



**DUALIDAD ENTRE LAS CATEGORÍAS DE LOS
ESPACIOS TOPOLÓGICOS FUZZY Y LOS
SISTEMAS TOPOLÓGICOS FUZZY DESDE LA
ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS
MARCOS**

RAFAEL HERNÁNDEZ BOLAÑOS

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2023**

DUALIDAD ENTRE LAS CATEGORÍAS DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS FUZZY Y LOS SISTEMAS TOPOLÓGICOS FUZZY DESDE LA ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS MARCOS

Rafael Hernández Bolaños

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemático

Director:

Guillermo Ortiz Rico, Dr

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2023

*A la memoria de mi tío Jorge y mi tía Gladys,
quienes sé que estarían orgullos.
Sin ellos no sería la persona que soy.*

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mi mamá, mi hermana y mi sobrina Sarita, su enorme sacrificio, amor y compromiso durante estos años de carrera es una deuda que jamás podré saldar. A ellas pertenecen todos los logros que alcance en mi vida.

A mis amigos, que me salvaron en tantos momentos de depresión, tristeza y soledad; que me dieron tantos momentos felices; hicieron más grande mi familia.

A mis profesores, especialmente a mi director de trabajo de grado, Guillermo, por su paciencia, su dedicación y entrega. Soy mejor persona gracias a muchos de ellos.

Contenido

Agradecimientos.	II
Resumen.	V
Introducción.	VI
1. Preliminares	1
1.1. Retículos	1
1.2. Categorías	5
1.2.1. Ejemplos	8
1.2.2. Propiedades de los Funtores	8
1.3. Conexiones de Galois	9
1.4. De las conexiones de Galois a las adjunciones	15
1.4.1. Transformaciones Naturales	18
1.4.2. Funtores adjuntos.	21
1.5. Marcos (<i>Frames</i>).	24
2. Dualidad entre espacios topológicos y sistemas topológicos	26
2.1. Sistemas topológicos.	26
2.2. Funciones continuas.	27
2.3. Espacios Topológicos	30
2.4. Locales	34

3. FuzzyTopSys y FuzzyTop	39
3.1. Conclusiones	50

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta una reconstrucción detallada de la adjunción entre las categorías de los sistemas topológicos Fuzzy y los espacios topológicos Fuzzy, presentada en el 2015 por Janna [2]. Para ello, se realiza un estudio de nociones preliminares, tales como los retículos, los marcos, conceptos generales de teoría de categorías y adjunciones. Todo lo anterior con el objetivo de que el documento sea autocontenido. Se hace uso de la teoría de Galois para hacer un acercamiento más intuitivo al concepto de adjunción, el cual es clave durante todo el trabajo, posteriormente se definen las categorías estudiadas y se obtienen sus relaciones funtoriales de una manera más detallada que la descrita por Vickers en 1989 [1], para finalmente hacer la extensión a los conjuntos Fuzzy.

Palabras Clave.

Retículos, meet, join, marcos, espacio topológico, categorías, transformación natural, conexión de Galois, adjunción, funtor, función continua, conjuntos fuzzy, sistema topológico.

Introducción

Los conjuntos Fuzzy, introducidos por Zadeh en 1965 [8], representan conceptos donde la pertenencia no se limita a dos valores discretos (0 para no pertenece y 1 para pertenece). Es natural preguntarse si estos conjuntos pueden generar topologías. Este concepto fue introducido por Chang [13]. En 1992, Chakraborty y Ahsannullah [12] introdujeron el concepto de topología Fuzzy sobre conjuntos Fuzzy. Poco antes, en 1989, Vickers [1] definió los sistemas topológicos como herramientas para abordar lógicas geométricas, lo que llevó al resultado clásico de la existencia de una adjunción entre sistemas topológicos y espacios topológicos.

Este trabajo se aproxima a la definición de adjunción desde las conexiones de Galois, lo que resulta muy didáctico e intuitivo para el lector, incluso si no está familiarizado con este último concepto. Se presentan nociones básicas de teoría de categorías y se discuten varios ejemplos que demuestran que el uso de categorías y las relaciones que surgen de ellas son frecuentes en diversas áreas de las matemáticas.

En el segundo capítulo, se lleva a cabo una reconstrucción detallada de la prueba propuesta por Vickers [1] sobre la adjunción entre la categoría de los sistemas topológicos y la categoría opuesta de los marcos, los locales. Además, se reconstruye la prueba de la adjunción entre las categorías de los sistemas topológicos y los espacios topológicos, lo que permite concluir la adjunción entre los espacios topológicos y los locales mediante composición.

Finalmente, en el tercer capítulo, se realiza una reconstrucción de la demostración

de la adjunción entre los espacios topológicos Fuzzy y los locales, tal como se propuso en la investigación de Jana y Chakraborty [2] en 2015. En contraste con su demostración, este documento propone estas adjunciones como extensiones de los casos clásicos, lo que facilita un acercamiento más intuitivo al resultado.

Capítulo 1

Preliminares

Con el fin de formar un lenguaje común, se introducirán unos preliminares básicos que comprenden nociones de álgebra, topología, teoría de categorías y lógica Fuzzy.

1.1. Retículos

Definición 1.1. Un **conjunto parcialmente ordenado** (*poset* por su nombre en inglés **partial ordered set**) es una pareja $(X, \leq)$, donde X es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria sobre X que satisface las siguientes condiciones:

1. propiedad reflexiva: $\forall x \in X : x \leq x$;
2. propiedad antisimétrica: $\forall x, y \in X : \text{si } x \leq y \text{ y } y \leq x, \text{ entonces } x = y$;
3. propiedad transitiva: $\forall x, y, z \in X : \text{si } x \leq y \text{ y } y \leq z, \text{ entonces } x \leq z$.

Cuando el orden de un poset sea suficientemente claro según el contexto, se denotará X en lugar de $(X, \leq)$.

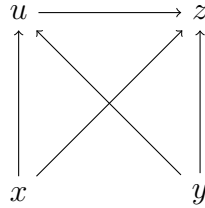
El **opuesto** de un poset $(X, \leq)$ es el poset $(X, \geq)$ donde $\geq$ es el orden original invertido. Este poset se denotará con frecuencia como X^{op} .

En ocasiones se usarán las notaciones $x < y$ cuando $x \leq y$ y $x \neq y$. Análogamente, $x > y$ si $x \geq y$ y $x \neq y$.

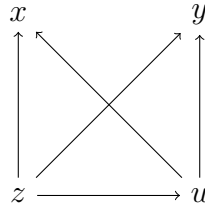
Definición 1.2. Sea X un poset. Si existe, el elemento mínimo de X se llamará **cero** de X y se denotará simplemente como 0. De manera similar, si existe, el elemento máximo de X se llamará el **uno** y se denotará simplemente como 1.

Definición 1.3. Sea P un poset, $u \in P$ es la menor de las cotas superiores de $x, y \in P$ si se tiene que $x \leq u$ y $y \leq u$, y para todo z que cumpla que $x \leq z$ y $y \leq z$ se debe tener que $u \leq z$.

La propiedad anterior se puede expresar con el siguiente diagrama



De manera análoga definimos la mayor cota inferior. Sea P un poset, $u \in P$ es la mayor de las cotas inferiores de $x, y \in P$ si se tiene que $u \leq x$ y $u \leq y$, y para todo z que cumpla que $z \leq x$ y $z \leq y$ se debe tener que $z \leq u$.



Definición 1.4. Sea P un poset, $X \subseteq P$ y $y \in P$, entonces y será un *meet* para X si y solo si:

- y es una cota inferior de X , es decir si $x \in X$ entonces $y \leq x$ y,
- si z es cualquier otra cota inferior para X entonces $z \leq y$,
- en ese caso se denotará $y = \bigwedge X$.

Y análogamente, sea P un poset, $X \subseteq P$ y $y \in P$, entonces y será un *join* para X sí y solo sí:

- y es una cota superior de X , es decir si $x \in X$ entonces $y \geq x$, y
- si z es cualquier otra cota superior de X entonces $z \geq y$,
- en ese caso se denotará $y = \bigvee X$.

El siguiente resultado se desprende naturalmente de la anterior definición y del concepto de retículo opuesto.

Sea P un poset, $X \subseteq P$ y $y \in P$. Entonces y es un join de X si y solo sí y es un meet de X en P^{op} .

Definición 1.5. Sea X un poset.

1. X es un (*meet*)-*semiretículo* si para todo $x, y \in X$, existe $x \wedge y \in X$. Si además, para todo $x, y \in X$ existe $x \vee y \in X$, X es un *retículo completo*
2. Si cada subconjunto de X tiene supremo e ínfimo, X será llamado un **retículo completo**.

Note que todo retículo completo tiene *uno*, $1 = \bigwedge \emptyset$ y *cero* $0 = \bigvee \emptyset$. Un retículo que tiene tanto uno como cero, se llama un **retículo acotado**.

Definición 1.6. Un retículo L es **distributivo** si para todo $a, b, c \in L$:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Note que lo anterior es equivalente a

$$\forall a, b, c \in L : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

La definición anterior nos permite ver la relación entre los retículos y la topología, lo cual será tema de constante discusión en el presente trabajo.

Ejemplo 1.7. Considere un espacio topológico $(X, \Omega(X))$ donde $\Omega(X)$ es el conjunto de todos los abiertos de X . Entonces $\Omega(X)$, ordenado por inclusión, es un retículo distributivo completo dado que para todo $A, B, U_i \in \Omega(X) (i \in I)$ tenemos :

$$\bigvee_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} U_i, A \wedge B = A \cap B \text{ y } \bigwedge_{i \in I} U_i = \text{int} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)$$

De ahora en adelante, dado un espacio topológico, $(X, \Omega(X))$ se discutirá únicamente la estructura reticular de $\Omega(X)$.

Ejemplo 1.8. Sea U un conjunto y $\mathcal{P}(U)$ el conjunto de sus subconjuntos. En $\mathcal{P}(U)$ los meets son intersecciones y los joins son uniones, de donde, $\mathcal{P}(U)$ es un retículo con $\subseteq$ como relación de orden.

Primero, se verifica la existencia de los meets. Si cada X_i es un subconjunto de U , entonces

$$\bigcap_i X_i \subseteq X_i \text{ para todo } i.$$

Si $Y \subseteq X_i$ para todo i y $y \in Y$, entonces $y \in X_i$ para todo i y de ahí que $y \in \bigcap_i X_i$. De donde

$$Y \subseteq \bigcap_i X_i$$

Para los joins, $X_i \subseteq \bigcup_i X_i$ para todo i . Si $X_i \subseteq Y$ para todo i y $x \in \bigcup_i X_i$, entonces $x \in X_i$ para algún i y de ahí se tiene que $x \in Y$. De donde $\bigcup_i X_i \subseteq Y$.

De lo anterior y de las leyes de distribución bien conocidas en teoría de conjuntos, se concluye que dado un conjunto U , su conjunto potencia $\mathcal{P}(U)$ es un retículo distributivo completo.

Dado que uno de los objetivos de esta sección es dar nociones básicas que acerquen a la teoría de categorías, es conveniente hacer una comparación de la terminología empleada:

$$\begin{aligned}
\text{Poset } P &= \text{Categoría } P \\
\text{Elementos de } P &= \text{Objetos de } P \\
x \wedge y &= \text{Producto} \\
x \vee y &= \text{Coproducto} \\
x \leq y &= \text{morfismo } f : x \longrightarrow y
\end{aligned}$$

Los posets ofrecen una muy buena intuición de lo que es una categoría con objetos y relaciones muy cercanas, pero, naturalmente, tienen algunas diferencias.

- **Los posets son pequeños:** Un poset tiene un conjunto de elementos, pero en general, una categoría puede tener *más* elementos. Por ejemplo, la categoría **Set** de los conjuntos es muy importante y utilizada, pero no existe tal cosa como el conjunto de todos los conjuntos.
- **Los posets son finos:** para los elementos x, y del poset P , puede observarse que

$$x \leq y \iff x \longrightarrow y$$

es decir que entre los elementos x y y pueden haber cero o un morfismo. Sin embargo, en una categoría C puede existir un conjunto arbitrario de morfismos entre dos objetos. Escribimos

$$\text{hom}(A, B)$$

para denotar la familia de morfismos de A a B . La propiedad reflexiva de los posets será equivalente a la existencia de un morfismo identidad y la propiedad transitiva a la composición de morfismos.

1.2. Categorías

Definición 1.9. Una **categoría** es una cuádrupla $\mathbf{A} = (\mathcal{O}, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ que consta de lo siguiente:

1. Una clase $\mathcal{O}$, cuyos miembros son llamados **objetos de $\mathbf{C}$** ,
2. para cada par (A, B) de objetos de $\mathbf{C}$, un conjunto $hom(A, B)$, cuyos miembros son **morfismos en $\mathbf{C}$ de A a B** . (La afirmación “ $f \in hom(A, B)$ ” se expresa de manera gráfica usando flechas, es decir, $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo”, o bien, “ $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo”,
3. para cada A objeto de $\mathbf{C}$, un morfismo $A \xrightarrow{id_A} A$ llamado la identidad en $\mathbf{C}$,
4. una ley de composición que asocia a todo par de morfismos, $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$, un morfismo $A \xrightarrow{g \circ f} C$, con las siguientes condiciones:
 - a) la composición es asociativa,
 - b) las identidades en $\mathbf{C}$, actúan como identidades en la composición, es decir, para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ tenemos que $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$,

Cuando haya espacio a ambigüedades, se denotará la clase de objetos de la categoría $\mathbf{A}$ como $Ob\mathbf{A}$.

Ejemplo 1.10. Los siguientes son ejemplos usuales de categorías

1. La categoría **Set** de los conjuntos, donde $\mathcal{O}$ es la clase de todos los conjuntos y $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B .
2. La categoría **Gr** de los grupos, donde $\mathcal{O}$ es la clase de todos los grupos y $hom(A, B)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de grupos de A en B .
3. La categoría **Vec_F** de todos los espacios vectoriales sobre un campo F , donde $\mathcal{O}$ es la clase de todos los espacios vectoriales sobre F y $hom(A, B)$ es el conjunto de transformaciones lineales de A en B .
4. La categoría **Poset** de los conjuntos parcialmente ordenados, donde $\mathcal{O}$ es la clase de todos los conjuntos parcialmente ordenados y $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones monótonas de A en B , es decir, funciones $f : P \longrightarrow Q$ que satisfacen

$$p \leq q \Rightarrow f(p) \leq f(q)$$

5. Sea G un grafo orientado, él define una categoría donde $\mathcal{O}$ es el conjunto de vértices del grafo y $hom(A, B)$ es la arista (orientada) que conecta los vértices A y B .
6. La categoría **Top** de los espacios topológicos, donde $\mathcal{O}$ es la clase de todos los espacios topológicos y $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de A en B .
7. Considere una lógica deductiva. Puede definirse una categoría donde los objetos son las fórmulas bien formadas ($wffs$). Existe un morfismo de una wff α en la wff β si y solo si dado α puede deducirse β .
8. Sea F un campo. La categoría **Matr** $_F$ de matrices sobre el campo F . Los objetos son los números enteros positivos. Dados $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $hom(m, n)$ es el conjunto de todas las matrices $n \times m$ sobre F , con la multiplicación de matrices como la composición de morfismos. Se invierten las posiciones de n y m porque si $M \in hom(m, n)$ y $N \in hom(n, k)$, el producto NM tiene dimensión $k \times m$, como es necesario. A esta categoría se le nombra por sus morfismos, no por sus objetos.

En teoría de categorías, los morfismos tienen un rol más importante que los objetos. Es por eso que, tomando un punto de vista más amplio, se pueden ver a las categorías como objetos con estructura. Los *morfismos* entre ellas, que preservan la estructura, se llaman *funtores*.

Definición 1.11. Si **A** y **B** son categorías, entonces un **funtor covariante** de **A** a **B** es una aplicación que asigna a cada $A \in Ob\mathbf{A}$ un $F(A) \in Ob\mathbf{B}$, y a cada morfismo $A \xrightarrow{f} A'$ en **A** un morfismo $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$ en **B**, de tal manera que:

1. F preserva la composición, es decir, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, siempre que f y g estén definidas, y
2. F preserva los morfismos identidad, es decir, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

De manera análoga, un **funtor contravariante** de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ es una aplicación que asigna a cada $A \in Ob\mathbf{A}$ un $F(A) \in Ob\mathbf{B}$, y a cada morfismo $A \xrightarrow{f} A'$ en $\mathbf{A}$ un morfismo $F(A') \xrightarrow{F(f)} F(A)$ en $\mathbf{B}$.

Los funtores F de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ serán denotados como $F : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{F} B$. También se usará la notación reducida FA y Ff para referirse a $F(A)$ y $F(f)$ respectivamente.

1.2.1. Ejemplos

1. Sea $\mathbf{A}$ una categoría, se define el **funtor identidad** $id_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ como:

$$id_{\mathbf{A}}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B.$$

2. Considere $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, la categoría de los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Ahora definase $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ como el funtor que envía a cualquier espacio vectorial V al conjunto UV de vectores de V . Es decir, U olvida toda la información de espacio vectorial, con lo cual vemos a UV únicamente como conjunto.
3. Para toda categoría $\mathbf{C}$ y todo objeto A de $\mathbf{C}$, existe el funtor covariante, **hom-funtor**, $hom(A, -) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definido de la siguiente manera:

$$hom(A, -)(B \xrightarrow{f} C) = hom(A, B) \xrightarrow{hom(A, f)} hom(A, C),$$

$$\text{donde } hom(A, f)(g) = f \circ g$$

Definición 1.12. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$, en una categoría, es un **isomorfismo** si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$, de tal manera que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Al morfismo g se le llama **inverso** de f .

Cuando existe un isomorfismo entre dos objetos de una categoría, diremos que estos son **isomorfos**.

1.2.2. Propiedades de los Funtores

A continuación se discuten algunas propiedades que serán útiles más adelante.

Proposición 1.13. Todo funtor $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ preserva isomorfismos, es decir, siempre que $A \xrightarrow{k} A'$ sea un isomorfismo en $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}(k)$ será un isomorfismo en $\mathbf{B}$.

Demostración. $\mathbf{F}(k) \circ \mathbf{F}(k^{-1}) = \mathbf{F}(k \circ k^{-1}) = \mathbf{F}(id_{A'}) = id_{\mathbf{F}A'}$. La implicación opuesta se demuestra de manera similar. □

Observe que, a pesar de tener una demostración simple, la propiedad anterior tiene consecuencias importantes. En particular, puede ser usada para demostrar que ciertos objetos de alguna categoría *no son isomorfos*. Por ejemplo, el funtor del grupo fundamental puede ser usado para demostrar que entre ciertos espacios topológicos no existe un homeomorfismo (isomorfismo en **Top**) al demostrar que sus grupos fundamentales no son isomorfos.

Proposición 1.14. Si $\mathbf{F} : A \longrightarrow B$ y $\mathbf{G} : B \longrightarrow C$ son funtores, entonces $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ es un funtor.

Definición 1.15. Un funtor $\mathbf{F} : A \longrightarrow B$ se llama **isomorfismo** siempre que exista un funtor $\mathbf{G} : B \longrightarrow A$ de tal manera que $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = id_A$ y, de la misma manera $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = id_B$.

Así mismo, siempre que exista un isomorfismo entre dos categorías, estas se dirán isomorfas.

Observe que el funtor $\mathbf{G}$ está determinado únicamente por $\mathbf{F}$, por lo cual se le denota $\mathbf{F}^{-1}$. Además, *ser isomorfo a* conforma una clase de equivalencia, por lo cual, las categorías isomorfas son, en esencia, iguales.

1.3. Conexiones de Galois

Dado que este documento presta especial atención a probar la existencia de algunos funtores adjuntos, es preciso motivar la definición de adjunción considerando el caso de funtores adjuntos entre posets.

Definición 1.16. Sean $(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$ y $(\mathcal{Q}, \leq_{\mathcal{Q}})$ posets, y considere las siguientes dos funciones $*$: $\mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : *$, las cuales se denotarán como $p \mapsto p^*$ y $q \mapsto q^*$ para todo $p \in \mathcal{P}$

y $q \in \mathcal{Q}$. Este par de funciones se llama una *conexión de Galois* si, para todo $p \in \mathcal{P}$ y $q \in \mathcal{Q}$, se cumple que

$$p \leq_{\mathcal{P}} q^* \iff q \leq_{\mathcal{Q}} p^*.$$

Proposición 1.17. sea $* : \mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : *$ una conexión de Galois. para todo elemento x de $\mathcal{P}$ o de $\mathcal{Q}$ se usará la notación $x^{**} := (x^*)^*$ y $x^{***} := (x^{**})^*$.

1. Para todo $p \in \mathcal{P}$ y $q \in \mathcal{Q}$ se tiene que

$$p \leq_{\mathcal{P}} p^{**} \quad \text{y} \quad q \leq_{\mathcal{Q}} q^{**}.$$

2. Para todo $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ y para todo $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ se cumple que

$$p_1 \leq_{\mathcal{P}} p_2 \implies p_2^* \leq_{\mathcal{Q}} p_1^* \quad \text{y} \quad q_1 \leq_{\mathcal{Q}} q_2 \implies q_2^* \leq_{\mathcal{P}} q_1^*$$

3. Para todo $p \in \mathcal{P}$ y $q \in \mathcal{Q}$ se tiene que

$$p^{***} = p^* \quad \text{y} \quad q^{***} = q^*.$$

Las pruebas de estas proposiciones pueden ser encontradas en [6].

El siguiente teorema ilustra muy bien el comportamiento de las conexiones de Galois, además muestra que son casi una biyección, que puede ajustarse para que lo sea.

Teorema 1.18. Teorema Fundamental de las Conexiones de Galois. Sea $* : \mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : *$ una conexión de Galois. Un elemento $p \in \mathcal{P}$ (respectivamente $q \in \mathcal{Q}$) se dirá que es $**$ -cerrado si $p = p^{**}$ (respectivamente $q = q^{**}$). Las conexiones de Galois se restringen a una biyección entre los subposets de elementos $**$ -cerrados. Dicha biyección revierte el orden.

Demostración. Sean $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{Q}$ las imágenes de las funciones $* : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ y $* : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ respectivamente. Se quiere probar que la restricción de la conexión a estos subconjuntos, es decir

$$* : \mathcal{Q}^* \longleftrightarrow \mathcal{P}^*$$

es una biyección. Para lo cual, considere $p \in \mathcal{Q}^*$, es decir $p = q^*$ para algún $q \in \mathcal{Q}$. Entonces, por la propiedad 3 de las conexiones de Galois, se tiene que

$$(p)^{**} = (q^*)^{**} \implies p^{**} = q^{***} \implies p^{**} = q^* \implies p^{**} = p.$$

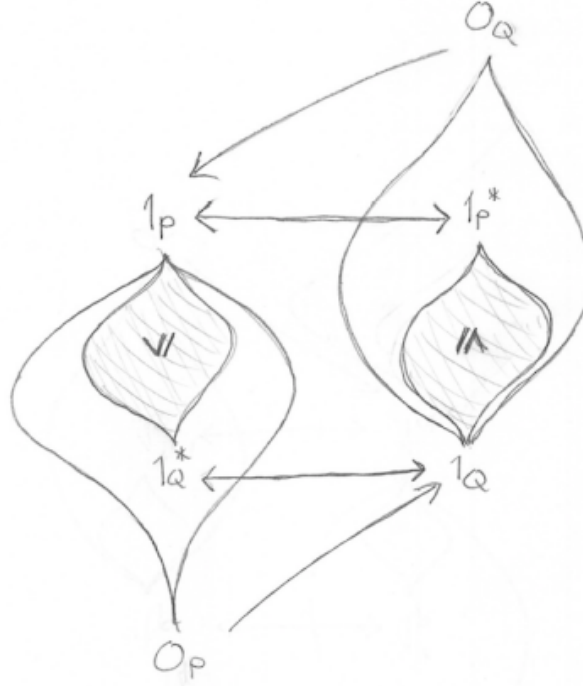
lo que quiere decir que la función $*$: $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ es invertible y por tanto biyectiva. De manera análoga se tiene que para $q \in \mathcal{P}^*$, $q = q^{**}$. La biyección revierte el orden por la propiedad 2. Como ya se vio, todos los elementos de $\mathcal{Q}^*$ son $**$ -cerrados. Si $p \in \mathcal{P}$ es $**$ -cerrado, entonces

$$p = p^{**} \implies p = (p^*)^*$$

de donde $p \in \mathcal{Q}^*$, lo cual demuestra que la biyección existe únicamente entre los subposets de objetos $**$ -cerrados.

□

Con el siguiente diagrama, en [6], se ilustra este comportamiento de (anti) isomorfismo.



Note que los 1 (top) de cada poset son elementos $**$ -cerrados, ya que por la propiedad 2, $1_P \leq 1_P^{**}$, pero para todo $x \in \mathcal{P}$, se tiene que $x \leq 1_P$, en particular, $1_P^{**} \leq 1_P$ y por antisimetría, obtenemos la igualdad. Análogamente se prueba que los 0 (bottom) no son $**$ -cerrados necesariamente. Pues $0_P \leq 0_P^{**}$ y por la propiedad universal del bottom $0_P \leq x$ para cualquier $x \in \mathcal{P}$.

Como consecuencia de que el isomorfismo revierte el orden, tenemos que $1_P = 0_Q^*$ y $1_Q = 0_P^*$. Dado que, por la definición de conexión de Galois se tiene que

$$0_P \leq_P q^* \iff q \leq_Q 0_P^*.$$

Dado que el lado izquierdo siempre es cierto, por la propiedad universal del bottom, entonces el derecho también lo es. Es decir que $q \leq_Q 0_P^*$ para cualquier $q \in \mathcal{Q}$, por tanto es el top de $\mathcal{Q}$.

La siguiente proposición generaliza el resultado anterior.

Proposición 1.19. Las conexiones de Galois transforman joins en meets. Es decir, si

$* : \mathcal{P} \rightleftharpoons \mathcal{Q} : *$ es una conexión de Galois, $S \subseteq \mathcal{P}$ y $T \subseteq \mathcal{Q}$, entonces

$$(\bigvee_{\mathcal{P}} S)^* = \bigwedge_{\mathcal{Q}} S^* \text{ y } (\bigvee_{\mathcal{Q}} T)^* = \bigwedge_{\mathcal{P}} T^*.$$

Demostración. Dado que $* : \mathcal{P} \rightleftharpoons \mathcal{Q} : *$ es una conexión de Galois, las siguientes equivalencias se cumplen:

$$x \in (\bigvee_{\mathcal{P}} S)^* \iff \forall (k \leq_{\mathcal{P}} S), k \leq_{\mathcal{P}} \{x\}^* \iff \forall (k \leq_{\mathcal{P}} S), x \in k^* \iff x \in \bigwedge_{\mathcal{Q}} S^*$$

□

De la prueba anterior, se sigue que el meet arbitrario de objetos $**$ -cerrados, siempre que exista, es $**$ -cerrado. Basta con tomar $p_i = q_i^*$ y reconstruir el argumento anterior, dado que si $p \in \mathcal{P}$ es $**$ -cerrado, entonces existe $q \in \mathcal{Q}$ tal que $p = q^*$.

Algunos de los ejemplos de conexiones de Galois más famosos, vienen de relaciones simples entre dos conjuntos. Esto motiva el estudio de las conexiones de Galois entre retículos booleanos donde el orden está dado por la inclusión.

Sean U, V conjuntos y $\sim \subseteq U \times V$ una relación entre U y V . Se escribe $u \sim v$ si u está relacionado con v , entonces para $S \in 2^U$ y $T \in 2^V$ se define:

$$\begin{aligned} S^\sim &:= \{v \in V : \forall s \in S, s \sim v\} \in 2^V, \\ T^\sim &:= \{u \in U : \forall t \in T, u \sim t\} \in 2^U. \end{aligned}$$

Proposición 1.20. El par de funciones $\sim : 2^U \rightleftharpoons 2^V : \sim$ es una conexión de Galois.

Demostración. Sean $S \subseteq 2^U$ y $T \subseteq 2^V$, tomando la inclusión como orden, se tiene que

$$\begin{aligned} S \subseteq T^\sim &\iff \forall s \in S, s \in T^\sim \\ &\iff \forall s \in S, \forall t \in T, s \sim t \\ &\iff \forall t \in T, \forall s \in S, s \sim t \\ &\iff \forall t \in T, t \in S^\sim \\ &\iff T \subseteq S^\sim. \end{aligned}$$

□

Además puede probarse que cualquier conexión de Galois construida de esta manera, viene de una *única relación*. De la proposición anterior, se tiene que $u \sim v$ si y solo si $\{u\} \subseteq \{v\}^\sim$ si y solo si $\{v\} \subseteq \{u\}^\sim$, es decir que $R = \{(u, v) \in S \times T \mid v \in \{u\}^\sim\}$. Sea $\vdash$ otra relación de tal manera que $R' = \{(u, v) \in S \times T \mid v \in \{u\}^\perp\}$. Note que si $(u, v) \in R - R'$, entonces $v \in \{u\}^\sim - \{u\}^\perp$. Es decir que relaciones diferentes, inducen conexiones de Galois diferentes.

Ejemplo 1.21. Complemento ortogonal. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensión finita con producto interno, y sea $S \subseteq V$ un subespacio vectorial de V . Se define el *complemento ortogonal* de S como

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Note que el complemento ortogonal de S es un subespacio de V

- $0 \in S^\perp$, pues $\langle 0, s \rangle = 0$ para todo $s \in S$.
- Sean $v, w \in S^\perp$. Para cada $s \in S$, se tiene que $\langle v, s \rangle = 0$ y $\langle w, s \rangle = 0$, con lo que $\langle v + w, s \rangle = \langle v, s \rangle + \langle w, s \rangle = 0 + 0 = 0$. Luego, $v + w \in S^\perp$.
- Si $v \in S^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para cada $s \in S$ vale $\langle \lambda v, s \rangle = \lambda \langle v, s \rangle = \lambda 0 = 0$. Luego, $\lambda v \in S^\perp$.

El proceso de tomar el complemento ortogonal de subespacios vectoriales (y hacerlo nuevamente) genera una conexión de Galois. Sean U, W dos subespacios vectoriales. Para hacer una verificación de la definición de conexión de Galois, es necesario probar que $U \subseteq W^\perp$ si y solo si $W \subseteq U^\perp$.

Lo primero que debe mostrarse es que si $U \subseteq W^\perp$ entonces, $W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Para esto, note que si $m \in W^{\perp\perp}$, entonces para todo $k \in W^\perp$, $\langle m, k \rangle = 0$. En particular, para todo $k' \in U$, $\langle m, k' \rangle = 0$, lo cual quiere decir que $m \in U^\perp$, por lo cual $W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Además, es claro $W \subseteq W^{\perp\perp}$, por lo cual $W \subseteq U^\perp$ y queda verificada la condición.

Ahora, para mostrar que los objetos de $S^\perp$ son $\perp\perp$ -cerrados, por definición se tiene que $(S^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \langle v, t \rangle = 0 \quad \forall t \in S^\perp\}$. Sea $s \in S$. Para cada $t \in S^\perp$ se tiene que $\langle s, t \rangle = \overline{\langle t, s \rangle} = 0$, de donde se deduce que $s \in (S^\perp)^\perp$, por lo tanto $S \subseteq (S^\perp)^\perp$. Dado

que $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp)$, entonces $\dim((S^\perp)^\perp) = \dim(S)$, de donde se tiene la igualdad $S = (S^\perp)^\perp$.

1.4. De las conexiones de Galois a las adjunciones

Como se ha discutido antes, existe una relación natural entre la teoría de categorías y los posets, de ahí que se tenga un similitud entre las conexiones de Galois (relaciones entre posets) y las adjunciones (relaciones entre categorías).

Definición 1.22. Sean $(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$ y $(\mathcal{Q}, \leq_{\mathcal{Q}})$ posets. Un par de funciones $L : \mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : R$ es una *adjunción de posets* si para todo $p \in \mathcal{P}$ y $q \in \mathcal{Q}$ se tiene que

$$p \leq_{\mathcal{P}} R(q) \iff L(p) \leq_{\mathcal{Q}} q$$

L y R son un par de funciones adjuntas, donde L es la adjunta izquierda de R , y R es la adjunta a derecha de L , esto se denota como $L \dashv R$.

La diferencia entre las conexiones de Galois y las funciones adjuntas está en que se revierte el orden de $\mathcal{Q}$, es decir, se define sobre $\mathcal{Q}^{op}$, que como se vio previamente, también es un poset sobre el conjunto $\mathcal{Q}$. Para $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$, se tiene

$$q_1 \leq_{\mathcal{Q}^{op}} q_2 \iff q_2 \leq_{\mathcal{Q}} q_1$$

Este cambio en la notación hace que las relaciones ya no sean simétricas, lo cual ocurre muy a menudo usando categorías generales, donde se usan parejas de funtores covariantes asimétricos. Las dos proposiciones siguientes, además de mostrar dos de las propiedades más importantes de las adjunciones de posets, ofrecen una buena intuición (pues son más débiles) de como serán las adjunciones entre categorías.

Proposición 1.23. Sea $L : \mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : R$ una adjunción de posets, cada una de las funciones adjuntas está determinada por la otra de manera única.

Demostración. Para probar que R determina de manera única a L , suponga que $L' : \mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : R$ es otra adjunción. Entonces, de la definición de adjunción se tiene que para todo $q \in \mathcal{Q}$

$$L(p) \leq_{\mathcal{Q}} q \iff p \leq_{\mathcal{P}} R(q) \iff L'(p) \leq_{\mathcal{Q}} q.$$

En particular, tomando $q = L(p)$,

$$L(p) \leq_{\mathcal{Q}} L(p) \implies L'(p) \leq_{\mathcal{Q}} L(p)$$

y tomando $q = L'(p)$, lo cual se puede hacer porque tanto L como L' son funciones adjuntas a izquierda, se tiene

$$L'(p) \leq_{\mathcal{Q}} L'(p) \implies L(p) \leq_{\mathcal{Q}} L'(p).$$

y por la antisimetría del orden de $\mathcal{Q}^{op}$, $L(p) = L'(p)$ y dado que, por la definición de adjunción, esta igualdad se mantiene para todo $p \in \mathcal{P}$, entonces $L = L'$, y así, R determina a L de manera única.

□

El siguiente teorema, muestra que los adjuntos a derecha preservan el meet, y los adjuntos a izquierda preservan el join. Pero primero, es necesario probar la existencia, es decir, si $\vee_{\mathcal{P}} S$ existe en $\mathcal{P}$, entonces $\vee_{\mathcal{Q}} L(S)$ existe en $\mathcal{Q}$.

Demostración. Suponga que existe $m = \vee_{\mathcal{P}} S \in \mathcal{P}$, entonces para todo $s \in S$, $s \leq m$. Dado que $L : \mathcal{P} \rightleftarrows \mathcal{Q} : L$ es una adjunción, entonces

$$s \leq_{\mathcal{P}} m \leq_{\mathcal{P}} R(q) \iff L(s) \leq_{\mathcal{Q}} L(m) \leq_{\mathcal{Q}} q$$

La relación se mantiene, porque si $R(q)$ es cota superior de S , entonces $m \leq R(q)$ porque es la menor de las cotas superiores. Entonces $L(s)$ está acotado para todo s , y para cualquier q que sea cota superior de $L(S)$, se tiene una cota superior menor. Como es claro, esta relación no puede mantenerse (en general) con el meet. Pues si $n = \wedge S$

$$n \leq_{\mathcal{P}} s \leq_{\mathcal{P}} R(q) \iff L(n) \leq_{\mathcal{Q}} L(s) \leq_{\mathcal{Q}} q$$

y eso no garantiza que dada otra cota k inferior para S , $L(k) \leq_{\mathcal{Q}} L(n)$. De manera análoga se prueba que la existencia de $\wedge_{\mathcal{Q}} T$ implica que $\wedge_{\mathcal{P}} R(T)$ existe. Para probar

que L preserva el join y que R preserva el meet, basta con tomar la proposición 1.19 ya que la adjunción es una conexión de Galois entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}^{op}$, entonces

$$\vee_{\mathcal{Q}^{op}} = \wedge_{\mathcal{Q}} \quad \text{y} \quad \wedge_{\mathcal{Q}^{op}} = \vee_{\mathcal{Q}}$$

de donde

$$L(\vee_{\mathcal{P}} S) = \vee_{\mathcal{Q}} L(S) \quad \text{y} \quad R(\wedge_{\mathcal{Q}} T) = \wedge_{\mathcal{P}} R(T)$$

□

Ejemplo 1.24. Sea $f : U \longrightarrow 2^V$ una función. Entonces para todo $S \in 2^U$, $T \in 2^V$, se definen

$$\begin{aligned} L_f(S) &:= \cup_{s \in S} f(s) \in 2^V, \\ R_f(T) &:= \{u \in U : f(u) \subseteq T\} \in 2^U. \end{aligned}$$

Entonces el par de funciones $L_f(S) : 2^U \rightleftharpoons 2^V : R_f(T)$ es una adjunción de retículos booleanos.

Note que para todo $S \in 2^U$ y $T \in 2^V$ se tiene que

$$\begin{aligned} S \subseteq R_f(T) &\iff \forall s \in S, s \in R_f(T) \\ &\iff \forall s \in S, f(s) \subseteq T \\ &\iff \cup_{s \in S} f(s) \subseteq T \\ &\iff L_f(S) \subseteq T \end{aligned}$$

y tal como en las conexiones de Galois, toda adjunción de este tipo surge de una relación única, que en este caso es la función $f : U \longrightarrow 2^V$.

La adjunción entre la imagen y la preimagen de una función es una de las más conocidas, además de ser un ejemplo muy ilustrativo de la estructura que se está construyendo. Para $S \in 2^U$ y $T \in 2^V$ se definen

$$\begin{aligned} f \star (S) &= \{f(s) : s \in S\}, \\ f^{-1}(T) &= \{u \in U : f(u) \in T\}. \end{aligned}$$

Del teorema anterior, se tiene que la imagen preserva uniones y la preimagen preserva intersecciones. Es un hecho bien conocido que la preimagen preserva uniones también, lo cual conduce a pensar que restringiendo la preimagen $f^{-1} : 2^V \rightarrow 2^U$ a una función $f^{-1} : V \rightarrow 2^U$ definiendo $f^{-1}(v) := f^{-1}(\{v\})$ para todo $v \in V$, dado que $f^{-1} = L_{f^{-1}}$, se obtiene otra adjunción, donde la preimagen ya no sería adjunto a derecha, sino a izquierda. Algunos autores denotan a este adjunto $f_!$ donde

$$f_!(S) = \{v \in V : f^{-1}(v) \subseteq S\}$$

en otras palabras, cada función $f : U \rightarrow V$ determina una tripla de adjuntos

$$f_* \dashv f^{-1} \dashv f_!$$

donde f_* preserva uniones, $f_!$ preserva intersecciones y f^{-1} preserva tanto uniones como intersecciones. Un hecho interesante e importante es que esta cadena no puede ser extendida en general, es decir, (en general) f_* no preserva intersecciones, y como consecuencia, no puede ser adjunto a derecha. De la misma manera $f_!$ no siempre preserva uniones y por tanto no puede ser adjunto a izquierda. Para notar esto, considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Ahora dado que $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, entonces $f(\mathbb{I} \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Por otro lado, $f(\mathbb{Q}) \cap f(\mathbb{I}) = 1$, es decir que f no preserva intersecciones.

1.4.1. Transformaciones Naturales

Las *transformaciones naturales* son, en gran medida, lo que motivó la primera definición de funtor. En pocas palabras, son aplicaciones (o formas de moverse) desde un funtor a otro.

Definición 1.25. Sean $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ funtores. Una *transformación natural* η de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{G}$ (denotada como $\eta : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$) es una aplicación que asigna a cada objeto A de $\mathbf{A}$ un morfismo $\eta_A : \mathbf{F}A \rightarrow \mathbf{G}A$ de $\mathbf{B}$, de tal manera que la siguiente *condición natural* se cumpla: para todo $f : A \rightarrow A'$ morfismo de $\mathbf{A}$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{FA} & \xrightarrow{\eta_A} & \mathbf{GA} \\
Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\
\mathbf{FA}' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & \mathbf{GA}'
\end{array}$$

Es decir, $Gf \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ Ff$.

Ejemplo 1.26. El determinante.

Sea n un entero positivo fijo. Considere dos funtores $G, U: \mathbf{CRng} \rightarrow \mathbf{Grp}$, de los anillos conmutativos con unidad a los grupos, definidos de la siguiente manera. El functor G envía un anillo R al grupo general lineal $GL_n(R)$ y a un morfismo $f: R \rightarrow S$ a la aplicación f que actúa componente a componente en los elementos de una matriz. Lo cual se denotará como f_e .

$$G: R \mapsto GL_n(R), \quad G: (f: R \rightarrow S) \mapsto (f_e: GL_n(R) \rightarrow GL_n(S))$$

Por otro lado, el functor U , envía a un anillo R a su grupo de unidades R^* y a un morfismo de anillos f^* al morfismo restringido $f_u: R^* \rightarrow S^*$, lo cual está ligado al hecho de que un morfismo de anillos envía unidades en unidades.

$$U: R \mapsto R^*, \quad U: (f: R \rightarrow S) \mapsto (f: R^* \rightarrow S^*)$$

Es decir, pasado por cada functor, obtenemos versiones distintas del morfismo f , una de ellas aplicada a matrices componente a componente, y la otra aplicada a unidades. El determinante es independiente de si se hace antes o después de un morfismo de anillos.

$$\det(f_e A) = f_u(\det(A))$$

por lo tanto,

$$\det_S \circ f_e = f \circ \det_R$$

Para darle más desarrollo al ejemplo, considere las funciones r -lineales alternantes de la siguiente definición.

Definición 1.27. Una función r -lineal f sobre un anillo R se llama alternante siempre que

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0$$

si y solo si $\alpha_i = \alpha_j$ para $i \neq j$.

Lema 1.28. Sea V un espacio vectorial de dimensión n , existe una única función n -lineal alternante f tal que

$$f(e_1, \dots, e_n) = 1$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de V .

Este lema es importante porque esa unicidad de f da paso a definir el determinante. Para para cualquier matriz $n \times n$, se define

$$\det(A) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

el determinante de A donde f es justamente la función del lema. El determinante de A también se simboliza como $|A|$, como es bien conocido, el determinante se puede calcular mediante la fórmula:

$$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma_i}$$

donde la suma se calcula sobre todas las permutaciones σ del conjunto $\{1, \dots, n\}$. El conjunto de todas las permutaciones se denota como P_n , y $\text{sgn}(\sigma)$ es el signo de cada permutación, el cual se toma $+1$ si la permutación es par y -1 si es impar.

Ahora, tomando la matriz $A \in GL_n(R)$, calculando su determinante por la fórmula anterior y finalmente aplicando el morfismo de anillos f , tenemos

$$\begin{aligned}
f(\det A) &= f\left(\sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma_i}\right) \\
&= f\left(\sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \dots a_{n,\sigma_n}\right) \\
&= f(a_{11}a_{22} \dots a_{nn} - a_{n1}a_{(n-1)2} \dots a_{1n} \pm \dots) \\
&= f(a_{11}a_{22} \dots a_{nn}) - f(a_{n1}a_{(n-1)2} \dots a_{1n}) \pm \dots \\
&= f(a_{11})f(a_{22}) \dots f(a_{nn}) - f(a_{n1})f(a_{(n-1)2}) \dots f(a_{1n}) \pm \dots \\
&= \det f(A).
\end{aligned}$$

Todas las igualdades anteriores se mantienen pues f es un morfismo de anillos, el cual preserva las operaciones del anillo. Es por esto que el determinante surge como una transformación natural, pues, al calcularse con la misma fórmula sin importar el anillo, entonces $\det_S \circ f_e = f \circ \det_R$ se cumple.

El ejemplo anterior muestra que las transformaciones naturales aparecen con frecuencia y que su uso es bastante común. El siguiente concepto permite darle un uso más profundo a las transformaciones y contestar preguntas de alto interés en matemáticas.

1.4.2. Funtores adjuntos.

¿Cuándo dos objetos son iguales? es una pregunta que surge constantemente en matemáticas. La teoría de categorías ofrece una respuesta bastante satisfactoria introduciendo el concepto de isomorfismo: dos objetos A y B son isomorfos en una categoría C si existe un morfismo de uno a otro que tiene inversa tanto a izquierda como a derecha. En otras palabras, es un proceso $A \longrightarrow B$ que puede ser totalmente reversible (dado que es un contexto categórico, este proceso debe ser respetuoso con la estructura).

Cuando se comparan dos categorías, podría estarse tentado a buscar un funtor $G : B \longrightarrow A$ tal que, dado $F : A \longrightarrow B$ pueda afirmarse que

$$FG = id_B \text{ y } id_A = GF,$$

pero muchas veces, esta búsqueda no es fructífera. Es decir, la igualdad es demasiado demandante para ser útil en matemáticas. Encontrar un funtor que revierta todo lo hecho por otro funtor dado, es inútil en la medida que, aplicando ese proceso se llegaría, exactamente a, la misma categoría, lo cual no tiene ninguna riqueza ni interés teórico. Considere a los conjuntos X, Y , los conjuntos $X \times Y$ y $Y \times X$ son diferentes, dado que no es lo mismo fijar un objeto en la primera componente que fijarlo en la segunda, es decir $(a, y) \neq (y, a)$.

Pero, si el objetivo es simplemente obtener parejas de elementos de los conjuntos X, Y , será suficiente decir que los conjuntos $X \times Y$ y $Y \times X$ no son iguales, pero sí isomorfos. Los isomorfismos proveen una noción de igualdad más acertada cuando estamos comparando categorías. Es decir, las ecuaciones anteriores pueden reformularse como

$$FG \cong id_B \text{ y } id_A \cong GF$$

reemplazando las igualdades con isomorfismos. Cuando esto es posible, las categorías serán equivalentes.

Para ir un poco más lejos, se reemplazan los isomorfismos con morfismos normales, de modo que las categorías, posiblemente, no serán equivalentes, pero esta nueva comparación abre algunas preguntas.

Definición 1.29. Un funtor $G : A \longrightarrow B$ es *adjunto a izquierda* de F si existe una transformación natural $\eta : id_A \longrightarrow FG$ donde $F : B \longrightarrow A$ es un funtor tal que, para todo morfismo $f : A \longrightarrow FB$ existe un único $\hat{f} : GA \longrightarrow B$, morfismo de B , tal que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} id_A & \xrightarrow{\eta_A} & FGA \\ & \searrow f & \downarrow F\hat{f} \\ & & FB \end{array}$$

conmuta.

Ejemplo 1.30. Relaciones. El conjunto potencia 2^X de un conjunto X se convierte en un poset ordenado por la inclusión, lo que también lo convierte en una categoría, como se mencionó anteriormente. Además, cualquier relación R sobre $X \times Y$ define una adjunción en esta categoría.

Por ejemplo, si $R \subseteq X \times Y$, donde X es un conjunto de animales y Y es un conjunto de características, R podría ser el conjunto de pares (x, y) tales que el animal x tiene la característica y . Es posible que se esté interesado en subconjuntos de animales que tengan una característica específica y, viceversa, en subconjuntos de características que sean comunes a varios animales. Esto motiva la definición del siguiente par de funciones:

$$f : 2^X \longrightarrow 2^Y$$

donde a un conjunto de animales, se le asigne un conjunto de características, es decir, dado $A \in 2^X$, $fA = \{y \in Y : (x, y) \in R \text{ para todo } x \in A\}$, de donde, si $A \subseteq A' \Rightarrow fA' \subseteq fA$, y

$$g : 2^Y \longrightarrow 2^X$$

donde a un conjunto de características se le asigna un conjunto de animales, es decir dado $B \in 2^Y$, $gB = \{x \in X : (x, y) \in R \text{ para todo } y \in B\}$, de donde, si $B \subseteq B' \Rightarrow gB' \subseteq gB$.

Las dos funciones invierten el orden y satisfacen lo siguiente:

$$B \subseteq fA \Leftrightarrow A \subseteq gB$$

es decir, todas las características de B las tienen todos los animales en A si y solo si todo animal en A tiene todas las características en B . Note que no es exactamente la misma relación descrita en la definición de adjunción ni en la de conexión de Galois. Estos funtores son llamados *adjuntos mutuamente a derecha*.

1.5. Marcos (*Frames*).

En el contexto de la topología sin puntos, aparece la estructura de los marcos, la cual nos ofrece una mirada (o contrapartida) algebraica de los espacios topológicos. La motivación para hacer topología sin puntos nace de observar que, en muchas ocasiones, el retículo abstracto de conjuntos abiertos puede tener mucha más información sobre un espacio topológico que los puntos que este contiene, lo cual nos invita a dotar de estructura algebraica dichos retículos.

Definición 1.31. Un **marco** (*frame* en inglés) es un *retículo* completo L que satisface la siguiente ley distributiva:

$$\forall A \subseteq L, \forall b \in L : (\bigvee A) \wedge b = \bigvee \{a \wedge b \mid a \in A\}.$$

Una función $h : L \rightarrow M$ entre marcos es un **homomorfismo de marcos** si preserva todos los *join* (incluyendo el 0) y todos los *meet* (incluyendo el 1).

Ejemplo 1.32. Un álgebra Booleana $\mathbf{B}$ siempre es un marco, pues siempre que para $A \subseteq \mathbf{B}$ existe $\bigvee A$, la ley de distributividad se cumple.

Como veremos a continuación, dado un espacio topológico siempre se puede dotar de esta estructura algebraica a su retículo abstracto.

Denotaremos **Top** a la categoría de los espacios topológicos (donde los objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas) y **Frm** a la categoría de los marcos (donde los objetos son los marcos y los morfismos son los homomorfismos de marcos). Ahora:

Sea X un conjunto y A un submarco de $\mathcal{P}(X)$, es decir una familia de subconjuntos de X que forman un marco bajo las operaciones de marco de $\mathcal{P}(X)$

- si $S \subseteq A$, entonces $\bigcup S \in A$
- si $S \subseteq A$ es finito, entonces $\bigcap S \in A$

Este marco es una topología sobre X . Un *espacio topológico* es un conjunto equipado con una topología $\Omega(X)$ sobre él. Los elementos de $\Omega(X)$ se llaman *subconjuntos abiertos* del espacio.

Sean X, Y espacios topológicos con $\Omega(X), \Omega(Y)$ como sus retículos de conjuntos abiertos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Luego $f^{-1}(U) \in \Omega(X)$ para todo abierto U de Y , además f^{-1} preserva uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Por tanto construimos el siguiente homomorfismo de marcos

$$\Omega(f) : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X) : U \mapsto f^{-1}(U)$$

en otras palabras, se ha conseguido formar el funtor contravariante Ω que va de **Top** a **Frm**, logrando dotar de estructura de marco a todo espacio topológico.

Dado que, en algunas situaciones, es más conveniente usar funtores covariantes, por ejemplo, determinar si una adjunción es izquierda o derecha, podemos definir la *categoría dual* $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathbf{op}}$, la categoría de los locales, y un funtor covariante

$$\Omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Loc}.$$

Lo anterior invita a pensar en construir un funtor $\Phi : \mathbf{Loc} \rightarrow \mathbf{Top}$ de tal manera que dado un local o un marco, obtengamos un espacio topológico relacionado. Ese funtor, con ciertas generalidades, se construirá más adelante.

Capítulo 2

Dualidad entre espacios topológicos y sistemas topológicos

2.1. Sistemas topológicos.

En el presente capítulo se introducirá la noción de sistema topológico, la cual permitirá dar uso a la estructura de marco que fue definida previamente. También se desarrollará la relación entre esta categoría y la de los espacios topológicos, lo cual es un paso previo a lo hecho por Janna en 2015 [2].

Definición 2.1. Sea A un marco, cuyos elementos llamaremos *abiertos*. Sea X un conjunto, cuyos elementos llamaremos *puntos*. Sea $\models$ un subconjunto de $X \times A$. Si $(x, a) \in \models$ entonces escribimos $x \models a$, y se leerá x *satisface a* a .

Los conjuntos X y A junto con la relación $\models$ forman un *sistema topológico* si y solo si:

1. Si S es un subconjunto finito de A , entonces

$$x \models \bigwedge S \Leftrightarrow x \models a \text{ para todo } a \in S$$

2. Si S es un subconjunto de A , entonces

$$x \models \bigvee S \Leftrightarrow x \models a \text{ para algún } a \in S$$

En ese caso, denotaremos $D = (X, \models, A)$ y cuando no haya lugar a confusión, simplemente $D = (X, A)$.

Ejemplo 2.2. Sea X un conjunto, y sea A una topología sobre X .

$x \models a$ si y solo si $x \in a$

En este caso es bastante sencillo verificar las condiciones de sistema topológico. Veamos.

Sin pérdida de generalidad, sea $a = B \cap C$, entonces

$x \models B \cap C \Leftrightarrow x \models B$ y $x \models C$, es decir

$x \in B$ y $x \in C$, de donde $x \in (B \cap C)$.

La segunda condición se verifica de manera análoga.

2.2. Funciones continuas.

Una vez definido el concepto de sistema topológico, es natural preguntarse por la existencia de funciones (o *morfismos*) entre dos de ellos. En otras palabras, se quiere una forma de relacionar dos sistemas topológicos (X, A) y (Y, B) , de tal manera que puntos de X puedan ser relacionados con puntos de Y sin pérdida de información. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que en cierto sentido podemos *calcular*, considere el siguiente escenario:

1. se toma un punto de X ,
2. se verifica si puede relacionarse con algún punto de Y ,

3. de ser así, obtenemos un abierto de B .

Para este propósito, escribiremos $\phi(b)$, donde

$x \models \phi(b)$ si y solo si $f(x) \models b$,

y se espera que ya esté en A . Por lo tanto, ϕ es una función de A en B . Ahora, sea S un subconjunto de A ,

1. $x \models \phi(\bigvee S) \Leftrightarrow f(x) \models \bigvee S \Leftrightarrow f(x) \models b$ para algún $b \in S \Leftrightarrow x \models \phi(b)$ para algún $b \in S \Leftrightarrow x \models \bigvee \{\phi(b) : b \in S\}$.

Y de manera similar, si S es finito,

2. $x \models \phi(\bigwedge S) \Leftrightarrow f(x) \models \bigwedge S \Leftrightarrow f(x) \models b$ para todo $b \in S \Leftrightarrow x \models \phi(b)$ para todo $b \in S \Leftrightarrow x \models \bigwedge \{\phi(b) : b \in S\}$.

Estos desarrollos sugieren que ϕ debe ser un homomorfismo de marcos.

Definición 2.3. Sean $D = (X, A)$ y $E = (Y, B)$ sistemas topológicos. Una función continua f de D a E ($f : D \longrightarrow E$) es una pareja $(f, \Omega f)$ donde:

1. $f : X \longrightarrow Y$ es una función,
2. $\Omega f : B \longrightarrow A$ es un morfismo de marcos, y
3. $x \models \Omega f(b) \Leftrightarrow f(x) \models b$

Note que las *flechas* van en dirección opuesta

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

$$A \xleftarrow{\quad \Omega f \quad} B$$

pero la dirección de la función se marca en el sentido de los puntos, no de los abiertos.

Definición 2.4.

Sean $D = (X, A)$, $E = (Y, B)$ y $F = (Z, C)$ sistemas topológicos.

1. La función identidad $id_D : D \rightarrow D$ está definida como

$$\begin{aligned} id_D &= id_X : X \rightarrow X \\ \Omega id_D &= id_A : A \rightarrow A \end{aligned}$$

2. Sean $f : D \rightarrow E$ y $g : E \rightarrow F$ funciones continuas. La composición $g \circ f : D \rightarrow F$ se define como:

$$\begin{aligned} g \circ f &: X \rightarrow Z \\ \Omega(g \circ f) &: C \rightarrow A \end{aligned}$$

Es decir, la composición natural miembro a miembro.

Proposición 2.5. La función identidad es continua.

Demostración. Considere $id_D : D \rightarrow D$ la función identidad en el sistema topológico $D = (X, A)$.

Si $x \models \Omega id_A(a) \Rightarrow x = id_X(x) \models a = \Omega id_A(a)$

de donde es evidente que $id_X(x) \models a$. El sentido opuesto de la implicación es análogo.

□

Proposición 2.6. La composición de funciones continuas es una función continua.

Demostración. Sean $D = (X, A)$, $E = (Y, B)$ y $F = (Z, C)$ sistemas topológicos.

si $x \models \Omega(f \circ g)(c) \Rightarrow x \models \Omega f(\Omega g(c))$ Dado que g es continua, existe $b \in E$ tal que $\Omega g(c) = b$.

Por lo tanto $x \models \Omega f(b)$, pero f es una función continua, entonces $f(x) \models b \Rightarrow f(x) \models g(c)$ y como g es continua, podemos concluir que $g(f(x)) \models c$. El lado opuesto de la implicación es análogo.

□

De las dos proposiciones anteriores, como se vio anteriormente, existe la composición y la función identidad, y del hecho que si L es un retículo, L^{op} también lo es, se infiere la siguiente definición.

Definición 2.7. **TopSys** es la categoría que tiene a los sistemas topológicos como objetos y a las funciones continuas como morfismos.

2.3. Espacios Topológicos

En esta sección se discuten las relaciones entre los espacios topológicos y los sistemas topológicos. Estas relaciones dan paso a definir los funtores entre dichas categorías.

Proposición 2.8. Sean X y Y dos espacios topológicos. Entonces las funciones continuas (en el sentido de sistema topológico) de $(X, \Omega(X))$ a $(Y, \Omega(Y))$ son equivalentes a funciones $f : X \longrightarrow Y$ tales que si B es un abierto de Y ($B \in \Omega Y$), entonces $f^{-1}(B)$ es un abierto de X .

Demostración. Un espacio topológico es un conjunto X con su marco ΩX de conjuntos abiertos. Luego, sea f una función continua, entonces la condición

$$x \models \Omega f(B) \Leftrightarrow f(x) \models B$$

es equivalente a $\Omega f(B) = f^{-1}(B)$ el cual debe ser un abierto de X , lo que indica que el espacio topológico está completamente determinado por el conjunto X y sus abiertos. Como es conocido, la imagen inversa de una función continua preserva los meets y los joins, entonces (f, f^{-1}) es una función continua si y solo si f^{-1} preserva uniones arbitrarias e intersecciones finitas de X .

□

Siempre que se quiera, se puede ver un sistema topológico como un espacio topológico comparando abiertos únicamente por los puntos que los satisfacen. Es decir, dos abiertos A y B de un sistema topológico, son iguales si a ambos abiertos los satisfacen exactamente los mismos puntos. Esto, como se verá a continuación, define una topología.

Definición 2.9. Sea $D(X, A)$ un sistema topológico. Para cada abierto $a \in A$ se define su extensión en D como $ext(a) = \{x \in X : x \models a\}$. Además, $ext(A) = \{ext(a)_{a \in A}\}$.

Por la forma en que fue definida $\models$ es fácil observar que los join y los meets corresponden a las uniones y las intersecciones finitas de las extensiones respectivamente, de donde las extensiones forman una topología τ sobre X . Esta topología depende tanto de X como de A . Veámos.

Lema 2.10. $ext(A)$ forma una topología sobre X .

Demostración. Sean $a, b \in A$, entonces $a \wedge b \in A$. Ahora, $ext(a \wedge b) = \{x \in X : x \models (a \wedge b)\}$, es decir $ext(a \wedge b) = \{x \in X : x \models a \text{ y } x \models b\}$ y dado que $\{x \in X : x \models a\}$ y $\{x \in X : x \models b\}$ son subconjuntos de X , se concluye que $ext(a \wedge b) = \{x \in X : x \models a\} \cap \{x \in X : x \models b\}$. Demostrar que los join coinciden con las intersecciones arbitrarias, es un procedimiento totalmente análogo. Por último, $ext(0) = \{x \in X : x \models 0\} = \emptyset$, y $ext(1) = \{x \in X : x \models 1\} = X$. Es decir que $ext(A)$ es una topología sobre X . □

Lema 2.11. Si $(f, \Omega f) : (X, \models, A) \longrightarrow (Y, \models', B)$ es una función continua, entonces $f : (X, ext(A)) \longrightarrow (Y, ext(B))$ es una función continua.

Esto es consecuencia inmediata de la proposición 2.8 dado que si $(f, \Omega f)$ es una función continua, $f(x) \models' b \Leftrightarrow x \models \Omega f(b)$ es decir, que Ωf coincide con f^{-1} .

Definición 2.12. **Ext** es un funtor de **TopSys** a **Top** tal que **Ext** actúa sobre un objeto de $(X, \models, A)$ como **Ext** $(X, \models, A) = (X, ext(A))$ y para cada morfismo $(f, \Omega f)$ como **Ext** $(f, \Omega f) = f$.

De los lemas 2.10 y 2.11 se puede concluir que, efectivamente, **Ext** es un funtor.

Vickers [2] propone una construcción del funtor **Spat** que es menos detallada que las desarrolladas anteriormente. En su propuesta, el nombre del funtor proviene de la palabra *spatialization*, en el sentido de formar un espacio topológico a partir de una estructura algebraica. En este documento, se desea enfatizar cómo actúa el funtor **Ext** en objetos y morfismos para brindar claridad en su tratamiento.

Previamente, se ha demostrado que, dado un sistema topológico, es posible obtener un espacio topológico al dotar de estructura topológica las extensiones de cada abierto del sistema. Por lo tanto, es deseable contar con un *proceso inverso* al anterior.

Los dos lemas que se presentan a continuación tienen como objetivo demostrar la existencia de un funtor $\mathbf{J} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{TopSys}$, y posteriormente establecer su relación de adjunción con el funtor $\mathbf{Ext}$.

Lema 2.13. Sea $(X, \Omega X)$ un espacio topológico, $\mathbf{J}(X, \Omega X) = (X, \in, \Omega X)$ es un sistema topológico, donde $\in$ hace las veces de $\models$, es decir, es un subconjunto de $(X \times \Omega X)$. Si x satisface a A , es decir $x \in A$, se leerá x pertenece a A .

Demostración. Dado que ΩX es un retículo completo con la inclusión como orden, y que respeta los meets finitos y los join (intersecciones finitas y uniones respectivamente), entonces ΩX es un marco. Ahora, $x \in A \cap B$ si y solo sí, $x \in A$ y $x \in B$; análogamente, si S es un subconjunto de ΩX , $x \in \bigcup S$ si y solo sí $x \in A$ para algún $A \in S$. Por tanto, $\mathbf{J}(X, \Omega X)$ es un sistema topológico. $\square$

Lema 2.14. Sean $(X, \Omega X)$ y $(Y, \Omega Y)$ dos espacios topológicos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua de X en Y , entonces $\mathbf{J}(f) = (f, f^{-1})$, donde f^{-1} hace las veces de Ωf tal como en la definición 2.3, es una función continua entre los sistemas topológicos $\mathbf{J}(X, \Omega X)$ y $\mathbf{J}(Y, \Omega Y)$.

Demostración. Deben verificarse cada una de las condiciones de la definición 2.3.

1. Es evidente que f es una función tal que $f : X \longrightarrow Y$,
2. f^{-1} es un morfismo de marcos $f^{-1} : \Omega Y \longrightarrow \Omega X$ dado que f es una función continua, su inversa respeta uniones arbitrarias e intersecciones finitas (joins y meets respectivamente),
3. $\Leftarrow$) Sea b un abierto de ΩY y x un elemento de X tales que $f(x) \in b$, aplicando la imagen inversa se obtiene que $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(b)$ de donde $x \in f^{-1}(b)$. Lo cual, en la notación de la definición 2.3, se expresa como $f(x) \models b \Rightarrow x \models \Omega f(b)$.
 $\Rightarrow$) Sea a un abierto en ΩX tal que $a = f^{-1}(b)$. Suponga que $x \in a$, aplicando la imagen directa de f se obtiene que $f(x) \in f(a) \subseteq b$.

□

Los lemas anteriores prueban que J es, en efecto, un funtor $J : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{TopSys}$. Aunque pueda parecer un resultado sencillo, tiene una gran profundidad, ya que la existencia de $\mathbf{J}$ muestra que en la categoría $\mathbf{Top}$, no es suficiente hablar únicamente de funciones continuas, sino que también es igual de importante (o incluso más) considerar la función inversa, restringida a los abiertos del codominio de f , es decir, a la topología de Y . Esta consideración adquiere aún más relevancia al observar que la función inversa preserva la estructura algebraica del marco.

Teorema 2.15. $\mathbf{Ext}$ es adjunto a derecha del funtor $\mathbf{J}$.

Demostración. Para demostrar la adjunción es suficiente exhibir la counidad, para ello, recuerde que $J(X, \tau) = (X, \in, \tau)$ y $\mathbf{Ext}(X, \models, A) = (X, \mathbf{ext}(A))$. Entonces, calculando la composición, se obtiene $J(\mathbf{Ext}(X, \models, A)) = (X, \in, \mathbf{ext}(A))$. Por tanto, debe encontrarse ϵ tal que el diagrama de la counidad

$$\begin{array}{ccc}
 J(\mathbf{Ext}(X, \models, A)) & \xrightarrow{\epsilon_X} & (X, \models, A) \\
 J(f) \uparrow & \nearrow \hat{f} & \\
 J(Y, \tau') & &
 \end{array}$$

conmute. En palabras, el diagrama quiere decir que, todo morfismo $\hat{f} : J(Y, \tau') \rightarrow (X, \models, A)$ de $\mathbf{TopSys}$ puede ser factorizado de manera única a través de ϵ .

Considere $\epsilon_X = (id_X, \mathbf{ext}^*)$, es decir

$$(X, \in, \mathbf{ext}(A)) \xrightarrow{(id_X, \mathbf{ext}^*)} (X, \models, A)$$

donde $\mathbf{ext}^*$ es una función de A en $\mathbf{ext}(A)$ tal que $\mathbf{ext}^*(a) = \mathbf{ext}(a)$ (lo cual es morfismo de marcos por como fue definido $\mathbf{ext}(a)$) para todo $a \in A$.

Sea $\hat{f} = (f_1, f_2)$, considere $J(f) = (f_1, f_1^{-1})$, entonces, para la parte de los puntos se tiene que $id_X \circ f_1 = f_1$. Para la parte de los abiertos, donde los morfismos van en sentido opuesto, tomando la definición 2.3, debe cumplirse que

$$y \in f_2(a) \Leftrightarrow x = f_1(y) \models a$$

pues $\hat{f}$ es una función continua. Pero dado que $\mathbf{J} = (f_1, f_1^{-1})$, que también es continua, se tiene que

$$y \in f_1^{-1}(ext(a)) \Leftrightarrow x = f_1(y) \models a,$$

por lo tanto, el diagrama conmuta para la parte de los puntos y la de los abiertos. Además, por la naturaleza de la imagen inversa, $\hat{f}$ es único. $\square$

En su trabajo, Vickers [2] se refiere al resultado anterior como *espacialización*. Es importante destacar que el teorema no afirma que todo sistema topológico deba ser un espacio topológico, sino que puede ser extendido a uno.

2.4. Locales

Como se dijo en secciones pasadas, los locales son la categoría opuesta a los marcos. Se introducen con el objetivo de facilitar algunos cálculos, además de ser una alternativa para construir sistemas topológicos.

Pensando en **Loc**, la categoría de los locales, únicamente como la categoría opuesta a *Frm*, se deduce la siguiente definición.

Definición 2.16. Existe un funtor $fm : \mathbf{TopSys} \longrightarrow \mathbf{Loc}$, de tal manera que, dado un sistema topológico $(X, \models, A)$, $fm(X, \models, A) = A$ y dada una función continua (f_1, f_2) , $fm(f_1, f_2) = f_2$, donde f_2 es un morfismo de marcos pero actuando en dirección opuesta.

Tal como el funtor **Ext** ve los abiertos como conjuntos de puntos, al considerarlos como los puntos que satisfacen un abierto en específico, se puede pensar en los puntos como una función de un marco al retículo **2** formado por el conjunto parcialmente ordenado $\{0, 1\}$.

$$x(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \models a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por como está construido $\models$, podemos verificar que para todo x , la función anterior es un morfismo de marcos, $x : A \longrightarrow \mathbf{2}$.

- considere a, b abiertos de un marco A , ahora

$$x(a \wedge b) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \models (a \wedge b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, $x(a \wedge b) = 1$ si x satisface tanto a a como a b , $x(a) = x(b) = 1$, de donde $x(a) \wedge x(b) = 1$, y

- tomando $x(a \vee b)$

$$x(a \vee b) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \models (a \vee b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, que x debe satisfacer a alguno de los dos. Dado que x como aplicación, preserva meets y joints, es un morfismo de marcos, lo cual nos da paso a la siguiente definición.

Definición 2.17. Sea A un marco. El *local* asociado a A es un sistema topológico D con las siguientes características

1. A es el marco de abiertos de D ,
2. la parte de los puntos de D está compuesta por los morfismos de marcos $x : A \longrightarrow \mathbf{2}$, y
3. diremos que x está relacionado con a ($x \models a$) si y solo si $x(a) = 1$.

Cuando no hay lugar confusión, es típico simplemente referirse al local A . Un sistema topológico es *localizable* si y solo si es homeomorfo a un local.

De esta definición es muy importante notar que lo único que se usó para describir los puntos como funciones es simplemente el hecho de que dichas aplicaciones actúan como morfismo de marcos, es decir, si se consiguiese un marco M más general que $\mathbf{2}$, de tal manera que morfismos $x : A \longrightarrow M$ conservaran la estructura de la misma manera, podría generalizarse la definición de local y, por tanto, la de sistema topológico. Mostrar dicho marco y los morfismos es uno de los objetivos de los siguientes capítulos y del documento en general.

Proposición 2.18. Sean D y E locales, las funciones continuas de D a E son equivalentes a morfismos de marcos de ΩE a ΩD . Tal como es de esperar, las *flechas* van en sentido opuesto.

Demostración. Por la definición 2.3, para establecer la equivalencia es necesario una pareja $(f, \Omega f)$ de tal manera que f es una función de puntos, Ωf es un morfismo de marcos, y se cumplan las condiciones de satisfacción para funciones continuas. Por lo tanto, dado que existe el morfismo de marcos, f debe cumplir que

$$f(x)(b) = 1 \Leftrightarrow f(x) \models b \Leftrightarrow x \models \Omega f(b) \Leftrightarrow x(\Omega f(b)) = 1$$

de donde $f(x) = x(\Omega f)$ y junto con Ωf , forman una función continua. $\square$

Proposición 2.19. Sea $f : B \longrightarrow A$ un morfismo de marcos, entonces $(- \circ f, f) : (hom(A, 2), \models, A) \longrightarrow (hom(B, 2), \models, B)$ es una función continua.

Demostración. Dado que f es morfismo de marcos, solo es necesario verificar la condición de satisfacción para funciones continuas de la definición 2.3. Para ello, considere a un abierto de A y b un abierto de B tales que $f(b) = a$. Ahora dado un punto $x(a)$ de A se le asigna un punto $y(p)$ de B . Ahora,

$$x \models a = f(b) \Leftrightarrow x(a) = x(f(b)) = 1 \Leftrightarrow (- \circ f)(x) \models b$$

dado que $hom(A, 2)$ y $hom(B, 2)$ son conjuntos, $(- \circ f)$ es función, cumpliendo todas las características de 2.3. $\square$

Definición 2.20. Existe un funtor covariante $S : \mathbf{Loc} \longrightarrow \mathbf{TopSys}$ tal dado un marco A , $S(A) = (hom(A, 2), \models, A)$ y dado un morfismo de marcos f , $S(f) = (- \circ f)$.

Las proposiciones anteriores demuestran que S es, en efecto, un funtor covariante. Vickers propone la adjunción entre el funtor que él llama **Loc:TopSys** $\rightarrow$ **Loc** y el funtor de olvido, pero su construcción pierde el recurso didáctico y técnico de los funtores descritos anteriormente, que permiten hacer una extensión directa a los sistemas y espacios topológicos Fuzzy (y otros ámbitos como las álgebras de Łukasiewicz), de una forma similar a como lo hace Jana, lo cual es uno de los objetivos principales de este documento.

Teorema 2.21. El funtor fm es adjunto a izquierda de S .

Demostración. Para demostrar la adjunción, es suficiente mostrar la unidad, para ello, recuerde que $S(A) = (hom(A, 2), \models, A)$ y $fm(X, \models, A) = A$. Entonces calculando la composición se obtiene $S(fm(X, \models, A)) = (hom(A, 2), \models, A)$. Por tanto, debe encontrarse η tal que el diagrama de la unidad

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \models, A) & \xrightarrow{\eta_A} & S(fm(X, \models, A)) \\
 & \searrow (f_1, f_2) & \downarrow S(f_2) \\
 & & S(B)
 \end{array}$$

conmute.

Considere $\eta_A = (a^*, id_A)$, es decir

$$(X, \models, A) \xrightarrow{(a^*, id_A)} (hom(A, 2), \models, A)$$

donde $a^* : X \rightarrow hom(A, 2)$, de tal manera que

$$a^*(x)(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \models a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $\hat{f} = (f_1, f_2)$, es claro que la parte de los abiertos de $S(\hat{f})$ es f_2 , pues es el morfismo de marcos, dado que $S(\hat{f}) = (- \circ f_2, f_2)$, haría falta demostrar que

$$(f_1, f_2) = (- \circ f_2, f_2) \circ (p^*, id_P) = ((- \circ f_2) p^*, id_P \circ f_2)$$

Dado que $f_2 = id_P \circ f_2$, solo hace falta verificar la parte de los puntos. Entonces, como para todo b un abierto en B se tiene que

$$a^* \circ f_2(b) = a^*(x)(f_2(b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \models f_2(b) \iff f_1(x) \models b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = f_1(x)(b)$$

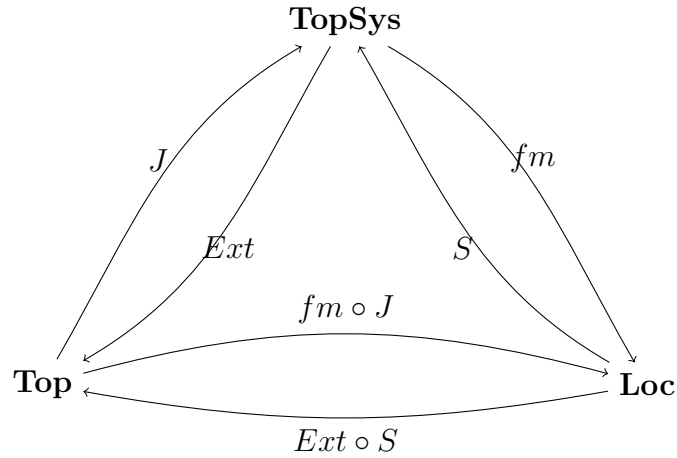
de donde, $f_1 = (- \circ f_2) p^*$, lo cual prueba que la función $\hat{f}$ se factoriza de manera única a través de la unidad η_A . □

Finalmente, se puede concluir el siguiente resultado clásico, el cual más adelante se buscará extender al contexto de las relaciones Fuzzy.

Teorema 2.22. Existe una adjunción entre **Top** y **Loc**, que está dada por el funtor $Extr \circ S$ el cual es adjunto a derecha del funtor $fm \circ J$.

Demostración. Gracias a la composición de funtores adjuntos y a los teoremas 2.15 y 2.21 el sigue el resultado. □

Las relaciones categóricas obtenidas hasta el momento se pueden ilustrar con el siguiente diagrama conmutativo.



Capítulo 3

FuzzyTopSys y FuzzyTop

Como se dijo en el capítulo anterior, en 1989, S. Vickers introduce el concepto de Sistema topológico con el fin de discutir la lógica geométrica. Un sistema topológico es la tripla $(X, A, \models)$, donde X es un conjunto no vacío, A es un marco, y $\models$ es una relación binaria de X en A . $x \models a$ donde $x \in X$ y $a \in A$ se lee “ x satisface a a ”.

La noción de satisfacción puede ser *interpretada*. En varias situaciones es natural pensar que x satisface a a en cierta medida o hasta cierto punto, por ejemplo, una persona satisfacer parcialmente la condición de ser joven, un color puede satisfacer hasta cierta medida el pertenecer a una paleta de colores, una habitación tiene puntos más fríos que otros. En otras palabras, la relación $\models$ puede ser de tipo Fuzzy, y puede ser extendida desde la idea de local vista anteriormente. En este capítulo, se reconstruye de manera detallada la prueba presentada por Janna (2015) [2], haciendo una extensión del caso clásico al caso Fuzzy, lo que Janna llama *fuzzyficación*, presentando algunos ejemplos originales con la intención de dar intuición sobre los conceptos.

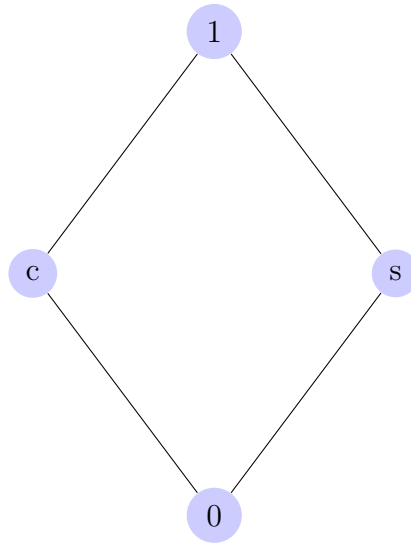
Definición 3.1. Dado un retículo L y un conjunto X , un subconjunto L -fuzzy $\bar{A}$ de X es dado por la función de membresía $\bar{A} : X \rightarrow L$.

Para todo $x \in X$, el valor de $\bar{A}(x)$ se llama grado de pertenencia de x en el subconjunto L -fuzzy $\bar{A}$. también se denotará como $gr(x \in \bar{A})$.

Definición 3.2. Sea f una función de X en Y , y sea $\bar{B}$ un subconjunto L -fuzzy de Y . Entonces $f^{-1}(\bar{B})$ es un subconjunto L -fuzzy de X dado por $f^{-1}(\bar{B})(x) = \bar{B}(f(x))$.

Tal como es ampliamente divulgado, los conjuntos Fuzzy se generalizaron para cualquier retículo. Purbita J. utiliza en su trabajo únicamente el $[0, 1]$ y los conjuntos de Łukasiewicz. Por la definición anterior, un subconjunto $[0, 1]$ -fuzzy será simplemente llamado un subconjunto Fuzzy.

Ejemplo 3.3. Considere el conjunto $X = \{a, b\}$, el retículo L representado por el siguiente diagrama.



Los subconjuntos L -fuzzy de X son:

$$\{\bar{a}\}(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = a \\ s & \text{si } x = b, \end{cases}$$

$$\{\bar{b}\}(x) = \begin{cases} s & \text{si } x = a \\ c & \text{si } x = b, \end{cases}$$

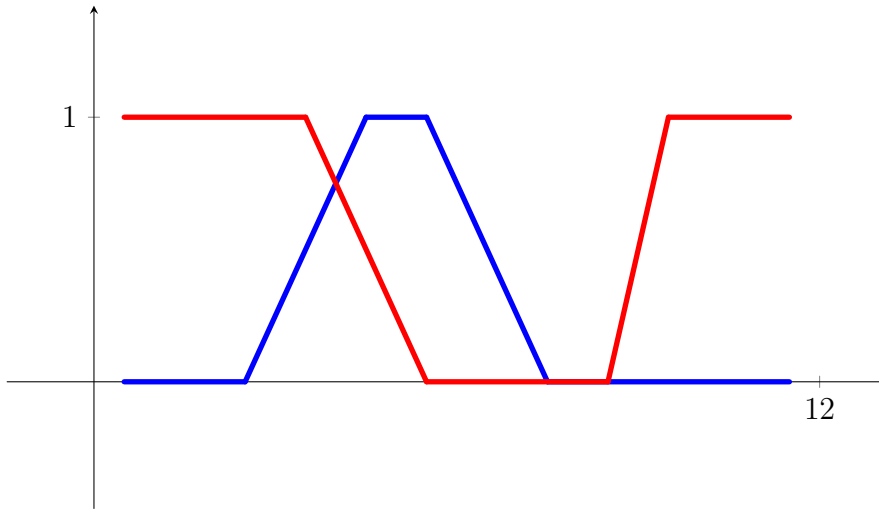
$$\bar{\emptyset}(x) = 0 \text{ para todo } x,$$

$$\bar{X}(x) = 1 \text{ para todo } x.$$

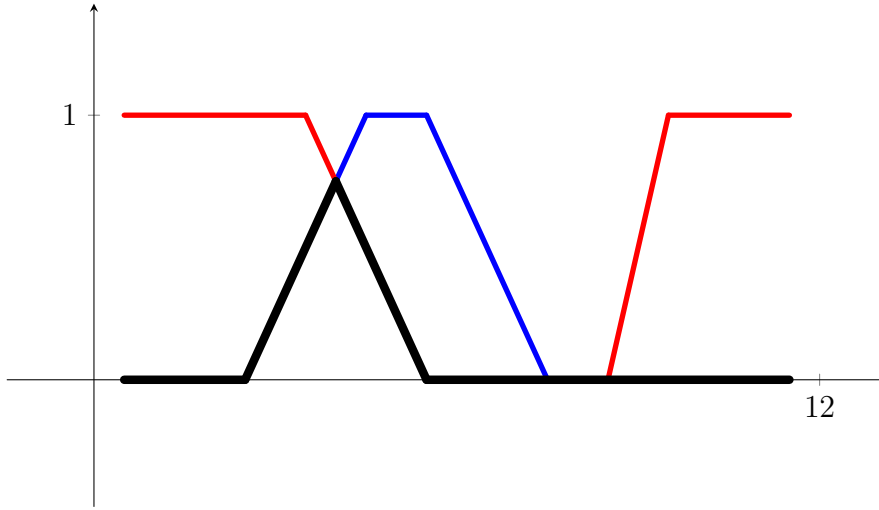
Observe que dados dos subconjuntos L -fuzzy de X , su unión y su intersección también son subconjuntos L -fuzzy de X .

El siguiente es un ejemplo clásico de conjuntos fuzzy, que ilustra la utilidad de la función de pertenencia. La función roja puede simbolizar a qué edades una persona es considerada muy joven, mientras que la azul puede significar a qué edades una persona es considerada joven.

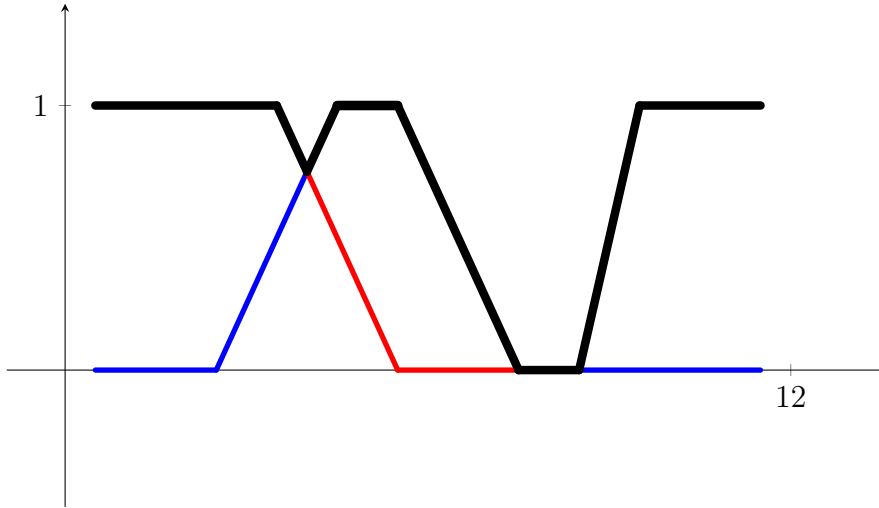
Ejemplo 3.4. Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos subconjuntos Fuzzy de X determinados por las funciones de membresía $\bar{A}(x)$ y $\bar{B}(x)$ respectivamente, como se ve a continuación.



Dado que estas funciones determinan subconjuntos Fuzzy de X es razonable preguntarse por la intersección y la unión como en el ejemplo anterior. La intersección usual está determinada por la función de membresía $\bar{A} \wedge \bar{B}(x) = \min\{\bar{A}(x), \bar{B}(x)\}$, gráficamente:



y la unión usual está determinada por la función de pertenencia $\bar{A} \vee \bar{B}(x) = \max\{\bar{A}(x), \bar{B}(x)\}$, gráficamente:



El complemento usual está determinado por la función $\bar{A}^c(x) = 1 - \bar{A}(x)$.

El siguiente paso es dotar de estructura topológica los conjuntos previamente definidos, tal como en el ejemplo anterior, las uniones se definen naturalmente a través del supremo y las intesecciones a través del ínfimo.

Definición 3.5. (Chang [13]) Sea X un conjunto, y τ una colección de subconjuntos Fuzzy de X es decir, $\tau \in [0, 1]$, entonces:

1. $\bar{\phi}, \bar{X} \in \tau$, donde $\bar{\phi}(x) = 0$, para todo $x \in X$ y $\bar{X}(x) = 1$, para todo $x \in X$;
2. $\bar{A}_i \in \tau$ para $i \in I \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \bar{A}_i \in \tau$;
3. $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \in \tau \Rightarrow \bar{A}_1(x) \wedge \bar{A}_2(x) \in \tau$

Entonces (X, τ) se llama un espacio topológico Fuzzy. τ será una topología Fuzzy sobre X . Los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos Fuzzy del espacio topológico Fuzzy (X, τ) .

Las funciones $\bar{\phi}, \bar{X}$, son comunmente llamadas 0 y 1 o respectivamente.

Definición 3.6 (Espacio topológico Fuzzy Laminado). Sea X un conjunto, y $\tau \subset [0, 1]^X$ una colección de subconjuntos Fuzzy de X donde:

1. Para todo $r \in [0, 1], \bar{r} \in \tau$, donde $\bar{r}$ es la función constante con valor r ;
2. $\bar{A}_i \in \tau$ for $i \in I \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \bar{A}_i \in \tau$;
3. $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \in \tau \Rightarrow \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \in \tau$.

La pareja (X, τ) es un espacio topológico Fuzzy laminado.

Si en lugar de $[0, 1]$ se usa un retículo L , entonces se dice que es un espacio L -fuzzy

Ejemplo 3.7. La familia de funciones construída en el ejemplo 3.3 es un espacio topológico L fuzzy.

Ejemplo 3.8. Considere X un conjunto equipado con la familia F_1 de subconjuntos Fuzzy, donde $F_1 = \{v : v(x) \geq \frac{1}{2}, \forall x \in X\} \cup \{\alpha : \alpha(x) = b < \frac{1}{2} \text{ constante para todo } x\}$.

Luego,

1. $0, 1 \in F_1$,
2. si $\rho_1, \rho_2 \in F_1$; entonces $\rho_1(x) \wedge \rho_2(x) \Rightarrow (\rho_1 \wedge \rho_2)(x) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (\rho_1 \cap \rho_2) \in F_1$. Es decir, las intersecciones finitas pertenecen a F_1 ,

3. $\rho_1 \in F_1, \forall i \in I$, donde I es un conjunto indexado. Entonces, $\bigvee_{i \in I} \rho_i \geq \frac{1}{2} \in F_1$. De donde concluimos que la pareja (X, F) es un espacio topológico Fuzzy.

Definición 3.9. Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos Fuzzy. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice *fuzzy continua* si y solo sí para todo conjunto abierto fuzzy $\bar{B}$ de Y , $f^{-1}(\bar{B})$ es un conjunto abierto de X .

Definición 3.10. f_1 es una función propia de $(X, \bar{A})$ en $(Y, \bar{B})$ si f_1 es una relación de $(X, \bar{A})$ en $(Y, \bar{B})$ tal que para todo $x \in |\bar{A}|$, existe un único $y \in |\bar{B}|$ para el cual $\bar{A}(x) = f_1(x, y)$ y $f_1(x, y') = 0$ si $y' \neq y \in |\bar{B}|$, donde $|\bar{A}| = \{x \in X : \bar{A}(x) > 0\}$ and $|\bar{B}| = \{y \in Y : \bar{B}(y) > 0\}$. para un $x \in |\bar{A}|$ dado, se denota a ese único $y \in |\bar{B}|$ por $f_1(x)$.

Usualmente el conjunto $|\bar{A}|$ es llamado el *soporte de A* y es denotado **Sop**(A).

Ahora que se han definido los espacios topológicos y los morfismos entre ellos, se puede definir la categoría de los espacios topológicos Fuzzy.

Definición 3.11 (**[0,1]-Top**). La categoría de los espacios topológicos Fuzzy está definida así:

1. Los objetos son espacios topológicos Fuzzy (X, τ) .
2. Los morfismos son funciones propias que satisfacen que, si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ y $\bar{B}$ es subconjunto fuzzy de Y tal que $(Y, \bar{B}) \in \tau'$, entonces $(X, f^{-1}(\bar{B})) \in \tau$.
3. La función identidad es una función propia.
4. La composición es una función propia entre espacios topológicos Fuzzy, como se probará a continuación.

Sean f, g funciones propias tales que $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$. Dado que f_1 es una función propia, entonces para todo $x \in X$, existe un único $y_1 \in Y$ tal que $A(x) = f(x, y_1)$. Y a su vez, para todo $y \in Y$ existe un único $z \in Z$ tal que $B(x) = g(y, z)$, en particular para y_1 existe un único z_1 tal que $B(x) = g(y_1, z_1)$ y así, existe un único z_1 tal que $A(x) = (x, z_1)$, por lo tanto, es función propia.

Claramente, la categoría **Top** es una subcategoría de **[0,1]-Top** (FuzzyTop) cuando la relación de satisfacción es simplemente binaria, 1 para indicar que un objeto está completamente relacionado con un subconjunto, y 0 para indicar que está no relacionado, es decir, pertenencia y no pertenencia, pero como se vio en ejemplos anteriores, la relación de satisfacción puede ser más compleja.

De la misma manera que en el capítulo anterior se definen los sistemas topológicos, es preciso extenderlos a los sistemas topológicos Fuzzy.

Definición 3.12. Un sistema topológico Fuzzy es una cuadrupla $(X, \bar{A}, \models, P)$ donde $(X, \bar{A})$ es un conjunto fuzzy no vacío, P es un marco y $\models$ es una relación $[0, 1]$ -fuzzy de X a P tal que

- $\text{gr}(x \models p) \leq \bar{A}(x)$,
- si S es un subconjunto finito de P , entonces se cumple que $\text{gr}(x \models \bigwedge S) = \inf\{\text{gr}(x \models s) : s \in S\}$,
- si S es cualquier subconjunto de P , entonces se cumple que $\text{gr}(x \models \bigvee S) = \sup\{\text{gr}(x \models s) : s \in S\}$.

El siguiente paso es construir la generalización de las funciones continuas entre sistemas topológicos, cuyos detalles son clave para mostrar la existencia de la adjunción tal como en el caso clásico.

Definición 3.13. Sean $D = (X, \bar{A}, \models, P)$ y $E = (Y, \bar{B}, \models', Q)$ sistemas topológicos Fuzzy. Una *función continua* $f : D \longrightarrow E$ es un par (f_1, f_2) , donde

- $f_1 : (X, \bar{A}) \longrightarrow (Y, \bar{B})$ es una función propia de $(X, \bar{A})$ a $(Y, \bar{B})$,
- $f_2 : Q \longrightarrow P$ es un homomorfismo de marcos, y
- $\text{gr}(x \models f_2(q)) = \text{gr}(f_1(x) \models' q)$, para todo $x \in X$ y $q \in Q$.

La última condición puede entenderse como que x tiene el mismo grado (o nivel) de relación con $f_2(q)$ que el que tiene $f_1(x)$ con q . *Están relacionados de la misma manera.* Si esa relación es simplemente de satisfacción (no Fuzzy), es equivalente a la definición de función continua clásica de 2.3.

Proposición 3.14. La composición de funciones continuas entre sistemas topológicos Fuzzy, es continua.

Demostración. Sean $D = (X, \bar{A}, \models', P)$, $E = (Y, \bar{B}, \models'', Q)$, $F = (Z, \bar{C}, \models''', R)$ sistemas topológicos Fuzzy.

Sean $(f_1, f_2) : D \longrightarrow E$ y $(g_1, g_2) : E \longrightarrow F$ funciones continuas. La composición $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) : D \longrightarrow F$ se define como $g_1 \circ f_1 : (X, \tilde{A}) \longrightarrow (Z, \tilde{C})$, $f_2 \circ g_2 : R \longrightarrow P$ i.e. $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) = (g_1 \circ f_1, f_2 \circ g_2)$.

Las dos primeras condiciones ya están probadas, pues la composición de homomorfismos de marcos es homomorfismo de marcos y la composición de funciones propias es función propia. Solo hace falta verificar la última propiedad. Entonces. Si $x \models f_2 \circ g_1(r) \implies x \models f_2(g_1(r))$, y dado que g_2 es continua, entonces existe $q \in Q$ tal que $g_2(r) = q$, de donde $\text{gr}(x \models f_2(b)) = \text{gr}(f_1(x) \models' b) = \text{gr}(f_1(x) \models' g_2(r))$ pero como g_2 es una función continua, entonces $\text{gr}(x \models f_2(b)) = \text{gr}(g_1 \circ f_1(x) \models'' r)$, que es la igualdad buscada. $\square$

Proposición 3.15. La función identidad es continua.

Demostración. Sea $D = (X, \bar{A}, \models, P)$ un sistema topológico Fuzzy. La función identidad $I_D : D \longrightarrow D$ es una pareja (I_1, I_2) definida por $I_1 : (X, \bar{A}) \longrightarrow (X, \bar{A})$ tal que $I_1(x_1, x_2) = \bar{A}(x)$ si y solo si $x_1 = x_2$, en otro caso $I_1(x_1, x_2) = 0$ y $I_2 : P \longrightarrow P$ es el morfismo identidad de P .

Entonces $\text{gr}(x \models I_1(q)) = \text{gr}(I_2(x) \models q) = \text{gr}(x \models q)$. De donde, I es una función Fuzzy continua. $\square$

Las dos proposiciones anteriores permiten concluir que existe la categoría **Fuzzy-TopSys** de los sistemas topológicos Fuzzy con las funciones continuas como morfismos. Junto con las ya construidas categorías de espacios topológicos Fuzzy y de los marcos, se establezcan las relaciones que extienden el caso clásico de la adjunción probada en el capítulo anterior.

Definición 3.16. Sea $\text{Let}(X, \bar{A}, \models, P)$ un sistema topológico Fuzzy, $p \in P$. Para cada p se define su extensión en $\text{Let}(X, \bar{A}, \models, P)$ como $\text{ext}(p) = (X, \text{ext}^*(p))$ donde $\text{ext}^*(p)$ es una función de X a $[0, 1]$ definida como $\text{ext}^*(p)(x) = \text{gr}(x \models p)$ para todo $x \in X$. Además $\text{ext}(P) = \{(X, \text{ext}^*(p))\}_{p \in P} = (X, \text{ext}^* P)$ where $\text{ext}^* P = \{\text{ext}^* p\}_{p \in P}$.

Esta definición permite construir un espacio topológico Fuzzy a partir de un sistema topológico Fuzzy, lo cual indica que debe existir un functor de olvido de **FuzzyTopSys** a **FuzzyTop**.

Entonces, se define el functor Ext de **FuzzyTopSys** a **FuzzyTop**, que actúa sobre los objetos como $\text{Ext}(X, \bar{A}, \models', P) = (X, \bar{A}, \text{ext}(P))$ y en los morfismos (f_1, f_2) como $\text{Ext}(f_1, f_2) = f_1$.

Este functor, olvida de cierta manera la estructura algebraica del sistema topológico Fuzzy, para conservar únicamente la (Fuzzy) topológica. Las siguientes definiciones establecen el resto de las relaciones functoriales entre las categorías estudiadas.

Definición 3.17. El functor J de **FuzzyTop** a **FuzzyTopSys** actúa en el objeto $(X, \bar{A}, \tau)$ como $J(X, \bar{A}, \tau) = (X, \bar{A}, \in, \tau)$, donde $\text{gr}(x \in \bar{T}) = \bar{T}(x)$ para todo $\bar{T} \in \tau$ y en los morfismos f como $J(f) = (f, f^{-1})$.

Tal como en el capítulo anterior, se definen dos funtores que relacionan los sistemas topológicos con la categoría **Loc** de los locales, opuesta de los marcos.

Definición 3.18. El functor fm de **FuzzyTopSys** a **Loc** actúa sobre un objeto $(X, \bar{A}, \models, P)$ como $fm(P) = P$ y sobre el morfismo (f_1, f_2) como $fm(f_1, f_2) = f_2$.

Definición 3.19. El functor S de **Loc** a **FuzzyTopSys** que actúa el objeto P como $S(P) = (\text{Hom}(P, [0, 1]), \tilde{P}, \models_*, P)$, donde $\text{Hom}(P, [0, 1]) = \{v : P \longrightarrow [0, 1]\}$, $\text{gr}(v \models_* p) = v(p)$ y $\bar{P}(v) = \bigvee_{p \in P} v(p)$ y en el morfismo f como $S(f) = (- \circ f, f)$.

Finalmente, puede probarse la extensión de los teoremas 2.15, 2.21 y 2.22.

Teorema 3.20. Ext es adjunto a derecha de J .

Demostración. Esta demostración se hace a partir de exhibir la counidad. Primero, con el objetivo de calcular la composición, recuerde que $J(X, \bar{A}, \tau) = (X, \bar{A}, \in \tau)$ y $Ext(X, \bar{A}, \models, P) = (X, \bar{A}, ext(P))$, entonces $J(Ext(X, \bar{A}, \models, P)) = (X, \bar{A}, \in, ext(P))$. Para verificar la adjunción, es necesario que el diagrama de la counidad

$$\begin{array}{ccc}
 J(Ext(X, \bar{A}, \models, P)) & \xrightarrow{\epsilon_X} & (X, \bar{A}, \models, P) \\
 \uparrow J(f) = (f_1, f_1^{-1}) & \nearrow \hat{f} = (f_1, f_2) & \\
 J(Y, \bar{B}, \tau') & &
 \end{array}$$

conmute, lo que quiere decir que todo morfismo de **FuzzyTopSys** puede ser factorizado de manera única a través de ϵ_X . Para esto, se define la counidad como $\epsilon_X = (id_X, ext')$, es decir

$$(X, \bar{A}, \in, ext(P)) \xrightarrow{(id_X, ext')} (X, \bar{A}, \models, P)$$

donde ext' es una función de P a $ext(P)$ tal que $ext'(p) = (X, ext^*(p))$ para todo $p \in P$. Ahora se hace una sencilla verificación sobre ϵ_X para mostrar que es una función continua en **FuzzyTopSys**. Claramente, funciones que la componen son propia y morfismo de marcos respectivamente, entonces, según la definición de ext' , dado que $ext^*(p)(x) = gr(x \models p)$, entonces $ext'(p)(x) = gr(x \models p)$ de donde se concluye que $gr(x \in ext'(p)) = gr(id_X(x) \models p)$ lo cual verifica la tercera condición de la definición 3.13.

Finalmente, para probar que el diagrama conmuta, se define $f = f_1$ y así se tiene que $J(f) = (f_1, f_1^{-1})$ y $\epsilon_X \circ J(f) = (id_X, ext') \circ (f_1, f_1^{-1}) = (id_X \circ f_1, f_1^{-1} \circ ext')$. De donde $id_X \circ f_1 = f_1$.

Además, si $(f_1, f_2) : J(Y, \bar{B}, \tau') \rightarrow (X, \bar{A}, \models, P)$, entonces $f_1^{-1} ext'(p) = f_1^{-1}(p) = f_2(p)$, y así, $f_2 = f_1^{-1} \circ ext'$. Lo cual prueba que el diagrama es conmutativo y a su vez que Ext es adjunto a derecha de J .

□

Teorema 3.21. El funtor fm es adjunto a izquierda del funtor S .

Demostración. Para esta demostración se exhibirá la unidad. Primero, recuerde que $fm(X, \bar{A}, \models, P) = P$ y $S(Q) = (\text{Hom}(Q, [0, 1]), \bar{Q}, \models_*, Q)$, donde $\text{gr}(v \models_* q) = v(q)$. Entonces la composición $S(fm(X, \bar{A}, \models, P)) = (\text{Hom}(P, [0, 1]), \tilde{P}, \models_*, P)$. Por tanto, debe encontrarse la unidad, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, \bar{A}, \models, P) & \xrightarrow{\eta} & S(fm(X, \bar{A}, \models, P)) \\ & \searrow f = (f_1, f_2) & \downarrow S\hat{f} \\ & & S(Q) \end{array}$$

conmute. Entonces, la unidad está definida como $\eta = (p\star, id_P)$, es decir

$$(X, \bar{A}, \models, P) \xrightarrow{(p\star, id_P)} S(fm(X, \bar{A}, \models, P))$$

donde $p\star : (X, \bar{A}) \rightarrow (\text{Hom}(P, [0, 1]), \tilde{P})$ tal que para cualquier $x \in |\bar{A}|$, $p\star(x)$ es una función de P a $[0, 1]$ y $p\star(x)(p) = \text{gr}(x \models p)$. Ahora, se verifica que la función $(p\star, id_P) : (X, \bar{A}, \models, P) \rightarrow S(Loc(X, \bar{A}, \models, P))$ es continua en los espacios topológicos Fuzzy. Para esto, es suficiente probar que se cumple la última condición de 3.13, es decir $\text{gr}(x \models id_P(p)) = \text{gr}(p\star(x) \models p)$.

Pero se tiene que, por la definición de $p\star$, $\text{gr}(x \models p) = p\star(x)(p) = \text{gr}(p\star(x) \models p)$. De donde se tiene la igualdad deseada.

Ahora, si se define $(f_1, f_2) : (X, \bar{A}, \models, P) \rightarrow (\text{Hom}(P, [0, 1]), \tilde{P}, \models_*, P)$, entonces $\hat{f} = f_2$, dado que f_2 es homomorfismo de marcos. Para probar que el triángulo es conmutativo, recuerde que $S(\hat{f}) = (- \circ f_2, f_2)$. Tiene que probarse que $(f_1, f_2) = (- \circ f_2, f_2) \circ (p\star, id_P) = ((- \circ f_2)p\star, id_P \circ f_2)$. Es claro que $f_2 = id_P \circ f_2$. Ahora, solo hace probar que $f_1 = (- \circ f_2)p\star = p_x \circ f_2$.

Para todo $q \in Q$ se tiene que

$$\begin{aligned}
p \star (x) \circ f_2(q) &= p \star (x) (f_2(q)) \\
&= gr(x \models f_2(q)) \\
&= gr(f_1(x) \models_* q) \\
&= f_1(x)(q).
\end{aligned}$$

Entonces, $(- \circ f_2) p \star = f_1$, lo cual demuestra la adjunción deseada vía la unidad. $\square$

Teorema 3.22. El funtor $Ext \circ S$ es adjunto derecha del funtor $fm \circ J$.

Demostración. De los dos teoremas anteriores se concluye el resultado. $\square$

3.1. Conclusiones

- Las relaciones categóricas entre los sistemas topológicos (Fuzzy, respectivamete), los espacios topológicos (Fuzzy, respectivamente) y los locales, quedaron establecidas a manera de adjunción. Esto proporciona alternativas para resolver problemas topológicos de forma albraica y viceversa.
- Se reconstruyó detalladamente la prueba hecha por Janna de dichas adjunciones de categorías que tiene como conjunto subyacente los conjuntos Fuzzy, usando ejemplos previos para dar una mejor intuición del los conceptos a definir y estudiar.
- En el caso clásico, es conocido que también existe una dualidad entre la subcategoría de los espacios topológicos sobrios y la categoría de los marcos, esta no fue estudiada, pues el objetivo fue desarrollar la extensión al caso Fuzzy desde la adjunción clásica. No obstante, un objetivo futuro es estudiar la posible *fuzzyficación* de los espacios topológicos sobrios y la posible extensión de dicha dualidad para el caso Fuzzy.
- Futuros temas de investigación pueden ser la fuzzyficación de la lógica geométrica, que fue la principal motivación de Vickers para introducir el concepto de sistema topológico; los sistemas topológicos fuzzy con conjuntos subyacentes distintos,

por ejemplo los de Łukasiewicz; y la correlación de estas adjunciones con lógicas multivaluadas.

Bibliografía

- [1] S. J. Vickers, *Topology Via Logic*, volume 5, Cambridge Tracts Theoret. Comput. Sci., 1989.
- [2] J. Purbita; C. Mihir K., *Categorical relationships of fuzzy topological systems with fuzzy topological spaces and underlying algebras II*. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics **10**, 2015.
- [3] S. J. Vickers, *Topology via Constructive Logic*, in *Logic, Language and Computation*, 1999.
- [4] W. Van Den Haute, *Compactness and the Stone-Weierstrass theorem in point-free topology*, Vrije Universiteit Brussel, 2013.
- [5] J. Picado, A. Pultr, *Frames and Locales, Topology without points*, Springer Basel, 2012.
- [6] D. Armstrong, *Fancy Algebra. Part I: Adjoint Functors*, University of Miami, 2016.
- [7] K. Nomizu, *Fundamentals of Linear Algebra*, Brown University, 1966.
- [8] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, 1965.
- [9] J. Adámek; H. Herrlich; G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons, 1990.
- [10] S. Roman, *An introduction to the Language of Category Theory*, Birkhäuser, 2010.

- [11] A. Jose; S.C. Mathew, *Invertible Fuzzy Topological Spaces*, Springer, 2022.
- [12] M.K. Chakraborty; T.M.G. Ahsannullah, *Fuzzy topology on Fuzzy sets*, Fuzzy sets and Systems, 1992.
- [13] C. L. Chang; *Fuzzy topological spaces*, J. Math. Anal. Appl. 24 (1968) 182–190.