

**CÁLCULO DE ESPECTROS DE
REFLECTANCIA DE UN CRISTAL FOTÓNICO
1D DE GEOMETRÍA CILÍNDRICA CON
COMPONENTES
SUPERCONDUCTOR-DIELÉCTRICO**

Carlos Alberto Herrera Vargas

Trabajo de Grado presentado como
requisito para optar al título de Físico

Director

Dr. Jesús María Calero Quintero

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

2019

Resumen

Cada vez más científicos son partícipes del campo de investigación sobre el desarrollo teórico y experimental de dispositivos que sirven para la generación, manipulación y detección de la luz. Estos dispositivos hacen parte de un nuevo campo tecnológico conocido como optoelectrónica y cuyo funcionamiento complementaría o hasta sustituiría la tecnología que usa dispositivos electrónicos, esto se debe a ventajas atribuidas a los fotones ya que jugarían el mismo papel de los electrones pero harían su labor a velocidades mucho mayores y sin disipar su energía en forma de calor. Una forma de manipular la luz es a través de los cristales fotónicos, estos son arreglos periódicos de materiales con distinto índice de refracción, la luz que viaja a través de este material experimenta interferencia destructiva o constructiva por las múltiples reflexiones y transmisiones que ocurren en las interfaces que separan los medios haciendo que se establezcan rangos de frecuencias donde no es permitida la transmisión de la luz. Estos rangos de frecuencias de luz no permitidas se pueden controlar variando parámetros geométricos del cristal fotónico o con las propiedades ópticas de los materiales que componen este dispositivo.

En este trabajo de grado se llevó a cabo el estudio teórico del comportamiento óptico de cristales fotónicos 1D de simetría anular obteniendo resultados numéricos a través del método de la matriz de transferencia en coordenadas cilíndricas para ondas que divergen del eje de simetría con polarización TM. Este método nos proporcionó valores de reflectancia en función de longitudes de onda o frecuencias de la luz, cuyas gráficas son conocidas como espectros de reflectancia. Para construir la matriz de transferencia se parte de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas, de allí se desprenden tres ecuaciones diferenciales, cada una respecto a una de las coordenadas (ρ, ϕ, z) . La ecuación diferencial relevante para este caso es la que depende de la coordenada ρ ya que es en esta dirección que la luz experimentará un índice de refracción periódico. Esta ecuación toma la forma de una ecuación diferencial de Bessel de orden m , donde m es el número de estado azimutal y admite solo valores enteros. La solución propuesta para esta ecuación y que es la análoga a las funciones de onda plana, son llamadas funciones de Hankel de primer y segundo tipo. Una vez escrito los campos eléctricos y magnéticos en términos de las funciones de Hankel se establecerán las condiciones de continuidad en la frontera para finalmente obtener la matriz de transferencia de un cristal fotónico en coordenadas cilíndricas.

Estos cristales fotónicos están constituidos por bicapas de material superconductor y dieléctrico, proporcionando para la primera configuración YBa_2CO_7 como material superconductor y MgO como dieléctrico. El rango de longitudes de onda a evaluar está centrado en la longitud de onda de plasma del superconductor $\lambda_{ps} = 1245nm$ y cuyo límite inferior está determinado de tal manera que la onda propagante no sobrepase la energía permitida del gap superconductor dada por la relación $\hbar\omega = 2\Delta E_g$. En

el primer resultado se hace una comparación del espectro de reflectancia obtenido para cristales fotónicos de simetrías cartesiana y anular en el caso límite de radio del núcleo mucho más grande que el espesor de las bicapas $\rho_0 \gg d$. En este caso límite las propiedades ópticas en las dos simetrías arrojaron resultados idénticos que era lo que se buscaba ya que esto es un indicador de que el código desarrollado en el software Mathematica 11.2, que simula este sistema, es correcto. En los siguientes resultados numéricos se obtiene un gap superpolaritón que se debe a la presencia del material superconductor y que aparece alrededor de la longitud de onda de plasma del superconductor λ_{ps} . Este gap es sensible al número de estado azimutal m y se puede desplazar a lo largo del rango de longitudes de onda variando la temperatura del sistema, por otro lado se muestra también el comportamiento del espectro de reflectancia y del gap superpolaritón al variar otros parámetros como los espesores de las capas anulares e índices de refracción del dieléctrico.

Para la segunda configuración se utiliza $Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$ como superconductor y material dieléctrico no especificado pero cuyo índice de refracción relativo es $n_{2r} = \sqrt{40}$. El rango frecuencias a evaluar está centrado en la frecuencia de plasma del superconductor $\omega_{ps} = 2,73THz$ y cuyo límite superior está determinado de tal manera que la onda propagante no sobrepase la energía permitida del gap superconductor dada por la relación $\hbar\omega = 2\Delta E_g$. Los primeros resultados numéricos nos muestra que se establece bandas de frecuencias de alta reflectancia debida a la periodicidad del material pero también un gap superpolaritón alrededor de la frecuencia de plasma ω_{ps} que depende de la naturaleza del superconductor. Este gap aparece para números de estado azimutal $m > 0$ y su ancho de banda aumenta a medida que aumenta m . Podemos ver también que al variar la temperatura del sistema, el gap superpolaritón se desplaza en el rango de frecuencias a evaluar. Por último se muestra el comportamiento del espectro al variar otros parámetros como el de los espesores de las capas anulares y del índice de refracción del dieléctrico.

Índice general

Título	I
Resumen	II
1. Introducción	1
2. Transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas en un cristal fotónico de geometría cartesiana	4
2.1. Ecuaciones de Maxwell	4
2.2. Ondas planas en una interfaz con simetría cartesiana	5
2.3. Coeficientes de Transmisión y reflexión	7
2.3.1. Polarización TE	7
2.3.2. Polarización TM	10
2.4. Transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas planas que inciden en un arreglo periódico multicapa	12
2.5. Cristal fotónico 1D	14
3. Transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas en un cristal fotónico de geometría cilíndrica	16
3.1. Ecuación de onda de un reflector de Bragg anular	16
3.2. Matriz de transferencia en la base de ondas estacionarias	19
3.3. Matriz de transferencia en la base de ondas propagantes	21
4. Comportamiento de las ondas electromagnéticas en un medio superconductor	25
4.1. Propiedades magnéticas de los superconductores	25
4.2. Teoría de London de la superconductividad	27
4.3. Modelo de los “dos fluidos” de un superconductor	28
5. Resultados	31
5.1. Espectros de reflectancia de cristales fotónicos 1D de componente superconductor $YBa_2Cu_3O_7$	31
5.1.1. Espectro de reflectancia de cristales fotónicos anular y planar bajo las mismas condiciones	31

5.1.2.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el número azimutal m	33
5.1.3.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar la temperatura T	33
5.1.4.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el índice de refracción relativo n_{r2} del dieléctrico	36
5.2.	Espectros de reflectancia de cristales fotónicos 1D de componente superconductor	
	$Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$	37
5.2.1.	Espectro de reflectancia de cristales fotónicos anular y planar bajo las mismas condiciones	37
5.2.2.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el número de modo azimutal m	39
5.2.3.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar la temperatura T	40
5.2.4.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar sus parametros geométricos	42
5.2.5.	Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el índice de refracción relativo n_{r2} del dieléctrico	44
6.	Conclusiones y perspectivas	46
	Bibliografía	48

Capítulo 1

Introducción

Los cristales fotónicos son arreglos periódicos de materiales con distinto índice de refracción, esto hace que la luz que se propaga experimente periodicidad en el índice de refracción efectivo n_{ef} del cristal fotónico. Este tipo de arreglos nos permite la manipulación de la luz ya que podemos controlar para qué rangos de frecuencias la luz se transmite y para qué rangos la luz se refleja. Los rangos para los cuales no hay transmisión de luz se conocen como PBGs que son las siglas en inglés de Photonic Band Gaps [1]. Debido a los avances tecnológicos, los cristales fotónicos pueden fabricarse artificialmente en una, dos y tres dimensiones. Los cristales fotónicos se han propuesto como complemento en diferentes tipos de sistemas con diversas aplicaciones, a saber, como concentración extrema de campo electromagnético, optoelectrónica y biosensores etc [1–9].

En 1887 Lord Rayleigh fue la primera persona que estudió la propagación de ondas electromagnéticas en un medio periódico obteniendo peculiares propiedades reflectivas en un mineral cristalino con periodicidad planar que llamo twinning que correspondería a un cristal fotónico 1D [2]. En 1987 Yablonovitch, usando herramientas de la teoría del electromagnetismo clásico y la teoría de la física del estado sólido, obtuvo lo que llamó photonic band gaps, esta vez más generalizado porque se incluían 2 y 3 dimensiones y que inspiró el nombre con los que se conoce actualmente a estos materiales [10]. Un cristal fotónico dos dimensional es periódico a lo largo de dos ejes y homogéneo a lo largo del tercero. Dos modelos típicos son los de una red cuadrada de columnas dieléctricas apiladas o como columnas inmersas en un medio con distinta permitividad dieléctrica. Solo bastó un poco más de 3 años para agregar la tercera dimensión y así obtener un cristal fotónico 3D, el cual muestra periodicidad a lo largo de los tres ejes, este fue obtenido por el grupo del físico Yablonovitch en 1991 donde la técnica de fabricación consistía de un arreglo triangular de agujeros [11–13].

Nuestra atención se direccionará a los cristales fotónicos 1D que son arreglos periódicos de capas alternadas de materiales con diferentes respuestas electromagnéticas.

Si una onda plana se propaga a través de este sistema, las múltiples reflexiones y cambios de fase que experimenta la luz incidente en cada interfaz, conlleva a interferencias constructivas y destructivas, donde estas últimas dan como resultado las brechas o bandas prohibidas de frecuencias (gaps), las cuales separan las bandas permitidas de propagación dentro del material [15, 16]. Este sistema permite la manipulación de la luz análogamente como se hace con los electrones en semiconductores y transistores. Estos cristales unidimensionales son la versión más simplificada para el estudio de este fenómeno y para la realización de cálculos como el de las bandas prohibidas de frecuencias y coeficientes de transmisión y reflexión, pero que arroja resultados muy importantes los cuales se pueden generalizar. En 1988 P. Yeh propone para este sistema, recurrir a uno de los métodos numéricos que hasta ahora ha sido muy utilizado conocido como método de matriz de transferencia (MMT) y que aborda este problema como uno de valores propios [17]. En el capítulo 2 se presentará la teoría que permite llevar el proceso matemático referente a cristales fotónicos 1D con simetría cartesiana.

En este trabajo de grado se estudia un cristal fotónico con estructura de multicapas periódicas anulares cuya teoría se presenta en el capítulo 3. El interés de abordar el estudio de este tipo de cristales, en parte se debe a los interesantes resultados teórico experimentales y a las aplicaciones encontradas y proyectadas a futuro. Este tipo de cristales llamaron la atención de una parte de la comunidad científica desde 1978 cuando los físicos Pochi Yeh y Amnon Yariv propusieron, con base en esta estructura cilíndrica, lo que ellos llamaron teoría de fibras de Bragg, que abrió un campo de investigación en la optimización de las fibras ópticas [18–20]. Estas redes de difracción de Bragg aventajan a las tradicionales por su baja pérdida de potencia por inserción y la gran flexibilidad que ofrecen para conseguir las características espectrales deseadas para el filtrado óptico, lo que se consigue sin más que con la variación en los parámetros físicos del índice de refracción. En la actualidad se ve este tipo de fibras como los posibles medios más efectivos en cuanto al transporte de información cuántica [21]. En 1994 aparece un reporte hecho por Er-Xuan Ping de la Universidad del Estado de Iowa en donde se hacía un análisis comparativo entre el espectro de transmisión de estructuras multicapas con geometrías planares, cilíndricas y esféricas de componentes dieléctricas, encontrando que para ciertos parámetros los espectros se comportaban idénticamente [22]. Este análisis comparativo se llevó a cabo con nuestros cristales fotónicos de simetría plana y cilíndrica y se presenta en la sección de resultados 5. En 1999 V. V. Nikolaev et al., propusieron estos cristales cilíndricos como reflectores de Bragg para ondas cilíndricas cuya aplicación iría dirigida a dispositivos de la optoelectrónica como los láseres de emisión vertical [23]. En el 2005 aparece una de las primeras aplicaciones llevada a cabo por el equipo de Jacob Scheuer y Amnon Yariv quienes desarrollaron un láser de Bragg anular de InGaAsP cuyas aplicaciones se proyectarían hacia los campos de la bioquímica, espectroscopia molecular y muy posiblemente a tecnologías de información cuántica [24, 25]. En el 2009 Mei-Soong Chen y sus colegas llevaron a cabo el estudio teórico

de las propiedades ópticas de estructuras periódicas de multicapas anulares a partir del método de matriz de transferencia y cuyos componentes son materiales dieléctrico con superconductor y dieléctrico con metamaterial [26, 27]. Cabe resaltar que en esta tesis se reproducirá uno de los resultados reportados por Mei-Soong Chen a modo de comparación y como otro indicador que nos confirmará que nuestro modelo matemático y código implementado funcionan correctamente. En 2012 se lleva a cabo el estudio teórico y experimental de láseres con emisión radial a partir de fibras de Bragg [28, 29]. Más tarde B.B. Hong y sus colegas proponen una cavidad resonante de cristal fotónico con núcleo hueco como girotrón, cuyas frecuencias de radiación están en el orden de los terahertz, reportando sus resultados teóricos en enero del 2015 [30]. En 2016 Xiankai Sun y sus colegas proponen un nuevo laser semiconductor circular implementando el concepto de simetría PT (Parity-Time) [31]. En este mismo año Sanjeev Srivastava lleva a cabo el análisis teórico de cristales fotónicos anulares ternarios 1D con componentes semiconductor, superconductor, dieléctrico. En este trabajo se reportan resultados del comportamiento de los espectros de reflectancia para ondas que divergen del eje de simetría con polarización TE y TM [33]. En 2017 se reportan los estudios teóricos de cristales cilíndricos por parte de Samad Entezar usando grafeno como una de sus componentes [35], y metamateriales por parte de Sahar El-Naggar [34]. En ambos artículos se puede encontrar un minucioso análisis del comportamiento óptico de estos cristales fotónicos debido a sus componentes y a sus respectivos parámetros geométricos.

En este trabajo de grado se lleva a cabo el estudio de cristales fotónicos con simetría cilíndrica con componentes anulares constituidas de material superconductor y dieléctrico de espesores d_1 y d_2 respectivamente y cuyo núcleo de radio ρ_0 está vacío. El análisis se hará con dos superconductores distintos, el primero con $YBa_2Cu_3O_7$ y el segundo es $Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$. La teoría necesaria acerca de la superconductividad se presenta en el capítulo 4.

Capítulo 2

Transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas en un cristal fotónico de geometría cartesiana

En este capítulo, se presentará una forma de obtener los coeficientes de transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas que se propagan a través de una interfaz que separa dos medios. Esto se hará usando la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos que nos permitirá obtener la matriz de transferencia y así escribir los coeficientes de transmisión y reflexión en términos de los elementos de esta matriz.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

El estudio de los cristales fotónicos se inicia con las ecuaciones de Maxwell ya que describen los fenómenos electromagnéticos en la naturaleza. En esta ocasión utilizaremos dichas ecuaciones para describir el comportamiento de las ondas electromagnéticas en ausencia de fuentes, dicho esto, podemos escribir el conjunto de ecuaciones (en el sistema SI) de la siguiente manera [37]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ y $\vec{H}$ representan los campos eléctrico, magnético, desplazamiento eléctrico e intensidad de campo magnético, respectivamente. Ahora, asumiendo

además que los medios en los cuales se propaga la onda electromagnética poseen polarización lineal y con una respuesta magnética despreciable, podemos escribir

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.6)$$

donde ε_0 y μ_0 representan la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética en el vacío, respectivamente, y $\varepsilon(\omega)$ es la permitividad dieléctrica que representa la respuesta del medio (relativa al vacío) ante la onda incidente, cuya respuesta depende de la frecuencia (angular) de la onda. Unas de las soluciones a las ecuaciones de Maxwell son las intensidades de campo eléctrico y magnético en la versión de ondas planas, que se representan como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]}, \quad (2.7)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]}, \quad (2.8)$$

Donde $\vec{E}_0$, y $\vec{H}_0$ son las amplitudes, $\vec{k}$ es el vector de onda, $\vec{r}$ es el vector de posición y ω es la frecuencia angular de la onda. Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de Maxwell obtenemos

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (2.9)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}. \quad (2.10)$$

A partir de estas ecuaciones podemos obtener una relación entre el vector de onda $\vec{k}$ y la frecuencia angular ω , conocida como la relación de dispersión, que será indispensable más adelante para obtener otras expresiones importantes como la ley de Snell por ejemplo. Para conseguir esta relación se debe llevar a cabo los siguientes pasos

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}, \\ \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) &= -\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{k} \times \vec{E}, \\ -k^2 \vec{H} &= -\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) [\omega \vec{B}], \\ k^2 \vec{H} &= \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) [\mu_0 \vec{H}], \\ k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

2.2. Ondas planas en una interfaz con simetría cartesiana

Para entender el formalismo de la matriz de transferencia aplicado a un cristal fotónico con simetría cilíndrica es oportuno mostrar el análisis llevado a cabo sobre

uno de simetría cartesiana. Para esto, considérese una onda electromagnética que incide formando un ángulo θ_1 con la normal a la interfaz que separa dos medios caracterizados por tener permitividades eléctricas ϵ_1, ϵ_2 y permeabilidades magnéticas μ_1, μ_2 como se ve en la figura 2.1 . Allí se puede ver que se refleja parte de la onda con un ángulo θ_r y se transmite la otra parte formando un ángulo θ_2 [37].

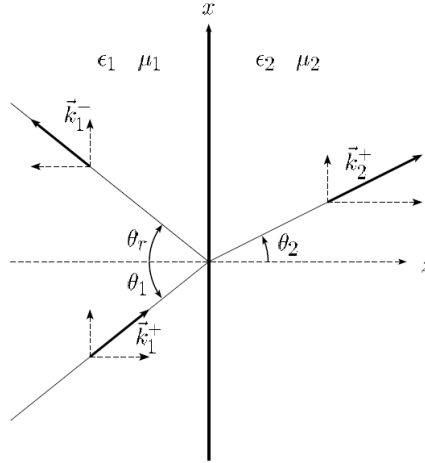


Figura 2.1: Reflexión y refracción de una onda electromagnética plana que se propaga entre dos medios [37].

El sistema de coordenadas escogido es tal que la interface entre los dos medios es perpendicular al eje z y al plano de incidencia, el cual es el plano determinado por la normal a la interface y la dirección de propagación de la onda electromagnética. Esta geometría permite que el vector de onda tenga solo dos componentes

$$\vec{k} = \left(\vec{k}_x, 0, k_z \right). \quad (2.12)$$

Dado que la onda electromagnética se propaga en dos dimensiones debemos prestar atención a la hora de buscar información del comportamiento de la onda en la frontera entre los dos medios. Se presenta entonces la condición de continuidad de las componentes tangenciales de ambos campos en la interfaz que viene dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1t} &= \vec{E}_{2t}, \\ \vec{H}_{1t} &= \vec{H}_{2t}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

de manera análoga podemos decir lo mismo de las componentes tangenciales de los vectores de onda

$$k_{1x} = k_{2x} = k_x. \quad (2.14)$$

Con esta condición de continuidad de las componentes de los vectores de onda podemos escribir la relación de dispersión en esta forma

$$\begin{aligned}\frac{n_1^2}{c^2}\omega^2 &= k_1^2 = k_x^2 + k_{1z}^2, n_1 = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}, \\ \frac{n_2^2}{c^2}\omega^2 &= k_2^2 = k_x^2 + k_{2z}^2, n_2 = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2},\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde n es el índice de refracción. Según la geometría mostrada en la figura 2. podemos escribir la componente del vector de onda así

$$k_x = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2,\tag{2.16}$$

con las ecuaciones (2.15) y (2.16) obtenemos

$$k_x = n_1 \frac{\omega}{c} \sin\theta_1 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin\theta_2,\tag{2.17}$$

y así finalmente obtener la siguiente relación

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1},\tag{2.18}$$

conocida como la ley de Snell que nos permite obtener el ángulo del rayo refractado conociendo el ángulo de incidencia y los índices de refracción de los medios.

2.3. Coeficientes de Transmisión y reflexión

Se analizará por separado dos casos en la forma en que incide el campo electromagnético a la interfaz. El primer caso es cuando el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ es paralela a la interfaz. Este caso es conocido como onda con polarización TE (siglas en inglés de transverse electric). El segundo caso es el cual el vector de campo magnético $\vec{H}$ es paralelo a la interfaz. Este caso es conocido como onda con polarización TM (siglas en inglés de transverse magnetic) [37].

2.3.1. Polarización TE

Considérese, de nuevo, una onda electromagnética que incide sobre la interfaz que separa dos medios caracterizados por tener permitividades eléctricas ε_1 , ε_2 y permeabilidades magnética μ_1 , μ_2 .

Como se dijo anteriormente, si el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia y paralelo a la interfaz, se dice entonces que tiene polarización TE. De esta forma y según nuestro sistema de referencia que se muestra en la figura 2.2, el vector de campo eléctrico solo tiene componente en la dirección $\hat{y}$, así este vector de

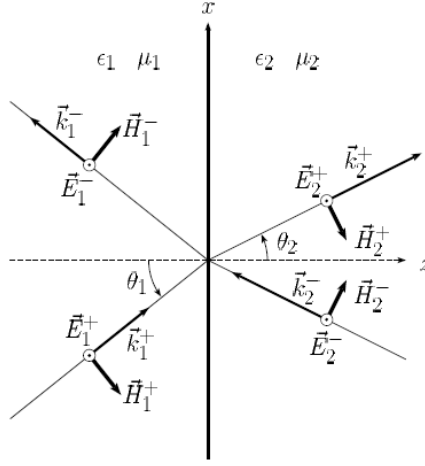


Figura 2.2: Reflexión y refracción de una onda electromagnética plana que se propaga entre dos medios [37].

campo eléctrico está determinado por $\vec{E}=(0,\vec{E}_y,0)$ y el magnético por $\vec{H}=(\vec{H}_x,0,\vec{H}_z)$.

En la figura 2.2 se muestra las componentes de campo que se propagan de izquierda a derecha denotadas con un superíndice $+$, y las componentes que se propagan de derecha a izquierda denotadas con superíndice $-$ [37]. Al aplicar las ecuaciones de Maxwell a la frontera de la interfaz se obtiene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad (2.19)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0, \quad (2.20)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad (2.21)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0. \quad (2.22)$$

Estas nos permiten obtener las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en la interfaz dados por

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-, \quad (2.23)$$

$$H_{1x}^+ + H_{1x}^- = H_{2x}^+ + H_{2x}^-. \quad (2.24)$$

Para expresar todo en términos de campos eléctricos se usa una de las ecuaciones de Maxwell, exactamente la de Faraday, escrita de la siguiente forma

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\mu\omega}{c} \vec{H}, \quad (2.25)$$

que al sustituir en la condición de frontera (2.24) se obtiene:

$$-\frac{k_{1z}c}{\mu_1\omega}\vec{E}_1^+ + \frac{k_{1z}c}{\mu_1\omega}\vec{E}_1^- = -\frac{k_{2z}c}{\mu_2\omega}\vec{E}_2^+ + \frac{k_{2z}c}{\mu_2\omega}\vec{E}_2^-, \quad (2.26)$$

que junto con la ecuación (2.23) formarían un sistema de ecuaciones lineales y que se expresarían en esta forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k_{1z}}{\mu_1} & +\frac{k_{1z}}{\mu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k_{2z}}{\mu_2} & +\frac{k_{2z}}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Por medio del producto de matriz con su matriz inversa podemos expresar el campo eléctrico del lado derecho de la interfaz en términos del campo del lado izquierdo

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Esta matriz resultante se le conoce como matriz de transferencia $\mathbf{M}^{\text{TE}}$ para ondas con polarización TE

$$\mathbf{M}^{\text{TE}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

donde los elementos de matriz en este tipo de polarización están determinados por las permeabilidades magnéticas de los materiales y por las componentes en la dirección z de los vectores de onda. Además esta matriz de transferencia se obtuvo para el caso en general, donde incidían sobre la interfaz ondas electromagnéticas de izquierda a derecha $\vec{E}_1^+$ y de derecha a izquierda $\vec{E}_2^-$. Si solo hacemos incidir una onda de izquierda a derecha $\vec{E}_1^+$ entonces la onda $\vec{E}_2^-$ tomaría el valor de cero y junto con la ecuación (2.48) obtendríamos

$$\begin{aligned} E_2^+ &= M_{11}^{(TE)} E_1^+ + M_{12}^{(TE)} E_1^-, \\ E_2^- &= 0 = M_{21}^{(TE)} E_1^+ + M_{22}^{(TE)} E_1^-. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se definen entonces las amplitudes de transmisión y reflexión para el campo eléctrico así

$$t_{TE} = \frac{E_2^+}{E_1^+}, \quad (2.31)$$

$$r_{TE} = \frac{E_1^-}{E_1^+}. \quad (2.32)$$

Usando de forma explícita la matriz de transferencia, las amplitudes de transmisión y reflexión quedarían escritas así:

$$t_{TE} = \frac{\det M^{(TE)}}{M_{22}^{(TE)}} = \frac{2\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z} + \mu_2 k_{1z}} \quad (2.33)$$

y

$$r_{TE} = -\frac{M_{21}^{(TE)}}{M_{22}^{(TE)}} = \frac{\mu_2 k_{1z} - \mu_1 k_{2z}}{\mu_1 k_{2z} + \mu_2 k_{1z}}. \quad (2.34)$$

El coeficiente de transmisión de una onda electromagnética, se define como la razón entre el flujo promedio de energía transmitido a través de la superficie y el flujo promedio de energía que incide. Para determinar estos flujos se requiere calcular los respectivos vectores de poynting

$$S_1 = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}_1^+ \times \vec{H}_1^{+*}] = \frac{c}{8\pi} \frac{\text{Re}[k_{1z}]}{\mu_1 \omega} |E_1^+|^2, \quad (2.35)$$

$$S_2 = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}_2^+ \times \vec{H}_2^{+*}] = \frac{c}{8\pi} \frac{\text{Re}[k_{2z}]}{\mu_2 \omega} |E_2^+|^2. \quad (2.36)$$

El coeficiente de transmisión y de reflexión para las ondas TE-polarizadas se puede expresar como

$$T_{TE} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\text{Re}[k_{2z}]}{\text{Re}[k_{1z}]} |t_{TE}|^2, \quad (2.37)$$

$$R_{TE} = |r_{TE}|^2 = 1 - T_{TE}. \quad (2.38)$$

2.3.2. Polarización TM

De forma semejante, al de incidencia con polarización TE, se hace el análisis para las ondas electromagnéticas que inciden sobre la interfaz con polarización TM. Aquí el vector de campo magnético es perpendicular al plano de incidencia y como se muestra en la figura 2.3 solo tiene componente en la dirección y . El campo eléctrico tiene componentes en las otras dos direcciones. Lo anterior se puede resumir con estas expresiones

$$\vec{H} = (0, H_y, 0), \quad (2.39)$$

$$\vec{E} = (E_x, 0, E_z), \quad (2.40)$$

la relación entre los campos estará determinada por un sistema de ecuaciones que se escribirá de forma compacta así

$$\begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^- \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{\text{TM}} \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

donde M^{TM} es la matriz de transferencia para ondas en polarización TM

$$\mathbf{M}^{TM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon_2 k_{1z}}{\varepsilon_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\varepsilon_2 k_{1z}}{\varepsilon_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\varepsilon_2 k_{1z}}{\varepsilon_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\varepsilon_2 k_{1z}}{\varepsilon_1 k_{2z}} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

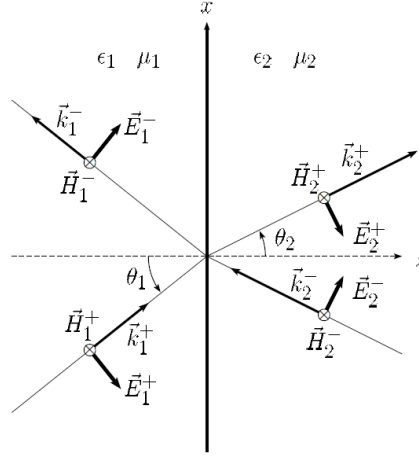


Figura 2.3: Reflexión y refracción de una onda electromagnética plana con polarización TM que se propaga entre dos medios [37].

Las amplitudes de transmitancia y reflectancia están dadas por:

$$t_{TM} = \frac{\det M^{TM}}{M_{22}^{(TM)}} = \frac{2\varepsilon_2 k_{1z}}{\varepsilon_2 k_{2z} + \varepsilon_1 k_{1z}} \quad (2.43)$$

y

$$r_{TM} = -\frac{M_{21}^{(TM)}}{M_{22}^{(TM)}} = \frac{\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{1z} + \varepsilon_1 k_{2z}}. \quad (2.44)$$

Finalmente, los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas TM-polarizadas son:

$$T_{TM} = \frac{\varepsilon_2 \operatorname{Re}[k_{2z}]}{\varepsilon_1 \operatorname{Re}[k_{1z}]} |t_{TM}|^2 \quad (2.45)$$

$$R_{TM} = |r_{TM}|^2 \quad (2.46)$$

2.4. Transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas planas que inciden en un arreglo periódico multicapa

En esta sección se analiza el comportamiento de la luz cuando incide sobre un sistema multicapa, de esta manera se hará un análisis general para encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión usando el método de la matriz de transferencia para un arreglo multicapa periódico. Considérese 3 medios con permitividades dieléctricas ϵ_1 , ϵ_2 , y ϵ_3 , permeabilidades magnéticas μ_1 , μ_2 , y μ_3 , cuyos medios están delimitados en las siguientes subregiones: $z < 0$ para el medio 1, $0 < z < l$ medio 2 y $z > l$ para el medio 3. Lo anterior se ilustra en la figura 2.4 para el caso de un onda TE polarizada.

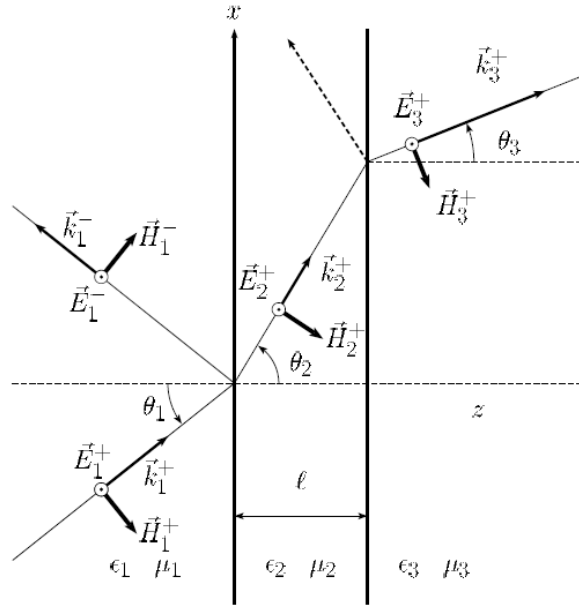


Figura 2.4: Reflexión y refracción de una onda electromagnética plana con polarización TE que se propaga a través de un slab con periodicidad en una dimensión y cuyos medios son de dimensión l [37].

La función de campo en el medio 3 se puede escribir en términos de la matriz de transferencia actuando sobre la función de entrada, de esta forma:

$$\begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix} = M_{23} \begin{pmatrix} e^{ik_{2z}l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{2z}l} \end{pmatrix} M_{12} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

donde M^{12} y M^{23} son las matrices de transferencias para las interfaces que forman

el medio 1 con el medio 2 y del medio 2 con el medio 3 respectivamente. Estas se calcularon en la sección 2.3.1. La matriz diagonal es la matriz de propagación del medio homogéneo entre las dos interfaces y se denotará con la letra P . Al multiplicar estas 3 matrices obtenemos la matriz de transferencia del slab M_{slab}^{TE} para una onda con polarización TE

$$\begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix} = M_{slab}^{TE} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

las expresiones explícitas para los elementos de la matriz M_{slab}^{TE} son:

$$M_{1,1}^{(TE)} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} \left[\frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right] \sin k_{2z} l, \quad (2.49)$$

$$M_{1,2}^{(TE)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} \left[\frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right] \sin k_{2z} l, \quad (2.50)$$

$$M_{2,2}^{(TE)} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} \left[\frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right] \sin k_{2z} l, \quad (2.51)$$

$$M_{1,2}^{(TE)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} \left[\frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right] \sin k_{2z} l, \quad (2.52)$$

las amplitudes de transmisión y reflexión son entonces

$$t_{TE} = \frac{E_3^+}{E_1^+} = \frac{\det M^{TE}}{M_{22}^{(TE)}}, \quad (2.53)$$

$$r_{TE} = \frac{E_1^-}{E_1^+} = -\frac{M_{21}^{TE}}{M_{22}^{(TE)}}, \quad (2.54)$$

y los correspondientes coeficientes de transmisión y reflexión

$$T_{TE} = \frac{S_3}{S_1} = \frac{\mu_1 \operatorname{Re}[k_{3z}]}{\mu_3 \operatorname{Re}[k_{1z}]} |t_{TE}|^2, \quad (2.55)$$

$$R_{TE} = |r_{TE}|^2. \quad (2.56)$$

De forma semejante podemos encontrar la matriz de transferencia para incidencias de ondas con polarización TM

Hemos encontrado así, la matriz de transferencia de una interfaz y a partir de esta, la matriz de transferencia para un slab. En la siguiente sección se mostrará cómo finalmente se obtendrá la matriz para un cristal partiendo de la matriz de transferencia de un slab.

2.5. Cristal fotónico 1D

Los cristales fotónicos 1D son estructuras que se forman por la repetición infinita de dos tipos de capas con índices de refracción n_1 y n_2 como se muestra en la figura 2.5. Esta estructura representa una nueva clase de material ya que establece en la luz un comportamiento análogo al de los electrones en los materiales semiconductores conocido como bandas de energías prohibidas. En este caso, los cristales fotónicos establecen un rango de frecuencias prohibidas en las que las ondas electromagnéticas no pueden transmitirse a lo largo de este material.

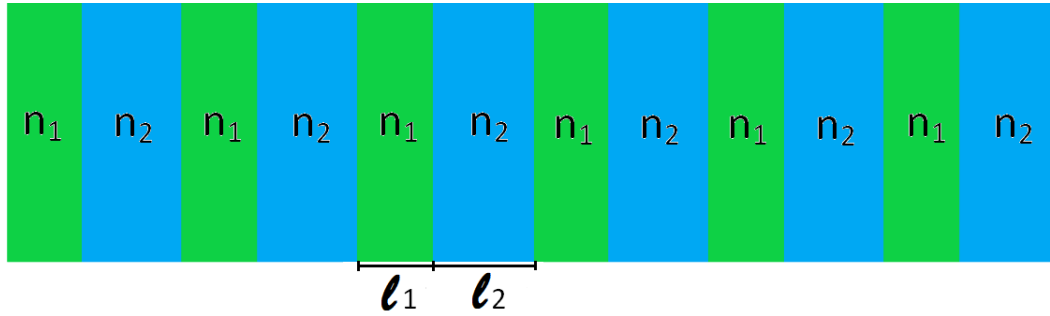


Figura 2.5: Representación de un cristal fotónico 1D compuesto de dos capas de espesor l_1 y l_2 con índices de refracción n_1 y n_2 .

En este caso se hallará la matriz de transferencia U para una celda unitaria a partir de las matrices de transferencia de cada slab obtenida en la sección 2.4. Esta celda unitaria se puede definir como aquella para la cual la permitividad dieléctrica cumple que $\varepsilon(z+l) = \varepsilon(z)$, donde $l = l_1 + l_2$. Para esto debemos tener en cuenta que la onda se propaga del medio 1 al medio 2 a través de la interface 1-2, luego viaja dentro del medio 2 para pasar del medio 2 al medio 1 y propagarse por el medio 1, finalmente el proceso se repite. Esta matriz se representa con la ecuación

$$U = M_{21}P_2M_{12}P_1, \quad (2.57)$$

en esta ecuación M_{ij} y p_j representan las siguientes matrices

$$M_{ij} = \frac{1}{2n_i} \begin{pmatrix} n_i + n_j & n_i - n_j \\ n_i - n_j & n_i + n_j \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$P_j = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_j} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_j} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

donde $k_{iz} = n_i \cos \theta_i$ y $\phi_j = k_{jz}l_j$ [37]. Se identifica claramente N segmentos geométricos idénticos o períodos. Para obtener la matriz de transferencia del cristal llevamos a cabo la multiplicación de $N - 1$ matrices de celdas unitarias multiplicadas por las

matrices de las interfaces del cristal con los medios semi-infinitos a ambos lados del cristal, quedando la matriz general de esta forma

$$M^{(TE,TM)} = M_{20}P_2U^{N-1}M_{01}. \quad (2.60)$$

Las amplitudes y coeficientes de transmisión y reflexión se obtienen con las ecuaciones 2.53-2.56 [37].

Capítulo 3

Transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas en un cristal fotónico de geometría cilíndrica

En este capítulo se mostrará el camino que se debe seguir para obtener la matriz de transferencia de un cristal fotónico con simetría cilíndrica, figura 3.1. Este método de la matriz de transferencia desarrollado por Mikhail Kaliteevski [23] nos permitirá obtener los coeficientes de transmisión y reflexión de una onda electromagnética cilíndrica que diverge de un núcleo central y se desplaza hacia afuera de esta estructura multicapa haciendo múltiples reflexiones que conlleva a interferencias constructivas y destructivas, donde estas últimas dan como resultados las bandas de frecuencias prohibidas (gaps).

Esta estructura anular es la versión unidimensional de los cristales fotónicos cilíndricos y es conocido como reflector de Bragg anular (ABR por sus siglas en inglés de annular Bragg reflector), también conocido como cristal fotónico anular (APP por su sigla en inglés de Annular Photonic Crystal).

3.1. Ecuación de onda de un reflector de Bragg anular

El comportamiento de la luz en un ABR se hace de nuevo partiendo de las ecuaciones de Maxwell (2.4 y 2.3). Asumiendo además que los medios en los cuales se propaga la onda electromagnética son lineales y con una respuesta magnética despreciable, entonces

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (3.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (3.2)$$

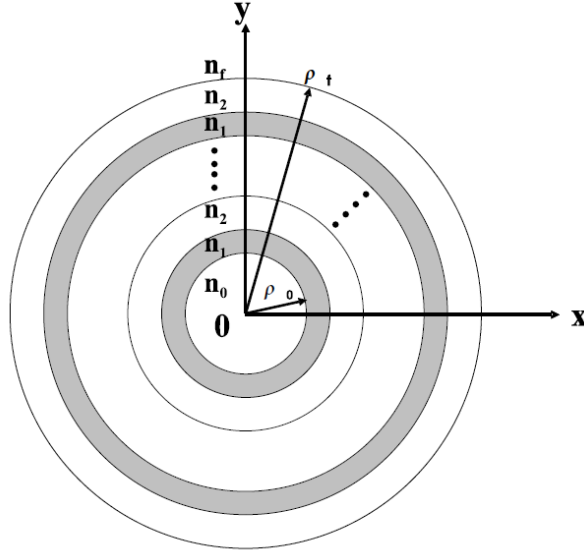


Figura 3.1: Vista transversal de un ABR constituido de un núcleo cilíndrico con índice de refracción n_0 y cascarones cilíndricos con índices de refracción periódico n_1 y n_2 respectivamente [26].

por lo tanto podemos escribir así la ecuación de onda

$$\left[\vec{\nabla}^2 - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Tomando los soluciones de esta ecuación diferencial como campos de forma harmónica, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ y $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, se puede reescribir esta expresión como la ecuación de Helmholtz

$$\left[\vec{\nabla}^2 - k_j^2 \right] \begin{bmatrix} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.4)$$

donde

$$k_j^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_j \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_0 n_j^2, \quad (3.6)$$

siendo k_j el número de onda en la j -ésima capa del ABR, ω la frecuencia angular, μ , ε_j , y n_j la permeabilidad magnética, permitividad eléctrica y el índice de refracción en la j -ésima capa respectivamente. Si reescribimos el laplaciano, en la ecuación de Helmholtz, en coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_j^2 \right] \begin{bmatrix} E_z(\vec{r}) \\ H_z(\vec{r}) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Para resolver esta ecuación diferencial (3.7) se usa el método de separación de variables

$$E(\vec{r}) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (3.8)$$

de esta manera se desprende otras tres funciones y se resuelven tres ecuaciones diferenciales por separado, la primera es la función respecto a z

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \beta^2 Z(z) = 0, \quad (3.9)$$

donde β es el número de onda en la dirección z . En este caso como se está considerando la propagación de una onda cilíndrica que diverge y/o converge del eje de simetría en $\rho = 0$, entonces la ecuación (3.9) no será relevante y para cálculos posteriores se debe considerar que la variación de los campos en la dirección z es igual a cero. La segunda es la ecuación diferencial respecto a la coordenada ϕ

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (3.10)$$

donde m es el número azimutal. Este número solo puede tomar valores enteros, en otras palabras, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Nótese que esta ecuación sugiere que la solución sea periódica en la dirección azimutal. Por último tenemos la ecuación para la parte radial

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + [(k_j^2 - \beta^2)\rho^2 - m^2] R(\rho) = 0, \quad (3.11)$$

donde k_j es el número de onda a lo largo del eje ρ en el j -ésimo cascarón. La solución de la ecuación (3.7) es entonces

$$E_z(\vec{r}) = E_z(\rho) \cos(\beta z + \theta) e^{im\phi}, \quad (3.12)$$

$$H_z(\vec{r}) = H_z(\rho) \cos(\beta z + \varphi) e^{im\phi}, \quad (3.13)$$

donde θ y φ son fases arbitrarias. Por lo anterior se reescribe entonces la ecuación (3.11) de esta manera

$$\left[\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (k_j^2 - \beta^2)\rho^2 - m^2 \right] \begin{bmatrix} E_z(\rho) \\ H_z(\rho) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.14)$$

tomando así la forma de la ecuación diferencial de Bessel dada por

$$\left[x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 - m^2 \right] y(x) = 0. \quad (3.15)$$

La solución general de la ecuación diferencial para los campos $E_z(\vec{r})$ y $H_z(\vec{r})$ es una superposición de funciones de Bessel de primer y segundo tipo y de orden m . Por lo tanto, en la j -ésima capa, la solución toma la forma

$$E_z(\vec{r}) = [A_j J_m(\gamma_j \rho) + B_j Y_m(\gamma_j \rho)] \cos(\beta z + \theta_j) e^{im\phi}, \quad (3.16)$$

$$H_z(\vec{r}) = [C_j J_m(\gamma_j \rho) + D_j Y_m(\gamma_j \rho)] \cos(\beta z + \varphi_j) e^{im\phi}, \quad (3.17)$$

donde

$$\gamma_j^2 = k_j^2 - \beta^2. \quad (3.18)$$

Las otras cuatro componentes del campo, $E_\rho(\vec{r})$, $E_\phi(\vec{r})$, $H_\rho(\vec{r})$ y $H_\phi(\vec{r})$, pueden ser expresadas en términos de $E_z(\vec{r})$ y $H_z(\vec{r})$ haciendo uso, en primera medida, de la ecuación de inducción de Faraday (2.4) desarrollada en coordenadas cilíndricas, que al igualar componente a componente dará

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -i\omega\mu H_\rho, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -i\omega\mu H_\phi, \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right] = -i\omega\mu H_z. \quad (3.21)$$

En segunda medida haciendo el mismo desarrollo para la ecuación de Ampere-Maxwell (2.3), que al igualar componente a componente dará

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -i\omega\mu E_\rho, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\mu E_\phi, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] = -i\omega\mu E_z. \quad (3.24)$$

De este conjunto de ecuaciones obtenemos las componentes en función de los campos $E_z(\vec{r})$ y $H_z(\vec{r})$

$$E_\phi(\vec{r}) = \frac{i}{\gamma^2} \left[\omega\mu \frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial z} \right], \quad (3.25)$$

$$E_\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{m\omega\mu}{\rho} H_z(\vec{r}) + \frac{\partial^2 E_z(\vec{r})}{\partial z \partial \rho} \right], \quad (3.26)$$

$$H_\phi(\vec{r}) = \frac{i}{\gamma^2} \left[\frac{m}{\rho} \frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial z} - \omega\epsilon_j \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial \rho} \right], \quad (3.27)$$

$$H_\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{\partial^2 H_z(\vec{r})}{\partial z \partial \rho} - \frac{m\omega\epsilon_j}{\rho} E_z(\vec{r}) \right], \quad (3.28)$$

3.2. Matriz de transferencia en la base de ondas estacionarias

Para obtener la matriz de transferencia en la base de ondas estacionarias, se debe sustituir las funciones de onda (3.16), (3.17) en las ecuaciones (3.25-3.28) y recurrir a las condiciones de frontera en la interfaz entre la j -ésima y $(j+1)$ -ésima capa con

radio $\rho = R_j$, que requieren que las componentes de campo tangenciales $E_z(\vec{r})$, $H_\phi(\vec{r})$, $H_z(\vec{r})$ y $E_\phi(\vec{r})$ sean continuos a través de la interfaz

$$A_j J_m(\gamma_j R_j) + B_j Y_m(\gamma_j R_j) = A_{j+1} J_m(\gamma_{j+1} R_j) + B_{j+1} Y_m(\gamma_{j+1} R_j) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{n_j^2}{\gamma_j} A_j J'_m(\gamma_j R_j) - \frac{n_j^2}{\gamma_j} B_j Y'_m(\gamma_j R_j) + \\ & \frac{m\beta}{\rho\omega\epsilon_0\gamma_j^2} C_j J_m(\gamma_j R_j) - \frac{m\beta}{\rho\omega\epsilon_0\gamma_j^2} D_j Y_m(\gamma_j R_j) = \\ & \frac{n_{j+1}^2}{\gamma_{j+1}} A_{j+1} J'_m(\gamma_{j+1} R_j) - \frac{n_{j+1}^2}{\gamma_{j+1}} B_{j+1} Y'_m(\gamma_{j+1} R_j) + \\ & \frac{m\beta}{\rho\omega\epsilon_0\gamma_{j+1}^2} C_{j+1} J_m(\gamma_{j+1} R_j) - \frac{m\beta}{\rho\omega\epsilon_0\gamma_{j+1}^2} D_{j+1} Y_m(\gamma_{j+1} R_j) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$C_j J_m(\gamma_j R_j) + D_j Y_m(\gamma_j R_j) = C_{j+1} J_m(\gamma_{j+1} R_j) + D_{j+1} Y_m(\gamma_{j+1} R_j) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{m\beta}{\rho\omega\mu\gamma_j^2} A_j J_m(\gamma_j R_j) - \frac{m\beta}{\rho\omega\mu\gamma_j^2} B_j Y_m(\gamma_j R_j) + \\ & \frac{1}{\gamma_j} C_j J'_m(\gamma_j R_j) + \frac{1}{\gamma_j} D_j Y'_m(\gamma_j R_j) = \\ & -\frac{m\beta}{\rho\omega\mu\gamma_{j+1}^2} A_{j+1} J_m(\gamma_{j+1} R_j) - \frac{m\beta}{\rho\omega\mu\gamma_{j+1}^2} B_{j+1} Y_m(\gamma_{j+1} R_j) + \\ & \frac{1}{\gamma_{j+1}} C_{j+1} J'_m(\gamma_{j+1} R_j) + \frac{1}{\gamma_{j+1}} D_{j+1} Y'_m(\gamma_{j+1} R_j), \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde ϵ y ϵ_0 son la permitividad eléctrica del medio en la j -ésima capa y la permitividad eléctrica en el vacío respectivamente, cuya relación está dada por $\epsilon = \epsilon_0 n_j^2$. Este sistema de ecuaciones se escribe en forma matricial de esta manera

$$M_{j+1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}_{j+1} = M_j \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}_j, \quad (3.33)$$

donde

$$M_j = \begin{bmatrix} J_m(\gamma_j R_j) & Y_m(\gamma_j R_j) & 0 & 0 \\ -\frac{n_j^2}{\gamma_j} J'_m(\gamma_j R_j) & -\frac{n_j^2}{\gamma_j} Y'_m(\gamma_j R_j) & \frac{m\beta}{\rho\omega\epsilon_0\gamma_j^2} J_m(\gamma_j R_j) & \frac{m\beta}{\rho\omega\epsilon_0\gamma_j^2} Y_m(\gamma_j R_j) \\ 0 & 0 & J_m(\gamma_j R_j) & Y_m(\gamma_j R_j) \\ -\frac{m\beta}{\rho\omega\mu\gamma_j^2} J_m(\gamma_j R_j) & -\frac{m\beta}{\rho\omega\mu\gamma_j^2} Y_m(\gamma_j R_j) & \frac{1}{\gamma_j} J'_m(\gamma_j R_j) & \frac{1}{\gamma_j} Y'_m(\gamma_j R_j) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Como la propagación tiene simetría cilíndrica podemos afirmar que el número de onda, β , en la dirección del eje z es cero, esto hace que la matriz M_j sea un bloque diagonal, indicando que hay dos polarizaciones independientes, polarización TE (transversal eléctrica), con componentes $E_z(\vec{r})$, $H_\theta(\vec{r})$, $H_\rho(\vec{r})$ y TM (transversal magnética), con componentes de campo $H_z(\vec{r})$, $E_\theta(\vec{r})$ y $E_\rho(\vec{r})$ [14]. Estos dos bloques se pueden escribir como matrices independientes de la siguiente manera

$$M_j^{TE} = \begin{bmatrix} J_m(\gamma_j R_j) & Y_m(\gamma_j R_j) \\ -\frac{n_j^2}{\gamma_j} J'_m(\gamma_j R_j) & -\frac{n_j^2}{\gamma_j} Y'_m(\gamma_j R_j) \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$M_j^{TM} = \begin{bmatrix} J_m(\gamma_j R_j) & Y_m(\gamma_j R_j) \\ \frac{1}{\gamma_j} J'_m(\gamma_j R_j) & \frac{1}{\gamma_j} Y'_m(\gamma_j R_j) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

donde los superíndices TE y TM indican que la matriz es para la polarización TE y TM respectivamente. Las condiciones de frontera más interna, justamente en el eje de simetría radial $\rho = 0$ en la capa $j = 1$, requiere que los campos diverjan únicamente. Por esa razón

$$B_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$D_1 = 0. \quad (3.38)$$

Si denotamos la última capa de la estructura cilíndrica con $j = N$, entonces $j = N + 1$ será el medio homogéneo que rodea el cilindro. En este medio los coeficientes estarán dados por:

$$B_{N+1} = -iA_{N+1} \quad (3.39)$$

$$D_{N+1} = -iC_{N+1} \quad (3.40)$$

3.3. Matriz de transferencia en la base de ondas propagantes

Se sabe que para la ecuación de onda en coordenadas cartesianas se propone como solución una función de onda plana propagante. La solución análoga en coordenadas cilíndricas son conocidas como funciones de Hankel y la solución general de la ecuación de onda con esta simetría cilíndrica (3.14) se expresa como una superposición de funciones de Hankel de primer y segundo tipo que son en sí mismas superposiciones de funciones de Bessel de primer y segundo tipo

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x), \quad (3.41)$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x), \quad (3.42)$$

estas dos funciones de Hankel se usan para construir la solución general $E_z(\vec{r})$ y $H_z(\vec{r})$ en términos de las ondas que se propagan hacia afuera $E_z^+(\vec{r})$, $H_z^+(\vec{r})$ y las que se propagan hacia adentro $E_z^-(\vec{r})$, $H_z^-(\vec{r})$ de esta manera

$$\begin{aligned} E_z(\vec{r}) &= E_z^+(\vec{r}) + E_z^-(\vec{r}) \\ &= \left[\tilde{A}_j H_m^{(1)}(\gamma_j \rho) + \tilde{B}_j H_m^{(2)}(\gamma_j \rho) \right] e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} H_z(\vec{r}) &= H_z^+(\vec{r}) + H_z^-(\vec{r}) \\ &= \left[\tilde{C}_j H_m^{(1)}(\gamma_j \rho) + \tilde{D}_j H_m^{(2)}(\gamma_j \rho) \right] e^{im\phi}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando de nuevo las condiciones de frontera en la interfaz entre la j -ésima y la $(j+1)$ -ésima capa en $\rho = R_j$, tenemos que las componentes tangenciales a la interfaz de los campos E_z , H_θ para TE y H_z , E_θ para TM, se deben conservar. Siguiendo los mismos pasos que en la sección 3.2 podemos obtener un sistema de ecuaciones que se representaría en esta forma matricial para polarización TE

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} H_m^{(1)}(\gamma_j R_j) & H_m^{(2)}(\gamma_j R_j) \\ \frac{-n_j^2}{\gamma_j} H_m'^{(1)}(\gamma_j R_j) & \frac{-n_j^2}{\gamma_j} H_m'^{(2)}(\gamma_j R_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}_j = \\ &\begin{bmatrix} H_m^{(1)}(\gamma_{j+1} R_j) & H_m^{(2)}(\gamma_{j+1} R_j) \\ \frac{-n_{j+1}^2}{\gamma_{j+1}} H_m'^{(1)}(\gamma_{j+1} R_j) & \frac{-n_{j+1}^2}{\gamma_{j+1}} H_m'^{(2)}(\gamma_{j+1} R_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}_{j+1}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

mientras que para polarización TM tenemos

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} H_m^{(1)}(\gamma_j R_j) & H_m^{(2)}(\gamma_j R_j) \\ \frac{1}{\gamma_j} H_m'^{(1)}(\gamma_j R_j) & \frac{1}{\gamma_j} H_m'^{(2)}(\gamma_j R_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix}_j = \\ &\begin{bmatrix} H_m^{(1)}(\gamma_{j+1} R_j) & H_m^{(2)}(\gamma_{j+1} R_j) \\ \frac{1}{\gamma_{j+1}} H_m'^{(1)}(\gamma_{j+1} R_j) & \frac{1}{\gamma_{j+1}} H_m'^{(2)}(\gamma_{j+1} R_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix}_{j+1}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

De esta manera, podemos obtener la estructura de la matriz de transferencia en la j -ésima interfaz para ambas polarizaciones, $\tilde{T}_j^{TE, TM}$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}_{j+1} = (\tilde{M}_{j+1}^{TE})^{-1} \tilde{M}_j^{TE} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}_j = \tilde{T}_j^{TE} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}_j \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix}_{j+1} = (\tilde{M}_{j+1}^{TM})^{-1} \tilde{M}_j^{TM} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix}_j = \tilde{T}_j^{TM} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix}_j. \quad (3.48)$$

Posteriormente se efectúan entonces los cálculos pertinentes para obtener los elementos de matriz. Es importante tener en cuenta que para llegar a expresiones reducidas

de elementos de matriz, se debe utilizar la siguiente identidad de las funciones de Bessel [36]

$$J_m(x)Y'_m(x) - J'_m(x)Y_m(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (3.49)$$

obteniendo finalmente la matriz de transferencia

$$T_j^{TE, TM} = \begin{bmatrix} a_m^j & b_m^j \\ b_m^{j*} & a_m^{j*} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

cuyos elementos de matriz para polarización TE son

$$a_m^j = \frac{i\pi\gamma_{j+1}\rho}{4} \left[H'_m{}^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H_m^{(1)}(\gamma_jR_j) - \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}}H_m^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H'_m{}^{(1)}(\gamma_jR_j) \right] \quad (3.51)$$

$$b_m^j = \frac{i\pi\gamma_{j+1}\rho}{4} \left[H'_m{}^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H_m^{(2)}(\gamma_jR_j) - \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}}H_m^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H'_m{}^{(2)}(\gamma_jR_j) \right] \quad (3.52)$$

y a_m^{j*} y b_m^{j*} son los complejos conjugados de a_m^j y b_m^j . Para polarización TM los elementos de la matriz de transferencia son:

$$a_m^j = \frac{i\pi\gamma_{j+1}\rho}{4} \left[H'_m{}^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H_m^{(1)}(\gamma_jR_j) - \frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}H_m^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H'_m{}^{(1)}(\gamma_jR_j) \right] \quad (3.53)$$

$$b_m^j = \frac{i\pi\gamma_{j+1}\rho}{4} \left[H'_m{}^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H_m^{(2)}(\gamma_jR_j) - \frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}H_m^{(2)}(\gamma_{j+1}R_j)H'_m{}^{(2)}(\gamma_jR_j) \right]. \quad (3.54)$$

Para ondas cilíndricas que se propagan hacia afuera, sus respectivas amplitudes de transmisión y reflexión están dadas por la razón del flujo de luz que se trasmite y se refleja, cada una, respecto al flujo de luz que incide en la interfaz

$$t = \frac{\phi_{j+1}^+}{\phi_j^+} = -\frac{\det|T_j^{TE, TM}|}{a_m^{j*}}, \quad (3.55)$$

$$r = \frac{\phi_j^-}{\phi_j^+} = -\frac{b_m^{j*}}{a_m^{j*}}, \quad (3.56)$$

estas se obtienen de manera similar a como se hizo para obtener sus análogas en cristales fotónicos de capas planas (2.31) y (2.32). Los coeficientes de transmisión y reflexión están dados por

$$T = |t|^2 \quad (3.57)$$

$$R = |r|^2. \quad (3.58)$$

Finalmente se obtiene la matriz de transferencia del cristal fotónico multiplicando las matrices de transferencia de cada celda unitaria, esta vez denotada con T_j [14], en la forma

$$M^{TE,TM} = T_N^{TE,TM} T_{N-1}^{TE,TM} \dots T_2^{TE,TM} T_1^{TE,TM} \quad (3.59)$$

Cabe destacar dos cosas; La primera es que en este caso no se necesitarán las matrices de propagación de cada medio ya que las componentes de cada matriz de transferencia están compuestas por funciones de Hankel que son funciones del radio y actúan también como matrices de transmisión de onda. La segunda es que a diferencia del caso de bicapas planas donde se elevaba a la $N - 1$ potencia la matriz de la celda unitaria (2.60), en este caso se lleva a cabo una productoria de matrices ya que las matrices representan capas anulares de radios distintos.

Capítulo 4

Comportamiento de las ondas electromagnéticas en un medio superconductor

La superconductividad es un estado que alcanzan algunos materiales a temperaturas cercanas a 0 K. En 1911 el físico alemán Kamerlingh Onnes encontró que al bajar la temperatura del mercurio por debajo de una temperatura crítica T_c de 4.2 K ocurría una transición y la resistencia eléctrica del mercurio caía abruptamente a una resistencia muy cercana a cero, trabajo por el cual le fue otorgado el premio Nobel en 1913. En 1987 los físicos suizos J. G. Bednorz y K. A. Muller recibieron el premio Nobel por reportar superconductividad en óxido de Lantano, Bario y Cobre con temperatura crítica de 32 K. Esto impulsó el estudio de los materiales conocidos como superconductores de altas temperaturas. Naturalmente, la importancia del estudio de este tipo de materiales se basa en el hecho de que a mayor temperatura crítica, menor será el gasto de energía para alcanzar el estado superconductor. En este trabajo se llevará a cabo el estudio de algunas propiedades ópticas de un cristal fotónico donde uno de sus componentes es $YBa_2Cu_3O_7$, superconductor cuya temperatura crítica es $T_c = 92K$ [41].

4.1. Propiedades magnéticas de los superconductores

Una definición más precisa de superconductividad es el de aquel estado que alcanzan algunos materiales cuando se baja su temperatura a una temperatura crítica T_c , que desde el punto de vista eléctrico alcanzan resistividad nula y desde el punto de vista magnético llegan a ser diamagnéticos perfectos en presencia de un campo magnético débil como se muestra en la figura 4.1, fenómeno conocido como efecto Meissner. Este efecto se debe a la aparición de corrientes superficiales de apantallamiento que crean

un campo que anula el campo externo en el interior del superconductor.

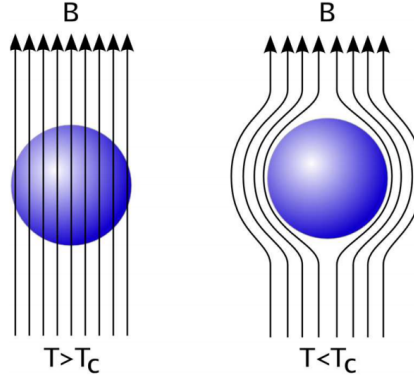


Figura 4.1: Efecto Meissner en una esfera superconductora en presencia de un campo magnético constante [41].

Si un campo magnético externo es suficientemente grande puede romper el estado de superconductor del material. La ley fenomenológica del campo crítico B_c en función de la temperatura se ajusta bien a la siguiente ecuación

$$B_c(T) = B_{co} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right), \quad (4.1)$$

donde B_{co} es la valor crítico del campo magnético externo a una temperatura $T = 0$.

Como no puede existir campo magnético en el interior del superconductor, y una corriente es una fuente de campo magnético (ley de Biot-Savart), las corrientes de apantallamiento no pueden atravesar el material, porque se generaría un campo, por esta razón fluyen exclusivamente por la superficie y el campo magnético externo decaerá exponencialmente en la superficie de un conductor una longitud λ_L , conocida como longitud de penetración de London. Los superconductores que presentan efecto Meissner completo se conocen con el nombre de superconductores tipo I, ya que para campos externos por encima del campo crítico el flujo magnético penetra completamente en el interior de la muestra, rompiendo el estado superconductor. Sin embargo, existe una segunda categoría de materiales superconductores, denominados del tipo II, en los que se presenta una penetración parcial del flujo magnético a partir de un primer campo crítico bajo y hasta un segundo campo crítico, generalmente mucho mayor, por encima del cual el flujo magnético penetra completamente al interior de la muestra. En el intervalo de campos magnéticos comprendidos entre los campos críticos bajo y alto, el material conserva sus propiedades superconductoras aunque el campo

magnético en su interior no sea nulo. Los superconductores de alta temperatura son todos del tipo II.

4.2. Teoría de London de la superconductividad

La teoría que propusieron en 1935 los hermanos Fritz y Heinz London para describir fenomenológicamente la superconductividad se basó en el modelo de Gorter y Casimir de los dos fluidos, un superfluido y un fluido normal con densidades N_s y N_n y velocidades v_s y v_n , respectivamente, tal que $N_s + N_n = N$, donde N es el número de electrones por unidad de volumen [41] [42]. De acuerdo a la segunda ley de Newton y a la definición de densidad de corriente J_s , aplicada a los superelectrones, tenemos

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = e\vec{E}, \quad (4.2)$$

$$\vec{J}_s = N_s e \vec{v}_s, \quad (4.3)$$

donde m , e y v_s son la masa, carga y velocidad del superelectrón y E es la intensidad de campo eléctrico. Con las dos ecuaciones anteriores obtendremos que

$$\mu_0 \lambda_L^2 \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \vec{E}, \quad (4.4)$$

donde λ_L es conocida como la longitud de penetración de London, la cual depende de la temperatura a través de N_s y está definida por

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 N_s e^2}}. \quad (4.5)$$

Es importante anotar que la fracción de electrones superconductores disminuye desde el valor 1, a temperatura $T = 0$, hasta anularse a la temperatura crítica del superconductor. Tomando el rotacional a ambos lados de la ecuación (4.4) e involucrando la ecuación de Maxwell (2.4) se obtendrá

$$\mu_0 \lambda_L^2 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{J}_s) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Ahora usando la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.7)$$

en donde se ha despreciado las corrientes de desplazamiento y la corriente del fluido usual, se obtiene entonces

$$\lambda_L^2 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.8)$$

usando la identidad del análisis vectorial del rotacional del rotacional de $\vec{B}$ y teniendo en cuenta que la divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, podemos llegar a la siguiente ecuación diferencial

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \quad (4.9)$$

cuya solución para variación del campo a lo largo del eje x es

$$\vec{B}(x) = \vec{B}(0) e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, \quad (4.10)$$

donde $B(0)$ es el campo magnético en la superficie del material. Esta ecuación demuestra el decrecimiento exponencial de un campo magnético débil al penetrar un superconductor, con una distancia de decaimiento característica λ_L (4.5). A una temperatura $T = 0$ la densidad de superelectrones sería $N_s = N$ y la longitud de penetración quedaría expresada así

$$\lambda_L(0) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 N e^2}}. \quad (4.11)$$

4.3. Modelo de los “dos fluidos” de un superconductor

Este modelo propuesto por Gorter y Casimir en (1934) [41] consiste, como lo mencionamos en la sección 4.2, en un fluido formado por uno de electrones normales y otro de superelectrones, es decir, electrones que participan en la superconductividad. También sugiere una dependencia de las densidades de carga en los estados de electrones normales y superelectrones dadas por las siguientes expresiones de ajuste experimental [43],

$$\begin{aligned} N_s(T) &= N \begin{cases} 0, & \text{para } T \geq T_c \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^p, & \text{para } T \leq T_c \end{cases} \\ N_n(T) &= N \begin{cases} 1, & \text{para } T \geq T_c \\ \left(\frac{T}{T_c}\right)^p, & \text{para } T \leq T_c \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde el exponente p depende de la naturaleza del superconductor. El modelo de Gorter y Casimir sugiere para este exponente un valor de $p = 4$. Aunque la intención original del modelo de los dos fluidos es el estudio de las propiedades termodinámicas de los superconductores, la combinación de este modelo con la teoría de London utilizando las ecuaciones (4.5) y (4.11) en la ecuación (4.12), conduce a la expresión para la longitud de penetración de London como función de la temperatura

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^p}}, \quad (4.13)$$

donde $\lambda_L(0)$ es la longitud de penetración a una temperatura $T = 0K$.

Analicemos ahora el comportamiento de la ecuación de onda correspondiente al campo eléctrico en este medio superconductor,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (4.14)$$

donde el campo eléctrico es armónico en el tiempo ($\sim e^{-i\omega t}$). Derivamos con respecto al tiempo y usamos la ecuación de vector de densidad de corriente para este medio conductor $\sigma \vec{E} = \vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_n$, para llevar la ecuación de onda a la forma

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) \vec{E}(\vec{r}) - i\mu_0 \omega (\vec{J}_s + \vec{J}_n) = 0, \quad (4.15)$$

donde,

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= -eN_s \vec{v}_s(w) \\ &= -\frac{N_s e^2}{im\omega} \vec{E} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_n &= -eN_n \vec{v}_n(w) \\ &= -\frac{N_n e^2}{im(\omega + i\gamma)} \vec{E}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

siendo J_s y J_n las densidades de corriente de los portadores de carga en los estados superconductor y normal, respectivamente. El estado normal sufre efectos de disipación a través del parámetro γ , que tiene unidades de frecuencia. Al sustituir estas últimas ecuaciones en la ecuación de onda (4.15), se obtiene

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{eff}(r, t) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (4.18)$$

donde ϵ_{eff} es la constante dieléctrica efectiva del superconductor a la frecuencia ω , dada por la expresión [11, 44]

$$\epsilon_{eff}(\omega) = \epsilon_\infty \left(1 - \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{np}^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right), \quad (4.19)$$

donde

$$\omega_{sp} = \frac{c}{\lambda_L \sqrt{\epsilon_\infty}}, \quad \omega_{np} = \sqrt{\frac{N_n e^2}{m\epsilon_0 \epsilon_\infty}}, \quad (4.20)$$

son las frecuencias de plasma de los electrones en el estado superconductor y normal respectivamente, ϵ_∞ es la permitividad dieléctrica relativa del material a altas frecuencias. Adicionalmente se debe tener en cuenta que para garantizar la prevalencia

del estado superconductor, de acuerdo a la teoría BCS (Bardeen, Cooper y Schrieffer) basada en los pares de Cooper, se debe trabajar con frecuencias de tal manera que no provoquen sobrepasar la energía del gap superconductor. Esta frecuencia umbral o del gap está dada por $\omega_g = 2\Delta/\hbar$, donde $2\Delta \approx 3,528K_B T_c$ [39,41].

Para temperaturas tales que $T \ll T_c$, es posible asumir que $N_s \rightarrow N$. Por lo tanto, la contribución a la permitividad eléctrica de los electrones en el estado normal es despreciable. Por consiguiente, en el régimen de temperaturas bajas, la permitividad dieléctrica toma la forma

$$\varepsilon_{eff}(\omega) = \varepsilon_{\infty} \left(1 - \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} \right), \quad (4.21)$$

la cual es similar a la permitividad dieléctrica para materiales metálicos sin pérdidas por disipación en el modelo de Drude [42].

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de los cálculos numéricos que se llevaron a cabo para obtener el espectro de reflectancia de ondas electromagnéticas con polarización TM, principalmente de ABRs, también conocidos como APCs (por su sigla en inglés de annular photonic crystals). Estas estructuras periódicas están formadas por bicapas de componentes superconductor-dieléctrico. También se hizo el análisis numérico del comportamiento del espectro de reflectancia de cristales fotónicos de simetría plana, PPCs (por sus singlas en inglés de planar photonic crystals), como modelo de comparación con el APC. El programa que se utilizó para llevar a cabo los cálculos numéricos fue la versión 11.2 de Mathematica, cuya licencia fue adquirida por la Universidad del Valle.

5.1. Espectros de reflectancia de cristales fotónicos 1D de componente superconductor $YBa_2Cu_3O_7$

A manera de calibración del algoritmo que se construyó para llevar a cabo el método de matriz de transferencia, se reprodujo algunos de los resultados obtenidos por los físicos Mei-Soong Chen, Chien-Jang Wu, Tzong-Jer Yang [26], los cuales se presentarán en esta sección.

5.1.1. Espectro de reflectancia de cristales fotónicos anular y planar bajo las mismas condiciones

Como se mencionó en la introducción de este documento, uno de los primeros reportes sobre cristales fotónicos con simetría cilíndrica fue hecho en 1994 por Er-Xuan Ping de la universidad del estado de Iowa y se hizo justamente para comparar los espectros de transmitancia de cristales con simetría cartesiana, cilíndrica y esférica encontrando que para ciertas condiciones los espectros de los tres tipos de cristales

encajaban casi perfectamente [22]. En la figura 5.1 se muestra los espectros de reflectancia calculados para cristales planares y anulares. Ambos cristales con componentes superconductor $YBa_2Cu_3O_7$ con temperatura crítica $T_c = 92K$ y que a temperatura $T = 0K$, tiene una longitud de penetración $\lambda_L = 140nm$. El material dieléctrico es el MgO con permitividad eléctrica relativa $\epsilon_{r2} = 10$. El medio en el que está inmerso es el aire con un índice de refracción de $n_0 = 1$. Los cálculos se llevaron a cabo a la temperatura de ebullición del nitrógeno $T = 77K$, con capas de espesores $d_1 = 130nm$ y $d_2 = 80nm$, respectivamente. Para el cristal cilíndrico se le consideró el número azimutal $m = 0$ y para el de simetría plana se estableció un ángulo de incidencia $\theta = 0^\circ$. En ambos casos se consideró el mismo número $N = 8$ de bicapas superconductor-dieléctrico.

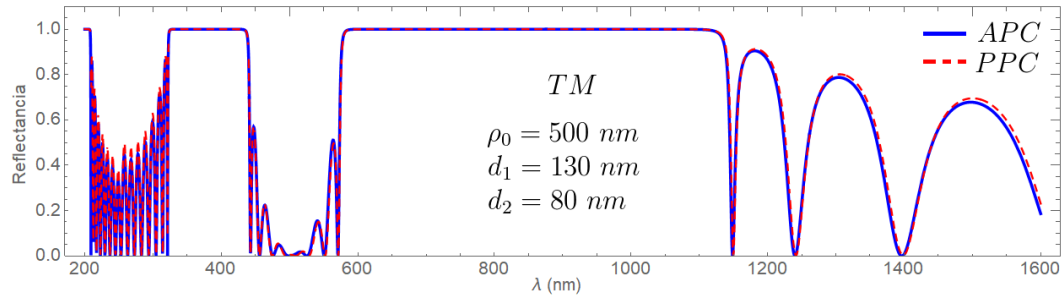


Figura 5.1: Espectros de reflectancia para un APC con número azimutal $m = 0$, radio del núcleo $\rho_0 = 500nm$ y un PPC con ángulo de incidencia $\theta = 0^\circ$. Ambos cristales con espesores $d_1 = 130nm$ y $d_2 = 80nm$ y un número de bicapas $N = 8$.

La figura 5.1 muestra que los dos espectros de reflectancia calzan casi de manera perfecta, lo que nos permite afirmar que para radios ρ_0 grandes, número azimutal $m = 0$ en el cristal anular y para ángulos $\theta = 0^\circ$ en el de simetría plana, el comportamiento es análogo. Además se puede ver dos gaps de alta reflectancia, el primero empezando desde alrededor de la longitud de onda del amarillo $\lambda = 570nm$ cubriendo el naranja hasta llegar al infrarrojo en $\lambda = 1143nm$ cuyo ancho de banda es $\Delta\lambda = 573nm$. El segundo gap de alta reflectancia empieza desde el ultravioleta en $\lambda = 322nm$ hasta el azul en $\lambda = 442nm$, con ancho de banda $\Delta\lambda = 120nm$.

El comportamiento del índice de refracción del superconductor a una temperatura de $77K$ en función de la longitud de onda se muestra en la figura 5.2. Para valores menores de $1245nm$ el índice de refracción toma valores reales y se comporta de manera decreciente. Para valores mayores de $1245nm$ el índice de refracción toma valores imaginarios y se comporta de manera creciente.

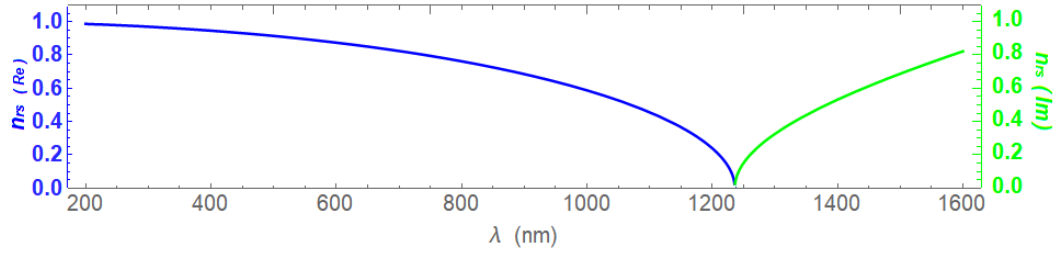


Figura 5.2: Índice de refracción del superconductor $YBa_2Cu_3O_7$, en función de la longitud de onda a una temperatura de $77K$. La línea verde representa los valores imaginarios y la línea azul los valores reales que toma el índice de refracción.

5.1.2. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el número azimutal m

En esta sección se mostrará los espectros de reflectancia para ondas con polarización TM (figura 5.3) donde se estableció el radio del núcleo como $\rho_0 = 500nm$, espesores para los cascarones $d_1 = 130nm$, $d_2 = 80nm$ y se asignó los valores $m = 0, 1, 2, 3$ para el número azimutal [26]. Se puede observar que a medida que el número de estado azimutal aumenta, se empieza a establecer una nueva brecha de alta reflectancia. Esta brecha es conocida como gap superpolaritón y aparece para valores de longitudes de onda cercanos a la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de plasma del superconductor $\lambda_{ps} = 1245nm$, donde el índice de refracción del superconductor toma valores reales o imaginarios muy cercanos a cero 5.2. Se puede observar también, que el ancho de este gap aumenta a medida que el número de estado azimutal aumenta. Este gap superpolaritón es causado por la existencia de una componente radial del campo eléctrico E_ρ que interactúa con los electrones en el superconductor y para ondas con modos de números de estado azimutal $m > 0$. Por esa razón, el superpolaritón es observable para cristales fotónicos de simetría cilíndrica y en polarización TM y no es observable para cristales de simetría plana.

5.1.3. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar la temperatura T

Mei-Soong Chen, Chien-Jang Wu, Tzong-Jer Yang [26] reportan el comportamiento del espectro de reflectancia al variar el número de estado azimutal en $m = 0, 1, 2, 3$ para valores fijos de radio del núcleo $\rho_0 = 1000nm$ y espesores $d_1 = 90nm$, $d_2 = 160nm$. También el comportamiento al variar parámetros geométricos como por ejemplo el radio del núcleo en $\rho_0 = 200nm, 600nm, 1200nm, 2000nm$ con un valor fijo del número azimutal $m = 1$. En nuestro trabajo de grado se complementó información con el cálculo numérico del comportamiento de la reflectancia al dejar fijo el

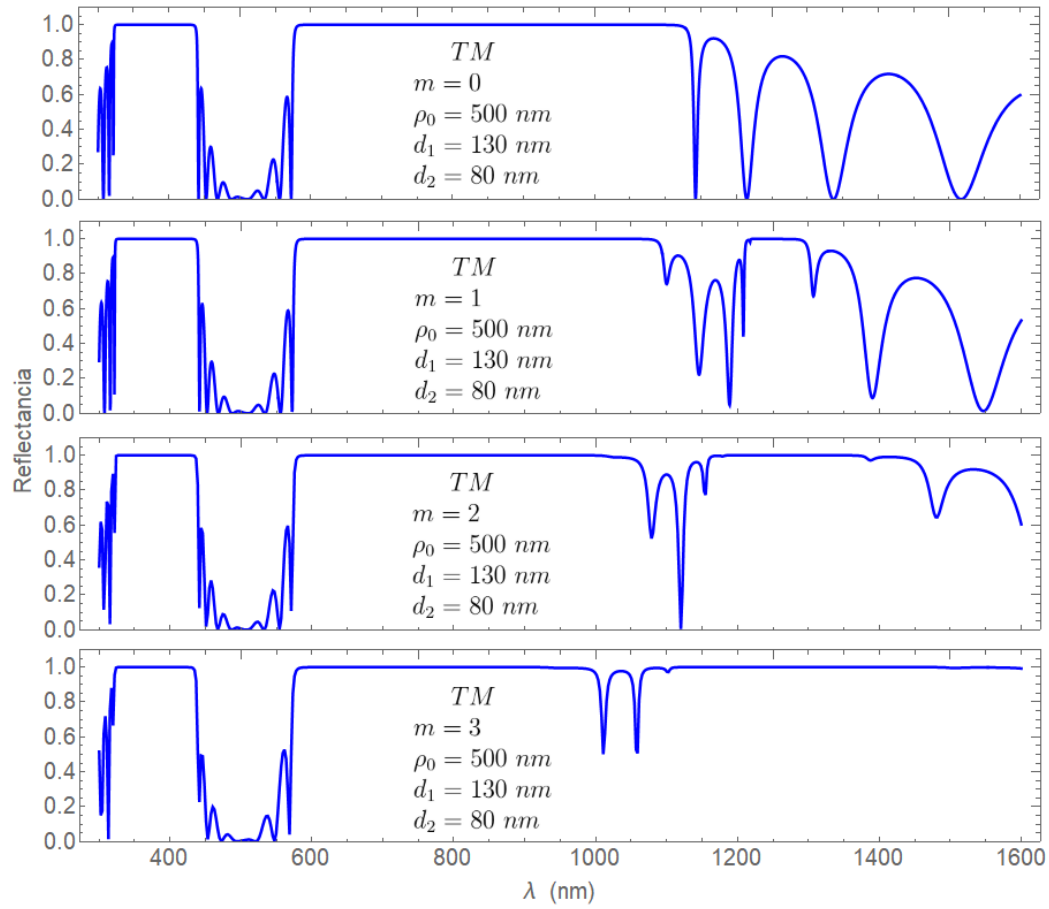


Figura 5.3: Espectros de reflectancia calculados para ondas TM y números diferentes de estado azimutal (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 2$, (d) $m = 3$ respectivamente, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 130$ nm, $d_2 = 80$ nm, $\rho = 500$ nm y $N = 9$.

número azimutal en $m = 1$ y valores fijos en los parámetros geométricos $\rho_0 = 500nm$, $d_1 = 130nm$ y $d_2 = 80nm$ pero disminuyendo la temperatura del superconductor a $T = 77K$, $70K$, $60K$, $30K$ que se presenta en esta sección y variando el índice de refracción relativo del dieléctrico en $n_{r2} = \sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ y $\sqrt{15}$ que se presentará en la siguiente sección. En la figura 5.4 se puede ver claramente que a medida que la temperatura en el superconductor disminuye, la reflectancia regresa a tomar los valores que tenía como cuando estaba a una temperatura de $77 K$ pero con un número de estado azimutal $m = 0$. Esto se debe a que a medida que la temperatura disminuye, la longitud de onda de plasma disminuye también tomando los valores $\lambda_{ps} = 1245nm$, $1079nm$, $972nm$ y $885nm$ respectivamente. Esto hace que el superpolaritón que se establece, se vaya desplazando hacia la izquierda en la gráfica y confundiendo con el gap de ancho $\Delta\lambda = 573nm$ ya preestablecido.

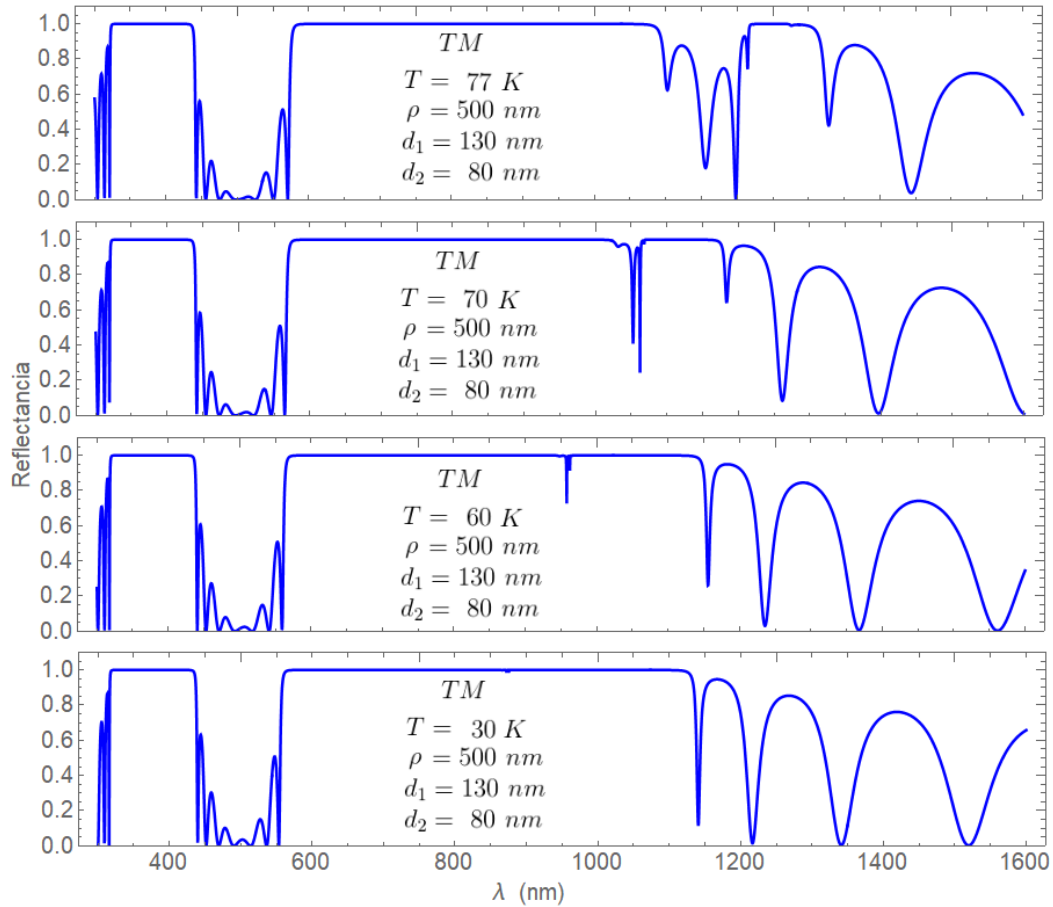


Figura 5.4: Espectros de reflectancia con número de estado azimutal fijo en $m = 1$ y temperaturas (a) $T = 77K$, (b) $T = 70K$, (c) $T = 60K$, (d) $T = 30K$, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 130nm$, $d_2 = 80nm$, $\rho = 500nm$ y $N = 8$

5.1.4. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el índice de refracción relativo n_{r2} del dieléctrico

Como mencionamos anteriormente, en esta sección se llevará a cabo el análisis de los espectros de reflectancia obtenidos al llevar a cabo los cálculos numéricos de ondas cilíndricas con un valor de número azimutal $m = 1$ interactuando en cristales anulares de valores fijos en los parámetros geométricos $\rho_0 = 500nm$, $d_1 = 130nm$ y $d_2 = 80nm$ pero variando el índice de refracción del dieléctrico en $n_{r2} = \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ y $\sqrt{15}$.

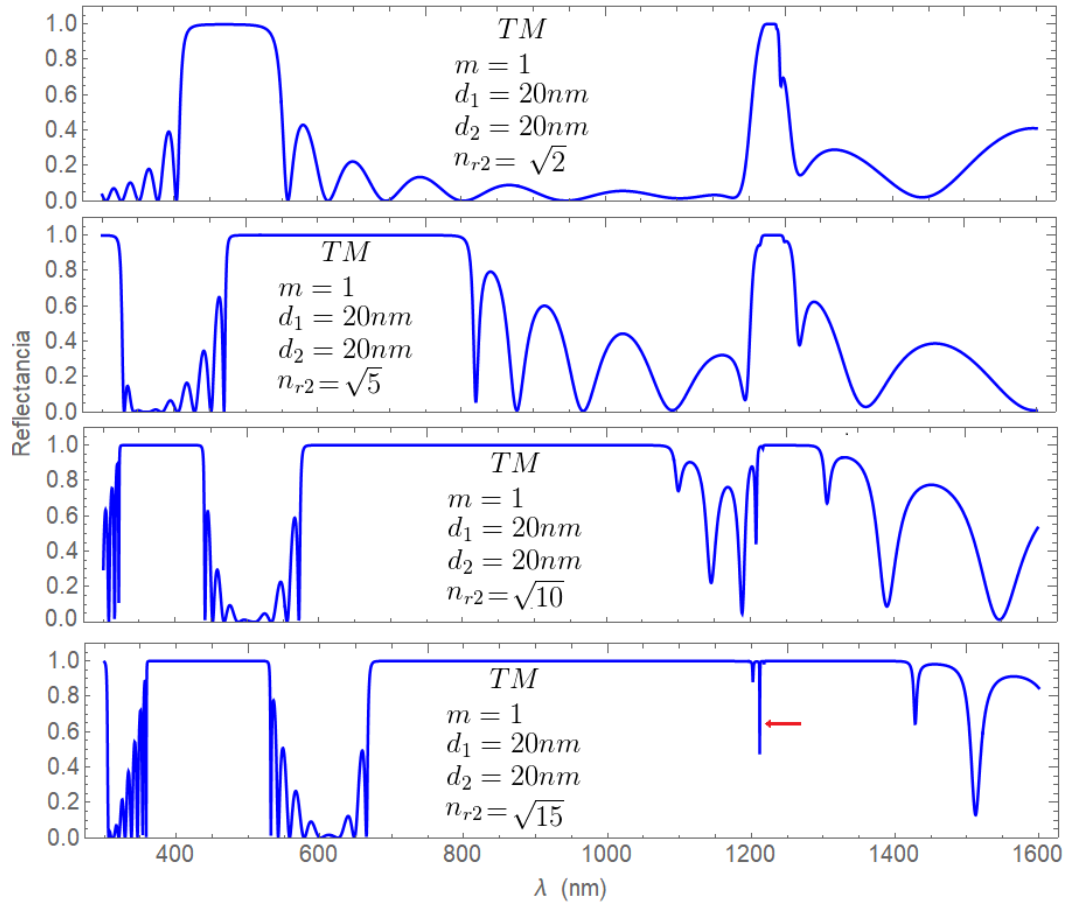


Figura 5.5: Espectros de reflectancia con número de estado azimutal fijo en $m = 1$ e índice de refracción relativo del dieléctrico (a) $n_{r2} = \sqrt{2}$, (b) $n_{r2} = \sqrt{5}$, (c) $n_{r2} = \sqrt{10}$, (d) $n_{r2} = \sqrt{15}$, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 130nm$, $d_2 = 80nm$, $\rho = 500nm$ y $N = 9$

Podemos evidenciar en la figura 5.5 que para valores pequeños de índice de refracción n_{r2} del dieléctrico, disminuye el ancho en las bandas de alta reflectancia

revelando el superpolaritón que se establece cerca a la longitud de onda de plasma $\lambda_{ps} = 1245nm$, que como dijimos en la sección 5.1.2, es dependiente y muy sensible a la variación del número de estado azimutal m . A medida que el ancho en el gap mayor aumenta se solapa con el gap superpolaritón, pero este último deja una seña que se ve en la gráfica como una línea llamada en inglés dips, que traduce en español una bajada súbita. Se indica en la gráfica con una pequeña flecha en donde se encuentra el dips.

5.2. Espectros de reflectancia de cristales fotónicos 1D de componente superconductor

$$Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$$

En la sección anterior se presentaron resultados de cálculos numéricos para cristales fotonicos 1D de componente superconductor $YBa_2Cu_3O_7$. En esta sección el interés va dirigido al estudio de este mismo tipo de cristales con componente superconductor $Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$ cuyos resultados se presentarán en esta sección.

Como mencionamos en el capítulo 4, la teoría aquí utilizada es la del modelo de los dos fluidos, por esa razón es importante garantizar la prevalencia del estado superconductor y esto se hace como primera medida trabajando el sistema a temperaturas significativamente por debajo de la temperatura crítica del material $T_c = 107K$ y como segunda medida evaluando con ondas electromagnéticas de frecuencias cercanas a la frecuencia del plasma del superconductor que a $T = 5K$ es $\omega_{ps} = 3,77THz$ [44]. Valores para el rango de frecuencias y temperaturas que garantizan el estado superconductor, y que se utilizaron para llevar a cabo nuestros cálculos numéricos, fueron reportados por los físicos B.F. Diaz y J.M. Calero [11].

5.2.1. Espectro de reflectancia de cristales fotónicos anular y planar bajo las mismas condiciones

En la figura 5.6 se muestra los espectros de reflectancia calculados para cristales planares con línea roja discontinua y anulares con línea azul continua. Ambos cristales con $Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$ como componente superconductor que a temperatura $T = 5K$, tiene una longitud de penetración $\lambda_L = 23\mu m$. El material dieléctrico tiene una permitividad eléctrica relativa $\epsilon_{r2} = 40$. El medio en el que está inmerso es el aire con un índice de refracción de $n_0 = 1$. Las capas cilindricas y planares tienen espesores $d_1 = 20\mu m$ y $d_2 = 20\mu m$ respectivamente. Al cristal cilíndrico se le estableció el número azimutal $m=0$ y para el de simetría plana se estableció un ángulo de incidencia $\theta = 0^\circ$.

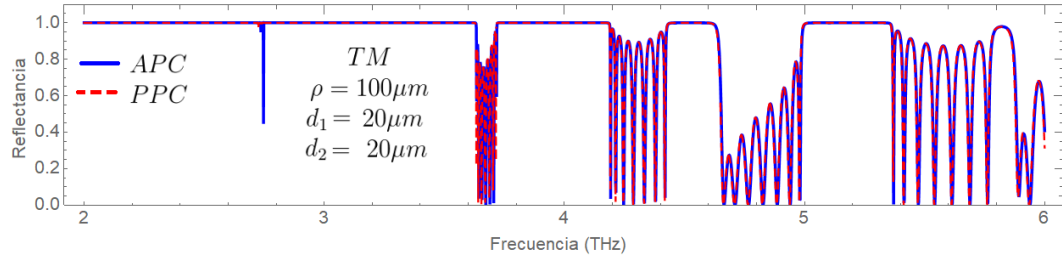


Figura 5.6: Espectros de reflectancia para APC con número azimutal $m = 0$, radio del núcleo $\rho_0 = 100\mu m$ y un PPC para un ángulo de incidencia $\theta = 0^\circ$. Ambos cristales con espesores $d_1 = 20\mu m$ y $d_2 = 20\mu m$ y un número de bicapas $N = 8$.

Se puede ver (figura 5.6) que la respuesta de reflectancia en función de la frecuencia para ambos sistemas son prácticamente las mismas bajo las condiciones de número azimutal $m = 0$, radio del núcleo $\rho_0 > \lambda$ para el cristal anular y ángulo de incidencia $\phi = 0^\circ$ para el cristal de capas planas.

El comportamiento del índice de refracción del superconductor a una temperatura de $5K$ en función de la frecuencia de la onda se muestra en la figura 5.7. Para valores menores que la frecuencia de plasma $f = 3,77THz$, el índice de refracción toma valores imaginarios y se comporta de manera decreciente. Para valores mayores de $f = 3,77THz$ el índice de refracción toma valores reales y se comporta de manera creciente. Esta gráfica nos servirá de referente para entender el por qué del comportamiento de los espectros de reflectancia para ondas con frecuencias cercanas a la frecuencia de plasma.

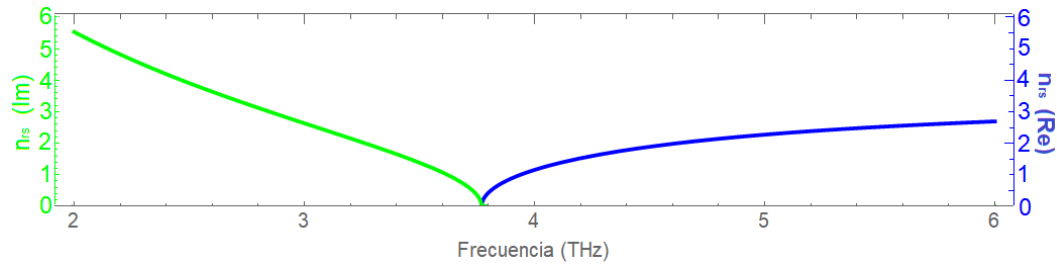


Figura 5.7: Índice de refracción del superconductor $Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$, en función de la frecuencia de onda a una temperatura de $5K$, donde la línea verde representa los valores imaginarios y la línea azul los valores reales del índice de refracción.

5.2.2. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el número de modo azimutal m

En esta sección se mostrará los espectros de reflectancia de ondas con polarización TM (figura 5.8) para distintos valores de número de modo azimutal $m = 0, 3, 6, 9$ respectivamente, con valores del radio del núcleo $\rho_0 = 100\mu m$, espesores para los cascarones $d_1 = 20\mu m$, $d_2 = 20\mu m$ y número de periodos $N = 8$.

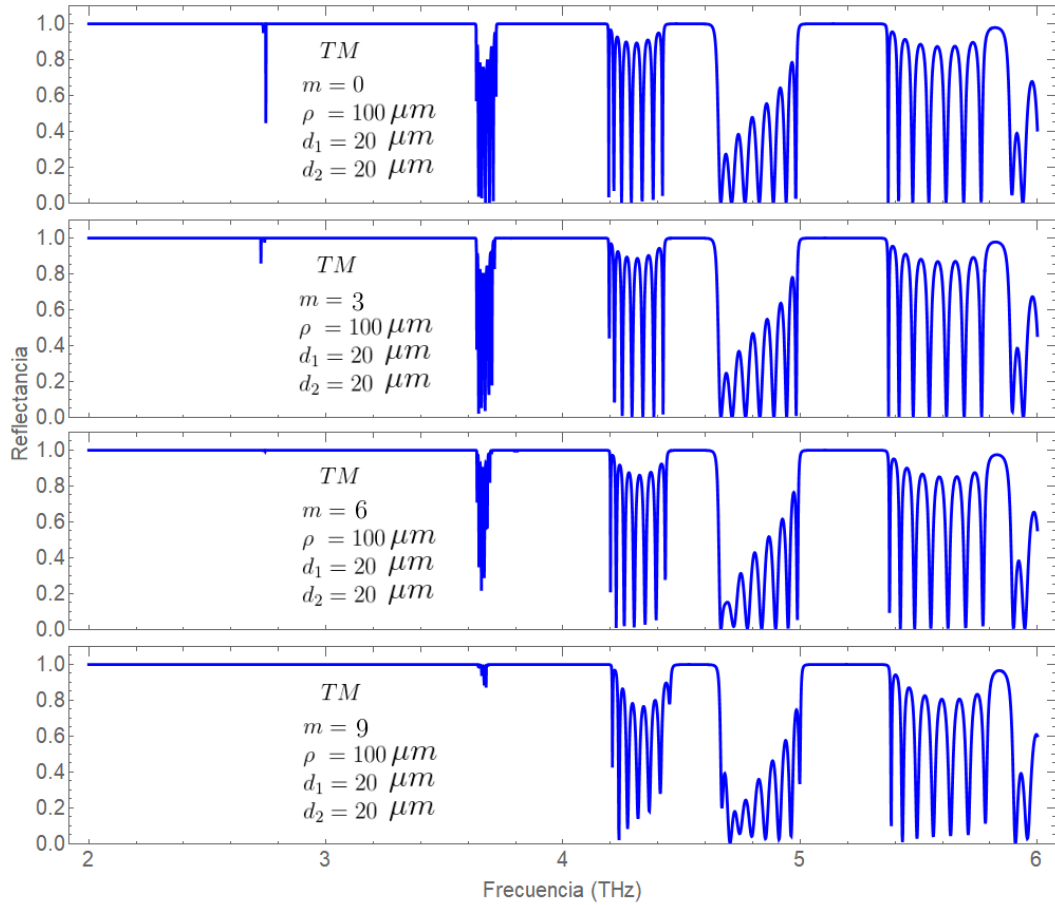


Figura 5.8: Espectros de reflectancia para ondas TM calculados para números de modo azimutal (a) $m = 0$, (b) $m = 3$, (c) $m = 6$, (d) $m = 9$ respectivamente, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 20\mu m$, $d_2 = 20\mu m$, $\rho_0 = 100\mu m$ y $N = 8$.

Se puede observar que a medida que el número de estado azimutal aumenta, se empieza a establecer una brecha donde no hay transmisión de luz, llamada PBG (Photonic Band Gap), que permite formar una sola brecha de alta reflectancia en un intervalo de frecuencias menor que $f = 4,2THz$. Esta brecha es conocida como gap superpolaritón y se establece debido a la existencia de una componente radial

del campo eléctrico E_ρ que interactúa con los electrones en el superconductor, justamente bajo las condiciones de valores de estado azimutal $m > 1$ y para valores de frecuencias cerca a la frecuencia de plasma $f_{ps} = 3,77THz$. Allí el índice de refracción del superconductor toma valores reales o imaginarios pero cercanos a cero. Se hizo un acercamiento para comprender mejor que pasa dentro de este intervalo y se muestra en la figura 5.9.

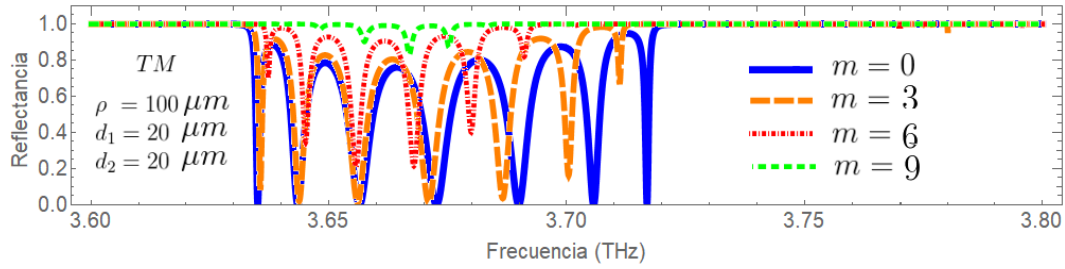


Figura 5.9: Espectros de reflectancia para ondas TM calculados para números de modo azimutal (a) $m = 0$, (b) $m = 3$, (c) $m = 6$, (d) $m = 9$ respectivamente, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 20\mu m$, $d_2 = 20\mu m$, $\rho_0 = 100\mu m$ y $N = 8$.

5.2.3. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar la temperatura T

En esta sección se presenta (figura 5.10) el comportamiento de la reflectancia que se obtuvo al llevar a cabo el cálculo numérico dejando fijo el número azimutal en $m = 4$ y valores fijos en los parámetros geométricos $\rho_0 = 100\mu m$, $d_1 = 20\mu m$ y $d_2 = 20\mu m$ pero aumentando la temperatura del superconductor en $T = 5K$, $15K$, $30K$, $45K$.

Se puede notar que al aumentar la temperatura del superconductor se empieza a notar un predominio de las propiedades dieléctricas en el espectro. Esto se debe a que al ir aumentando la temperatura, disminuyen sus respectivas frecuencias de plasma tomando los valores $f_{ps} = 3,77THz$, $3,58THz$, $3,27THz$, $2,94THz$, respectivamente. La disminución en los valores de la frecuencia de plasma se percibe en la gráfica como un corrimiento hacia la izquierda de ese ancho gap de alta reflectancia y del superpolaritón que son características propias que derivan de la componente superconductora.

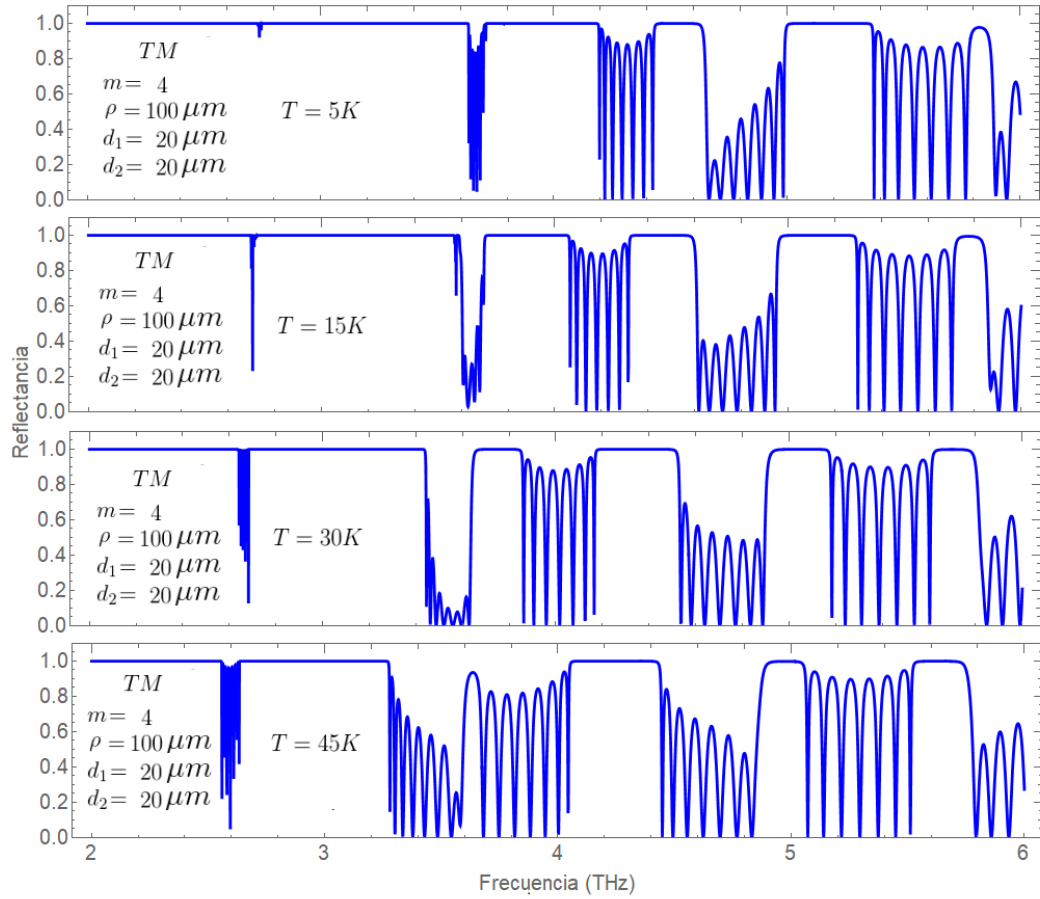


Figura 5.10: Espectros de reflectancia con número de estado azimutal fijo en $m = 4$ y temperaturas (a) $T = 5K$, (b) $T = 15K$, (c) $T = 30K$, (d) $T = 45K$, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 20 \mu m$, $d_2 = 20 \mu m$, $\rho = 100 \mu m$ y $N = 8$

5.2.4. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar sus parametros geométricos

En la figura 5.11 se muestra el comportamiento de los espectros de reflectancia cuando se dejan fijos el número de estado azimutal en $m = 4$, el radio del núcleo en $\rho_0 = 100\mu m$, el espesor de la capa superconductora en $d_1 = 20\mu m$ y se cambia el valor del espesor de la capa dieléctrica al doble, triple y cuádruple respecto a la del superconductor, tomando valores $d_2 = 20\mu m, 40\mu m, 60\mu m, 80\mu m$. En la figura 5.12 se muestra el comportamiento de los espectros de reflectancia pero esta vez duplicando, triplicando y cuádruplicando los espesores de las capas del superconductor, mientras que el espesor de la capa dieléctrica permanece constante.

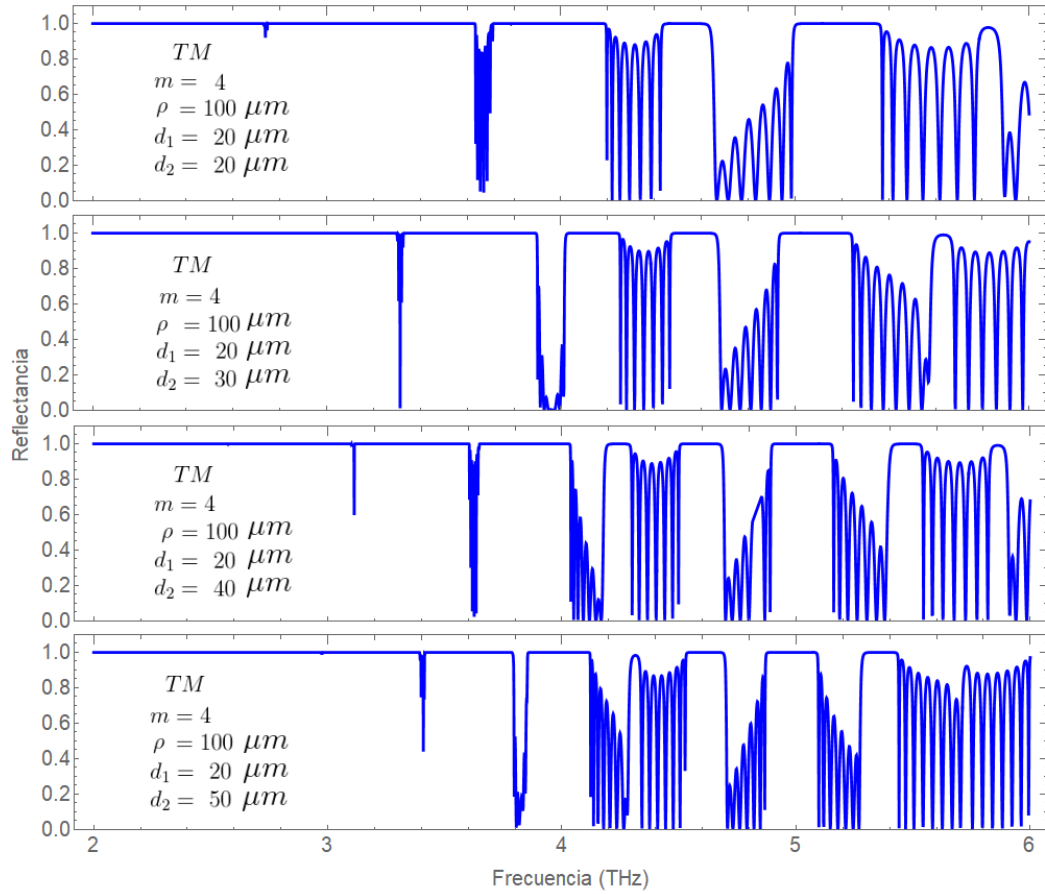


Figura 5.11: Espectros de reflectancia calculados para número de estado azimutal $m = 4$, $\rho_0 = 100\mu m$, espesor $d_1 = 20\mu m$ y espesor para las capas dieléctricas con (a) $d_2 = 20\mu m$, (b) $d_2 = 40\mu m$, (c) $d_2 = 60\mu m$, (d) $d_2 = 80\mu m$ y $N = 8$.

Se puede ver fácilmente que el comportamiento de los espectros de reflectancia son

altamente sensibles al cambio de los espesores de las capas dieléctricas y superconductoras en frecuencias donde el superconductor toma valores reales para el índice de refracción (frecuencias mayores que la frecuencia de plasma). Allí el número de gaps van aumentando pero a su vez disminuyendo su ancho de banda Δf . Esta disposición presenta baja sensibilidad, respecto al cambio en la geometría de las capas, para las frecuencias donde el índice de refracción del superconductor toma valores imaginarios (frecuencias menores que la frecuencia de plasma).

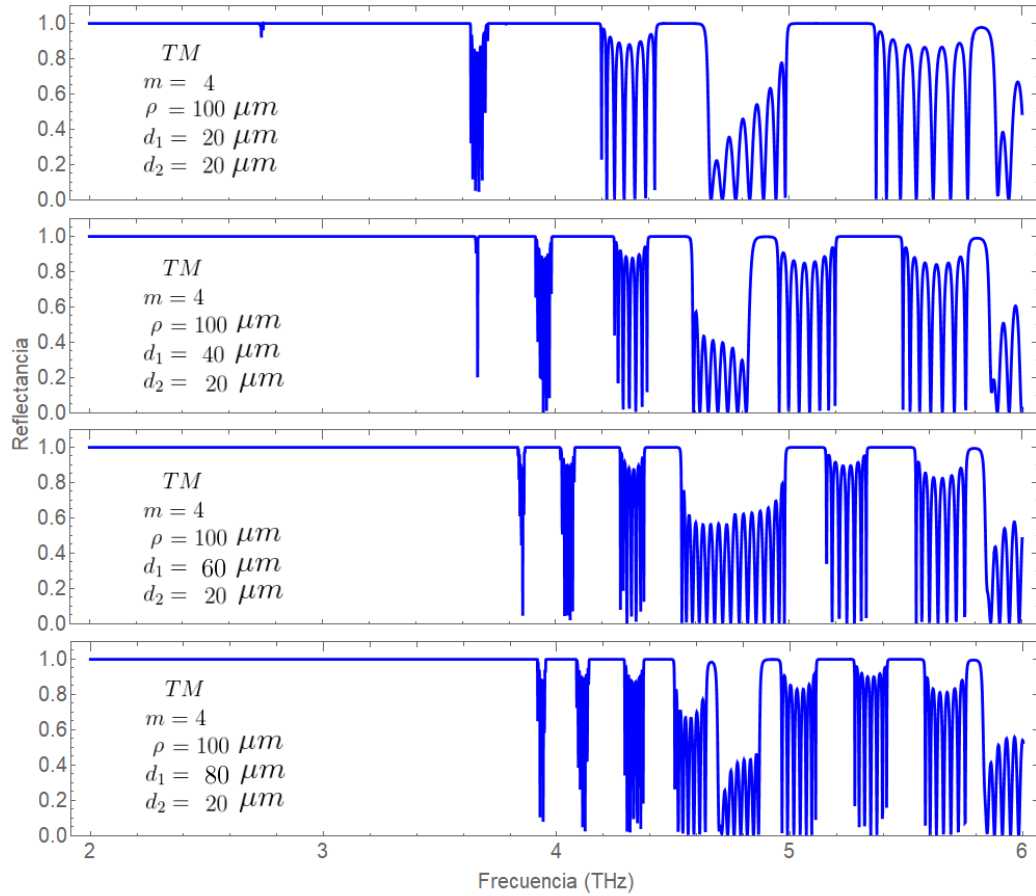


Figura 5.12: Espectros de reflectancia calculados para número de estado azimutal $m = 4$, $\rho_0 = 100 \mu m$, espesor $d_2 = 20 \mu m$ y espesor para las capas superconductoras con (a) $d_1 = 20 \mu m$, (b) $d_1 = 40 \mu m$, (c) $d_1 = 60 \mu m$, (d) $d_1 = 80 \mu m$ y $N = 8$.

5.2.5. Comportamiento de la reflectancia del cristal anular al variar el índice de refracción relativo n_{r2} del dieléctrico

Hasta este momento se han realizado los cálculos numéricos dejando fijo el valor del índice relativo de refracción del dieléctrico en $n_{r2} = \sqrt{40}$. En la presente sección se llevará a cabo el análisis de los espectros de reflectancia de ondas cilíndricas con un valor de número azimutal $m = 0$, interactuando en cristales anulares de valores fijos en los parámetros geométricos $\rho_0 = 100\mu m$, $d_1 = 20\mu m$ y $d_2 = 20\mu m$ pero variando el índice de refracción del dieléctrico en $n_{r2} = \sqrt{10}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{40}$ y $\sqrt{70}$.

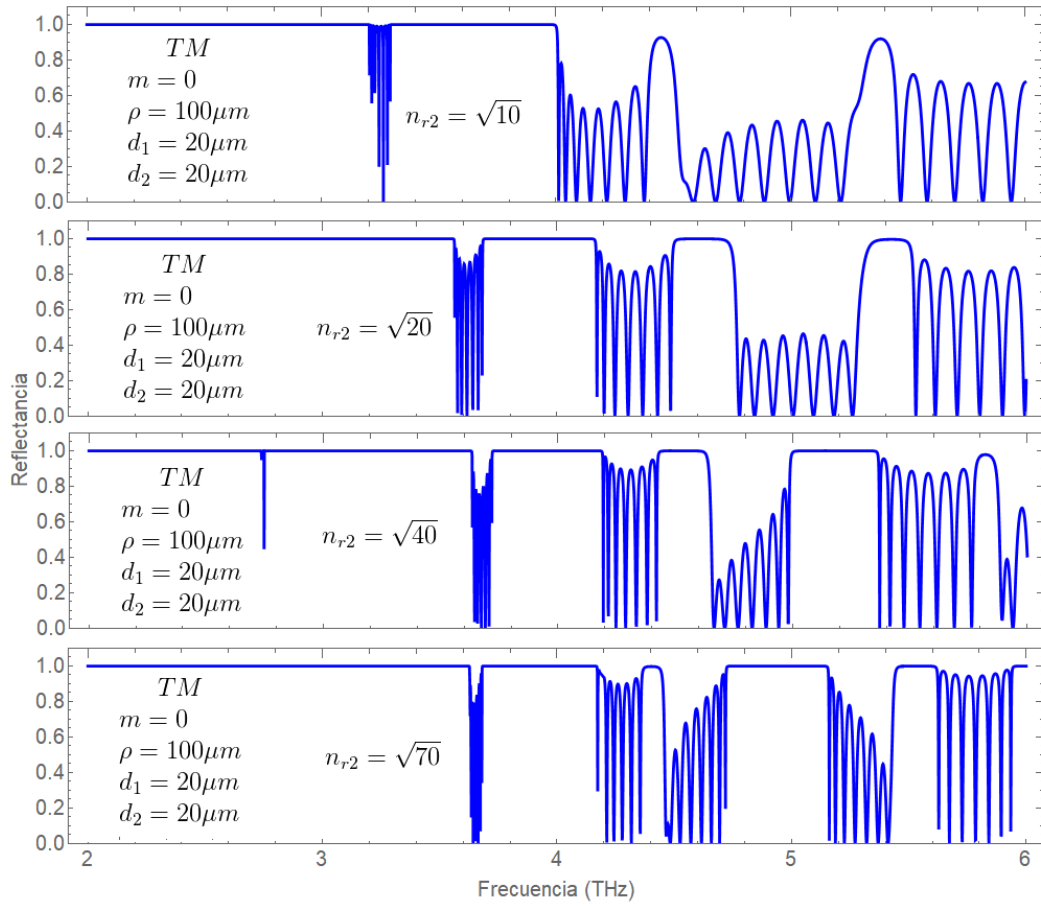


Figura 5.13: Espectros de reflectancia calculados para ondas con número de estado azimutal fijo en $m = 0$ y cristales cilíndricos de índice de refracción relativo del dieléctrico (a) $n_{r2} = \sqrt{10}$, (b) $n_{r2} = \sqrt{20}$, (c) $n_{r2} = \sqrt{40}$, (d) $n_{r2} = \sqrt{70}$, bajo las mismas condiciones geométricas $d_1 = 20\mu m$, $d_2 = 20\mu m$, $\rho = 200\mu m$ y $N = 8$.

Se puede ver en estas gráficas cómo el aumento en el valor del índice de refracción del dieléctrico contribuye a formar gaps bien definidos. Sin embargo, el componente

superconductor en el cristal fotónico, establece en el espectro de reflectancia gaps bien definidos para bajas frecuencias y cercanas a la frecuencia de plasma del superconductor, aunque el índice de refracción del dieléctrico tome valores relativamente pequeños.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En el presente trabajo de grado se hizo un análisis del comportamiento de la reflectancia en cristales fotónicos de simetría anular con componentes superconductor-dieléctrico para dos distintos tipos de superconductor, uno cuyo material es $YBa_2Cu_3O_7$ y el otro $Bi_{1,85}Pb_{0,35}Sr_2Ca_2Cu_2O_y$. De este análisis se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- El espectro de reflectancia de un cristal anular bajo las condiciones establecidas de número de modo azimutal $m = 0$ y radio del núcleo $\rho_0 > \lambda$, es idéntico al espectro de reflectancia de un cristal de simetría plana con ángulo de incidencia de radiación $\theta = 0^\circ$. Ambos cristales con capas superconductoras y dieléctricas de espesores d_1 y d_2 iguales. Esto se debe a que a medida que el radio del núcleo ρ_0 se hace muy grande, la curvatura de las capas cilíndricas tiende a cero y el cristal se hace relativamente semejante a un cristal de capas planas. Por otra parte, la onda cilíndrica descrita por medio de una función de Hankel se comporta como una función de onda plana para valores grandes del radio ρ_0 .
- Existe una alta sensibilidad al cambio en los valores del número de modo azimutal m , tanto así que se estableció un gap superpolaritón cuando m tomaba valores mayores a cero en frecuencias cercanas a la frecuencia de plasma del superconductor. Este gap superpolaritón se presenta solo en polarización TM ya que aparece por la interacción de la componente radial de campo eléctrico con los superelectrones y no depende tanto de la disposición periódica del sistema sino del material superconductor.
- Con la variación en la temperatura del sistema se logra dos cosas. La primera es variar el ancho Δf del gap superpolaritón y la segunda es sintonizarlo en determinado valor del rango de frecuencias ya que el gap superpolaritón se establece alrededor de la frecuencia de plasma del superconductor f_{ps} . Lo anterior siempre y cuando se cumpla la condición de trabajo a temperaturas muy por debajo de la temperatura crítica del superconductor T_c .

- El aumento tanto en los espesores de las capas del dieléctrico como las del superconductor, aumenta el número de gaps pero disminuye sus anchos de banda Δf para valores de frecuencia mayores a la frecuencia de plasma. Los espectros obtenidos muestran que los gaps para valores de frecuencia menores a la frecuencia de plasma son muy poco sensibles al cambio en los espesores.

Como una posible continuación del trabajo:

- Se podría llevar a cabo el estudio de las propiedades de reflectancia de cristales fotónicos cilíndricos ternarios 1D, cuya disposición por celda unitaria sería de una capa de material superconductor con dos capas de dieléctricos de distinta permitividad eléctrica o un cristal cilíndrico de dos capas de superconductores de temperaturas críticas distintas con una capa de material dieléctrico.
- Se puede llevar a cabo el estudio de cristales cilíndricos con otras configuraciones incluyendo por ejemplo metamateriales, en donde se puede encontrar resultados interesantes no solo con ondas que inciden con polarización TM si no también con polarización TE ya que para este tipo de material se debe considerar frecuencias de plasma eléctrico y magnético, también se puede llevar a cabo el estudio de cristales fotónicos anulares cuyos componentes sean de material semiconductor, metal, grafeno, etc., e incluir defectos.

Bibliografía

- [1] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, Robert D. Meade, *Photonic Crystals Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Second Edition (2008)
- [2] Johnson, Steven G., and John D. Joannopoulos. Introduction to photonic crystals: Bloch's theorem, band diagrams, and gaps (but no defects). Photonic Crystal Tutorial 2003.
- [3] S. Mubeen, J. Lee, N. Singh, S. Krämer, G.D. Stucky, M. Moskovits, Nat. Lett. **8**, 247 (2013).
- [4] G.C.R. Devarapu, Foteinopoulou, J. Appl. Phys. **114**, 033504 (2013).
- [5] C. Clavero, Nat. Phot. **8**, 95 (2014).
- [6] T.A. Kelf, Y. Sugawara, J.J. Baumberg, M. Abdelsalam, P.N. Bartlett, Phys. Rev. Lett. **95**, 116802 (2005).
- [7] J.N. Anker, W.P. Hall, O. Lyandres, N.C. Shah, J. Zhao, R.P. Van Duyne, Nat. Mater. **7**, 442 (2008).
- [8] J.W. Menezes, J. Ferreira, M.J.L. Santos, L. Cescato, A.G. Brolo, Adv. Funct. Mater. **20**, 3918 (2010).
- [9] A.G. Brolo, Nat. Phot. **6**, 709 (2012) .
- [10] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [11] B.F. Diaz-Valencia, J.M. Calero, Phys. C **505**, 74 (2014).
- [12] B.F. Diaz-Valencia, J.R. Mejía-Salazar, N. Porras-Montenegro, Superlatt. and Microstruc. **85**, 608-614 (2015).
- [13] Yablonovitch, T.J. Gmitter, Phys. Rev. Lett. **67**, 2295 (1991).
- [14] J. Scheuer, W.M.J. Green, G.A. DeRose, A.Yariv, L. Fellow, IEEE J. Quantum Electron. **11**, 476 (2005).

-
- [15] P. R. Villeneuve, S. Fan, J. D. Joannopoulos, K-Y. Lim, G. S. Petrich, L. A. Kolodziejski, and R. Reif, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 167 (1995).
- [16] J.S. Foresi, P. R. Villeneuve, J. Ferrera and J. D. Joannopoulos, *Nat.* **390**, 143 (1997).
- [17] Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, Wiley, New York, (1988).
- [18] Pochi Yeh, Amnon Yariv, and Emanuel Marom, *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1196 (1978).
- [19] H. Deng, Y. Chen, N. C. Panoiu, B. A. Malomed, and F. Ye, *Opt. Express* **26**, 2559 (2018).
- [20] Li. Shang, Z. Huang, and Y. Liao, *J. Opt. Soc. Am. B*, **32**, 1155 (2015).
- [21] R. Valivarthi, V. Ramana , Marcel.li G. Puigibert, Q. Zhou, G. H. Aguilar, V. Verma, F. Marsili, M. D. Shaw, S. W. Nam, D. Oblak, W. Tittel, *Nat. Photonics*, **10**, 1038 (2016) .
- [22] E.X. Ping, *J. Appl. Phys. Lett.* **76**, 7188 (1994) .
- [23] M.A. Kaliteevski, R.A. Abram, V.V. Nikolaev, G.S. Sokolovski, *J. Mod. Opt.* **46**, 875 (1999).
- [24] J. Scheuer, W. M.J. Green, G. DeRose, Y. Yariv, *Opt. Lett.* **29**, 2641 (2004).
- [25] T. Monti, G. Gradoni, *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* **20**, 134 (2014).
- [26] M.S. Chen, C.J. Wu, and T.J. Yang, *Sol. St. Commun.* **149**, 1888 (2009).
- [27] M.S. Chen, C.J. Wu, and T.J. Yang, *Sol. St. Commun.* **373**, 3594 (2009).
- [28] A.M. Stoloyarov, *Nat. Phot.* **6**, 229 (2012).
- [29] A.A. Fotiadi, *Nat. Phot.* **6**, 217 (2012).
- [30] B.B. Hong, L.P. Huang, X.L. Xu, Y.X. Xia, C.J. Tang, *J. Phys.* **48**, 045104 (2015).
- [31] Sun Xiankai et al, *Scientific Reports.* **6**, 37688 (2016).
- [32] C. A. Hu, C. J. Wu, T.J. Yang, S.L. Yang, *Opt. Commun.* **291**, 424 (2013).
- [33] S. K. Srivastava, A. Aghajamali. *J. Supercon. Nov. Magn.* **29**, 1423 (2016).
- [34] S.A. El-Naggar, *Eur. Phys. J. D.* **71**, 11 (2017).

-
- [35] S. R. Entezar, J. Mod. Opt. **64**, 1588 (2017).
 - [36] M.R. Spiegel, Fourier Analysis with applications to boundary value problems, Shaum's outline series, McGraw-Hill, New York, 1974.
 - [37] P. Markos, and C.M. Soukoulis, *Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials*. Princeton University Press, New Jersey (2008).
 - [38] Maksim Skorobogatiy and Jianke Yang, *Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*, Cambridge University Press, New York (2009).
 - [39] Tinkham Michael and Gordon Mackay. *Introduction to superconductivity*, Harvard University, McGraw-Hill, New York (1996).
 - [40] Maksim Skorobogatiy, and Jianke Yang, *Fundamentals of photonic crystal guiding*, Cambridge University Press (2009).
 - [41] Shu-Ang Zhou, *Electrodynamics of solids and microwave superconductivity*. John Wiley & sons Inc., New York (1999).
 - [42] C. Kittel "Introduction to Solid State Physics", Wiley, NY (1996).
 - [43] O. G. Vendik, I. B. Vendik and D. I. Kaparkov, in IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. **46**, 469-478 (1998).
 - [44] H. Shibata and T. Yamada, Phys. Rev. B 54, 7500 (1996).