertinente que en los mismos libros o publicaciones se generen espacios que contengan elementos relativos a los contextos, por ejemplo aspectos socio históricos de Colombia, la región del Valle del Cauca, etc. También, consideramos pertinente continuar propiciando la formación profesional continua en el marco de la reflexiones, o incluso de la metareflexiones, por parte de los sujetos inmersos en la educación. Entre ellas los docentes en equipos colaborativos que reflexionan sobre sus conocimientos y prácticas; instalados por ejemplo en la sistematización de sus experiencias propiciando la generaciones de currículo; similares a la formación posgradual para docentes propuesta por el MEN que realiza avances en esta dirección.

6. REFERENCIAS

6.1. Referencias (citas en este documento)

- Arcila, J., Bonilla, J., & Cardona, G. (2012). Caracterización del uso de las transformaciones de isometría mediante el diseño de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica que integra Cabri 3D (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Artigue & Houdement. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. Université Paris. France.
- Barrantes, H. (2006). *Resolución de Problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Vol. 1 n° 1, pp. 1 – 9.
- Bedoya, E. (2016). Formación de profesores e educación básica y media en matemáticas, ciencias experimentales y sus didácticas: el análisis didáctico (AD) y el conocimiento didáctico de contenido (CDC). Universidad del Valle.
- Bedoya, E. (2002). Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. (Tesis Doctorado en Matemáticas con especialidad en Didáctica de las Matemáticas), Universidad de Granada, España. Recuperado de http://die.udistrital.edu.co/comunidad/evelio_bedoya_moreno.
- Berrio, M., Bustamante, C., Ocampo, D., Osorio, A. & Villa, J. (2008). *El Proceso de Modelación Matemática en las Aulas Escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos*. Universidad de Antioquia.
- Bishop, A. (2005). Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática (1ª Edición). Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Camargo, J. & Rojas, M. (2002). *Institución Educativa Jovita Santacoloma: Educación, Historia y Conflictos*. Litografía Tuluá. Colombia.
- Camargo, O. (Entrevista, septiembre 25 2017).
- Castillo, L. (2018, Junio). La elaboración de simuladores con Geogebra desde la teoría de la objetivación. *ResearchGate*. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Luis_Castillo11
- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2016). Matriz de Referencia de Matemáticas. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2008). *Guía N° 31: Guía Metodológica Evaluación Anual de Desempeño Laboral Docentes y Directivos Docentes ley 1278 de 2002*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2008). *Guía N° 34: Guía Para el Mejoramiento Institucional*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje v.2*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.
- Córdoba, F., Castrillón E. & Rojas, C. (2015). *Geogebra como Herramienta de Apoyo Visual en la Solución de Problemas de Modelación en Matemática Escolar*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 28. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/acta.htm>
- Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría* (2a. Ed.). México: Limusa-Wiley S.A.
- D'Amore, B. (2017). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretados en clave sociológica. En D'Amore, B. & Radford, L. (Ed.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 29-39). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Díaz, L., Torruco, U., Martínez, M. & Varela, M. (2013). La Entrevista, recurso flexible y dinámico. *Elsevier*, 2(7), 162-167.
- Dinazar, I., Escudero, E., Flores-Medrano, E., Nuria, C., Carrillo, J., Contreras, M., Montes, M., Aguilar, A & Rojas, N. (2014). *Una perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor centrada en su especialización: El modelo MTSK*. En Leston, P. (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1861-1868). España. Universidad de Huelva. Universidad de Granada.
- English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for 21st century. En Sriraman & English. (Ed), *Theories of mathematics education* (pp. 77-219, 261- 295). New York: Springer.
- Fernández, J. (2016). Errores y dificultades. En Rico, L. & Moreno, A. (Coords), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 195-207). Madrid: Pirámide

- Flores, P. (2016). Materiales y recursos en el aula. En Rico, L. & Moreno, A. (Coords), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 275-291). Madrid: Pirámide.
- Gallardo, J., Quintanilla, V. (2016, Agosto). El Consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*. Volumen 30 (número 55), p. 626.
- Garzón, D., Pabón, O., & Vega, M. (2013). Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas. *I Congreso de educación matemática de América central de del caribe*. Universidad del Valle.
- Goldin, G. (2010). Studying Goals and Beliefs in the Context of Complexity. Springer – Verlag. Pp. 397- 419.
- Granes, J., Caicedo, L. & Morales, M. (n.d). La Representación como Juego de Lenguaje. Recuperado de: <http://www.bdigital.unal.edu.co/1247/3/02CAPI01.pdf>
- Hemmerling, E. (2002). *Geometría Elemental*. México: Limusa S.A.
- ICFES. (2016.) Cuadernillo Pruebas Saber 9º Matemáticas. Bogotá D.C.
- Institución Educativa Moderna de Tuluá (2017). *Proyecto Educativo Institucional PEI de la Institución Educativa Moderna de Tuluá*. Tuluá, Colombia: Autor.
- Jara, O. (2013). Orientaciones teórico-prácticas para la sistematización de experiencias. *Biblioteca virtual RS*, 1-17. Recuperado de <http://www.bibliotecavirtual.info/2013/08/orientaciones-teorico-practicas-para-la-sistematizacion-de-experiencias/>
- Joshua, S. & Dupin, J. (2005). Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática. Buenos Aires: Colihue.
- Lafrancesco, G. (2003). *La Investigación en Educación y Pedagogía: Fundamentos y Técnicas*. Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Leontiev, A. (1969). El hombre y la Cultura. En Martinez, R. (Ed), *El Hombre Nuevo*. (pp. 1-29). Barcelona.
- Llinares, S. & Sanchez, V. (1998). Aprender a Enseñar Matemáticas: Los Videos como Instrumento Metodológico en la Formación Inicial de Profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria*. (13), 29 – 44.

- Marcelo, C., Parrilla, A., Mingorance, P., Estebaranz, A., Sanchez, M. & Llinares, S. (1991). *El Estudio de Caso en la Formación del Profesorado y la Investigación Didáctica*. España: Universidad de Sevilla.
- Mejía, M. (2005). *Atravesando el Espejo de Nuestras Prácticas. A propósito del saber que se produce y como se produce en la sistematización*. Expedición Pedagógica Nacional. Planeta Paz.
- Ministerio de Educación en Colombia. (2016, Julio, 16). Índice Sintético de la Calidad Educativa [Página web]. Recuperado de <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/>.
- Moreno, M. (1998). *Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria*. Almería: Universidad de Almería.
- National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2015). *De los Principios a la Acción*. Editando Libros S.A: México (versión en español).
- Papeles de sociedad. (2018, Septiembre). Lev Vygotski: biografía [Página web]. Recuperado de <http://www.papelesdesociedad.info/IMG/pdf/vigotsky-00.pdf>
- Parcerisa, A. (1996). La didáctica de las Matemáticas. En G. Glavez (Ed.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista latinoamericana de etnomatemática*. 7(2), 132 – 150.
- Radford, L. (2004). *Semiótica Cultural y Cognición*. Canadá, Université Laurentienne.
- RedesIB. (2016, 12, Abril). Lev Vigotsky-Teoría socio-histórica [web log post]. Recuperado de http://redesib.formacionib.org/blog/lev-vigotsky-teoria-socio-historica?utm_content=buffer4d943&utm_medium=social&utm_source=facebook.com&utm_campaign=buffer
- Rendón, L., Londoño, C., & Comunidad Educativa. (2016). *Manual de Convivencia Escolar de la Institución Educativa Jovita Santacoloma*. Tuluá, Colombia: Autor.
- Rendón, L., Londoño, C., & Comunidad Educativa. (2015). *Proyecto Educativo Institucional PEI de la Institución Educativa Jovita Santacoloma*. Tuluá, Colombia: Autor.
- Rendón, L., Londoño, C., & Comunidad Docente. (2015). *Sistema Institucional de Evaluación y Promoción de Estudiantes de la Institución Educativa Jovita Santacoloma*. Tuluá, Colombia: Autor.
- Reyes, M. (s.d). *Arte y Naturaleza en clave geométrica*. Universidad de Valladolid. España: Autor.

- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Didáctica de la matemática. 5º curso. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF>
- Rico, L., & Lupiáñez, J. (2008). Competencias Matemáticas Desde una Perspectiva Curricular. Madrid: Alianza S.A.
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En Rico, L. & Moreno, A. (Coords), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-99). Madrid: Pirámide
- Rodríguez, M. (2013). Resolución de Problemas. *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Eduvim.
- Salas, A. L. C. (2001). Implicaciones educativas de la teoría sociocultural de Vigotsky. *Revista Educación*, 25(2), 59-65.
- Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F.: Mc Graw-Hill / Interamericana editores, s.a. de c.v.
- Schoenfeld, A. (2017). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0908-y>
- Toledo, Y. (s.d). Sección Áurea en Arte, Arquitectura y Música.pdf. Retrieved from http://matematicas.uclm.es/itacr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf
- Torres, J. (1996). Sin Muros en las Aulas: El Currículum Integrado. *Kikiriki* (39), 39-45.
- Trouche, L. (2016, marzo). Prendre en compte les métamorphoses du Numérique: vers une approche documentaire du didactique. [Traducido al español por traductor desconocido]. *Revista Iberoamericana de Educación*, (45), pp. 07-23.
- UNESCO. (2016). Aportes Para La Enseñanza de la Matemática TERCE. Paris Francia / UNESCO Santiago.
- Valero, P. (2012). La inclusión de visiones sobre lo “social” y lo “político” en la educación matemática. Universidad de Aalborg. Dinamarca: Autor.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Revista Folios. Volumen 39*, pp. 65-79.

Vivier, L., Gómez-Chacón, I. & Kuzniak, A. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletim de Educação Matemática*, Abril-Sin mes, 1-22.

Wenger, E. (n.d.). Comunidades de Practica, Aprendizaje Significado e Identidad. Cognición y desarrollo humano. Paidós. Pp. 19-39.

Wertsch, J. (1988). Vygotsky y la Formación Social de la Mente. Barcelona, España: Paidós.

Zolkower, B. & Bressan, A. (2012). Educación Matemática Realista. En Pochulu, M. & Rodriguez Mabel. (Comps). Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. (pp. 175-199). Argentina. Universidad Nacional de Villa Maria.

6.2. Referencias (citadas en documentos anexos o de actividades introductorias)

Arte Bárbaro. (2017). Frisos. [Imagen/Fotografía]. Recuperado de: <http://artebarbaro.weebly.com/arquitectura.html>

Grupo Tupis. (s.d). Girasol. [Imagen/Fotografía]. Recuperado de: <http://aureo.webgarden.es/menu/naturaleza>

Houzz., & Santoveña, R. (2017). Suelo de barro Panal 40 (02). [Imagen/Fotografía]. Recuperado de <https://www.houzz.es/projects/1437076/teselado-panal-40>

Roca, X. (2016). Espirales. [Imagen/Fotografía]. Recuperado de <http://www.xavirocasancho.com/la-proporcion-aurea-en-publicidad/>

Scavarda, M. (10, 04, 2012). *La Naturaleza y la Matemática.mpg* [Video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=GTxtz6RIrj8>

Stute, M. (2017). Honeybees can recognize individual human faces. [Imagen/Fotografía]. Recuperado de <https://www.quora.com/What-are-some-interesting-facts-about-bees>

Zorilla, H. (2013). Un Modelo de Casa de Fin de Semana. [Imagen/Fotografía]. Recuperado de:
<http://blog.arquitecturadecasas.info/2010/07/disenio-de-exterioros.html>

ANEXOS

Anexo A: GLOSARIO

A continuación, proponemos algunas palabras claves o términos utilizados en el marco del presente trabajo. Algunos de los cuales surgen como resignificaciones realizadas por los docentes durante la sistematización y metaanálisis realizados sobre sus prácticas y conocimientos teóricos.

Análisis Didáctico: entendemos el análisis didáctico como procesos y productos generados por los docentes reflexivos sobre sus conocimientos y prácticas. Mismo que se centra en los conocimientos didácticos y vía los organizadores locales del currículo permite a los profesores, el generar o hacer converger diseños y propuestas curriculares sustentadas en metareflexiones y resignificaciones dinámicas de los conocimientos del docente. Generándose a su vez nuevos organizadores del currículo y tal vez innovadoras propuestas microcurriculares.

Antecedentes: en el presente trabajo entendemos que los antecedentes, acorde con lo expuesto por Lafrancesco (2003), están compuestos por: a) aquellas experiencias, hechos, situaciones, problemas en contexto que prefiguran la emergencia del problema susceptible de ser investigado, los cuales suelen denominarse antecedentes empíricos; b) y las investigaciones, previamente realizadas relativas al problema, las cuales suelen aportar información previa sobre cuestionamientos, avances alcanzados obtenidos permitiendo contextualizar el problema de investigación. Este último, suele denominarse estado del arte. Adicionalmente, “deben exponerse

las razones por las cuales es conveniente esta información” (Lafrancesco, 2003, p.56). Razones que son de tipo personal, profesional, institucional y social.

Dialógico: lo dialógico se constituye en el aula en ese espacio de encuentros intersubjetivos. Espacio donde se dan lugar conocimientos, creencias, heurísticas, cosmovisiones, reflexiones, resignificaciones en un crisol de negociaciones de significados, etc., entre los sujetos del salón. Ello, entorno a por ejemplo situaciones problema de tipo matemáticos propuestos con el fin de propiciar la generación de conocimientos. Tales encuentros, en tanto que se generan en una microsociedad, contiene las semillas históricas y sociales de la sociedad en la cual están insertos dichos sujetos; así como las condensaciones de los logros, aportaciones o resignificaciones que dichos sujetos le dan a su microsociedad²⁵.

Heurística: alude a las estrategias de solución o abordaje de una situación problema, generadas o utilizadas por estudiantes o equipos colaborativos de estudiantes, algunas de las cuales pueden o no ser exitosas en términos de aportar a la resolución de dichos problemas²⁶. Entendemos que existen heurísticas asociadas a la resolución de problema de matemático como aproximar, generar problemas más sencillos al planteado, etc. Además, encontramos heurísticas relativas a las prácticas microsociales de los equipos de estudiantes, en tanto que requieren generar soluciones a

²⁵ A.A. Leontiev, citado por Wertsch (1988), aludiendo a la importancia de las evoluciones del homo sapiens resalta la importancia de las relaciones socioculturales presentes en la actividad humana (de conocer), enuncia que: *(en la) “esfera de la vida social humana, una forma de fijación de los logros de las actividades humanas en la experiencia histórica y social de la humanidad... El hombre aprende de los errores – y más aun de los éxitos de los demás” (p.48).*

²⁶ Verschaffel, citado por Rodríguez (2013), afirma que las heurísticas son “... estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y la transformación del problema” (p.156).

problemas inherentes a microsociedades; por ejemplo, la presencia de metaprácticas y prácticas asociadas a la resolución de problemas matemáticos planteados.

Microcurrículo: conformado por las condensaciones o convergencias obtenidas por el docente a partir de reflexiones y resignificaciones que este realiza respecto a sus prácticas y conocimientos; así como, de las relaciones con el currículo Nacional y el Currículo de la Institución Educativa con las propuesta de gestiona en el aula. Conformado de unas relaciones de unos sujetos con el conocimiento y con otros sujetos, de unos espacios, de unos objetos y herramientas que permean dichas relaciones. Es decir, el microcurrículo se puede pensar como producto y origen. Producto en tanto que conforma los conocimientos, formas de gestionar y evaluar dicho conocimiento, etc., y competencias que una sociedad espera heredar a las niñas, niños y jóvenes de por ejemplo un país. Y origen, en tanto que permite al docente reflexivo generar, diseñar, gestionar y evaluar nuevas propuestas en el aula que generan diversas formas de pensar la relación con el conocimiento existente y el originado en las interrelaciones propias de las microsociedades.

Microsociedad: Conformada por los sujetos presentes en el aula, los cuales configuran unas prácticas (y metaprácticas) reflejo de o semilla para las aportaciones a la sociedad a la cual pertenecen. En particular, la microsociedad que dialoga o propone resoluciones a problemas matemáticos es enriquecida por las cosmovisiones, las relaciones intersubjetivas, los conocimientos propios de la sociocultura de la cual hace parte. Ello dice que cada grado o equipo de estudiantes conforma una microsociedad con sus propias formas evolutivas de conocimientos y prácticas.

Modelación: la modelización es la actividad científica que conlleva la generación de modelos matemáticos que dan cuenta de fenómenos o situaciones problema de las ciencias, las humanidades, etc. Y la modelación es la actividad generada en las aulas de clase con miras a crear modelos de situaciones del entorno sociocultural de los estudiantes, la modelación hereda sus propiedades de modelización, pero con unas intencionalidades propias al aula como la de generación de conocimientos, heurísticas, e incluso actitudes microsociales relativas a la actividad de problematizar y proponer soluciones a situaciones problema. Acorde a lo enunciado por Berrio, Bustamante, Ocampo, Osorio & Villa. (2008) cuando afirma que:

“la modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micromundo” (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real”. (p.3)

Modelo: Consideramos un *modelo*, en el caso que atañe a las situaciones problema presentes en la Unidad Didáctica de esta investigación, cercano a como lo plantean Doerr & English (2003), citados por Sriraman & English (2010), como unos elementos que bajo ciertas operaciones y relaciones pueden dar cuenta o permitir explicar diversos fenómenos de tipo real o realista (p. 273).

Trabajo en equipos: lo estamos asumiendo como sujetos que conforman grupos centrados en el trabajo colaborativo e incluso gestionan unos roles en dicha microsociedad. Ello en cuanto a que (Parcerisa, 1996) “el trabajo colaborativo conlleva una estructura global fuerte, donde el

alumnado diseña cooperativamente las actividades que el mismo debe realizar” (p. 23), diferente a unos sujetos que conforman un agregado pero trabajando individualmente.

Anexo B: PROPUESTA MICROCURRICULAR EN EL MARCO DEL MACRO, MESO Y MICROCURRÍCULO

La educación de una cultura está organizada mediante lo que se suele denominar currículo. Con el propósito de identificar la propuesta microcurricular, aproximada dentro de este trabajo de investigación, es pertinente determinar su relación como objeto de estudio con el currículo nacional colombiano, el currículo institucional y el currículo en aula. Seguido, se esbozan los posibles aportes que puede realizar esta propuesta microcurricular en términos de conocimientos didácticos de contenido.

Desde hace aproximadamente dos décadas en Colombia se vienen realizando una serie de esfuerzos en educación en relación a orientaciones curriculares. Ello con miras a proponer una educación que dé respuesta a los cambios actuales; pero también a la formación de sujetos capaces de aportar en las soluciones a situaciones de su entorno y desarrollos socioculturales. Entonces, iniciemos abordando lo que se entiende actualmente por currículo y por las competencias del docente en el aula en dichos referentes²⁷ curriculares nacionales o macrocurrículo. Lo anterior dado que, en el presente la educación colombiana está centrada en el desarrollo de competencias en los educandos, pero también da cuenta de unas propuestas o modelos microcurriculares que visibilizan los conocimientos que se esperan en el profesor y su relación con ciertas prácticas de aula.

²⁷ En Colombia se encuentran actualmente tanto a nivel general como de la educación matemática, los siguientes referentes: La Guía N° 31: Guía Metodológica Evaluación Ley 12 78 (2008), Los Lineamientos Curriculares de (1998), Los estándares básicos de Competencias Matemáticas (2006), Las Matrices de Referencia (s.d.), Los Derechos básicos de aprendizaje Versión 2 (2016), entre otros.

Comencemos mencionando que en nuestro país un enfoque actualmente adoptado por el Ministerio de Educación Nacional M.E.N es el de proponer orientaciones, a través de sus lineamientos curriculares, que permitan a las Instituciones Educativas diseñar su propio currículo local o mesocurrículo, visibilizado en el denominado Proyecto Educativo Institucional P.E.I. Entonces la propuesta del MEN no es la de diseñar el currículo que se aplicará de forma uniforme en todas las instituciones del país. Más si es el de plantear unos lineamientos referenciales de contenidos, metodológicos y de evaluación que permitan a cada institución dialogar y reflexionar e incluso construir otros delineamientos educativos que fortalezcan dichas propuestas globales, pero atendiendo a lo local. En los lineamientos curriculares de matemáticas el MEN (1998) expone:

los lineamientos buscan incrementar la formación de quienes hacen currículo y de quienes asesoran a las instituciones educativas para que lleven a cabo sus procesos curriculares dentro del Proyecto Educativo Institucional. Deben servir de orientación pero no reemplazan a los docentes en las decisiones que les corresponde tomar en asuntos como contenidos, metodologías y estrategias para la participación. (p.7)

Lo anterior, se refleja en diversos programas cuyo propósito es el de permitir a los actores de la educación la resignificación de sus conocimientos didácticos y prácticas educativas (Programa Todos a Aprender PTA, entre otros). Si bien, en este documento no se pretende realizar un análisis exhaustivo de dichos programas, los cuales incluso se aplican en la actualidad y en ciertos casos tienen vigencias temporales, si se resalta el hecho que se perfilan como unas posibles vías de reflexión de las cuales las Instituciones Educativas pueden hacer uso en tanto que reflexión y resignificación.

Entonces, en estos términos ¿que deben entender o en qué dirección pueden pensar unos sujetos que pretenden formular su propia propuesta mesocurricular?²⁸ Enfatizamos nuevamente que el diseño de la propuesta mesocurricular debe surgir en primera instancia dentro del marco de la reflexión de los integrantes de la Institución Educativa. Dicha reflexión necesariamente debe realizarse con base a los lineamientos propuestos por el MEN y a las situaciones socioculturales del contexto, a fin de cumplir con criterios de pertinencia. Entonces, los productos consensuados y condensados en el mesocurrículo deberán dar cuenta de cómo dichos sujetos de la institución se piensan aspectos como: los conocimientos a enseñar, como discurren esos conocimientos en la escuela y en el contexto, la estructuración que seguirá su currículo, el énfasis que es necesario realizar y las estrategias tanto de enseñanza, aprendizaje como los criterios de evaluación. Es pertinente señalar que de acuerdo a los anteriores aspectos que constituyen un mesocurrículo, subyace una definición de currículo la cual podemos entender como estructuración de metodologías de enseñanza y aprendizaje, conocimientos, evaluación y papel del conocimiento en el contexto local, regional y nacional de los educandos.

De lo anterior, es de especial interés centrar la atención respecto a las metodologías que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos de matemáticas en el contexto del aula. Ello con el objetivo de dar una mirada a las orientaciones que el macrocurrículo y el meso

²⁸ En los lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se propone que “*a la hora de abordar el currículo de matemáticas en los Proyectos Educativos Institucionales, se hace necesario reflexionar sobre preguntas como las siguientes:*

¿Qué son las matemáticas? ¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela?

¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas? ¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?

¿Cómo se puede organizar el currículo de matemáticas? ¿Qué énfasis es necesario hacer?

¿Qué principios, estrategias y criterios orientarían la evaluación del desempeño matemático de los alumnos?” (p.9).

currículo dan en términos posibles estructuraciones de propuestas microcurriculares, que puede realizar el docente de esta área en la Institución Educativa Jovita Santacoloma y Moderna de Tuluá.

B.1. El microcurrículo según el macrocurrículo

Actualmente, desde el currículo nacional se propone la educación en términos de formar niños, niñas y jóvenes que además de pasar por la escuela puedan dar cuenta de unos conocimientos, habilidades en términos del desarrollo de competencias. Con el propósito de formar ciudadanos con capacidad de diálogo, con conocimientos que les permita desarrollarse y adaptarse pertinentemente en relación a los avances tecnológicos, socioculturales con respuestas y realizar aportes a aspectos sociales como la paz.

Con tal fin, las propuestas educativas colombianas actuales apuntan a la calidad educativa y al desarrollo de competencias. Calidad que se busca visualizar en los conocimientos, habilidades desarrolladas por todos los estudiantes y que a su vez se relaciona con unas propuestas mesocurriculares y prácticas de las Instituciones Educativas, pero también con los conocimientos que poseen los docentes y sus puestas o prácticas en aula. La misma es vista a través de ciertos factores del sistema educativo. En los Estándares Básicos de Competencias se proponen como *“factores asociados con la calidad: el currículo y la evaluación, los recursos y prácticas pedagógicas, la organización de las escuelas y la cualificación docente”* (MEN, 2006, p.9).

Como ya hemos mencionado, se requiere que el estudiante no solo pase por la escuela y acopie unos conocimientos, sino que adquiera unas competencias que le permita desarrollarse en su contexto y seguir formándose durante su vida. Ello va de la mano con lo que se entiende por

competencias, la puesta de las mismas en el meso y micro currículo y la “cualificación docente”. Es decir, se espera que en la medida que el docente, en formación y en ejercicio, reconoce las competencias en su ejercicio profesional muy probablemente estas entraran a hacer parte de las propuestas de aula que realiza. Lo anterior, en congruencia con las competencias que se espera desarrollen las niñas, niños y jóvenes en las aulas. En cuanto a la definición de competencia²⁹ los Estándares Básicos de Competencias exponen que:

Una competencia ha sido definida como un saber hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad y sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas. (MEN, 2006, p.12)

En tanto que capacidad, una competencia es intrínseca al sujeto, y la forma de dar cuenta de la misma en el ejercicio de su profesión docente es mediante el desempeño que el profesor o estudiante exhibe en términos de resultados logrados en producto de y en su labor. Otra cuestión, que es pertinente subrayar es el carácter dinámico que tiene la postura de competencias, en tanto que un docente que en el ejercicio reflexivo de sus prácticas puede dar cuenta de unos mejores resultados producto de hacer evolucionar sus competencias.

Adicionalmente, es de resaltar que si bien el enfoque en la educación colombiana es la formación en competencias, en las aulas estas se desarrollan en relación a unos contenidos temáticos. Ello, dado que en el sujeto el “saber hacer flexible” se entrama en unas relaciones del

²⁹ “La noción de competencia, históricamente referida al contexto laboral, ha enriquecido su significado en el mundo de la educación en donde es entendida como *saber hacer* en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes” (MEN, 2006, p.12).

saber que, del saber cómo y del saber para qué, mencionados en los mismos estándares de competencias.

Entonces, ¿cuáles son las competencias que se esperan en un docente y como se espera que las haga converger en microcurrículos pertinentes? En la Guía Metodológica Evaluación Ley 1278 se expone que se observan en los docentes dos tipos de competencias: las competencias funcionales, que aluden a las responsabilidades específicas del cargo docente; y son: “*dominio curricular, planeación y organización académica, pedagógica y didáctica, evaluación del aprendizaje, uso de recursos, seguimiento de procesos, comunicación institucional, e interacción con la comunidad y el entorno*” (MEN, 2008, p.15). Adicionalmente, las competencias comportamentales: “*Liderazgo, relaciones interpersonales, trabajo en equipo, negociación y mediación, compromiso social e institucional, iniciativa y orientación al logro*” (MEN, 2008, p.15). Donde, por comportamentales se refiere a que dan cuenta de las actitudes, valores, intereses, motivaciones y características de personalidad de los docentes que ponen en juego durante el cumplimiento de sus funciones³⁰.

Ahora bien, desde la anterior perspectiva las competencias enunciadas dan cuenta de cuáles son los conocimientos y habilidades que debe tener y poner en juego un docente en su labor. Y más específicamente, durante el ejercicio de diseñar, implementar y evaluar propuestas microcurriculares a partir de considerar el currículo institucional y el nacional, de matemáticas en

³⁰ Otra propuesta, la cual es planteada por Luis Rico, respecto al docente de secundaria refiere a los conocimientos del docente que aunados con competencias que, en el marco de reflexiones y análisis didáctico y de sus prácticas, le permitan generar y gestionar propuestas microcurriculares. Al respecto de las competencias del profesor de secundaria, Rico (2016) enuncia que seis competencias han surgido en el marco de diversos debates y reflexiones sobre los profesores: “*competencia curricular, competencia de enseñanza, competencia sobre aprendizaje, competencia sobre evaluación, competencia colaborativa y competencia para el desarrollo profesional*” (p. 97).

el caso que nos atañe. Entonces, ¿cómo se considera el docente en el aula en los documentos del ministerio nacional? A continuación damos apuntes a esta cuestión.

La Guía Metodológica Evaluación Ley 1278 refiere a la planeación de clase unos lineamientos sobre los aspectos que deben reflexionar los docentes en su ejercicio de diseñar e implementar unidades didácticas, actividades de aula, planes de aula, propuestas microcurriculares, etc. Propone que dichos microcurrículos deben atender a la estructuración de contenidos de aprendizaje, la consecución de objetivos que den cuenta de los contenidos en contextos, decisiones relativas al uso de recursos didácticos, las estrategias de evaluación y los referentes nacionales significados en las actividades generadas. Todo ello apuntando al desarrollo y fortalecimiento de competencias, tanto del docente como de los estudiantes.

E incluso el docente o grupo de docentes de la institución educativa pueden reflexionar sobre las estrategias metodológicas existentes en el marco del PEI o en otros referentes, o incluso otras innovadoras que permitan estructurar actividades de aula. Ello a fin de trascender algunas prácticas como la clase magistral y atender a los intereses de los estudiantes y de la comunidad. Es decir, el docente diseña e implementa microcurrículo considerando a todos los sujetos del aula en el marco de relaciones dialógicas, como vemos en La Guía Metodológica Evaluación Ley 1278:

Las prácticas pedagógicas se basan en la comunicación, la coestión del aprendizaje y la relación afectiva y la valoración de la diversidad de los estudiantes, como elementos facilitadores del proceso de enseñanza-aprendizaje, y esto se evidencia en la organización del aula, en las relaciones recíprocas y en las estrategias de aprendizaje utilizadas. (MEN, 2008, p.106)

B.2. El microcurrículo según el mesocurrículo en la institución educativa Jovita Santacoloma

La institución educativa Jovita Santacoloma se ubica en el Valle del Cauca Colombia, en el corregimiento de Nariño, zona rural aledaña a la ciudad de Tuluá. Por tal condición cuenta con población estudiantil integrada por estudiantes de la urbe y de la zona campestre, de estratos 1 y 2 en su mayoría. A la fecha, el Jovita cuenta con todos los salones ubicados un primer piso, con zonas verdes con canchas, árboles y rutas de transito de la comunidad educativa.

La sede principal tiene: un aula de tecnologías con aproximadamente 40 computadores portátiles, un tablero borrable y acceso a internet; una sala de audiovisuales la cual cuenta con un video beam, un computador y tablero borrable y acceso a internet (actualmente su uso es restringido por condiciones técnicas). Recientemente, se cuenta con paquetes de tables de computadores para educar, de los cuales los estudiantes pueden hacer uso, vía préstamo, de forma individual o en grupos. Tanto en los computadores de la sala y las tables se tiene instalado el Ambiente de Geometría Dinámica geogebra.

El aula de matemáticas cuenta con pupitres individuales los cuales se pueden reorganizar para formar trabajos en grupos, con ciertas restricciones de forma como por ejemplo que la unión de dos pupitres no conforma una superficie completamente horizontal. También, tiene un tablero borrable y un escritorio para el docente. Dicha aula se encuentra al lado de otras, y las condiciones de iluminación y manejo de ruido ambiental se pueden considerar como adecuadas.

Adicionalmente, el docente cuenta con una table de computadores para educar, la cual suelen usar también los estudiantes. Dicho profesor enseña en los grados 8, 9, 10 y 11. La implementación de la unidad didáctica, diseñada en el trabajo de investigación, y sistematización de la experiencia se realizará con grado 10, de los cuales existen dos. Cada grado 10 cuenta con aproximadamente 25 estudiantes.

En términos educativos, la I.E. Jovita Santacoloma cuenta con un proyecto educativo institucional PEI y un manual de convivencia en los cuales se expone un enfoque educativo de tipo social cognitivo. Ello se visualiza en su misión cuyo propósito es el de:

Formar de manera integral a niños(as) y jóvenes dentro de un enfoque cognitivo-social y crítico, preparándolos en el desarrollo de competencias básicas, ciudadanas y laborales y enfocados en el uso adecuado de las tecnologías de la información y la comunicación, para que contribuyan con su liderazgo a la solución de los problemas sociales del entorno y les permita apropiarse con autonomía de su propio proyecto de vida. (Rendón, L., Londoño, C., & Comunidad Educativa, 2016, p.13)

La institución educativa propone que el docente requiere conocer los referentes curriculares nacionales y territoriales, con el fin de dar cuenta en sus aulas de una formación en competencias, como por ejemplo la guía 34: Guía para el mejoramiento institucional y la guía 31: Guía Metodológica Evaluación Anual de Desempeño Laboral Docentes y Directivos Docentes ley 1278. También, debe tener conocimiento de sus deberes y derechos contemplados en la Constitución política contemplados en “la ley 734 del Código único disciplinario, el decreto 1278 y 2277 y lo dispuesto en el manual de convivencia” (Rendón, L., et al, 2016, p.58). Con ello, es posible afirmar que el PEI está refiriendo que las formas de diseñar, gestionar y evaluar la clase de las cuales el

maestro puede hacer uso, están en concordancia con las propuestas nacionales respecto al desarrollo de competencias, a la innovación y formas reflexivas de proponer microcurrículo.

En lo relacionado a lo académico, el currículo institucional se estructura en mallas curriculares³¹, planes de área y planes de aula. La malla curricular alude a la organización general de conocimientos, competencias que guiaran la estructuración de planes de área y de aula durante el año escolar. Los planes de área en el Jovita se definen como: “el curriculum de una disciplina en particular que hace parte de la formación integral del estudiante, refiriéndose al recorrido llevado a cabo por el estudiante para lograr un grado académico” (Rendón, L., Londoño, C., & Comunidad Docente, 2015, p.33), los cuales actualmente están en proceso de estudio, ajuste de acuerdo a las mallas curriculares, revisión de referentes nacionales. El plan de aula es definido: “como el instrumento que permite orientar el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula, una vez se pone en marcha el plan de estudios, este permite dejar evidencias contundentes del avance de los procesos curriculares” (Rendón, L., et al, 2015, p.34). Entonces, se espera que el mismo plan de aula se corresponda con la propuestas microcurriculares. En este año 2017 se inició con una plantilla nueva de planes de aula, la cual recoge aspectos como objetivos, Derechos Básicos de Aprendizajes DBA, tiempo de inicio y terminación, recursos, proceso evaluativo, estructuración de la gestión del conocimiento en el aula por momentos: exploración, estructuración, ejecución y transferencia/momento de valoración. Así como, la elaboración de actividades académicas para los niños y niñas con necesidades especiales.

³¹ Las mallas curriculares fueron creadas entre 2016 y 2017, desde gestiones de la secretaria de educación de Tuluá y en diálogo con integrantes de las instituciones educativas de la entidad territorial de Tuluá. Estas son una concreción de una revisión realizada a los Estándares básicos de Competencias (2006), los DBA (2016) y otros referentes nacionales y considerando las condiciones del contexto local.

Entonces, de acuerdo a los referentes institucionales ¿cómo se propone que el docente diseñe, gestione y evalúe propuestas de aula que apunten a formar de manera integral a niños(as) y jóvenes dentro de un enfoque *cognitivo-social y crítico*? El docente debe identificar que enseñar en el aula, y seguido plantear el cómo enseñar y evaluar. Así el docente de matemáticas deberá hacer uso de los:

ejes temáticos o problémicos que la Institución asumió como pretexto del aprendizaje los cuales, procuran la comprensión, el análisis y la solución de problemas o situaciones de la vida cotidiana, del medio circundante y de la época que justifiquen el por qué y para qué del aprendizaje de estos. (Rendón, L., et al, 2015, p.171)

Lo cual significa que los conocimientos matemáticos presentes en las propuestas microcurriculares, a través de los planes de aula, además de dar cuenta de los conocimientos planteados en los Estándares Básicos de Competencias y otros referentes nacionales, deben considerar situaciones problema relacionados con el entorno de los estudiantes. Dichas propuestas de aula deben atender a los conocimientos movilizados en el aula en resonancia con las prácticas sociales de los estudiantes en el aula, y unos discursos reflexivos por los integrantes de la misma. Ello con el propósito que el conocimiento movilizado adquiera pertinencia para los niños, niñas y adolescentes, vía el fortalecimiento de unas competencias que el marco de matemáticas se plantea como resolución de problemas, comunicación y argumentación.

En cuanto al cómo enseñar en el aula, es decir que metodología debe emplear el docente en su salón de clase, tenemos que “*cada una de las áreas definidas en el plan de estudios propone sus*

propias estrategias didácticas de acuerdo a ese saber específico, sin perder obviamente el enfoque” (Rendón, L., et al, 2015, p.172). Lo cual lleva a pensar que el docente tiene el espacio para reflexionar sobre sus propias prácticas, y las variables Didácticas que juegan en su salón de clase en relación a la gestión del conocimiento en el marco sociocultural y con el propósito de desarrollar competencias.

Por último, es pertinente hacer mención de elementos de la evaluación vista en el proyecto educativo institucional. Dicha evaluación se piensa como un proceso continuo de los avances del sujeto tanto a nivel cognitivo, procedimental, actitudinal ³², apuntando al desarrollo y fortalecimiento de competencias en los educandos. También, se suelen usar los DBA y los resultados del Índice Sintético de Calidad Educativa suministrado por el Ministerio de Educación Nacional, entre otros, para realizar planes de mejoramiento. Estos planes apuntan a identificar los contenidos o competencias más débiles en los resultados de los educandos y a generar estrategias de aula que permitan fortalecerlos.

³² Actualmente en la institución y direccionamientos de entidades relacionadas a la secretaria de educación de Tuluá, se está revisando, resignificando y validando estas categorías de evaluación. En otros documentos anteriores aparece la evaluación en términos de lo cognitivo, lo personal y lo social.

B.3. Aportes de la propuesta metodológica al microcurrículo de matemáticas de la institución educativa Jovita Santacoloma

Retomando elementos del capítulo 1 del trabajo de investigación se plantean los criterios que justifican la problematización de las prácticas microcurriculares gestionadas por el docente de matemáticas. Motivando así la sistematización de dichas prácticas aunado con la resignificación del microcurrículo, lo cual nos lleva a realizar una propuesta microcurricular en matemáticas.

En apoyo a lo anterior, la inquietud de resignificar las prácticas en el aula se comienzan a gestar en años anteriores y a cristalizar en el 2015 cuando el docente José Humberto Arcila Atehortúa ingresa como docente de matemáticas a la I.E. Jovita Santacoloma. Ello como inquietud del profesor al observar sus propias prácticas próximas a lo tradicional, y contrastarlas con una oportunidad presentada en el PEI de la institución en el cual se propone una educación con enfoque cognitivo-social y crítico. Currículo que en varios aspectos de la práctica continúa líneas tradicionales en la institución educativa.

Entonces, la cuestión a resolver en ese momento era: ¿cómo hacer uso de los conocimientos profesionales, los derivados de las prácticas mismas del maestro y los aspectos del contexto para realizar propuestas de aula que den cuenta de la construcción del conocimiento con un enfoque sociocultural, donde lo dialógico juegue un papel relevante en la misma? Apuntando en esa dirección propuse a los estudiantes varias actividades de trabajo en equipos, en particular a los dos grados 9° de 2016, es decir dos grupos de grados 10° en el 2017. Se favorece al diálogo, el

compartir conocimientos entre estudiantes e incluso el dialogar con el docente reflexionando sobre las ideas construidas, las cuales se les califica de acuerdo a los aportes que realicen a otros estudiantes tanto en conocimiento, como en estrategias de resolución de problemas matemáticos y de las dinámicas microsociales propias del grado. Con microsocial, se quiere significar que el aula de clase se comporta como un modelo de la sociedad de la cual vienen y a la cual le aportan los estudiantes. Dichas modificaciones de las prácticas del docente se prefiguran como propuesta microcurricular, que aun adolecían de estructuración curricular y didáctica e incluso de considerar los aspectos socioculturales de los estudiantes.

Es en este contexto en el cual el docente busca resignificar las prácticas en el aula de matemáticas a partir de sistematizar sus experiencias, y donde se instala la propuesta microcurricular realizada en el trabajo de investigación. Donde esta surge como respuesta al siguiente cuestionamiento: ¿Cuál es una posible propuesta metodológica y de fundamentación en relación con el papel del docente de matemáticas que resignifica el microcurrículo, a partir de validar los conocimientos inherentes a su propia práctica que a su vez consideran lo sociocultural y hacen uso de Unidades Didácticas de modelación, con el fin de aportar al avance académico de la I.E. Jovita y Moderna? Cuestión posteriormente fue evolucionando hacia: ¿Qué aporta el Análisis Didáctico concretado en el diseño y desarrollo de Unidades Didácticas a la formación (teórica, práctica) profesional docente y a la innovación curricular?

Veamos. Dicha propuesta puede aportar al microcurrículo de matemáticas de la I.E. Jovita Santacoloma en las formas siguientes:

- Proponer un modelo de prácticas de aula próximas a la propuesta del PEI en tanto que educación de tipo *social-cognitiva*, y *reflexiva*. Donde esta propuesta se perfila no tanto como el “modelo” de microcurrículo, sino más bien como un marco sobre el cual se puede reflexionar y continuar resignificando otras propuestas.
- Generar unas prácticas de sistematización reflexiva de las experiencias en el aula de matemáticas, propiciadoras de conocimientos profesionales y de nuevas resignificaciones del microcurrículo. Las cuales se pueden enriquecer a partir de los aportes teóricos de nivel nacional e internacional; por ejemplo en el campo de la Didáctica de las Matemáticas. Es pertinente observar que lo anterior está en acuerdo con los conocimientos que plantea el macrocurrículo y el mesocurrículo sobre los conocimientos y competencias del docente a la hora de diseñar, gestionar, reflexionar sobre sus propuestas en el aula de matemáticas.
- La propuesta microcurricular también busca propiciar en los estudiantes unas prácticas que fomenten las relaciones microsociales, dialógicas, participativas, argumentativas que a través de las cuales se construyan, reflexionen, objetiven y compartan conocimientos. Ello a través de actividades en equipo que ponen en juego elementos de su sociocultura, sus propias dinámicas discursivas y el uso de tecnologías digitales (Geogebra). Lo cual proponemos en el marco de la modelación como estrategia para la resolución de problemas abiertos. Donde, el docente hace parte de la microcultura, y que además de diseñar actividades de aula que responden a ciertas intencionalidades macro, meso y microcurriculares, es posible para los estudiantes construir o resignificar con el los conocimientos intersubjetivamente. Lo cual permite ver a la microcultura y a la cultura que

representan los integrantes del aula, todos como negociadores de significados; y resignifica la figura del profesor como centro poseedor del conocimiento.

- Por último, la propuesta microcurricular realiza apuntes hacia un microcurrículo de tipo sociocultural. Lo cual se observa tanto en los parámetros que se consideran en las actividades de la unidad didáctica gestionada en el aula, diseñada en el marco de la investigación, en las relaciones microsociales en el aula, como en los aportes al aula o puntos de vista que tienen otros actores de la sociedad. Las actividades motivan a los estudiantes a generar y acordar un modelo de su entorno sociocultural, eligiendo y justificando unos criterios que deben acordar. Las actividades mismas propenden por fortalecer en los estudiantes el trabajo compartido, y la generación dialógica y reflexiva del conocimiento. Y algunas participaciones de miembros de la comunidad, con los cuales los estudiantes pueden dialogar, entran a proponer puntos de vista sobre parámetros históricos o sus experiencias sobre el entorno sociocultural.

B.4. El microcurrículo según el mesocurrículo en la institución educativa Moderna de Tuluá

La institución educativa Moderna de Tuluá se ubica en el Valle del Cauca Colombia, cuyo domicilio principal está ubicado en la calle 27 6AW - 240 Vía Rio frío del municipio de Tuluá. Cuenta con una población que se caracteriza por pertenecer a los estratos 1 y 2, y por encontrarse en condición de vulnerabilidad. Además, la Moderna cuenta con salones ubicados en el primer y segundo piso, con zonas verdes, canchas y árboles. La sede principal tiene: dos aulas de sistemas con aproximadamente 40 computadores portátiles cada una, un salón de danzas, un aula máxima

equipada con video beam ; una sala de audiovisuales la cual cuenta con un video beam, un equipo de audio y un televisor.

La Institución Educativa Moderna de Tuluá cuenta con un P.E.I y un manual de convivencia en los cuales se expone un modelo pedagógico basado en los fundamentos teóricos de la Escuela Activa, sus postulados epistemológicos y pedagógicos. En ese sentido, en el modelo institucional citando a Lev Semionovich Vigotsky contempla el siguiente postulado: “El carácter psicológico de la escuela activa, reconoce al estudiante como sujeto colectivo, cuyo aprendizaje lo realiza a través de su experiencia con el entorno” (I.E. Moderna, 2017, p.7). En concordancia a lo anterior la institución adopta el A.B.P (Aprendizaje Basado en Problemas) en su modelo educativo institucional,³³ desde el postulado de Howar Barrows, citado por I.E.Moderna (2017) en su PEI el cual afirma que: “Aprendizaje Basado el Problemas, cuya esencia se dispone al trabajo que realiza el estudiante para dar solución a un problema planteado comprometiendo las diferentes competencias básicas desarrolladas y la interacción con los demás con el fin de obtener un nuevo conocimiento”. (p.7)

Aunque la institución educativa referencia en su modelo pedagógico la escuela activa y el ABP, aún se encuentran algunas prácticas de tipo tradicional, incluyendo las del docente que por cierto se encuentran actualmente en etapa de reestructuración y apropiación.

Es de anotar que la propuesta microcurricular expresada en el presente trabajo, no riñe con el modelo pedagógico institucional, por el contrario se pueden complementar ya que la primera

³³ En la I.E Moderna de Tuluá en el 2017 se vienen realizando ajustes en la implementación del aprendizaje basado en resolución de problemas.

favorece la gestión dialógica del docente dentro del aula de clases, a partir de unidades didácticas que buscan la generación de modelos por parte de los estudiantes para resolver problemas abiertos.

B.5. Aportes de la propuesta metodológica al microcurrículo de matemáticas de la institución educativa Moderna de Tuluá

El docente pone a disposición una propuesta microcurricular, con la que busca resignificar sus conocimientos profesionales, desde perspectivas sociocultural y del análisis didáctico, esto incluye la sistematización de su experiencia escolar, a partir de la cual se busca la obtención de información que permita reflexionar sobre la gestión al interior del aula. En concordancia a lo anterior se pretende generar los siguientes aportes:

- El docente es quien promueve espacios de diálogo mediados entre los distintos sujetos presentes en el aula, propendiendo por la resolución de problemas abiertos.
- El estudiante funge como un sujeto activo que busca poner al servicio de su equipo de trabajo las posibles estrategias que ayuden en la consecución de los propósitos a nivel colectivo.
- La unidad didáctica se plantea y gestiona en el aula en el marco de la resolución de problemas vía modelación matemática, atendiendo en gran medida al contexto del estudiante.
- Los conocimientos matemáticos, didácticos, creencias y medios utilizados por el docente, serán objeto de resignificación permanente.