



FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO

Modelo matemático para meandros

Autor:

Elkin Wbeimar RAMÍREZ

10 de julio de 2012

Director:

Jaime ARANGO,
Dr.rer.nat

A mi madre y hermana por su apoyo incondicional...

Agradecimientos

A él, en quién creo, al profesor Dr.rer.nat Jaime Arango, por su colaboración y atención durante la realización del trabajo, a la biblioteca Mario Carvajal, por permitir la adquisición del artículo [9] y las imágenes que aparecen en la figura 2.6, a la Corporación Autónoma Regional del Valle del Cauca C.V.C., por la gran cantidad de fotografías aéreas del río Cauca en su paso por el Valle del Cauca, al profesor León Escobar, por su colaboración con el programa de la trayectoria de una curva que pasa en medio de un río.

Resumen

Se muestra un modelo matemático que describe los meandros de los ríos. Este trabajo está basado en las investigaciones de Von Schelling [9] y Leopold Luna [7]. El modelo matemático que se analiza tienen dos interpretaciones, una probabilística y otra geométrica, ambas sustentadas en trabajos de campo y observación cuidadosa de los meandros de los ríos. Por último, se presenta el modelo aplicado a algunos meandros del río Cauca, en su paso por el Valle del Cauca.

Introducción

En la naturaleza, ocurren diferentes fenómenos que a simple vista parecen irrelevantes, de los cuales, se ignora el gran contenido matemático que se esconde, tal y como dijo Galileo Galilei en su tratado *il Saggiatore*:

"La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en lo que está escrito. Está escrita en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto".

Todo en el universo está escrito, resta entenderlo. Por ejemplo, se tienen los meandros, fabulosas curvas que forman los ríos en su recorrido por el planeta. Los meandros pueden ser modelados matemáticamente bajo ciertas consideraciones, puesto que su modelación detallada es un problema complicado si se quisiera abordar de manera general, ya que, de ello depende gran cantidad de variables relacionadas con las condiciones del suelo, la geografía del terreno en el cual se forman, el caudal del río, etc. En este trabajo consideraremos las condiciones propicias de terreno que permiten dar soluciones explícitas al modelo de meandros.

El Departamento del Valle del Cauca, debido a su geografía, cumple con las condiciones necesarias para la generación de meandros; basta observar la figura 1 para darse cuenta de ello. En el trabajo se intentará aplicar el modelo obtenido al río Cauca, basados en condiciones dadas por Luna Leopold, e intentar dar respuestas a interrogantes que surgen de manera natural al observar dichas curvas, tales como ¿Por qué se describe un camino curvo y no recto como intuitivamente se pensaría? ¿Cómo prodría modelarse los meandros? ¿Cómo se forman dichas curvas?



Figura 1: Meandros del río Cauca en su paso por el Valle del Cauca.

Es de aclarar, que no se aproxima el meandro en sí, sino a la curva que pasa en medio del río. El modelo tiene dos interpretaciones, uno geométrico que va muy ligado con la física, pues debido a ésta, es que se dan condiciones para que sea posible aproximar dichas curvas, y el otro, es un modelo estocástico, con el fin de encontrar un llamado “camino más frecuente” de una partícula en el plano. Estas dos interpretaciones llevan a la solución de una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, la cual no tiene soluciones explícitas. No obstante bajo supuestos y condiciones adicionales, se pueden aproximar sus soluciones mediante la curva seno-generada. Finalmente, esta curva seno-generada permite describir los meandros.

Índice general

Introducción	IV
1. Motivación	1
2. Meandros	4
2.1. Creación de un meandro	4
2.2. Choque de meandros	8
3. Preliminares	10
3.1. Curvatura	10
3.2. Multiplicadores de Lagrange	13
3.3. Sistemas de un grado de libertad	15
3.3.1. Flujos de fase	16
4. Camino más frecuente de una partícula en el plano	21
5. Curva Seno-generada	28
5.1. Análisis geométrico	28
5.2. Análisis probabilístico	32
5.3. Comparación	33
5.4. Sinuosidad	35
6. Experimentación	39
6.1. Primer procedimiento	39
6.2. Segundo procedimiento	44
6.3. Ficha técnica de las fotografías	48
7. Conclusiones	50
7.1. Créditos	50

Capítulo 1

Motivación

Luna Leopold [10], profesor, ingeniero civil, metereorólogo y geólogo fue una persona fascinada por los ríos; muestra de ello son los casi 200 escritos que deja acerca del tema (tales escritos pueden ser encontrados en línea en su página virtual [10]), sus estudios lo llevaron a hallazgos tales como:

- Ningún río a pesar de su tamaño, corre recto por más de 10 veces su anchura.
- El radio de una curva es casi siempre 2 o 3 veces su anchura.

Parte de su trabajo lo dedicó a los meandros, increíbles formas que lo cautivaron hasta el punto de poderlas modelar, en el sentido de aproximar la curva que atraviesa el centro del río. En el trabajo, a pesar que el artículo que se sigue no sea de su autoría, se basa principalmente en la hipótesis trabajada por él, la cual dice: los meandros pueden ser aproximados por curvas que minimizan la suma de los cuadrados de las curvaturas en todo punto. Aunque no sólo existe una manera de deducir dichas curvas; mediante un modelo probabilístico planteado por Von Schelling en el artículo *Most frequent particle paths in a plane* [9] se puede llegar al resultado deseado, la aproximación de meandros.

Actualmente, estos resultados no son propios de los ríos, también se ha estudiado el comportamiento de los canales de desagüe en los glaciares, las corrientes oceánicas en los golfos, las figuras realizadas por varillas elásticas al doblarsen (ver figura 1.1) e incluso en hechos un poco particulares que se citan más adelante; se ha encontrado que dichas curvas también cumplen la

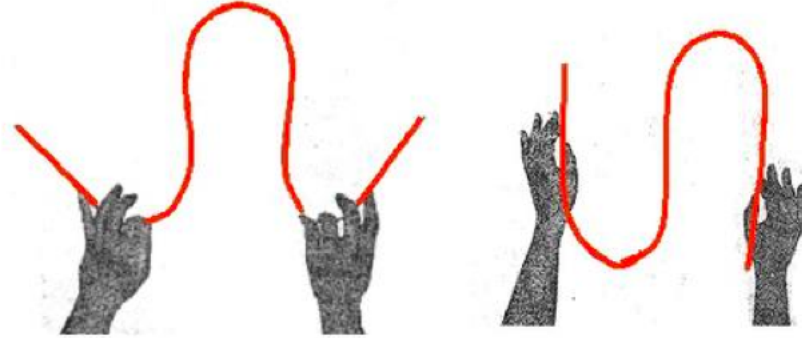


Figura 1.1: Forma de los meandros con varillas elásticas.

hipótesis dada por Luna Leopold [7]. Es decir, que este trabajo enfocado principalmente en los meandros, también puede ser aplicado a estos fenómenos.



Figura 1.2: Curva Seno-generada en un el accidente ferroviario.

A medida que se transcurra en la lectura del trabajo, se encontrará una curva, que Luna Leopold [7] denominó *curva seno-generada*, y esta será aquella que mejor aproxime los meandros, y la cual, tiene relación con el hecho particular que se mencionó anteriormente. Un suceso muy curioso, un tanto catastrófico, que se llevó a cabo el 31 de mayo de 1965 cerca a Greenville, South California, Estados Unidos, (ver figura 1.2) en el cual ocurre un acci-

1. MOTIVACIÓN

dente ferroviario, en donde los vagones de un tren se descarrilan, formando una figura similar a dicha curva, lo cual, sin lugar a duda expresa lo interesante del tema y que puede ser encontrado en situaciones muy particulares del diario vivir.

Capítulo 2

Meandros

El origen del término *meandro* se deriva del nombre *Menderes*, un río en Turquía (ver figura 2.1), cuyo valle fué cuna de muchas culturas.



Figura 2.1: Mapa de Turquía señalando el río Menderes.

Un meandro está constituido por la unión de dos arcos obteniendo la forma de la letra **S**. En la figura 2.2, se ilustra la forma general de un meandro y sus partes.

2.1. Creación de un meandro

¿Existe algún río recto?, quizás, en una geografía de terreno ideal, se tendría que la forma de los ríos se comportaría como ilustra la figura 2.3,

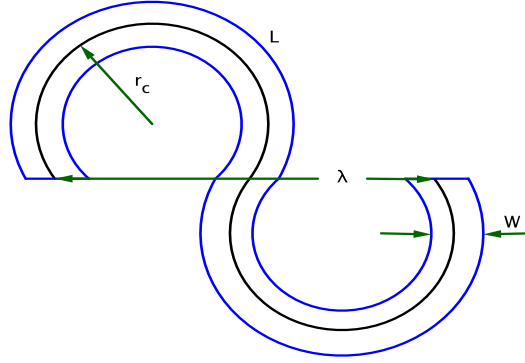


Figura 2.2: Las partes de un meandro, donde L , representa la longitud del meandro, desde un punto de referencia inicial hasta el final siguiendo el recorrido del río, λ es la distancia entre dichos puntos, r_c es el radio de curvatura y W ancho del meandro.

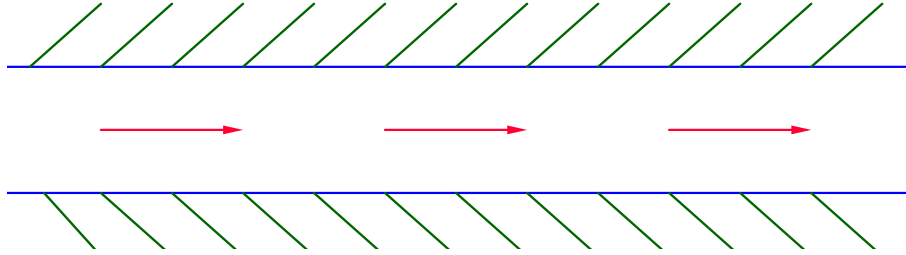


Figura 2.3: Río bajo condiciones uniformes de suelo.

pero, obstáculos en el camino, tales como rocas, árboles caídos, etc, o cambios en las condiciones del suelo, producen distorsión en las direcciones del flujo de agua, producto de choques entre la corriente y los materiales de los cuales están compuestos los bordes, provocando que se dirijan a la orilla opuesta (ver figura 2.4), para que como resultado un primer arco sea formado. La reflexión o rebote de la corriente produce un cambio de curvatura y tras una recurrencia de éstos hechos se generan los meandros, como se puede apreciar en la figura 2.5; éstos obstáculos aparecen de maneja aleatoria, lo que sugiere un cambio estocástico de las direcciones del río.

Si bien, el hecho de que aparezcan irregularidades en el terreno es una razón suficiente para la explicación de este fenómeno, la creación de éstos,

no se le atribuye sólo a este suceso. Generalmente, su generación se debe que atraviesan terrenos levemente inclinados, y que dichos lugares están compuestos de granos finos, fáciles de erosionar y transportar pero con suficiente cohesión para proporcionar bancos firmes.

Los meandros extienden el cauce de los ríos, y mientras lo hacen, causan una reducción en la velocidad de la corriente en esta parte del río. Como resultado, existe una gradual disminución de la fuerza centrífuga hasta desvanecerse totalmente, en este punto, la curvatura deja de crecer y por lo tanto, el radio de curvatura también y alcanza un valor máximo, el cual depende de la inclinación de la ladera de la montaña, el ancho del río o la cantidad de agua que transporte en esta parte. Cuando el radio de curvatura llega a su tope, el meandro es llamado un *meandro maduro*.

El proceso de la creación de meandros crea un balance entre la intensidad de la corriente y el largo del río.

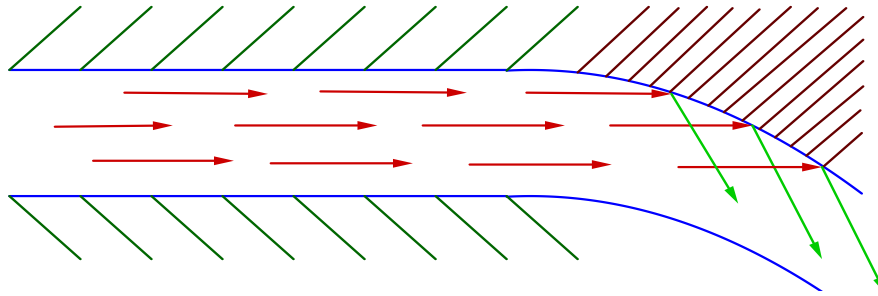


Figura 2.4: Río con obstáculos geográficos.

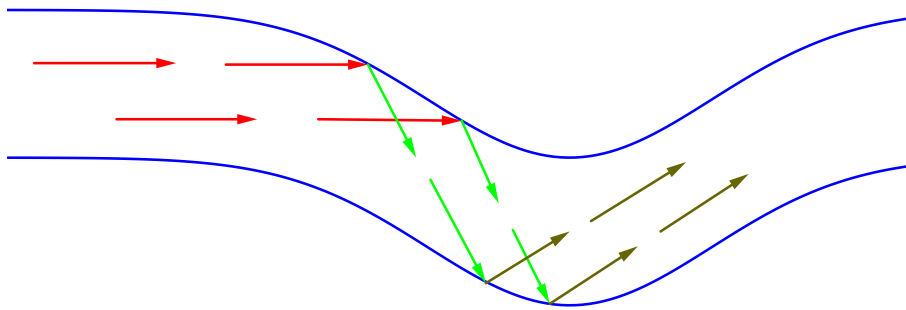


Figura 2.5: Formación de un meandro.

En el estudio del cauce de los ríos se manejan dos escalas diferentes. Una

corta, la anchura del río (del orden de metros), y la otra la longitud total del río (del orden de decenas de kilómetros). Los meandros se aprecian en las escalas cortas, en contraste con la escala larga, los ríos son esencialmente rectos. Esto se puede notar en ríos importantes de la geografía colombiana, tales como el Cauca y el Magdalena. En la figura 2.6, se puede apreciar el recorrido del río Cauca en su paso por el Valle del Cauca, en ella se percibe lo antes mencionado. Si se aumenta la escala, y se observa el comportamiento de estos dos ríos a nivel de Colombia (ver figura 2.7), no resulta ser tan claro lo dicho para el río Cauca, esto debido a su cauce se encuentra comprendido entre las cordilleras Central y Occidental, pero se puede notar otro fenómeno en río Magdalena; al principio de su recorrido, se encuentra limitado por las cordilleras Central y Oriental, pero una vez sale de su encierro, se encuentra con un obstáculo, la serranía de San Lucas y en busca de su dirección original (Norte - sur) la bordea.

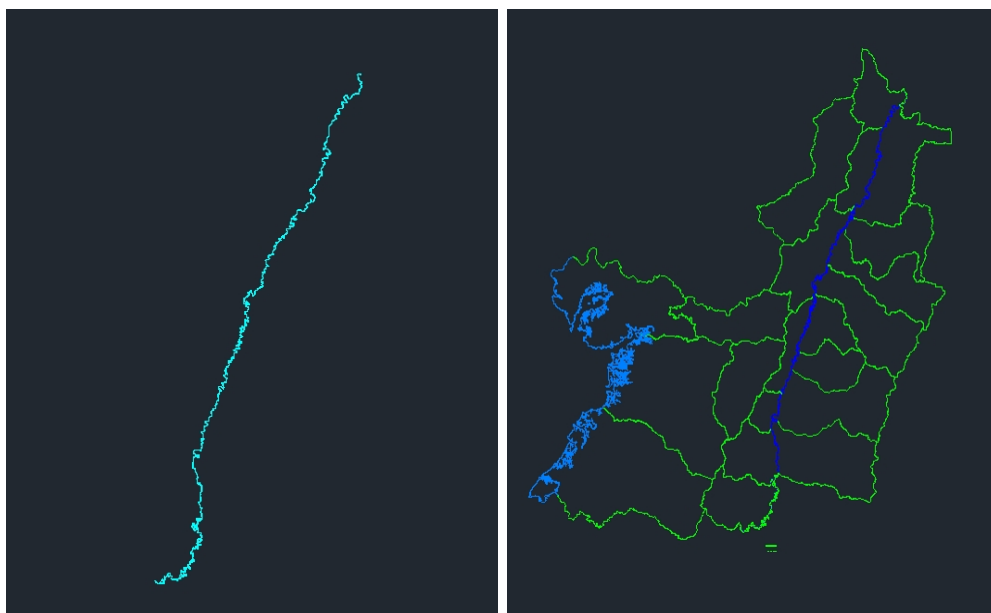


Figura 2.6: Río Cauca en su paso por el Valle del Cauca.



Figura 2.7: Mapas de los ríos Cauca (izquierda) y Magdalena (Derecha).

2.2. Choque de meandros

El proceso de creación de meandros desarrolla un espacio entre los brazos de éste, el cual es rodeado por el lecho del río casi completamente, y crea una pequeña *península*. Cuanto más crece el meandro hacia la madurez, sus brazos comienzan a comunicarse entre sí y la península, entre ellos se vuelve cada vez más estrecha. Dicho estrecho se llama *cuello del meandro* y durante una inundación el río cubre el cuello del meandro; de esta manera, uno de los arcos es cortado del río, aunque un poco de agua se mantendrá en la parte donde ocurre el corte, esta se desconectará del río completamente. Aquí, el sendero del río se endereza. El resto del río que queda desconectado en forma de media luna se secará gradualmente y se le conoce como *madre vieja*. Por cada meandro que se corta, como resultado de una ruptura a cabo, un meandro nuevo se está formando en otro lugar, por lo que la longitud del cauce del río se mantiene casi constante.

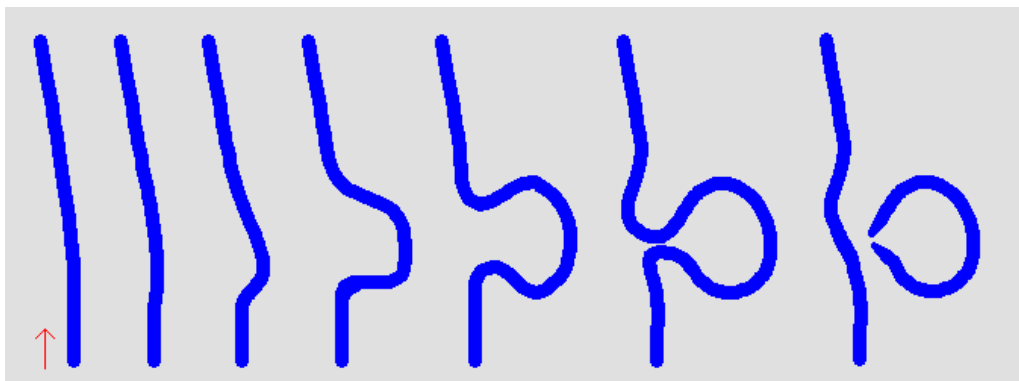


Figura 2.8: Proceso de creación de un meandro.

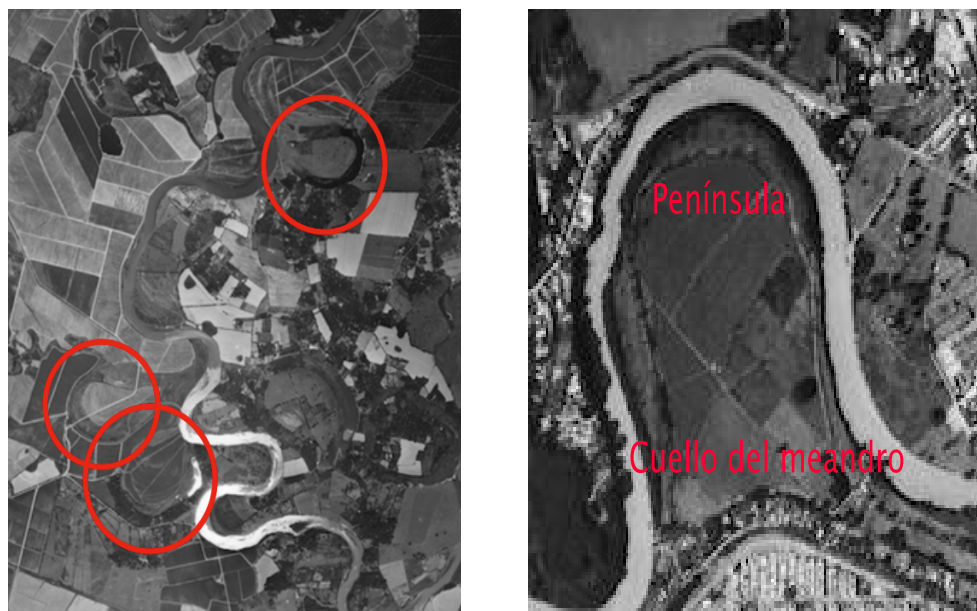


Figura 2.9: La primera imagen muestra algunas madre viejas en el río Cauca. Esta fotografía fue tomada entre el corregimiento de Quinamayo y la vereda Timba en el municipio de Jamundí. La segunda imagen, muestra la ubicación de la península y el cuello del meandro, esta fotografía fué tomada en el sector de Juanchito, en límites de los municipios de Cali y Candelaria.

Capítulo 3

Preliminares

A continuación se desarrollan los temas que ayudarán al entendimiento de los procesos matemáticos, que se llevarán a cabo en la construcción de la curva que asemeje más a los meandros. Los temas a tratar son: curvatura, multiplicadores de Lagrange y sistemas de un grado de libertad, de cada uno de los cuales, se darán las respectivas definiciones y teoremas más importantes, que contribuyan en el desarrollo del trabajo, y en algunos casos se realizarán ejemplos.

3.1. Curvatura

Existen diferentes maneras de introducir la definición de *curvatura*, todas equivalentes. La escogencia de una u otra radica en la facilidad que pueda proporcionar en el tema en que se esté trabajando. Algunos de ellos se presentarán a continuación.

Definición 3.1.1. Sean $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco y un punto $s_0 \in I$. Si se denota por θ al ángulo formado por la recta tangente a la curva en un punto $\alpha(s_0)$ con el eje x , se define entonces la **curvatura** c de α en s_0 como:

$$c(s_0) = \frac{d\theta}{ds}(s_0). \quad (3.1)$$

Como una consecuencia de la definición anterior, se tiene otra alternativa de abordar curvatura, esto es; si $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada por

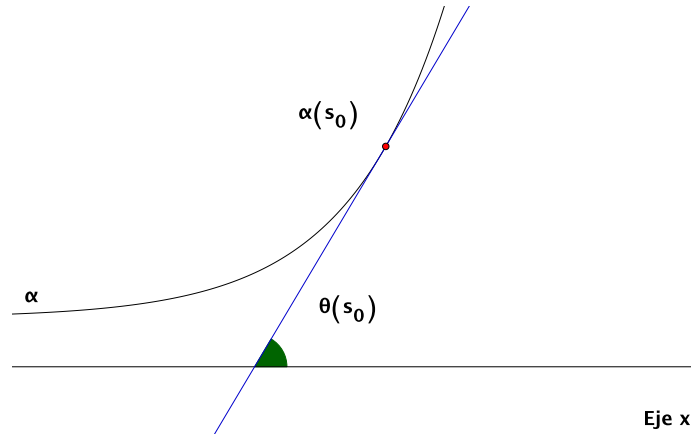


Figura 3.1: Ilustración de la definición anterior.

longitud de arco y s_0 un punto en I , entonces $|\alpha''(s_0)|$ es la curvatura c de α en s_0 , y esto se debe a que:

$$|\alpha''(s)| = \left| \frac{d}{ds} \alpha'(s) \right|,$$

como $|\alpha'(s)| = 1$ entonces $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, así

$$\frac{d}{ds} \alpha'(s) = \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)),$$

sacando la norma

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{ds} \alpha'(s) \right| &= \left| \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \right| \\ &= \left| \frac{d\theta}{ds} \right| |(-\sin \theta(s), \cos \theta(s))| \\ &= \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \\ &= c(s), \end{aligned}$$

luego

$$\left| \frac{d}{ds} \alpha'(s) \right| = c(s). \quad (3.2)$$

Definición 3.1.2. Sean $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco y un punto $s_0 \in I$. Si $c(s_0) \neq 0$, el número $r(s_0) = \frac{1}{c(s_0)}$, es llamado radio de curvatura de la curva α en s_0 ; éste, es el radio del círculo osculador en $\alpha(s_0)$.

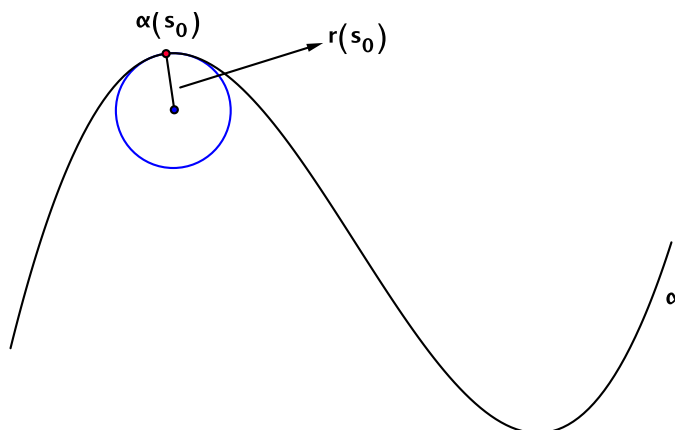


Figura 3.2: Ilustración de la definición anterior.

Cabe anotar que la curvatura de una curva no tiene signo, pero ésta puede tornarse positiva o negativa una vez se le haya asignado una orientación, es decir, se considera que la curvatura de una curva en cierto punto es positiva, si en la dirección a la que apunta el vector normal en dicho punto se encuentra el círculo osculador, de lo contrario, la curvatura se toma negativa.

Bajo este concepto, encontramos resultados importantes para la teoría local de curvas; entre éstos, se encuentra el llamado teorema fundamental de curvas (ver [6]):

Teorema 3.1.1. *Dada una función diferenciable $c(s) > 0$ y $s \in I$, existe una curva regular parametrizada $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que s es la longitud de arco y $c(s)$ es la curvatura. Más aún, cualquier otra curva $\tilde{\alpha}$ que satisfaga las condiciones anteriores, difiere de α por un movimiento rígido, esto es, existe una función lineal ortogonal ρ de $\mathbb{R}^2$, con determinante positivo y un vector v tal que $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + v$.*

Un ejemplo conocido en el cual se logra ver el teorema anterior es el siguiente:

Ejemplo 3.1.1. Sea $c(s) = s$, $s \in (0, 10)$, sea $\theta(s)$ como

$$\theta(s) = \int_0^s u \, du = \frac{s^2}{2},$$

se puede definir la curva α tal que satisfaga la condición de que $c(s) = s$,

$s \in (0, 10)$ como

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos \frac{u^2}{2} du, \int_0^s \sin \frac{u^2}{2} du \right).$$

Notemos que la curvatura de $\alpha(s)$ es $c(s) = s$, ya que

$$\alpha'(s) = \left(\cos \frac{s^2}{2}, \sin \frac{s^2}{2} \right).$$

Y este vector forma un ángulo $\theta(s)$ con el eje x , luego, la curvatura de α en s es

$$c(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2}{2} \right) = s.$$

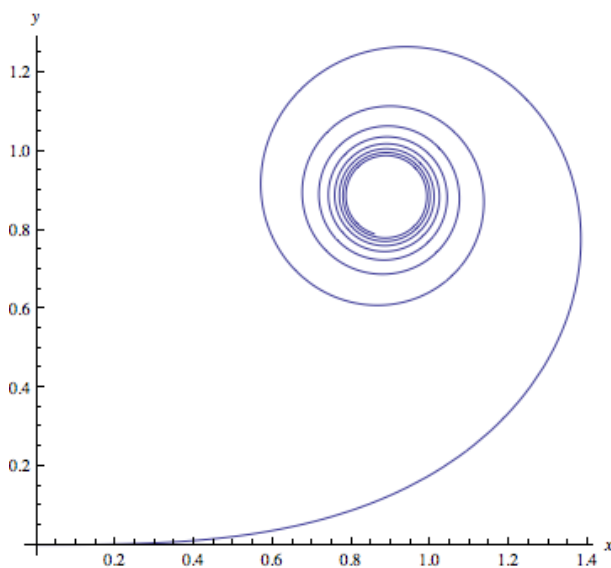


Figura 3.3: Curva cuya curvatura es $c(s) = s$.

3.2. Multiplicadores de Lagrange

La técnica de los multiplicadores de Lagrange es una herramienta útil en la solución de problemas de optimización bajo restricciones. Éste método, fué aplicado por primera vez por Lagrange, a problemas del cálculo de variaciones, en su tratado de Mecánica Analítica en 1788.

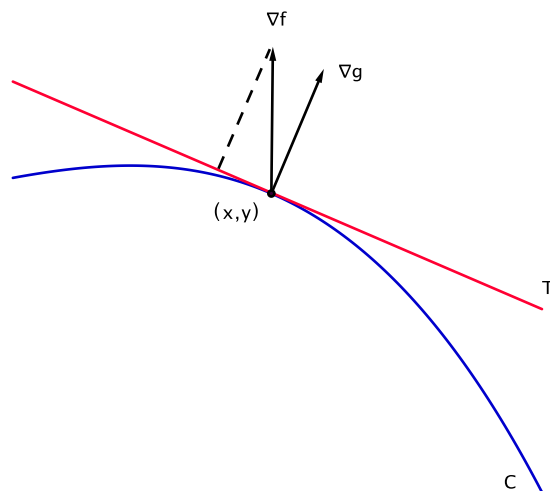


Figura 3.4: Esquema multiplicadores de Lagrange

Supóngase que se quiere maximizar $f(x, y)$ sujeto a la restricción

$$g(x, y) = c.$$

Se sabe que $g(x, y) = c$ define una curva C . El gradiente, ∇f , es la dirección de máximo crecimiento de f . Si la proyección de ∇f sobre la tangente T a la curva C en el punto (x, y) no es nula, entonces el valor de f se puede incrementar si nos movemos a lo largo de C en la dirección indicada por la proyección de ∇f sobre la tangente T , luego si la proyección de ∇f sobre T es cero, en ese punto f alcanza un máximo sujeto a $g(x, y) = c$; dado que ∇g es perpendicular a T , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Para tal punto (x, y) se tiene que $f(x, y) = \max\{f(w, z) : g(w, z) = c\}$; el teorema que permite garantizar la existencia de dicho multiplicador es el llamado teorema de los multiplicadores de Lagrange (ver [3]), presentado a continuación.

Teorema 3.2.1. *Sea f, g_1, g_2 funciones reales C^1 en un conjunto abierto S de $\mathbb{R}^2$. Sea X_0 el subconjunto de S tal que*

$$X_0 = \{(x, y) \in S : g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0\}.$$

Supongamos que $(x_0, y_0) \in X_0$ y que existe una 2-bola $B(x_0, y_0)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ó $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) de $X_0 \cap B(x_0, y_0)$. Supongamos además, que el determinante,

$$\det[\mathbf{D}_j g_i(x_0, y_0)] \neq 0,$$

donde $\mathbf{D}_j g_i(x_0, y_0)$ significa la derivada en la dirección j de la función g_i en el punto (x_0, y_0) . Entonces existen λ_1, λ_2 números reales tales que se satisfacen la siguiente ecuación

$$\nabla f(x_1, y_1) + \lambda_1 \nabla g_1(x_1, y_1) + \lambda_2 \nabla g_2(x_1, y_1) = (0, 0). \quad (3.3)$$

Para afrontar el problema que se desea estudiar, no basta sólo con los temas antes vistos, pues también se hace necesario el uso de ecuaciones diferenciales de segundo grado, para lo cual, bastará con estudiar los sistemas de un grado de libertad (para mayor profundización acerca del tema, ver [5]).

3.3. Sistemas de un grado de libertad

Definición 3.3.1. Un sistema con un grado de libertad es un sistema descrito por una ecuación diferencial de la forma

$$x'' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

donde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

Definición 3.3.2. La energía cinética de una partícula en movimiento es

$$T = \frac{1}{2} m (x')^2,$$

donde m es la masa de la partícula. La energía potencial de una partícula es la función

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi. \quad (3.5)$$

La energía total de una partícula es

$$E = T + U. \quad (3.6)$$

Observación 3.3.1. En el trabajo, se considerarán partículas tales que $m = 1$, así,

$$T = \frac{1}{2}(x')^2. \quad (3.7)$$

Observación 3.3.2. En general, la energía total es una función $E(x, x')$ de x y x' .

Observación 3.3.3. La energía potencial determina el sistema, ya que

$$f(x) = -\frac{dU}{dx}.$$

A continuación se presenta el llamado teorema de la conservación de la energía (ver [5]).

Teorema 3.3.1. *La energía total de las partículas que se mueven acorde la la ecuación (3.4) es conservativo, es decir, $E(x(t), x'(t))$ es independiente de t .*

3.3.1. Flujos de fase

La ecuación (3.4) puede escribirse como el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$x' = y, \quad y' = f(x). \quad (3.8)$$

Se considerará el plano con coordenadas x, y , el cual se llama *plano fase* de la ecuación (3.4), y los puntos del plano fase son llamados *puntos fase*. La primera ecuación de (3.8) determina un campo vectorial en el plano fase, al cual se le conoce como *campo vectorial fase de velocidades*.

Si $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son soluciones de (3.8) para t en un intervalo $[a, b]$, la curva en el plano fase con coordenadas $(x(t), y(t))$ es llamada *curva fase*. Un caso particular de lo anterior, es cuando se tiene que $x(t) = x_0$ y $y(t) = y_0$ son soluciones, en cuyo caso al punto (x_0, y_0) se le conoce como posición de equilibrio pues el sistema se mantiene en dicho punto para todo $t \in [a, b]$. Es claro que estos puntos sólo se encuentran en el eje x , ya que $y = x'$ y como $x = x_0$ es constante, se tiene que $y = 0$. Además, se puede tener aún mas información de x_0 , ya que si esto sucede entonces se cumple que $0 = U'(x_0)$, es decir, x_0 es valor crítico de la energía potencial. Note que también estos puntos críticos también resultan ser puntos críticos de la energía total. Una manera sencilla de encontrar dichas curvas fases es por medio de la ley de

conservación de energía, puesto que, dichas curvas resultan ser las líneas de nivel de la energía total.

A continuación, se presenta un ejemplo de vital importancia en el desarrollo del trabajo.

Ejemplo 3.3.1. Sea

$$a \phi'' = -\lambda \sin \phi + \mu \cos \phi, \quad (3.9)$$

una ecuación diferencial donde $\phi = \phi(s)$ y λ, μ, a son constantes, es claro que $a \neq 0$, aplicando la teoría anterior, se tiene que la energía cinética y potencial es

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \frac{1}{2}(\phi')^2, \\ U(\phi) &= -\frac{1}{a} \int_o^\phi (-\lambda \sin \xi + \mu \cos \xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{a} (\lambda \cos \phi - \lambda + \mu \sin \phi). \end{aligned}$$

Por tanto la energía total de (3.9) es

$$E = \frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{1}{a} (\lambda \cos \phi - \lambda + \mu \sin \phi). \quad (3.10)$$

Por el comentario anterior, se tiene que las soluciones de (3.9) son las curvas de nivel de (3.10) sobre el plano fase, es decir,

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{1}{a} (\lambda \cos \phi - \lambda + \mu \sin \phi) = C_0,$$

donde C_0 es una constante, o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{1}{a} (\lambda \cos \phi + \mu \sin \phi) = C.$$

Note que $\frac{1}{a} (\lambda \cos \phi(s) + \mu \sin \phi(s)) = K \cos(\phi(s) - h)$, donde K y h son constantes que dependen de λ, μ y a , luego,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{ds}(s) \right)^2 - K \cos(\phi(s) - h) = C. \quad (3.11)$$

Analizando en detalle (3.11) se puede indagar acerca de la solución utilizando el plano fase, nótese que h puede considerarse como cero, ya que lo único que

está realizando esta constante es un desfase del coseno, así que la ecuación diferencial a tratar será

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{ds}(s) \right)^2 - K \cos(\phi(s)) = C.$$

Por simplicidad, se tomará $x = \phi(s)$ y $y = \phi'(s)$, así la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$\frac{1}{2} y^2 - K \cos x = C. \quad (3.12)$$

De aquí, se tienen dos casos, $K = 0$ o $K \neq 0$.

Caso 1. Si $K = 0$ entonces (3.12) es equivalente a

$$\frac{1}{2} y^2 = C. \quad (3.13)$$

En esta posibilidad no sería necesario el uso del plano fase, ya que $y = \phi'(s)$, entonces (3.13) queda como

$$\frac{1}{2} \phi'(s)^2 = C,$$

lo cual es equivalente a

$$\phi'(s) = C_1,$$

y se obtendrían las soluciones de la forma

$$\phi(s) = C_1 s + C_2, \quad (3.14)$$

que corresponden a rectas.

Caso 2. Si $K \neq 0$, entonces la ecuación (3.12) es equivalente a

$$\frac{1}{2K} y^2 - \cos x = C_3. \quad (3.15)$$

Acomodando un poco la ecuación (3.15) se tiene

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2K}} \right)^2 - \cos x = C_3, \quad (3.16)$$

y la cual sería equivalente a tratar

$$z^2 - \cos x = C_3, \quad z = \frac{y}{\sqrt{2K}}, \quad (3.17)$$

puesto que es sólo un reescalamiento del eje y .

Además, las gráficas de soluciones en el plano fase, serían las curvas de nivel de las ecuaciones (3.14) y (3.17).

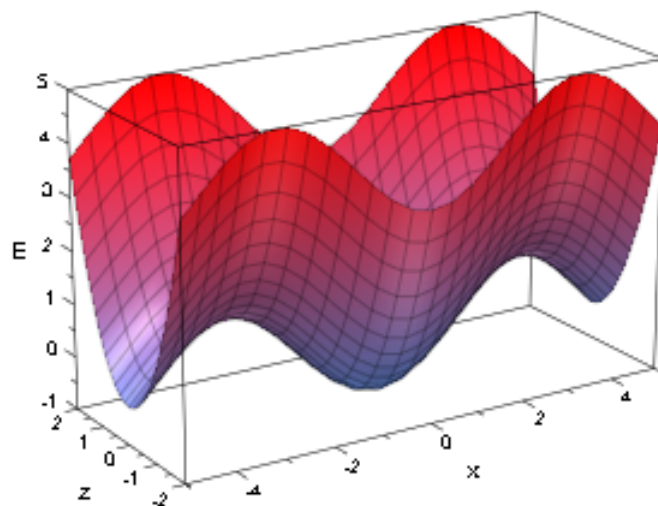


Figura 3.5: Gráfico de la ecuación (3.17).

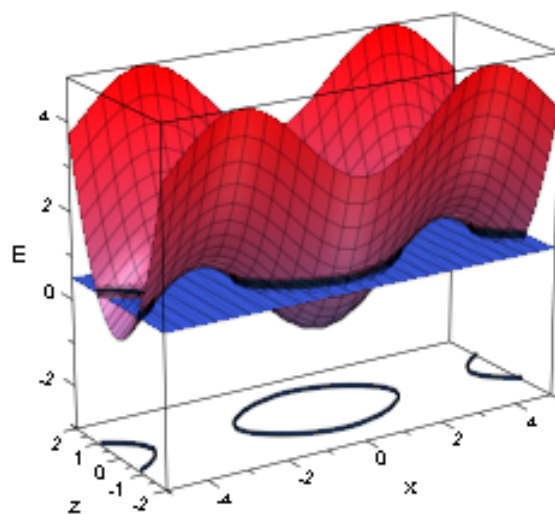


Figura 3.6: Solución de la ecuación (3.17) correspondiente a la curva de nivel $E = C_3 = \frac{1}{2}$.

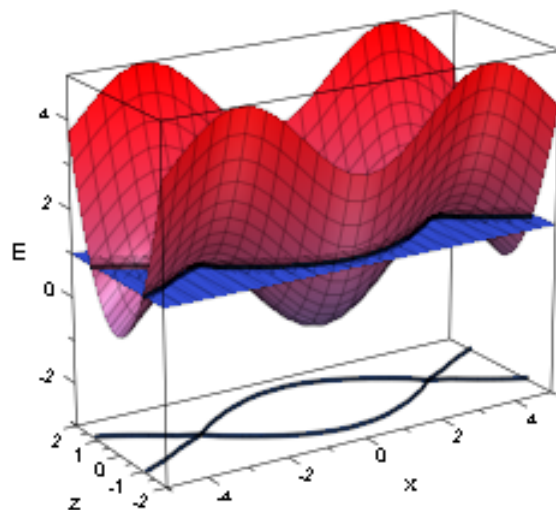


Figura 3.7: Solución de la ecuación (3.17) correspondiente a la curva de nivel $E = C_3 = 0,998$.

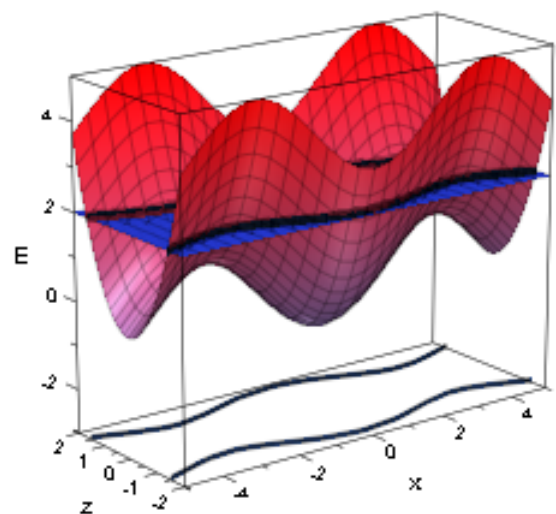


Figura 3.8: Solución de la ecuación (3.17) correspondiente a la curva de nivel $E = C_3 = 2$.

Capítulo 4

Camino más frecuente de una partícula en el plano

Si una partícula se mueve a velocidad constante en un plano horizontal, se supone que los cambios de dirección, al final de cada unidad de tiempo que está medido por un ángulo ϕ posee probabilidad

$$f(\phi) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\phi^2}{2\epsilon^2}}, \quad (4.1)$$

donde ϵ es la desviación estándar de ϕ . Supongamos que la partícula se mueve desde un punto A hasta un punto B con coordenadas (x_{k+1}, y_{k+1}) en k unidades de tiempo. La probabilidad de que ocurra la secuencia $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ de cambios de dirección es

$$P(\phi_1\phi_2\cdots\phi_k) = P(\phi_1)P(\phi_2|\phi_1)P(\phi_3|\phi_1\phi_2)\cdots P(\phi_k|\phi_1\phi_2\cdots\phi_{k-1}).$$

Y, debido a que la probabilidad de que suceda el evento ϕ_i es independiente, entonces la probabilidad de obtener la secuencia $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ es

$$P(\phi_1\phi_2\cdots\phi_k) = P(\phi_1)P(\phi_2)\cdots P(\phi_k) = f(\phi_1)f(\phi_2)\cdots f(\phi_k). \quad (4.2)$$

Nótese, que P alcanza un máximo para el caso del camino más frecuente, además, un evento en el cual P es máximo, también lo será para $Q = \ln(P)$,

4. CAMINO MÁS FRECUENTE DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

debido a que la función logaritmo es creciente, así que

$$\begin{aligned}
 Q &= \ln(P) \\
 &= \ln(f(\phi_1) f(\phi_2) \cdots f(\phi_k)) \\
 &= \sum_{s=1}^k \ln(f(\phi_s)) \\
 &= -\frac{1}{2\epsilon^2} \sum_{s=1}^k \phi_s^2 - k \ln(\epsilon\sqrt{2\pi}).
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Q = -\frac{1}{2\epsilon^2} \sum_{s=1}^k \phi_s^2 - k \ln(\epsilon\sqrt{2\pi}). \quad (4.3)$$

El camino de A hasta B puede ser considerado como una sucesión de segmentos rectos iguales (idea de poligonal), que parte desde $A = (0, 0)$ hasta $B = (x_{k+1}, 0)$, cada uno de ellos, con longitud $\ell = \frac{L}{k}$. El primer segmento hace un ángulo ϕ_1 , el segundo uno con $(\phi_1 + \phi_2)$ y en el k -ésimo un ángulo de $(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k)$ con el eje x . Las proyecciones de estos segmentos sobre los ejes coordenados x e y son respectivamente

$$\begin{aligned}
 F &= \ell (\cos \phi_1 + \cos(\phi_1 + \phi_2) + \cdots + \cos(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k)) - x_{k+1} = 0, \\
 G &= \ell (\sin \phi_1 + \sin(\phi_1 + \phi_2) + \cdots + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k)) = 0.
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Debido a que se quiere encontrar el camino más frecuente que una partícula pueda tomar en el plano, se procede a maximizar (4.3) bajo las restricciones (4.4). Esto dado que no sólo se debe optimizar la probabilidad de que ocurran ciertas variaciones de ángulos al final de cada unidad de tiempo, sino que también, se desea que empiece y termine en lugares dados, y ésto, es lo que precisamente indican las ecuaciones (4.4).

El uso de los multiplicadores de Lagrange, permite resolver este problema. Si se considera la siguiente expresión

$$\phi = Q + \lambda F + \mu G, \quad (4.5)$$

donde λ y μ denotan los multiplicadores de Lagrange, el camino más frecuente es aquél que cumple

$$\nabla \phi = 0_{\mathbb{R}^k}.$$

Es decir,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \phi_s} = 0, \quad s = 1, \dots, k. \quad (4.6)$$

Utilizando (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) se obtiene que

$$-\frac{\phi_s}{\epsilon^2} - \lambda \sum_{u=s}^k \left(\sin \left(\sum_{i=1}^u \phi_i \right) \right) \ell + \mu \sum_{u=s}^k \left(\cos \left(\sum_{i=1}^u \phi_i \right) \right) \ell = 0, \quad s = 1, \dots, k. \quad (4.7)$$

Debido que al querer resolver este problema, se torna muy complicado, entonces para simplificar los cálculos, se procede a cambiar del lenguaje discreto de las ecuaciones a lo continuo, esto se logra haciendo $\ell \rightarrow 0, d\ell$, observe que maximizar (4.3) es equivalente a minimizar la expresión (4.8), esto debido a que, se pueden omitir las constantes que suman y multiplican, además, las variaciones de ángulo son curvaturas como se ya se ha visto y, maximizar una expresión es minimizar su opuesto. Es así que se deriva la expresión que está a continuación

$$\int_A^B \frac{ds}{\rho^2}, \quad (4.8)$$

donde s denota la longitud de arco y $\rho = \rho(s)$ es el radio de curvatura. Para transformar (4.7) se utilizará la siguiente notación

$$\alpha(s) = \phi_1 + \dots + \phi_s, \quad \frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \phi(s). \quad (4.9)$$

Nótese que $\alpha(s)$ es el ángulo formado por la línea tangente a la curva medido respecto al eje x . Teniendo en cuenta esto, la expresión (4.7) quedaría como

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2} \right) \frac{d\alpha}{ds} + \lambda \int_{u=s}^k \sin \alpha(u) du - \mu \int_{u=s}^k \cos \alpha(u) du = 0.$$

Derivando la fórmula anterior respecto a s , multiplicando por $2 \frac{d\alpha}{ds}$ e integrando, se obtiene

$$\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + 2(\lambda \cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 2C,$$

lo que es equivalente a

$$\frac{1}{2\epsilon^2} \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + c \cos(\alpha - \omega) = C. \quad (4.10)$$

4. CAMINO MÁS FRECUENTE DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

Las soluciones a una ecuación diferencial muy parecida a ésta fueron trabajadas en el ejemplo 3.3.1 (ver ecuación (3.11)) salvo el signo y el uso de ciertas constantes, pero que en esencia es lo mismo. El caso 1 es completamente análogo y se procede con el caso 2; en el ejemplo, se muestran las proyecciones de las soluciones sobre el plano fase, aquí, se intentará dar una expresión explícita para tales caminos, despejando el diferencial en la ecuación (4.10) y teniendo en cuenta las condiciones dadas, con esto es posible obtener

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \epsilon \sqrt{2(C - c \cos \alpha)}. \quad (4.11)$$

Así con la ecuación (4.11) se tiene una parametrización del camino por longitud de arco

$$\epsilon(s - s_0(C)) = \int_{\pi}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2(C - c \cos \psi)}} d\psi. \quad (4.12)$$

Teniendo en cuenta que $dx = \cos \alpha ds$ y $dy = \sin \alpha ds$ se obtiene una parametrización en coordenadas de los caminos más probable que una partícula pueda tomar en el plano, dada por

$$\begin{aligned} \epsilon(x - x_0(C)) &= \epsilon \int_{s_0}^s \cos \alpha d\sigma = \int_{\pi}^{\alpha} \frac{\cos \psi}{\sqrt{2(C - c \cos \psi)}} d\psi, \\ \epsilon(y - y_0(C)) &= \epsilon \int_{s_0}^s \sin \alpha d\sigma = \int_{\pi}^{\alpha} \frac{\sin \psi}{\sqrt{2(C - c \cos \psi)}} d\psi. \end{aligned}$$

Nótese que aunque se tiene la parametrización de tales caminos, aún es complicado ver gráficamente tales recorridos, y por tanto se empezarán a dar condiciones para ir restringiendo los posibles valores de las constantes y poder lograr ver tales trayectorias. En primer lugar, consideremos $c = 1$, bajo el argumento de que se pueden escoger apropiadamente las unidades de ϵ y C . Además supondremos que $\epsilon s_0(C) = \epsilon x_0(C) = 0$ y $\epsilon y_0 = \frac{1}{\epsilon \rho_0}$. Se obtiene que

$$\begin{aligned} \epsilon x(C) &= \int_{\pi}^{\alpha} \frac{\cos \psi}{\sqrt{2(C - \cos \psi)}} d\psi, \\ \epsilon y(C) &= \int_{\pi}^{\alpha} \frac{\sin \psi}{\sqrt{2(C - \cos \psi)}} d\psi = \frac{1}{\epsilon \rho}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mediante ciertos valores que se le pueden asignar a la constante C , se encuentra una parametrización en términos de integrales elípticas.

Caso 1. Si $-1 \leq C \leq 1$, bajo la notación

$$C = -\cos 2\gamma, \quad k = \sin \gamma, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \gamma \sin \phi.$$

Y con esto la parametrización de la expresión (4.13) se puede ver como

$$\begin{aligned} \epsilon s &= F(k, \phi), \\ \epsilon x &= F(k, \phi) - 2E(k, \phi), \\ \epsilon y &= 2k \cos \phi, \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde, E y F son las formas estándar de integrales elípticas (ver [1]).

Caso 2. Si $C > 1$, y

$$C = \frac{(1 + \cos^2 \gamma)}{\sin^2 \gamma}, \quad k = \sin \gamma, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \gamma.$$

Entonces la parametrización de la expresión (4.13) se puede ver como

$$\begin{aligned} \epsilon s &= k F(k, \phi), \\ \epsilon x &= -k F(k, \phi) + \frac{2}{k} (F(k, \phi) - E(k, \phi)), \\ \epsilon y &= \frac{2}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para cualquier camino, k es fijo y ϕ es el parámetro de representación.

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran los caminos (4.14) y (4.15) respectivamente, para distintos valores de los parámetros. Estas gráficas representan las diversas soluciones de (4.11), por tanto, si esta ecuación diferencial modela los meandros, dicha curva que los aproxima se encuentra en alguna de las gráficas.

Von Schelling señala en [9], que estos recorridos corresponden a la trayectoria de un río o a la disipación de una columna de humo, y que estos resultados podrían ser generalizados a otros fenómenos.

4. CAMINO MÁS FRECUENTE DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

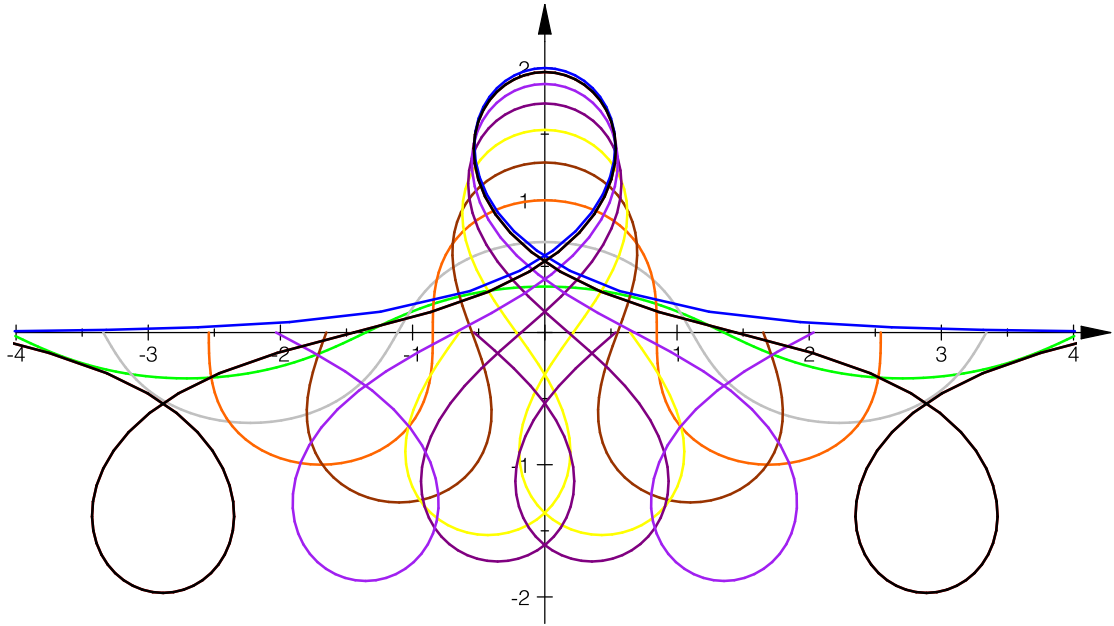


Figura 4.1: Gráfica ϵy vs ϵx , la cual, muestra los caminos más frecuentes asociados al caso 1, la curva de color verde representa el camino con $\gamma = 10^\circ$ y $-\frac{3\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$, gris a 20° , naranja a 30° , café a 40° , amarillo a 50° , violeta a 60° , púrpura a 70° , rojo a 80° , azul a 90° y negro a 100° .

4. CAMINO MÁS FRECUENTE DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

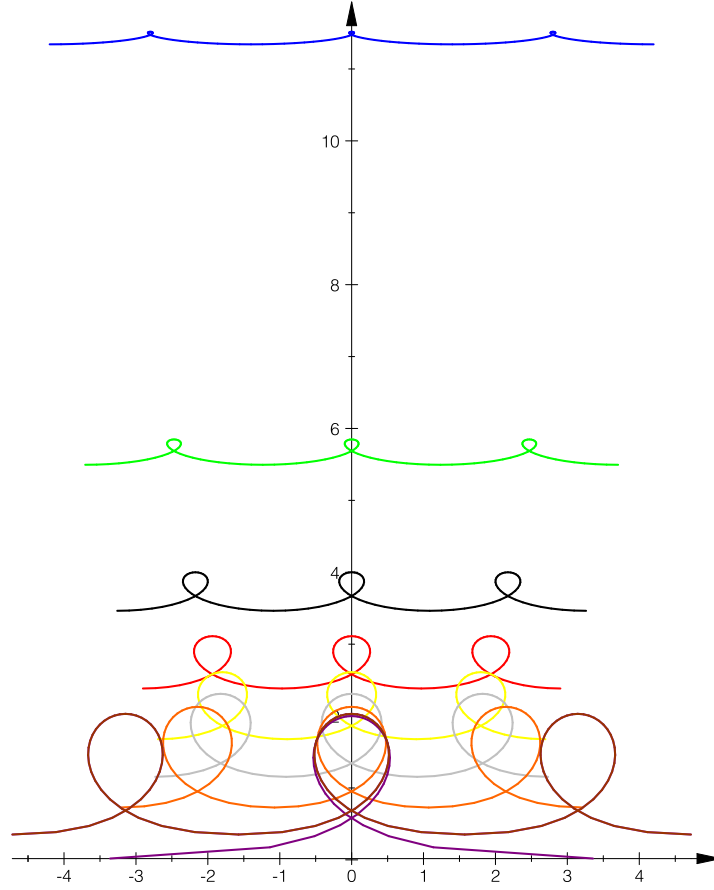


Figura 4.2: Gráfica ϵy vs ϵx , el cual muestra los caminos más frecuentes asociados al caso 2, la curva de color azul representa el camino con $\gamma = 10^\circ$ y $-\frac{3\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$, verde a 20° , negro a 30° , rojo a 40° , amarillo a 50° , gris 60° , naranja a 70° , púrpura a 80° , violeta a 90° y café a 100° .

Capítulo 5

Curva Seno-generada

Como se pudo notar al final del capítulo anterior, existen muchas posibles curvas que solucionan la ecuación (4.11), así que se está en busca de la que mejor aproxime los meandros, dicha curva es llamada Seno-generada. En el presente capítulo se abordarán dos tipos de análisis que permitirán encontrarla. Se iniciará planteando el modelo geométrico y se confrontará con el probabilístico. Finalmente se incorporará un término importante en el desarrollo de curvas, el cual es la sinuosidad.

5.1. Análisis geométrico

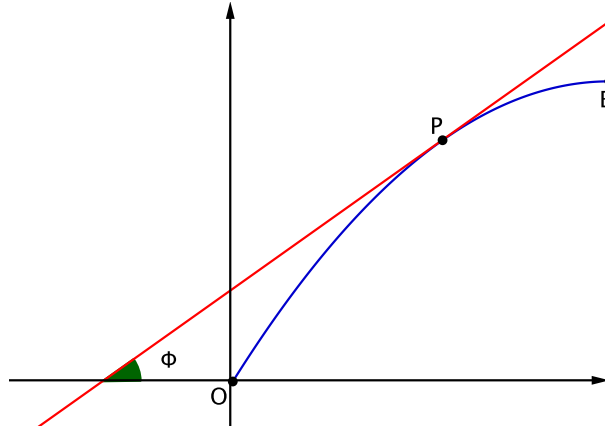
Sea B un punto en un plano con origen O y considérese un camino suave que conecte a O con B de longitud L y parametrizada por longitud de arco; $(x(s), y(s)), s \in (0, L)$, se tiene

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi(s), \quad \frac{dy}{ds} = \sin \phi(s), \quad (5.1)$$

donde $\phi(s)$ representa el ángulo formado por la recta tangente al camino en el punto $(x(s), y(s))$ y la dirección positiva de la abscisa.

Note que la curvatura c en $(x(s), y(s))$ es $c(s) = \phi'(s)$, se define la curvatura promedio $\hat{c}$ como la norma de la curvatura, es decir

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right)^2 ds}. \quad (5.2)$$



Debido a que nos interesa verificar la hipótesis formulada por Luna Leopold, entonces se debe encontrar un camino (o caminos) que vayan desde el origen O hasta el punto B de tal forma que la curvatura promedio sea mínima. Puesto que la norma es un indicador de tamaño, puede pensarse que $\hat{c}$ esta midiendo el "tamaño" de la curvatura por así decirlo.

Es claro que si se considera un mínimo absoluto, la solución es inmediata y sería una línea recta de O a B puesto que $\hat{c} \geq 0$ y para este caso se tendría igualdad, la cual no corresponde a una aproximación de un meandro. Por lo tanto se está en busca de mínimos locales y no absolutos. Por lo tanto, el problema radica en encontrar las curvas que unen a O con B tales que su longitud sea mayor a la distancia de O a B y que minimicen (5.2).

Como se sabe que la función raíz cuadrada es creciente y el valor de L es constante entonces minimizar (5.2) es análogo a minimizar

$$\int_0^L \left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right)^2 ds. \quad (5.3)$$

De (5.1) se obtiene una parametrización del camino

$$x(t) = \int_0^t \cos \phi(s) ds, \quad y(t) = \int_0^t \sen \phi(s) ds. \quad (5.4)$$

Ahora, si $B = (x_1, y_1)$ entonces se debe cumplir que

$$x_1 = x(L) = \int_0^L \cos \phi(s) ds, \quad y_1 = y(L) = \int_0^L \sen \phi(s) ds,$$

o equivalentemente,

$$\int_0^L \cos \phi(s) ds - x_1 = 0, \quad \int_0^L \sin \phi(s) ds - y_1 = 0. \quad (5.5)$$

Retomando un poco, se debe minimizar (5.3) bajo las condiciones de (5.5). Para esto, se puede utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange visto en el teorema 3.2.1, así, la expresión a minimizar sería

$$\int_0^L \left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right)^2 ds + \lambda \left(\int_0^L \cos \phi(s) ds - x_1 \right) + \mu \left(\int_0^L \sin \phi(s) ds - y_1 \right)$$

la cual es equivalente a

$$\int_0^L \left(\left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right)^2 + \lambda \left(\cos \phi(s) - \frac{x_1}{L} \right) + \mu \left(\sin \phi(s) - \frac{y_1}{L} \right) \right) ds, \quad (5.6)$$

donde λ y μ son los multiplicadores de Lagrange (número arbitrarios). Sea F el integrando de (5.6)

$$F(\phi) = (\phi'(s))^2 + \lambda \left(\cos \phi(s) - \frac{x_1}{L} \right) + \mu \left(\sin \phi(s) - \frac{y_1}{L} \right), \quad (5.7)$$

donde $\phi'(s) = \frac{d}{ds}\phi(s)$. Además sean F'_ϕ y $F'_{\phi'}$ las derivadas parciales de F con respecto a ϕ y a ϕ' respectivamente. F debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange, esto es

$$F'_\phi = \frac{d}{ds} (F'_{\phi'}). \quad (5.8)$$

De (5.7) se obtiene

$$F'_\phi = -\lambda \sin \phi(s) + \mu \cos \phi(s), \quad (5.9)$$

y

$$\frac{d}{ds} (F'_{\phi'}) = \frac{d}{ds} (2(\phi'(s))) = 2(\phi''(s)), \quad (5.10)$$

donde $\phi''(s) = \frac{d^2\phi}{ds^2}$. Ahora, sustituyendo (5.9) y (5.10) en (5.8) se tiene

$$2(\phi''(s)) = -\lambda \sin \phi(s) + \mu \cos \phi(s). \quad (5.11)$$

En este punto, se observa que esta ecuación diferencial tiene la misma forma a la tratada en el ejemplo 3.3.1 con $a = 2$ (ver ecuación (3.9)), así que ya

se conocen las trayectorias de las soluciones en el plano fase. Es claro que el caso 1 de dicho ejemplo no puede suceder, ya que de la experiencia se sabe que los meandros no tienen esa forma, entonces sólo se trabajará bajo los supuestos dados en el caso 2. En busca de una solución de (5.11), se asumirá que ϕ es una función con un rango de la forma $[-\omega, \omega]$, $C_3 = -\cos \omega$ y $K = \frac{h^2}{2}$ con ω y $h \in \mathbb{R}$, dadas estas condiciones, la ecuación (3.16) se transforma en

$$y^2 = h^2 (\cos x - \cos \omega).$$

Es decir,

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = h\sqrt{\cos \phi(s) - \cos \omega}, \quad (5.12)$$

y de aquí,

$$h s = \int \frac{1}{\sqrt{\cos \phi - \cos \omega}} d\phi + s_0. \quad (5.13)$$

Tras el objetivo de dar una expresión explícita que modele los meandros, se dará una aproximación al valor de la integral (5.13). Se sabe que

$$\cos \phi - \cos \omega = -2 \sin \frac{\phi + \omega}{2} \sin \frac{\phi - \omega}{2}. \quad (5.14)$$

Ahora, se supone que ω es pequeño, con lo cual el argumento del seno también es pequeño, entonces, se sabe que si esto sucede $\sin x \simeq x$, entonces la ecuación (5.14) es aproximadamente igual a

$$\cos \phi - \cos \omega = -2 \frac{\phi + \omega}{2} \frac{\phi - \omega}{2} = \frac{\omega^2 - \phi^2}{2}. \quad (5.15)$$

Bajo esta aproximación, (5.13) se podría escribir como:

$$h s = \int \frac{1}{\sqrt{\phi^2 - \omega^2}} d\phi + s_0, \quad (5.16)$$

que corresponde a una integral fácil de calcular, bajo la sustitución $\phi = \omega \cos \theta$ y se obtiene

$$h s + \beta = \arcsen \frac{\phi}{\omega} + s_0,$$

esta expresión es equivalente a

$$\sen(h s + \eta) = \frac{\phi}{\omega}, \quad \eta = \beta + s_0.$$

Se concluye que

$$\phi(s) = \omega \operatorname{sen}(hs + \eta). \quad (5.17)$$

La función (5.17) representa una cantidad infinita de soluciones aproximadas de la ecuación diferencial (5.12) definidas para cada valor de β y h , la aproximación a la solución es más exacta si ω es pequeño. Para dar una solución particular, es necesario establecer más condiciones, por ejemplo, suponer que la trayectoria es tangente al eje x en cada uno de sus extremos, es decir $\phi(s) = 0$ para $s = 0$ y $s = L$.

Basados en estos supuestos, de la ecuación (5.17) se tiene

$$0 = \omega \operatorname{sen} \eta \Rightarrow \eta = 0,$$

$$0 = \omega \operatorname{sen} hL \Rightarrow hL = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2\pi}{L}.$$

Y así, la solución explícita y aproximada de la ecuación diferencial (5.12) que satisface todas las condiciones impuestas tiene la forma

$$\phi(s) = \omega \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{L}\right). \quad (5.18)$$

De acuerdo a lo estudiado por Luna Leopold [7], la ecuación (5.18) describe aproximadamente los cambios de dirección de los meandros, así que, sustituyendo esta ecuación en (5.4) se obtiene la parametrización de la curva que aproxima los meandros y que por ende, minimiza la curvatura promedio, $\hat{c}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos\left(\omega \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{L}\right)\right) ds, \\ y(t) &= \int_0^t \operatorname{sen}\left(\omega \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{L}\right)\right) ds. \end{aligned} \quad (5.19)$$

A esta curva Luna Leopold la denominó **CURVA SENO-GENERADA**.

5.2. Análisis probabilístico

No existe sólo una manera de deducir la curva seno-generada. Hay otro camino de llegar a dicha parametrización, partiendo de consideraciones probabilísticas, cuya construcción ya se ha trabajado, y se puede encontrar en el capítulo 4. El proceso y todos los supuestos para llegar a dicha curva son los

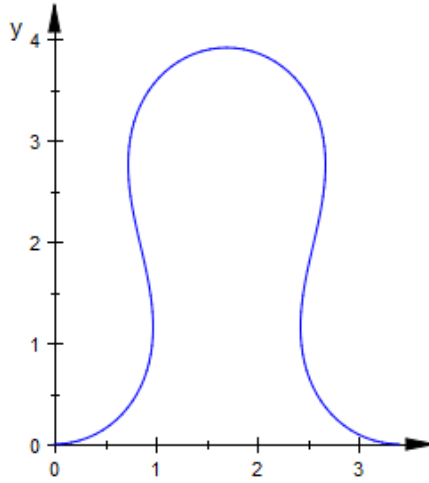


Figura 5.1: Ilustración de la curva seno-generada para valores de ω pequeños ($\omega = 1,8; L = 10$).

mismos. Nótese que la ecuación (4.8) es idéntica a (5.3) puesto que $\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds}$ ya que ambos sentidos denotan la curvatura, lo que quiere decir, que en ambas construcciones llegan a un punto en el que se encuentran, y a partir de allí se sustentan igual, así que, bajo esta idea de deducir la curva seno-generada da otro sentido a la curva, es decir, las curvas que aproximan los meandros son algunos de los caminos más frecuentes que pueda tomar una partícula en el plano.

5.3. Comparación

A continuación, mediante un ejemplo se pretende mostrar que la curva seno-generada minimiza la curvatura promedio $\hat{c}$. Para ello, se define una función de direcciones de gráfico similar a la de la función (5.18), se tomará el polinomio de tercer grado que se anula en $0, \frac{L}{2}, L$, es decir

$$\beta(s) = s \left(\frac{L}{2} - s \right) (L - s), \quad (5.20)$$

supóngase $L = 3$ y $\omega = 1,5$.

Los gráficos de las funciones (5.20) y (5.18) son similares para $s \in [0, L]$, a excepción de su amplitud (ver figura 5.3), entonces se procede a definir

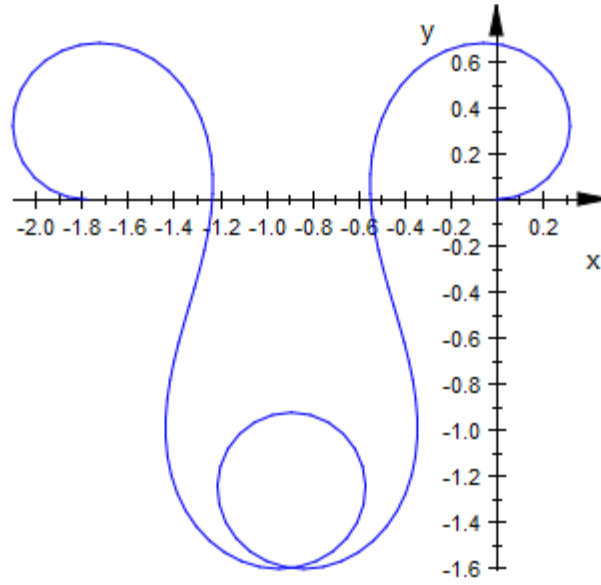


Figura 5.2: Ilustración de la curva seno-generada para valores de ω grandes, si esta condición no se cumple se torna claro que no aproximan los meandros, pues éstos no se autointersecan ($\omega = 5$; $L = 10$).

una nueva función en base a (5.20), de la siguiente manera, dado que la función (5.20) posee por puntos críticos a $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} L$, una función cuya amplitud al graficar esa igual al de (5.18) es

$$\eta(s) = \frac{\omega}{m} s \left(\frac{L}{2} - s \right) (L - s), \quad (5.21)$$

donde m es el valor mas grande de la función evaluada en sus puntos críticos, (ver figura 5.4).

Ahora, la idea es comparar los valores de las curvaturas promedios de las siguientes curvas, la curva seno generada, cuya parametrización está dada en la expresión (5.19) y la siguiente curva

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos \left(\frac{\omega}{m} s \left(\frac{L}{2} - s \right) (L - s) \right) ds, \\ y(t) &= \int_0^t \sin \left(\frac{\omega}{m} s \left(\frac{L}{2} - s \right) (L - s) \right) ds. \end{aligned} \quad (5.22)$$

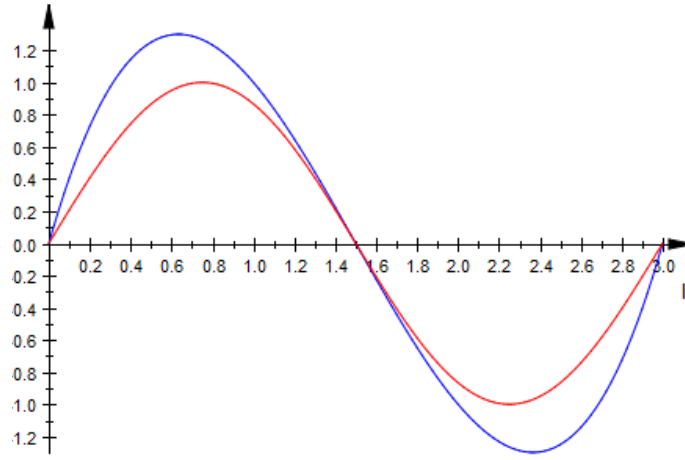


Figura 5.3: Comparación entre las funciones (5.18) (curva roja) y (5.20) (curva azul).

La curvatura promedio está dada por la ecuación (5.2), así que para la curva (5.19) se tiene lo siguiente

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{1}{3} \int_0^3 \left(\frac{d}{ds} \left(1,5 \sin \left(\frac{2\pi s}{3} \right) \right) \right)^2 ds} \approx 3,8476,$$

y para la curva (5.22) se tiene

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{1}{3} \int_0^3 \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{1,5}{m} s \left(\frac{3}{2} - s \right) (3 - s) \right) \right)^2 ds} \approx 4,0249.$$

De aquí, se tiene lo esperado, que la curvatura promedio de la curva seno-generada sea menos que la de cualquier otra curva que posea una función de direcciones similar.

5.4. Sinuosidad

La característica principal de un río o arroyo es la **sinuosidad**, una medida de la desviación de un camino que une dos puntos y el más corto posible entre ellos (la línea recta que atraviesa dichos puntos), ésta es una razón entre la longitud del camino y la longitud del camino más corto, dichos puntos no son cualquiera, son los puntos iniciales y finales de un meandro.

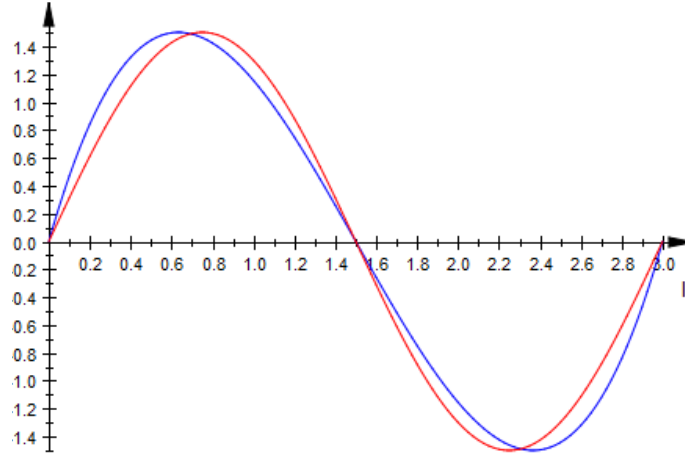


Figura 5.4: Comparación entre las funciones (5.18) (curva roja) y (5.21) (curva azul).

Bajo la notación dada en la figura 2.2, se definen $\zeta = \frac{s}{L}$ y la sinuosidad σ como $\sigma = \frac{L}{\lambda}$. De (5.18) se obtiene

$$\frac{s}{L} = \zeta = \frac{1}{2\pi} \arcsen \frac{\phi}{\omega}.$$

De aquí

$$d\zeta = \frac{1}{2\pi(\omega^2 - \phi^2)^2} d\phi. \quad (5.23)$$

Se sabe que $dx = ds \cos \theta$, entonces multiplicando por $\frac{L\lambda}{L\lambda}$

$$d\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sigma \cos \phi d\zeta. \quad (5.24)$$

Ahora, eliminando el diferencial $d\zeta$ de las ecuaciones (5.23) y (5.24) e integrando

$$\int_0^{\frac{1}{4}} d\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{4} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{\omega} \frac{\cos \phi}{(\omega^2 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}} d\phi. \quad (5.25)$$

Si se realiza el cambio de variable $\phi = \omega t$ se llega a

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \omega t}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}} dt. \quad (5.26)$$

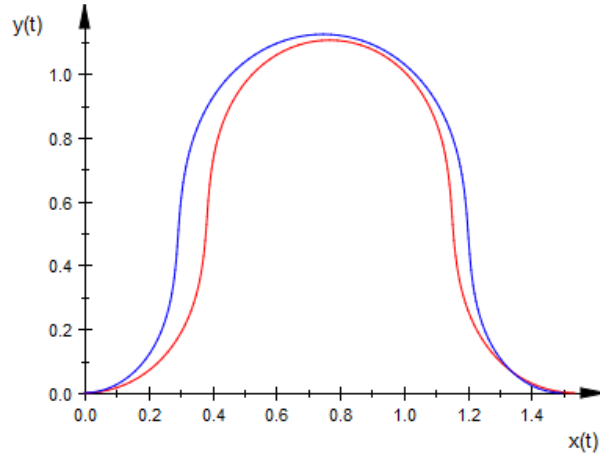


Figura 5.5: Gráficas de las curvas dadas por las expresiones (5.19) (curva roja) y (5.22) (curva azul).

Esta integral que resulta es muy interesante, pues está relacionada con la función de Bessel de primera especie (ver [1]), dicha función de orden cero puede ser expresada como

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \alpha) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \alpha) d\alpha,$$

debido a que $\sin \alpha$ es simétrico. Si se hace el cambio de variable $\sin \alpha = t$ entonces la integral se reduce a

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad (5.27)$$

y utilizando las ecuaciones (5.26) y (5.27) se obtiene una nueva expresión para la sinuosidad dada por

$$\sigma = [J_0(\omega)]^{-1}. \quad (5.28)$$

Este resultado es válido hasta el primer cero de la función de Bessel, esto es, para $0 \leq \omega < 2,4048$ (en radianes; en grados, $\omega < 126^\circ$), en efecto, ω se encuentra limitado por 126° que corresponde a $\sigma \leq 8,5$; puesto que en este punto los meandros entran en contacto.

El valor de ω , se obtiene haciendo $s = \frac{L}{4}$ en (5.18), este valor indica el ángulo (medido en radianes) más grande que hace la recta tangente a un

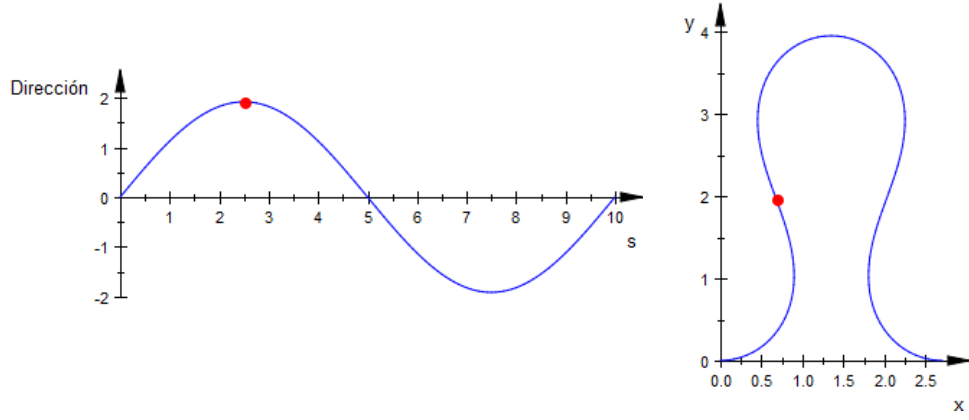


Figura 5.6: ω como valor máximo de dirección (figura de la izquierda) y ubicación del punto el cual, su recta tangente y el eje x forman un ángulo ω (medido en radianes, figura de la derecha)

punto en el meandro con el eje x , esto, se puede apreciar en en la figura 5.6. En la actualidad, se sabe que los ríos satisfacen $\sigma \lesssim 5$, pero en la mayoría de estos se tiene que $1 \lesssim \sigma \lesssim 2$.

Capítulo 6

Experimentación

En el presente capítulo, se pretende aplicar lo estudiado a lo largo del trabajo a un río específico y reconocido de la región, el río Cauca. El propósito es dar explícitamente la curva seno-generada a algunos de los meandros. para el cálculo de la curva seno-generada se tienen dos procedimientos, uno topográfico, mediante aproximaciones visuales y el otro, un poco más precisa empleando un lenguaje de programación.

6.1. Primer procedimiento

En este método, lo que se hace es medir en Geogebra a “ojo” el ángulo mayor, teniendo en cuenta su ubicación según la figura 5.6 tal y como lo ilustra la figura 6.1, después, se procede a utilizar un software como MuPAD, el cual, calcula la curva seno-generada asociada a este meandro con dicho ángulo, para obtener una figura como la mostrada en la figura 6.2, por último, se sobreponen las imágenes de las figuras 6.1 y 6.2 utilizando Microsoft PowerPoint y así, obtener la figura 6.3 para por fin ilustrar, que la curva seno-generada en realidad aproxima la curva medio de los meandros.

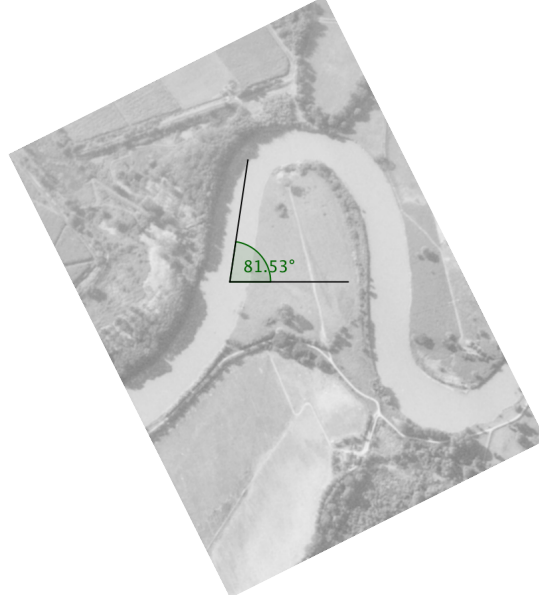


Figura 6.1: Ilustración acerca de como se modificó la imagen a un sistema de referencia y como se tomó el ángulo mayor en Geogebra, en este caso, muestra que dicho ángulo es 81.53° , ésta fotografía fué tomada a la altura del municipio de Buga, cerca a la ciénaga El Chical.

Ahora, se mostrarán la ecuaciones paramétricas de la curva seno generada encontradas en esta sección, a continuación la mostrada en la figura 6.3:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos\left(\frac{81,53\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{15,8}\right)\right) ds, \\ y(t) &= \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{81,53\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{15,8}\right)\right) ds, \end{aligned} \quad (6.1)$$

con $0 \leq t \leq 15,8$. Para el meandro de la figura 6.4

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos\left(\frac{86,03\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{17,2}\right)\right) ds, \\ y(t) &= \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{86,03\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{17,2}\right)\right) ds, \end{aligned} \quad (6.2)$$

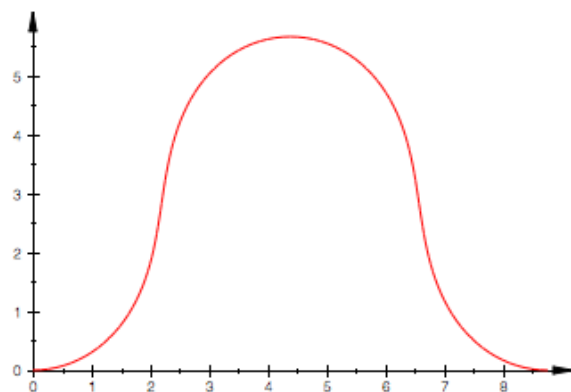


Figura 6.2: Ilustración de la curva seno-generada realizada en MuPAD asociada al meandro mostrado en la figura 6.1.

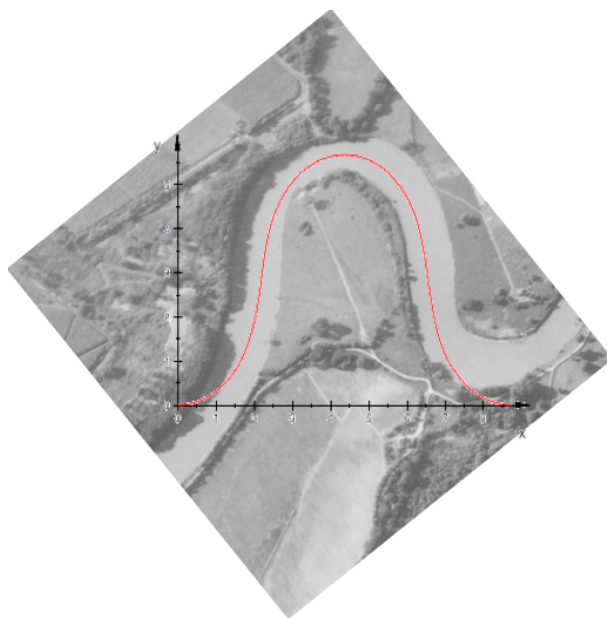


Figura 6.3: Ilustración de la superposición de las figuras 6.1 y 6.2.

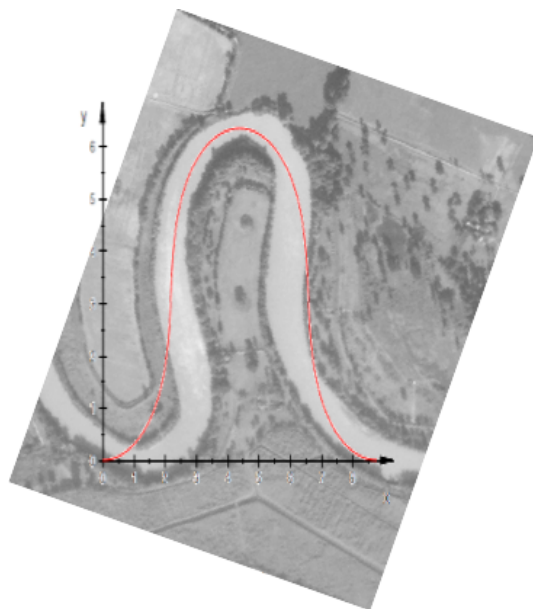


Figura 6.4: Aproximación a otro meandro próximo al de la figura anterior.

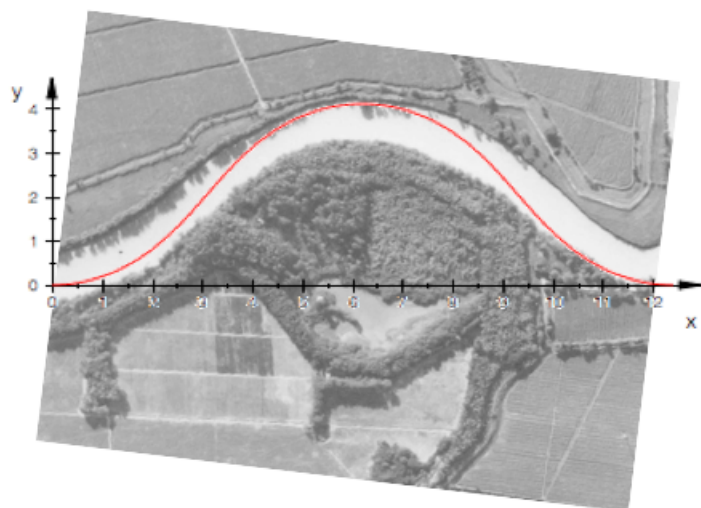


Figura 6.5: Esta fotografía fué tomada a la altura del municipio de Jamundí.

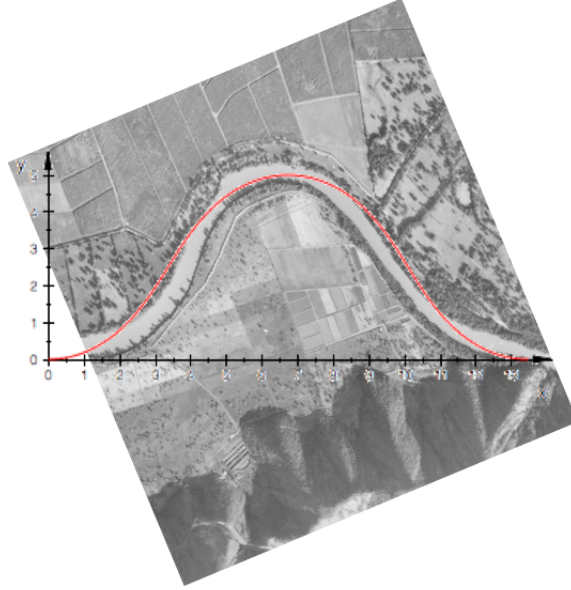


Figura 6.6: Esta fotografía fué tomada entre los municipios de Rozo y la Unión, mas precisamente en el caserío Paso de la torre (en Rozo), cerca de la ciénaga Guadatilto.

con $0 \leq t \leq 17,2$. Para el meandro de la figura 6.5

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos\left(\frac{52,52\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{15,5}\right)\right) ds, \\ y(t) &= \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{52,52\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{15,5}\right)\right) ds, \end{aligned} \quad (6.3)$$

con $0 \leq t \leq 15,5$. Para el meandro de la figura 6.6

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos\left(\frac{57,13\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{17,6}\right)\right) ds, \\ y(t) &= \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{57,13\pi}{180} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{17,6}\right)\right) ds, \end{aligned} \quad (6.4)$$

con $0 \leq t \leq 17,6$.

6.2. Segundo procedimiento

Este segundo método es un poco más elaborado, se desarrolló en MATLAB; consisten en técnicas de pixelado para calcular la curva media de un río.

```
%Programa para encontrar la trayectoria de un río en base a una
foto a color

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Cargar la imagen %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear;clc;close;
cauca1=imread('cauca3.jpg'); % cargar la imagen
cauca=imrotate(cauca1,90);
imshow(cauca)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Establecer el río %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

title('Delinee la trayectoria del rio')
fprintf('Delinee la trayectoria del rio para establecer la intensidad su color \n')
c=improfile ; %para establecer valor promedio de intensidad
% Valores promedios de los colores en el rio
Rojomax=max(c(:,1,1)) ;
Rojomin=min(c(:,1,1)) ;
Verdemax=max(c(:,1,2)) ;
Verdemin=min(c(:,1,2)) ;
Azulmax=max(c(:,1,3)) ;
Azulmin=min(c(:,1,3)) ;

[m n p]=size(cauca) ;
posiciones=zeros(m,n);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DATOS DE ENTRADA (Resolución) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

escala=5 ;%Establezca la escala de pixel/medida
fprintf('Usted escogio una escala de %1d pixeles por unidad
de longitud \n',escala);
```

```

%%%%%%%%%%%%%% Seleccionando puntos del río %%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:m % barrido or cada pixel horizontal
    for j=1:n % barrido or cada pixel vertical
        if( ( Rojomin  <= cauca(i,j,1) )
            && ( cauca(i,j,1) <= Rojomax )
            && ...
            ( Verdemin <= cauca(i,j,2) )
            && ( cauca(i,j,2) <= Verdemax )
            && ...
            ( Azulmin  <= cauca(i,j,3) )
            && ( cauca(i,j,3) <= Azulmax ) )

            trayectoria(i,j)=0;
            posiciones(i,j)=1;
        else
            trayectoria(i,j)=225;
        end
    end
end

imshow(trayectoria)
title('Los puntos extraídos del río');
pause
close % para cerrar la imagen del rio y alistar para las
      trayectorias

%%%%%%%%%%%%%% Cálculo de trayecto %%%%%%%%%%%%%%%

q=0; %contador

for (x=1:escala:m)
    decision=any(posiciones(x,:)); %vector cada pixel
    q=q+1;
    if (decision==1)
        lugares=find(posiciones(x,:)); % encuentra las posiciones
    end
end

```

```

                                componentes no nulas
[nada,tamlugares]=size(lugares);
u=floor(tamlugares/2);
peso=zeros(1,tamlugares);
cont=1;
for k=1:u
    peso(lugares(k))=cont;
    peso(lugares(k-1+u))=cont;
    cont=cont+1;
end
end
[maximo,punto] = max(peso); %punto: la posicion
                                del maximo en x

X(q)= punto;
Y(q)= m-x;
end

%%%%% Estableciendo el sistema coordenado según la escala %%%%%

%m numero de filas = y
%n numero de columnas= x

min_x = 0 ;
max_x = n/escala;
min_y =0;
max_y = m/escala;

imagesc ( [min_x max_x], [min_y max_y],flipdim(cauca,1));
axis xy %Volteamos verticalmete la imagen

title(strcat('trayectoria del rio en escala de',
            num2str(escala),' pixeles/metro'));
text(1,1,strcat('Tamaño de la imagen ',
            num2str(m),' x ', num2str(n),' pixeles'));

hold on

```

```
pause
Xe = X /escala; % Puntos de la función
Ye = Y/escala; % Puntos de la función

plot( Xe , Ye,'r-*' , 'linewidth' , 2 )

%agregar

xlabel ('longitud (m)'); %Nombres de los ejes
ylabel ('longitud (m)');

return
```

Explicación:

El programa consiste en lo siguiente, primero, se carga la imagen, luego el programa la lee y la interpreta como una matriz de pixeles, después, se identifica el río, esto para que el algoritmo solo trabaje con los pixel de éste y no se desgaste con el resto, cuando ya los haya identificado, los pinta de color negro y el resto de blanco, esto con fin de ilustrar que efectivamente se está tomando lo que se quiere, el lecho del río, con esto, se extrae una matriz llamada posiciones, la cual consta se solo unos y ceros, y los unos están ubicados por donde pasa el río, luego, se crea una matriz de pesos, esta matriz tendrá entradas enteras, éstas dependen de la matriz posiciones, ya que lo que hace es tomar los puntos extremos de una misma fila y les asigna un valor, es decir, la posición 1 y n les asigna un valor, luego a la 2 y a la (n-2) y así sucesivamente, después toma el máximo en cada fila y los une, la cantidad de filas esta dada según la escala que previamente se ha definido.

Bajo este método, se puede encontrar la curva que pasa en medio de los meandros, vale la pena aclarar que no es válido para cualquier meandro, son solo los del tipo de la fotografía, de lo contrario el programa lanzará un mensaje de error y habrá que modificarse un poco y con esta curva eventualmente se puede hacer más matemática.

Es de resaltar que se está ante un problema demasiado complejo, y que la obtención de dicha curva es muy complicado y así, como estos dos métodos dan unas primeras aproximaciones existen otros más refinados mediante spli-

nes que no se abordarán en el trabajo, y por efectos prácticos se tendrá solo como referencia para el documento el primer método para la comprobación del modelo teórico.

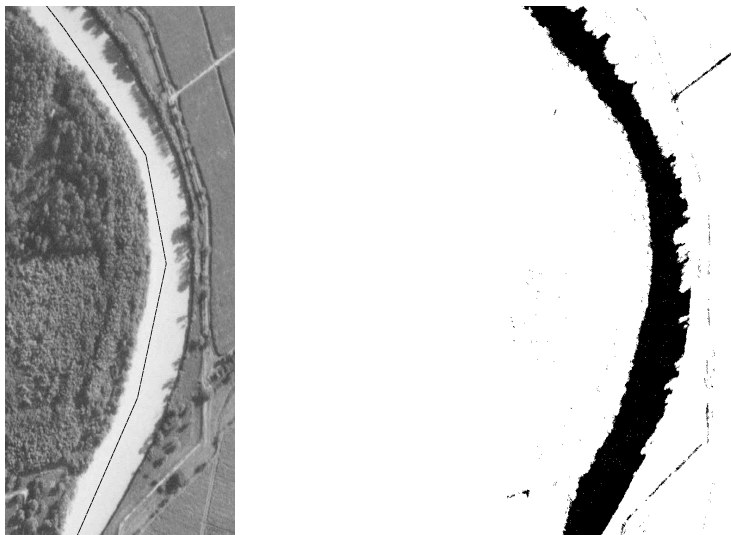


Figura 6.7: Opcion delinear el río (derecha), la trayectoria del río en sólo blanco y negro (derecha).

6.3. Ficha técnica de las fotografías

Cliente: C.V.C.

Vuelo: FAL - 461

Faja: 32

Fecha de toma: septiembre de 2007

Cámara: RMK A 15/23

Distancia focal: 152.909 mm

Contrato: C.V.C. 0013-2006

Zona: Valle del Cauca

Número de fotos: 43

Escala promedio: 1:25.950

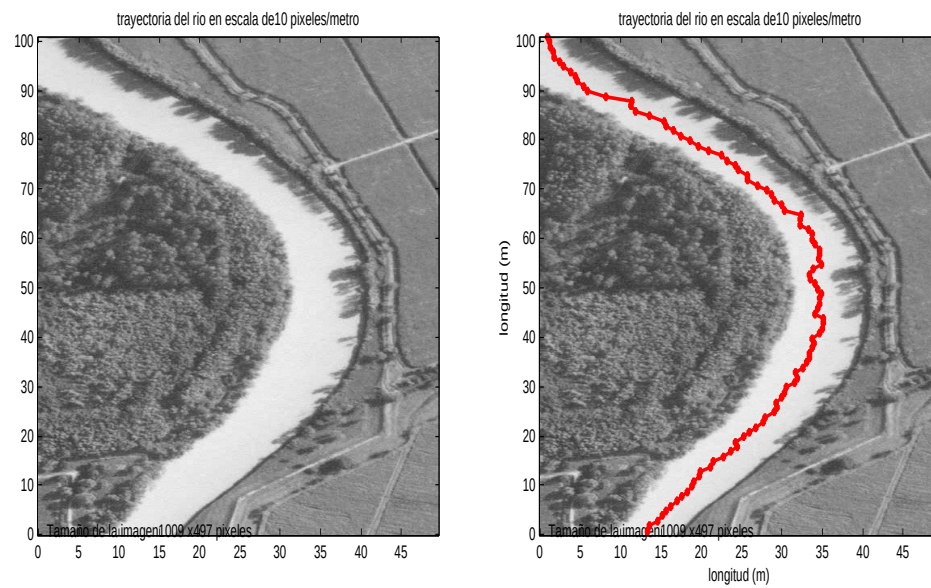


Figura 6.8: Imagen del meandro escalada (izquierda) e imagen del trazo de la curva que pasa por la mitad del meandro (derecha).

Capítulo 7

Conclusiones

Es bastante interesante que el fenómeno de la creación de meandros parta de un modelo aleatorio, y termine sólo dependiendo de dos aspectos que resultan ser claves en su modelación; el primero es el ángulo mayor que registre un punto sobre el meandro entre la recta tangente y el eje x , y el segundo, la longitud del meandro. Sin embargo lo que resulta más asombroso es que mediante primeras aproximaciones, cuyos datos, fueron tomados mediante instrumentos caseros, arrojen como resultado las figuras 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6 en las cuales se pueda apreciar la complejidad de la naturaleza, a su vez, su simplicidad y mostrando, que sin duda, la curva seno-generada se asemeja muy bien a las curvas descritas por los ríos, en particular, al río Cauca, en varios de sus meandros.

Saliéndose un poco de tema, otro resultado importante, pero que también tiene que ver con la invariabilidad, es la sinuosidad, ya que en la ecuación (5.28), se muestra que dicho término está únicamente determinado, de nuevo, por el ángulo mayor que registra un punto sobre el meandro entre la curva tangente y el eje x , lo que da pie a afirmar que los meandros están caracterizados principalmente por su ángulo de mayor amplitud, es decir, dependiendo de dicho ángulo así mismo será la forma del meandro.

7.1. Créditos

Las imágenes que aparecen en la figura 2.6 fueron tomadas de Wikipedia y las vistas en las figuras 1.1 y 1.2 fueron tomadas de [8]. Los programas utilizados fueron: MuPAD Pro 4.0, MATLAB R2010b, GeoGebra y Power-

Point.

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. y Stegun, I. 1972, *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, Washington, DC.
- [2] Adams, J. 1996, *Mathematics in nature*, University Prss, Hyderabad.
- [3] Apostol, T. 1981, *Análisis matemático*, segunda edición. Reverté.
- [4] Arnol'd, V. 1989, *Mathematical methods of classical mechanics*, segunda edición. Springer - Verlang.
- [5] Arnol'd, V. 1992, *Ordinary differential equation*. Springer - Textbook.
- [6] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [7] Leopold, L. B. y Langbein, W. B., 1966, *River Meanders - Theory of Minimum Variance*: U. S. Geological Servey Profesional Paper 422-H.
- [8] Movshovitz-Hadar, N. y Shmukler, A. 2006, *River meandering and a mathematical model of this phenomenon*.
- [9] Schelling, H. V. 1964, *Most frequent particle path in a plane*: Transactions, American Geophysical Union 32: 222 - 226.
- [10] The virtual Luna Leopold Project. <https://eps.berkeley.edu/people/lunaleopold/>.