

SURGIMIENTO DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: ASPECTOS
HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICOS

JUAN FELIPE TELLO FERNÁNDEZ

Trabajo de grado presentado en el programa académico Licenciatura en Matemáticas y Física
como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

DIRECTOR

Dr. Luis Cornelio Recalde

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

2016

*... Al Rey de los siglos, inmortal, invisible, al único y sabio Dios, sea
honor y gloria por los siglos de los siglos. Amén.*

1 Timoteo 1:17

*A mi familia: mis padres, Juan Carlos y Luz, y mi hermana Kelly Alexandra
... La honra de los hijos, son sus padres.*

Proverbios 17:6

Contenido

RESUMEN	5
INTRODUCCIÓN	6
1. HISTORIOGRAFÍA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA	9
1.1. El concepto de ángulo en la antigüedad	10
1.1.1. El uso egipcio y babilonio de los ángulos	11
1.1.2. El concepto de ángulo en los geómetras pre-Euclidianos	13
1.1.3. Concepción Euclidiana de ángulo	14
1.1.4. La naturaleza del ángulo	20
1.2. Arcos y cuerdas de circunferencia	22
1.2.1. Aristarco de Samos: precursor de la trigonometría	23
1.2.2. Hiparco y la primera tabla trigonométrica	24
1.2.3. Menelao: un primer acercamiento de una relación trigonométrica	25
1.2.4. La trigonometría en el <i>Almagesto</i> de Ptolomeo	26
1.3. Breve historia de la medida angular	32
1.4. La trigonometría después de los griegos	36
2. DE LA TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO A LA TRIGONOMETRÍA DE LAS FUNCIONES	38
2.1. La función trigonométrica en los inicios del Cálculo Infinitesimal	39
2.2. Isaac Newton y la serie de potencias para el seno y coseno	44
2.3. Leonhard Euler y la función trigonométrica	51
2.3.1. La función trigonométrica en la <i>Introductio</i>	51
2.3.2. La función trigonométrica como solución de una ecuación diferencial	58
2.3.3. El cálculo diferencial de la función trigonométrica	62
2.3.4. Euler y las series trigonométricas	69
3. LA TRIGONOMETRÍA EN SU PUNTO MÁS ALTO	72
3.1. La serie trigonométrica de Fourier	73
3.2. Antecedentes sobre el uso de la serie trigonométrica	74
3.3. Un ejemplo sobre el uso de la serie trigonométrica	74
3.4. En busca de los coeficientes de la serie	76
4. CONCLUSIONES	81
BIBLIOGRAFÍA.	90

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Pirámide del problema 56 del Papiro de Rhind.....	11
Figura 2. Proposición III. 20.....	17
Figura 3. Ley del seno en la proposición III. 20.	18
Figura 4. Relación trigonométrica de Menelao.....	25
Figura 5. Relación cuerda y seno de un ángulo.	27
Figura 6. Relación básica para solucionar problemas de triángulos en Ptolomeo.....	28
Figura 7. Teorema de Ptolomeo.....	29
Figura 8. Cálculo de la cuerda del arco diferencia.....	30
Figura 9. Proposición 22 Arquímedes - Sobre la esfera y el cilindro.	39
Figura 10. Serie de potencias para $\arcsin(x)$	44
Figura 11. Serie de potencias para el seno.	46

RESUMEN

[Surgimiento de la función trigonométrica, aspectos histórico-epistemológicos]

Juan Felipe Tello Fernández

El propósito de este trabajo de grado es analizar el tránsito histórico, desde las relaciones trigonométricas definidas en los triángulos, a las funciones trigonométricas definidas en el conjunto de los números reales, y las cuales parecen perder el parentesco con la solución de triángulos.

Nuestra intención principal no es indagar sobre la problemática de la enseñanza de este concepto, pero si el analizar los problemas del saber cómo tal, es decir, a través de un estudio histórico determinar el trayecto de la trigonometría del ámbito geométrico-estático, en donde se privilegia la noción de razón, a la trigonometría de las funciones, más exactamente en la categoría de funciones trascendentes elementales. De esta manera, se presenta en este trabajo un problema histórico dirigido bajo un enfoque epistemológico: develar el surgimiento de la función trigonométrica, que permita esclarecer su naturaleza epistemológica, para mostrar los elementos de causalidad que se dieron en este proceso, hasta su instauración en el cuerpo teórico de las matemáticas.

Palabras clave: Trigonometría, historia de la función trigonométrica, funciones trascendentes.

INTRODUCCIÓN

La trigonometría y las funciones trigonométricas son muy útiles en la vida cotidiana, son conceptos con aplicaciones en diversas áreas del conocimiento; desde elaborar un mapa en el campo de la cartografía, calcular la altura de una pirámide o la inclinación de una de sus caras, a calcular la distancia entre la tierra y la luna, las *razones trigonométricas* han sido utilizadas con gran habilidad. Sin embargo, los usos más generalizados de la trigonometría no tienen relación con triángulos; por ejemplo, en la elaboración de métodos para resolver una ecuación diferencial, en el estudio y modelación de fenómenos que implican periodicidad, en aplicaciones tecnológicas, en la música, la física y la climatología se sirven de la periodicidad de las *funciones trigonométricas* seno y coseno.

El asunto que se torna interesante respecto a la trigonometría, es establecer cómo se presenta la transición de la razón a la función, pues aunque el seno y sus parientes trigonométricas se encuentran por primera vez como las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, las propiedades fundamentales de la función trigonométrica se desarrollan y obedecen a un enfoque completamente ajeno al triángulo.

Muchas son las investigaciones que se han realizado sobre la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, en las cuales se han presentado los distintos fenómenos ligados a la aprehensión del concepto función, sin embargo en (Montiel, 2005, pág. 16) se afirma que en muchas de estas investigaciones se considera “al concepto *función* en lo general. Esto es, las funciones algebraicas, exponencial, logarítmica y trigonométrica son tratadas por igual, su naturaleza es ignorada”, llamando la atención que en el proceso de enseñanza juega un papel importante el reconocimiento de los obstáculos ligados en la construcción original de un concepto particular. En este sentido, nos interesa considerar el desarrollo conceptual de la función trigonométrica, que permita esclarecer su naturaleza epistemológica y esos obstáculos que se dieron para su constitución y formalización.

Este trabajo presenta en forma general el surgimiento de la función trigonométrica, aludiendo específicamente al origen y desarrollo de la función seno y coseno. El objetivo de esta tesis es exponer cómo se da el movimiento conceptual de una noción a otra; esto se presenta a lo largo del documento bajo dos miradas; la primera enmarcada en el trayecto *razón-función*, y la

segunda prestando atención a la naturaleza epistemológica de la función trigonométrica, en este segundo aspecto se podrá determinar por qué esta función hace parte de la familia de funciones trascendentes. La problemática descrita anteriormente se ha desarrollado en este documento en cuatro capítulos.

En el primer capítulo se presenta una historia de los conceptos básicos de la trigonometría, como el concepto de ángulo, y los arcos y cuerdas de circunferencia, de los cuales la función trigonométrica hunde sus raíces. Se explica que básicamente la trigonometría trabajada por los griegos es una trigonometría de las cuerdas de un círculo, y esta concepción esconde los elementos fundamentales de la función trigonométrica. En la sección 1.1 se muestra el concepto de ángulo en la antigüedad, los aportes de la cultura egipcia y babilónica, pasando por la concepción de los griegos, y especialmente la definición de ángulo de Euclides en los *Elementos*. La sección 1.2 trata sobre los primeros desarrollos en la trigonometría, motivado por los estudios en astronomía con sus representantes: Aristarco, Hiparco, Menelao y Ptolomeo. El trabajo de Ptolomeo resulta ser un apoyo para posteriores resultados respecto a lo trigonométrico; el *Almagesto* es un claro ejemplo del uso de la trigonometría como una herramienta para los estudios en astronomía, ya que básicamente los problemas en astronomía se resumían en resolver un triángulo, es decir, hallar las cantidades involucradas en un triángulo haciendo uso de su tabla de cuerdas. En la sección 1.3 se realiza una breve reseña de la historia de la medida angular, se muestra cómo surgió la medida en grados y radianes para los ángulos, y cómo se presentó la transición *grado-radián* teniendo como referencia la proposición VI. 33 de Euclides. La sección 1.4 describe *grosso modo* algunos resultados posteriores a los trabajos de los griegos, se resalta el hecho que con el aporte del matemático Johannes Müller, la trigonometría dejó de ser un sirviente de la astronomía, para tener sus desarrollos y enfoque de manera independiente.

En el capítulo dos se analiza el trayecto de la trigonometría del triángulo a la trigonometría de las funciones; este cambio fue motivado por la nueva forma de hacer matemáticas, especialmente con el descubrimiento del cálculo para su aplicación a la modelación de fenómenos periódicos. En la sección 2.1 se retoma un resultado de Arquímedes que se puede interpretar como una determinación de la integral del seno; se describe brevemente cómo este resultado estuvo presente en los inicios del cálculo. La sección 2.2 exhibe cómo Newton

desarrolló la serie de potencias para el seno y coseno; este hecho representa un cambio importante a favor del surgimiento de la función trigonométrica, y revela la naturaleza de esta función. En la sección 2.3 se estudian los resultados de Leonhard Euler, quien define y muestra las propiedades de las funciones trigonométricas sin hacer alusión a triángulo alguno. Se describe la manera en que Euler, en la *Introductio in Analysin Infinitorum* e *Institutiones Calculi Differentialis*, trabaja con esta función, para el desarrollo de sus propiedades, como la periodicidad, las identidades y fórmulas como $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, hasta la forma de derivar las funciones trigonométricas y sus inversas. La sección 2.3.2 presenta cómo Euler necesitó de esta función en el desarrollo del método general para la solución de la ecuación diferencial con coeficientes constantes; en este sentido, se entiende que la función trigonométrica surge también como solución a una ecuación diferencial, es un resultado previo a lo que trabaja en la *Introductio* e *Institutiones*. Al final se describe brevemente la forma en que Euler incursionó en el uso de la serie trigonométrica, en el marco del problema de los movimientos de Júpiter y Saturno en un artículo de 1748 y en el debate sobre la cuerda vibrante.

En el capítulo tres se muestra el uso de la serie trigonométrica por parte de Fourier, como una forma de mirar una aplicación de las funciones trigonométricas para modelar el flujo de calor, pero que desemboca en un resultado sobre la representabilidad de una función a través de esta serie. En la sección 3.3 se presenta un ejemplo del uso que Fourier da a la serie para representar la función $f(x) = \frac{1}{2}x$ y en la sección 3.4 se describe el método que siguió para encontrar y expresar los coeficientes de la serie trigonométrica.

En el cuarto capítulo se hace una descripción de todo este proceso, donde se presenta a modo de conclusión el desarrollo histórico y el surgimiento de la función trigonométrica en dos enfoques a través del documento. De esta manera, se discuten los resultados históricos comparándolos con una propuesta contenida en (Rosenberg, 1958) sobre la necesidad de cambiar la forma de enseñar la trigonometría en la escuela.

1. HISTORIOGRAFÍA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA

Al hablar de las funciones trigonométricas se hace referencia a funciones que no sólo son importantes para la modelación de fenómenos, sino que sirven de referencia teórica a muchas de las ramas del análisis matemático. Un interrogante inicial consiste en preguntarnos sobre la naturaleza del dominio de dichas funciones. Ya que la exposición general que se hace de la función trigonométrica está enmarcada en la transición de la trigonometría clásica, de las razones de los lados de un triángulo rectángulo a los puntos de la circunferencia unitaria. Esta presentación permite definir las en la escolaridad pero desconoce los elementos que abren paso para realizar dicha transición, dado que históricamente la trigonometría ha evolucionado en sus objetivos y métodos.

Por lo anterior, la primera idea que se tiene de una función trigonométrica, por ejemplo $\sin(x)$, es que el argumento x es un ángulo, una entidad geométrica. Sin embargo el dominio de la función seno corresponde a los números reales, lo cual se contrapone con la idea que aparece en algunos textos escolares, de que la variable x corresponde a los ángulos en lugar de los arcos de circunferencia, en este sentido, el seno es la “cuerda” de un arco, y la notación común para la función seno inverso es *arco seno*. Estos elementos se pueden revisar a partir del análisis epistemológico de las nociones matemáticas que históricamente dieron lugar a las funciones trigonométricas. Estos aspectos históricos permiten que se pueda entender la línea de evolución conceptual, los principios en los cuales se basan los significados que se tienen en la actualidad, con respecto a las funciones trigonométricas y los elementos que la caracterizan.

La trigonometría tiene sus inicios en el tratamiento de triángulos. A partir del estudio de astronomía, se comienza a percibir que un elemento común se hace presente en muchos fenómenos naturales; la periodicidad, concepto que no es profundizado en la antigüedad pero que influye inicialmente en la necesidad de cuantificar los eventos celestes observados. La noción de ángulo se encuentra presente en actividades de medición y construcción en la cultura egipcia. Un acercamiento más detallado al concepto de ángulo se halla en Tales de Mileto, aunque Aristóteles será quién problematice sobre su naturaleza en el deseo de establecer su caracterización ontológica. En su libro los *Elementos*, Euclides incluye entre sus 23 definiciones

la noción de ángulo. Euclides establece algunas de sus propiedades importantes, entre las que es importante destacar: la ausencia del ángulo cero y el ángulo llano en toda su geometría, y una proposición que relaciona el ángulo central en una circunferencia con el arco interceptado por él. Es justamente en este último resultado, sobre el cual se va a inclinar gran parte de la actividad matemática que tiene relación con los aspectos trigonométricos. El estudio de las cuerdas y arcos de circunferencia con relación al ángulo central que los genera, da origen a la trigonometría, motivada nuevamente por los estudios de astronomía que se adelantaron por parte de Aristarco, Hiparco y que después tendrán su máximo esplendor con el trabajo de Ptolomeo.

Aunque Ptolomeo usa algunas expresiones que pueden ser equivalentes a las actuales fórmulas trigonométricas en la construcción de su tabla de cuerdas, no incorpora la noción de función. Son sobre estos elementos mencionados anteriormente, sobre los cuales se van a cimentar algunas propiedades que serán importantes en la constitución del concepto de función trigonométrica, cuando ya la atención no está puesta sobre los ángulos sino sobre la medida del arco que se genera, la función trigonométrica adquirirá un primer significado.

1.1. El concepto de ángulo en la antigüedad

Históricamente el concepto de ángulo aparece inmerso en diversos problemas que se presentaron en las culturas antiguas. Esto resulta de las primeras actividades que desarrollaron los antiguos, ya que en las primeras civilizaciones era un asunto religioso, filosófico y social, la necesidad de comprender algunos fenómenos que gobiernan el mundo para organizar su sociedad. Así se gestó el estudio de los astros para predecir aquellos eventos esperados (eclipses, equinoccios y otros) que les indicarían cuando realizar sus ceremonias religiosas, los cambios estacionales de clima, sembrar, cosechar y realizar demás actividades propias de cada cultura. Es aquí donde aparece la astronomía, producto de la búsqueda y el interés del hombre por la recurrencia y el deseo de entender los eventos periódicos en la naturaleza.

La astronomía fue una actividad que a los antiguos les permitió acercarse por ejemplo a la noción de tiempo. En la cultura Inca, para medir el tiempo se construyeron torres cilíndricas en lo más alto de una colina al oeste de Cuzco, y una pirámide central que les permitía mirar la posición de las puestas del sol relativa. Estas observaciones les indicaba los tiempos de siembra y el momento de celebrar sus ceremonias religiosas (Matos, 1990).

El buscar respuestas a estas necesidades fue la motivación para estudiar los movimientos de las estrellas y los planetas, intrínsecamente a través de ésta actividad se estaba realizando un primer acercamiento al concepto de ángulo, tratando de establecer la posición, orientación y dirección de los astros. Serán los egipcios y babilonios quienes tengan una aproximación diferente de éste concepto.

1.1.1. El uso egipcio y babilonio de los ángulos

Las primeras culturas también utilizaron ángulos para resolver problemas relacionados con la construcción de edificios, y en la cultura egipcia se puede notar claramente su uso para la construcción de las pirámides y edificios con paredes inclinadas. Esto se encuentra reportado en el Papiro de Rhind, la principal fuente de información de la actividad matemática egipcia. En el problema 56 se puede observar la importancia geométrica que tenían ciertos cálculos referentes a las proporciones de pirámides.

Supongamos $ABCD$ la base de la pirámide cuadrada en la *Figura 1*, en la cual E es su centro, H es su vértice y F es el punto medio del lado AD de la base.

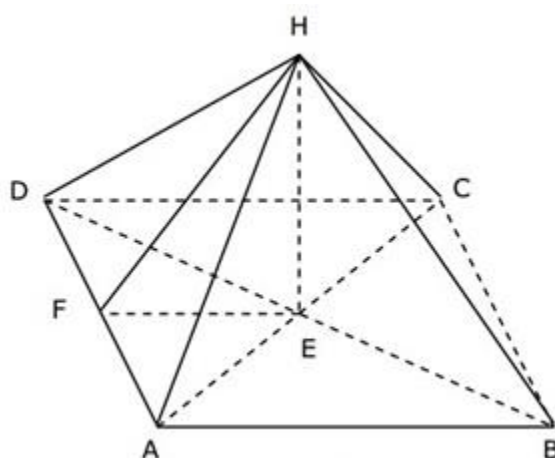


Figura 1. Pirámide del problema 56 del Papiro de Rhind.

En (Heath I, 1921) se resalta la distinción de dos líneas en la figura, la primera será alguna de las líneas en la *base* la cual es nombrada como *wkha-thebt* y la segunda será la *altura* que es nombrada como *pir-em-us*. El problema planteado alrededor de la pirámide, era encontrar una

relación llamada *se-qet*¹ que determina las proporciones de la pirámide, y que es una palabra egipcia cuyo significado es cercano a la noción de *inclinación*, con estas consideraciones el *se-qet* estaba determinado por la expresión $se - qet = \frac{\frac{1}{2}wkha-thebt}{piremus} (1)$.

Con respecto a esta relación, en (Heath I, 1921) se asegura que el *se-qet* en todos los casos tiene un mismo significado, y representa la *cotangente* de la pendiente de las caras de la pirámide, por ejemplo, $\cot HFE$ o la razón de FE a EH . El problema 56 del Papiro de Rhind pide “si una pirámide es de 250 codos de altura y el lado de su base es de 360 codos de largo, ¿cuál es su *se-qet*?” (Chace, 1927, pág. 96). La solución del problema, consiste en dividir 360 entre 2, que es la mitad de la base y luego encontrar el cociente de $180/250$ la cual es una medida de la cotangente del ángulo en la pendiente de la pirámide, la *se-qet* determinada (1), además en (Heath I, 1921, pág. 128) se encuentra que “el *se-qet* en No. 56 es $18/25$ ”. En términos modernos, podríamos decir que en la solución de este problema se estaba usando cualquiera de los triángulos semejantes o una versión temprana de las relaciones trigonométricas.

Según se expresa en (Matos, 1990), la producción de las tablas detalladas de los eventos astronómicos de la luna y otros planetas por parte de los babilonios, muestran el desarrollo de sus técnicas para predecir y recordar el movimiento de estos cuerpos celestes. El arreglo de las estrellas en constelaciones que forman los signos del Zodiaco al parecer fue su primer dispositivo dedicado para este propósito, el cual fue seguido de una asignación numérica para registrar la posición de los planetas y cuerpos celestes. Esta asignación consiste en un procedimiento que combina las nociones de espacio y tiempo, considerando que la unidad de cálculo de distancias fue la milla, ésta se convirtió en una unidad de tiempo. Los astrónomos babilonios transfirieron la milla como medida del tiempo para la medición de los eventos registrados en sus tablas, conviniendo que el número de millas contenidas en un día es el equivalente a una rotación de los cielos, cada día entonces tendría 12 millas al igual que la circunferencia del cielo también las tendría. Luego cada una de esas millas se dividieron en 30 subdivisiones, que produjeron 360 partes por todo el cielo, esto parece ser el origen de la división del tiempo astronómico en 360° y

¹ El *se-qet* se entiende como una relación que les ayudaba a mantener la inclinación de las caras de la pirámide. En (Heath I, 1921) se advierte que es precisamente la pendiente – *inclinación* – del ángulo HFE lo que al constructor le gustaría saber en el problema 56 del Papiro de Rhind. El ángulo concebido como *inclinación* posteriormente es definido por Euclides.

por consiguiente la división del círculo en 360° , una forma de medir el tiempo utilizando una unidad de distancia².

La actividad matemática en las primeras civilizaciones se desarrolló de forma práctica, los métodos de solución eran diseñados para resolver problemas en particular y así la noción de ángulo en este caso estaba sujeta al tipo de situación que pudiera presentarse. Aun cuando había una idea de inclinación y también la astronomía babilónica proveyó de una gran cantidad de datos, se entiende que no hubo algún tipo de razonamiento teórico para poder expresar más generalmente la noción de ángulo. Fueron los geómetras griegos pre-Euclidianos quienes comenzaron a tener un acercamiento más profundo de este concepto.

1.1.2. El concepto de ángulo en los geómetras pre-Euclidianos

Tales de Mileto (624-547 a. C) pasó muchos años en Egipto y se convirtió en el primer matemático prominente entre los griegos; aprendió a determinar la altura de una pirámide a partir de su sombra y a calcular la distancia de un barco al puerto de Mileto haciendo uso de la semejanza de triángulos, fue quien introdujo el estudio de la geometría a Grecia y tiene atribuidos a su nombre algunos de los primeros teoremas de la geometría elemental en los que se puede apreciar su concepción de ángulo.

Según la tradición y lo reportado por Eudemo, historiador de la Geometría, Tales fue el primero en demostrar que un círculo es bisecado por su diámetro, y en establecer la proposición I. 15 de Euclides, *si dos líneas rectas se cortan, los ángulos verticales (opuestos por el vértice) son iguales*, aunque no lo probó formalmente. Considerando que aprendió geometría de los egipcios, fue el primero en descubrir que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto. En (Heath I, 1921) se menciona que también se le acredita con el primer enunciado de la proposición I. 5 de Euclides que *los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales*, aunque Tales aquí se refiere a los ángulos de la base como *similares* en lugar de usar el término *igual*, se deduce que no pensaba en el ángulo como una magnitud, sino como una figura con determinada forma.

² Respecto al uso de la división del círculo completo en 360° , en (Boyer, 1968) se afirma que no se sabe con exactitud cuándo comenzó a usarse, aunque su uso se atribuye en principio a Hiparco, por su relación con el cálculo de su tabla de cuerdas, siendo posible que tomase este hecho directamente de Hypsicles, quien ya había dividido el día en 360 partes, subdivisión sugerida precisamente por la astronomía babilónica.

La igualdad de la suma de los tres ángulos de un triángulo a dos rectos, se le atribuye a Pitágoras y aunque Tales descubrió que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, probablemente pudo haber intuido esta proposición para el triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia. Sin embargo, Eudemo endosó a los pitagóricos el descubrimiento del teorema general, de que en cualquier triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos, cuyo método de demostración es diferente al usado por Euclides (Heath I, 1921).

En contraste con los matemáticos y filósofos anteriores, uno de los primeros en documentar sus observaciones fue Aristóteles, quién establece una ontología para los objetos de la geometría a partir de las categorías de cantidad, cualidad o relación. Para Aristóteles la longitud era un ejemplo de cantidad, un triángulo era una cualidad y paralelismo era una relación. En este sentido “Aristóteles parece reconocer que las líneas quebradas forman un ángulo en una sola línea” (Heath, 1956, pág. 159) así tuvo la opinión de que un ángulo se encontraba dentro de la categoría de cualidad³.

Un aspecto interesante al intentar establecer la naturaleza del ángulo dentro de la filosofía aristotélica, era determinar la forma en que los diversos tipos de ángulos se relacionan entre sí. En relación a este aspecto, Matos (1990) menciona que Aristóteles discute la prioridad del ángulo recto en comparación con el agudo, ya que por un lado el ángulo recto se define primero, aunque por otro lado, el ángulo recto se compone de ángulos agudos, lo que parece dar prioridad a los ángulos agudos. Sin embargo, Aristóteles hace un buen acercamiento a lo que podría ser una buena definición de ángulos rectos, al plantear que un ángulo recto es alcanzado cuando una cosa cae en el suelo y rebota haciendo ángulos similares en ambos puntos de impacto, así el ángulo recto es visto aquí como el límite de los ángulos opuestos.

1.1.3. Concepción Euclidiana de ángulo

En los trabajos de Euclides no se desarrolla trigonometría, sin embargo, los *Elementos* presentan de una manera amplia la concepción que tenía Euclides sobre los ángulos, y permite mirar a través de sus proposiciones, argumentos que serán de gran influencia para posteriores trabajos en relación con los conceptos trigonométricos, por ejemplo, en la determinación de ciertas relaciones entre los ángulos centrales de un círculo con sus arcos correspondientes.

³ La discusión sobre las categorías a las que se ubicaba el ángulo en la antigüedad será ampliada con Proclo, cuando se trate la naturaleza del ángulo dentro de las categorías aristotélicas.

Para Euclides “Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta... Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo” (Euclides, 1991, pág. 192).

De esta definición cabe resaltar dos aspectos interesantes, (1) según lo considerado anteriormente por los geómetras antes que Euclides, la definición de ángulo como *inclinación* es una nueva perspectiva – un nuevo punto de partida -, dado que la palabra no aparece en Aristóteles, dado que su idea de ángulo era más bien referida a la desviación o la rotura de líneas (Heath, 1956). (2) Como la definición es establecida a partir de dos líneas, se abre la posibilidad de ángulos formados por una recta y una curva, o por dos curvas (Euclides, 1991). La restricción de que esas dos líneas no estén en línea recta, es justamente una consecuencia de su concepción de ángulo como inclinación.

Definir el ángulo como una *inclinación* representa a partir de este momento una forma más detallada de concebir la idea de ángulo, porque si Aristóteles entiende el ángulo como lo que resulta de la rotura de una línea, Euclides precisa la escogencia de lo que será el ángulo a partir de esa rotura. Heath (1956) nos dice que Euclides con esta definición piensa que el ángulo es lo que está contenido entre las líneas, así como es usual que hable de las figuras existentes contenidas por las líneas, recordando que Euclides habitualmente define las figuras geométricas en términos de sus fronteras: el círculo se define como una figura plana comprendida por una línea curva, las figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas (el triángulo es la unión de tres segmentos). Así pues, Euclides pudo pensar el ángulo como el espacio comprendido entre las dos líneas.

En este sentido, se abre un amplio panorama para el concepto de ángulo, aunque en principio situado en la categoría de la *cualidad* con Aristóteles, con la definición que presenta Euclides aparece una visión diferente de ángulo: ángulo considerado como una magnitud, “esto se desprende de las primeras proposiciones que tratan específicamente de ángulos, por ejemplo I. 9 y I. 13” (Heath, 1956, pág. 178). En estas proposiciones se puede mirar la concepción de Euclides al respecto.

Proposición I. 9: Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado⁴.

⁴ Ver (Euclides, 1991, pág. 213).

Esta proposición presenta una concepción de ángulo diferente a la referida por Aristóteles y otros antiguos que colocaban el ángulo en la categoría de la cualidad. Proclo acentúa esta nueva caracterización del ángulo.

Si el ángulo es una cualidad, como el calor y el frío, ¿por qué se puede dividir en partes iguales? Porque si la igualdad y la desigualdad no pertenecen menos a los ángulos que a las magnitudes y la divisibilidad se refiere a los unos y a las otras de una manera semejante. (Proclo, 1970, pág. 1165)

Ante este argumento y la clara propiedad que tienen los ángulos de ser divididos, se infiere un ángulo no puede ser una cualidad, es decir, no tendría sentido afirmar que un ángulo es menos que otro, porque se pueda modificar y cambiar su esencia. Por otra parte, es en la proposición I. 13 donde se hace claro que Euclides con la definición de ángulo está excluyendo en su geometría el ángulo cero y los ángulos mayores o iguales a dos rectos.

Proposición I. 13: Si una recta levantada sobre otra forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos⁵.

Como puede mirarse en esta proposición y en general en todos los casos donde se presente, siempre que dos ángulos sean suplementarios Euclides hablará en su lugar de ángulos iguales a dos rectos. La ausencia del *ángulo llano* en la geometría de Euclides es acentuada también en la definición que presenta de rectas perpendiculares, además dice que “cuando una recta levantada sobre otra forma ángulos adyacentes iguales entre sí” (Euclides, 1991, pág. 193) entonces esos ángulos se llamarán rectos, así Euclides solamente reconoce como ángulos, los que son menores que dos ángulos rectos.

Con respecto al ángulo recto, Euclides se refiere a él de manera general en el Postulado 4 diciendo *todos los ángulos rectos son iguales entre sí*, en este sentido, se enfatiza que la magnitud del ángulo recto es invariante, pudiendo ser tomado como un punto de referencia. Es precisamente la alusión al ángulo recto que le permite definir el ángulo obtuso y el agudo⁶. Euclides en las proposiciones donde se involucraban ángulos, precisó el uso y la escogencia del

⁵ Ver (Euclides, 1991, pág. 217).

⁶ Ángulo obtuso es el ángulo mayor que un recto. Ángulo agudo es el menor que un recto. Sobre la caracterización de estos ángulos puede mirarse un comentario en (Heath, 1956, pág. 181-182).

ángulo que fuera igual o menor que dos ángulos rectos, aun cuando la proposición también se aplicara a los ángulos superiores a dos rectos.

Proposición III. 20: En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

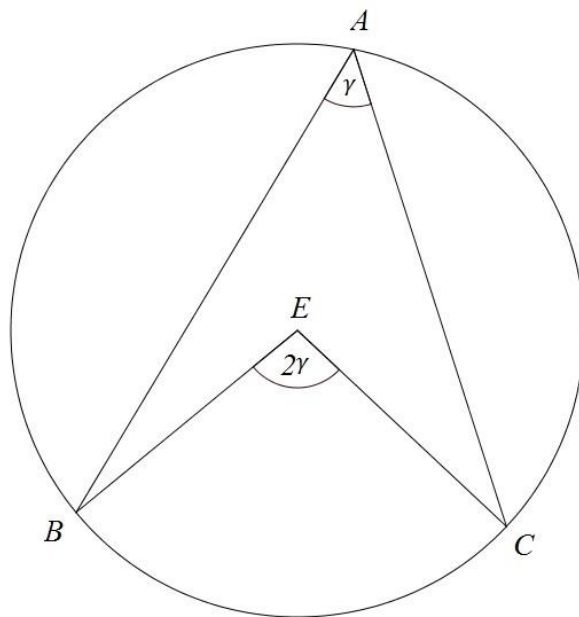


Figura 2. Proposición III. 20.

En la prueba de esta proposición no se insinúa por parte de Euclides la posibilidad o el caso en el que el ángulo BEC en la *Figura 2* sea superior a dos ángulos rectos, en cuyo caso la proposición seguiría siendo válida⁷. Esto fue precisamente lo contemplado por Herón en su discusión de III. 20 (Heath, 1956), en la que consideró *ángulos* (en plural) o una composición de ángulos cuando el ángulo BEC es superior a dos ángulos rectos, en este sentido el *ángulo mayor que dos ángulos rectos* es para Herón la suma de los ángulos determinados en el sentido euclidiano de ángulos menores que dos ángulos rectos, mostrando en su discusión que Euclides no tenía idea que en III. 20 se aplicaba y cumplía también la proposición con ángulos mayores que dos rectos, esto se debía a que su definición de ángulo como inclinación le impedía tal

⁷ Por ejemplo, si en la *Figura 2* el segmento BD es un diámetro, haría con el centro E de la circunferencia el ángulo BEC – ángulo llano o de 180° - con lo cual se sabría que el ángulo BAC inscrito en la circunferencia tendría una medida de 90° , el ángulo recto inscrito en una semicircunferencia del que nos había hablado Tales.

reconocimiento. Solamente los comentaristas de la edad media (Tartaglia, Peletarius, Clavius y otros) consideran ángulos mayores que dos ángulos rectos.

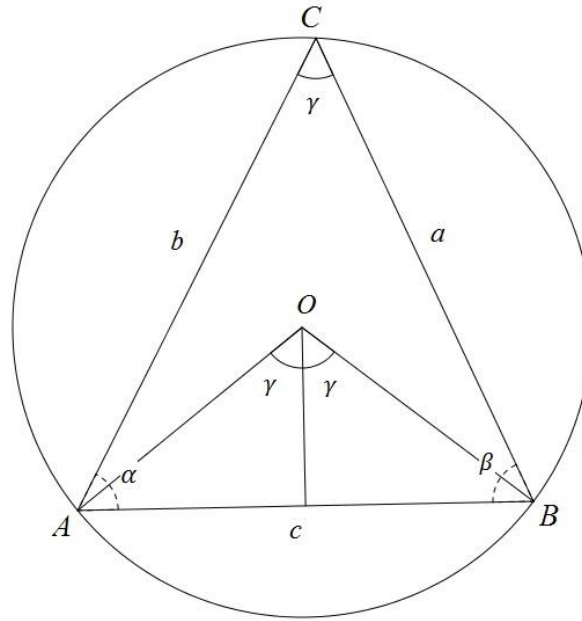


Figura 3. Ley del seno en la proposición III. 20.

De una manera leve, podría decirse que esta proposición además de mostrar una concepción de ángulo para Euclides, contiene en su interior una prueba de la *Ley del seno*; ya que tomando el triángulo ABC inscrito en un círculo con centro O y radio r (Figura 3), entonces se tendrá que $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$. Ahora tomando la bisectriz perpendicular de O a AB , se obtiene

$$\text{sen } \gamma = \frac{(c/2)}{r},$$

con lo cual,

$$\frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2r = \text{constante}, \quad (1)$$

es decir, la razón $c/\text{sen } \gamma$ tendrá el mismo valor del diámetro del círculo independiente de c y γ . Si este mismo procedimiento se realiza para $\angle ABC = \beta$, entonces $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$, así

$$\text{sen } \beta = \frac{(b/2)}{r},$$

entonces se obtiene que:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = 2r. \quad (2)$$

Finalmente, tomando $\angle CAB = \alpha$, tal que $\angle AOB = 2\angle CAB = 2\alpha$, entonces

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{(a/2)}{r},$$

y a su vez,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2r. \quad (3)$$

Aunque se presenta de una manera muy sencilla, esta *Ley del seno* incluida en la proposición III. 20 de Euclides se aplica para los ángulos α, β y γ agudos, estando todos en el interior del triángulo inscrito ABC . En las expresiones (1), (2) y (3) mostradas anteriormente en las que se relacionan los senos de α, β y γ , todas son iguales a $2r$ y esto es justamente lo que provee una expresión para la ley del seno, que el cociente entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto en un triángulo se mantiene constante e igual al diámetro (la longitud $2r$) de la circunferencia circunscrita, es decir

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r.$$

De alguna manera puede entenderse que este resultado es una proposición referida a propiedades en los círculos, y modernamente, sobre los senos de los ángulos inscritos en una circunferencia, pues al poder inscribirse cada triángulo en una circunferencia, las propiedades de las longitudes de los lados del triángulo y sus ángulos pasan a ser propiedades de los círculos; los lados del triángulo se convierten entonces en cuerdas.

Euclides, en algunas proposiciones de los *Elementos*, usa el hecho de multiplicar una magnitud para alcanzar a otra y mostrar algún tipo de relación, ya sea de proporcionalidad o de orden, sin embargo, el que aplicara este procedimiento a los ángulos, resultaba siendo restrictivo al no reconocer el ángulo mayor que dos rectos, esto es lo que sucede con VI. 33.

Proposición VI. 33: En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias⁸.

En la prueba de esta proposición Euclides toma múltiplos de un ángulo para formar circunferencias iguales en dos círculos, de esta manera puede comparar los ángulos del centro y los de la circunferencia con los arcos que se forman, sin embargo, la escogencia de estos múltiplos resultan en considerar los que impliquen ángulos menores que dos ángulos rectos, y no toma el caso en la prueba, el uso de ángulos superiores a dos rectos. En (Heath,1956) nuevamente afirma que VI. 33 no ofrece ninguna evidencia de un reconocimiento por parte de Euclides del ángulo mayor que dos ángulos rectos.

De alguna manera, la definición de ángulo de Euclides suscitó variadas interpretaciones y resultados. Considerarlo como una inclinación resulta en ignorar el ángulo cero y el llano, que se evidencian en algunas de sus proposiciones en particular. Sin embargo, Euclides parece también interpretar el ángulo como el espacio contenido entre las dos líneas cuando divide el ángulo en dos partes iguales. Ésta interpretación podría causar problemas, dado que al tomarse como el espacio comprendido entre las dos líneas inclinadas, podría pensarse que este espacio está determinado por la extensión de dichas líneas. Euclides resuelve este asunto, presentando la proporcionalidad del arco de circunferencia, que tiene como centro el ángulo formado por la unión de las dos líneas inclinadas en VI. 33, esta proporción se mantendrá invariante y pone atención en otros elementos que resultan de gran importancia: los arcos de circunferencia y sus cuerdas. Es decir, este último resultado, será de gran importancia en lo que tiene que ver con el desarrollo de la trigonometría y el concepto mismo de ángulo y su medida.

1.1.4. La naturaleza del ángulo

Lo que atañe a la naturaleza del ángulo y la forma de definirlo correctamente es una discusión que se ha venido desarrollando como hemos visto, desde los primeros aportes por parte de las antiguas civilizaciones, y las contribuciones de los egipcios y babilonios que están enmarcadas en un aspecto práctico, por los intereses inmediatos para determinar ciertas situaciones que pertenecían a sus prácticas sociales. Sin embargo, desde un punto de vista ontológico es Aristóteles quien interesado en establecer la naturaleza de los objetos de la

⁸ Aquí el término *circunferencia*, se refiere en realidad a un arco de circunferencia. Ver (Euclides, 1991, pág. 292).

geometría, presenta tres categorías (cantidad, cualidad y relación) en las que se pueden encajar. Aristóteles define el ángulo como la ruptura de líneas, y así sitúa al ángulo en la categoría de la cualidad.

A partir de esto, los esfuerzos se encaminaron en intentar proveer una buena definición de ángulo y en determinar dónde encajaban los ángulos en las categorías aristotélicas de la cantidad, cualidad y la relación. Según lo comentado por Proclo las opiniones de los distintos geómetras se desarrollaron en caracterizar el ángulo desde estas tres opiniones.

Eudemo declara que el ángulo es una cualidad, al definir el ángulo como el resultado de la rotura de una línea, y así mismo como la rectitud (de la línea recta) es una cualidad, el estado de rotura lo será también; idea análoga a la de Aristóteles que es confrontada con la proposición I.9 de Euclides, pues siendo el ángulo una cualidad también se puede dividir en partes iguales.

Euclides al definir el ángulo como inclinación, lo ubica en la categoría de la relación porque puede mirarse como la relación entre líneas o entre planos uno sobre otro. El ángulo visto como cantidad, es manifiesto también cuando se admite que el ángulo es la superficie que se encuentra limitada por líneas o el sólido limitado por una superficie, así esa superficie o sólido serán una magnitud. Conociendo todas estas posturas, Proclo se inclina, en pensar sobre la dependencia del ángulo con cada una de las categorías aristotélicas, dice que extrae de todas ellas su identidad: siendo una cantidad en tanto que es magnitud vista como una superficie, cualidad porque posee una forma y una relación por las líneas que lo limitan o los planos que lo comprenden.

El ángulo pertenece, por tanto, a todas las categorías y no a una sola, es divisible y susceptible de igualdad y de desigualdad según la cantidad inherente a él y no admite una relación con magnitudes homogéneas por el hecho de tener una magnitud particular que no permite, a veces compararlo con otro, ni por el de la inclinación, que si es única no produce ángulo porque la cantidad que hay en el intervalo de las líneas inclinadas completa su esencia. (Proclo, 1970, pág. 1167)

Problematizar la naturaleza del ángulo, es precisamente intentar dar respuesta a la pregunta ¿qué es un ángulo?, que puede parecer una cuestión trivial, pero que como bien se ha denotado, representa una serie de elementos históricos interesantes en lo que concierne a la trigonometría y posteriormente a la función trigonométrica. Un primer acercamiento desde las matemáticas egipcias, permiten de alguna manera interpretar la aparición de algún tipo de razón

trigonométrica, en la solución del problema 56 del Papiro de Rhind, precisamente cuando hay un problema que compete con la noción de ángulo, vista aquí como inclinación. Sin embargo, aquí esta noción de ángulo se presenta en el contexto de la trigonometría *estática* del triángulo, que ofrece una concepción diferente de lo que será en la trigonometría de las funciones. Así como concluyó Proclo, en (Rotaeché & Montiel, 2009) se explica que el aprendizaje del concepto de ángulo se presenta con dificultades, ya que no es un concepto que se aprende de una vez y por todas, sino que se contextualiza según el uso que se le da.

El ángulo más que posicionarlo dentro de una cualidad aristotélica, necesita ser generalizado, es decir, la definición de éste, no puede estar sujeta a categorías de pensamiento, sino a algún objeto matemático que permita poder expresarlo sin ambigüedades, definirle y asignarle una unidad de medida adecuada y natural. Euclides con la proposición VI. 33 introduce el ángulo dentro de la circunferencia, para compararlo con los arcos que genera; aquí hay un cambio muy sustancial. Pensar el ángulo como la razón del arco a la circunferencia, y luego sobre la medida de ese arco con respecto a su ángulo central. Esto es lo que representa el surgimiento de las cantidades trigonométricas, el estudio de los arcos y las cuerdas de circunferencia. En este estudio, la astronomía vuelve a tomar un papel muy importante dentro del surgimiento de estas ideas concernientes a lo trigonométrico.

1.2. Arcos y cuerdas de circunferencia

Aunque Euclides, en cierta manera no tiene una medida angular (grados o radianes), sus resultados son de gran importancia matemática, pues algunas de sus proposiciones fueron clave para la construcción de las tablas de cuerdas que marcaron los inicios de la trigonometría. Si bien en las obras de Euclides no aparece la trigonometría en el sentido estricto del término, sí hay teoremas equivalentes a leyes o fórmulas trigonométricas concretas. Las proposiciones II. 12 y II. 13 de los *Elementos*, por ejemplo, expresan el teorema del coseno para ángulos obtusos y agudos respectivamente, en un lenguaje geométrico (Boyer, 1968).

No obstante, el trabajo planteado por los griegos después de Euclides con respecto a los triángulos era medir sus partes, para realizar esto se inscribía el triángulo en un círculo de manera que cada uno de sus lados se convertiría en una cuerda. Este planteamiento fue impulsado con los trabajos de astronomía que se estaban desarrollando, pero que era necesario

perfeccionar para realizar mejores mediciones de los fenómenos celestes y las distancias de los planetas. Una primera aproximación se consigue con los aportes de Aristarco de Samos, quién con su tratado de astronomía hizo notar que la necesidad de un estudio más profundo sobre las relaciones *ángulo-cuerda* eran cada vez más urgente (Collette, 2006). La medición de las partes del triángulo quedaba entonces reducida a encontrar la longitud de la cuerda como función del ángulo central en el círculo, esta es la actividad que da origen a la trigonometría.

1.2.1. Aristarco de Samos: precursor de la trigonometría

Aristarco de Samos (310-230 a.C) nacido en la isla de Samos, conocido por los griegos como *El matemático*, para distinguirlo de la gran cantidad de otros Aristarcos, se destacó por su virtuosísimo conocimiento de todas las ramas de la ciencia, la geometría, la astronomía, la música, etc. Su obra *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna*⁹, tiene como contenido desde el punto de vista matemático, unos aportes muy importantes para su desarrollo ya que es un claro ejemplo de la geometría utilizada como un objeto trigonométrico (Heath II, 1921).

Es importante denotar que el trabajo que realiza Aristarco no involucra una trigonometría acabada, pero comienza a esbozar una idea de las relaciones trigonométricas, las cuales son traducidas en la actualidad como razones trigonométricas dadas en términos de proporción. Con respecto a esta idea, en (Bond, 1921) se afirma que actualmente la diferencia fundamental es que nuestra noción de razón no entra en la trigonometría de los griegos, ni en la que desarrolla más adelante los árabes, pues todo el tratamiento trigonométrico desarrollado se traduce en estudiar las longitudes de cuerdas o media cuerda (seno) en un círculo de radio conocido.

Las proposiciones de Aristarco referidas a los tamaños y distancias del sol a la luna y la tierra, son interpretadas entonces como razones trigonométricas, seno, coseno, etc, en el cual utilizando un método geométrico perfectamente válido logra resultados importantes. Lo resaltable de este hecho es que sus resultados son en la actualidad erróneos, no por el método utilizado, sino por carecer de datos exactos. En (Heath, 1920) se explica que el cálculo exacto de las razones trigonométricas era imposible que Aristarco las determinara, sin embargo se apoyó de un resultado que compara la relación entre un ángulo mayor y un ángulo menor en una figura

⁹ Para una presentación más completa sobre Aristarco, su obra y su impacto en el desarrollo de la astronomía, se recomienda mirar el libro de Thomas Heath *The Copernicus of antiquity (Aristarchus of Samos)* (1920).

con relación entre dos líneas rectas. Esta proposición manifiesta que si cada uno de los ángulos α y β son mayores que un ángulo recto y $\beta < \alpha$, entonces se cumple que¹⁰

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Esta expresión actualmente formulada por medio de la anterior cadena de desigualdades trigonométricas, es la que representa para Aristarco el método de obtener las proporciones de los tamaños y distancias contenidas en su obra. De acuerdo con lo anterior, Aristarco presenta en su proposición 7 (de las 18 contenidas en su libro) que *la distancia del sol a la tierra es más de dieciocho veces pero menos de veinte veces, mayor que la distancia de la luna a la tierra*, esto equivale a decir, en términos actuales, que la razón entre las distancias de la luna y del sol es igual a $\operatorname{sen} 3^\circ$, o más bien $\frac{1}{20} < \operatorname{sen} 3^\circ < \frac{1}{18}$ (Collette, 2006).

1.2.2. Hiparco y la primera tabla trigonométrica

Hiparco continúa con el trabajo de la época: estudiar la relación entre rectas y circunferencias, en el interés de aplicar estas relaciones a los problemas astronómicos propuestos. Comúnmente llamado “el padre de la trigonometría”, Hiparco emprendió la labor no sólo de hallar las relaciones entre las rectas en una circunferencia, sino de tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos, tarea que nadie había realizado. Este hecho es en términos históricos muy importante porque hay una propuesta para la medida angular que ha sobrevivido con el paso de los siglos. En la constitución de la primera tabla trigonométrica, Hiparco divide de manera general un círculo cualquiera en 360 partes o grados, y la introducción de esta división coincide con su invento, ya que a pesar de haber algunos resultados previos a los trabajos por él, no había nada que pudiera llamarse una trigonometría más o menos sistemática.

La circunferencia del círculo es dividida por Hiparco en 360 partes, el diámetro es también dividido en 120 partes, y una de dichas partes es la longitud en función del cual se expresa la longitud de cada cuerda; cada parte, ya sea de la circunferencia o diámetro se divide en 60 partes, cada una de ellas de nuevo en 60, y así sucesivamente de acuerdo con el sistema de fracciones

¹⁰ Esto se obtiene, del hecho que si $0^\circ < x < 90^\circ$, la gráfica de $(\operatorname{sen} x)/x$ es decreciente, mientras que $(\tan x)/x$ es creciente; de manera que, teniendo $\beta < \alpha$, entonces si $(\operatorname{sen} \alpha)/\alpha < (\operatorname{sen} \beta)/\beta$ y $(\tan \alpha)/\alpha > (\tan \beta)/\beta$ fácilmente se obtiene la desigualdad que utiliza Aristarco.

sexagesimales (Heath II, 1921). Este hecho va a ser un insumo importante para el trabajo que realizará Ptolomeo en una mejor propuesta para el cálculo de las tablas trigonométricas.

1.2.3. Menelao: un primer acercamiento de una relación trigonométrica

De lo que se conoce de Menelao de Alejandría, solamente hay una fuente que ha sobrevivido en una versión árabe, es su *Esférica*, en la cual desarrolla un tratamiento trigonométrico un tanto diferente a lo que se había venido presentando con los trabajos de Aristarco e Hiparco. En el libro I presenta la geometría del triángulo esférico, siendo el primero que lo define y desarrolla un buen número de teoremas sobre trigonometría esférica; en este caso, hay una diferencia con lo conocido acerca de los triángulos planos, y es que para todo triángulo esférico ABC se tiene $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$ (Boyer, 1968). En el libro II se desarrollan las aplicaciones de la geometría esférica. El libro III se reserva para tratar lo que en palabras de Boyer (1968) es una “geometría o trigonometría de cuerdas en un círculo” (pág. 216).

Así desarrolla una relación trigonométrica, utilizando las cuerdas subtendidas por arcos de círculo, por ejemplo, en la *Figura 5* se ve que el arco AD del círculo subtiende el ángulo α en el centro O y dibujando AM perpendicular a OD y extendiéndola hasta B , se tendrá $\sin \alpha = \frac{AM}{AO}$, sin embargo, AM es $\frac{1}{2}AB$ o la mitad de la cuerda subtendida por el ángulo 2α en el centro, que puede ser denotado por $\frac{1}{2}\text{crd}(2\alpha)$.

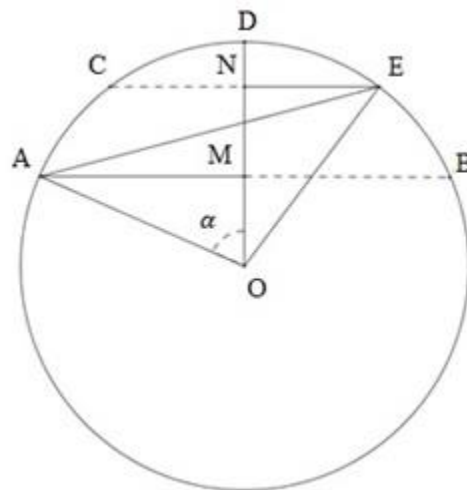


Figura 4. Relación trigonométrica de Menelao.

Como veremos en lo que sigue, Ptolomeo expresa las cuerdas de un círculo como 120 partes del diámetro del círculo, entonces cuando $\frac{AM}{AO} = \frac{AB}{2AO}$ entonces resultará que $\sin \alpha$ y $\frac{1}{2}\text{crd}(2\alpha)$ son equivalentes, también $\cos \alpha$ dado que es igual a $\sin(90^\circ - \alpha)$ será equivalente a $\frac{1}{2}\text{crd}(180^\circ - 2\alpha)$ (Heath II, 1921).

1.2.4. La trigonometría en el *Almagesto* de Ptolomeo

Como se ha resaltado con los aportes de los anteriores matemáticos, el soporte de todo el trabajo de investigación alrededor de la astronomía fue siempre generar un modelo geométrico, en este sentido se produce y sistematiza un tratamiento de lo que podría llamarse una teoría geocéntrica del universo, cuyo punto más alto es alcanzado con Ptolomeo.

En su magistral obra el *Almagesto*¹¹ Ptolomeo desarrolla sus modelos astronómicos apoyado no solamente de la geometría sino también de la trigonometría, que se estaba constituyendo como una herramienta importante para los estudios sobre astronomía. Es en el libro I de su obra, en donde se suministra el primer tratamiento matemático genuino de los elementos esenciales de la trigonometría plana, se advierte con este hecho, que esta obra se constituye como un tratado fundamental y una joya de la literatura matemática en su materia. Brendan (1965) afirma que el libro I del *Almagesto* sirvió como la base para todo el trabajo en la trigonometría plana entre los Árabes y en occidente hasta alrededor del año 1650.

La viabilidad de la trigonometría de Ptolomeo se explica en el hecho de que con ella se podía resolver cualquier tipo de los problemas habituales de triángulos¹² y el instrumento principal para esto era su “tabla de cuerdas”, un equivalente brillantemente construido de la actual tabla de senos en la cual se puede apreciar una precisión asombrosa.

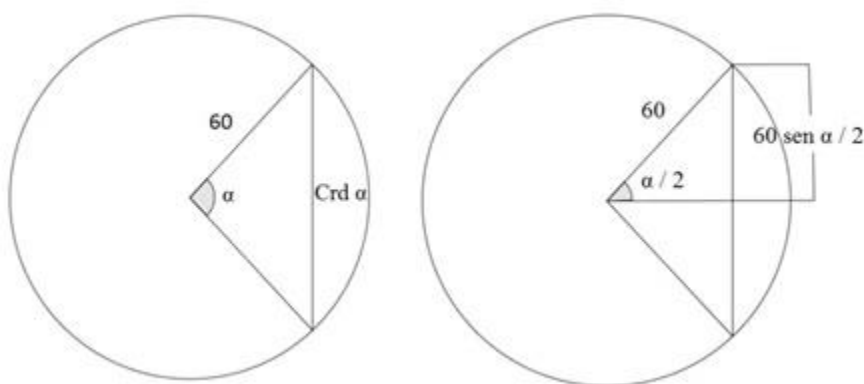
En la construcción de su tabla de cuerdas, Ptolomeo utilizó el tradicional sistema de números sexagesimal, asignando grados, minutos y tercios a los ángulos y a las medidas correspondientes de las cuerdas subtendidas por esos ángulos, utilizando un círculo de radio igual a 60 partes

¹¹ El nombre con el que se da a conocer la obra máxima de Ptolomeo viene probablemente de una corrupción árabe de la palabra griega “ne megiste” que significa “la mayor”, el título que le dio Ptolomeo a su obra fue *La colección matemática* (Aaboe, 1964).

¹² Para profundizar en esta idea de cómo se resuelve en Ptolomeo los problemas de triángulos puede ver (Aaboe, 1964).

(Brendan, 1965). Y fue más de ocho siglos después de Ptolomeo que la idea de hacer el radio igual a la unidad se le ocurrió a un árabe, Abu'l-Wefa (Bond, 1921).

Ptolomeo no compuso su tabla de cuerdas usando las actuales funciones trigonométricas, sino a partir de la relación existente entre la cuerda referida a un arco α y el seno del ángulo α , similar a lo que se mostró anteriormente por Menelao. Esta relación se define como “la longitud de la cuerda que corresponde al arco de α grados en una circunferencia de radio 60” (Aaboe, 1964, pág. 138). De esta manera, Ptolomeo encuentra básicamente que entre la cuerda y el seno de un ángulo existe la relación, como se muestra en la *Figura 5*.



$$\text{crd } \alpha = 120 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Figura 5. Relación cuerda y seno de un ángulo.

Según se indica en (Aaboe, 1964), el uso de esta relación se desarrolla en el momento de calcular valores para solucionar algún problema, cuando ya se tiene la tabla de cuerdas. Solucionar algún problema en la obra de Ptolomeo es el equivalente de resolver un triángulo, trabajo que se desarrolla en el *Almagesto*, es decir, hallar los valores de los tres lados y los tres ángulos de un triángulo dado.

Una primera aproximación para esto, es suponer una situación como en la *Figura 6*, que servirá como base para solucionar las demás situaciones. Sea AB un diámetro del círculo e hipotenusa del triángulo rectángulo ABC , en la cual el punto M será el punto medio de AB . Ahora, conocido el ángulo α del triángulo, se tendrá que el ángulo BMC será igual a 2α (Proposición III.20 (Euclides, 1991)) y de ésta manera el arco CB será igual a 2α (Proposición

VI. 33 (Euclides, 1991)). Luego, tomando a como la cuerda de 2α en la misma circunferencia donde el diámetro es c y sabiendo que Ptolomeo toma como diámetro 120, se obtendrá

$$\frac{\text{crd}(2\alpha)}{120} = \frac{a}{c},$$

así, Ptolomeo conociendo dos de los valores de α , c o a puede encontrar el tercer valor.

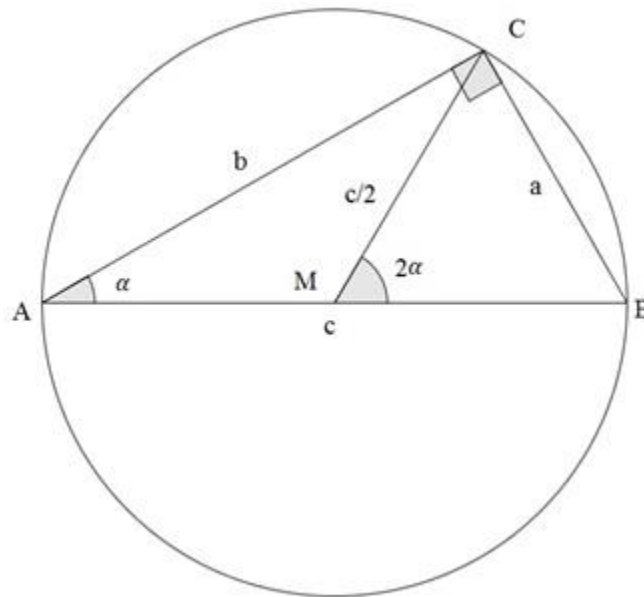


Figura 6. Relación básica para solucionar problemas de triángulos en Ptolomeo.

Obtenida dicha relación, Aaboe (1964) afirma que para hallar el valor de $\text{crd}(\alpha)$, siempre que α sea dado, se debe duplicar α y buscar en la tabla el valor de $\text{crd}(\alpha)$ para después dividir por 120 el valor hallado. Es decir, la forma de resolver numéricamente los problemas relacionados con triángulos quedaba reducido en aplicar dos operaciones: dado α encontrar $\text{crd}(\alpha)$, y dada $\text{crd}(\alpha)$ encontrar α .

Ahora, para poder construir esta tabla de cuerdas, en donde la longitud de las cuerdas del círculo corresponda a diversos ángulos centrales, Ptolomeo utiliza un teorema muy importante conocido como “el teorema de Ptolomeo”

Si ABCD es un cuadrilátero inscriptible, entonces la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.

en notación algebraica, sería $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

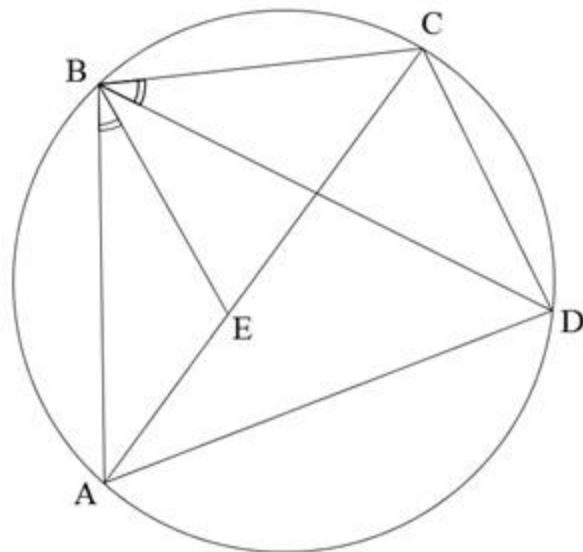


Figura 7. Teorema de Ptolomeo.

Para probar el teorema, se determina sobre la diagonal AC un punto E tal que el ángulo ABE sea igual al ángulo DBC , tomando en cuenta que los triángulos BCE y BDA son semejantes porque los ángulos CBE y ABD son iguales por construcción, y los ángulos BCA y BDA son iguales por estar inscritos en un mismo arco, se tendrá

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{AD},$$

que será equivalente por la propiedad fundamental de las proporciones a

$$AD \cdot BC = BD \cdot CE. \quad (i)$$

Además, los triángulos BAE y BDC son a su vez semejantes, pues los ángulos señalados en B con doble marca son iguales por construcción, y también lo son los ángulos BAC y BDC , inscritos en un mismo arco. Por lo tanto

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD},$$

igual a

$$AB \cdot CD = BD \cdot AE. \quad (ii)$$

la suma de las expresiones (i) y (ii) resulta en

$$\begin{aligned}
AD \cdot BC + AB \cdot CD &= BD \cdot CE + BD \cdot AE \\
AD \cdot BC + AB \cdot CD &= BD \cdot (CE + AE) \\
AD \cdot BC + AB \cdot CD &= BD \cdot AC,
\end{aligned}$$

que completa la prueba.

Con este teorema, teniendo Ptolomeo dos arcos y sus cuerdas, puede encontrar la cuerda del arco diferencia en términos de las cuerdas dadas. Por ejemplo, en la *Figura 8* si consideramos dados AB y AC , es posible calcular BC .

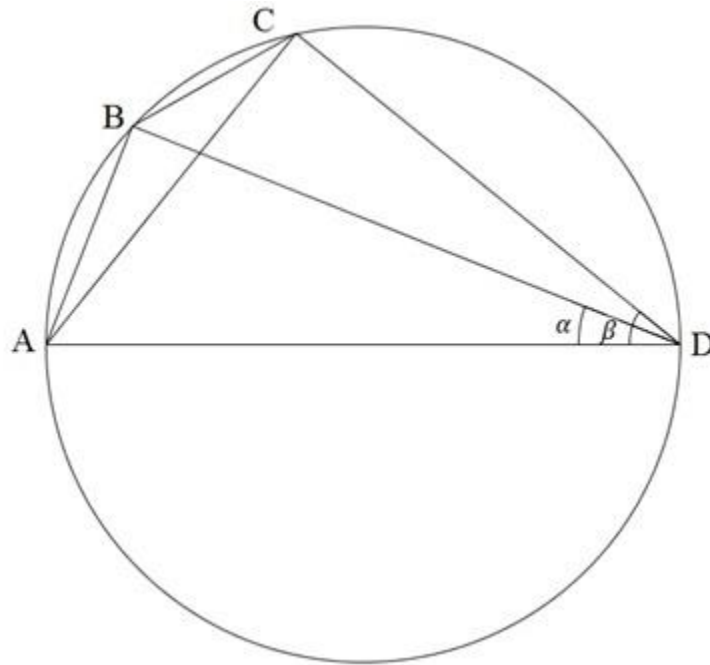


Figura 8. Cálculo de la cuerda del arco diferencia.

Esto es, trazando el diámetro AD . Las cuerdas BD y CD serán equivalentes a los arcos suplementarios de las cuerdas AB y AC respectivamente, si $AB = \text{crd } \alpha$ entonces $BD = \text{crd}(180 - \alpha)$ y si $AC = \text{crd } \beta$ entonces $CD = \text{crd}(180 - \beta)$. Ahora usando el teorema de Ptolomeo, se tendrá

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD,$$

y como $AD = 120$ entonces

$$120 \cdot BC = AC \cdot BD - AB \cdot CD.$$

En la igualdad obtenida, todos los valores del lado derecho son conocidos, de manera que se puede hallar BC . Ahora, reemplazando las expresiones para las cuerdas, se podría transcribir la última igualdad como

$$120 \text{crd}(\beta - \alpha) = \text{crd} \beta \cdot \text{crd}(180 - \alpha) - \text{crd} \alpha \cdot \text{crd}(180 - \beta),$$

que en términos actuales de senos y cosenos, podría tener una relación con la expresión

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \text{sen} \beta \cos \alpha - \text{sen} \alpha \cos \beta.$$

Ptolomeo logra la construcción de su tabla, y la importancia e influencia de este trabajo reposa en la genialidad con la que presenta los procedimientos para hallar una relación entre las longitudes de las cuerdas de un círculo con sus respectivos ángulos, cuando se considera el triángulo inscrito y así desarrollar la trigonometría y potenciar su uso en el estudio de astronomía. Las anteriores expresiones que pueden ser vistas actualmente como las diferentes fórmulas trigonométricas¹³, son apenas un primer momento en la historia de la trigonometría.

Youschkevitch (1976) afirma que, aunque Ptolomeo al igual que otros astrónomos en su época conocían que las coordenadas de los cuerpos celestes en movimiento cambian periódicamente con el tiempo, y también sabían la relación que guardan en un círculo dado, cuerdas y arcos de longitudes desiguales, no hay alusión a una idea abstracta de relación funcional. Es decir, aunque la determinación de las posiciones de los planetas que cambian de manera periódica y continua con el tiempo las compila en su tabla de cuerdas (tabla de senos actualmente), la acepción a una cantidad variable le era ajena, de hecho, eran ajenas al pensamiento de los griegos. En palabras de Montiel (2005, pág. 105) “las tablas de Ptolomeo son equivalentes a una tabla actual de seno que va de 0° a 180° , avanzando de pasos de $\frac{1}{2}^\circ$, no son la función seno sino tablas de cuerdas subtendidas en un círculo”. Lo descrito anteriormente en el trabajo de algunos matemáticos griegos es la trigonometría del triángulo creada en el estudio de astronomía y aplicada a la misma. Es trigonometría de cuerdas, en el contexto estático de la geometría, en la cual se priorizó hallar la medida de la semicuerda en función del ángulo central de un círculo.

¹³ Para mirar cómo a partir del Teorema de Ptolomeo se describen algunas fórmulas trigonométricas como $\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$ y $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$. Ver (Aaboe, 1964, p. 152-155).

1.3. Breve historia de la medida angular

De acuerdo a la discusión generada en torno a la naturaleza del ángulo, hay una cuestión que es importante determinar cuando se concibe el ángulo como una magnitud, la cual tiene relación con la necesidad de establecer un sistema numérico referencial que permita definir una medida para los ángulos. Es precisamente la actividad de asignar una unidad de medida angular, la que moviliza un diseño de situaciones que en términos históricos responden a variados enfoques, puesto que la naturaleza y el papel de los términos que se definen, y de las unidades de medida en este caso, son afines a la interacción de las matemáticas con elementos de la cultura, además de que representa un elemento fundamental en la transición de la trigonometría del triángulo a la trigonometría funcional. De esta manera tiene sentido preguntarnos ¿cuál es la historia de la medida angular? es decir, ¿cómo se asigna la unidad de medida para los ángulos?, ¿por qué se divide un círculo en 360 grados?, ¿cómo emerge la unidad de *radianes*? preguntas esenciales para entender grosso modo el porqué, y cómo se da en primera instancia la transición de *grados* a *radianes*, que representa un punto importante dentro de la constitución de la función trigonométrica.

Ya se comentó que los antiguos babilonios propusieron la división del tiempo astronómico en 360°, por su interés en la astronomía en sus ideales religiosos y su conexión con el calendario. La idea de 360 partes en un círculo podría haber surgido a partir de una estimación ligeramente errónea de 360 días en un año. Otra sugerencia para esto, es que se descubrió que en cualquier círculo del hexágono inscrito, dividir la circunferencia en seis partes iguales hace que cada uno de sus lados sean iguales al radio, así el sistema sexagesimal muy antiguo vendría naturalmente en funcionamiento y cada una de las partes se divide en 60 subdivisiones, dando 360 de estos por todo el círculo. Mas tarde, Hypsicles fue el primer astrónomo griego que presentó la división del círculo del zodiaco en 360 partes

El círculo del zodiaco se ha dividido en 360 circunferencias iguales (arcos), sea cada uno de estos llamado un grado en el espacio. Y de esta manera similar suponiendo que el tiempo en el que el círculo del zodiaco vuelve a cualquier posición en la que se ha dejado, se divide en 360 tiempos iguales, que cada una de ellas será llamada un grado en el tiempo. (Heath II, 1921)

finalmente Hiparco dividió el círculo en general en 360 partes o grados.

En cuanto a los símbolos actuales para designar los grados, minutos, y segundos, en (Cajori, 1928) se dice que hay señales parecidas que se encuentran en el *Almagesto* de Ptolomeo, en el cual hay un uso de las fracciones sexagesimales utilizadas en sus cálculos astronómicos. La referencia se halla en el hecho de que los primeros dieciseisavos o *minutos* fueron marcados con un acento y el segundo dieciseisavos con dos acentos, a partir de esto se puede inferir que los signos $^{\circ}$, $'$, $''$ para grados, minutos y segundos son de origen griego. Para evitar la confusión entre medida circular y medida del tiempo, los cuales implicaban las palabras “minutos” y “segundos”, y ambos de los cuales son utilizados por los astrónomos y navegantes, se convirtió en la práctica común, marcar minutos y segundos de arco por $'$ y $''$, y los de tiempo m y s .

Es importante resaltar que las obras de los griegos fueron estudiadas y traducidas al árabe, y a partir del undécimo y duodécimo siglo, los estudiosos europeos fueron conscientes del gran valor intelectual en dichas obras traducidas, que a su vez tanto que eran traducidas al latín¹⁴. Las fracciones sexagesimales babilónicas utilizadas en las traducciones árabe del griego de Ptolomeo fueron llamadas por los traductores *primeras piezas pequeñas* para dieciseisavos, *segundas piezas pequeñas* para dieciseisavos de dieciseisavos. Las primeras traducciones al latín eran europeas que era el idioma internacional de los eruditos y en América estos vocablos fueron traducidos como “pars minuta prima” y “pars minuta secunda” las cuales se derivan en nuestras palabras “minutos” y “segundos” (Jones, 1953).

Los radianes contrastan con los grados en su origen. Al parecer, el matemático Thomas Muir y el físico James Thompson por separado consideraron la necesidad de una nueva unidad angular (Jones, 1953). Una unidad angular que fuera natural al círculo, en la que se aprovechara la relación entre el ángulo central de un círculo con el arco de circunferencia que forma – como en la proposición VI. 33 de Euclides ya mencionada – o la relación que se presenta entre el radio de un círculo con su circunferencia. En este sentido, la idea se basó en pensar no en la medida del ángulo central en un círculo, sino en la medida del arco que se forma, aun cuando las nociones relativas a unidades angulares y a procedimientos de aproximación existían mucho antes de ellos.

¹⁴ En el siglo XII, en la época del Arzobispo Raymond (entre 1130 y 1150) instituyó en Toledo una escuela de traductores de obras árabes, tanto que se alcanzó una actividad en la traducción de palabras en árabe que rivalizaban con las de los propios árabes, por parte de los cristianos asistidos por los eruditos judíos. El más prolífico de estos traductores fue Gerard de Cremona, el cual entre las 76 obras que tradujo al latín se encontraba el *Almagesto* de Ptolomeo (Bond, 1921).

La primera aparición de la palabra *radián* fue en una prueba de examen elaborada por Thompson en 1873. El *Oxford English Dictionary* afirma que la palabra apareció también en forma impresa en 1879 en la segunda edición del *Treatise on natural philosophy* por William Thompson (después Lord Kelvin) y Peter Guthrie, en su discusión de la velocidad angular acentuaron que: *la usual unidad del ángulo es... lo que subtiende en el centro de un círculo de un arco cuya longitud es igual al radio. Para abreviar, llamaremos a este ángulo un radian* (Cooper, 1992, pág. 100). También los profesores Oliver, Wait y Jones de la Universidad de Cornell en su manuscrito publicado *Notas sobre Trigonometría* (1880) discutieron sobre la “expresión” de ángulos en términos de “ π ”. El uso de esta nueva unidad, queda claro en la simplificación de ciertas fórmulas matemáticas y físicas, especialmente las derivadas e integrales de funciones trigonométricas y en las expresiones para las velocidades y aceleraciones en movimiento curvilíneo (Jones, 1953).

Ahora, con respecto a una situación en la cual se provee una idea de medida en radian, Jones (1953) muestra que en 1722 Robert Smith publicó una nota de Roger Cotes sobre como *encontrar la medida de cualquiera ángulo cualesquiera*, esto fue ampliado por Walmesley en su *Analyse des mesures des rapports et des angles*, y en la segunda parte de su libro “*De la reduction des integrales aux arcs de cercle*” comienza diciendo¹⁵:

La circunferencia de un círculo ha sido considerado por los geómetras como la más conveniente de todas las líneas y curvas para la medición de ángulos, pues las proporciones de los arcos son los mismos que los de los ángulos centrales.

A continuación presenta dos resultados para dar explicación sobre la medida del ángulo. Así el Colorario I dice: “El tamaño del arco de CA que mide el ángulo AOC es arbitrario”. Por lo tanto, Walmesley afirma que hay que utilizar el “módulo” que determinará cuál de todos los posibles arcos en un ángulo es el requerido para la situación en cuestión, ya que es la longitud del arco y no el tamaño del ángulo que determina el valor de la integral buscada. En este procedimiento de determinar la longitud de dicho arco, imitará de alguna manera a los antiguos geómetras que para fijar sus ideas del tamaño de ángulos, encontraron necesario dividir la circunferencia de un círculo en un número de partes iguales sin tener en cuenta la longitud de la circunferencia, tomando arcos que están a la misma proporción que los radios y puesto que el radio es la línea

¹⁵ Traducción libre de (Jones, 1953, págs. 423-424).

más conocida en un círculo y entra en todos los cálculos con respecto a la curva, es apropiado que sea elegido como el módulo al que se relacionan todas las medidas de ángulos.

En el Colorario II Walmesley establece que: “uno sabe que la relación del radio a la semicircunferencia es 1:3,1415926535 ... por lo tanto si R representa el radio, tenemos 3,1415926535 ...:1::180 *grados*: R , entonces $R = 57,2957795130 ...$ ” un factor de conversión el cual ya había sido trabajado por Amos Eaton’s¹⁶.

Con la idea de ángulo empiezan a emerger toda una serie de elementos con relación a lo trigonométrico. Su ubicación en el centro del círculo en la proposición VI. 33 de Euclides representa un cambio paradigmático con respecto a su tratamiento, y su relación con otros objetos, en este caso con el arco y la cuerda que genera. Esto representa el surgimiento de la trigonometría, en tanto, actividad original: medir las cuerdas con respecto al ángulo central en el círculo. Esta proposición también guarda el concepto natural de la medida angular, primeramente con Hiparco en su división de 360 partes, pero aún más relevante en la búsqueda de una definición sofisticada de ángulo, pues el determinar la medida o longitud del arco, es lo que dirige la asignación de la medida en radianes.

Ahora, todo el camino trazado por parte de los griegos, el estudio de las cuerdas y la elaboración de las tablas de cuerdas, provee un primer significado trigonométrico, “la medida de la semicuerda en función del ángulo central constituye la cantidad que surge del círculo, pero visto éste como curva” (Buendía & Montiel, 2009, pág. 1228); es decir, un significado netamente geométrico y con Ptolomeo una falta de percepción del concepto de periodicidad propio de la función trigonométrica, en la construcción de su famosa tabla de cuerdas. Aaboe (1964) explica que esta semicuerda era llamada *jiva* en sánscrito, con ésta los astrónomos árabes trabajaron las tablas de esa función semicuerda. Para los árabes la palabra *jiva* significa *bahía* o *entrada*, luego cuando se tradujeron al latín las obras árabes de astronomía, se tomó la identificación de ésta expresión con la palabra latina *sinus* es decir, *entrada*. Es así como la función seno recibió su nombre, originalmente siendo la cuerda mitad del arco correspondiente a un arco duplo, lo que se conoce hoy como el seno de un arco. La palabra coseno tiene un desarrollo similar, Viete (1540-

¹⁶ Eaton’s es un precursor de la medida del arco, el cual discute bajo el título general *Trigonometría extemporánea* una relación que llama “fórmula 57”. Él dice que esa fórmula da resultados muy precisos, asegurando que 57.3 es la verdadera medida del radio en grados, cuando se extiende en la periferia del círculo. Esto tiene relación con el cociente $180/\pi$ el cual es 57,2957 ... pero que Eaton’s toma como 57,3. Ver (Jones, 1953, págs. 421-422).

1603) usa el término *sinus residae* mientras que Edmund Gunter (1581-1626) un rector y profesor de astronomía sugirió la palabra *co-sinus* en 1620 (Merlet, 2004).

1.4. La trigonometría después de los griegos

Aunque actualmente la trigonometría clásica se refiera a las razones de los lados de un triángulo rectángulo, que puede interpretarse en el cálculo de las distancias de la tierra al sol y la luna por Aristarco y otros, no es la trigonometría trabajada por los matemáticos griegos. En (Bond, 1921) se afirma que la diferencia fundamental es que nuestra noción de razón no entra en la trigonometría de los griegos, pues ellos sólo tratan las longitudes de cuerdas en un círculo de radio conocido. Fue más de 8 siglos después de Ptolomeo que la idea de hacer el radio unidad se le ocurrió a un árabe, Abu'l-Wefa, él dice: “Es evidente que si se toma el radio unidad, la relación del seno de un arco al seno de su complemento es la tangente, y la relación del seno del complemento al seno del arco es la cotangente” (Bond, 1921, pág. 311). Aunque el claro uso del círculo unitario se presenta en la obra de Euler, este es un principio en el cual se presenta un cambio en los métodos trigonométricos. Con este hecho, Abu'l-Wefa establece las siguientes relaciones¹⁷ $\tan \alpha : 1 = \sin \alpha : \cos \alpha$, $\cot \alpha : 1 = \cos \alpha : \sin \alpha$, $\tan \alpha : \sec \alpha = \sin \alpha : 1$ y así se comienza un camino hasta considerarlas como las actuales líneas trigonométricas.

Alrededor del siglo XIII se registran unos desarrollos que se reconocen actualmente en los métodos de la trigonometría. En un trabajo de Levi Ben Gerson, se presenta una contribución con respecto a una teoría de solución de triángulos, en este tratado llamado *Dictio quinta* se exhiben las siguientes proposiciones¹⁸:

- I. Dadas dos líneas en un triángulo rectángulo, las partes restantes serán conocidas.
- II. Dados tres lados de cualquier triángulo, todos sus ángulos serán conocidos.
- III. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, son conocidos los lados y ángulos restantes.
- IV. Dados los lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo, las partes restantes serán conocidas.

¹⁷ Ver (Bond, 1921, pág. 308).

¹⁸ Ver (Bond, 1921, pág. 318).

De alguna manera la trigonometría comienza a adoptar algunos aspectos que se trabajan actualmente, aparecen expresiones referentes a la ley del seno, y se desarrollan diferentes técnicas para la elaboración de tablas de cuerdas en la matemática Árabe e Hindú. A finales del siglo XIV, Johannes Müller, más conocido como Regiomontanus fue quien estuvo interesado en unificar y presentar de una manera sistemática una teoría trigonométrica con el objeto de que fuera útil para los astrónomos, aunque ya no dependiente propiamente de ella para sus desarrollos. Con éste matemático, la trigonometría apareció como un sujeto distinto de lo que se conocía hasta el momento, es decir, dejó de ser un sirviente a los estudios en astronomía, después de su aparición en la época de Hiparco. Se puede afirmar que “la influencia de la obra de Regiomontanus en el progreso de la ciencia fue muy grande; su *De Triangulis* marcó el comienzo de una nueva era en el desarrollo de la trigonometría” (Bond, 1921, pág. 323).

Es importante denotar que, la palabra “trigonometría”¹⁹, referente a la trigonometría plana que se trabaja desde los inicios de la escolaridad, apareció por primera vez en el libro *Trigonoemtria: sirve de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* publicado por B. Pisticus en 1595, y significa el “estudio de los triángulos” (Merlet, 2004). Y el término *función trigonométrica* fue introducido en 1770 por George Simon Klügel²⁰.

Se necesitó de unos problemas diferentes para que la función trigonométrica adquiriera su significado que tiene actualmente. Solamente es cuando se presentan situaciones relacionadas al movimiento oscilatorio, en las cuales se pretende realizar una matematización y construcción de modelos que describan fenómenos periódicos, que se va a mirar de una forma distinta las expresiones trigonométricas. El surgimiento del problema de la cuerda vibrante, la matematización del calor, y la búsqueda de la solución a estos problemas, serán los que permitirán que la función trigonométrica tome un significado analítico.

¹⁹ Trigonometría, de la etimología de las palabras griegas *trigonon:triangulo* y *metron:medida*.

²⁰ Esta afirmación se hace en (Merlet, 2004). Klügel aportó una contribución excepcional a la trigonometría, en la unificación de las fórmulas y la introducción del concepto de función trigonométrica, en su *Analytische Trigonometrie*. Ver (math.info, 2016).

2. DE LA TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO A LA TRIGONOMETRÍA DE LAS FUNCIONES

Según lo expresado en (Cantoral, Maldonado, & Montiel, 2004, pág. 376) “la función trigonométrica abstrae propiedades de las tablas trigonométricas y del estudio de los triángulos, pero obedece a prácticas de naturaleza distinta que la trigonometría como rama de la geometría”, es decir, de acuerdo a lo reportado en el capítulo anterior en todo el trabajo realizado en la antigüedad con respecto a la trigonometría, no hay indicio de que el concepto de función trigonométrica estuviera presente.

El estudio en astronomía fue la fuente de la cual brotaron las ideas relacionadas a los conceptos trigonométricos, en este primer escenario se trabajaron los fenómenos celestes desde una óptica netamente geométrica. La atención de los matemáticos de la época estaba puesta sobre la medida de la semicuerda en función del ángulo central, y aunque había un conocimiento de que este modelo representaba la posición de las estrellas y los planetas que cambiaban continuamente, nunca pudieron abstraer la propiedad de la periodicidad, es decir, no miraron el fenómeno como un movimiento.

El hombre siempre tuvo conciencia de la existencia de fenómenos recurrentes. En (Guzmán, 1983) se afirma que todo tipo de pensamiento está fuertemente ligado a la recurrencia y la repetitividad, pues considerando esta característica intrínseca de la naturaleza le permite al hombre encontrar esquemas de referencia para entender el mundo. En ausencia de esta característica habría desorden y caos, sería difícil por ejemplo, pensar en días y noches que tuvieran diferente duración, o que las trayectorias de los planetas fueran disímiles, en cambio “la ubicuidad de la periodicidad en la naturaleza es patente y bien cercana. Nuestra vida está regida por la sucesión de días y noches, veranos, inviernos, años... nuestra actividad toda... está invadida por la periodicidad”²¹. Y aunque pareciera que lo periódico siempre ha estado asociado a la función trigonométrica, esto no ha sido así. Hubo una brecha conceptual entre la percepción de fenómenos periódicos, y el establecimiento de la periodicidad de la función trigonométrica a través de una definición. Se necesitaba un nuevo escenario, uno donde se desarrollara una concepción matematizable del movimiento.

²¹ (Guzmán, 1983, pág. 33).

El aspecto periódico de la función trigonométrica va a ser descubierto cuando se trabajen problemas relacionados con el movimiento oscilatorio, como el caso del movimiento armónico simple con los resultados de Hooke, un espacio diferente en el cual existe la necesidad de construir modelos que describan dichos movimientos periódicos. Veremos también que las ecuaciones diferenciales en el marco del cálculo serán las que permitirán la emergencia de la función trigonométrica. Pero antes nos permitiremos mirar algunas ideas tocantes al cálculo de esta función.

2.1. La función trigonométrica en los inicios del Cálculo Infinitesimal

El concepto de integración de la función seno se presentó en la antigüedad griega en términos geométricos. En su trabajo titulado *Sobre la esfera y el cilindro* Arquímedes probó una proposición que puede interpretarse como una determinación de la integral $\int_0^\pi \sin(x) dx$.

Si en un círculo se inscribe un polígono equilátero de un número par de lados y se unen estos por paralelas a una de las rectas que subtienden dos lados del polígono, la suma de las (longitudes de las) rectas que unen los lados del polígono es al diámetro del círculo como la recta que subtiende la mitad de los lados del polígono inscrito, menos uno, es a un lado de este polígono (Arquímedes, 1970, pág. 51).

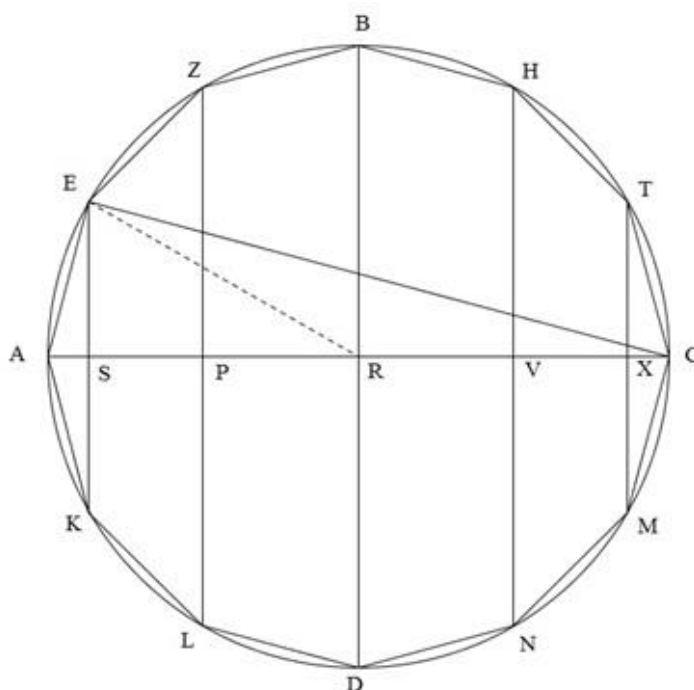


Figura 9. Proposición 22 Arquímedes - Sobre la esfera y el cilindro.

Arquímedes en la prueba²² de esta proposición utilizó un polígono de 12 lados recurriendo a argumentos de proporcionalidad por construcción de paralelas y a Euclides V. 12. Según lo descrito en (Heath II, 1921, págs. 38-39) este resultado puede escribirse en la siguiente notación:

$$(EK + ZL + BD + HN + TM):AG = GE:EA.$$

Sin embargo, esta proposición expresada en la forma anterior no tiene alguna similitud con el cálculo de la integral del seno. No obstante, reescribiendo este resultado en términos de trigonometría, se puede considerar un polígono general de $2n$ lados, así el ángulo central que subtiende un lado del polígono es π/n , con lo cual el $\angle EGA$ en la figura es $\pi/2n$.

De esta manera, en el triángulo rectángulo ESR el $\sin \pi/n = ES/ER = EK/AG$, también se tendrá en el triángulo ZRP el $\sin 2\pi/n = ZL/AG$, y así respectivamente cada razón tendrá su equivalente con el seno hasta el ángulo $[(n-1)\pi]/n$, además $GE/EA = \cot \pi/2n$. Con esta consideración hecha, la proposición de Arquímedes para el polígono de $2n$ lados tendría la forma (similar en la *Figura 9*)

$$\frac{EK}{GA} + \frac{ZL}{GA} + \dots + \frac{TM}{GA} = \frac{GE}{EA},$$

esto sería equivalente a la expresión trigonométrica

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \cot \frac{\pi}{2n},$$

ahora bien, si añadimos a ambos lados de la igualdad $\sin n\pi/n$ y multiplicamos por π/n se obtendrá

$$\left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n} = \left(\cot \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n}. \quad (1)$$

Hasta aquí, se ha descrito la proposición de Arquímedes en una equivalente expresión trigonométrica, la cual tiene ahora una similitud con una suma de Riemann. Lo interesante de este hecho, es que el lado izquierdo de (1)

²² Ver (Arquímedes, 1970, págs. 51-52).

$$\left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n}, \quad (2)$$

puede adaptarse a la moderna expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i,$$

para calcular la integral del seno.

La forma en que Arquímedes prueba las proposiciones que tienen relación al cálculo de áreas y volúmenes siguen su método exhaustivo o de agotamiento, en la cual se requieren figuras inscritas y circunscritas, para usar un argumento de reducción al absurdo en lugar del paso al límite; estas nociones fundamentales son las análogas a las que se presentan con el simbolismo moderno de la integral definida.

Según (1) la integral queda definida en el intervalo $[0, \pi]$, con lo cual el cálculo de Arquímedes está relacionado a $\int_0^\pi \sin(x) dx$. Si se toma de forma general el intervalo $[a, b]$ y teniendo en cuenta la definición de la integral de Riemann (similar a lo propuesto por Arquímedes) que para cada i existe el área del rectángulo de base Δx_i y altura $f(x_i)$. Entonces tomando

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = l,$$

que puede ser comparado con π/n en (1).

Ahora, realizando la partición del intervalo $[a, b]$, $x_0 = a$, $x_1 = a + l$, $x_2 = a + 2l$, ..., $x_i = a + il$, ..., $x_n = a + nl = b$, puede escribirse la suma análoga de (2) como

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sin(a + il) l = l \sum_{i=1}^n \sin(a + il).$$

Para poder calcular esta sumatoria, se debe tomar en cuenta las identidades que relacionan productos de funciones trigonométricas con sumas, y conociendo a priori que en el resultado de la integral se pide involucrar la función $\cos x$, la identidad pertinente es

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

de esta manera, multiplicando y dividiendo por $\operatorname{sen} l$, queda

$$S_n = \frac{l}{\operatorname{sen} l} \sum_{i=1}^n \operatorname{sen}(a + il) \operatorname{sen} l,$$

y tomando $\alpha = a + il$ y $\beta = l$, entonces $\alpha - \beta = a + (i - 1)l$ y $\alpha + \beta = a + (i + 1)l$, con lo cual

$$S_n = \frac{l}{2 \operatorname{sen} l} \sum_{i=1}^n \{\cos[a + (i - 1)l] - \cos[a + (i + 1)l]\},$$

sumando y restando $\cos[a + il]$

$$S_n = \frac{l}{2 \operatorname{sen} l} \sum_{i=1}^n \{\cos[a + (i - 1)l] - \cos[a + il] + \cos[a + il] - \cos[a + (i + 1)l]\},$$

entonces

$$S_n = \frac{l}{2 \operatorname{sen} l} [\cos a - \cos(a + nl) + \cos(a + l) - \cos[a + (n + 1)l]];$$

finalmente, tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2 \operatorname{sen} l} [\cos(a) - \cos(a + nl) + \cos(a + l) - \cos[a + (n + 1)l]]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} [2 \cos(a) - 2 \cos(b)]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \cos(a) - \cos(b)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -[\cos(b) - \cos(a)],$$

que es justamente equivalente a la expresión

$$\int_a^b \operatorname{sen}(x) dx = [-\cos(x)]_a^b.$$

Teniendo en cuenta que en la proposición de Arquímedes el intervalo de integración es $[0, \pi]$, si se evalúa en la integral hallada se tiene $\int_0^\pi \sin(x) dx = -[\cos(\pi) - \cos(0)] = 2$, el mismo resultado²³ que se halla al tomar el límite cuando n tiende a infinito en (1).

Arquímedes desarrolló una actividad matemática antes que Hiparco y Ptolomeo, y parece que tuvo algunas nociones referentes a conceptos trigonométricos. Boyer (1968) señala que el teorema de Arquímedes sobre la cuerda rota puede traducirse al lenguaje trigonométrico, dando lugar a una similitud con las expresiones para los senos de sumas y diferencias de ángulos, por otra parte en (Miller, 1928) se comenta que Arquímedes sabía la regla que ahora se expresa por la fórmula $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$.

El trabajo de Arquímedes tiene un gran valor con referencia a los efectos que tendrán sus resultados en el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal del cual éste establece sus primeras bases conceptuales. Ejemplo de esto, es el resultado sobre la cuadratura de la parábola que actualmente se entiende como el cálculo de una integral. Sin embargo, como ya se mostró anteriormente Arquímedes presenta en su trabajo *Sobre la esfera y el cilindro* un resultado tocante a una suma que se puede interpretar de forma análoga a las nociones formuladas en el simbolismo moderno de la integral definida, más relevante en nuestro caso, el cálculo de la integral de la función trigonométrica seno actualmente.

El cálculo del seno no podía expresarse en ese momento en términos de las interpretaciones actuales de área, aunque este resultado tuvo repercusiones en los trabajos de los matemáticos del siglo XVII. Kepler presentó una aritmetización de la proposición geométrica de Arquímedes en su *Astronomía Nova* de 1609. Pero fue Roberval quien reprodujo esta proposición sobre la suma de cuerdas en un círculo, y la expresó en la terminología vigente en ese momento de los senos y de los infinitesimales: “Si un arco de un círculo se divide en un número infinito de partes iguales y si se proyecta ortogonalmente sobre un diámetro, la proyección es al arco como la suma de todos los senos extraídos de los puntos de división es al producto del arco y el radio” (Boyer, 1947, pág. 269). La prueba de esta proposición es geoméricamente equivalente a $\int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin x dx = \cos \theta_2 - \cos \theta_1$, y es en términos generales la

²³ Al calcular el límite en el lado derecho de (1), se encuentra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cot \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n} = 2$

dada por Arquímedes. Después de Roberval, otros matemáticos como Cardano y Pascal reprodujeron el resultado de Arquímedes en sus propios métodos (Rickey, 2007), (Boyer, 1947).

2.2. Isaac Newton y la serie de potencias para el seno y coseno

Isaac Newton desarrolló en el *De Analysi* las series del seno y del coseno. En (Katz, 1987) se afirma que en ese momento la función trigonométrica entró a formar parte del “análisis”. La forma en que halló la serie de potencias para el seno fue mediante la inversión de la serie de potencias para el arco seno. Newton derivó primero la serie de potencias

$$\text{arc sen}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$$

para ello, siguió el siguiente proceso²⁴.

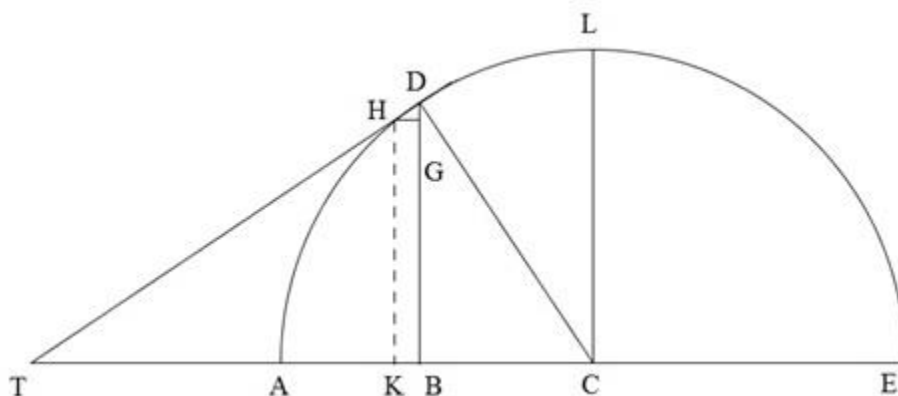


Figura 10. Serie de potencias para $\text{arc sen}(x)$.

Sea $ADLE$ el círculo del cual se quiere encontrar la longitud de AD . En el círculo se tiene que $AE = 1 = 2AC$. Trazando la tangente DHT y tomando el rectángulo infinitamente pequeño $HGBK$, Newton usó el triángulo infinitesimal cuya hipotenusa es un segmento infinitesimal de la recta tangente (o el momento del arco²⁵) y cuyos catetos segmentos infinitesimales de la abscisa y la ordenada, para encontrar el momento del arco AD .

Haciendo uso de la semejanza de los triángulos HGD , TBD y DBC encuentra que

²⁴ Ver (Newton, 1711, pág. 43).

²⁵ Newton centra importancia en el problema abstracto de calcular una función conocida su derivada – *momento* – y desarrolla en el *De Analysi* el procedimiento algorítmico para hacerlo. En este trabajo se muestra como obtiene el cálculo de cuadraturas, basándose en la regla básica de que si $f(x) = ax^{m/n}$ entonces $F(x) = \frac{an}{n+m}x^{m+n/n}$, en donde f la desarrolla en serie de potencias y luego integra término a término usando la regla citada.

$$\frac{1}{2\sqrt{xx-x}},$$

es el momento del arco AD . Desarrollando esta expresión en serie de potencias a través de la extracción de la raíz e integrando obtiene

$$x^{1/2} + \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{3}{40}x^{5/2} + \frac{5}{112}x^{7/2} + \frac{35}{1152}x^{9/2} + \frac{63}{2816}x^{11/2} + \dots$$

Esta última expresión es la longitud de AD la cual es en realidad $\arcsen(\sqrt{x})$. Pues Newton al considerar la circunferencia de ecuación $y = \sqrt{x-x^2}$, esto es, la circunferencia de centro y radio $1/2$ obtiene que el arco AD es igual a $\pi/2 - \text{arco } DE$, con lo cual, $\text{sen } AD = \cos DE$ y por la identidad trigonométrica, también se tendrá $\text{sen } AD = \sqrt{(1 - \cos 2DE)/2}$.

Ahora, como el radio de la circunferencia es $1/2$ entonces la longitud del arco $2DE$ corresponderá al ángulo DCE medido en radianes. Esto resulta en que, $\cos DCE = 2BC = 2(AC - AB) = 2(1/2 - x) = 1 - 2x$, y luego reemplazando se obtiene

$$\text{sen } AD = \sqrt{(1 - \cos 2DE)/2}$$

$$\text{sen } AD = \sqrt{[1 - (1 - 2x)]/2}$$

$$\text{sen } AD = \sqrt{x}.$$

Así desarrolló la función $\arcsen(\sqrt{x})$ en serie de potencias, de la longitud de AD que se propuso hallar. Newton después considera la circunferencia unitaria, con lo cual el arco LD será el $\arcsen(x)$.

“De modo en absoluto distinto, poniendo ser $CB = x$ y el radio $CA = 1$ vendrás a dar con que el arco LD es: $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$ ” (Newton, 1711, pág. 45).

A continuación, hallará el desarrollo para el seno de x . Al respecto, Newton dice en el apartado *Dar con la inversa de lo anteriormente explicado*²⁶ “si se desea, por el contrario, la longitud de la base a partir del área o la longitud... extraígase la raíz de x a partir de las ecuaciones”. En su obra *De Analysis* de 1669, Newton dedujo series de otras, invirtiendo una serie

²⁶ Ver (Newton, 1711, pág. 45).

que ya había hallado previamente, es decir, despejando la variable independiente en términos de la variable dependiente. Este método es conocido como *reversión de series* el cual es inductivo, en el sentido de que para hallar los términos de la serie es necesario realizar sustituciones, aproximaciones e ir despejando. Newton lo ejemplifica con el desarrollo de la serie de potencias para la función exponencial²⁷, pues teniendo la expresión para el área generada por la hipérbola (la cual es el logaritmo) que llama z , extraerá la raíz de esta z . Sin embargo, no presenta el procedimiento para la serie del seno.

Ahora, considerando la *Figura 11*, se hallará el seno AB a partir del arco dado (el arcoseno de x), es decir, teniendo $AB = x$, $\alpha D = z$ y $A\alpha = 1$.

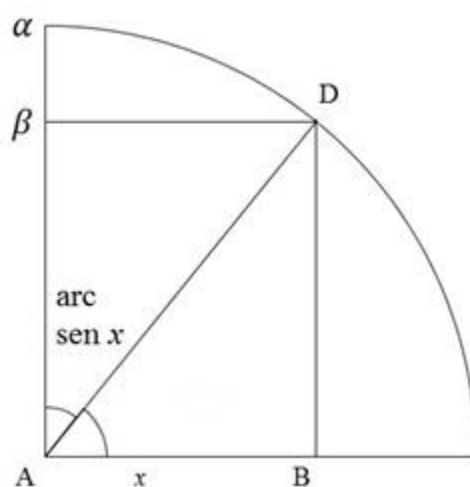


Figura 11. Serie de potencias para el seno.

de esta manera, como se tiene αD es decir

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots,$$

se realizará una aproximación sólo para los tres primeros términos de la serie para x . Entonces se reducen todos los términos de grado superior obteniendo

$$\frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + x - z = 0 \quad (1),$$

²⁷ Teniendo $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$ (serie de potencias para el logaritmo) a través del método de *reversión de series* Newton halla $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$ (serie de potencias para la función exponencial). Ver (Newton, 1711, pág. 46).

la primera aproximación de la serie se consigue suprimiendo los términos no lineales de la expresión, así

$$x \cong z.$$

Luego, sustituyendo $x = z + p$ en (1) y agrupando se obtiene

$$\left(\frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5\right) + p\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4\right) + p^2\left(\frac{1}{2}z + \frac{3}{4}z^3\right) + p^3\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}z^2\right) + p^4\left(\frac{3}{8}z\right) + \frac{3}{40}p^5 = 0 \quad (2),$$

despreciando los términos no lineales en p obtenemos

$$p = \frac{-\frac{1}{6}z^3 - \frac{3}{40}z^5}{1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4} = -\frac{1}{6}z^3 + \dots,$$

por lo que la segunda aproximación es

$$x \cong z - \frac{1}{6}z^3.$$

Ahora, sustituyendo $p = -\frac{1}{6}z^3 + q$ en (2) y agrupando

$$\left(\frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5\right) + p\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4\right) + p^2\left(\frac{1}{2}z + \frac{3}{4}z^3\right) + \dots = 0$$

$$\left(\frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5\right) + \left(-\frac{1}{6}z^3 + q\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4\right) + \left(-\frac{1}{6}z^3 + q\right)^2\left(\frac{1}{2}z + \frac{3}{4}z^3\right) + \dots = 0$$

$$\left(\frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5\right) + \left(-\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{12}z^5 - \frac{1}{16}z^7 + q + \frac{1}{2}z^2q + \frac{3}{8}z^4q\right) + \dots = 0$$

$$\left(-\frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{16}z^7\right) + q\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4\right) + \dots = 0,$$

nuevamente, despreciando los términos no lineales en q obtenemos

$$q = \frac{\frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{16}z^7}{1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4} = \frac{1}{120}z^5 + \dots,$$

con esto, la tercer aproximación es

$$x \cong z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5,$$

continuando de ésta manera, se conseguirá

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \dots,$$

que es el equivalente con,

$$\text{sen } x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Newton termina esta parte diciendo:

“Y si junto a ello apetece el coseno $A\beta$ de ese arco, haz $A\beta = \sqrt{1-x^2}$ (en la *Figura 11*),

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \dots" \text{ (Newton, 1711, pág. 48).}$$

que es el equivalente a:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

La función trigonométrica hace una aparición en términos del cálculo que estaba siendo desarrollado por Newton, y es muy importante porque se muestra el método disponible para su manejo. Las series de potencias constituyen un aspecto clave en el desarrollo de la noción de función y en este caso en la constitución de la función trigonométrica. De hecho, es una de las maneras en las que se definen las funciones seno y coseno que no hacen referencia al triángulo rectángulo propiamente, y que son especialmente útiles para el cálculo y construcción de tablas trigonométricas en las cuales no se tienen siempre los valores habituales (ángulos en posición estándar), pues una característica esencial, es que estas series son convergentes (cosa que no prueba Newton).

Es de resaltar que, aunque Newton maneja el seno a través de su serie de potencias aún lo sigue mirando como una línea del círculo. El cambio radica en que ahora la medida de la semicuerda en función del ángulo central se ha tomado en términos de cuadraturas, y es justo la cuadratura de esta curva que se presentó antes, la que originó una expresión infinita de la función

seno, este es el origen de las cantidades trascendentes trigonométricas, una clara expresión de la naturaleza de dicha función.

Por lo anterior, Newton no tiene aún un reconocimiento de las propiedades de la función trigonométrica, como la periodicidad, sin embargo es claro que al tomar la variable independiente en el desarrollo de la serie no se toma en grados, sino en radianes. Con esto, si se desea calcular el valor de $\text{sen}(1^\circ)$, lo que realmente se va a hallar es el valor de $\text{sen}(\pi/180)$, pues la equivalencia es que $1^\circ = \pi/180 = 0.01745329 \dots$ de esta manera, realizando el cálculo para los primeros tres términos de la serie y tomando una aproximación para el resultado se obtiene

$$\begin{aligned}\text{sen}(1^\circ) &= \text{sen}(\pi/180) \approx (\pi/180) - (\pi/180)^3/3! + (\pi/180)^5/5! \\ \text{sen}(1^\circ) &= \text{sen}(\pi/180) \approx 0.0174532925 - 0.0000008860 + 0.000000000013 \\ \text{sen}(1^\circ) &\approx 0.017452406513.\end{aligned}$$

Con la presentación en series de potencias del seno y coseno, se estaba realizando un primer tránsito de la función trigonométrica sobre ángulos a la función trigonométrica sobre los números reales. Es decir, Newton estaba dirigiendo la noción del número $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ para que no dependiera de ningún tipo de ideas geométricas. Esto puede interpretarse por ejemplo de la solución que presenta a la cuadratura del círculo²⁸, Newton resuelve este problema obteniendo la raíz (serie de potencias) de la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ donde a es el radio del círculo e integra término a término. Este resultado se podría tomar ahora como el cálculo de la integral $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ de la cual entre $\pi/4$ y 45° no parece que este último valor pudiera ser la respuesta adecuada para el área del cuarto del círculo.

Newton en *De Analysisi* resalta la distinción entre dos diferentes tipos de curvas: las geométricas y las mecánicas, estas últimas habían sido rechazadas por Descartes quien suponía que no se les podía asociar una ecuación algebraica. Leibniz cambió esta nomenclatura, llamando *algebraicas* a las curvas geométricas y *trascendentes* a las mecánicas. A diferencia de Descartes, Leibniz dio una atención importante a las curvas mecánicas/trascendentes. La razón de esto como argumenta el mismo Leibniz en su artículo²⁹ de 1686 *De geometría recóndita et Analysisi indivisibilium at que infinitorum*, que convenía abrir camino a las cantidades

²⁸ Ver (Newton, 1711, pág. 24).

²⁹ Tomado de (Newton, 1711, pág. 49).

trascendentes, ya que algunos problemas no son planos, ni sólidos, ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica. La forma de tratar las curvas trascendentes es justamente a través de las series de potencias, que van a representar una salida conceptual al rechazo de dichas curvas por parte de Descartes.

De esta manera, en el itinerario *curva-ecuación-función*³⁰ ya se estaba dando un paso importante en el desarrollo del concepto de función trigonométrica. Pues la curva sinusoidal que ya era bien conocida por los matemáticos, se podía ahora representar mediante una ecuación infinita. Ésta era comparada con la curva que genera la cicloide (Kline, 1972). También en (Katz, 1987) se asegura que los gráficos de la función seno se producían a mediados del siglo XVII, pues hay ejemplos del uso de uno o más arcos del seno en las obras de Roberval y Wallis.

Sin embargo, esta transición de curva a ecuación no es tan evidente, ya que durante mucho tiempo se habían privilegiado los aspectos geométricos del seno. Y aunque hubo una forma diferente de hacer matemáticas desde el siglo XVII impulsada por el cálculo infinitesimal para abordar especialmente problemas relacionados con el movimiento oscilatorio, los aspectos periódicos de la función trigonométrica no habían sido descubiertos. Las expresiones más utilizadas para referirse al seno o coseno en ese tiempo estaban en la forma $t = \text{arc sen } y$ o $t = \text{arc cos } y$, y se usaron en discusiones sobre fenómenos periódicos pero de una manera tan geométrica que no hubo desarrollo de las ideas analíticas. Por ejemplo, en (Buendía, 2004, pág. 51) se menciona que en 1678, Hooke utilizó la gráfica del arco coseno para representar los tiempos en que un peso colgado de un resorte está en una posición dada, pero al no tener una representación analítica de las relaciones trigonométricas, sólo se quedó con la geometría de la situación.

Fue Leonhard Euler quien mostró que las funciones trigonométricas tenía un papel importante en la modelación matemática de algunos fenómenos físicos periódicos como el movimiento de un péndulo, en la discusión sobre el problema de la cuerda vibrante y la posición de los planetas en el campo de la astronomía, como el caso de las desigualdades en los movimientos de Saturno y Júpiter. Todos estos problemas condujeron a la formulación de

³⁰ Esta metodología de investigación para el estudio del concepto de función; el itinerario *curva-ecuación-función* es tomado de (Mendoza, 2014).

expresiones matemáticas que pertenecen al campo de las ecuaciones diferenciales, de las cuales Euler es su máximo expositor.

2.3. Leonhard Euler y la función trigonométrica

Con el aporte de Newton se hubiera podido pensar que la función trigonométrica adquiriría importancia dentro del trabajo matemático de la época, sin embargo, esto no fue así. Después de la aparición de la expresión en serie de potencias para el seno en 1669, no se presentó claramente en los textos de cálculo que se escribieron en la época un tratamiento de la derivada o la integral del seno o cualquier discusión de las propiedades de esta función. No se había reconocido al seno y coseno como funciones, al igual que las demás que se habían creado en el cálculo. Esto como ya se ha dicho anteriormente, se debía a que aún se las pensaba geométricamente como líneas de un círculo de radio determinado. En (Katz, 1987) se afirma que la función trigonométrica pudo haber sido evitada porque nadie vio ningún uso razonable para ella.

Esto se mantuvo así hasta que Euler instauró la función trigonométrica al igual que los demás tipos de funciones, en su trabajo *Introductio in Analysin Infinitorum*³¹ de 1748, en esta obra se puede analizar la proyección conceptual de Euler respecto a las funciones trigonométricas. En el capítulo VIII titulado *On Transcendental Quantities Which Arise from the Circle* Euler proporciona un tratamiento de lo que se puede llamar el pre-cálculo de la función trigonométrica, la define numéricamente, no como líneas en un círculo y discute sus diversas propiedades. La importancia del trabajo de Euler alcanza un valor histórico significativo, porque es el primero que trata la función trigonométrica sistemáticamente como una cantidad adimensional; a Euler le debemos la notación $\sin x$, $\cos x$ utilizada actualmente y es quien hace explícita la naturaleza de la variable independiente x . A partir de este momento, la función trigonométrica alcanza el mismo estatus que la demás clases de funciones.

2.3.1. La función trigonométrica en la *Introductio*

Euler comienza el capítulo considerando el radio de un círculo igual a 1, para tomar los arcos del círculo con sus senos y cosenos, mencionando que estas son una de las clases de cantidades trascendentes, pues al principio de esta obra al definir lo que entiende por función dividió las funciones en *algebraicas* y *trascendentes*, de estas últimas da un ejemplo diciendo “si c indica la

³¹ Para la descripción del trabajo de Euler en la *Introductio*, se tomará la versión traducida por John D. Blanton. Ver (Euler, Introduction to Analysis of the Infinite, 1748).

circunferencia de un círculo con radio igual a 1, c será una cantidad trascendente” (Euler, 1748, pág. 5). La principal diferencia entre estos dos tipos de funciones es la forma en que se combinan las variables y las constantes, en este sentido, las funciones trascendentes están formadas por la combinación infinita de las operaciones que se producen sobre las funciones algebraicas, es decir, están constituidas por series infinitas, tradición adoptada de la clasificación hecha por Leibniz.

Euler conocía que la aproximación de la mitad de la circunferencia del círculo es 3,1415926 ... y es quien introduce la notación que se usa actualmente para este valor. Así pues, dice “...por el bien de la brevedad, vamos a utilizar el símbolo π para este número. Decimos entonces, que la mitad de la circunferencia de un círculo unidad es π , o que la longitud de un arco de 180 grados es π ” (Euler, 1748, pág. 101). Esta afirmación muestra que Euler va a transitar entre ambas unidades *grado – radián* sin complejidad, aunque hace preferencia a los ángulos en términos de π , pues su método para calcular la cantidad trigonométrica no se limita al triángulo rectángulo.

Con la anterior consideración y el uso del círculo unitario, Euler puede fácilmente obtener los valores de seno y coseno para ángulos en posición estándar. “Dado que π es un arco de 180 grados, $\sin 0\pi = 0$ y $\cos 0\pi = 1$. También $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin 2\pi = 0$ y $\cos 2\pi = 1$ ” (Euler, 1748, pág. 102). Seguramente Euler usó el círculo unitario en el plano cartesiano para llegar a estas conclusiones y dice finalmente que cada seno y coseno se encuentra entre +1 y -1. Euler además conocía la identidad $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$.

2.3.1.1. Periodicidad de la función trigonométrica

A continuación, Euler muestra la propiedad periódica de la función trigonométrica que ya había sido utilizada con el reconocimiento de que cada valor del seno y coseno está entre ± 1 . Conociendo los valores anteriores para ángulos en posición estándar y las expresiones para la suma y diferencia de dos arcos, $\sin(y \pm z) = \sin y \cos z \pm \cos y \sin z$ y $\cos(y \pm z) = \cos y \cos z \mp \sin y \sin z$, Euler realiza una sustitución para los valores $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, etc, en la variable y y obtiene

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = +\cos z & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = +\cos z \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\operatorname{sen} z & \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = +\operatorname{sen} z \\
\operatorname{sen}(\pi + z) = -\operatorname{sen} z & \operatorname{sen}(\pi - z) = +\operatorname{sen} z \\
\cos(\pi + z) = -\cos z & \cos(\pi - z) = -\cos z \\
\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) = -\cos z & \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) = -\cos z \\
\cos\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) = +\operatorname{sen} z & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) = -\operatorname{sen} z \\
\operatorname{sen}(2\pi + z) = +\operatorname{sen} z & \operatorname{sen}(2\pi - z) = -\operatorname{sen} z \\
\cos(2\pi + z) = +\cos z & \cos(2\pi - z) = +\cos z
\end{array}$$

Ésta es la forma analítica de mostrar el desfase entre el seno y el coseno el cual es de $\frac{\pi}{2}$ y representa la forma en que los valores del seno y coseno se repiten periódicamente. Aunque ya se había mostrado que el periodo del seno y coseno es 2π con las expresiones $\operatorname{sen}(2\pi + z) = +\operatorname{sen} z$ y $\cos(2\pi + z) = +\cos z$, para cada una de las igualdades anteriores Euler generalizó este comportamiento para un múltiplo de $\frac{\pi}{2}$, tomando los valores $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ y 2π es decir $k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ para $k = 1, 2, 3$ y 4 el cual hace que cada ciclo comience en el mismo punto y encuentra que el periodo en el cual se repite el ciclo es $2n$ con n entero. De esta manera cada valor $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ y 2π se transforma en $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $(2n + 1)\pi$, $\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi$ y $(2n + 2)\pi$, respectivamente. Así Euler estableció formalmente la periodicidad como una propiedad de la función trigonométrica, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{sen}\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = +\cos z & \operatorname{sen}\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\cos z \\
\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = -\operatorname{sen} z & \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\operatorname{sen} z \\
\operatorname{sen}\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\operatorname{sen} z & \operatorname{sen}\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = +\operatorname{sen} z \\
\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\cos z & \cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = -\cos z \\
\operatorname{sen}\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = -\cos z & \operatorname{sen}\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\cos z
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) &= +\sin z & \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) &= -\sin z \\
\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) &= +\sin z & \sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) &= -\sin z \\
\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) &= +\cos z & \cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) &= +\cos z
\end{aligned}$$

Respecto al reconocimiento y uso de las cantidades trigonométricas para la modelación de fenómenos periódicos en el proceso de institucionalizar esta propiedad característica de la función trigonométrica, se debe mencionar el caso del desarrollo de la teoría de vibración, emprendida por parte de Hooke anterior a los trabajos de Euler, quién se dedicó al desarrollo de la matematización del movimiento del péndulo simple. Éste fenómeno es comúnmente enseñado como una aplicación y ejemplo del movimiento armónico simple (M.A.S), del que pueden extraerse elementos importantes para el uso y aplicación de la función trigonométrica. La relación de este fenómeno con el M.A.S se evidencia en el momento que se muestra que la aceleración que aparece en el péndulo cuando se separa de su posición de equilibrio, hace que éste vibre u oscile en torno a esa posición de equilibrio. Esto es, considerando un péndulo que consiste en un peso de masa m al extremo de una cuerda de masa despreciable y longitud a , y realizando la descomposición de fuerzas³², se obtiene que

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta,$$

el hecho de tomar el ángulo θ de oscilación muy pequeño, es el que produce la ecuación del M.A.S. ya que al ser $\sin \theta$ aproximadamente igual a θ para valores pequeños de θ (por la serie de potencias de $\sin \theta$), aparece en el lado derecho de la ecuación anterior la fuerza restauradora de la Ley de Hooke, entonces la ecuación se convierte (aproximadamente) en:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta = 0,$$

³² Ver (Simmons, 1977, págs. 39-42).

una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución general es precisamente una función trigonométrica³³, cómo veremos más adelante cuando Euler presente la solución general a esta ecuación.

Estas ideas mostradas a partir del movimiento periódico del péndulo simple, son descubiertas por Hooke. En (Patterson, 1952) se muestra que Hooke en 1671 había observado en el estudio de este fenómeno la propiedad circular del seno, afirmando que el péndulo se mueve desigualmente en tiempos desiguales, según una línea de senos; en este sentido, la referencia que presenta cuando usa las líneas del círculo es sólo en términos geométricos. Más adelante, en 1678 en una nueva discusión sobre el movimiento del péndulo simple, tomó el tiempo con relación al periodo del péndulo, en el cual el arco de vibración se graduó de un extremo en una escala que aumentaba a intervalos de tres grados, en relación al seno. Esta apreciación para una solución de la ecuación del movimiento armónico simple, era en ese momento la más aproximada para todos los fines prácticos, ya que implicaba el uso de tablas trigonométricas.

2.3.1.2. Trigonometría sin triángulos: una prueba de la fórmula de Euler

Después de clarificar la propiedad periódica de la función trigonométrica, Euler procede a realizar un tratamiento para mostrar algunas identidades trigonométricas. Por ejemplo, dado que $\cos(y + z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$ y $\cos(y - z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z$ entonces, despejando $\cos y \cos z$ se obtiene

$$\cos y \cos z = \frac{\cos(y - z) + \cos(y + z)}{2},$$

y haciendo $y = z = \frac{v}{2}$, se halla la identidad del ángulo medio

$$\cos \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}},$$

de la misma manera halla la identidad para el seno del ángulo medio (Euler, 1748, págs. 104-105).

³³ Conociendo que la ecuación es de la forma $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2x = 0$, su solución es $y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$

Es interesante notar que Euler menciona iniciando el capítulo VIII que el seno y el coseno son importantes, no solo porque son una clase de cantidades trascendentes, sino porque surgen de logaritmos y exponenciales cuando se usan valores complejos, ya que en los capítulos VI y VII ya había realizado un tratamiento amplio de estas funciones. Es decir, dado que $(\sen z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ entonces se tendrán los factores $(\cos z + i \sen z)(\cos z - i \sen z) = 1$ (Euler, 1748, pág. 106). Usando este hecho, va a mostrar la relación que existe entre la función exponencial y la trigonométrica, generalizando un resultado obtenido implícitamente en 1722 por Abraham de Moivre, en el cual se hallaba una relación entre x y t , que representan los senoversos de dos arcos ($\senver \alpha = 1 - \cos \alpha$) que están a una razón de 1 a n , esta relación se puede expresar como

$$(\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sen \varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1} \sen n\varphi,$$

en realidad De Moivre no escribió el resultado con esta notación, fue Euler quien dio la formulación final (Kline, 1972, págs. 544-545).

Euler llegó a este resultado de la siguiente manera³⁴: Como $(\cos z + i \sen z)(\cos z - i \sen z) = 1$, entonces se puede considerar el producto $(\cos y + i \sen y)(\cos z + i \sen z)$, este es igual a

$$(\cos y \cos z - \sen y \sen z) + i(\cos y \sen z + \sen y \cos z),$$

y como $\cos(y + z) = \cos y \cos z - \sen y \sen z$ y $\sen(y + z) = \cos y \sen z + \sen y \cos z$ el anterior producto será equivalente a

$$(\cos y + i \sen y)(\cos z + i \sen z) = \cos(y + z) + i \sen(y + z), \quad (1)$$

de la misma manera, se obtendrá el resultado para

$$(\cos y - i \sen y)(\cos z - i \sen z) = \cos(y + z) - i \sen(y + z), \quad (2)$$

si se toma el producto $(\cos x \pm i \sen x)(\cos y \pm i \sen y)(\cos z \pm i \sen z)$, de manera análoga a lo anterior se obtendrá

$$(\cos x \pm i \sen x)(\cos y \pm i \sen y)(\cos z \pm i \sen z) = \cos(x \pm y \pm z) + i \sen(x \pm y \pm z), \quad (3)$$

³⁴ Ver (Euler, 1748, págs. 106-107 & 111-112).

teniendo estas igualdades, si se hace $z = y$ en (1) y (2), entonces se consigue

$$(\cos z \pm i \operatorname{sen} z)^2 = \cos 2z \pm i \operatorname{sen} 2z,$$

de manera similar, si se hace $x = y = z$ en (3) resulta

$$(\cos z \pm i \operatorname{sen} z)^3 = \cos 3z \pm i \operatorname{sen} 3z,$$

y generalizando para todos los demás casos, se halla la expresión

$$(\cos z \pm i \operatorname{sen} z)^n = \cos nz \pm i \operatorname{sen} nz.$$

Ahora, despejando $\cos nz$ y $\operatorname{sen} nz$

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \operatorname{sen} z)^n + (\cos z - i \operatorname{sen} z)^n}{2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{sen} nz = \frac{(\cos z + i \operatorname{sen} z)^n - (\cos z - i \operatorname{sen} z)^n}{2i}, \quad (5)$$

finalmente, Euler hace la consideración de que z es un arco infinitamente pequeño y n un número infinitamente grande j , así jz tendrá un valor finito v . Tomando $v = nz$ y $z = \frac{v}{j}$, con estos valores $\operatorname{sen} z = \frac{v}{j}$ y $\cos z = 1$, reemplazando esto en (4) y (5) resultan las expresiones

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{j}\right)^j + \left(1 - \frac{iv}{j}\right)^j}{2},$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{j}\right)^j - \left(1 - \frac{iv}{j}\right)^j}{2i},$$

en el capítulo VII Euler había mostrado que $e^z = (1 + z/j)^j$, donde e es la base del logaritmo natural. Finalmente haciendo $z = iv$ y $z = -iv$ se logran las identidades

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2},$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Estos resultados ya habían sido mostrados por Euler en una carta el 18 de octubre de 1740 a Jean Bernoulli, afirmando la igualdad entre $2 \cos x$ y $e^{ix} + e^{-ix}$ (Kline, 1972). De estas dos últimas identidades, se obtiene la conocida *Fórmula de Euler* que se expresa como

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Según se afirma en (Katz, 1987) desde la década de 1740 Euler ya era capaz de utilizar el cálculo de la función trigonométrica en el marco de la solución de algunos problemas en los que esta función iba a desempeñar un papel crucial. Así como presentó la función trigonométrica en conexión con la función exponencial, también la introdujo en el cálculo a través del estudio de las ecuaciones diferenciales, pues era conocimiento de Euler de que estas funciones eran importantes para el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

2.3.2. La función trigonométrica como solución de una ecuación diferencial

La clasificación que hace Euler de las funciones que trabaja en la *Introductio*, muestra que claramente hace una distinción de la naturaleza de las funciones algebraicas y trascendentes. Las funciones algebraicas son justamente aquellas en las que las operaciones realizadas sobre la variable independiente son de carácter algebraico, esto es, las cuatro operaciones elementales y las que intervienen sobre raíces. Las funciones trascendentes, en las cuales incluye a las funciones trigonométricas, son aquellas en las que se repiten de forma infinita las operaciones algebraicas, es decir, están constituidas por las series infinitas; aspecto que ya se vislumbraba desde el tratamiento de Newton.

En (Panza, 2007) se indica que esta distinción en la lista de las funciones analíticas de Euler, sugiere también que una función trascendental puede ser identificada como una expresión analítica que es en realidad desconocida. Cualquier operación trascendental, es para Euler, una operación que si se aplica a una cantidad variable x , resulta en una cantidad variable y que es la solución de una ecuación diferencial apropiada; y aunque las ecuaciones diferenciales nunca aparecen en la *Introductio*, se puede intuir que en la determinación de las funciones tratadas no sólo hay involucradas ecuaciones algebraicas (que son las manipuladas en la *Introductio*) sino que también son soluciones de ecuaciones diferenciales.

Este es justamente el caso de las funciones trigonométricas, consideramos que Euler las presenta en la *Introductio* porque surgen de la solución de una ecuación diferencial. En un artículo publicado en 1743 titulado *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*³⁵, Euler presenta el método general de solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Su método es básicamente el utilizado en los cursos básicos de ecuaciones diferenciales, y la importancia de éste es el uso que da a las funciones trigonométricas, como parte de la solución de dicha ecuación. A continuación se presenta el método desarrollado por Euler para resolver la ecuación diferencial que se desarrolla en (Euler, 1743)³⁶.

La integral de esta ecuación diferencial de segundo grado

$$0 = ay + b \frac{dy}{dx} + c \frac{d^2y}{dx^2},$$

se puede encontrar, una vez que, como hemos señalado 1 para y , z para $\frac{dy}{dx}$ y z^2 para $\frac{d^2y}{dx^2}$ y como se ha establecido, surge esta ecuación

$$0 = a + bz + cz^2,$$

esta podrá tener dos raíces reales, o dos imaginarias. Lo primero sucede cuando $b^2 > 4ac$, lo segundo sucede, si $b^2 < 4ac$.

Si sucede $b^2 > 4ac$, es por lo que las raíces son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c},$$

en este caso, la integral requerida es

$$y = \alpha e^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} + \beta e^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}},$$

el caso que debe considerarse por separado, en el cual $b^2 = 4ac$ se encuentra a continuación, (tomando la ecuación)

³⁵ Euler. *Über die Integration von Differentialgleichungen höherer Grade* (Sobre la integración de las ecuaciones diferenciales de mayor grado) 1743. Este artículo tomado es traducción alemana de Alexander Aycock y Artur Deiner del original en latín titulado *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*. <http://eulerarchive.maa.org/pages/E062>

³⁶ Traducción libre de (Euler, 1743, págs. 18-20).

$$a + 2z\sqrt{ac} + cz^2,$$

(considerando lo anterior como) un cuadrado

$$(\sqrt{a} + z\sqrt{c})^2,$$

se compara con la forma $(f - z)^2$, así

$$f = -\sqrt{\frac{a}{c}},$$

con lo que la integral buscada es

$$y = (\alpha + \beta x)e^{-x\sqrt{\frac{a}{c}}},$$

Ahora, $b^2 < 4ac$ y la ecuación

$$0 = a + bz + cz^2,$$

no tendrá raíces reales, es decir, de la forma

$$f^2 - 2fz \cos A\varphi + z^2,$$

comparado (con)

$$\frac{b}{c} = -2f \cos A\varphi \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} = f^2,$$

son, por lo tanto

$$f = \sqrt{\frac{a}{c}} \quad \text{y} \quad \cos A\varphi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}},$$

así

$$\sin A\varphi = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{ac}},$$

de que la integral es

$$y = \alpha e^{-\frac{b}{2c}x} \sin A \left(\frac{x\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{ac}} + \mu \right).$$

Esta forma de resolver la ecuación diferencial muestra que Euler ya tenía un dominio amplio en el uso y manipulación de las expresiones trigonométricas, para ubicarlas en el estatus

de función al incluirlas como parte de la solución. Cabe observar, que Euler ya había tenido en cuenta el caso en que la ecuación $0 = a + bz + cz^2$ tuviera raíces complejas, proporcionando lo que él llama un *divisor*³⁷, el cual expresa en la forma $p - 2z\sqrt{pr} \cos A\varphi + rz^2$ cuya integral (pues cambia z para $\frac{dy}{dx}$ y z^2 para $\frac{d^2y}{dx^2}$) es la expresión

$$y = e^{fx \cos A\varphi} u,$$

donde

$$u = \alpha \sin A (\sin A\varphi + \beta),$$

una expresión análoga a la presentada en el caso general.

Modernamente, cuando las raíces de la ecuación polinómica asociada a la ecuación diferencial son complejas, estas raíces se pueden escribir en la forma $a \pm ib$, y usando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

la solución puede escribirse como

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

$$e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx),$$

de esta manera organizado, la solución general se obtiene³⁸

$$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx).$$

Respecto a la forma de solucionar la ecuación diferencial lineal de segundo grado y tomando un caso particular como $y'' + y = 0$, en (Simmons, 1977) se afirma que aunque hoy se sabe muy bien que $y_1(x) = \sin x$ y $y_2(x) = \cos x$, son dos soluciones linealmente independientes porque ya se conocen las propiedades de dichas funciones; se pueden extraer las propiedades significativas de las funciones $\sin x$ y $\cos x$, a través de los métodos de las ecuaciones diferenciales considerando que no se las conoce. Simmons argumenta que, si bien “nuestro conocimiento de $\sin x$ y $\cos x$ se puede considerar como un mero accidente del pasado

³⁷ Ver (Euler, 1743, pág. 12).

³⁸ Ver (Simmons, 1977, pág. 108).

y, para poner de relieve este enfoque particular, imaginaremos que desconocemos por completo esas funciones familiares. Nuestro objetivo es ver cómo se pueden deducir sus propiedades, y las condiciones iniciales que satisfacen” (Simmons, 1977, pág. 143). Dicho de otra manera, así como Euler llegó a la necesidad de las funciones trigonométricas para poder resolver la ecuación, así mismo se pueden deducir las propiedades y las condiciones iniciales que debe tener la ecuación diferencial para llegar a la existencia de lo que Euler llamó $\sin x$ y $\cos x$.

El hecho de que la función trigonométrica sea clasificada como trascendente indica que Euler la está situando en el campo del análisis, más aun en lo que se conoce como análisis algebraico; ya que en la *Introductio*, aunque se presentan dichas funciones como expresiones compactas de polinomios infinitos, que se usan para el cálculo de π y otras identidades como series de productos infinitos y soluciones de polinomios; estas funciones son también la solución de ecuaciones diferenciales. Euler es consciente de que para poder definir la función trigonométrica se debía considerar más que el álgebra, para así poder admitir las curvas mecánicas que habían sido excluidas por Descartes en la geometría. En (Panza, 2007) se indica que el proyecto llevado a cabo en la *Introductio* está sujeto al uso previo de los principios y algoritmos del cálculo infinitesimal, con el cual el reconocimiento de la función trigonométrica pertenece así al análisis y al empleo de las ecuaciones diferenciales para introducir las funciones trascendentales trigonométricas.

2.3.3. El cálculo diferencial de la función trigonométrica

En una imponente obra titulada *Institutiones Calculi Differentialis*³⁹, Euler en 1755 presentó un tratamiento completo del cálculo diferencial de la función trigonométrica, en el cual se muestran las reglas para la derivación del seno, coseno, tangente, las funciones trigonométricas inversas y presenta ejemplos para realizar derivadas. Es con esta obra que Euler finalmente expulsa los métodos geométricos anteriores con los cuales se trataba a la función trigonométrica.

Es de resaltar que el método de Euler para hallar lo que actualmente se conoce como la derivada, está fundamentado en el uso de los infinitesimales, siendo su principal objeto de estudio el diferencial. Euler declara “A cualquiera que se pregunte qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, podemos responder que realmente es igual a 0” (Euler,

³⁹ Para la descripción del trabajo de Euler en *Institutiones Calculi Differentialis* se tomará la versión traducida por John D. Blanton. Ver (Euler, Foundations of Differential Calculus, 1755).

1755, pág. 51), este hecho es el que determina la prueba de las derivadas que presenta, y utilizando la notación de Leibniz para el diferencial, Euler denota una cantidad infinitamente pequeña por dx . De esta manera continúa diciendo⁴⁰: “Si aceptamos la notación utilizada en el análisis del infinito, entonces dx indica una cantidad infinitamente pequeña, de manera que tanto $dx = 0$ como $a dx = 0$, donde a es cualquier cantidad finita” (Euler, 1755, pág. 52).

En el capítulo 6 titulado *On the differentiation of transcendental functions* Euler enseña inicialmente las reglas de derivación de la función exponencial y logarítmica, para después presentar lo correspondiente a las funciones trigonométricas. Para estas últimas, comienza mostrando la forma de hallar las derivadas de toda las funciones trigonométricas inversas, $\arcsen x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\text{arc cot } x$, $\text{arcsec } x$ y $\text{arc csc } x$. Por ejemplo, el cálculo de la derivada de la función $\arcsen x$, lo hace primero considerando un arco de un círculo cuyo radio dado siempre es igual a la unidad y tomando el seno de este arco igual a x , hallará la derivada o como Euler dice “el incremento que recibe si el seno de x se incrementa por su diferencial dx ”. Ya que la expresión $\arcsen x$ puede reducirse a la expresión logarítmica⁴¹

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \ln(\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{-1}),$$

entonces toma $y = \arcsen x$, de modo que

$$y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \ln(\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{-1}),$$

y procede a continuación a hallar la derivada del logaritmo, el cual previamente había mostrado la regla para calcularlo, y obtiene

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

⁴⁰ Euler explica además cómo tratar algebraicamente con los diferenciales, por ejemplo: si a es una cantidad finita y dx es un infinitesimal, entonces $a \pm dx$ será igual a a . También $\frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$.

⁴¹ Esto es lo mismo que tomar $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, que es el equivalente a $e^{iy} = \sqrt{1-x^2} + ix$, al cual aplicando el logaritmo natural y despejando y se obtiene $y = \frac{1}{i} \ln(\sqrt{1-x^2} + ix)$.

La segunda forma de calcular esta derivada es sin la ayuda de los logaritmos. Euler menciona que si $y = \arcsen x$, entonces x es el seno de $\arcsen y$, esto es $x = \sen y$. Ahora, se sustituye $x + dx$ por x y $y + dy$ por y , tal que

$$x + dx = \sen(y + dy),$$

entonces $\sen(y + dy) = \sen y \cos dy + \cos y \sen dy$. Tomando la definición para el diferencial, como dy se hace pequeño, el arco se hace igual a su seno, y tomando $dy = 0$ el coseno se convierte en 1. Por esta razón $\sen(y + dy) = \sen y + dy \cos y$, tal que

$$x + dx = \sen y + dy \cos y,$$

además como $x = \sen y$ y $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, al reemplazar estas expresiones se obtiene

$$dx = dy \sqrt{1 - x^2},$$

de donde finalmente

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

es decir, “El arco de un seno dado tiene un diferencial igual al diferencial del seno dividido por el coseno” (Euler, 1755, pág.111). Euler muestra después unos ejemplos del cálculo de las derivadas de algunas funciones compuestas como $\arcsen[(1 - x^2)/(1 + x^2)]$, $\arcsen \sqrt{(1 - x)/2}$ y otras.

Una característica notable en los procedimientos que realiza Euler tiene relación al uso de las series de potencias para probar sus resultados, en contraste con la forma actual de llegar a la noción de derivada a través del límite. Algunas derivadas explicadas en *Institutiones* son justificadas por las expansiones de las series infinitas, sin mencionar las cuestiones de convergencia. Esto puede apreciarse en el caso de la derivada del seno. Euler toma $y = \sen x$ y reemplazando x por $x + dx$, y lo transforma en $y + dy$, entonces

$$y + dy = \sen(x + dx),$$

y

$$dy = \sen(x + dx) - \sen x,$$

ahora, teniendo en cuenta las series de potencias del seno y coseno

$$\operatorname{sen} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots,$$

hace uso de la definición que tiene de infinitesimal para hacer “desvanecer” los términos de potencia mayor que 1, y así conseguir (similar a lo que hizo en la derivada de $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$)

$$\cos dx = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} dx = dx,$$

con lo cual, reemplazando

$$\operatorname{sen}(x + dx) = \operatorname{sen} x \cos dx + \cos x \operatorname{sen} dx,$$

$$\operatorname{sen}(x + dx) = \operatorname{sen} x + \cos x dx,$$

y como $y = \operatorname{sen} x$, entonces

$$y + dy = \operatorname{sen}(x + dx),$$

$$y + dy = \operatorname{sen} x + \cos x dx,$$

$$dy = \cos x dx.$$

Euler concluye diciendo “*Por lo tanto, el diferencial del seno de cualquier arco es igual al producto del diferencial del arco y el coseno del arco*” (Euler, 1755, pág. 116).

Aun cuando el tema de las expansiones en series infinitas actualmente sea un tema avanzado del cálculo diferencial, este método de hallar la derivada del seno haciendo uso de tales series se explica de forma inmediata, especialmente cuando se compara con el cálculo estándar que se hace del límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x},$$

para este límite, usualmente se procede de la siguiente manera

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(\Delta x) + \operatorname{sen}(\Delta x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) [\cos(\Delta x) - 1] + \operatorname{sen}(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x} \\
&= \operatorname{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x},
\end{aligned}$$

entonces, según la notación actual, para $f(x) = \operatorname{sen} x$ la derivada $f'(x) = \cos x$ se obtiene usando los llamados *límites trigonométricos especiales* (que deben ser probados previamente)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Haciendo una comparación muy superficial podría decirse que el primero de estos límites es capturado por Euler en la ecuación $\operatorname{sen} dx = dx$ y el segundo límite puede ser comparado con la expresión que consigue Euler al desvanecer las potencias mayores que 1 en la serie de potencias del coseno y obtener $\cos dx = 1$ o mejor $\cos dx - 1 = 0$. De todas maneras, la exposición que presenta Euler indica que la función trigonométrica había adquirido un lugar dentro de la familia de funciones, que es digna de ser operada mediante los algoritmos del cálculo infinitesimal.

Mencionando el hecho de que debe conocerse que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, Cauchy presenta una prueba de este límite en su *Curso de Análisis*, argumentando que:

Entre las fracciones cuyos dos términos convergen con la variable α al límite cero, se debe considerar la siguiente

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha},$$

siempre que se le atribuya a la variable x un valor en cuya vecindad la función permanece continua. En efecto, bajo esta hipótesis, la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

es una cantidad infinitamente pequeña. Podemos también señalar que es, en general, un infinitamente pequeño de primer orden, de modo que la razón

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha},$$

converge ordinariamente, mientras que el valor numérico de α disminuye, hacia un límite finito diferente de cero. En el caso particular en el que se supone $x = 0$, la razón se reducirá a

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}.$$

Entre las razones de esta última especie, nos limitaremos aquí a considerar la siguiente

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha},$$

como se puede poner bajo la forma

$$\frac{\text{sen}(-\alpha)}{-\alpha},$$

su límite permanecerá igual, cualquiera que sea el signo de α . Dicho esto, concibamos ahora que el ángulo α recibe un valor positivo muy pequeño.

La cuerda del ángulo doble 2α está representada por $2 \text{sen } \alpha$, se tendrá evidentemente $2\alpha > 2 \text{sen } \alpha$, y en consecuencia,

$$\alpha > \text{sen } \alpha.$$

Además, la suma de las tangentes tomados de los extremos del ángulo 2α están representadas por $2 \tan \alpha$, y forman una porción del polígono que envuelve a este ángulo, se tendrá también $2 \tan \alpha > 2\alpha$, y, en consecuencia,

$$\tan \alpha > \alpha.$$

Al reunir las dos fórmulas que acabamos de establecer, se encontrará

$$\text{sen } \alpha < \alpha < \tan \alpha,$$

y, al sustituir $\tan \alpha$ por su valor

$$\text{sen } \alpha < \alpha < \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha},$$

y en consecuencia

$$1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} > \cos \alpha,$$

así, mientras α disminuye, $\cos \alpha$ converge al límite 1, y será lo mismo para la razón $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ comprendida siempre entre 1 y $\cos \alpha$; de modo que se tendrá

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

La anterior prueba de Cauchy sigue básicamente los mismos argumentos que se desarrollan en los cursos de cálculo moderno. Similar a la forma de hallar la derivada de la función seno, Euler enseña a calcular la derivada de la tangente. Euler dice, si $y = \tan x$, entonces

$$y + dy = \tan(x + dx)$$

$$dy = \tan(x + dx) - \tan x,$$

por identidad trigonométrica de la suma de ángulos en la tangente

$$\tan(x + dx) = \frac{\tan x + \tan dx}{1 - \tan x \tan dx},$$

y realizando la sustracción se logra

$$dy = \frac{\tan dx (1 + \tan x \tan x)}{1 - \tan x \tan dx},$$

nuevamente, usando el hecho que cuando el arco dx se desvanece, la tangente es igual al arco en sí, por la aproximación mediante la serie de potencias para $\tan x$, de modo que, $\tan dx = dx$ y el denominador $1 - \tan x dx$ se reduce así a la unidad, quedando

$$dy = (1 + \tan x \tan x)dx,$$

y como $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, se tendrá:

$$dy = \sec^2 x dx.$$

Euler al final de la nota, hace la aclaración de que esta derivada se podía hallar considerando la identidad

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

y aplicando la regla del cociente - regla demostrada en el apartado §164 (Euler, 1755, pág. 88) – obtiene.

$$dy = \frac{(\cos x \, dx) \cos x + (\text{sen } x \, dx) \text{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x \, dx,$$

es decir, “*El diferencial de la tangente de un arco es igual al diferencial del arco dividido por el cuadrado del coseno del mismo arco*” (Euler, 1755, pág. 118).

2.3.4. Euler y las series trigonométricas

La segunda innovación euleliana respecto a las cantidades trigonométricas, es el descubrimiento de la serie trigonométrica para aproximar funciones. En (Curtis, 1985) se menciona que Euler había tenido esta idea para aplicarla al cálculo de las perturbaciones planetarias en su artículo de 1748 que escribió para el premio de la Academia de París, sobre la cuestión de las desigualdades en los movimientos de Júpiter y Saturno. La investigación de las perturbaciones de los planetas causadas mutuamente, había sido estudiada desde 1747, y en gran medida habían dependido del uso de la serie trigonométrica, es decir, la serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \text{sen } n\theta),$$

donde a_n y b_n son constantes, sin el empleo de esta serie, la mecánica celeste de Lagrange y Laplace sería inconcebible. Curtis (1985) afirma que Euler ya había sido responsable de introducir dicha serie por primera vez en 1729 en la solución de un problema de interpolación, es decir, dada una función $f(x)$ cuyos valores para $x = n$, n entero positivo, están prescritos, hallar $f(x)$ para otros valores de x . “En 1747 aplicó el método que había desarrollado a una función que aparece en la teoría de perturbaciones planetarias y obtuvo una representación en serie trigonométrica de la función; publicó dicho método en 1753” (Kline, 1972, pág. 604).

La pregunta que se plantea es: “¿cuál fue el problema astronómico que llevó a Euler a recurrir a las series trigonométricas?” (Curtis, 1985, pág. 90), y así como la función trigonométrica nace en la búsqueda de la solución a una ecuación diferencial, igual sucede con la serie trigonométrica, surge de la solución a las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que representaban el movimiento de un solo planeta atraído únicamente por el sol; al respecto de esta afirmación, en (Kline, 1972) también se menciona que las series trigonométricas fueron introducidas en los primeros trabajos sobre ecuaciones en derivadas parciales. Es dentro del estudio de problemas astronómicos, en los que dichos fenómenos presentados son en alguna manera periódicos que la concepción de la serie trigonométrica surge, como una forma de aproximar una función, definida física o matemáticamente.

La serie trigonométrica también apareció en el escenario matemático como producto del debate sobre el problema de la cuerda vibrante. En (Guzmán, 1983) se reporta que entre los problemas propuestos por Brook Taylor en su *Methodus incrementorum directa et inversa* de 1715, aparece: *Determinar el movimiento de una cuerda tensa*. En la solución a este problema, Taylor obtiene en su lenguaje propio la ecuación diferencial de la cuerda vibrante, una ecuación de ondas unidimensional, de esta manera Taylor

Encontró que el movimiento de un punto arbitrario es el de un péndulo simple y determinó su tiempo de vibración, su período. Asimismo estableció que la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal. (Guzmán, 1983, pág. 35)

El problema de la cuerda vibrante tenía que ver con la búsqueda de un modelo matemático para el movimiento vertical de una cuerda elástica, uniformemente densa y sujeta en sus extremos, a la cual se le daba un pequeño impulso. Los matemáticos del siglo XVIII como Euler, Daniel Bernoulli, D’Alembert, etc., de acuerdo a la cultura dominante de la matematización newtoniana de la física, entendieron que describir matemáticamente el movimiento de la cuerda no era otra cosa que determinar la función que definía tal movimiento, tomada idealmente como una curva ubicada en un plano cartesiano. El problema consistía básicamente, en buscar soluciones de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1)$$

la búsqueda de soluciones a esta ecuación diferencial desencadenó una de las controversias más encendidas y fructíferas en la historia de las matemáticas, por ejemplo en lo que respecta a la revisión de conceptos como el de función.

Respecto a la solución obtenida por Taylor, en (Shenitzer & Luzin, 1998, pág. 61) se menciona que Daniel Bernoulli señaló que la forma de una cuerda vibrante es *socia trochoidis*, esto fue antes de la introducción del término *curva sinusoidal*. Sobre este debate, ya se había desencadenado una serie de discusiones entre las soluciones que habían presentado D'Alembert y Euler sobre el tipo de soluciones que admitía la ecuación diferencial⁴². Daniel Bernoulli presentó una solución al problema apoyándose en el concepto de las vibraciones fundamentales, y concluyó que el movimiento más general de una cuerda se puede obtener por la composición de dichas vibraciones fundamentales. Este punto de vista fue adoptado por Bernoulli por su experiencia en el estudio de problemas acústicos, en este sentido, mediante una visión de la naturaleza musical de las vibraciones propone que la ecuación

$$y = \alpha \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + \dots,$$

abarca la solución de D'Alembert, así como la de Euler. Sin embargo, aunque Bernoulli entiende la importancia y el significado que tiene su principio de composición de vibraciones (resultado que será importante cuando Fourier retome dicho problema en el marco de la determinación del flujo de calor), fue incapaz de justificar matemáticamente que cualquier combinación lineal de estas soluciones eran una solución al debate, Bernoulli afirma: "... esto es cierto, si bien no lo tengo aún del todo claro: si existen aún otras curvas, entonces no sé en qué sentido puedan ser admitidas" (Guzmán, 1983, pág. 37).

Con esta participación de Bernoulli al problema de la cuerda vibrante, se encendió aún más la controversia sobre la naturaleza de las soluciones a la ecuación diferencial. Respecto al uso de una combinación infinita de senos y cosenos, se presentó la negativa por parte de Euler para aceptar que una función tan general pudiera representarse así, no por la cuestión de la infinitud de la serie, sino por la repercusión que estaba teniendo en la definición de función que había en el momento. En (Kline, 1972) se afirma que muchos de los resultados sobre la

⁴² Una explicación y resumen sobre el debate de la cuerda vibrante, el papel de D'Alembert, la solución de Euler, y el debate entre estos dos matemáticos respecto a la solución de la ecuación diferencial, se puede mirar en (Shenitzer & Luzin, 1998).

representación en serie trigonométrica de funciones bastante generales aparecieron en artículos sobre astronomía, y pudo ocurrir que Daniel Bernoulli no los hubiese leído, no pudiendo así recurrir a ellos para defender su postura. De esta manera

Todos los trabajos sobre series trigonométricas estaban impregnados por la paradoja de que, si bien se representaba en serie trigonométrica toda suerte de funciones, Euler, D'Alembert y Lagrange nunca abandonaron la opinión que ello no era posible para funciones *arbitrarias*... Esta cuestión de si cualquier función se puede representar por una serie trigonométrica se convertiría en una cuestión clave. (Kline, 1972, pág. 610)

La persona destinada para aclarar esta cuestión era Joseph Fourier, quien decidió la controversia a favor de Bernoulli, poniendo además de manifiesto una regla general para calcular los coeficientes de una serie trigonométrica que representa una función dada $f(x)$.

3. LA TRIGONOMETRÍA EN SU PUNTO MÁS ALTO

La trigonometría ha recorrido un largo camino desde su creación. A lo largo de su historia, se han podido identificar algunos desarrollos importantes que han permitido que la trigonometría haya avanzado en sus objetivos. Fundamentalmente el trabajo de Ptolomeo con la construcción de su tabla de cuerdas, proveyó de un significado a la trigonometría sujeta a la geometría del modelo astronómico; y observando en el triángulo inscrito la relación *ángulo-cuerda*, concebir la trigonometría como una ciencia práctica y computacional. Posteriormente la nueva forma de hacer matemáticas con la creación del cálculo, permitió que dichas cuerdas en el círculo tuvieran una representación algebraica en serie de potencias, y ahora dichas cantidades trigonométricas son entendidas como trascendentes, lo cual trajo consigo unos resultados interesantes en la clasificación de funciones hecha por Euler; precisamente es Euler quién identifica a la cantidad trigonométrica como una función propia de la materia que se estaba desarrollando.

Un hecho que se resalta en este recorrido, es que con la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ se alcanzó un tratamiento especial en la trigonometría, ya que primero había sido una ciencia de referente geométrico con la astronomía y luego había sido adaptada al álgebra; pero en

esta fórmula se relacionan dos tipos de funciones trascendentes, cantidades imaginarias, y el bello resultado aritmético que se consigue al hacer $x = \pi$ en la fórmula de Euler y obtener la expresión $e^{i\pi} + 1 = 0$, que relaciona definitivamente la trigonometría con el análisis matemático, en este sentido, se denota que la trigonometría deja de ser solamente identificada con el triángulo rectángulo. Sin embargo, fue Joseph Fourier quien fusionó la trigonometría con el álgebra y el análisis conocido hasta su época, consolidando definitivamente a la trigonometría en el análisis matemático. De esta manera Fourier al consolidar el uso de la serie trigonométrica para la representación de funciones y otras aplicaciones de lleva a la trigonometría a su punto más alto, como veremos a continuación.

3.1. La serie trigonométrica de Fourier

La serie trigonométrica de Fourier es una serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

en la que los coeficientes de esta serie están dados por las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

La serie de Fourier es una serie trigonométrica usada para representar una función, y es ampliamente utilizada en matemáticas puras y aplicadas. Como denotamos en la sección 2.3.4 Fourier no fue el primero en utilizarla, pero su nombre está correctamente atado a ella porque fue el primero en usarla en el estudio de la difusión del calor, para mostrar su uso en la solución de una ecuación diferencial parcial y argumentar con éxito su generalidad. Retomando la cuestión generada a través de la discusión sobre el problema de la cuerda vibrante, Fourier reabrió el debate afirmando categóricamente que cualquier solución a la ecuación de calor, podría escribirse como una suma infinita de senos y cosenos.

Por lo anterior, la salida al problema sobre el uso de la serie trigonométrica, para ser solución a la ecuación diferencial que modela el movimiento de la cuerda vibrante, que aún no había sido aclarado completamente, tuvo que esperar hasta el tratamiento del problema de la conducción de calor en el trabajo de Fourier titulado *Theorie analytique de la chaleur*⁴³, en el cual se iba a

⁴³ Para la descripción del trabajo de Fourier en *Theorie analytique de la chaleur* se tomará la versión traducida por Alexander Freeman. Ver (Fourier, 1878).

enfrentar con la ecuación en derivadas parciales que determina la temperatura T en un cuerpo homogéneo e isotrópico como una función de x y t , ecuación muy similar a la que se plantea para el problema de la cuerda vibrante, la cual es

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, x \in [-\pi, \pi]$$

Es en este manuscrito, donde se presenta la solución que venía siendo de gran polémica en el ámbito matemático de la época.

3.2. Antecedentes sobre el uso de la serie trigonométrica

Como ya se mencionó, la cuestión central sobre el uso de la serie trigonométrica para la representación de funciones vino a traer un fuerte debate sobre el concepto mismo de función. Hasta la época, había una definición formal de función entendida como una *única* expresión analítica, lo que impedía aceptar las funciones que hoy se denominan *a trozos*, es decir, funciones que por ejemplo fueran cero sobre una parte y distintas de cero en la otra parte. Este fue uno de los grandes problemas, la imposibilidad de imaginar la expresión, por series trigonométricas de funciones representadas gráficamente a trozos. La falta de independencia entre la expresión analítica de una función con su representación, era la razón principal de la duda a lo que había afirmado Daniel Bernoulli respecto al tema.

Fourier en su trabajo presentó ejemplos sobre representación de funciones de este tipo, formándolas a base de iteraciones geométricas. Es preciso afirmar que Fourier había estudiado la historia del problema de la cuerda vibrante. En la sección IV del capítulo III titulado *Development of an arbitrary function in trigonometric series*, Fourier afirma que si se aplican sus procedimientos hasta el momento desarrollados al problema de la cuerda vibrante, se hubieran podido resolver fácilmente las dificultades que aparecieron cuando Daniel Bernoulli hizo sus investigaciones (Fourier, 1878, págs. 198-199).

3.3. Un ejemplo sobre el uso de la serie trigonométrica

Utilizando actualmente las técnicas y métodos para el manejo de la serie trigonométrica, se puede llegar a que la función $f(x) = \frac{1}{2}x$ puede ser representada mediante la serie

$$\sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} kx.$$

Fourier presenta dos formas para llegar a este resultado. Una de ellas es la que incluye formalmente el uso de los coeficientes para las series (que será presentado más adelante) y la otra manera, es a través de algunas propiedades e identidades de las funciones trigonométricas. De alguna manera, los algoritmos de Fourier no se presentan de forma rigurosa, pero se desea mostrar el uso que realiza de la cantidad trigonométrica para tan grande hazaña. A continuación se presenta la forma en que Fourier llegó a esta expresión, empleando paso a paso su misma metodología.

En el ítem⁴⁴ §182 Fourier considera la serie finita

$$y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \cdots + \frac{1}{m-1} \operatorname{sen}(m-1)x - \frac{1}{m} \operatorname{sen} mx,$$

en la cual derivando término a término en ambos lados de la igualdad, obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \cdots + \cos(m-1)x - \cos mx,$$

ahora, multiplicando por $2 \operatorname{sen} x$ en ambos lados de la igualdad, y tomando la identidad

$$\cos a \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)}{2},$$

se reemplaza cada término del lado derecho, logrando

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} &= [\operatorname{sen}(x+x) - \operatorname{sen}(x-x)] - [\operatorname{sen}(2x+x) - \operatorname{sen}(2x-x)] \\ &\quad + [\operatorname{sen}(3x+x) - \operatorname{sen}(3x-x)] \dots - [\operatorname{sen}(mx+x) - \operatorname{sen}(mx-x)], \end{aligned}$$

reduciendo esta expresión se obtiene

$$2 \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} mx - \operatorname{sen}(mx+x),$$

entonces, la cantidad $\operatorname{sen} mx - \operatorname{sen}(mx+x),$

⁴⁴ Ver (Fourier, 1878, págs. 147-149).

es igual a $-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \left(mx + \frac{1}{2}x\right),$

de esta manera, despejando dy/dx y reemplazando, se consigue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} x} \cos \left(mx + \frac{1}{2}x\right),$$

que es lo mismo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{\cos \left(mx + \frac{1}{2}x\right)}{2 \cos \frac{1}{2}x},$$

finalmente, Fourier integra en ambos lados y concluye que

$$y = \frac{1}{2}x - \int \frac{\cos \left(mx + \frac{1}{2}x\right)}{2 \cos \frac{1}{2}x} dx.$$

Sin ninguna justificación, salvo una aclaración de cómo resolver la integral, Fourier hace desaparecer de la expresión final la integral para llegar al resultado deseado. Fourier entonces obtiene que la serie finita

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \cdots + \frac{1}{m-1} \operatorname{sen}(m-1)x - \frac{1}{m} \operatorname{sen} mx,$$

difiere muy poco de la función $\frac{1}{2}x$, y en seguida afirma: “cuando el número de términos en la serie es muy grande, de manera que sea infinito, se tendrá la ecuación

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \cdots" \text{ (Fourier, 1878, pág. 149).}$$

3.4. En busca de los coeficientes de la serie

La clave de la representación de funciones vía series trigonométricas se encuentra en la determinación y cálculo de los coeficientes. Fourier afirma que la más completa de todas las pruebas de esta proposición, es la que consiste en la resolución de una función determinada en una serie con coeficientes determinados. Fourier argumenta: “es necesario sobre todo asignar los valores de las constantes y la dificultad de la aplicación consiste en el descubrimiento de los coeficientes” (Fourier, 1878, pág. 199).

Lo que sigue a continuación tiene peso histórico, pues al tratar de resolver la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, Fourier inauguró el método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales. Este método es utilizado en los ítems⁴⁵ §166 y §167, encontrando que $\varphi(x, y) = e^{-mx} \cos my$ es la solución a la ecuación, y además tomando una expresión formada por la suma de muchos términos de $\varphi(x, y)$ para valores enteros de m , como

$$ae^{-x} \cos y + be^{-3x} \cos 3y + ce^{-5x} \cos 5x + de^{-7x} \cos 7x + \dots,$$

dice que también será solución de la ecuación diferencial, esta es la expresión que da origen a su serie trigonométrica.

En el ítem⁴⁶ §207 Fourier explica nuevamente que el problema de la propagación de calor en un sólido rectangular le ha conducido a la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

la cual tiene como solución la serie

$$a \cos x - b \cos 3x + c \cos 5x - d \cos 7x + \dots \&c.,$$

en la cual los coeficientes a, b, c, d, e , etc. son los que deben determinarse. Fourier expresa⁴⁷:

El valor de estos coeficientes acaba de ser asignado; pero aquí hemos tratado un caso único de un problema más general, que consiste en desarrollar cualquier función en una serie infinita de senos o cosenos de múltiples arcos. Este problema está relacionado con la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, y ha sido atacado desde el origen de ese análisis. Era necesario resolverlo para poder integrar adecuadamente las ecuaciones de la propagación del calor, procederemos a explicar su solución. (Fourier, 1878, pág. 168)

La caracterización de los coeficientes de la serie fue resuelta por Fourier por dos vías; la primera, algebraica, a través de la solución de un sistema de infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas. El segundo método, se desarrolla utilizando la técnica de integración, este es el método que nos interesa analizar.

⁴⁵ Ver (Fourier, 1878, págs. 133-136).

⁴⁶ Ver (Fourier, 1878, pág. 168).

⁴⁷ Traducción libre de (Fourier, 1878, pág. 168).

Fourier se propuso entonces presentar de una forma general el cálculo de los coeficientes de la serie, para convertirlo en una forma estándar y poder reclamar una expresión en la que cada función pueda escribirse como cada una de estas series. Con esto quería decir que cada función sería igual a sus series correspondientes, y que existe una regla simple para escribir los coeficientes. Este camino comienza en el ítem⁴⁸ §221 mencionando que para la determinación directa de las cantidades $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$ en la ecuación

$$\varphi(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \dots a_j \operatorname{sen} jx + \dots,$$

se deberá multiplicar cada miembro de la igualdad por $\operatorname{sen} ix \, dx$, siendo i un entero, e integrar desde $x = 0$ hasta $x = \pi$, así obtiene

$$\int \varphi(x) \operatorname{sen} ix \, dx = a_1 \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ix \, dx + a_2 \int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} ix \, dx + \dots a_i \int \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix \, dx + \dots \quad (1)$$

Tomando la integral general que tiene el coeficiente a_i , presenta su solución escribiéndola como:

$$2 \int \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix \, dx = \frac{1}{i-j} \operatorname{sen}(i-j)x - \frac{1}{i+j} \operatorname{sen}(i+j)x + c,$$

que desaparece cuando $j \neq i$ y es igual a $\frac{\pi}{2}$ cuando $j = i$.

Fourier conoce que cada una de las integrales del segundo miembro en (1) se anulan, excepto el término $a_i \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ix \, dx$, siendo el valor de $\int \operatorname{sen} ix \operatorname{sen} ix \, dx = \frac{\pi}{2}$, así se encuentra el valor de la constante a_i , el cual será

$$\frac{2}{\pi} \int \varphi(x) \operatorname{sen} ix \, dx,$$

con este hecho, Fourier exhibe el desarrollo requerido para la función $f(x) = x$, diciendo que la integral

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} ix \, dx,$$

⁴⁸ Ver (Fourier, 1878, pág. 187).

es igual a $\pm \frac{\pi}{i}$, de donde el signo + debe ser elegido cuando i es impar, y el signo - cuando i es par⁴⁹. Así se confirma el desarrollo que había obtenido para la función $\varphi(x) = \frac{1}{2}x$ el cual, conociendo el valor de cada constante, será

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

En el ítem⁵⁰ §224 un análisis similar se emplea para el desarrollo de cualquier función en una serie de cosenos de arcos múltiples. Tomando la serie

$$\varphi(x) = a_0 \cos 0x + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots a_i \cos ix + \dots$$

Fourier multiplica ambos miembros de la ecuación por $\cos jx dx$, e integra cada uno de los términos del segundo miembro desde $x = 0$ hasta $x = \pi$; Fourier nuevamente afirma que el valor de cada integral será nulo, salvo el término que contiene el factor $\cos jx$, esta observación da inmediatamente el coeficiente a_j . Es decir, considerando de forma general el valor de la integral

$$\int \cos jx \cos ix dx,$$

tomando la integral desde $x = 0$ hasta $x = \pi$, suponiendo j y i enteros, se obtiene

$$\int \cos jx \cos ix dx = \frac{1}{2(j+i)} \sin(j+i)x + \frac{1}{2(j-i)} \sin(j-i)x + c,$$

nuevamente Fourier afirma que esta integral tomada desde $x = 0$ hasta $x = \pi$ evidentemente desaparece cuando $j \neq i$, cosa que no sucede cuando estos dos números son iguales $j = i$ (Fourier, 1878, pág. 191). De esta manera, Fourier halla el valor del coeficiente a_i , y lo escribe como

$$\int \varphi(x) \cos ix dx = \frac{1}{2} \pi a_i.$$

⁴⁹ Ver (Fourier, 1878, pág. 189).

⁵⁰ Ver (Fourier, 1878, págs. 190-191).

A continuación, Fourier presenta la demostración de su teorema, que cualquier función se puede desarrollar en una serie de senos y cosenos; “Este (resultado que se acaba de mostrar) y el teorema precedente se ajustan a todas las funciones posibles, ya sea que su carácter pueda expresarse mediante métodos conocidos de análisis o si corresponden a curvas trazadas arbitrariamente” (Fourier, 1878, pág. 192).

Fourier señala que dos funciones pueden coincidir en un cierto intervalo pero no necesariamente fuera del intervalo. La incapacidad de ver esto explica por qué matemáticos de épocas anteriores no podían aceptar que una función arbitraria podía ser desarrollada en una serie trigonométrica. Lo que la serie proporciona es la función en el dominio de 0 a π , en el caso presente, y repeticiones periódicas fuera de ella

La serie de senos representa una función impar ($f(x) = -f(-x)$) y la serie de cosenos una función par ($f(x) = f(-x)$). Pero cualquier función puede ser representada como la suma de una función impar y una función par, de donde

$$f_{impar} = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

$$f_{par} = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$$

entonces, cualquier función $f(x)$ puede ser representada en el intervalo $(-\pi, \pi)$ por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Aunque no se establecen condiciones rigurosas para la representabilidad de una función en series trigonométricas, la convicción de es que sí es posible, como se puede observar a lo largo de todo el libro. La importancia de las series trigonométricas reposa en la posibilidad de representar una función arbitraria a través de dicha serie, cualquiera de las funciones trabajadas en el cálculo de aquella época, podía escribirse como una suma infinita de senos y cosenos. De esta manera podría afirmarse, que si las funciones fueron creadas para modelar los fenómenos físicos y si éstas a su vez pueden representarse por medio de senos y cosenos, entonces el mundo es trigonométrico.

4. CONCLUSIONES

La función trigonométrica es un concepto muy útil en la vida cotidiana. No obstante, es común que antes de conocerla y percatarse de todas sus propiedades y aplicaciones, primero hay que transitar en la escuela por la enseñanza básica de la trigonometría de solución de triángulos. Es en este aspecto que se presentan dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría: determinar cómo se da la transición de la razón trigonométrica a la función trigonométrica. En este documento se ha hecho un análisis de la constitución histórica de las funciones trigonométricas, lo que nos permite, de alguna manera, hacer reflexiones sobre la forma en que se enseña, y los elementos que son muy relevantes en la construcción de dicho concepto. Este enfoque del análisis histórico se argumenta bajo la premisa de que las matemáticas son una construcción social, así pues se realizó una mirada al pasado, se regresó a los antiguos y a sus

aportes para mirar el movimiento epistemológico que terminó en la constitución de la función trigonométrica y su instauración en el cuerpo teórico de las matemáticas.

La atención está puesta entonces, sobre la manera que se realiza el cambio de la trigonometría del triángulo a la trigonometría de las funciones. Se observa que los usos más generalizados de la trigonometría no tienen relación directa con triángulos, sino con la modelación de los fenómenos que involucran periodicidad. Sin embargo, muy poco de esto se alcanza a enseñar y menos a profundizar en la escuela; además el hecho de que muchos estudiantes de secundaria carecen de habilidades algebraicas básicas, que les permita mirar más allá de los típicos ejercicios sobre trigonometría que son en ocasiones la repetición de los mismos sencillos ejemplos de clase, rutinarios y nada inspiradores. En este sentido, la clásica enseñanza de la función trigonométrica se establece en el triángulo rectángulo; sólo en este contexto geométrico-estático le es posible operar para obtener los valores de x y $\sin x$, ubicar la coordenada $(x, \sin x)$ en un plano y trazar la gráfica. A partir de ese escenario se presentan todos los movimientos cognitivos respecto a la trigonometría, con el círculo unitario como mediador, en el cambio de unidad de medida para los ángulos; la periodicidad, lo acotado de la función, y más relevante el hecho que primero $\sin x$ y $\cos x$ representen el cociente de segmentos de un triángulo rectángulo y a la siguiente clase sean concebidas como funciones de variable real. Las respuestas a este cambio de escenarios en la trigonometría se encuentran en la historia, que permite comparar los significados actuales que se tienen y los problemas que de alguna manera se repiten en el aula de clase al enfrentar la enseñanza de esta función.

Se pueden evidenciar a partir del contenido de este documento, dos justificaciones que permiten mostrar cómo se alcanza históricamente el concepto de función trigonométrica. La primera trata sobre lo que se ha venido hablando anteriormente: el cambio de razón a función. Ésta se explica a partir de la emergencia de la noción de ángulo, y en (Rotaeché & Montiel, 2009) se menciona que éste es un concepto sobre el cual se han detectado diversas dificultades de aprendizaje por parte del estudiante; malentendidos que se presentan sobre su definición y uso, y que es comparado en este documento con la dificultad en los antiguos de precisar la naturaleza del ángulo dentro de las categorías aristotélicas, cuestionándose si el ángulo es una cualidad, cantidad o relación, pero que permitió en un principio la aparición de una expresión para el cálculo del *se-qet* en la matemática babilónica, para la solución del problema 56 en el

Papiro de Rhind que se relaciona como una emergencia temprana de la razón trigonométrica *cotangente* como se argumenta en (Heath I, 1921).

Con respecto a las distintas formas de definir el ángulo, en (Allendoerfer, 1965) se argumenta que la forma de desarrollar la idea de ángulo utilizando distintas concepciones sería tedioso y confuso para los estudiantes. Debe elegirse un enfoque que sea atractivo para ellos y coherente con otros conceptos y objetos que se trabajan en la matemática, pues aunque se refiera a un ángulo en el uso del círculo unitario tomando la idea física de una rotación, que puede ser en cualquier dirección y a través de las llamadas revoluciones, no se puede basar el tratamiento de un concepto tan importante a través de una idea física que no tiene fundamento matemático. Por lo tanto, se puede acercar al estudiante a una generalización de este concepto a partir de una discusión de las ideas de los arcos de un círculo y su longitud, sobre todo cuando la notación usada para las funciones inversas es “arco seno” y “arco coseno”. La virtud de esta forma de definir el ángulo⁵¹ se refleja en el momento de asignarle una unidad de medida, es decir, que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los ángulos dirigidos, un aspecto fundamental en la construcción de la función trigonométrica en los estudiantes, pues aunque se sugiere que “las funciones trigonométricas son funciones de ángulos. Aunque se trata de un concepto útil para la aplicación de la trigonometría a la física, es gravemente engañosa como un principio general” (Allendoerfer, 1965, pág. 87), ya que al igual que la función exponencial y las polinómicas, las funciones trigonométricas son funciones de números reales. Esta forma de presentar el ángulo y su medida, puede ser una solución al problema frecuente con la ausencia de triángulo rectángulo en el círculo unitario, cuando el ángulo es 0° , 90° y 180° , ya que aunque no se visualice triángulo alguno, siguen existiendo los valores para el seno y coseno de estos ángulos, lo que resultaría confuso y paradójico.

Esta propuesta de definir el ángulo en relación con los arcos del círculo y su longitud, vista en (Allendoerfer, 1965), (Carver, 1919) y otros, es el mismo camino que se puede interpretar a partir de los aportes de Euclides. El camino trazado desde la definición de ángulo, su uso para la

⁵¹ En (Allendoerfer, 1965) se explica una forma de definir formalmente el concepto de ángulo, partiendo desde la definición clásica de “ángulo simple”, muestra que ésta definición es insuficiente para los propósitos en la enseñanza de la función trigonométrica, así pues propone la necesidad y la manera de definirlo relacionándolo con los arcos en un círculo, presentando una evolución hasta lo que él llama “ángulo generalizado”.

prueba de algunas de sus proposiciones, pero más importante su ubicación en el círculo en VI. 33, representa un fundamento sobre el cual puede presentarse la conversión *grado-radián*, y que significó el origen de la trigonometría de cuerdas para el uso de los estudios en astronomía desde Aristarco a Ptolomeo⁵². Esta trigonometría trabajada por los griegos no es la trigonometría de las razones de los lados de un triángulo rectángulo, sino trigonometría en servicio de la astronomía, una tradición de muchos siglos, que fue tendencia hasta su divorcio de la astronomía con el trabajo del matemático Johann Müller en 1464 en su tratado *De triangulis*, a partir de allí la trigonometría apareció de forma independiente.

Ahora, teniendo en cuenta el referente temporal, desde sus inicios en los griegos hasta aproximadamente el siglo XV la mayor parte de esta larga historia, la trigonometría era un asistente de la astronomía, pudiendo relacionarse este hecho frecuente de concebir en la escuela la trigonometría sólo como una herramienta para calcular las cantidades involucradas en los triángulos. En este sentido, puede notarse que este cambio tardó en la forma de mirar la trigonometría nos lleva a preguntarnos ¿ésta es una razón por la cual hay un progreso lento para mejorar o cambiar la enseñanza de la trigonometría?

Con el surgimiento del cálculo infinitesimal y la necesidad de modelar el movimiento, la trigonometría comenzó un nuevo proceso de adaptación a la nueva forma de hacer matemática. Aunque Ptolomeo había construido una tabla de cuerdas para cada valor de un ángulo central en un círculo de radio determinado, similar a una tabla de senos actual, no se puede interpretar la incorporación de la noción de función en sus trabajos. En (Buendía & Montiel, 2009, pág. 1288) se resalta este hecho, el paso del fenómeno celeste al fenómeno mecánico, la transición de la trigonometría en el plano geométrico-estático al plano funcional, y así el abandono de la razón trigonométrica. Este movimiento hacia una trigonometría dinámica, tardó un tiempo más después de su salida de la astronomía, hasta que por la dirección de Euler la trigonometría fue incorporada al análisis matemático. Sin embargo, ya se había presentado una motivación con los aportes de Hooke en el estudio del péndulo simple y su relación con el movimiento armónico simple, el concepto de periodicidad se estaba gestando hasta su madurez con el trabajo de Euler.

⁵² En la descripción de los aportes a la trigonometría de cuerdas y su uso para determinar grandes distancias, y tamaños de los planetas, faltaron ideas de Eratóstenes y otros astrónomos. Para una mayor información con respecto a este tema mirar en (Heath II, 1921) y (Boyer, 1968).

Con los tratados de Euler en la *Introductio e Institutiones* se introduce y sistematiza la noción de función trigonométrica, como un concepto que puede ser estudiado de forma independiente de cualquier relación con un diagrama geométrico. Euler la ubica al igual que los demás tipos de funciones conocidas en la época, como una cantidad expresada por una fórmula, notación específica, y propiedades definidas. Es él quien muestra la propiedad periódica de la función trigonométrica, y lo acotado de esta función al evidenciar que todos los valores de senos y cosenos están contenidos entre los límites $+1$ y -1 . Más relevante, el hecho de que su tratamiento de la cantidad trigonométrica es realizado sin uso del triángulo rectángulo, es decir, Euler es quien despoja a la cantidad trigonométrica de su carácter geométrico, para poder ser tratada con los algoritmos del cálculo infinitesimal.

El tratamiento de la trigonometría realizado por Euler es prolijo en la obtención de fórmulas e igualdades. De esta forma, Euler establece la fórmula

$$\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = e^{inx},$$

y en (Curtis, 1985) se menciona su aporte para el desarrollo de las relaciones entre las funciones trigonométricas y funciones de ángulo múltiples, por ejemplo, $\operatorname{sen}^3 x = (3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)/4$. Euler además de establecer a la función trigonométrica en el análisis (después de una larga, controvertida y agitada discusión), una segunda invención concerniente a lo trigonométrico: la serie trigonométrica. En (Katz, 1987) se afirma que Euler introdujo series trigonométricas en un artículo sobre la cuestión de las desigualdades en los movimientos de Saturno y Júpiter. Y aunque se mencionó que la trigonometría se había vuelto independiente de la astronomía, en este momento de la historia habían unas aplicaciones diferentes de ella, de ahí que el uso de la función trigonométrica no está conectada con la solución de triángulos, sino por el aspecto del movimiento en la mecánica celeste, la clara percepción de la característica periódica de la función seno y coseno. Euler también introdujo la serie trigonométrica en los debates iniciales con D'Alembert y Daniel Bernoulli sobre la cuestión de la cuerda vibrante.

En el escenario del problema de la cuerda vibrante, se gestan las apreciaciones sobre las similitudes de la gráfica en forma de onda de las funciones trigonométricas y la forma que adopta la cuerda al vibrar, siendo importante esta concepción en la teoría de la música, de donde Daniel Bernoulli hizo sus aportes. Bernoulli argumentaba que la forma de una cuerda vibrante era

sociatrochoidis (esto fue antes de la introducción del término curva sinusoidal) (Shenitzer & Luzin, 1998). Fourier utilizó estas series para modelar el flujo de calor, un problema paralelo en donde se exhibe el uso y las aplicaciones más avanzadas de lo que ahora se conocen como sumas infinitas de las funciones seno y coseno, la serie de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

y su resultado paradigmático de la representabilidad de las funciones a través de esta serie, suscitó diversos resultados y contribuyó de manera tangencial, al origen de la teoría de conjuntos por parte de George Cantor.

El proceso histórico del paso de la trigonometría del triángulo a la trigonometría de las funciones, se presenta entonces lento y con obstáculos epistemológicos: la imposibilidad de concebir de una forma diferente las cuerdas-líneas del círculo para ser usadas en la modelación de movimiento periódico; asimismo se afirma en (Katz, 1987) que las funciones trigonométricas, en los inicios del cálculo, pudieron haber sido evitadas, porque nadie vio ningún uso razonable para ellas en el momento. Este es el hecho problemático en la enseñanza de la trigonometría, pues aunque el seno y las demás relaciones trigonométricas se encuentran por primera vez como las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, debe ser hasta el momento evidente que el uso de los triángulos no es sólo la periferia al tema de la trigonometría, aunque no puede ser evitada totalmente. Todas las aplicaciones que son empleadas gracias a la función trigonométrica como tal, son libres al enfoque del triángulo; por ejemplo, en el flujo de calor, la difusión de sustancias a través de fluidos como en problemas de climatología, en aplicaciones al medio digital, a problemas propios de la matemática, en la aproximación de soluciones a ecuaciones diferenciales, muestran que aunque el seno está siempre vinculado a su patrimonio triangular, se hace interesante la posibilidad de definir, desarrollar y aplicar la trigonometría en toda su abundante gloria sin ningún triángulo a la vista.

Este es el desafío que se presenta en (Rosenberg, 1958), quien argumenta que el reto en la escuela es establecer una trigonometría dinámica, debido a la necesidad que hay de una transformación que responda a los desarrollos modernos de la ciencia, la matemática y la educación. Rosenberg afirma que la creación de una trigonometría verdaderamente innovadora y

dinámica debería intentar utilizar los conceptos de la matemática moderna, más que la integración de la trigonometría clásica a temas de la matemática de la secundaria. Para llevar a cabo el cambio hacia una trigonometría dinámica (funcional), debe tenerse en cuenta que la trigonometría no puede ser sólo el estudio enfocado hacia la solución de triángulos, además que debe intentar concebirse como un amplio y general campo de las matemáticas en las que el punto de vista geométrico es sólo una de las muchas interpretaciones. Por su parte, la propuesta que presenta el (MEN, 2006) en los estándares, respecto a la función trigonométrica ubica este concepto como parte del pensamiento espacial y variacional, que toma como concepto principal la periodicidad, así la idea es

- Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

El alcance de estos objetivos está claramente sujeto a una visión desde la trigonometría de las funciones.

La segunda forma de mirar cómo históricamente se alcanza y constituye el concepto de función trigonométrica, es prestando atención a su naturaleza, el hecho de que se sitúe en la categoría de *funciones trascendentes*. En (Montiel, 2005) se resalta el hecho de que la didáctica de las funciones no puede abordarse desde la generalidad del objeto matemático, sino desde la particularidad de cada tipo de función y las condiciones que se gestaron para su construcción. Teniendo presente que las funciones históricamente tienen sus elementos iniciales en la noción de curva, cumpliendo su itinerario *curva-ecuación-función*, el desarrollo de la noción de función trigonométrica puede mirarse a través de estos movimientos de *curva-ecuación* y *ecuación-función*.

El primer movimiento se presenta en el trabajo de Newton, como ya se había expresado antes. Así, en (Buendía & Montiel, 2009) se menciona el hecho que la medida de la semicuerda en función del ángulo central constituye la cantidad que surge del círculo pero tomándolo como una curva, sin embargo, fue la cuadratura de esa curva la que originó la expresión en serie infinita de la función seno, una expresión algebraica de lo trascendente. Newton presentó en el hallazgo de la serie de potencias del seno, la representación en forma algebraica de una curva

trascendente (la curva sinusoidal), un problema que había sido heredado de la geometría de Descartes. La relevancia de ello tiene que ver con el hecho de que históricamente había un rechazo desde la matemática griega a las curvas mecánicas/trascendentes; Descartes había concluido que este tipo de curvas no se podían adaptar a través de expresiones algebraicas, sin embargo, fue precisamente el tratamiento de estas curvas por medio de las series de potencia, que se iba a desarrollar de manera transversal el concepto mismo de función. La representación de la curva seno a través de una suma infinita de potencias de una variable, habla de la naturaleza del concepto función trigonométrica. Ésta no es de naturaleza algebraica, en palabras de Leibniz *trasciende* cualquier expresión algebraica.

El segundo movimiento se presenta nuevamente por obra de Euler, quien clasifica las funciones trigonométricas dentro de la categoría de las funciones trascendentes, especificando claramente cómo se entiende este tipo de funciones. En la *Introductio* Euler utilizó la palabra trascendente para distinguir entre las operaciones algebraicas y no algebraicas, estas últimas serían las de naturaleza trascendente, en este caso, las cantidades que surgen del círculo. De esta manera, la función trigonométrica definida a través series de potencias, exhibe su propiedad natural, una función que es formulada también por medio de una expresión infinita, y es aquí donde se muestra claramente que es una función independiente de nociones geométricas. Es en este tratado que Euler coloca el concepto de función como una de las columnas del análisis, después de todo, esta disciplina tomó para su objetivo la determinación de funciones por medio de ecuaciones diferenciales. En (Panza, 2007) se discute este aspecto trascendente de la función trigonométrica, ya que detrás de los procedimientos de Euler, las funciones definidas no sólo se pueden determinar a través de ecuaciones, sino que son solución de ecuaciones no algebraicas, ecuaciones que dependen de la introducción de operadores no algebraicos sobre las funciones mismas, como la diferenciación. En este orden de ideas, aunque se piense que Euler en la *Introductio* caracteriza las funciones trascendentes trigonométricas aparentemente como objetos ya dados, se había denotado su naturaleza original, desde su uso para el método de solución de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en 1743.

Puede decirse entonces, que la función trigonométrica pertenece pues, a un nivel alto en el campo de la trigonometría. Históricamente se ha mostrado que ella no se construye solamente bajo la articulación del triángulo rectángulo a la circunferencia unitaria, sino que es un objeto

que responde y se adapta a herramientas matemáticas avanzadas que no alcanzan a ser trabajadas en la escuela, como las series de potencias, la longitud de arco, el movimiento periódico, las ecuaciones diferenciales y las series de Fourier. Montiel (2005) afirma que el fenómeno didáctico que se presenta en la enseñanza de las funciones al abordarse desde la particularidad epistemológica de cada tipo de función, lleva a realizarse la pregunta: “¿pueden aprenderse por igual, desde cualquier perspectiva, las funciones algebraicas que las trascendentes?” (Montiel, 2005, pág. 17). Consideramos a partir de lo reportado en este documento, que la aprehensión del concepto función trigonométrica está sujeta a muchos elementos que salen de la periferia del triángulo rectángulo, y que hacen de su enseñanza por parte de los educadores matemáticos un completo desafío. La necesidad de una transformación en la forma de estudiar y aprender la trigonometría en la escuela, que permita alcanzar las competencias propuestas por el MEN con respecto a esta función, en el deseo de poder describir y modelar los fenómenos periódicos del mundo real usando e interpretando el concepto de función trigonométrica y sus derivadas.

En este trabajo se hace entonces un llamado sobre la importancia de conocer el origen, la naturaleza epistemológica de los objetos que se enseñan en la escuela. Este conocimiento podría mejorar significativamente la enseñanza de la función trigonométrica, ya que se relacionan en su construcción nociones matemáticas interesantes, como por ejemplo la medida angular, que a través de la historia de su desarrollo se evidencia que el resultado de la transición *grado-radián* no es incidental. Sin embargo, aunque se ha mostrado la importancia de la idea anterior, en (Montiel, 2005) se explica que no es posible proveer una explicación completa de la construcción de la noción de función trigonométrica en la escuela, aun cuando se haya entendido cómo se construye esta noción de función desde un punto de vista epistemológico, estas ideas representan entonces el reto actual para los educadores matemáticos. En este sentido, según lo analizado históricamente en este trabajo, los siguientes elementos básicos que se deben tener en cuenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría son:

- Componente analítico: pues la trigonometría se ocupa de las propiedades de las funciones trascendentes, haciendo parte del análisis matemático.
- Componente geométrico: siendo parte de la geometría, como una aplicación a configuraciones geométricas y sus gráficas

- Componente algebraico: pues la trigonometría utiliza conceptos algebraicos, en el aspecto de que se adapta en forma de fórmula, ecuación y polinomios.

BIBLIOGRAFÍA.

- Aaboe, A. (1964). *Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo*. Cali - Colombia: Norma.
- Allendoerfer, C. (1965). Angles, arcs, and Archimedes. *The Mathematics Teacher*, 58(2), 82-88.
- Arquímedes. (1970). Sobre la esfera y el cilindro. En F. Vera, *Científicos Griegos* (págs. 51-52). Madrid: Aguilar.
- Bond, J. D. (1921). The Development of Trigonometric Methods down to the Close of the XVth Century. *The History of Science Society*, 4(2), 295-323.
- Boyer, C. (1947). History of the Derivative and Integral of the Sine. *The Mathematics Teacher*, 40(6), 267-275.

- Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Brendan, T. (1965). How Ptolemy constructed trigonometry tables. *The Mathematics Teacher*, 58(2), 141-149.
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. México, DF.
- Buendía, G., & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1287-1296.
- Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Vol 2. New York: Dover .
- Cantoral, R., Maldonado, S., & Montiel, G. (2004). Construyendo la noción de función trigonométrica: estrategias de aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 371-376.
- Carver, W. B. (1919). Discussions: Trigonometric Functions of What? *The American Mathematical Monthly*, 243-244.
- Chace, A. B. (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus. Volume I*. Oberlin, Ohio: Mathematical Association of America.
- Collette, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas* (Vol. I). México: Siglo XXI.
- Cooper, M. (1992). Who Name the Radian? *The Mathematical Gazette*, 76(475), 100-101.
- Curtis, W. (1985). The great inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace. *Archive for history of exact sciences*, 15-290.
- Euclides. (1991). *Elementos*. (M. L. Puertas, Trans.). Madrid: Gredos.
- Euler. (1743). Über die integration von differentialgleichungen höherer grade. Obtenido de <http://eulerarchive.maa.org/pages/E062>
- Euler. (1748). *Introduction to Analysis of the Infinite*. (J. D. Blanton, Trad.) New York: Springer-Verlag.
- Euler. (1755). *Foundations of Differential Calculus*. (J. D. Blanton, Trad.) New York: Springer-Verlag.
- Fourier, J. (1878). *The Analytical Theory of Heat*. (A. Freeman, Trad.) New York: Dover.
- Guzmán, M. d. (1983). Impactos del análisis armónico. *LLULL*, 5, 27-63.
- Heath I, T. (1921). *A history of greek mathematics. Volume I*. Oxford: Clarendon Press.
- Heath II, T. (1921). *A history of greek mathematics. Volume II*. Oxford: Clarendon Press.
- Heath, T. (1920). *The Copernicus of antiquity (Aristarchus of Samos)*. New York: The MacMillan Company.

- Heath, T. (1956). *The thirteen books of the Elements*. New York: Dover.
- Jones, P. S. (1953). Historically speaking. *The Mathematics Teacher*, 46(6), 419-426.
- Katz, V. J. (1987). The calculus of Trigonometric Functions. *Historia Mathematica*, 14, 311-324.
- Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.
- math.info. (28 de Agosto de 2016). Obtenido de apprendre-math.info/espagnol/index.htm: <http://apprendre-math.info/espagnol/historyDetail.htm?id=Klugel>
- Matos, J. (1990). The Historical Development of the Concept of Angle. *The Mathematics Educator*, 4-11.
- MEN. (2006). Estándares Básicos. Bogotá.
- Mendoza, J. (2014). *Curvas, ecuaciones y series de potencias en el desarrollo histórico de la noción de función*. Cali : Universidad del Valle.
- Merlet, J. P. (2004). A Note on the History of Trigonometric Functions. *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, 195-200.
- Miller, G. A. (1928). Archimedes and Trigonometry. *Science, New Series*, 67(1744), 555.
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. México DF: Instituto Politécnico Nacional.
- Newton, I. (1711). *Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, ac differentias; cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis* (Vol. 141). (J. P. A. J. Durán Guardado, Ed., & J. L. Arantegui, Trad.) Londres: España: Real Sociedad Matemáticas Española.
- Panza, M. (2007). Euler's Introductio in analysin infinitorum and the Program of Algebraic Analysis: quantities, functions and numerical partitions. En *Euler Reconsidered: Tercentenary Essays*. Kendrick Press.
- Patterson, L. D. (1952). Pendulums of Wren and Hooke. *Osiris*, 10, 277-321.
- Proclo. (1970). Naturaleza del ángulo. En F. Vera, *Científicos Griegos* (págs. 1165-1169). Madrid: Aguilar.
- Rickey, V. F. (2007). Some History of the Calculus of the Trigonometric Functions.
- Rosenberg, H. (1958). The changing concept of trigonometry as a school subject. *The Mathematics Teacher*, 51(4), 246-252.
- Rotaache, R. A., & Montiel, G. (2009). La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria. Aportaciones para un diseño escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25-33.
- Shenitzer, A., & Luzin, N. (1998). Function: Part I. *The American Mathematical Monthly*, 105(1), 59-67.

Simmons, G. F. (1977). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas*. México: McGraw-Hill.

Youschkevitch. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37-85.